一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1，设 A,B 是两个事件，$P(B)=0.7,P(\overline{A}B)=0.3$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ = 0.6；

2，三个人独立破译一密码，他们单独译出这一密码的概率分别是 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则此密码被译的概率为 0.6；

3，已知随机变量 X 只能取 $-1,0,1,2$ 四个数值，其相应的概率依次是 $\frac{1}{2c},\frac{3}{4c},\frac{5}{8c},\frac{2}{16c}$，则 $c=$ 2；

4，设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 落入 $(0,4)$ 的概率是 1；

5，设 $X_1,X_2,...,X_n,...$ 是独立同分布的随机变量，且 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2,i=1,2,...$，令 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<3\sigma\right\}\ge\frac{8}{9}$.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1，设事件 A,B 为对立事件，则（ B ）不成立：

（A）$P(\overline{A}\overline{B})=0$ （B）$P(B|A)=\phi$ （C）$P(\overline{A}|B)=1$ （D）$P(A\cup B)=1$

2，下列函数中，（ B ）可以作为连续随机变量的概率密度函数：

（A）$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi\\ 0, & otherwise\end{cases}$ （B）$f(x)=\begin{cases}-\sin x, & \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi\\ 0, & otherwise\end{cases}$

（C）$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi\\ 0, & otherwise\end{cases}$ （D）$f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi\\ 0, & otherwise\end{cases}$

3，设随机变量 $X\sim N(0,1^2)$，则 $Y=$（ C ）$\sim N(\mu,\sigma^2)$

（A）$\frac{X-\mu}{\sigma}$ （B）$\sigma X-\mu$ （C）$\sigma X+\mu$ （D）$\sigma(X+\mu)$

4，若随机变量 X,Y 的方差 $D(X),D(Y)$ 都存在，且 $D(X)\neq0,D(Y)\neq0$，$E(XY)=E(X)E(Y)$，则（ B ）

（A）X,Y 一定相互独立 （B）X,Y 一定不相关

（C）$D(XY)=D(X)D(Y)$ （D）$D(X-Y)=D(X)-D(Y)$

5，若相互独立的随机变量 X,Y 的方差分别是 4 和 2，则 $3X-2Y$ 的方差为（ D ）

（A）8　　　（B）16　　　（C）28　　（D）44

三、计算题（每小题 13 分，共 65 分）

1，某商场出售的灯泡来自甲、乙、丙三个工厂，甲厂产品占 80%，合格率为 90%，乙厂产品占 10%，合格率为 95%，丙厂产品占 10%，合格率为 80% .

（1）某顾客购买了一灯泡，求它是合格品的概率；

（2）若顾客购买了一灯泡，发现是不合格品，求它是甲厂生产的概率。

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示产品是由甲、乙、丙厂生产；B 表示产品是合格品

（1）$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.8\times0.9+0.1\times0.95+0.1\times0.8=0.895$ -------6 分

（2）$P(\overline{B})=1-P(B)=0.105$--------------2 分

$P(A_1|\overline{B})=\dfrac{P(A_1)P(\overline{B}|A_1)}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.8\times0.1}{0.105}=0.762$ -----------5 分（共 13 分）

2，设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=Ae^{-|x|},-\infty<x<\infty$，求

（1）$A=?$ （2）$P\{0<X<1\}=?$ （3）分布函数 $F(x)$.

解:（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，所以，$A\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx\right)=1$，解得 $A=\dfrac{1}{2}$ ------3 分

即，$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<\infty$

（2）$P\{0<X<1\}=\int_0^1 \dfrac{1}{2}e^{-x}dx=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$---------3 分

（3）当 $x\le0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{t}dt=\dfrac{1}{2}e^{x}$ ---------3 分

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}e^{-t}dt=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$----------3 分

所以，分布函数为：$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, x\le0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, x>0\end{cases}$ --------1 分（共 13 分）

3，设二维离散型随机向量(X,Y)的联合分布律为：

$X\backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

试求（1）$E(X)$，（2）$D(X)$，（3）$\mathrm{cov}(X,Y)$，（4）X,Y是否相互独立；

解：X的边缘分布律：

X	-1	$\frac{1}{2}$	3
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$

Y的边缘分布律：

Y	-2	-1	0
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$

----------2 分

（1）$E(X)=-1\times\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{12}+3\times\frac{4}{12}=\frac{17}{24}$ -----------2 分

