S. Geršgorin (S. Gerschgorin), Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na*, 1931, Issue 6, 749–754

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ÜBER DIE ABGRENZUNG DER EIGENWERTE EINER MATRIX

Von S. GERSCHGORIN

(Présenté par A. Krylov, *membre de l'Académie des Sciences)*

§ **1.** Haben wir eine Matrix

$$(1) \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

wo die Elemente a_{ik} beliebige komplexe Zahlen sein dürfen, und bezeichnen wir durch z_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ ihre Eigenwerte, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} - z, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - z, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} - z \end{Vmatrix} = 0,$$

so gilt nach Bendixson und Hirsch* die Ungleichung

$$|z_k| \leqq na,$$

wo a den Maximalwert aller Zahlen $|a_{ik}|$ bedeutet.

Wir wollen im folgenden zeigen, dass man im allgemeinen viel schärfere Aussagen über die Lage der Eigenwerte machen kann.

* Sur les racines d'une équation fondamentale. Acta Mathematica, t. 25 (1900).

Wir beweisen zunächst den folgenden Satz, der einem von L. Lévy* über Matrizen mit reellen Elementen ausgesprochenen völlig analog ist.

Satz I. Sind in der Matrix (1) die Bedingungen

$$|a_{ii}| \geqq \sum_k{}' |a_{ik}|,^{**} \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{3}$$

erfüllt (wobei das Ungleichheitszeichen mindestens für einen Wert von i gilt), so ist die Determinante Δ dieser Matrix gewiss von 0 verschieden.

Zum Beweis betrachten wir das zu der Matrix (1) zugehörige homogene Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Sollte entgegen der gemachten Annahme $\Delta = 0$ sein, so hat das System (4) eine nichtverschwindende Lösung $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ (wobei diese Werte auch nicht alle einander gleich sein können). Sei $|x_\mu^0|$ die grösste unter den Zahlen $|x_i^0|$, so dass

$$|x_i^0| \leqq |x_\mu^0| \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{5}$$

Wir betrachten nun die μ-te der Gleichungen (4), welche lautet

$$a_{\mu\mu} x_\mu^0 = -\sum_k{}' a_{\mu k} x_k^0. \tag{6}$$

Aus den Ungleichungen (3) und (5) folgt aber

$$|a_{\mu\mu}|\,|x_\mu^0| > \sum_k{}' |a_{\mu k}|\,|x_k^0|,$$

was mit der Gleichung (6) unvereinbar ist. Damit ist der Satz bewiesen.***

* Sur la possibilité de l'équilibre électrique. C. R. de l'Académie des Sciences, t. XCIII (1881).

** $\sum_k{}'$ bedeutet die Summation über alle Werte von k, ausser $k = i$.

*** Eine analoge Überlegung wurde schon früher von R. Kusmin zum Beweis des L. Lévy'schen Satzes verwendet.

§ **2.** Verwenden wir den eben gefundenen Satz zur Matrix

(7)
$$\begin{Vmatrix} a_{11}-z, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-z, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn}-z \end{Vmatrix}$$

so finden wir, dass die zugehörige Determinante von 0 verschieden ist, falls die Bedingungen

(8)
$$|a_{ii}-z| \geqq \sum_k{}' |a_{ik}| \qquad (i=1, \ldots n)$$

(wo das Ungleichheitszeichen mindestens für ein i gilt) erfüllt sind.

Die geometrische Interpretation dieses Resultates führt uns auf den folgenden Satz.

Satz II. Die Eigenwerte $z_1, \ldots z_n$ der Matrix (1) liegen nur innerhalb des abgeschlossenen Gebietes G, das aus allen Kreisen K_i $(i=1, \ldots n)$ der z-Ebene mit den Mittelpunkten a_{ii} und zugehörigen Radien

$$R_i = \sum_k{}' |a_{ik}|$$

besteht.

