一 矩阵与行列式

1 设$D_4(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，求其展开式中$x^2$项的系数。

解： 将$D_4(x)$按第一行展开：

$$D_4(x)=1\cdot A_{11}+x\cdot A_{12}+x^2\cdot A_{13}+x^3\cdot A_{14},$$

则可见x^2项的系数为x^2的代数余子式$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4$。

2 设$\begin{cases} x+y+z=kz \\ 4x+3y+2z=ky \\ x+2y+3z=kx \end{cases}$有非零解，求 k 的值。

解 将方程组改写为$\begin{cases} x+y+(1-k)z=0 \\ 4x+(3-k)y+2z=0 \\ (1-k)x+2y+3z=0 \end{cases}$， 因方程组有非零解，所以可得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-k \\ 4 & 3-k & 2 \\ 1-k & 2 & 3 \end{vmatrix}=k(k+1)(k-6)=0$$所以，$k=-1,\ 0,\ 6$.

3 已知$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，求$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$.

解法 1 因为$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$，$D_1$与$D$的第 1 列元素的代数余子式相同

所以将D_1按第 1 列展开可得$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$.

解法 2 因为D的第 3 列元素与D的第 1 列元素的代数余子式相乘求和

为 0, 即 $3A_{11}+3A_{21}+3A_{31}+3A_{41}=0$

所以 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$

4　计算行列式

（1）$D=\begin{vmatrix}1&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&4\end{vmatrix}$　　答案－4。（2）$\boldsymbol{D_n}=\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}&\cdots&\boldsymbol{n}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\cdots&\mathbf{0}\\\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\cdots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{n}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\cdots&\mathbf{1}\end{vmatrix}$.

解　$D_n \overset{c_1-jc_j}{\underset{j=2,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix}1-(2^2+\cdots+n^2&2&3&\cdots&n\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1-(2^2+\cdots+n^2)$

（3）$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\x&x^2&x^3&x^4\end{vmatrix}$　　（$12x(x+1)(x-2)(x-3)$）

（4）　$D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\0&x&-x&-x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&x&-x\\x&0&-x\\x&-x&-x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-x\\x&-x&-x\\x&-x-x^2&-x^2\end{vmatrix}=x^4$$

5 矩阵的运算

（1）已知$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\&2&0\\&&1\end{bmatrix}$，求$A^k\ (k=2,3,\cdots)$.

解法1　$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\&2&0\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\&2&0\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\&2^2&0\\&&1\end{bmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&0&2\\&2^2&0\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\&2&0\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3\\&2^3&0\\&&1\end{bmatrix}$，可以验证：$A^k=\begin{bmatrix}1&0&k\\&2^k&0\\&&1\end{bmatrix}$

解法 2 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\ &2&0\\ & &1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1& & \\ &2& \\ & &1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=B+C$

$$BC=CB\Rightarrow (B+C)^k=B^k+kB^{k-1}C+\cdots+C^k$$

$$C^2=O\Rightarrow A^k=(B+C)^k=B^k+kB^{k-1}C$$

$$=\begin{bmatrix}1& & \\ &2^k& \\ & &1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1& & \\ &2^{k-1}& \\ & &1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

（2） 设 $A_{n\times n}$ 满足 $A^2-2A-4E=O$，求 $(A+E)^{-1}$.

解 $A^2-2A-4E=O\Rightarrow A^2-2A-3E=E$

$$\Rightarrow (A+E)(A-3E)=E\Rightarrow (A+E)^{-1}=A-3E$$

（3）设 $A=\begin{bmatrix}5&-1&0\\-2&3&1\\2&-1&6\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2&1\\2&0\\3&5\end{bmatrix}$ 满足 $AX=C+2X$，求 X .

解 并项： $(A-2E)X=C$ **计算：** $X=(A-2E)^{-1}C$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5&4&-1\\10&12&-3\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\2&0\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\7&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

（4）已知 $XA+E=A^2-X$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\5&6&7\end{pmatrix}$，求 X 。

解: 由 $XA+E=A^2-X$ 得 $XA+E=A^2-E$，进一步得 $X(A+E)=(A-E)(A+E)$，

由 $|A+E|=\begin{vmatrix}2&2&0\\3&5&0\\5&6&8\end{vmatrix}=32\neq 0$ 得 A＋E 可逆，故 $X=A-E=\begin{pmatrix}0&2&0\\3&3&0\\5&6&6\end{pmatrix}$

