Budapesti Műszaki És Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Műszaki Mechanikai Tanszék

Wolfram Mathematica Beam Package

Dokumentáció

Kammerer Márton

2024. július 18.

1. A package tulajdonsága, célja

Ez a dokumentum egy *Wolfram Mathematica* package-et mutat be, amely egyenes Euler-Bernoulli gerendákkal kapcsolatos síkbeli, statikai és szilárdságtani feladatok megoldását segíti elő. A program nem korlátozódik statikailag határozott esetekre. Statikailag határozatlan nulla DoF rendszerek igénybevételei, reakciói és lehajlásai is meghatározhatóak. A program segítségével készíthetőek igénybevételi ábrák és méretarányos ábra készíthető a vizsgált rúdszerkezetről. A program használata alapvető *Mathematica* programozási ismereteket kíván meg. Ezek nagyrésze a bemutatott példák segítségével elsajátítható. A package által kínált függvények dinamikusan együtt tudnak működni az alapvető *Mathematica* függvényekkel. Fontos tulajdonsága a programnak, hogy egyes problémák megoldás szimbolikusan is kivitelezhető, így például egy kérdéses rúdszerkezet lehajlása vagy reakciója paraméteresen is meghatározható.

2. Az alkalmazott megoldási módszer

A program elsődleges célja, hogy meghatározza az igénybevételi-, szögelfordulási- és lehajlás függvényt. Ehhez az ún. szingularitás függvények családját használja. Ezt a módszert Macaulay (1853-1936) vezette be rúdszerkezetek megoldására. A megoldáshoz a Dirac-delta ($\delta(x)$), annak első és második deriváltja, a Heaviside-függvény (vagy egységugrás) és ennek integráljai vannak használva. Ezek a függvények matematikailag precízebbek, mint módszer lefektetésénél használtak, azonban jelen alkalmazás során azonos eredményt adnak. A definíció szerint a következő függvények vannak használva:

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{2.1}$$

ahol $\langle ... \rangle$ a Macaulay zárójel. Amennyiben $n = 0$, a Heaviside-függvényt[1] (2.1 ábra) kapjuk:

$$\langle x-a \rangle^0 = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} = H_a(x). \tag{2.2}$$

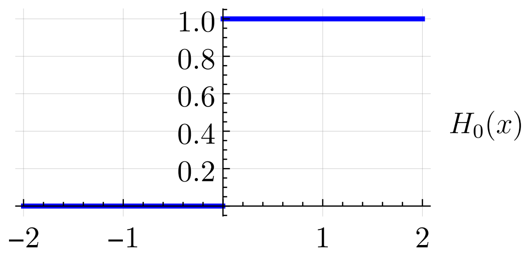
Hasonlóképpen, ha $n = -1$ akkor $\delta_a(x)$, a helyen vett Dirac-deltát kapjuk. Csökkentve n értékét pedig $\delta_a(x)$ deriváltjait kapjuk. Ezeknek a deriváltaknak az értelmezése nem lehetséges[2] hagyományos analízis segítségével, most csak "késleltetett kapcsolóként" szükséges gondolni rájuk.

Fontos továbbá szót ejteni ezeknek a függvényeknek az integrálásáról is.

$$\int \langle x-a \rangle^n \mathrm{d}x = \begin{cases} \langle x-a \rangle^{n+1}, & n < 0 \\ \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1}, & n \geq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

[1] Alkalmazástól függően $H(x)$ nullában zérus, 1/2 vagy 1, esetenként nem definiált. Általános alkalmazásban éppen egy pontban az értéke nem kifejezetten érdekes, ugyanis ezeket a függvényeket jellemzően időfüggő problémák leírására használják, ahol a deriváltaknak és az integráloknak van jelentős szerepe. Például egy ütközés során tudjuk, hogy az ütközés előtt áll a testünk, utána pedig (tegyük fel) mozog. Az ütközésnek az egyetlen pillanatát vizsgálni nehézkes, általában modellezési egyszerűsítésekkel élünk és nem is feltétlen érdekes. Most viszont igenis fontos tudni, hogy egy adott pontban mennyi a függvény értéke: $H(0) = 1$ a kifizetődő.

