2020-2021 学年　第 2 学期

《高等数学AII》（A）卷　参考答案及评分标准（共 4 页）

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. -1　　2. 平行　　3. $2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y$

4. 收敛　　5. 连续　　6. 3π

二、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1、B　2、C　3、D　4、C

三、计算题一（每小题 8 分，共 24 分）

1. 因为所求直线与已知的两平面平行，所以所求直线的方向向量可取为

$$s=\begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}=(3,2,6).$$ ………………… 5 分

于是，所求的直线方程为

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{6}.$$ ………………… 8 分

2. $$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y},$$ ………………… 3 分

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2},$$ ………………… 6 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\frac{1}{y^2}.$$ ………………… 8 分

3. 令 $z=z(x,y)$，方程两边求导，可得

$$\begin{cases} 2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-3\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ -2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-3\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$ ………………… 4 分

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{3-2z}$$ ………………… 6 分

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2z-3}$$ ………………… 8 分

四、计算题二（每小题 7 分，共 14 分）

1. 视 D 为 X 型区域，即 $D:0\le x\le 1,0\le y\le x$.

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x+y)\mathrm{d}y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{分}$$

$$=\int_0^1\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{分}$$

$$=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7\text{分}$$

2. 曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x,\\ y=x^3,\end{cases}\quad 0\le x\le 1$$

从而

$$\int_L y ds=\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{分}$$

$$=\frac{1}{54}(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{54}(10\sqrt{10}-1)\,. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7\text{分}$$

五、计算题三（每小题 6 分，共 12 分）

1. Σ 在 xOy 坐标平面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1-x\}$.

由平面方程可得 $z=1-x-y$，于是 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$.

$$\iint_\Sigma xy\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}xy\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5\text{分}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{24}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{分}$$

2. 由高斯公式，

$$\oiint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x=3\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

其中 Ω 由曲面 Σ 所围成.

空间区域可写成 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D_{xy},x^2+y^2\le z\le 1\}$，其中 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$. 从而

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)[1-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^3-r^5)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.$$

综上，

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$ ················· 6 分

六、解答题（每小题 6 分，共 12 分）

1. 该积分与路径无关. ················· 1 分

理由如下：令 $P=3x^2y$，$Q=x^3+1$，显然它们在整个 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，且 $P_y=Q_x=3x^2$. 从而，该积分与路径无关. ················· 4 分

令点 $C=(1,0)$，AC 为从点 A 沿 x 轴到点 C 的直线段，CB 为从点 C 沿 y 轴正方向到点 B 的直线段. 因为该积分与路径无关，所以

$$\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+1)\mathrm{d}y=\int_{AC}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+1)\mathrm{d}y+\int_{CB}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1[3x^2\cdot 0+(x^3+1)\cdot 0]\mathrm{d}x+\int_0^1[3y\cdot 0+(1+1)]\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}y=2.$$ ················· 6 分

2. 利用间接法，可得

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}\ .$$ ················· 2 分

令 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{2^{n+1}}$，$t=x-1$，级数改写成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$.

因 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=2$. ················· 4 分

收敛区间为 $|t|<2$ 即 $-1<x<3$. 当 $x=-1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2}$，该级数发散；当 $x=3$ 时，级数成为 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$，该级数也发散. 综上，收敛域为 $(-1,3)$. ················· 6 分

七、证明题（4 分）

显然，有 $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$，对一切 n 都成立. 因 $\sum |u_n|$ 收敛，依比较判别法，$\sum (u_n + |u_n|)$ 也收敛. 注意到 $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$，结合收敛级数的运算性质，可得 $\sum u_n$ 也收敛. ………………… 2 分

下证 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛.

由 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 以及 f 在 $x = 0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，可得

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

从而 f 在 $x = 0$ 处的一阶泰勒展开式为 $f(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_x) x^2$，其中 ξ_x 介于 0 与 x 之间. 显然，一定存在 N，当 $n \ge N$ 时，$\frac{1}{n}$ 属于该邻域. 又 $f''(x)$ 在该领域内连续，当然在 $[0, \frac{1}{N}]$ 上也连续，从而存在 $M > 0$，使得

$$|f''(x)| \le M, \forall x \in [0, \frac{1}{N}]$$

当 $n \ge N$ 时，我们有

$$|f(\frac{1}{n})| = \frac{1}{2n^2} |f''(\xi_{1/n})| \le \frac{M}{2n^2}$$

最后，由 $\sum \frac{M}{2n^2}$ 的收敛性，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛. ………… 4 分