2021/06/25

満点:20点 / 目標:12点

> 2021/06/28 誤記修正しました

直線 l 上に 3 点 A, B, C をこの順にとり, 線分 BC を直径とする円を O とする. 直線 m は点 A を通り, 円 O の円周と 2 点で交わる. ただし, $l \neq m$ である. m と O の 2 交点のうち, B に近い交点を B', 他の交点を C' とする. 直線 BB' と直線 CC' の交点を P とし, 直線 BC' と直線 CB' の交点を Q, 直線 PQ と l の交点を R とする.

(1) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RB}} = \dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AB}}$ が成り立つことを示せ.

(2) 直線 PQ は l に垂直であることを示せ.

(3) 直線 m が上の条件を満たしながら動くとき, 点 P の軌跡を求めよ.

解答・解説

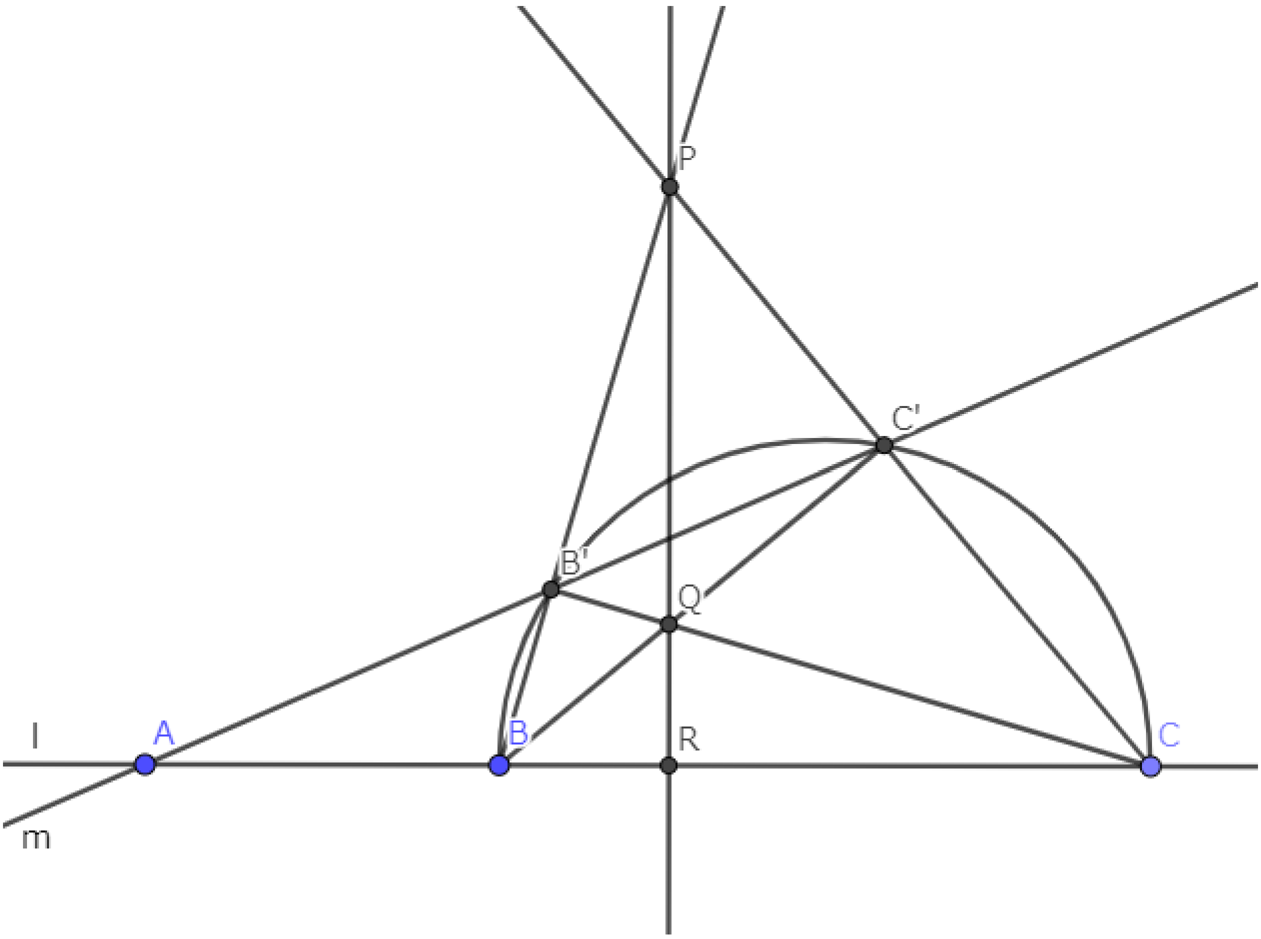
▶ 解答・解説

純粋な幾何の問題です. 問題文ミスってて大変申し訳ありませんでした.

(2) では三角形の垂心の性質を使って解答することになります. 三角形の五心について, 定義を確認しておきましょう.

	定義	**性質**
重心	中線の交点	各中線を 2:1 に内分する
内心	内角の二等分線の交点	内接円の中心 3辺からの距離が等しい
外心	辺の垂直二等分線の交点	外接円の中心 3頂点からの距離が等しい
垂心	頂点から対辺に下ろした 垂線の交点	
傍心	1つの内角の二等分線と 他の外角の二等分線の交点	傍接円の中心 1つの三角形に対して3つある

きれいに図を描くと以下のようになります. ただし実際には半円ではなく円であり, 直線 m は右下がりにもなりうることに注意してください.

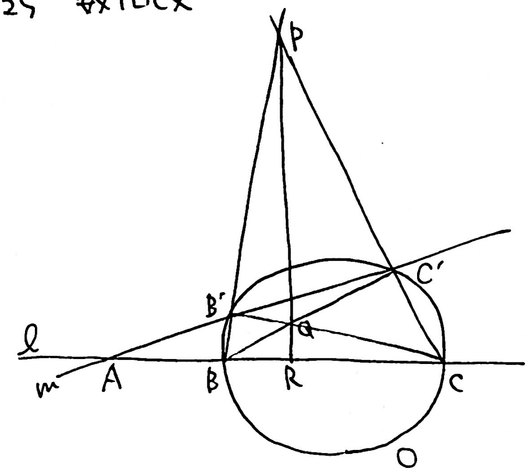


