2021/01/30

満点:20点 / 目標:12点

k を定数とする. 2 次方程式

$$x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0 \cdots (*)$$

について考える.

1. 方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解を持つような k の値の範囲を求めよ.
2. 方程式 $(*)$ が $-2 < x < 4$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つような k の値の範囲を求めよ.
3. 方程式 $(*)$ が $-2 < x < 4$ の範囲に 1 つだけ実数解を持つような k の値の範囲を求めよ.

解答・解説 (2020/02/04)

解の存在範囲の問題です. 特に高1模試だといつも出題されます(これしか出すものがないので).

- (1) は当然解けますね.
- (2) までは解けてほしい. グラフを描いてみて観察し, 条件を見つけてください.
  - 特に1年生, 触れている問題の量が少ないので, 手が止まると思います. 演習あるのみです.
- (3) は難しいんじゃないですかね......
  - グラフが動く様子をイメージしながら解くことになります.
  - 基本的な $f(a) \cdot f(b) < 0$ のほかにも考えることがいろいろあってめんどい.

ということで, 解答とちょっと補足です.

1/30 数和改

$$x^2-2kx+2k+3=0 \quad \cdots (*)$$

以下，$(*)$ の判別式を D とする．
また，$f(x)=x^2-2kx+2k+3=0$ とする．

(1) 方程式 $(*)$ が異なる2つの実数解を持つのは，$D>0$ のときである．

$D=4(k+1)(k-3)$ だから，

$4(k+1)(k-3)>0$ を解いて

$k<-1,\ 3<k$ のとき，題意を満たす．

(2) $(*)$ が $-2<x<4$ の範囲に異なる2解を持つのは，

$$\begin{cases} -2<(y=f(x)\text{のグラフの軸})<4 & \cdots ① \\ D>0 & \cdots ② \\ f(-2)>0 & \cdots ③ \\ f(4)>0 & \cdots ④ \end{cases}$$

①〜④を全て満たすときである．

$f(x)=(x-k)^2-k^2+2k+3$ より
$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=k$ だから，
①より $-2<k<4 \cdots ①'$
また (1) で求めたように $k<-1,\ 3<k \cdots ②'$
$f(-2)=6k+7,\ f(4)=-6k+19$ だから
③より $k>-\frac{7}{6} \cdots ③'$，
④より $k<\frac{19}{6} \cdots ④'$

①′，②′，③′，④′ の共通範囲を求めて，

$$-\frac{7}{6}<k<-1,\ 3<k<\frac{19}{6}$$

(3) $(*)$ が $-2<x<4$ の範囲にただ1つの実数解をもつのは，

(i) $(*)$ が異なる2つの実数解をもち，そのうち1つが $-2<x<4$ にある．

(ii) $(*)$ が $-2<x<4$ に重解をもつ．

のどちらかを満たすときである．

(i) の場合，すなわち $D>0$ のとき

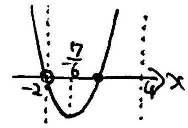
(a) $f(-2)\cdot f(4)<0$ が成り立つならば題意は満たされる．

$(6k+7)(-6k+19)<0$ を解いて，

$k<-\frac{7}{6},\ \frac{19}{6}<k$

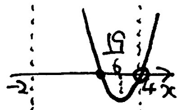
(b) $f(-2)=0$ のとき

$k=-\frac{7}{6}$ であり，題意を満たす．



(c) $f(4)=0$ のとき

$k=\frac{19}{6}$ であり，題意を満たす．



(a)，(b)，(c) の範囲を合わせて，
$D>0$ であることも考慮して $k\leqq-\frac{7}{6},\ \frac{19}{6}\leqq k$

(ii) の場合，すなわち $D=0$ のとき，

$k=-1,\ 3$ である．このとき，

いずれも $-2<x<4$ の範囲内に重解をもつ．

(i)，(ii) の範囲を合わせて，求める範囲は

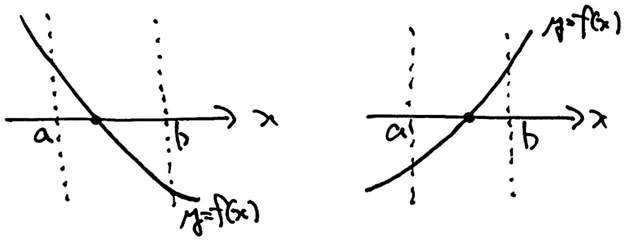
$$k\leqq-\frac{7}{6},\ k=-1,\ 3,\ \frac{19}{6}\leqq k$$

○「共有点を1つだけ持つ」の問題が解の存在範囲の問題で最もむずかしいとされています．

基本的に、「$a<x<b$ に解がある」といわれたら

$\boxed{f(a)\cdot f(b)<0}$ を確かめます。

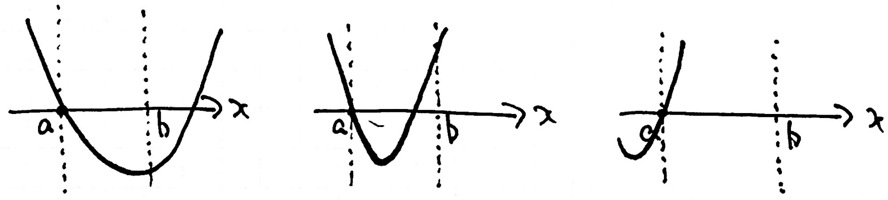
これは、$f(a)$ と $f(b)$ の符号が違えば、必ず x 軸を通っているからです。



さらに、$\boxed{f(a)=0}$ のときと、$\boxed{f(b)=0}$ のときは、別個に確認します。

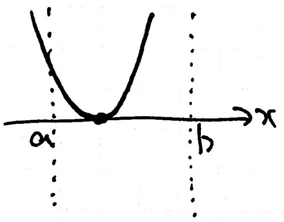
$f(a)=0$ のとき、もう片方の解がどこにいるかわからないからです。

（$f(b)=0$ のときも同じく）



全部 $f(a)=0$

また、$\boxed{\text{グラフが}x\text{軸に接する}}$ ときも、確かめる必要があります。



$f(a)\cdot f(b)<0$ でも $f(a)=0$ でも $f(b)=0$ でもないのに、条件を満たしてしまうかもしれないからです。