

目录

0 考点提要	2
0.1 重要知识点	2
0.2 常见考点	2
1 随机事件与概率	2
1.1 加法公式与乘法公式	2
1.2 全概率公式和 Bayes 公式	3
1.3 其他	4
2 随机变量及其概率分布	4
2.1 已知密度函数 $f(x)$, 求分布函数 $F(x)$	4
2.2 随机变量的函数	5
2.3 正态分布	6
3 多维随机变量及其概率分布	7
3.1 边缘概率密度的求法	7
3.2 独立性的判断	7
3.3 随机变量函数的分布	8
4 随机变量的数字特征	8
4.1 期望的性质与计算	9
4.2 方差的性质与计算	9
4.3 协方差与相关系数	10
4.4 切比雪夫不等式	10
5 概率极限定理	11

0 考点提要

0.1 重要知识点

- (1) 六种重要的分布.
- (2) 六种重要分布的期望与方差.
- (3) $D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$, 其中 X 与 Y 相互独立.
- (4) 密度函数 $f(x)$ 的概念与求法.
- (5) 分布函数 $F(x)$ 的概念与求法.
- (6) 边缘密度函数、联合密度函数的概念与求法.
- (7) 全概率公式和 Bayes 公式.
- (8) 中心极限定理.
- (9) 正态分布的标准化: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.
- (10) 独立性与相关性.

0.2 常见考点

- (1) 全概率公式和 Bayes 公式.
- (2) 求分布函数 $F(x)$.
- (3) 求 $Y = g(X)$ 的密度函数.
- (4) 求边缘密度函数、联合密度函数.
- (5) 正态分布的性质.
- (6) 期望与方差的性质.
- (7) 期望与方差的计算.
- (8) 独立性、相关性的判断.
- (9) 中心极限定理.

1 随机事件与概率

主要问题: 事件间的关系与运算, 条件概率, 乘法公式, 全概率公式, 贝叶斯公式, 事件的独立性, 伯努利概型.

常见考点: 全概率公式和 Bayes 公式; 加法公式与乘法公式.

1.1 加法公式与乘法公式

和事件的概率 $P(A \cup B)$ 在不同场合下的求法:

- 一般形式:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

- 若 A, B 互不相容: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 若 A, B 相互独立:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \overline{B}) \\ &= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}). \end{aligned}$$

积事件的概率 $P(AB)$ 的求法:

- 一般形式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

- 若 A, B 相互独立:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

乘法公式来自于 **条件概率公式**:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

1.2 全概率公式和 Bayes 公式

全概率公式

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n). \end{aligned}$$

Bayes 公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (1)$$

Bayes 公式本质上是条件概率公式:

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)},$$

只是其分子、分母进一步分别使用了乘法公式和全概率公式.

- 全概率公式表达了“综合考虑引起结果 A 的各种原因 B_i , 计算导致结果 A 出现的可能性的的大小”; 如果一个事件的发生有多个“诱因”, 就要用到全概率公式.
- Bayes 公式则反映了“当结果 A 出现时, 它是由原因 B_i 引起的可能性的的大小”. Bayes 公式常用来追究责任, 或者“执果索因”. 也就是计算各个“诱因”对事件发生的“贡献”.

典型例题:

例 1 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号 0 和 1. 由于通讯系统受到干扰, 当发出信号 0 时, 收报台未必收到信号 0, 而是分别以 0.8 和 0.2 的概率收到 0 和 1; 同样, 发出 1 时分别以 0.9 和 0.1 的概率收到 1 和 0. 如果收报台收到 0, 问它没收错的概率? (答案: 12/13.)

1.3 其他

- 抽签公平性. (见教材 P.13 例 1.3.3)
- $A \cup B = (A - B) \cup B = (A - AB) \cup B$ 的灵活应用.
- 建议要看的题型
 - 事件的关系与运算: P.35 习题 6, 7.
 - 全概率公式和 Bayes 公式: P.36 习题 28.
 - 伯努利概型: P.38 习题 8.

2 随机变量及其概率分布

主要问题: 密度函数 $f(x)$, 分布函数 $F(x)$ 的定义与性质; 六种重要分布; 随机变量的函数的分布.

常见考点: $f(x)$, $F(x)$ 的性质; 求密度函数 $f(x)$; 求分布函数 $F(x)$; 求 $Y = g(X)$ 的密度函数.

2.1 已知密度函数 $f(x)$, 求分布函数 $F(x)$

密度函数 $f(x)$ 一般是分段函数. 由 $f(x)$ 求 $F(x)$, 本质上是分段函数求积分的问题, 是大家的薄弱环节. 要引起重视!

典型例题:

例 2 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

① 确定常数 k ; ② 求 X 的分布函数 $F(x)$; ③ 求 $P\{1 < X \leq 3.5\}$.

解 ① 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 得

$$\int_0^3 kx dx + \int_3^4 (2 - \frac{x}{2}) dx = 1,$$

解得 $k = \frac{1}{6}$.