[2] A Dirac-delta lazán értelmezve egy olyan függvény, amely mindenhol zérus, kivéve 0-ban, mert ott végtelen. Ezen felül integrálja a teljes értelmezési tartományon 1. Ennek a deriváltja, azaz az érintőjének a meredeksége grafikusan nem értelmezhető. Bevezethető a deriváltja is a Dirac-deltának precízen, ám ehhez nem elég lazán definiálva függvényként értelmezni, disztribúcióként kell kezelni.

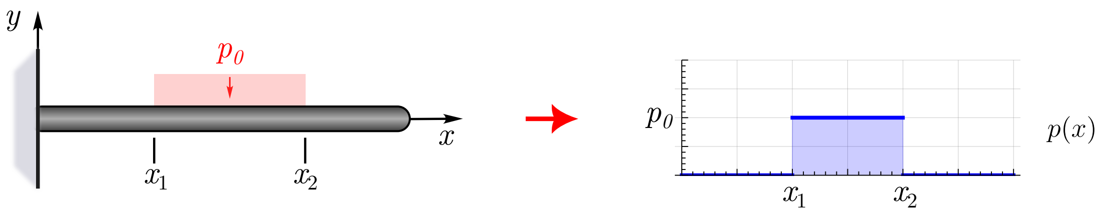


2.1. ábra. Heaviside-függvény

azaz amennyiben $n < 0$ a szingularitás függvényünknek csak a rendjét növeljük integrálással (egyre közelebb érünk, hogy $n = 0$-nál "berobbanjon"), $n \geq 0$ esetén pedig hatványfüggvény szerint integrálunk.

Ezek a függvények abban jelentenek segítséget, hogy a gerendánk terheléseit egyetlen függvény segítségével le tudjuk írni, méghozzá úgy, hogy nincs szükség részekben definiálni. Ez általánosításra, számítógépes számításokra kifejezetten alkalmas módszer. Tehát, ha fel tudjuk írni a megoszló-terhelés függvényünket, akkor annak integrálásával megkapjuk a nyíróerő függvényt, majd a hajlítónyomatéki függvényt, továbbá élve az egyszerűsített rugalmas szál differenciálegyenletével, megkapjuk a szögelfordulás és a lehajlás függvényeket is. A megoszló-terhelés függvényünkben egy állandó intenzitású vonal mentén megoszló terhelés $x = x_1$-ben egy p_0 intenzitású ugrást jelent, csakúgy, mint $x = x_2$-ben, amikor véget ér (2.2 ábra).

$$p(x)_p = p_0 \left(\langle x - x_1 \rangle^0 - \langle x - x_2 \rangle^0 \right) \tag{2.4}$$



2.2. ábra. Megoszló-terhelés függvény

Hasonlóképpen, a nyíróerő függvényben a koncentrált erők jelennek meg szakadásként:

$$V(x)_F = F\langle x - x_0 \rangle^0. \tag{2.5}$$

Mivel a megoszló-terhelés függvény és a nyíróerő függvény között $\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = -p(x)$ differenciális kapcsolat áll fent, a koncentrált erő megjeleníthető a megoszló-terhelés függvényben:

$$p(x)_F = -F\langle x - x_0 \rangle^{-1}. \tag{2.6}$$

Élve az analógiával, hogy $\frac{\mathrm{d}M_h(x)}{\mathrm{d}x} = -V(x)$, a koncentrált nyomatékok is megjeleníthetőek a megoszló-terhelés függvényben:

$$p(x)_M = M\langle x - x_0 \rangle^{-2}. \tag{2.7}$$

Ezzel az összes terhelést felírtuk. Ilyen módon továbbá figyelembe vehető a Gerber tartóknál megjelenő csukló is. Gerber tartónak nevezzük azt a tartót, amely hossza mentén nyomaték átadására nem alkalmas csuklóval meg van szakítva. Ez a módszer nagyméretű szerkezetek (például hidak) maximális hajlítónyomatékának csökkentésére alkalmas. Mint azt láthattuk, a koncentrált erők a nyíróerő függvényben, a hajlítónyomatékok a hajlítónyomatéki függvényben idéznek elő szakadásokat. A Gerber tartónál beiktatott csukló a szögelfordulás függvényben fog szakadást előidézni: hatására a rugalmas szálunk "csúcsos" lesz. Figyelembe vehető tehát egy ilyen csukló a megoszló-terhelés függvényben:

$$p(x)_S = c\langle x - x_0\rangle^{-3}, \tag{2.8}$$

ahol az előidézett ugrás a szögelfordulás függvényben $S_0 = \frac{c}{IE}$ lesz (IE a tartó hajlítómerevsége).
A végleges megoszló-terhelés függvény tehát:

$$p(x) = p(x)_p + p(x)_F + p(x)_M + p(x)_S. \tag{2.9}$$

Fontos megjegyezni, hogy az általános gyakorlattal szemben itt nem a szabadtest-ábrát használtuk az igénybevételi függvények felírására. Az igénybevételi függvényünkben explicit egy bizonyos kényszer ismeretlenként nem is jelenik meg. Csupán a terheléseink vannak felvéve, majd a kényszerek hatását implicit módon kezeljük integrálási konstansokkal.

Felírhatjuk egy gerenda rugalmas szálának egyszerűsített (kis kitérések) differenciálegyenletét a következő alakban:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{IE}. \tag{2.10}$$

Felhasználva az eddigieket, felírható ez az egyenlet a következő formában is:

$$\frac{\mathrm{d}^4 w(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p(x)}{IE}, \tag{2.11}$$

figyelembe véve, hogy a hajlítómerevség állandó a keresztmetszet mentén és $w(x)$ a lehajlás függvény. Ezt a negyedrendű differenciálegyenletet kell megoldanunk, ahhoz, hogy ismerjük a tartó lehajlás függvényét. Ezt differenciálva megkapjuk a szögelfordulás-, hajlítónyomaték- és nyíróerő függvényt. Ennek a negyedrendű differenciálegyenletnek a megoldásához minimum négy peremfeltételre van szükségünk. Abban az esetben, ha Gerber tartót készítünk, csuklónként 1 db peremfeltétel szükséges még, és minden hozzáadott kényszer további egy peremfeltétel meghatározását igényli. Ezeket a peremfeltételeket a kényszereink segítségével tudjuk felírni. Mint azt a program használatánál látni fogjuk, a rúd két végének kényszereit minden esetben meg kell határoznunk. Ez lehet befogás, csukló, görgő vagy szabad vég. A különböző kényszerekre a következő peremfeltételeket tudjuk felírni:

Kényszer	Peremfeltétel 1	Peremfeltétel 2
Befogás	$w(x_0) = 0$	$S(x_0) = 0$
Csukló	$w(x_0) = 0$	$(M(x_0) = M_0(x_0))$
Görgős támasz	$w(x_0) = 0$	$(M(x_0) = M_0(x_0))$
Szabad vég	$M(x_0) = M_0(x_0)$	$V(x_0) = V_0(x_0)$
Gerber csukló	$M(x_0) = M_0(x_0)$	