Es kann vorkommen, dass m von den Kreisen K_i $(m=1, \ldots n)$ zu einem zusammenhängenden Gebiet $H_{(m)}$ zusammenfallen, wobei alle übrigen Kreise ausserhalb dieses Gebietes liegen. Über die Verteilung der Eigenwerte unter verschiedenen so definierten Gebieten $H_{(m)}$ kann der folgende Satz ausgesprochen werden.

Satz III. In jedem Gebiet $H_{(m)}$ liegen genau m Eigenwerte der Matrix (1).

Es sei $H_{(m)}$ aus den Kreisen

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m}$$

gebildet. Wir betrachten neben der Matrix A eine andere Matrix A', bei welcher alle nicht in der Diagonale stehende Elemente der Zeilen

$$i_1, i_2, \ldots i_m$$

verschwinden, die übrigen aber denjenigen der Matrix A gleich sind. Die Matrix A' hat sicher die Eigenwerte

$$a_{i_1 i_1}, a_{i_2 i_2}, \ldots a_{i_m i_m}.$$

Nun fangen wir an die oben erwähnten verschwindenden Elemente der Matrix A' von 0 bis zu ihren Werten in der Matrix A so stetig zu verändern, dass ihre absoluten Beträge monoton wachsen. Die Kreise

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m}$$

wachsen dabei stetig, bleiben jedoch immer von den übrigen festen Kreisen K_i der z-Ebene getrennt. Da die Eigenwerte der Matrix stetig von ihren Elementen abhängen, folgt daraus, dass in den Kreisen

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m}$$

immer m Eigenwerte liegen müssen. Die Zahl der Eigenwerte in $H_{(m)}$ kann nicht m überschreiten, da ihre gesamte Anzahl in allen Gebieten $H_{(m)}$ genau n gleich sein muss. Damit ist unser Satz bewiesen.*

Liegen alle Kreise K_i getrennt voneinander, was durch die Bedingungen

$$(9) \qquad |a_{ii} - a_{jj}| \geqq \sum_k{}' |a_{ik}| + \sum_k{}' |a_{jk}| \quad (i = 1, \ldots n;\ j = 2, \ldots n;\ j > i)$$

ausgedrückt werden kann, so sind alle Eigenwerte voneinander abgegrenzt. Da eine Gleichung mit reellen Koeffizienten nur paarweise konjugierte komplexe Wurzeln besitzen kann, folgt daraus unter anderen der folgende Satz.

Satz IV. Sind alle Elemente der Matrix (1) reel und bestehen die Relationen (9), so sind die sämtlichen Eigenwerte dieser Matrix reel.

§ **3.** In allen vorstehenden Sätzen kann man statt der Zeilen die Spalten heranziehen. Wir gelangen in dieser Weise im allgemeinen zu einem neuen System G' von Kreisen K_i', welche auch zur Abgrenzung der Wurzeln dienen können. Wir können auch mehrere solche Kreissysteme bekommen, indem wir unsere Matrix verschiedenen Transformationen unterwerfen, bei

* Der Satz bleibt auch dann richtig, wenn sich $H_{(m)}$ mit den übrigen Kreisen von aussen berührt, so dass man bei Bestimmung der Gebiete $H_{(m)}$ solche Berührungen ausser acht lassen kann.

denen das Spektrum sich nicht ändert. Man gelangt dabei im allgemeinen zu einer besseren Abgrenzung der Eigenwerte, da die letzteren nur in denjenigen Punkten liegen dürfen, welche sämtlichen Kreissystemen gehören. Genauer: es seien die Kreissysteme G_λ ($\lambda = 1, \ldots l$) vorhanden, von denen jedes aus den Kreisen $K_i^{(\lambda)}$ ($i = 1, \ldots n$) besteht. Wir stellen uns vor, dass die Kreise von G_λ in n_λ ($n_\lambda \leqq n$) voneinander getrennte zusammenhängende Gebiete

$$H_1^{(\lambda)}, H_2^{(\lambda)}, \ldots H_{n_\lambda}^{(\lambda)}$$

zerfallen. Zu jedem Gebiet $H_j^{(\lambda)}$ ($j = 1, \ldots n_\lambda$) soll $m_j^{(\lambda)}$ von den Kreisen $K_i^{(\lambda)}$ gehören. Wir bezeichnen weiter durch $S_{j_1, \ldots j_l}$ ein Gebiet, welches allen Gebieten