(3) は説明が難しいですが, 文章で

> 線分 BC を $\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$ に内分する点における直線 l の垂線のうち, 円 O の外部にある点

と記述してもいいし, あるいは図示してもいいと思います. 解答例では図示しました.

6/25 数テロ改



(1) $\triangle PBC$ にチェバの定理を適用して，

$$\frac{CR}{RB}\cdot\frac{BB'}{B'P}\cdot\frac{PC'}{C'C}=1 \quad \cdots ①$$

$\triangle PBC$ と直線 m にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{CA}{AB}\cdot\frac{BB'}{B'P}\cdot\frac{PC'}{C'C}=1 \quad \cdots ②$$

①，②より，$\dfrac{CR}{RB}=\dfrac{CA}{AB}$ が成り立つ．

(2) $\angle BB'C$，$\angle BC'C$ はいずれも，円Oの直径 BC に対する円周角だから，

$\angle BB'C = \angle BC'C = 90^\circ$ である．

したがって $PB \perp CB'$，$PC \perp B'C$ が成り立つことより，Q は $\triangle PBC$ の垂心である．

よって $PR \perp BC$．すなわち $PQ \perp \ell$ である．

(3) (1)より，m の引き方にかかわらず

$\dfrac{CR}{RB}=\dfrac{CA}{AB}$ が成り立つので，

R は線分 BC を AB:AC に内分する定点．

また(2)より $PR \perp \ell$ だから，

P は常に R を通る ℓ の垂線の上にある．

ただし，P は円Oの周上および内部にはできず，必ず円Oの外部にある．

以上のことから，P は下図の実線の部分を動く．