2021/03/06

出典:東北大(文類型)2013大問1
満点:20点 / 目標:15点

a を実数とする.

1. 2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が, $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.
2. a が (1) で求めた範囲を動くとき, 放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標がとりうる値の範囲を求めよ.

解答・解説 (2021/03/12)

解の存在範囲の問題です. `2021/10/30`, `2021/01/30` に続き3度目の登場です. そろそろできてほしい.
東北大の過去問ですが, 非常に基本的だったのでそのまま出しました.

詳しいことは黄チャート例題94あたりに載ってますが,

- (判別式の値) > 0
- 軸の位置
- 端点の座標の符号

の3つを必ず確認すること. それしかありません.

数Iで応用とされていたものが, 数IIでは基礎になります. 必ずできるようにしてください.

採点基準はこんな感じでシンプルです.

- (1) は15点
  - 判別式or頂点の座標の条件を求めていれば5点
  - 軸の位置の条件で5点
  - 端点の y 座標の符号で5点
- (2) は5点
  - 簡単なので部分点なし

3/6 数十ロ改

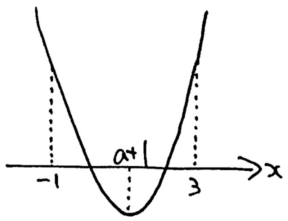
(1) 2次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ …① に対して

$f(x)=x^2-2(a+1)x+3a$ とおく.

平方完成して, $f(x)=\left(x-(a+1)\right)^2-a^2+a-1$

①が $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に異なる2つの実数解をもつ条件は,

$$\begin{cases} (①の判別式の値)>0 & \cdots ② \\ -1<a+1<3 & \cdots ③ \\ f(-1)>0 & \cdots ④ \\ f(3)>0 & \cdots ⑤ \end{cases}$$



以上の②〜⑤が全て成り立つことである.

①の判別式をDとする. $D=4(a+1)^2-4\cdot 3a=4(a^2-a+1)$

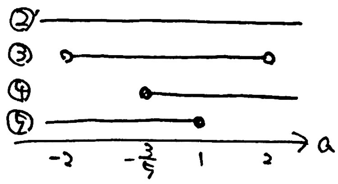
$D>0$ になるような a の値は $a^2-a+1>0$ を解いて求まるが,

$a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ は常に成り立つ. …②'

③より $-2<a<2$, ④より $a\geqq-\frac{3}{5}$, ⑤より $a\leqq 1$ が得られる.

②',③,④,⑤の共通範囲を求めて,

題意を満たす a の値の範囲は $-\frac{3}{5}\leqq a\leqq 1$.



(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標は

$y=-a^2+a-1=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{5}\leqq a\leqq 1$ の範囲で, $a=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $-\frac{3}{4}$, $a=-\frac{3}{5}$ のとき最小値 $-\frac{49}{25}$ をとる.

よって $-a^2+a-1$ のとりうる値の範囲は

$-\frac{49}{25}\leqq -a^2+a-1\leqq -\frac{3}{4}$ である.