

H^∞ 理論に基づく3重倒立振子のスライディングモード制御

川 辺 尚 志*・山 中 智 司**

(平成14年6月25日受理)

Sliding Mode Control for an Inverted-Triple Pendulum System Based on the H^∞ Control Scheme

Hisashi KAWABE and Tomoshi YAMANAKA

(Received Jun. 25, 2002)

Abstract

A stabilization control for an inverted-triple pendulum system connected in series is investigated by formulating a reduced-order model excluding the cart velocity, and by using a sliding mode controller (*HSMC*) based on the H^∞ control theory, a conventional H^∞ servo controller (*HIC*), and a frequency-shaped regulator (*FSLQ*) to compare the robust performance against a disturbance impulsively applied to the 3rd link. By applying the loop-shaped H^∞ control scheme to the design of the switching plane of the sliding mode, the robust hyper-plane with both frequency characteristics and integral ones can be easily realized even to a multi-link system having the $j\omega$ poles. The *HSMC* system designed here exhibits considerably excellent robustness as compared with other robust control systems beginning with the *HIC* and *FSLQ* systems.

Key Words: Inverted-triple pendulum, H^∞ controller, Sliding mode control, Loop-shaped method, Frequency-shaped regulator, Reduced-order model

1. は じ め に

宇宙構造物, 柔性ロボットアーム, 情報機器, 橋梁構造物等をはじめ, 柔構造系のアクティブ制御技術が新しい制御理論の応用分野として発展してきた^{1,2)}。なかでも振子系の振動制御に関しては, 支点水平移動方式³⁾に比べて支点鉛直移動方式⁴⁻⁷⁾や重心移動方式⁸⁻¹⁰⁾の非線形ロバスト制御に関する研究は少ない。一方, 代表的な不安定柔構造物としては倒立振子があり, その制御則性能を検証するための非常に多くの研究がなされているが, 多重リンク結合系やスピルオーバー問題を内在する多重フレキシブルリンク系の安定化運動制御に関しては, パラメータや不安定要因の多さから成功報告例は少ないように思われる¹¹⁻¹³⁾。

倒立振子系の安定化の特徴は, 台車に非駆動関節により連結された振子を台車の水平移動により安定化させることである。すなわち, 少ない制御力により, 多くの一般化座標をシステムに内在する動力学的特性を利用することで操作する必要があるため制御難易度が増すといえる。

本研究は, まだ成功例の少ない4自由度の直列型3重倒立振子系の安定化問題について, H^∞ 制御設計を応用したスライディング・モード制御則を適用して, そのロバスト制御性能を検証するものである。この直列型3重倒立振子系については, 川谷ら¹⁴⁾による H^∞ ループ整形法¹⁵⁾を適用した成功例はあるが, スライディング・モードの超平面設計に組み込んだ応用例はあまり見られず意義があるものと考え¹⁶⁾。

* 広島工業大学工学部知能機械工学科

** 広島工業大学大学院工学研究科機械システム工学専攻 (現在, 大日本精機株)

シミュレーションと実機の両面から、通常の H^∞ 制御系や周波数整形レギュレータ系よりも優れたロバスト性を示すことが分かった。

2. モデリング

図1に直列型三重倒立振り子系のモデルを示す。また、使用するパラメータを以下に示す。

- M : 台車系の等価質量 [kg]
- G : 台車系の等価減衰係数 [Ns/m]
- A : 電圧／トルク変換係数 [N/V]
- g : 重力加速度 [m/s²]
- m_i : $i = 1, 2, 3$ 番目のリンクの質量 [kg]
- l_i : $i = 1, 2, 3$ 番目のリンクの長さ [m]
- J_i : $i = 1, 2, 3$ 番目のリンクの慣性モーメント [kgm²]
- μ_i : $i = 1, 2, 3$ 番目のリンクの等価減衰係数 [Nms/rad]
- l_{iG} : $i = 1, 2, 3$ リンクの回転中心から重心までの距離 [m]
- x_{iG} : $i = 1, 2, 3$ リンクの X 方向における重心位置 [m]
- y_{iG} : $i = 1, 2, 3$ リンクの Y 方向における重心位置 [m]
- S : 台車の変位 [m]
- $\theta_i(t)$: $i = 1, 2, 3$ 番目のリンクの振れ中心角 [rad]
- $\phi_1(t)$: リンク 1, 2 の鉛直振れ角 [rad]
- $\phi_2(t)$: リンク 1, 2, 3 の鉛直振れ角 [rad]
- $u(t)$: 制御入力 [V]

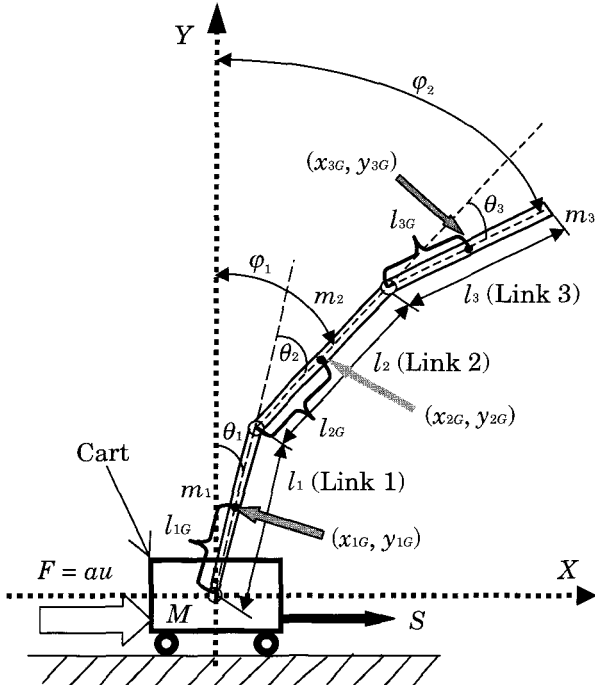


Fig.1 Model of an inverted-triple pendulum system

図1より、 $i=1, 2, 3$ 番目のリンクの X, Y 方向の重心変位を (x_{iG}, y_{iG}) とし、ラグランジェ法¹⁾によるモデリングを線形近似した行列表現すると、結局

$$A\ddot{z} + \Phi\dot{z} + \Omega z = \Gamma u \quad (1)$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} z = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ S]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \\ A = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_8 & p_9 & p_{10} \\ p_3 & p_9 & p_{11} & p_{12} \\ p_4 & p_{10} & p_{12} & p_{13} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \Phi = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \Omega = \begin{bmatrix} -p_5 & -p_6 & -p_7 & 0 \\ -p_6 & -p_6 & -p_7 & 0 \\ -p_7 & -p_7 & -p_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