二 线性方程组的求解与向量组的线性相关性

1 问 a,b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\x_1+3x_2+6x_3=2\\2x_1+3x_2+ax_3=b\end{cases}$

无解，有唯一解，有无穷多解，并在有无穷多解时，求其通解。

解：增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&6&2\\2&3&a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&3&1\\0&-1&a-6&b-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&3&1\\0&0&a-3&b-1\end{pmatrix}$$

（1） 当$a=3,b\neq1$时，线性方程组无解；

（2） 当$a\neq3$时，线性方程组有唯一解；

（3） 当$a=3,b=1$时，线性方程组有无穷多解，此时

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&6&2\\2&3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&3&1\\0&-1&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以线性方程组的通解为：$x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$，$k\in R$

2 当a为何值时，线性方程组$\begin{cases}2x_1-ax_2+x_3=1\\ax_1+(2a+1)x_2-x_3=1\\(a^2-4)x_1-x_2-ax_3=2a-1\end{cases}$ 有惟一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时，求通解。

解：$D=\begin{vmatrix}2&-a&1\\a&2a+1&-1\\a^2-4&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-a&1\\a+2&a+1&0\\a^2-2&-a-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2&a+1\\a^2-2&-a-1\end{vmatrix}=-a(a+1)^2$

（1）当$D\neq0$时，即$a\neq0$且$a\neq-1$时，方程组有有惟一解；

(2) 当$a=0$时，$(A,b)=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&1&-1&1\\-4&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

由于$R(A)\neq R(A,b)$，故方程组无解.

（3）当 $a=-1$ 时，$(A,b)=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\-1&-1&-1&1\\-3&-1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

令 $x_3=c$，则通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}c+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

3 已知向量组

$\alpha_1=(1,-1,0,0)^T,\alpha_2=(0,-2,-1,-1)^T,\alpha_3=(-1,-1,-1,-1)^T,\alpha_4=(2,0,1,1)^T,\alpha_5=(1,1,-1,3)^T$

求线性空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 的维数和一组基。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&-1&2&1\\-1&-2&-1&0&1\\0&-1&-1&1&-1\\0&-1&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 的维数为 3，　一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$。

4 若向量组 $\alpha_1=(1,t+1,0)^T,\alpha_2=(1,2,0)^T,\alpha_3=(0,0,t^2+1)^T$ 线性相关（其中 $t\in R$），求 t 的值。　$t=1$

5 设 $\eta_0,\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_r$ 是非齐次线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 的 $r+1$ 个线性无关的解，证明：

$\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots\eta_r-\eta_0$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系。

证明：因为依题意有 $A\eta_i=b(i=0,1,2,\cdots n)$，所以

$$A(\eta_1-\eta_0)=0,A(\eta_2-\eta_0)=0,\cdots A(\eta_r-\eta_0)=0$$

也即 $\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots\eta_r-\eta_0$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，

下证其线性无关性，不妨假设

$$k_1(\eta_1-\eta_0)+k_2(\eta_2-\eta_0)+\cdots+k_r(\eta_r-\eta_0)=0$$

整理得：

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_r\eta_r-(k_1+k_2+\cdots+k_r)\eta_0=0$$

又 $\eta_0,\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_r$ 线性无关，所以

$k_1=k_2=\cdots=k_r=k_1+k_2+\cdots+k_r=0$，即 $k_i=0(i=1,2,\cdots r)$

故 $\eta_1-\eta_0,\eta_2-\eta_0,\cdots\eta_r-\eta_0$ 线性无关，从而它是是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系。

6 设n阶矩阵A满足$A^2=2A$，证明$R(A)+R(A-2E)=n$

证明：由$A^2=2A$有$A(A-2E)=0$，

$R(A)+R(A-2E)\le n$，由于$R(2E-A)=R(A-2E)$，

$R(A)+R(2E-A)\le n$

另一方面，由于

$R(A)+R(2E-A)\ge R(A+2E-A)=R(2E)=n$

故$R(A)+R(A-2E)=n$

7 设$\mathrm{R}(A_{3\times 3})=2$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\ \ (\boldsymbol{b}\ne\boldsymbol{0})$的 3 个解$\eta_1,\eta_2,\eta_3$满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},\ \eta_1+\eta_3=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix},\ \text{求 } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \text{ 的通解}.$$

解　$\mathrm{R}(A)=2\Rightarrow Ax=0$的基础解系中含有$3-2=1$个解向量

因为　$\boldsymbol{A}[(\eta_1+\eta_2)-(\eta_1+\eta_3)]=\boldsymbol{0}$，

$$\text{所以 } \xi=(\eta_1+\eta_2)-(\eta_1+\eta_3)=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} \text{ 是 } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0} \text{ 的基础解系}$$

$$\text{又 } \boldsymbol{A}[\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)]=\boldsymbol{b}\ \Rightarrow\ \eta^*=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \text{ 是 } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \text{ 的特解}$$

故$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为$\boldsymbol{x}=\eta^*+k\xi\quad(\forall k\in\mathbf{R})$.