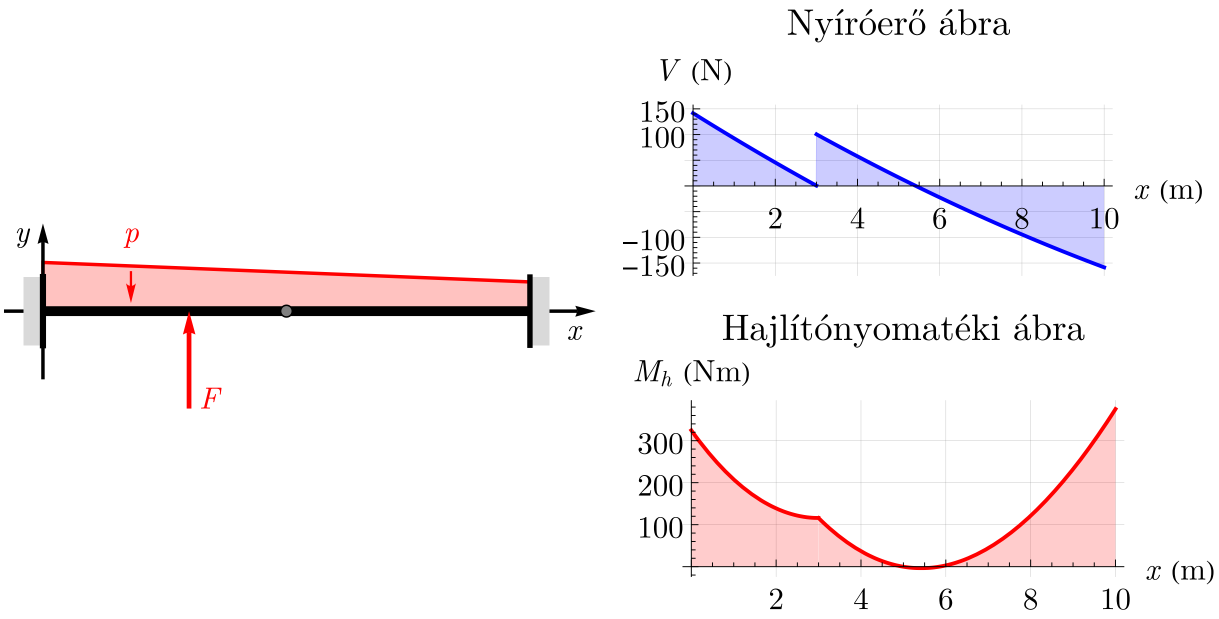
A zárójeles peremfeltételek felírására csak akkor van szükség, ha az a rúd végén található. $M(x_0) = M_0(x_0)$ és $V(x_0) = V_0(x_0)$ kifejezés azt jelenti, hogy az adott pontbeli értéke a hajlítónyomaték vagy a nyíróerő függvénynek megegyezik az abban a pontban található terheléssel (ennek a matematikai kezeléséhez volt szükség, hogy a Heaviside függvény nullában egyet vegyen fel). Ezeket a peremfeltételeket a program automatikusan felírja a kiválasztott kényszerek szerint és az így adódó egyenletrendszert megoldja az integrálási konstansokra / bevezetett ismeretlenekre. Az így kapott megoldás ($w(x)$) differenciálásával felírhatóak az egyes igénybevételi függvények is. Nagyon fontos megjegyezni, hogy ez a módszer jelentősen eltér az eddig tanult módszerektől. A megoldás során nem használjuk a statika alapegyenleteit (azaz, hogy $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ és $\sum M_A = 0$), de bebizonyítható, hogy az így kapott megoldás azonos a tanult módszerrel kapott megoldással. Látható, hogy úgy határoztuk meg az igénybevételi függvényeket, hogy a tartónknak létezik olyan reakciókomponense, amiről nincsen eddig explicit információnk.

A reakciókat (erők és nyomatékok) az igénybevételi ábrák segítségével tudjuk meghatározni. Nyíróerő függvényben szakadás jelentkezik, ott ahol koncentrált erővel terheljük a tartót(2.3 ábra). Ilyen koncentrált erő egy kényszer reakciója is. Tehát meghatározhatjuk egy kényszer reakcióerejét, ha vesszük a kétoldali határértékek különbségét:

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} V(x) - \lim_{x \to x_0^-} V(x), \tag{2.12}$$

feltéve, hogy a nyíróerő függvényünket a tartó értelmezési tartományán kívül zérusnak definiáljuk. Ugyanezen megfontolásokkal kiszámítható a reakciónyomaték is:

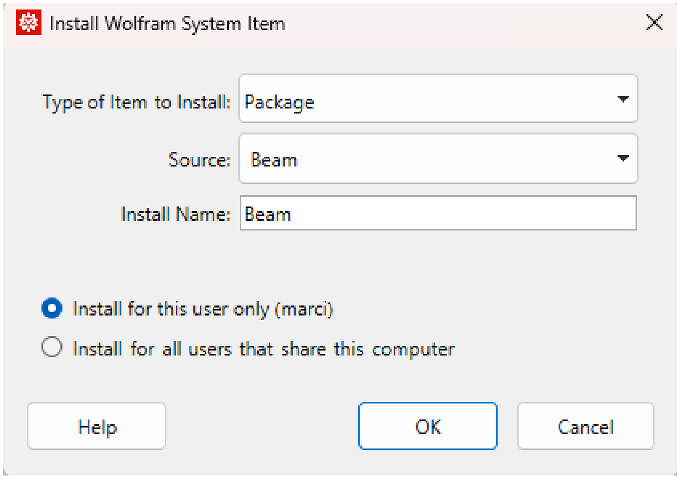
$$M(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} M_h(x) - \lim_{x \to x_0^-} M_h(x), \tag{2.13}$$



2.3. ábra. Nyíróerő és hajlítónyomatéki ábra egy adott tartóra

3. Telepítés

A package telepítéséhez nyissunk meg egy *Mathematica* notebook-ot, majd kattintsunk a **`File -> Intall...`** gombra. Telepítsük a *Beam.wl* package fájlt a következő beállításokkal:



3.1. ábra. Telepítési beállítások

Amennyiben egy notebook-ban szeretnénk használni a package-et, hívjuk be a **`«Beam‘`** paranccsal, ahol az ékezet az úgynevezett repülő ékezet (Alt Gr + 7).