また、各パラメータは

$$\begin{cases} p_1 = m_2 l_1 l_2 + m_3 l_1 l_3 + m_3 l_2 l_3 + 2m_3 l_1 l_2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 \\ \quad + m_3 l_2^2 + \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + J_1 + J_2 + J_3 \\ p_2 = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 + m_3 l_1 l_2 + \frac{1}{2} m_3 l_1 l_3 + m_3 l_2 l_3 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \\ \quad + m_3 l_2^2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + J_2 + J_3 \\ p_3 = \frac{1}{2} m_3 l_1 l_3 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + J_3 \\ p_4 = \frac{1}{2} m_1 l_1 + m_2 l_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2 + m_3 l_1 + m_3 l_2 + \frac{1}{2} m_3 l_3 \\ p_5 = (\frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3) g l_1 + (\frac{1}{2} m_2 + m_3) g l_2 + \frac{1}{2} m_3 g l_3 \\ p_6 = (\frac{1}{2} m_2 + m_3) g l_2 + \frac{1}{2} m_3 g l_3 \\ p_7 = \frac{1}{2} m_3 g l_3 \\ p_8 = m_3 l_2 l_3 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + m_3 l_2^2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + J_2 + J_3 \\ p_9 = \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + J_3 \\ p_{10} = \frac{1}{2} m_2 l_2 + m_3 l_2 + \frac{1}{2} m_3 l_3 \\ p_{11} = \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + J_3 \\ p_{12} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \\ p_{13} = M + m_1 + m_2 + m_3 \end{cases} \quad (3)$$

状態変数を

$$x = [z \mid \dot{z}]^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ S \mid \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{S}]^T \in \mathbb{R}^{8 \times 1} \quad (4)$$

とおくと、状態方程式は次式になる。

$$P \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_4 \\ -A^{-1}\Omega & -A^{-1}\Phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}, B = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ A^{-1}\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 1} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 8}, u \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \end{cases} \quad (6)$$

なお関連する具体的パラメータは付録 (A-1) ~ (A-3) に示す。

3. 制御系の設計

3.1 スライディングモード制御則の設計

ここでは特に、滑り面が動特性を有するロバスト超平面を設計する。まず式 (5) を可制御正準系に変換する。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y_1 = C_1x_1 \\ y_2 = C_2x_2 \end{cases} \quad (7)$$

ただし、式 (5) から式 (7) への変換は

$$\begin{cases} T = \begin{bmatrix} I_7 & -B_1B_2^{-1} \\ 0_{1 \times 7} & I \end{bmatrix}, \det T \neq 0, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, B_2 \neq 0 \\ x = T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x_1 = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ S \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T \in \mathbb{R}^{7 \times 1} \\ x_2 = \dot{S} \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \end{cases} \quad (8)$$

の関係を用いて次式が得られる。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 7} & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = TAT^{-1}, \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ B_2 \end{bmatrix} = TB, \begin{bmatrix} C_1 & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 7} & C_2 \end{bmatrix} \\ = CT^{-1} \\ A_{11} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}, A_{12} \in \mathbb{R}^{7 \times 1}, A_{21} \in \mathbb{R}^{1 \times 7}, A_{22} \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \\ B_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, C_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 7}, C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \end{cases} \quad (9)$$

ただし

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = 1 \quad (10)$$

とする。ここで、式 (7), (10) より

$$y_1 = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ S]^T, y_2 = \dot{S} \quad (11)$$

とする。

また、正準系 (式 (11)) に対し、切換関数 ψ を $\psi = -s(x_1) + x_2$ (12)

と定義する。ただし、 $s(x_1)$ は式 (13) に示すダイナミクスを有する線形オペレータで、 $s(x_1) = K_\infty(s)y_1$ の関係とする。

$$K_\infty \begin{cases} \dot{z}_k = A_k z_k + B_k y_1 \\ s(x_1) = C_k z_k \end{cases} \quad (13)$$

まず、スライディングモード状態での等価制御入力 u_{eq} は、 $\dot{\psi} = 0$ から

$$u_{eq} = -B_2^{-1} \{-C_k(A_k z_k + B_k y_1) + A_{21}x_1 + A_{22}x_2\} \quad (14)$$

で与えられる。ただし式 (7), (10) より $y_2 = x_2 = \dot{S}$ であり、また式 (40) で述べるように

$$C_p z_k = x_1 \quad (15)$$

の関係を用いる。

次に滑り面 $\psi = 0$ への制御力 u_{nl} として、リアプノフ関数を

$$V = \frac{1}{2} \psi^2 \quad (16)$$

と定義し、次に示す比例到達則

$$\dot{\psi} = -k\psi \quad (17)$$

より決定する。 $\dot{V} = \psi \dot{\psi} < 0$ とを満たす制御力は $u_{nl} = B_2^{-1} k\psi$ となるので、最終的に制御入力 $u = u_{eq} + u_{nl}$ は、

$$u = -B_2^{-1} \{-C_k(A_k z_k + B_k y_1) + A_{21}C_p z_k + A_{22}y_2 + k\psi\} \quad (18)$$

で与えられる。式 (18) は x_2 が観測可能であれば出力フィードバック型のスライディングモード制御系の構成を示し、従来の状態フィードバック型に比べて観測器を必要としないので設計が容易である。

3.2 滑り面を形成する線形オペレータの設計

線形オペレータを有する切換超平面の設計には特に McFarlane^(14,15) らによって提案された H^∞ 制御ループ整形法を用いる。これはスライディングモード制御系と H^∞ 制御系の持つロバスト性を融合させてより強固なロバスト性を持たせるためである。ループ整形法は、 H^∞ ノルムの上限值 γ を反復せずに解が得られることやプラントに原点極が存在する場合でも求解可能なため倒立振子系の制御系設計に適すると考えられる。

まず、式 (7) の入力の数だけ低次元化した次式を実プラント $\bar{P}(s)$ と考える。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ y_1 = C_1x_1 \end{cases} \quad (19)$$