更为详细的解释是: 由积分的区域可加性, 得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \int_4^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 kx dx + \int_3^4 (2 - \frac{x}{2}) dx + \int_4^{+\infty} 0 dx \\ &= \int_0^3 kx dx + \int_3^4 (2 - \frac{x}{2}) dx. \end{aligned}$$

从而 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

② 对 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$,


- $x < 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.
- $0 \leq x < 3$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{t}{6} dt = \frac{x^2}{12}$.
- $3 \leq x < 4$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^3 \frac{t}{6} dt + \int_3^x (2 - \frac{t}{2}) dt \\ &= -3 + 2x - \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

- $x \geq 4$ 时, $F(x) = 1$.

即

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{12}, & 0 \leq x < 3, \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4}, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

 做完一定要验算: $F'(x) = f(x)$.

③ $P\{1 < x \leq 3.5\} = F(3.5) - F(1) = 41/48$. ■

2.2 随机变量的函数

已知连续型随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$, 两种方法:

- 分布函数微分法;
- 积分转化法.

典型例题:

例 3 设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 先求 Y 的分布函数. (请自己注明下述各个步骤的理由.)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{2X + 8 \leq y\} \\ &= P\left\{X \leq \frac{y-8}{2}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx. \end{aligned}$$

注意到积分上限函数求导法则 $\left(\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(x) dx\right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, 上式两端关于 y 求导, 得

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \cdot \left(\frac{y-8}{2}\right)'_y \\ &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{y-8}{2}}{8}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

上述方法体现为下面的一般结论. 称为**单调函数公式法**:

已知随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对随机变量 $Y = g(X)$, 要求 $f_Y(y)$. 则对函数关系 $y = g(x)$, 给出反函数 $x = h(y)$, 有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f(h(y)) \cdot |h'(y)|, & a < h(y) < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中函数 $y = g(x)$ 处处可导且**单调**.

积分转化法参看教材 P.77.

2.3 正态分布

正态分布的全部细节都要非常清楚!

- 正态分布的标准化: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

对一般的随机变量也可以“标准化”，即使它不一定服从正态分布. 事实上, X 标准化变量为

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}},$$

则

$$E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1.$$

- 正态分布的再生性: 设 X, Y 相互独立, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2), \quad (2)$$

$$aX \pm bY \sim N(a\mu_1 \pm b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2). \quad (3)$$

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

- $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$.

例 4 设随机变量 X, Y 相互独立, $X \sim N(-1, 2), Y \sim N(1, 3)$, 则 $X + 2Y \sim$ _____, $X - 2Y \sim$ _____.

解 $X + 2Y \sim N(1, 14), X - 2Y \sim N(-3, 14)$. ■

3 多维随机变量及其概率分布

主要问题: 边缘概率密度, 联合概率密度; 随机变量的独立性; 随机变量函数的分布

常见考点: 求边缘概率密度 $f_X(x)$; 独立性的判断; 卷积公式.

3.1 边缘概率密度的求法

计算公式:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

重要题型: P.95 例 3.3.2.

3.2 独立性的判断

独立性的判断, 即看下列式子是否成立:

$$\text{联合} = \text{边缘} \times \text{边缘}.$$

重要题型: P.105 例 3.4.4.

3.3 随机变量函数的分布

例 5 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解 (I) 注意到 $f(x, y)$ 在 X -型区域 $\begin{cases} 0 < y < 2x, \\ 0 < x < 1 \end{cases}$ 上有非零表达式, 该区域可以转化为 Y -型区域 $\begin{cases} \frac{y}{2} < x < 1, \\ 0 < y < 2. \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{2x} dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^1 dx, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

(II) 用积分转化法. 此时 $g(x, y) = 2x - y$. 对任何有界连续函数 $h(z)$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h[g(x, y)] f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} h(2x - y) \cdot 1 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{2x}^0 h(z)(-1) dz \right) dx && (\text{换元 } z = 2x - y) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} h(z) dz \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(h(z) \int_{\frac{z}{2}}^1 dx \right) dz && (\text{交换积分次序}) \\ &= \int_0^2 h(z) \left(1 - \frac{z}{2} \right) dz, \end{aligned}$$

得 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

4 随机变量的数字特征

主要问题: 期望的性质、计算; 方差的性质、计算; 协方差与相关系数的计算.

常见考点: 求 $E(x), D(x)$; 计算协方差与相关系数.

4.1 期望的性质与计算

计算公式

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx,$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx.$$

4.2 方差的性质与计算

方差的计算:

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] \quad (\text{定义式})$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2. \quad (\text{计算公式})$$

记 $E(X) = \mu$, 由方差定义式 $D(X) = E[(X - \mu)^2]$, 可见方差其实是一个期望, 是随机变量函数 $(X - \mu)^2$ 的期望. 由随机变量函数期望的求法, 故有

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

方差的性质:

- (1) $D(C) = 0, D(X + C) = D(X)$.
- (2) $D(aX) = a^2 D(X), D(-X) = D(X)$.
- (3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$.
 X 与 Y 不相关 $\iff D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
 X 与 Y 相互独立 $\implies D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
- (4) $D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$, 其中 X 与 Y 相互独立.

