

2021/02/27

満点:10点 / 目標:6点

$a > \sqrt{2}$ を満たすとき, 次の3つの数の大小関係を調べよ.

$$\frac{a+2}{a+1}, \quad \frac{a}{2} + \frac{1}{a}, \quad \sqrt{2}$$

解答・解説 (2021/03/05)

数テロとしては初の数学IIです. だんだん出題がキツくなってきます.

大小関係を調べよ, といいますが, 結局やることは**不等式の証明**です. 実際になにか適当な数を代入してみて, 大小関係を予想したあとに, それを証明するとよいでしょう.

- 質問がありました.

大小関係を予想する部分は答案に書くべきでしょうか?

- 私なりの結論としては, **必須ではないが, 書いておいた方がいい**です. 理由は以下の通り.
 - 実験から得られた予想自体が数学的に重要
 - 答案の最初にあると, 今後の見通しが立っているアピールになるので, 加点の対象になる可能性がある
 - そもそも思いついている時点で書くべし

2/27 数70改

$$a=2 \text{ とおくと, } \frac{a+2}{a+1} = \frac{4}{3}, \quad \frac{a}{2} + \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \text{ となる.}$$

$$\frac{a+2}{a+1} < \sqrt{2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \text{ であることを示す.}$$

$$\text{まず, } \frac{a+2}{a+1} < \sqrt{2} \text{ であることを示す.}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - \frac{a+2}{a+1} &= \frac{\sqrt{2}(a+1) - (a+2)}{a+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)a + \sqrt{2}-2}{a+1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)a - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{a+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2})}{a+1} > 0 \end{aligned}$$

$$(\because a > \sqrt{2} \text{ であり, } a-\sqrt{2} > 0 \text{ となる.})$$

$$\text{よって } \frac{a+2}{a+1} < \sqrt{2} \text{ であることを示した.}$$

$$\text{次に, } \sqrt{2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \text{ であることを示す.}$$

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{a} - \sqrt{2} = \frac{a^2 + 2 - 2\sqrt{2}a}{2a} = \frac{(a-\sqrt{2})^2}{2a} > 0$$

$$\text{よって } \sqrt{2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \text{ であることを示した.}$$

$$\text{以上より, } a > \sqrt{2} \text{ ならば } \frac{a+2}{a+1} < \sqrt{2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \text{ である.}$$