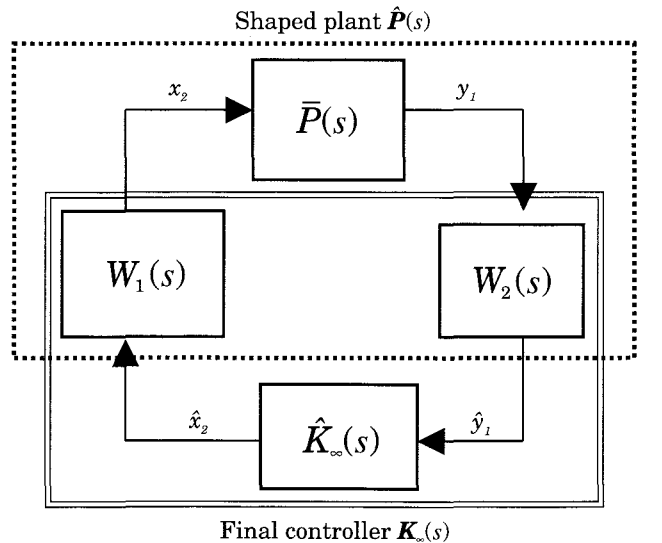


Fig.2 Block diagram of augmented plant

図2に示す破線で囲んだ整形プラント \hat{P} は、式(24)、(25)のそれぞれの設計仕様を満たす前・後補償器 W_1, W_2 で低次元化プラント $\bar{P}(s)$ を周波数整形した形 $\hat{P} = W_2 \bar{P} W_1$ となる。伝達関数行列 $G(s)$ のドイル記述として

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (20)$$

を用いる。 $\bar{P}(s), W_1(s), W_2(s)$ の記述をそれぞれ

$$\bar{P}(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (21)$$

$$W_1(s) = C_{W1}(sI - A_{W1})^{-1}B_{W1} + D_{W1} \quad (22)$$

$$W_2(s) = C_{W2}(sI - A_{W2})^{-1}B_{W2} + D_{W2} \quad (23)$$

とする。また、前置補償器 W_1 はノイズ低減とチャタリング抑制を考え式(24)を、後置補償器 W_2 は台車系の定常偏差改善と応答性の改善を目的として式(25)を用いる。

$$W_1(s) = k_w \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) \frac{s^2 + 2\zeta\omega_2 + \omega_2^2}{s^2 + 2\zeta\omega_1 + \omega_1^2} \quad (24)$$

$$W_2(s) = \text{Blockdiagonal} \left\{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{\beta_1 s + \beta_2} \right\} \quad (25)$$

整形プラント \hat{P} は (\hat{x}_2 から \hat{y}_1 までを伝達関数で表わすと) $\hat{y}_1 = \hat{P}(s)\hat{x}_2$ となり、 \hat{P} に関する状態変数 \hat{z} を

$$\hat{z} = [x_{W2} \quad x_1 \quad x_{W1}]^T \in \mathcal{R}^{10 \times 1} \quad (26)$$

とおくことで

$$\hat{P}(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} A_{W2} & B_{W2}C_1 & 0_{1 \times 2} & 0 \\ \hline 0_{7 \times 1} & A_{11} & A_{12}C_{W1} & A_{12}D_{W1} \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 7} & A_{W1} & B_{W1} \\ \hline C_{W2} & D_{W2}C_1 & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 1} \end{array} \right] \quad (27)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array} \right]$$

が得られる。ここで、整形プラント \hat{P} に対して H^∞ ノルム条件

$$\left\| \left[\begin{array}{c} I \\ \hat{K}_\infty \end{array} \right] (I - \hat{P}\hat{K}_\infty)^{-1} \left[\begin{array}{c} I \\ \hat{P} \end{array} \right] \right\|_\infty < \gamma \quad (28)$$

を満たす制御器 \hat{K}_∞ を求める。式(28)を満たす中心解 (制御器 \hat{K}_∞) は次のアルゴリズムより得られる。

(i) 次のリカッチ方程式の正定解 X, Z を計算する。

$$\hat{A}^T X + X \hat{A} - X \hat{B} S^{-1} \hat{B}^T X + \hat{C}^T R^{-1} \hat{C} = 0 \quad (29)$$

$$\hat{A} Z + Z \hat{A} - Z \hat{C}^T R^{-1} \hat{C} Z + \hat{B} S^{-1} \hat{B}^T = 0 \quad (30)$$

ただし、

$$X > 0, Z > 0, R = I_4, S = I_1 \quad (31)$$

とする。

(ii) この時 H^∞ ノルムの最小値 γ_{\min} が次式で与えられる。

$$\gamma_{\min} = \sqrt{1 + \lambda_{\max}(XZ)} \quad (32)$$

ここで、 λ_{\max} は最大固有値を示す。

(iii) 不等式 $\gamma > \gamma_{\min}$ を満足する $\gamma = 1.05\gamma_{\min}$ に対して、 H^∞ 制御器 \hat{K}_∞ は (\hat{y}_1 から \hat{x}_2 までを伝達関数で表わすと)

$\hat{x}_2 = \hat{K}_\infty(s)\hat{y}_1$ となり、 \hat{K}_∞ に関する状態変数 \hat{z}_k を

$$\hat{z}_k = [\hat{x}_{W2} \quad \hat{x}_1 \quad \hat{x}_{W1}]^T \in \mathcal{R}^{10 \times 1} \quad (33)$$

と置くことで

$$\hat{K}_\infty(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & -\gamma^2 W^{-T} Z \hat{C}^T \\ \hline -\tilde{B}^T X & 0_{1 \times 4} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \hline \hat{C}_k & 0 \end{array} \right] \quad (34)$$

が得られる。ただし、

$$\tilde{A} = \hat{A} - \hat{B} S^{-1} \hat{B}^T X + \gamma^2 \{I + (XZ - \gamma^2 I)\}^{-T} Z \hat{C}^T \hat{C} \quad (35)$$

$$W = I + (XZ - \gamma^2 I) \quad (36)$$

とする。また、中心解を与える式(34)は

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_k = \hat{A} \hat{z}_k + \hat{B} \hat{x}_2 + \hat{L}(\hat{y}_1 - \hat{C} \hat{z}_k) \\ \hat{x}_2 = -\hat{B}^T X \hat{z}_k \\ \dot{\hat{L}} = -\gamma^2 \{I + (XZ - \gamma^2 I)\}^{-T} Z \hat{C}^T \end{cases} \quad (37)$$

