# 2021/08/13

満点:20点 / 目標:15点

(1) $a$ を定数とする. 関数 $y = \cos 2\theta - 2a\cos\theta - a + 1 \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ.

(2) 不等式 $\cos 2\theta - 2a\cos\theta - a + 1 \geqq 0$ が常に成り立つような定数 $a$ の値の範囲を求めよ.

# 解答・解説

▶ 解答・解説

三角関数で味付けされた2次関数の問題です. よく似た出題が 2020/10/16 にあります.

8/13 数IIの改

(1) $y=\cos 2\theta-2a\cos\theta-a+1$

$=2\cos^2\theta-1-2a\cos\theta-a+1$

$=2\cos^2\theta-2a\cos\theta-a$

$\cos\theta=t$ とおく.

$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であるから,

$y=2t^2-2at-a\ (-1\leqq t\leqq 1)$ と書ける.

平方完成して, $y=2\left(t-\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{2}a^2-a$.

○最大値

(i) $\frac{1}{2}a<0$ すなわち $a<0$ のとき

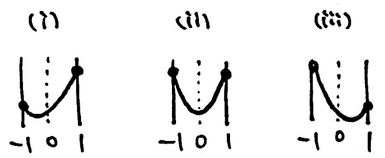
$t=1$ で最大値 $-3a+2$

(ii) $\frac{1}{2}a=0$ すなわち $a=0$ のとき

$t=-1, 1$ で最大値 $2$

(iii) $0<\frac{1}{2}a$ すなわち $0<a$ のとき

$t=-1$ で最大値 $a+2$




○最小値

(i) $\frac{1}{2}a<-1$ すなわち $a<-2$ のとき

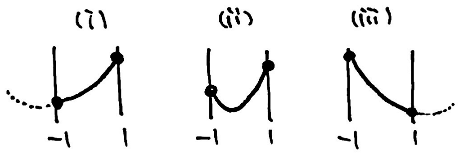
$t=-1$ で最小値 $a+2$

(ii) $-1\leqq\frac{1}{2}a\leqq 1$ すなわち $-2\leqq a\leqq 2$ のとき

$t=\frac{1}{2}a$ で最小値 $-\frac{1}{2}a^2-a$

(iii) $1<\frac{1}{2}a$ すなわち $2<a$ のとき

$t=1$ で最小値 $-3a+2$




(2) $f(t)=2t^2-2at-a\ (-1\leqq t\leqq 1)$ とおく.

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で常に $f(t)\geqq 0$ が成り立つのは,

$(-1\leqq t\leqq 1$ の範囲での $f(t)$ の最小値$)\geqq 0$ が …(*)

成り立つことと同値である.

(1)で求めた最小値を用いて, (*)が成り立つような $a$ の範囲を求める.

(i) $a<-2$ のとき

最小値 $f(-1)=a+2$

$a+2\geqq 0$ を解いて $a\geqq -2$

場合分けの条件との共通範囲はない.

(ii) $-2\leqq a\leqq 2$ のとき

最小値 $f\left(\frac{1}{2}a\right)=-\frac{1}{2}a^2-a$

$-\frac{1}{2}a^2-a\geqq 0$ を解いて $-2\leqq a\leqq 0$

場合分けの条件との共通範囲は

$-2\leqq a\leqq 0$

(iii) $2<a$ のとき

最小値 $f(1)=-3a+2$

$-3a+2\geqq 0$ を解いて $a\leqq\frac{2}{3}$

場合分けの条件との共通範囲はない.

(i)〜(iii) より 求める $a$ の範囲は $\underline{-2\leqq a\leqq 0}$