4. A package használata

A package két fő területe az eddig bemutatott számítások elvégzése és a tartó ábrájának elkészítése. Mindkét esetben az első lépés, hogy konfiguráljuk a tartónkat a **`BeamConfig[]`** függvénnyel.

```
myBeam = BeamConfig[x, L, IE, bnd, options]
```

A függvény első argumentuma, **`x`**, az a **`Symbol`** típusú (azaz nincs rá definiálva "semmi") betű, amely a tartó hosszmenti koordinátája. Jellemzően x-et használunk hozzá. Az **`L`** argumentum megadja a tartó teljes hosszát. Az **`IE`** argumentum megadja a tartó hajlítómerevségét. A **`bnd`** argumentummal adjuk meg a tartó két végének a kényszerezését. Megadása listában felsorolt két szöveggel történik:

```
bnd = {"Fixed","Pinned"}
```

megadja, hogy $x = 0$-ban a kényszer befogás, $x = L$-ben pedig csuklós támasz. A lista elemei lehetnek: **`"Fixed", "Pinned", "Roller", "Free"`**. Az **`options`** helyére vesszővel elválasztva a különféle terhelések, támaszok, csuklók adhatók meg hozzárendelések formájában:

`PointLoad -> {`$\boldsymbol{F_{x1}}$**`, `**$\boldsymbol{F_{y1}}$**`, `**$\boldsymbol{x_1}$**`, `**$\boldsymbol{F_{x2}}$**`, `**$\boldsymbol{F_{y2}}$**`, `**$\boldsymbol{x_2}$**`, ...}`** megadja, hogy F_{xi} és F_{yi} komponenssel $x = x_i$ helyen koncentrált erő működik. Több erő esetén folytatólagos felsorolással adható meg több erő. Az egyes komponensek az origóhoz rögzített koordináta-rendszer irányítottságától függően pozitív vagy negatív előjelűek (jobbra pozitív, fel pozitív).

`LineLoad -> {`p_1`, `a_1`, `q_1`, `b_1`, `p_2`, `a_2`, `q_2`, `b_2`, ...}` megadja, hogy $x_1 = a_1$ ponttól $x_2 = b_1$ pontig tartó vonal mentén megoszló erő működik, melynek intenzitása x_1 pontban p_1, x_2 pontban q_1. Az intenzitások csak y irányúak lehetnek, melyek pozitívak, ha pozitív y irányba mutatnak. Egy vonal mentén megoszló erő 4 paraméterrel helyezhető el.

`LoadFunction -> {`$p_1(x)$`, `a_1`, `b_1`, `$p_2(x)$`, `a_2`, `b_2`, ...}` megadja, hogy $x_1 = a_1$ ponttól $x_2 = b_1$ pontig tartó vonal mentén megoszló erő működik, melynek intenzitása $p_1(x)$ függvény szerint változik. A függvény bemeneti paramétere meg kell egyezzen a konfigurálás első argumentumában megadott változóval.

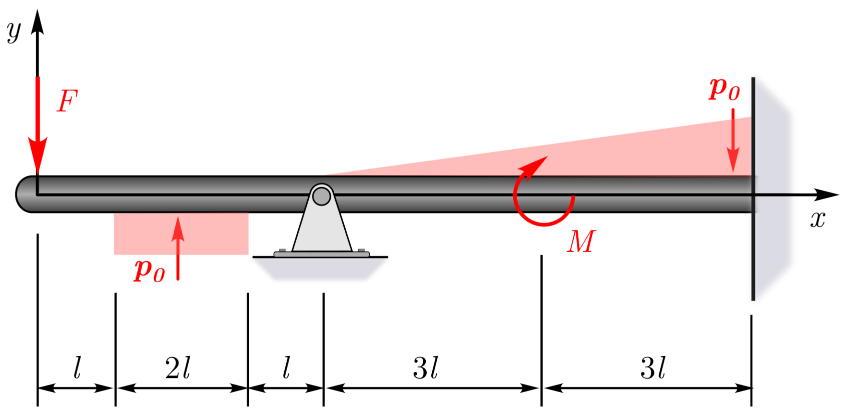
`MomentLoad -> {`M_1`, `x_1`, `M_2`, `x_2`, ...}` megadja, hogy $x = x_i$ pontban koncentrált erőpár működik M_i nagysággal. M_i pozitív, ha a koncentrált erőpár vektora pozitív z irányú (óra mutató járásával ellentétes forgatás).