$$H_{j_1}^{(1)}, H_{j_2}^{(2)}, \ldots H_{j_l}^{(l)}$$

gemeinsam ist (wo j_λ bestimmte Zahlen $\leqq n_\lambda$ bedeuten). Dann liegen im Gebiet $S_{j_1, \ldots j_l}$ (es kann auch nicht zusammenhängend sein) genau $m_{j_1, \ldots j_l}$ Eigenwerte, wo $m_{j_1 \ldots j_l}$ die kleinste der Zahlen

$$m_{j_1}^{(1)}, m_{j_2}^{(2)}, \ldots m_{j_l}^{(l)}$$

ist.

Wir können diese Überlegung in folgender Weise verwenden. Es sei $H_{(m)}$ ein aus den Kreisen

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m} \quad (m < n)$$

bestehendes zusammenhängendes Gebiet, welches von den anderen Kreisen K_i getrennt liegt. Wir unterwerfen unsere Matrix A einer Transformation mit Hilfe der Matrix $S = ||s_{ik}||$, wo

$$s_{ik} = 0 \qquad (i \neq k)$$

$$s_{ii} = \begin{cases} \alpha & (i = i_1, i_2, \ldots i_m) \\ 1 & (i \neq i_1, i_2, \ldots i_m). \end{cases}$$

Die Zahl $0 < \alpha < 1$ ist noch später genauer zu definieren. Die transformierte Matrix $B = SAS^{-1}$ entsteht aus A durch Multiplikation der Reihen $i_1, i_2, \ldots i_m$ mit α und Division der entsprechenden Spalten durch α. Wir können α so wählen, dass die Kreise

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m}$$

des Bereiches $H_{(m)}$ verkleinert werden, ohne die übrigen Kreise K_i, welche sich dabei vergrössern, zu schneiden (es darf höchstens eine Berührung von aussen eintreten). Damit erreichen wir eine bessere Abgrenzung der in $H_{(m)}$ liegenden Eigenwerte.

Wir wollen näher auf den Fall $m = 1$ eingehen. Es sei K_i ein isoliert liegender Kreis. Die Bedingungen für α lauten dann

$$(10)\qquad |a_{ii} - a_{jj}| \geqq \alpha \sum{}' |a_{ik}| + \frac{1}{\alpha} |a_{ji}| + \sum_k{}'' |a_{jk}|, \qquad (j = 1, \ldots n;\ j \neq i)$$

wobei $\sum\limits_k{}''$ die Summation über alle k mit Ausnahme $k = i$ und $k = j$ bedeutet. Man kann, wie leicht zu ersehen ist, allen über α gestellten Bedingungen genügen, indem wir setzen*

$$\alpha = \max \frac{|a_{ii} - a_{jj}| - \sum\limits_k{}'' |a_{jk}| - \sqrt{(|a_{ii} - a_{jj}| - \sum\limits_k{}'' |a_{jk}|)^2 - 4 |a_{ji}| \sum\limits_k{}' |a_{ik}|}}{2 \sum\limits_k{}' |a_{ik}|}.$$

Wir kommen damit zum folgenden Resultat.

Satz V. Ist K_i ein isoliert liegender Kreis des Gebietes G, so liegt der zugehörige Eigenwert innerhalb des zu K_i konzentrischen kleineren Kreises K_i' mit dem Radius

$$R_i' = \alpha R_i =$$

$$= \max \frac{1}{2} \left[|a_{ii} - a_{jj}| - \sum_k{}'' |a_{jk}| - \sqrt{\left(|a_{ii} - a_{jj}| - \sum_k{}'' |a_{jk}|\right)^2 - 4 |a_{ji}| \sum_k{}' |a_{ik}|} \right].$$

---

* Das Zeichen max bedeutet das Maximum der nachstehenden Grösse für alle Werte von j ausser $j = i$.