2021/04/09

出典:一橋大2001

満点:20点 / 目標:12点

> ヒントがあります。必要なら参考にしてください。

a, b を整数とする. 3 次方程式 $x^3 - 2ax^2 + bx - 1 = 0$ は $0 < x < 3$ の範囲に 3 つの異なる実数解をもち, その解のいずれかは整数である. a, b の値を求めよ.

ヒント・方針

- $0 < x < 3$ の範囲に整数解を持つことから, とりうる整数解の値は限られる. それぞれの場合で a を用いて b を表すと, 「 b は整数である」という条件を用いてさらに整数解を絞り込むことができる.
- 3次方程式とはいうものの, 先に求めた整数解を使って因数分解できるはずなので, 結局2次方程式の問題に帰着する.

解答・解説 (2021/04/15)

3次方程式の**解の存在範囲**の問題です. うまいことやると2次方程式の解の存在範囲の問題になるのですが, そこまで到達していないようでした. 前半の流れは今後の模試でよく見ることになると思うので, 解き直しておきましょう.

- 解と係数の関係に持ち込もうとした答案がありました. 解と係数の関係を用いて, 2次方程式に帰着させることもできます. 別解に載せました.
- 答案中で記号が重複しないようにする必要があります.

4/9 数II改

$x^3-2ax^2+bx-1=0$ …①

①が $0<x<3$ の範囲に整数解をもつので，

その整数解は $x=1$ か $x=2$ のいずれかである．

(i) ① が $x=1$ を解にもつとき

①に $x=1$ を代入して，$b=2a$ を得る．

よって ① は

$x^3-2ax^2-2ax-1=0$

と書けて，これを変形して

$(x-1)(x^2+(-2a+1)x+1)=0$

となる．ここで，

$x^2+(-2a+1)x+1=0$ …②

とする．

① が $0<x<3$ の範囲に異なる3つの実数解をもつのは，② が $0<x<3$ $(x\neq1)$ の範囲に異なる2つの実数解をもつときである．

そこで，下線部が成り立つような a の値の範囲を求める．

$f(x)=x^2+(-2a+1)x+1$

とすると，下線部が成り立つのは

$$\begin{cases}(\text{②の判別式の値})>0 & \cdots(ア)\\ 0<(y=f(x)\text{の軸の位置})<3 & \cdots(イ)\\ f(0)>0 & \cdots(ウ)\\ f(3)>0 & \cdots(エ)\\ x\neq1 & \cdots(オ)\end{cases}$$

を全て満たすときである．

(ア) ②の判別式の値は

$(-2a+1)^2-4=4a^2-4a-3$

だから，$4a^2-4a-3>0$ を解いて

$a<-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}<a$

(イ) $y=f(x)$ とするとき軸は $x=\frac{2a-1}{2}$

$0<\frac{2a-1}{2}<3$ を解いて

$1<a<7$

(ウ) $f(0)=1>0$ で必ず成り立つ．

(エ) $f(3)=13-6a$ だから，

$13-6a>0$ を解いて $a<\frac{13}{6}$

(オ) $x=1$ のとき $a=\frac{3}{2}$ であることから

$x\neq1$ のとき $a\neq\frac{3}{2}$

(ア)〜(オ)の共通範囲は $\frac{3}{2}<a<\frac{13}{6}$

これを満たす整数 a は $a=2$．

またこのとき $b=4$ となり整数である．

(ii) ① が $x=2$ を解にもつとき

① に $x=2$ を代入して，$b=4a-\frac{7}{2}$ を得る．

どのような整数 a に対しても b は整数にならないので不適．

(i)，(ii) より 求める a, b の値は

$a=2$，$b=4$

〈別解（解と係数の関係でスタート）〉

$$x^3-2ax^2+bx-1=0 \quad \cdots ①$$

①の3つの解をそれぞれ α, β, γ とすると，

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2a \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b \\ \alpha\beta\gamma=1 \end{cases} \quad \cdots (*)$$

が成り立つ．

(i) ①が $x=1$ を解にもつとき

$\alpha=1$ として $(*)$ に代入して

$$\begin{cases} \beta+\gamma=2a-1 & \cdots (i-1) \\ \beta+\gamma+\beta\gamma=b & \cdots (i-2) \\ \beta\gamma=1 & \cdots (i-3) \end{cases}$$

を得る．ここで，β, γ を2解をもつ

2次方程式のひとつは (i-1)，(i-3) より

$$x^2-(2a-1)x+1=0 \quad \cdots (i-4)$$

と表される．

①が $0<x<3$ の範囲に異なる3つの

実数解をもつのは，(i-4) が

$0<x<3$ $(x \neq 1)$ の範囲に異なる

2つの実数解をもつときである．

（以下本解と同じ）

(ii) ①が $x=2$ を解にもつとき

$\alpha=2$ として $(*)$ に代入して

$$\begin{cases} \beta+\gamma=2a-2 & \cdots (ii-1) \\ 2\beta+2\gamma+\beta\gamma=b & \cdots (ii-2) \\ 2\beta\gamma=1 & \cdots (ii-3) \end{cases}$$

を得る．(ii-1)，(ii-3) を (ii-2) に代入して

$$b=4(a-1)+\frac{1}{2}$$

となる．どのような整数 a に対しても

b は整数にならないので不適．