（2）$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{5}{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{12}+3^2\times\frac{4}{12}=\frac{167}{48}$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{167}{46}-\left(\frac{17}{24}\right)^2=\frac{1715}{576}$ -------3 分

（3）

$$E(XY)=(-1)\times(-2)\times\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\times(-2)\times\frac{2}{12}+3\times(-2)\times\frac{2}{12}$$

$$=(-1)\times(-1)\times\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\times(-1)\times\frac{1}{12}+3\times(-1)\times0$$ -------1 分

$$=-\frac{23}{24}$$

$$E(Y)=-2\times\frac{5}{12}+(-1)\times\frac{2}{12}+0\times\frac{5}{12}=-1$$

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{23}{24}-(-1)\times\left(\frac{17}{24}\right)=-\frac{1}{4}$ ------3 分

（4）因为$P\{X=3,Y=-1\}=0\neq P\{X=3\}P\{Y=-1\}=\frac{8}{144}$

所以 X,Y 不相互独立。---------2 分（共 13 分）

4，设二维连续型随机向量 $\left(X,Y\right)$ 的联合概率密度函数为：

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}ce^{-(3x+4y)}, x>0, y>0\\ 0, \quad otherwise\end{cases}$$

试求（1）$c=?$ （2）边缘概率密度 $f_X\left(x\right), f_Y(y)$，（3）$X,Y$ 是否相互独立；

（4）$P\left\{0<X\le 1, 0<Y\le 2\right\}$；

解：（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dxdy=1$，所以，$c\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dy=1$，解得 $c=12$

故，$f\left(x,y\right)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, x>0, y>0\\ 0, \quad otherwise\end{cases}$ --------3 分

（2）$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dy, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}=\begin{cases}3e^{-3x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$

$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dx, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}=\begin{cases}4e^{-4y}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$ --------4 分

（3）因为 $f_X\left(x\right)f_Y(y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, x>0, y>0\\ 0, \quad otherwise\end{cases}=f\left(x,y\right)$

所以，X,Y 相互独立；----------3 分

（4）$P\left\{0<X\le 1, 0<Y\le 2\right\}=\int_0^1 dx\int_0^2 12e^{-(3x+4y)}dy=\left(1-e^{-8}\right)\left(1-e^{-3}\right)$----3 分（共 13 分）

5，某电站供应 10000 户用电，假设用电高峰时，每户用电的概率为 0.9，问同时用电户在 9030 户以上的概率是多少？

解：设 X 表示用电高峰时的用户总数，则 $X\sim B\left(10000, 0.9\right)$ ---------2 分

$E\left(X\right)=10000\times 0.9=9000$，$D\left(X\right)=10000\times 0.9\times\left(1-0.9\right)=900$ --------4 分

于是，$P\left\{X>9030\right\}=1-P\left\{X\le 9030\right\}=1-P\left\{\frac{X-9000}{\sqrt{900}}\le\frac{9030-9000}{\sqrt{900}}\right\}$

$=1-\Phi\left(1\right)=1-0.8413\quad 0$ ---------7 分（13 分）

四、证明题（5 分）

设$P\left(A\right)>0$，试证：$P\left(B\mid A\right)\geq 1-\dfrac{P\left(\overline{B}\right)}{P\left(A\right)}$

证明：因为$P\left(A\cup B\right)\leq 1$ ------1 分

所以，$P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)\leq 1$------1 分

又因为$P\left(A\right)>0$，所以$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\mid A\right)$ ---------1 分

故，上式变成：$P\left(A\right)-P\left(A\right)P\left(B\mid A\right)\leq 1-P\left(B\right)$----------1 分

即，$1-P\left(B\mid A\right)\leq\dfrac{P\left(\overline{B}\right)}{P\left(A\right)}$，整理后可得：$P\left(B\mid A\right)\geq 1-\dfrac{P\left(\overline{B}\right)}{P\left(A\right)}$------1 分（共 5 分）