に変形できる。式(37)は、 H^∞ 制御器が内部にノルム条件(28)式を満足するような Z だけでなく、 X にも依存した推定器ゲイン \hat{L} をもった全次元観測器併合状態フィードバック制御系の構造を有している。

図2の破線で囲んだ整形プラント \hat{P} に対する H^∞ 制御器 \hat{K}_∞ を \bar{P} に対する同図の二重線で囲んだ H^∞ 制御器 $K_\infty = W_1 \hat{K}_\infty W_2$ となるように等価変換すると最終的に H^∞ 制御器 K_∞ は (y_1 から x_2 までを伝達関数で表わすと) $x_2 = M_\infty(s)y_1$ となり、 M_∞ に関する状態変数 z_k を

$$z_k = [x_{W1} \quad \hat{z}_k \quad x_{W2}]^T \in \mathcal{R}^{13 \times 1} \quad (38)$$

とおくと

$$K_\infty(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} A_{W1} & B_{W1} \hat{C}_k & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 4} \\ \hline 0_{10 \times 2} & \hat{A}_k & \hat{B}_k C_{W2} & \hat{B}_k D_{W2} \\ 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 10} & A_{W2} & B_{W2} \\ \hline C_{W1} & D_{W1} \hat{C}_k & 0 & 0_{1 \times 4} \end{array} \right] \quad (39)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & 0 \end{array} \right]$$

が得られる。よって、未知変数 x_1 の状態量は、式(39)の推定器構造より任意行列 C_p を用いることで式(15)の等式が成立する。ただし、任意行列 C_p は

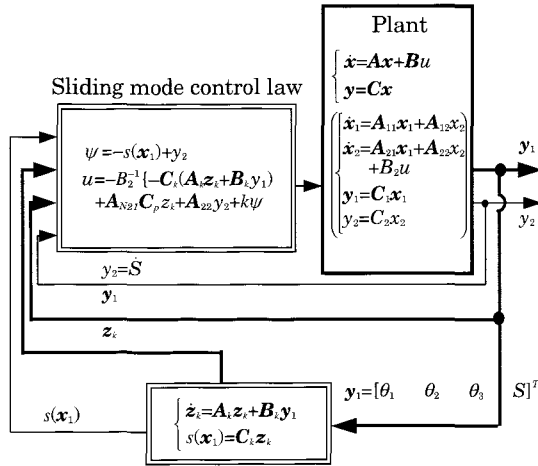
$$C_p = [0_{7 \times 3} \quad I_7 \quad 0_{7 \times 3}]^T \in \mathcal{R}^{7 \times 13} \quad (40)$$

とする。

図3に設計されたロバスト超平面を有するスライディング・モード制御系のシステム構成図を示す。

4. 実験方法および装置

物理パラメータは $M=4.4[\text{kg}]$, $G=19.2[\text{Ns/m}]$, $\alpha=18.4[\text{N/V}]$, $m_1=0.126[\text{kg}]$, $m_2=0.073[\text{kg}]$, $m_3=0.040[\text{kg}]$, $l_1=0.36[\text{m}]$, $l_2=0.35[\text{m}]$, $l_3=0.40[\text{m}]$, $J_1=2.281 \times 10^{-3}[\text{kgm}^2]$, $J_2=9.657 \times 10^{-4}[\text{kgm}^2]$, $J_3=8.104 \times 10^{-4}[\text{kgm}^2]$, $C_1=8.380 \times 10^{-4}[\text{Nms/rad}]$, $C_2=7.019 \times 10^{-4}[\text{Nms/rad}]$, $C_3=6.021 \times 10^{-4}[\text{Nms/rad}]$ に設定する。図4に実験装置構成図を図5に倒立状態の写真をそれぞれ示す。倒立振子駆動部はジャパン EM 製を使用し、台車移動量 S および各リンクの振り角 $\theta_{1,2,3}$ はポテンシオメータによりそれぞれ検出し、台車の速度 \dot{S} はタコジェネレーターより検出する。A/D, D/A 信号変換部はコンテック製を用いた。主プログラムは C 言語で書き、計算機 (PC9821CPU: 400MHz) に実装した。また、サンプリング周期は、0.37 [ms] である。