三 相似对角化与二次型

1 已知向量空间R^3的基为$\alpha_1=(1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,0,1)^T$

求R^3的一组正交基.

解　方法 1　代入公式可得：
$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix} \\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)^T \end{cases}$$

2　已知$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，讨论$A$是否可以相似对角化.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0,A$的特征值为$1,1,3.$

$\lambda=1$时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(\lambda E-A)=3-2=1$，所以$A$不能对角化。

3 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$，属于 λ_1,λ_2 的特征向量依次为

$\boldsymbol{p_1}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p_2}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，**求 A .**

解　设 $\boldsymbol{p_3}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，由　$\boldsymbol{p_1}\perp\boldsymbol{p_3}$，$\boldsymbol{p_2}\perp\boldsymbol{p_3}$　可得 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$

该齐次方程组的一个非零解为　$\boldsymbol{p_3}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$.

令　$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&1&-2\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&-3\end{bmatrix}$

则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$

[注] $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&6\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&&\\&1/3&\\&&1/6\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3&-3&0\\2&2&2\\1&1&-2\end{bmatrix}$

4 求一个正交变换，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^{\ 2}+4x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准形。

解：二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$ （2 分）

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)=0$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$ （5 分）

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，求解 $(0\cdot E-A)x=0$，由

$-A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&-4&4\\-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=9$ 时，求解 $(9E-A)x=0$，由

$9E-A=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

特征值－2对应的全体特征向量为$k_3\xi_3$（k_3不为0）　　　　（11分）

(3) **将ξ_1,ξ_2,ξ_3单位化后得：** $q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},q_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$ $q_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

从而，得正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{\sqrt{18}}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{18}}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{18}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，相应的正交变换为$X=QY$，使得

$$f=0y_1^2+0y_2^2-9y_3^2.$$ （14分）

5 设实二次型$f(X)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3+2tx_2x_3$，求当$t$是何整数时二次型$f(X)$是正定的，并求一个线性替换$Y=TX$将二次型$f(X)$化为标准形。

解：此二次型的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&t\\1&t&2\end{pmatrix}$，若要$f$为正定的，则要求其各级顺序主子式都大于零， 即$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&t\\1&t&2\end{vmatrix}=1-t^2>0,\quad (t>0)$ 因t为整数，故$t=0$.

当$t=0$时，$f(X)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3=\left(x_1+x_3\right)^2+x_2^2+x_3^2$，

作线性替换：$\begin{cases}y_1=x_1+x_3\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=y_1-y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，则其为非退化的线性替换，

则经过此线性替换后可得到二次型的标准型：$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$。

其特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\lambda_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

6 设二次型$f=x^TAx=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩是2.

(1)求a的值；　　　　(2)求一个正交变换将此二次型变成标准型；

(3) 求 $f=0$ 的解.　　（4）若 $\|x\|=x^T x=1$，求 f 的最小值和最大值。

解：(1)二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是其特征值，

因为 $r(A)=2$ $\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}=-4a=0\Rightarrow a=0.$

(2)矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=-(\lambda-2)^2\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0.$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，得到两个正交的单位特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$

当 $\lambda_3=-3$ 时，得到单位特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}.$

取 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),x=Qy$, 则 $f=2y_1^2+2y_2^2.$

(3) 因为 $f=2y_1^2+2y_2^2=0\Rightarrow(y_1,y_2,y_3)^T=(0,0,k)^T.$

所以 $x=Qy=\left(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0\right)^T\Rightarrow x=k(1,-1,0)^T.$

（4）若 $\|x\|=x^T x=1$，则 f 的最小值为 -3　和最大值为 2

7　已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax$ 在正交变换下 $X=QY$ 下化为标准形 $y_1^2+y_2^2$, 且 Q 的第 3 列向量为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，（1）求矩阵 A　（2）证明：$A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵。

解：（1） A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=0$，且 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 为 A 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 的特征向量，利用不同特征值特征向量相互正交可求出 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$

令 $P=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，则 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（2）因为 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=0$，则 $A+E$ 的特征值为 $2,2,1$ 均大于零，故：$A+E$ 为正定矩阵。

四 线性空间与线性变换

1 对于次数不超过 4 的实系数多项式线性空间 $R_4[x]$,

(1)证明：

$g_1=1,g_2=1+x,g_3=1+x+x^2,g_4=1+x+x^2+x^3,g_5=1+x+x^2+x^3+x^4$

是它的一组基；

求 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4\in R_4[x]$ 在此基下的坐标.

