

2021/01/22

満点:20点 / 目標:15点

線分 AB と線分 CD が, それぞれの線分の端点ではない1点 P で交わっているとする. 次の2つの条件は同値であることを示せ.

(i) 4点 A, B, C, D は同一円周上にある.

(ii) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

解答・解説 (2021/01/28)

剽窃は絶対にやめてください。大学なら停学になるどころでした。

- 答案を読むと、どうやら「同値」の意味をしっかりと把握していないようです。
 - 高校数学では「必要十分」とだいたい同じ意味として使われます。
- 「(i) と (ii) が同値である」というのは、記号を使って表すと

$$(i) \Leftrightarrow (ii)$$

ということです。つまり、 $(i) \Rightarrow (ii)$ と $(ii) \Rightarrow (i)$ を両方示す必要があります。

この文章は高校2年生も読んでいるので、少し高度な説明もします。

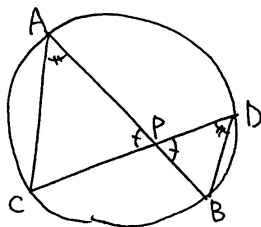
- **同値変形でない操作が加わったとき**、逆が成り立つことの証明が別個に必要になります。
- 数学IIで「軌跡と領域」分野を学習するとき、教科書には以下のように書いてあります。

軌跡を求めるときは、求めた方程式が軌跡になっているか確認する必要がある。ただし、明らかな場合は省略してもよい。

- しかし、**いつ明らかなのか**について解説してくれません。そのため、大部分の高校生が、「とりあえず『逆に、この方程式は条件を満たす』って書いておけばいいか」という感じで答案を書くことになってます。これは大変よくないです。
 - 明確な答えは、**式変形の全てが同値変形によって成立しているとき**でしょう。
- 軌跡は必要十分条件である必要があるので、与えられた条件を変形して導いた方程式や図形(必要性を満たした方程式や図形)が、本当に軌跡となるのか(十分性を満たしているのか)を調べる必要があります。
- 今回の問題では、 $(i) \Rightarrow (ii)$ を示す際に、「2つの図形が相似である \Rightarrow 対応する辺の長さの比が等しい」が同値変形ではないので、逆の確認が必要になりました。

1/22 数研院改

証明 まず, (i) ならば (ii) であることを示す.



$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において,

対頂角は等しいので $\angle APC = \angle DPB$... ①

BC には対する円周角なので $\angle PAC = \angle PDB$... ②

①, ② から, 2組の角がそれぞれ等しいので,

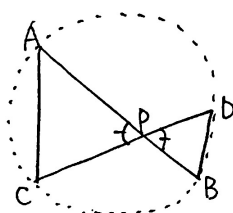
$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ である.

相似な図形では対応する辺の長さは等しいので,

$$PA:PD = PC:PB$$

これを変形して $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ とする.

次に, (ii) ならば (i) であることを示す.



$$(PA \cdot PB = PC \cdot PD)$$

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \text{ より, } PA:PD = PC:PB \text{ ... ③}$$

対頂角は等しいので $\angle APC = \angle DPB$... ④

③, ④ から, 2組の辺の比と2組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ である.

相似な図形では対応する角の大きさは等しいので,

$$\angle CAB = \angle BDC$$

点A, 点Dはともに直線BCに対して同じ側にあり,

円周角の定理より, 4点A, B, C, Dが同一円周上にあるといえる.

以上のことから, (i) と (ii) は同値である.

終