Linear operator designed on the basis of the loop-shaped H^∞ control theory

Fig.3 Overall HSMC system designed with the loop-shaped H^∞ control theory

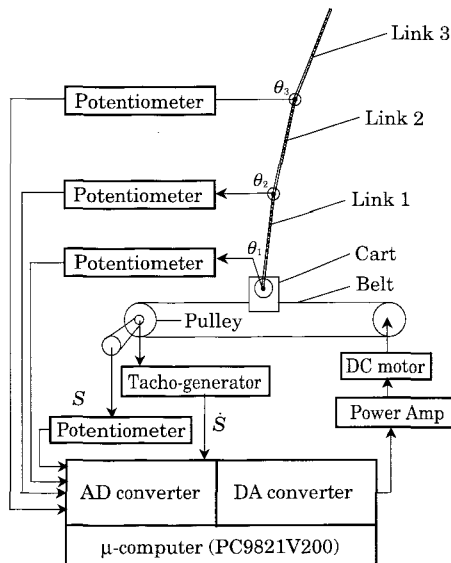


Fig.4 Overall experimental apparatus

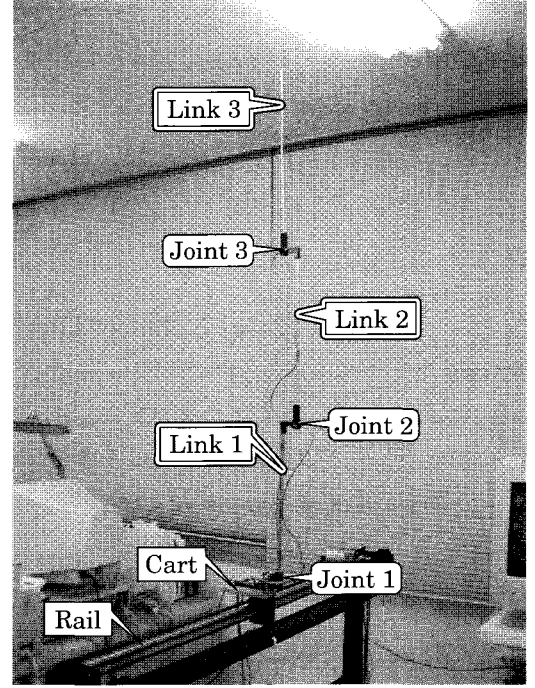


Fig.5 Stabilized view of a triple type inverted pendulum

5. 実験結果および考察

前置補償器 W_1 は $k_w=1$, $\zeta=0.7$, $\omega_1=2 \times \pi \times 4[\text{rad/s}]$, $\omega_2=2 \times \pi \times 40[\text{rad/s}]$ に設定し、図6に示す低域フィルター特性を持つ。後置補償器 W_2 は $a_1=27$, $a_2=25$, $a_3=26$, $\beta_1=15$, $\beta_2=2$ と設定した。このとき $\gamma_{\min}=36.235$ に対する13次の線形オペレータが得られる。

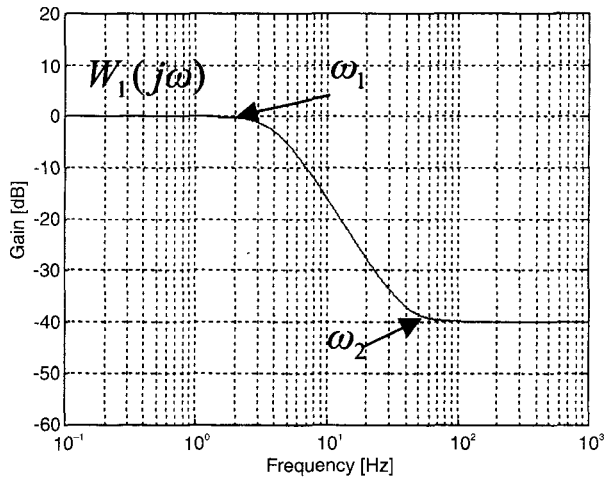
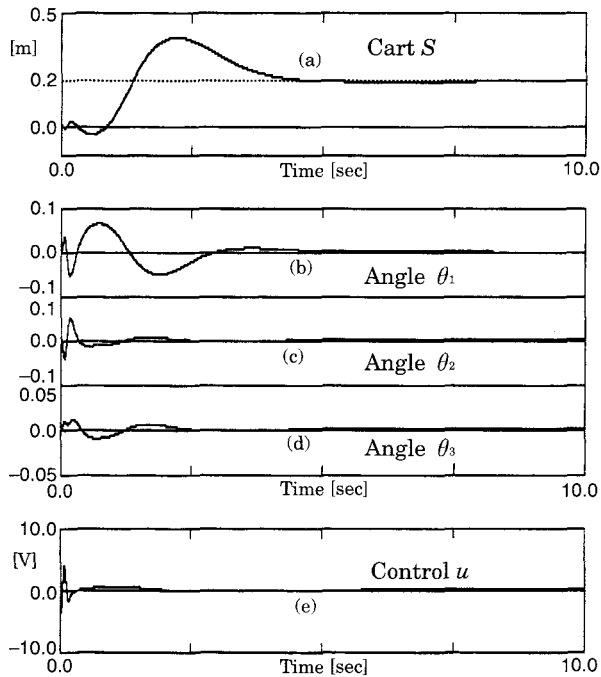
$$K_\infty(s) = C_k(sI - A_k)^{-1}B_k$$

$$\begin{aligned} & -1523.1292(s+30.01)(s+21.4)(s+11.09)(s+4.053) \times \\ & (s+0.1333)(s^2+3.588s+6.58) \times \\ & (s^2+63.26s+3742)(s^2+351.9s+6.317e04) \\ & s(s+272.4)(s+3.438)(s+2.549)(s+0.1334)(s+12.7) \times \\ & (s+0.4797)(s^2+20.44s+107.8)(s^2+35.19s+631.7) \times \\ & (s^2+306s+3.539e04) \end{aligned} \quad (41)$$

式(41)より、零固有値を持つことから積分性を有することが分かる。閉ループ系の極は付録の表 A2 に示す。

また、線形フィードバック到達則の係数を $k=5$ とし、倒立状態 (初期値を 0.0[m] とする) から台車に目標値 0.2[m] のステップ状外乱を与えたシミュレーション結果を図7に、対応する実機実験結果を図8に示す。各図の(a)は台車の変位 $S[\text{m}]$, (b)はリンク3の振れ中心角 $\theta_3[\text{rad}]$, (c)はリンク2の振れ中心角 $\theta_2[\text{rad}]$, (d)はリンク1の振れ中心角 $\theta_1[\text{rad}]$ をそれぞれ示す。

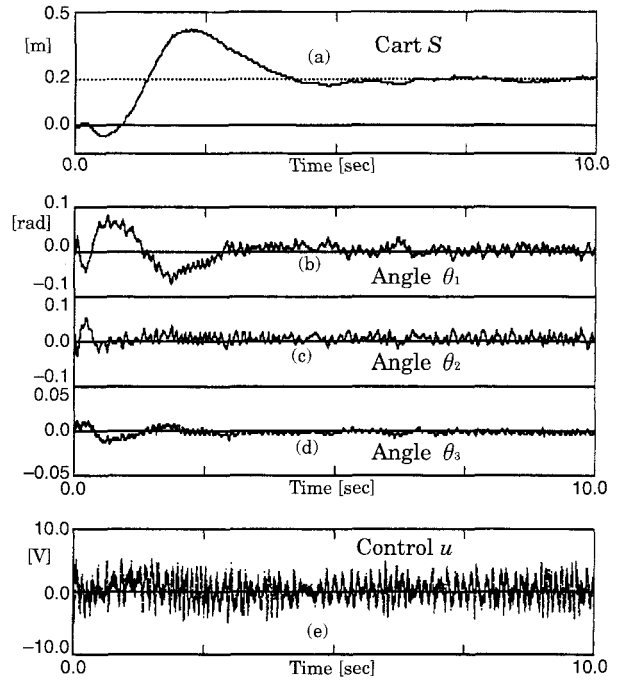
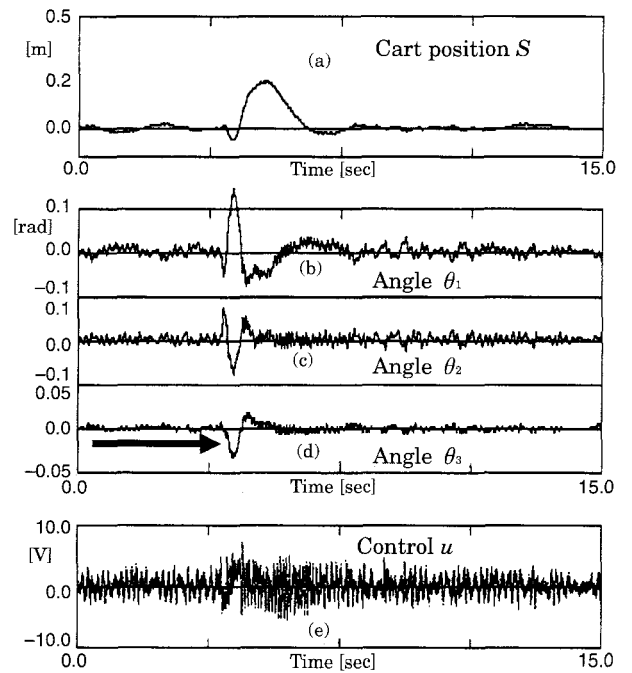
図7 (シミュレーション) と図8 (実機) を比較すると、ほとんど一致していることがわかる。図8の(a)を見ると、正確に目標値 0.2[m] に到達しているので台車の定常偏差が改善できていることと、軌道を見る限りチャタリングは

