

2021/04/23

満点:20点 / 目標:12点

(1) $x^2 - y^2 = 63$ を満たす自然数 x, y の組を全て求めよ.

(2) $x^3 - y^3 = 63$ を満たす自然数 x, y の組を全て求めよ.

解答・解説 (2021/04/30)

方程式の整数解の問題です。整数の問題は本気を出せば限りなく難しくできるのですが、実際の入試にはこのくらいが出てきやすそうですね。

整数問題の取り組み方

前提として、この手の整数問題は**しらみつぶしに調べれば解ける**という性質があります。たとえば (1) は、

$$(x + y)(x - y) = 63$$

と因数分解できますが、絞り込まずに進めると $(x + y, x - y)$ の組は 12 組あることがわかります。

$$(x + y, x - y) = (1, 63), (3, 21), (7, 9), (9, 7), (21, 3), (63, 1), \\ (-1, -63), (-3, -21), (-7, -9), (-9, -7), (-21, -3), (-63, -1)$$

12 回連立方程式を解いて、 x と y がどちらも自然数になっている組を見つけられれば、それで問題ありません。場合によっては、絞り込みの方法を見つけるより早く解けるかもしれません。

絞り込みの手法

絞り込みの方法はたくさんあるのですが、この問題で最低限覚えておきたいのは以下の 3 つです。

- 文字の範囲に着目して、**正負**を調べる

$x > 0, y > 0$ だから、 $x + y > 0$ である。 $(x + y)(x - y) > 0$ だから、 $x - y > 0$ である。

- 2つの数の差をとって、**大小関係**を調べる

y は自然数で、 $(x + y) - (x - y) = 2y > 0$ だから、 $x + y > x - y$ である。

- 2つの数の和や差をとって、**偶奇**を調べる

x は整数で、 $(x + y) + (x - y) = 2x$ だから、 $x + y$ と $x - y$ を足すと偶数になる。

これらの手法を使って絞り込むと、(1) は 3 通り調べればよいことになります。

$$(x + y, x - y) = (9, 7), (21, 3), (63, 1)$$

解答例ではある程度絞り込んで処理しました。

4/23 数学7022

(1) $x^2 - y^2 = 63$ 対し

$$(x+y)(x-y) = 63 \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $x > 0, y > 0$ 対し $x+y > 0$

$(x+y)(x-y) > 0$ となる $x-y > 0$

また、 $(x+y) - (x-y) = 2y > 0$ 対し

$x+y > x-y$ であることが、

①を満足する $(x+y, x-y)$ の組は

$$(x+y, x-y) = (9, 7), (21, 3), (63, 1)$$

これらの場合で x, y を求め、

$$(x, y) = (8, 1), (12, 9), (32, 31)$$

(2) $x^3 - y^3 = 63$ 対し

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 63 \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで、 $x > 0, y > 0$ 対し

$$x^2 + xy + y^2 > 0$$

$(x-y)(x^2 + xy + y^2) > 0$ 対し $x-y > 0$

また、 $x^2 + xy + y^2 < x-y$ の

大小関係が成り立つ。

→

$$(x^2 + xy + y^2) - (x-y)$$

$$= x^2 + (y-1)x + y^2 + y$$

$$= \left(x + \frac{y-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + y^2 + y$$

$$= \left(x + \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y+1)^2 - 1 \geq -1$$

よって ②を満足する $(x-y, x^2 + xy + y^2)$ の組は

$$(x-y, x^2 + xy + y^2) = (1, 63), (3, 21), (7, 9)$$

これらの場合で x, y を求め、

x, y のとりうる自然数値を求め、

$$(x-y, x^2 + xy + y^2) = (3, 21) \text{ のとき}$$

$$(x, y) = (4, 1) \text{ となる。}$$