`InterPin -> {`x_1`, `x_2`, ...}` megadja, hogy $x = x_i$ helyen csuklós támasz található. Ezt olyan csuklós támasz konfigurálására szükséges használni, amely a tartó végétől eltérő helyen van. Amennyiben a csukló a tartó végén található, **`bnd`** beállítás használata szükséges.

`InterRoller -> {`x_1`, `x_2`, ...}` megadja, hogy $x = x_i$ helyen görgős támasz található. Ezt olyan görgős támasz konfigurálására szükséges használni, amely a tartó végétől eltérő helyen van. Amennyiben a görgős támasz a tartó végén található, **`bnd`** beállítás használata szükséges.

`ShearConnection -> {`x_1`, `x_2`, ...}` megadja, hogy $x = x_i$ helyen a tartó meg van törve nyomaték átvitelére nem alkalmas csuklóval. Ez az opció Gerber tartó konfigurálására alkalmas.

1. Példa. *Konfiguráljuk a 4.1 ábrán látható tartót!*



4.1. ábra. Tartó konfigurálás példa

A konfigurált tartónkat nevezzük el *myBeam*-nek! Így a konfigurált tartó:

```
myBeam = BeamConfig[x, 10 l, IE, {"Free", "Fixed"},
      InterPin -> {4 l},
      PointLoad -> {0, -F, 0},
      LineLoad -> {p0, l, p0, 3 l, 0, 4 l, -p0, 10 l},
```

```
MomentLoad -> {-M, 7 l}];
```

A számításokat a **`Beam[]`** függvénnyel végezhetjük el. A bemenete a függvénynek egy konfigurált tartó, tehát az előzőek szerint:

`myBeamSol = Beam[myBeam]`

A függvény kimenete egy lista, amely a következő elemeket tartalmazza:

$$\{V(x),\ M_h(x),\ S(x),\ w(x),\ L,\ x\}$$

Az egyes függvények egy kifejezéssel vannak megadva, így ha szakadás található benne, az a bemutatott Heaviside-függvénnyel van reprezentálva. A *Mathematica* függvénye **`HeavisideTheta[]`**.

További függvények:

`DiagramsPlot[myBeamSol]` elkészíti az igénybevételi ábrákat egy megoldott tartó alapján.

`ReactionForce[myBeamSol,` x_0**`]`** megadja a reakcióerő előjeles nagyságát $x = x_0$ helyen.

`ReactionMoment[myBeamSol,` x_0**`]`** megadja a reakciónyomaték előjeles nagyságát $x = x_0$ helyen.

`Deflection[myBeamSol,` x_0**`]`** megadja a lehajlást $x = x_0$ helyen. Pozitív mennyiség pozitív y irányba való lehajlást jelent.

`NWmax[myBeamSol]` megadja a tartó maximális abszolút lehajlását numerikus szélsőérték keresés segítségével.

`DrawBeam[myBeam]` elkészíti a tartó ábráját a konfigurálás alapján. A különböző terhelések mérete nagyságban arányos az azonos típusú terhelésekhez képest.

5. Példák

2. Példa. *A 5.1 ábrán vázolt síkbeli Gerber-tartó két rúddarabból áll. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeit a szerkezetnek és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat. Határozzuk meg a tartó lehajlását a B pontban és a reakcióerőket az A és a C pontban.*
Adatok: $a = 1$ m, $p = 800$ N/m, $F = 1400$ N, $M_0 = 200$ Nm, $IE = 10^6$ Nm^2.