Fig.6 Gain characteristics of $W_1(s)$ Fig.7 Simulation control vs the cart-stepwise input in the H^∞ system (designed with the loop-shaped H^∞ theory)

$W_1(s)$ 補償器により抑制できていると思われる。また、同図より目標値まで約4[s]で整定していることから、応答性も良好と言える。

図.9は、制御開始後約4[s]からリンク3に指でインパルス状外乱を与えた時の実機制御応答を示す。外乱印加後約4[s]間ですばやく整定し、ロバスト安定性も良好である。

付録の図A1に、図A2で示す周波数整形積分型レギュレータ(FSLQ)系でのインパルス状外乱(図9の場合と同一条件)を第3リンクに加えた場合の実機制御応答を示す。また付録の図A3は、本研究(図9)のスライディングモード制御系の動的滑り面の設計に用いた H^∞ 解を制御

Fig.8 Real system control vs the cart-stepwise input in the H^∞ system (designed with the loop-shaped H^∞ theory)Fig.9 Real system control vs impulsive disturbances applied to the link 3 in the H^∞ system (designed with the loop-shaped H^∞ theory)

器とした系(図A4に示す通常の H^∞ 制御(HIC)系)において、第3リンクにインパルス状外乱(図9の場合と同一条件)を加えた場合の実機制御応答を示す。同様に図A5は図A6で示す周波数整形積分型スライディングモード(FSSM)制御系でのインパルス外乱応答を示す。

図 A3 (HIC系) と図 9 (HSMC系) を比べると, 特に (a) 台車の位置決め制御の安定性の面で多少図 A3 (H^∞ 制御) 系の方が劣っている。図 A1 (FSLQ系) の方は明らかに劣っている。また図 A5 に示す固定滑り面を有する通常の周波数整形型スライディングモード (FSSM) 制御系では, 図 A1 系とほぼ同程度の安定性が見られるが制御力のチャタリングが顕著である。従って, 本文で採用した動的なロバスト超平面を有するスライディングモード制御法が最もロバストな制御性能を有すると言える。これは, 乱された状態がすばやく超平面へ拘束されてスライディングモード状態に入ることが可能にする (強いロバスト性を有する) 動的な切換え面を持つためと考えられる。また, この制御法では, 設計段階で観測器を設計する必要のない出力フィードバック方式であることや, $\gamma > \gamma_{\min}$ を満足する評価指標が $\gamma = 1.05\gamma_{\min}$ と保証されて求解されることなどで, 比較的容易に良好な応答性やロバスト性を有する制御系設計が可能であると言える。

6. お わ り に

H^∞ ループ整形法に基づく線形オペレータを有するスライディング・モード制御則を直列型 3 重倒立振子系に適用し, シミュレーションと実機の両面よりロバスト制御性についてその有効性を検証した。

- (1) (ループ整形理論の特徴を活かし) 切換え超平面に低域通過型周波数特性と積分特性を持たせることによりスライディングモード制御特有のチャタリングの抑制と摺動摩擦抵抗に起因する台車系の定常偏差が改善できる。
- (2) 超平面がロバストに設計されているため (他の線形制御法と比べて) 外乱に対する状態の安定性が良好である。
- (3) 観測器を必要としないことや, 補償器解が比較的容易に設計できることで, サーボ構造を有するプラントには優れたロバスト性を持つ制御設計法と言える。

