

# 2021/01/15

---

出典:2006成蹊大

満点:20点 / 目標:15点

以下の  $x$  の方程式について, 次の問に答えよ.

$$x^2 - 2|x| - 3 < 0 \cdots (1)$$

$$ax^2 - x - a^2x + a > 0 \cdots (2)$$

1. 方程式 (1) を解け.
2. 方程式 (1), (2) を連立して解け. ただし,  $a > 0$  とする.

## 解答・解説(2021/01/22)

きっちり場合分けして解く連立不等式の問題です. 難しかったですね. 数直線を使った大小比較は基本中の基本なので, 必ず身につけましょう.

なお, 黄チャートのp58(例題34), p59(共通範囲と合わせた範囲の違い), p153(例題100)が参考になるので, 確認しておいてください.

- 絶対値は中身の符号で場合分け
- 文字を含んだ2次不等式は, 大小関係を考える

1/15 数I口改

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| - 3 < 0 \quad \dots ① \\ ax^2 - x - a^2x + a > 0 \quad \dots ② \end{cases}$$

① について.

(i)  $x \geq 0$  のとき  $|x| = x$  だから

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\text{これを解いて } -1 < x < 3$$

$$\text{場合分けの条件より } 0 \leq x < 3$$

(ii)  $x < 0$  のとき  $|x| = -x$  だから

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$\text{これを解いて } -3 < x < 1$$

$$\text{場合分けの条件より } -3 < x < 0$$

(i), (ii) の解を合すると,  $-3 < x < 3$ 

② について. 左辺を因数分解して

$$(ax-1)(x-a) > 0$$

いま  $a > 0$  だから両辺を  $a$  で割って

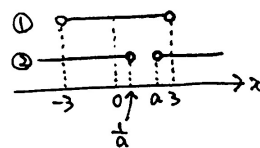
$$(x - \frac{1}{a})(x - a) > 0 \quad \text{を得る.}$$

次に,  $\frac{1}{a}$  と  $a$  の大小を比較する.(i)  $\frac{1}{a} < a$  ならば  $1 < a$  のとき,② の解は  $x < \frac{1}{a}, a < x$  となる.① と ② の共通範囲は,  $a$  と  $3$  の大小関係によって定まる.(A)  $1 < a < 3$  のとき

① と ② の共通範囲は

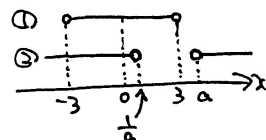
$$-3 < x < \frac{1}{a}$$

$$a < x < 3$$

(B)  $3 \leq a$  のとき

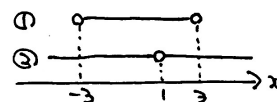
① と ② の共通範囲は

$$-3 < x < \frac{1}{a}$$

(ii)  $\frac{1}{a} = a$  ならば  $a = 1$  のとき.② の解は  $x \neq 1$  だから,

① と ② の共通範囲は

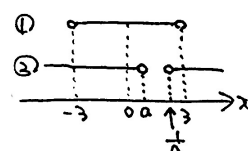
$$-3 < x < 1, 1 < x < 3$$

(iii)  $\frac{1}{a} > a$  ならば  $0 < a < 1$  のとき,② の解は  $x < a, \frac{1}{a} < x$  となる.① と ② の共通範囲は,  $\frac{1}{a}$  と  $3$  の大小関係によって定まる.(A)  $\frac{1}{a} < 3$  ならば  $\frac{1}{3} < a < 1$  のとき

① と ② の共通範囲は

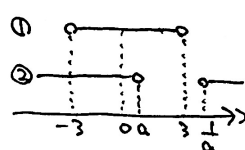
$$-3 < x < a$$

$$\frac{1}{a} < x < 3$$

(B)  $3 \leq \frac{1}{a}$  ならば  $0 < a \leq \frac{1}{3}$  のとき

① と ② の共通範囲は

$$-3 < x < a$$



(i), (ii), (iii) より, ① と ② の共通範囲は

$$0 < a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき } -3 < x < a$$

$$\frac{1}{3} < a < 1 \text{ のとき } -3 < x < a, \frac{1}{a} < x < 3$$

$$a = 1 \text{ のとき } -3 < x < 1, 1 < x < 3$$

$$1 < a < 3 \text{ のとき } -3 < x < \frac{1}{a}, a < x < 3$$

$$3 \leq a \text{ のとき } -3 < x < \frac{1}{a}$$