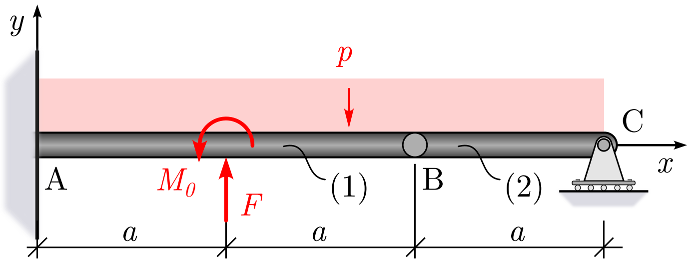
Megoldás:
Elsőként nyissunk meg egy *Mathematica* notebook-ot és hívjuk be a *Beam* package-et a következő paranccsal:

```
« Beam`
```

Definiáljuk a megadott mennyiségeket:

```
a = 1; p = 800; F = 1400; M0 = 200; IE = 10^7;
```

Konfiguráljuk a tartót:



5.1. ábra. Gerber-tartó

```
myBeam = BeamConfig[x, 3 a, IE, {"Fixed", "Pinned"},
      PointLoad -> {0, F, a},
      LineLoad -> {-p, 0, -p, 3 a},
      MomentLoad -> {M0, a},
      ShearConnection -> {2 a}];
```

Oldjuk meg a tartót:

```
myBeamSol = Beam[myBeam];
```

Ebből a megoldásból kinyerhetjük az igénybevételi függvényeket, ha vesszük az output listának az első és második elemét:

```
V = myBeamSol[[1]]
Out[1]= 200 (3 - 4 x + 7 HeavisideTheta[-1 + x])
Mh = myBeamSol[[2]]
Out[2]= -200 (-4 + 3 x - 2 x^2 + (-8 + 7 x) HeavisideTheta[-1 + x])
```

Ábrázoljuk a diagramokat a beépített paranccsal:

```
DiagramsPlot[myBeamSol]
```

Ezeket a diagramokat a 5.2 ábra mutatja.

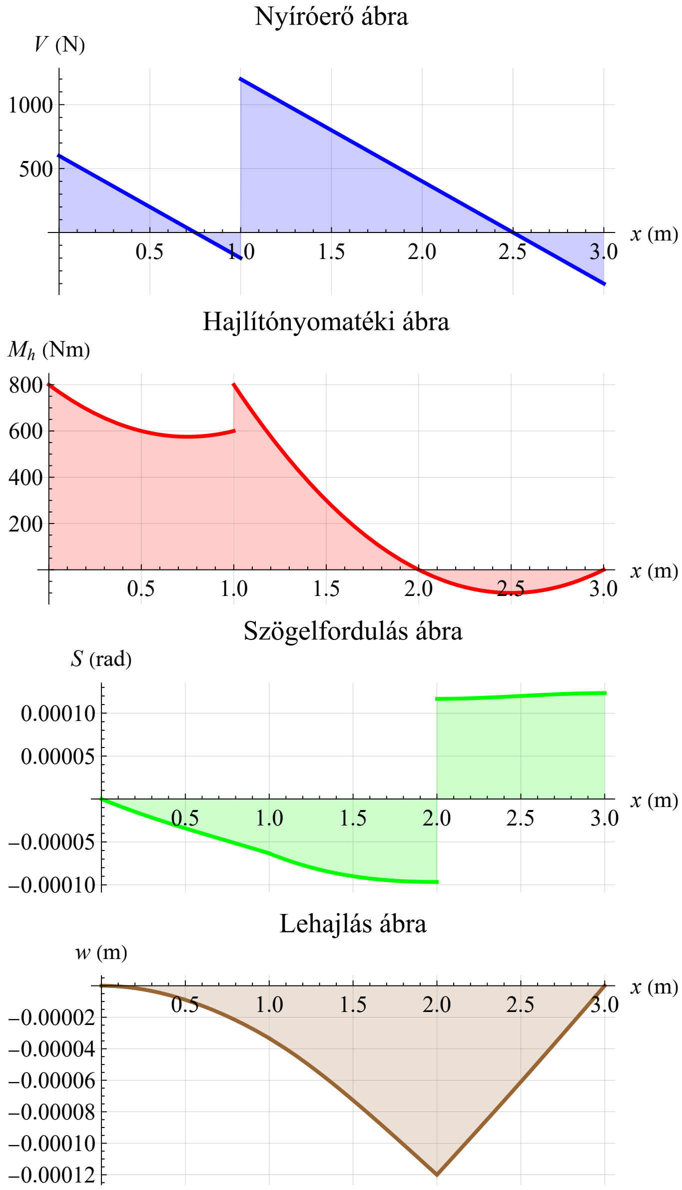
A reakciókat a beépített függvények segítségével határozhatjuk meg.

```
reakcioEroA = ReactionForce[myBeamSol, 0]
Out[3]= 600
reakcioNyomA = ReactionMoment[myBeamSol, 0]
Out[4]= 800
reakcioEroC = ReactionForce[myBeamSol, 3 a]
Out[5]= 400
```