研究には自主性尊重の問題も重要であるが, 実験的検証には費用も要する。本研究ほか一連の研究に関して, 第 2 ハイテクセンターから一部助成を受けた。

参 考 文 献

- 1) 日高, 川辺 他: 機械力学 (振動の基礎から制御まで), 朝倉書店, 学生のための機械シリーズ No.1 (2000)。
- 2) 奥山, 川辺 他: 制御工学 (古典から現代まで), 朝倉書店, 学生のための機械シリーズ No.2 (2001)。
- 3) 川辺, 原田, 吉田: 支点が水平移動する弾性振り子の運動制御 (特に最小次元 VSS 観測器併合スライディングモード制御系について), 日本機械学会論文集 (C), 65-633, 1823/1828 (1999)。
- 4) 川辺, 飯田, 吉田: 支点の鉛直変動による単振子の振動制御, 日本機械学会論文集 (C), 61-621, 1502/1507 (1998)。
- 5) 飯田, 川辺, 吉田: 支点鉛直変動型振り子系の安定化制御 (特に力学的エネルギーに基づくリアプノフ型関数を用いて), 日本機械学会論文集 (C), 65-633, 1829/1834 (1999)。
- 6) H. Kawabe, K. Yoshida & T. Iida: Vibration Control of a Pendulum System by a VSS Sliding Mode Control Technique, *CONTROL AND INTELLIGENT SYSTEMS*, 28-1, 29-36(2000)。
- 7) H. Kawabe, K. Yoshida & K. Okada: The VSS Control for a Double Pendulum System with a Vertical Movable Pivot, *Int. J. of MODELLING & SLIMULATION* (Accepted for publication, 2002)。
- 8) 川辺, 吉田, 岡本: VSS 制御技術を用いた重心移動による振り子系の振動制御の一法, 日本機械学会論文集 (C), 66-643, 786/492 (2000)。
- 9) 吉田, 川辺, 西村: 重心移動による振り子系の振動制御, システム制御情報学会論文誌, 13-10, 470/477, (2000)。
- 10) 吉田, 植田, 川辺, 西村: 重心移動による振り子系の準最適制御, システム制御情報学会論文誌, 15-9, 502/509 (2002)。
- 11) 神本, 川辺, 吉田: 剛性リンクに載った弾性リンクからなる 2 重倒立振子の安定化制御, 日本機械学会論文集 (C), 67-661, 2806/2812 (2001)。
- 12) 神本, 川辺: H^∞ 制御理論を使った剛性リンクに載った弾性リンクからなる 2 重倒立振子系のスライディングモード制御, 日本機械学会論文集 (C), 68-668, 1133/1139 (2002)。
- 13) 神本, 川辺, 吉田: 弾性ビームで結合された直列型 2 重倒立振子系の H^∞ 制御, 日本機械学会論文集 (C) (投稿中)。
- 14) 川谷・村田・ファハリ・武士俣: ループ整形手法に基づく直列 3 重倒立振子系の安定化制御, 計測自動制御学会論文集 33-8, 852/854 (1997)。
- 15) D.C. McFarlane and K. Glover: Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description, *Lecture Notes in Control Information Sciences* 138, Springer-Verlag (1990)。
- 16) 伊藤・野波: ロバスト超平面を有するスライディングモード制御の柔軟構造物への適用, 日本機械学会論文集 C 編, 65-629, 161/166 (1999)。

付 録

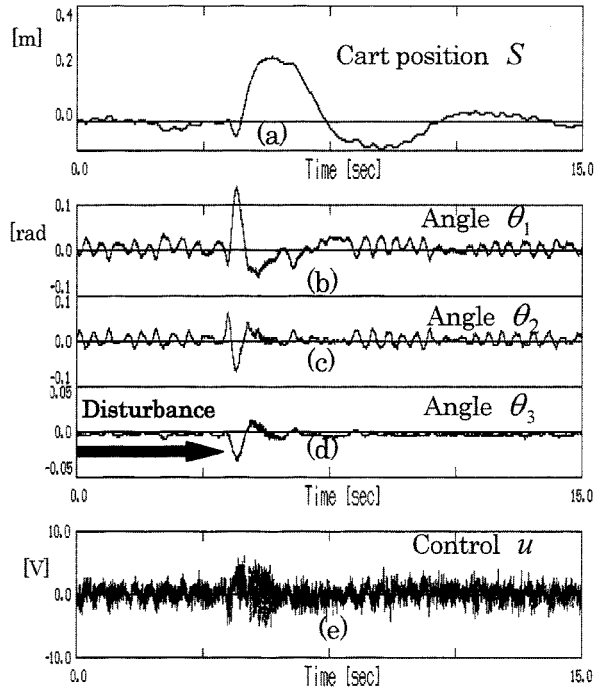


Fig.A1 Real system control vs the impulsive disturbances applied to the link 3 in the integral type *FSLQ* system

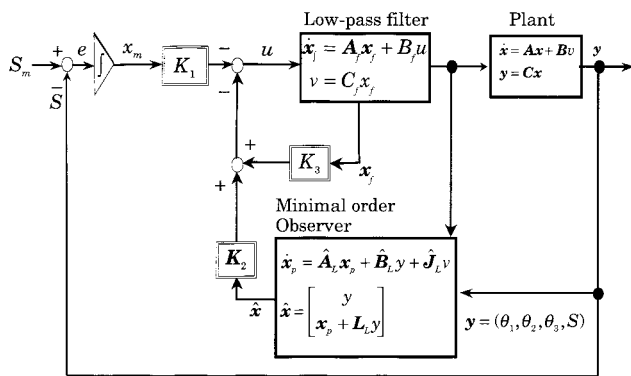


Fig.A2 Integral type *FSLQ* control system

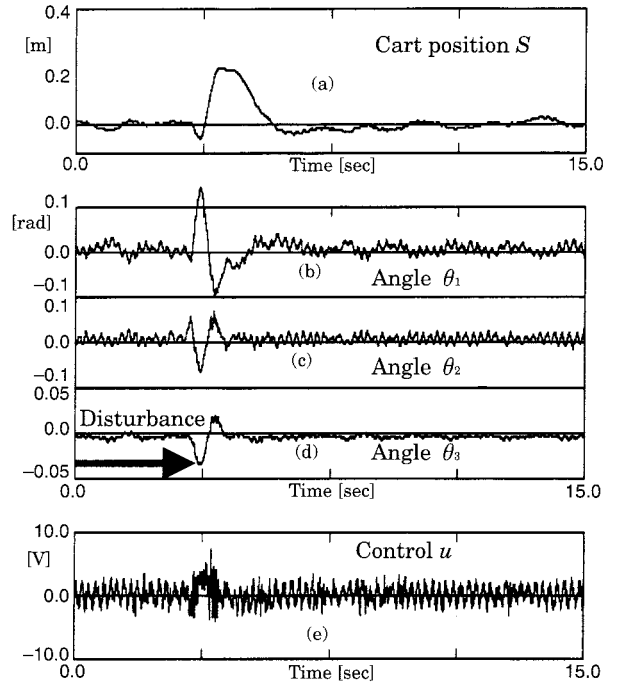


Fig.A3 Real system control vs impulsive disturbances applied to the link 3 in the loop-shaped H^∞ control (*HIC*) system

