Obliczenia i wnioskowanie w systemie Coq

Lista nr 1

7 marca 2019

Zadanie 1 (2p.)
Zbadaj, które z poniższych formuł mają dowody w logice intuicjonistycznej i udowodnij je w Coqu używając wyłącznie taktyk `assumption, intro, apply, absurd` (lub ich wariantów). Następnie z pozostałych formuł wybierz te, które można udowodnić w logice klasycznej i udowodnij je w Coqu używając powyższych taktyk oraz aksjomatów logiki klasycznej.
Aby móc wnioskować klasycznie w Coqu, można skorzystać z biblioteki Classical (komenda `Require Import Classical.`), która zawiera deklaracje m.in. aksjomatu *tertium non datur* czy eliminacji podwójnego zaprzeczenia:

```
Axiom classic : forall P : Prop, P \/ ~ P.
Lemma NNPP : forall P : Prop, ~~ P -> P.
```

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(\neg A \to A) \to A$
4. $A \to \neg\neg A$
5. $\neg\neg A \to A$
6. $\neg\neg\neg A \to \neg A$
7. $(\neg A \to B) \to A$
8. $\neg(A \to B) \to A$
9. $((((A \to B) \to A) \to A) \to B) \to B$
10. $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to A \to C$

Zadanie 2 (2p.)
Sprawdź, które z poniższych formuł logiki pierwszego rzędu można udowodnić konstruktywnie. Możesz potrzebować dodatkowo następujących taktyk:

- `exists t` – taktyka dla reguły wprowadzenia kwantyfikatora egzystencjalnego; `t` jest termem, dla którego instancjujemy kwantyfikator w przesłance reguły
- `destruct id` – taktyka dla reguły eliminacji kwantyfikatora egzystencjalnego z przesłanki; `id` jest nazwą przesłanki

Przyjmij następujące deklaracje formuł atomowych $A(x, y)$, $B(x), C$:

```
Parameter S T : Set.
Parameter A : S -> T -> Prop.
Parameter B : T -> Prop.
Parameter C : Prop.
```

Wówczas term Galliny postaci `A x y` reprezentuje formułę $A(x, y)$. Formułę $\exists x.\, A(x, y)$ zapiszemy jako term `exists x, A x y`.

1. $(\exists x.\forall y.A(x, y)) \to \forall x.\exists y.A(x, y)$
2. $(\neg\forall x.B(x)) \to \exists x.\neg B(x)$
3. $(\exists x.\neg B(x)) \to \neg\forall x.B(x)$
4. $(\neg\exists x.B(x)) \to \forall x.\neg B(x)$
5. $(\forall x.\neg B(x)) \to \neg\exists x.B(x)$
6. $(C \to \exists x.B(x)) \to \exists x.(C \to B(x))$
7. $(\exists x.(C \to B(x))) \to C \to \exists x.B(x)$
8. $\exists x.\forall y.(B(x) \to B(y))$

Zadanie 3 (3p.)
Sformułuj w języku logiki pierwszego rzędu następującą wypowiedź:

Każdy cyrulik sewilski goli tych wszystkich mężczyzn w Sewilli, którzy się sami nie golą. Ale nie goli żadnego z tych, którzy golą się sami.

Następnie pokaż prawdziwość twierdzenia (czy jest to twierdzenie logiki intuicjonistycznej czy klasycznej?):

A zatem w Sewilli nie ma ani jednego mężczyzny będącego cyrulikiem.

Jakie założenia dotyczące reprezentacji przyjmujesz, aby móc udowodnić powyższe stwierdzenie?

Zadanie 4 (2p.)
Udowodnij prawa de Morgana dla logiki zdań używając wyłącznie taktyk bazowych.

Zadanie 5 (2p.)
Sprawdź, jak działa taktyka `auto n`, gdzie `n` jest liczbą naturalną. Następnie skonstruuj formułę, której nie da się dowieść za pomocą taktyki `auto 4`, ale można jej dowieść za pomocą taktyki `auto 5`. Uogólnij to rozwiązanie dla dowolnych `auto n, auto (n+1)`?

Zadanie 6 (2p.)
Sesshomaru, Naraku i Inuyasha należą do sekty Warring Era. Każdy członek tej sekty jest albo demonem, albo czlowiekiem, albo i jednym i drugim. Żaden czlowiek nie lubi deszczu, a wszystkie demony lubią śnieg. Naraku nie cierpi wszystkiego, co lubi Sesshomaru, a lubi wszystko czego nie lubi Sesshomaru. Sesshomaru lubi deszcz i śnieg.

1. Wyraź opis powyższego tekstu w logice pierwszego rzędu.
2. Czy jest ktoś, kto jest człowiekiem, ale nie demonem? Udowodnij, że Twoja odpowiedź jest poprawna.