Lehajlás meghatározására a B pontban a package függvényét használhatjuk:

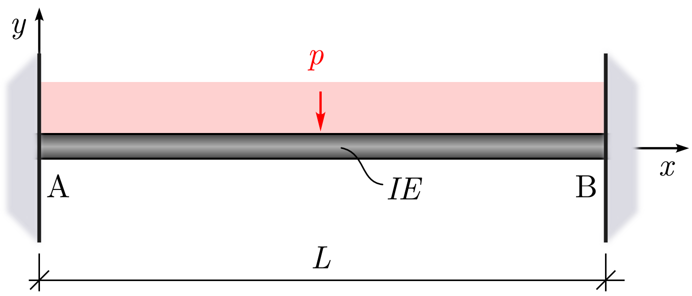
```
lehajlasB = Deflection[myBeamSol, 2 a]
Out[6]= -0.00012
```

A negatív előjel azt jelenti, hogy a kitérés negatív y irányban történik. A megoldott példa Csernák Gábor: Statika jegyzet 5.4 példája.



5.2. ábra. Igénybevételi ábrák, szögelfordulási és lehajlási ábra

3. Példa. *Határozzuk meg az alábbi tartónál a hajlítónyomatéki igénybevétel eloszlását! Mekkora a falakban ébredő nyomaték paraméteresen? Hol lesz a hajlítónyomaték zérus értékű? A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó.*



5.3. ábra. Statikailag határozatlan példa

Megoldás:

A program nagy előnye, hogy a számításokat el lehet végezni paraméteresen is. Numerikus értékekkel lehet azonban csak tartót rajzoltatni és diagramokat készíteni. Kezdjük a tartó konfigurálásával!

```
myBeam = BeamConfig[x, L, IE, {"Fixed", "Fixed"},
     LineLoad -> {-p, 0, -p, L}];
myBeamSol = Beam[myBeam];
```

A reakciók nagyságát meghatározhatjuk a `ReactionMoment[]` függvénnyel:

```
reakcioA = ReactionMoment[myBeamSol, L]
```

Out[7]= $\frac{pL^2}{12}$

```
reakcioB = ReactionMoment[myBeamSol, L]
```

Out[8]= $-\frac{pL^2}{12}$

Látható tehát, hogy a reakció nyomaték a B pontban ellentétes előjelű az A pontbeli reakcióval. A zérus nyomaték megkereséséhez fejezzük ki a hajlítónyomatéki függvényt:

```
Mh = myBeamSol[[2]];
```

Majd keressük meg a zérus értékek helyét:

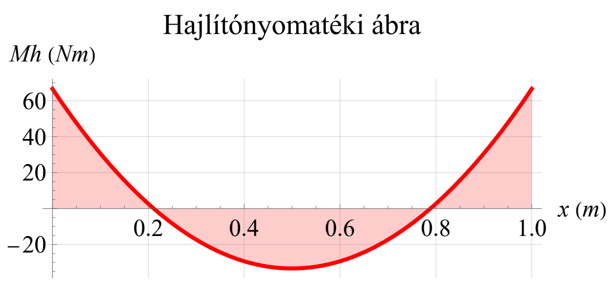
```
zerusNyom = Solve[Mh == 0, x]
```

Out[9]= $\{\{x->\frac{3L-\sqrt{3}L}{6}\},\{x->\frac{3L+\sqrt{3}L}{6}\}\}$

Végül ábrázoljuk a hajlítónyomatéki függvényünket, ehhez adjunk numerikus értékeket.

```
Plot[Mh /.{L -> 1, p -> 1}, {x, 0, 1},
     PlotStyle -> Red,
     Filling -> Axis,
     AxesLabel -> {Style["x (m)", FontSlant -> Italic],
       Style["Mh (Nm)", FontSlant -> Italic]},
     PlotLabel -> "Hajlítónyomatéki ábra",
     LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", Black, FontSize -> 12},
     ImageSize -> 300,
     GridLines -> Automatic,
     AspectRatio -> 0.4]
```

Ez a feladat a Szilárdságtan példatár 7.13. példája.



5.4. ábra. Statikailag határozatlan példa hajlítónyomatéki ábra