# 2021/05/07

満点:20点 / 目標:10点

> ヒントがあります。必要なら参考にしてください。

$x$, $y$ を実数とする. 次の問に答えよ.

(1) $2x + y = 4$ のとき, $2x + y^2$ の最小値と, そのときの $x$, $y$ の値を求めよ.

(2) $2x^2 + y^2 = 4$ のとき, $2x + y^2$ の最大値・最小値と, そのときの $x$, $y$ の値を求めよ.

(3) $2x^2 + y^2 = 4$ のとき, $2x + y$ の最大値・最小値と, そのときの $x$, $y$ の値を求めよ.

# ヒント・方針

- キーワード：**2変数関数の最大・最小**
  - 黄チャート 1-70, 1-101 を参照する
- (1), (2) は, 等式を変形して代入すれば, 1変数関数にできる. ただし (2) は文字の変域に注意すること.
- (3) は難しい. $2x+y=k$ とおいて, 実数条件を考える.

# 解答・解説

ベーシックな**2変数関数**の問題です. 大事な原則は

> 等式が1本あれば, 1文字消去できる

です. 今回の問題はすべて等式が1本ずつありますから, 1変数関数にできます.

そして高校数学最重要事項

> 文字を置き換えたときは, 必ず変域を確認する

これが非常に大事です. たとえば (2) は与えられた等式から

$$y^2 = 4 - 2x^2$$

と書けますが, ここで $y$ **は実数だから** $y^2 \geqq 0$ です. したがって,

$$4 - 2x^2 \geqq 0$$

です. これを解いて $x$ の変域を求めることができます.

## ちょっと難しい解説

(3) は文字を消去できないように見えます. 無理に代入すると大変なことになるので, 一工夫必要です. 話をわかりやすくするために, $2x + y = k$ とおきます.

等式 $2x^2 + y^2 = 4$ を満たす実数 $x, y$ に対応して $2x + y = k$ の値が定まります. 逆にいえば, $k$ が存在するなら, 必ず対応する実数 $x, y$ があるはずです. $k$ の値によって $x$ が実数になるかどうか決まるんだから, $x$ の方程式をつくって実数解を持つか調べれば $k$ の範囲がわかる！！

ということで, $y = -2x + k$ を $2x^2 + y^2 = 4$ に代入して $x$ の方程式をつくり, 実数解を持つような $k$ の範囲を調べます. お馴染みの判別式を使えます.

ちなみに, 図形的には楕円と直線が共有点を持つような $k$ の範囲を調べているのと同じです.

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + y = k \end{cases}$$

が共有点を持つ, といわれると, 確かにやったことあるなって思うのではないでしょうか.

$k$ が最大値・最小値をとるとき, $x$ の方程式は重解を持つので, $x$ が決まり, 次いで $y$ も決まります.

## 逆像法

> 実数 $x, y$ に対応して $2x + y = k$ の値が定まります. 逆にいえば, $k$ が存在するなら, 必ず対応する実数 $x, y$ があるはずです.

この考え方には**逆像法**と名前がついています. チャートなんかだとよく「$= k$ とおく」という説明がありますが, $k$ でなくあえて $k$ を構成する $x$ に着目しているのが大事です.

5/7 数元ロ改

(1) $2x+y=4$ より $y=-2x+4$.

$z=2x+y^2$ とすると,

$z=2x+(-2x+4)^2$

$=4x^2-14x+16$

$=4\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{15}{4}$

よって $2x+y^2$ は

$x=\frac{7}{4}$, $y=\frac{1}{2}$ で

最小値 $\frac{15}{4}$ をとる.

(2) $2x^2+y^2=4$ より $y^2=-2x^2+4$.

ここで $y$ は実数だから,

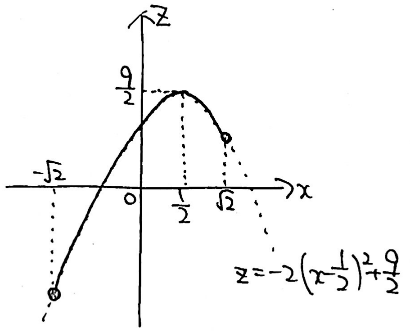
$y^2 \geqq 0$ より $-2x^2+4 \geqq 0$

これを解いて $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$.

$z=2x+y^2$ とすると,

$z=2x+(-2x^2+4)$

$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$




$x=\frac{1}{2}$ のとき $y^2=\frac{7}{2}$ より $y=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$.

$x=-\sqrt{2}$ のとき $y=0$ である.

したがって $2x+y^2$ は

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{14}}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{9}{2} \\ x=-\sqrt{2},\ y=0 \text{ のとき最小値 } -2\sqrt{2} \end{cases}$$

をとる.

(3) $2x+y=k$ とおく.

$k$ が実数の値をもつのは,

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=4 \\ 2x+y=k \end{cases}$$ を満たす実数 $x$, $y$ が

存在するときである.

この連立方程式から,

$$\begin{cases} 2x^2+(-2x+k)^2=4 & \cdots(*) \\ y=-2x+k & \cdots(**) \end{cases}$$

を得る. $x$ についての方程式 $(*)$ が

実数解をもつ条件は, $(*)$ の判別式から

$-k^2+12 \geqq 0$

と表されて, これを整理して

$-2\sqrt{3} \leqq k \leqq 2\sqrt{3}$

となる. また $k=\pm 2\sqrt{3}$ のとき $(*)$ は

重解をもち,

$k=\pm 2\sqrt{3}$ のとき $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (複号同順)

である. また 方程式 $(**)$ より

$x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき $y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (複号同順)

である. したがって $2x+y$ は

$$\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき最大値 } 2\sqrt{3} \\ x=-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき最小値 } -2\sqrt{3} \end{cases}$$

をとる.