(1)证明：

$$(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\&1&1&1&1\\&&1&1&1\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)A,$$

而 $|A|=1\neq 0$,从而 g_1,g_2,g_3,g_4,g_5 线性无关，它是 $R_4[x]$ 的一组基；

(2) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=(1,x,x^2,x^3,x^4)\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}$

$$=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)A^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0-a_1\\a_1-a_2\\a_2-a_3\\a_3-a_4\\a_4\end{pmatrix},\text{在此基下的坐标}\begin{pmatrix}a_0-a_1\\a_1-a_2\\a_2-a_3\\a_3-a_4\\a_4\end{pmatrix}.$$

2 在线性空间 R^3 中取两个基：

（A）$\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$;

（B）$\beta_1=(0,1,1)^T,\beta_2=(-1,1,0)^T,\beta_3=(1,2,1)^T$；

（1）求基(A)到基(B)的过渡矩阵；（2）写出向量$\gamma=3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$关于基(B)的坐标。

解 （1）令 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T,\varepsilon_3=(0,0,1)^T$，于是有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\,A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix};$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\,B=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$；进而有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\ A^{-1}B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\2&4&4\\-1&-3&-2\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,P$$

P 为基(A)到基(B)的过渡矩阵。 6 分

（1） 由 $\gamma=3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\ P^{-1}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$\begin{pmatrix}-5\\-2\\5\end{pmatrix}$$

3 已知 R^3 中两组基 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T$ $\varepsilon_2=(0,1,0)^T$， $\varepsilon_3=(0,0,1)^T$； $\alpha_1=(1,0,0)^T$，

$\alpha_2=(1,1,0)^T$， $\alpha_3=(1,1,1)^T$.

(1). 求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3$ 的过渡矩阵 A；

(2). 设由基 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $B=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 β_1,β_2,β_3；

(3). 已知向量 ξ 在基 β_1,β_2,β_3 的坐标为 $(1,2,3)^T$，求 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3$ 的坐标.

(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，故 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(2) $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(3) $\xi=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

4 设线性变换$\sigma:R^3\to R^3$定义为$\sigma\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\2x-y+z\\y-z\end{pmatrix}$.

(1) 求出σ在下述基下的矩阵A：$e_1=(1,0,0)^T,e_2=(0,1,0)^T,e_3=(0,0,1)^T$.

(2) 求出σ在下述基下的矩阵B：$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,-1,2)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$.

(3) 写出$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$e_1,e_2,e_3$的过渡矩阵$C$.

解：（1） $\sigma(e_1)=(1,2,0)^T,\sigma(e_2)=(1,-1,1)^T,\sigma(e_3)=(1,1,-1)^T$.

从而可得$\sigma(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，故$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

(2) $\sigma(\alpha_1)=(3,2,0)^T,\sigma(\alpha_2)=(0,5,-3)^T,\sigma(\alpha_3)=(2,0,0)^T$.

从而可得$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$,

故$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

(3)由过渡矩阵的定义可知$E=(e_1,e_2,e_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$，从而过渡矩阵

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

5　令 S 为 e^x, xe^x, x^2e^x 张成的 $C[a,b]$ 的子空间，即 $S=span\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$，其中 $C[a,b]$ 表示的是 $[a,b]$ 连续函数得全体构成得线性空间，定义 D 为 S 上的微分变换，即 $\forall f(x)\in S, Df(x)=f'(x)$，求 D 在基 e^x, xe^x, x^2e^x 下的矩阵。

解：　$De^x=e^x=e^x+0\cdot xe^x+0\cdot x^2e^x$

$D(xe^x)=(x+1)e^x=e^x+xe^x+0\cdot x^2e^x$

$D(x^2e^x)=(x^2+2x)e^x=0\cdot e^x+2xe^x+x^2e^x$

从而　$D(e^x, xe^x, x^2e^x)=(e^x, xe^x, x^2e^x)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，从而 D 在基 e^x, xe^x, x^2e^x 下的矩阵为

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.