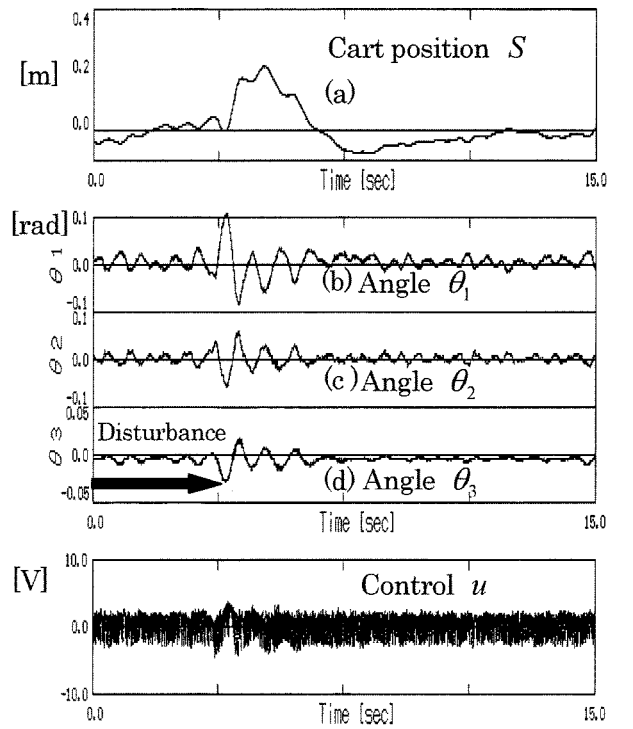


Fig.A5 Real system control vs impulsive disturbance applied to the 3rd link in the integral type *FSMC* system

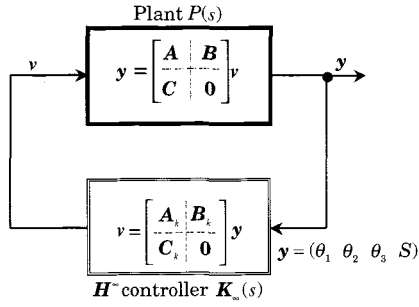


Fig.A4 Loop-shaped H^∞ control (HIC) system

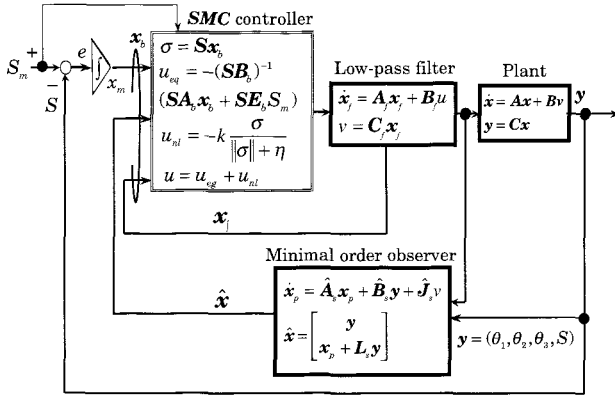


Fig.A6 Integral type FSSM control system

開ループ系 P (式(5))の極 $\lambda(A)$ と閉ループの極 $\lambda(I - PK_\infty)$ を表 A1 および表 A2 に示す。

Table A1 Eigenvalues $\lambda(A)$ of the open loop System P		
Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
1.19e+001	-1.00e+000	1.19e+001
7.06e+000	-1.00e+000	7.06e+000
3.81e+000	-1.00e+000	3.81e+000
0.00e+000	-1.00e+000	0.00e+000
-3.52e+000	1.00e+000	3.52e+000
-4.53e+000	1.00e+000	4.53e+000
-7.45e+000	1.00e+000	7.45e+000
-1.32e+001	1.00e+000	1.32e+001

Table A2 Eigenvalues $\lambda(I - PK_\infty)$ of the closed loop system		
Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-7.50e-002	1.00e+000	7.50e-002
-7.50e-002	1.00e+000	7.50e-002
-1.19e+000	1.00e+000	1.91e+000
-2.09e+000 +1.43e+000i	8.25e-001	2.54e+000
-2.09e+000 -1.43e+000i	8.25e-001	2.54e+000
-3.99e+000 +8.27e-001i	9.79e-001	4.08e+000
-3.99e+000 -8.27e-001i	9.79e-001	4.08e+000
-4.04e+000 +1.81e+000i	9.12e-001	4.43e+000
-4.04e+000 -1.81e+000i	9.12e-001	4.43e+000
-9.79e+000 +9.48e-001i	9.95e-001	9.84e+000
-9.79e+000 -9.48e-001i	9.95e-001	9.84e+000
-9.80e+000 +4.28e+000i	9.16e-001	1.07e+001
-9.80e+000 -4.28e+000i	9.16e-001	1.07e+001
-2.04e+001	1.00e+000	2.04e+001
-2.71e+001 +2.43e+001i	7.44e-001	3.64e+001
-2.71e+001 -2.43e+001i	7.44e-001	3.64e+001
-1.76e+002 +1.79e+002i	7.00e-001	2.51e+002
-1.76e+002 -1.79e+002i	7.00e-001	2.51e+002
-1.83e+002 +2.62e+002i	5.72e-001	3.20e+002
-1.83e+002 -2.62e+002i	5.72e-001	3.20e+002
-2.37e+002	1.00e+000	2.37e+002
-1.06e+003	1.00e+000	1.06e+003

本文中の式(5)のシステムパラメータを次の式(A-1)~(A-3)に示す。

$A=$

Columns 1 through 6

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33.875 & -33.594 & 2.5924 & 0 & -0.091108 & 0.17348 \\ -40.981 & 112.41 & -24.557 & 0 & 0.20713 & -0.54129 \\ 8.8159 & -97.78 & 76.779 & 0 & -0.14394 & 0.58931 \\ -0.42447 & 0.037925 & -0.0029267 & 0 & 0.0006244 & -0.00063267 \end{bmatrix}$$

Columns 7 through 8

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.10338 & 14.306 \\ 0.50535 & -17.307 \\ -0.99584 & 3.7231 \\ 0.00011671 & -4.318 \end{bmatrix}$$

(A-1)

$B=$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -13.71 \\ 16.586 \\ -3.568 \\ 4.1381 \end{bmatrix}$$

(A-2)

$C=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(A-3)

なお前置補償器 $W_1(s)$ パラメータは

$$W_1 = \left[\begin{array}{cc|c} A_{W1} & B_{W1} & 1 \\ \hline C_{W1} & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -351.86 & -63165 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 63165 & 0 \end{array} \right]$$

(A-4)

また後置補償器 $W_2(s)$ パラメータは

$$W_2 = \left[\begin{array}{cc|cccc} A_{W2} & B_{W2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline C_{W2} & D_{W2} & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array} \right]$$

(A-5)