2021/05/01

満点:50点 / 目標:35点

x, y, z を実数, n を自然数とする. 下の表の (1) ~ (5) で, P と Q が**同値**であることを示せ.

	P	Q
(1)	$x^2+y^2+z^2=0$	$x+y+z=0$ かつ $xy+yz+zx=0$
(2)	$x=1$ または $y=1$	$x+y=xy+1$
(3)	$x>y$	$x^3>y^3$
(4)	$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形	$\cos A\cos B\cos C>0$
(5)	n は奇数	n^2 を 4 で割ると 1 余る

解答・解説 (2021/05/07)

ストレートな論証の問題です. 実際の問題では「同値であることを示せ」「〜であるための必要十分条件を求めよ」「〜となる条件を求めよ」などと聞かれますが, どれもやることは同じです.

同値変形について

同値であることを示すためには, $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ と $\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}$ がどちらも成り立つことを述べなければなりません. ここで押さえておきたいのが, **同値変形**です.

$$3x - 1 = -2x + 4 \iff x = 1$$

これは中学 1 年生で学習した 1 次方程式ですが, 両矢印が成り立っています. したがってこれは同値変形です.

$$x = \sqrt{7} \implies x^2 = 7$$

これは中学 3 年生で学習した平方根の計算ですが, **左方向の矢印が成り立っていません**. どうすれば両方向の矢印が成り立つでしょうか？

$$x = \pm\sqrt{7} \iff x^2 = 7$$

これなら良さそうですね. 中学 3 年で必死に計算練習したでしょうから, 覚えていると思います.

$$x = \sqrt{7} \iff x^2 = 7,\ x > 0$$

これもアリです. x が正だと制限しておけば問題ないですね.

より詳しい内容があるので, ここで一読することを強くおすすめします.
【高校数学I】代表的な同値変形8パターンとその証明（高校数学最重要事項）

同値変形が正しくできることは, 自信を持って「高校数学を勉強したぞ！！」って言えるための必要条件だと思います.

同値記号を使っていいのか

同値記号 $\Leftrightarrow$ は特に同値性を明確にしたい場合に使用する記号のため, **同値でないのに同値記号を使ってしまうと, 大きく減点されるおそれがあります**. 式を並べて, 言葉でしっかり説明すれば大丈夫です. もちろん, とても自信があるなら使ってもかまいません.

解答例では, 流れが分かりやすいように同値記号を使っています(使ってしまいました).

5/1 数テロ改

(1) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

であるから、$Q \Rightarrow P$ は成り立つ。

また、x, y, z は実数だから、

$x^2+y^2+z^2=0$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ かつ $y=0$ かつ $z=0$

$\Rightarrow$ $x+y+z=0$ かつ $xy+yz+zx=0$

より、$P \Rightarrow Q$ は成り立つ。よって $P \Leftrightarrow Q$ である。

(2) $x+y=xy+1$

$\Leftrightarrow$ $xy-x-y+1=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)(y-1)=0$

$\Leftrightarrow$ $x-1=0$ または $y-1=0$

$\Leftrightarrow$ $x=1$ または $y=1$

よって $P \Leftrightarrow Q$ である。

(3) $x^3>y^3$

$\Leftrightarrow$ $x^3-y^3>0$

$\Leftrightarrow$ $(x-y)(x^2+xy+y^2)>0$

$\Leftrightarrow$ $x-y>0$

$\left(\begin{array}{l} \because\ x, y \text{ は実数だから、} \\ x^2+xy+y^2 \\ \quad =\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2>0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow$ $x>y$

よって $P \Leftrightarrow Q$ である。

(4) $\triangle ABC$ が鋭角三角形

$\Leftrightarrow$ $0°<A, B, C<90°$

$\Leftrightarrow$ $\cos A>0$ かつ $\cos B>0$ かつ $\cos C>0$

$\Rightarrow$ $\cos A\cos B\cos C>0$

だから、$P \Rightarrow Q$ は成り立つ。また、

$\cos A\cos B\cos C>0$

$\Leftrightarrow$ $\cos A, \cos B, \cos C$ すべて正 または 3つのうち2つが負、1つが正

ここで、$\cos\theta<0$ のとき θ は鈍角であり、三角形に2つ以上同時に鈍角はない。

よって $\cos A\cos B\cos C>0$

$\Leftrightarrow$ $\cos A>0$ かつ $\cos B>0$ かつ $\cos C>0$

が成り立つので、$P \Leftrightarrow Q$ である。

(5) まず $P \Rightarrow Q$ を示す。

n が奇数ならば適切な整数 k を用いて $n=2k+1$ と表せる。このとき、

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

$\quad =4(k^2+k)+1$

であるから、n^2 を4で割ると1余る。

次に $Q \Rightarrow P$ を示すために、対偶である「n が偶数ならば n^2 を4で割ると余りは1にならない」を示す。

n が偶数ならば適切な整数 k を用いて $n=2k$ と表せる。このとき

$n^2=4k^2$ だから、n^2 は4で割り切れる。

よって対偶である「$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$」も示された。

したがって $P \Leftrightarrow Q$ である。