例 6 设随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布. 求随机变量 $|X - Y|$ 的方差.

解 令 $Z = X - Y$. 由题设知, $Z \sim N(0, 1)$. 对

$$D(|X - Y|) = D(|Z|) = E(|Z|^2) - [E(|Z|)]^2$$

$$= E(Z^2) - [E(|Z|)]^2.$$

由 $E(Z^2) = D(Z) + [E(Z)]^2 = 1 + 0 = 1$, 且

$$E(|Z|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |z| e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} |z| e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} ze^{-z^2/2} dz$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} d(e^{-z^2/2}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

故 $D(|X - Y|) = E(Z^2) - [E(|Z|)]^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$. ■

4.3 协方差与相关系数

协方差的计算:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] && \text{(定义式)} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). && \text{(计算公式)}\end{aligned}$$

相关系数的计算:

$$\begin{aligned}\rho_{XY} &= \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \\ &= \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.\end{aligned}$$

随机变量的相关系数 = 随机变量“标准化”后的协方差. 事实上, X, Y 标准化为

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \quad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}},$$

则

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \operatorname{Cov}(X^*, Y^*).$$

相关系数的性质

- $|\rho| \leq 1$. 其中
 - (1) $|\rho| = 1 \iff X$ 与 Y 之间存在线性关系;
 - (2) $\rho = 0 \iff X$ 与 Y 之间不存在线性关系, 或称 X 与 Y **不相关**.
强调: 不相关是“非线性相关”的简称!
- 以下命题是等价的:
 - (1) X 与 Y 不相关.
 - (2) $\rho_{XY} = 0$.
 - (3) $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.
 - (4) $E(XY) = E(X)E(Y)$.
 - (5) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
- X 与 Y 独立 $\implies X$ 与 Y 不相关. 反之不一定成立.

4.4 切比雪夫不等式

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

或等价地

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

5 概率极限定理

主要问题: 大数定律, 中心极限定理.

常见考点: 使用中心极限定理解题.

中心极限定理即言: 大量独立同分布的随机变量之和, 近似服从正态分布.

中心极限定理:

(1) 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2, k = 1, 2, \dots, n$. 从而,

$$E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = n\mu, \quad D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = n\sigma^2.$$

则近似地有

$$\sum_{k=1}^n X_k \sim N(n\mu, n\sigma^2), \quad (4)$$

进一步“标准化”得

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1).$$

等价地,

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, 则

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

等价地,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \quad (5)$$

也可以直接由 $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2$, 得 $E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

在实际应用中, 公式 (4) 求解和的概率问题; 公式 (5) 求解平均值的概率问题. 这两个公式很重要!

(2) 设 n_A 为 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数, 且 A 在每次试验中发生的概率为 p . 则 n_A 服从二项分布 $B(n, p)$, 从而

$$E(n_A) = np, \quad D(n_A) = np(1-p).$$

当 n 很大时, n_A 的“标准化”变量 $\frac{n_A - E(n_A)}{\sqrt{D(n_A)}}$ 近似服从正态分布, 即

$$\frac{n_A - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1).$$

例 7 设 X_1, X_2, \dots 为独立同分布随机变量序列, 已知 $E(X_n^k) = a_k (k = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots)$, 且 $a_4 - a_2^2 > 0$. 试问: 当 n 充分大时, 随机变量 $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从什么分布? 指出其分布参数.

考研竞赛数学

解 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 则 X_1^2, X_2^2, \dots 也独立同分布. 由 $E(X_n^k) = a_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$), 得

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= a_2, \\ D(X_n^2) &= E(X_n^4) - (E(X_n^2))^2 = a_4 - a_2^2. \end{aligned}$$

其中 $n = 1, 2, \dots$.

又 $a_4 - a_2^2 > 0$, 根据中心极限定理, 则当 n 充分大时, 随机变量 $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$ 近似服从参数为 $(a_2, \frac{a_4 - a_2^2}{n})$ 的正态分布. ■

例 8 一生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的. 假设每箱平均重 50 千克, 标准差为 5 千克. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977.

解 设所求箱数为 n , 每箱的重量记为 X_1, X_2, \dots, X_n . 由题设可把 X_1, X_2, \dots, X_n 视为独立同分布随机变量. 又

$$E(X_i) = 50, \quad D(X_i) = 5^2, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

根据中心极限定理, 有 $\sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从正态分布 $(n \cdot 50, n \cdot 5^2)$.

问题即求 n 使

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq 5000\right\} > 0.977.$$

其中

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq 5000\right\} &= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

故

$$\Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2),$$

即

$$\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2,$$

从而 $n < 98.0199$, 即最多可以装 98 箱.