2021/09/10

満点:20点 / 目標:16点

A, B の 2 人が全部で 5 回じゃんけんをして, 勝った数が多い方を「優勝」とする. ただし, あいこの場合も 1 回と数え, 勝った数が等しいときは「優勝」ではないとする. A が「優勝」する確率を求めよ.

ヒント・方針

▶ 方針1

- A が勝つ回数で場合分けして数える.

▶ 方針2の発想

- A と B が「優勝」する確率はそれぞれ等しい.

解答・解説

▶ 解答・解説

オーソドックスな確率の問題です. 正確に場合分けと計算を遂行する能力をみました.

この問題では, 2人でじゃんけんをしているので, **勝ち/負け/あいこが等確率**です. つまり, 単純な「同じものを含む順列」の問題に帰着させることができます. 解答ではかならずこの点に触れましょう. 等確率でない場合, 反復試行の考え方が必要になり, 同じように計算しても答えが合いません.

方針1: A が勝つ回数で場合分け

場合分けがだるいけど基本の考え方です.

9/10 数テロ改

<方針1>

以下，Aがじゃんけんで勝つことを○，
負けることを×，あいこになることを△と表す．

じゃんけんで勝つ／負ける／あいこになる確率は
いずれも $\frac{1}{3}$ で等しいので，

○，×，△の並びを考えればよい．

Aが「優勝」するのは，

(i) Aが5勝するとき

○○○○○　1通り

(ii) Aが4勝するとき

(ii-1) 4勝1負

○○○○×　$\frac{5!}{4!1!} = 5$ 通り

(ii-2) 4勝1分

○○○○△　5通り

(iii) Aが3勝するとき

(iii-1) 3勝2負

○○○××　$\frac{5!}{3!2!} = 10$ 通り

(iii-2) 3勝1負1分

○○○×△　$\frac{5!}{3!1!1!} = 20$ 通り

(iii-3) 3勝2分

○○○△△　10通り

(iv) Aが2勝するとき

(iv-1) 2勝1負2分

○○×△△　$\frac{5!}{2!1!2!} = 30$ 通り

(iv-2) 2勝3分

○○△△△　$\frac{5!}{2!3!} = 10$ 通り

(v) Aが1勝するとき　1勝4分

○△△△△　$\frac{5!}{1!4!} = 5$ 通り

(i)〜(v)より Aが「優勝」するのは
全部で96通り．

一方，○，×，△の並びは全部で
$3^5 = 243$ 通りあるから，

Aが「優勝」する確率は $\frac{96}{243} = \frac{32}{81}$

方針2: 「優勝」が決まらない確率を先に求める

たぶんこっちのほうが簡単です. 思いつきさえすれば.

9/10 数テロマ文

<方針2>

Aが「優勝」する確率とBが「優勝」する確率は等しいため、どちらか一方が「優勝」する確率は

$$\frac{1-(「優勝」が決まらない確率)}{2}$$ で求まる.

そこで「優勝」が決まらない確率を求める.

以下、Aがじゃんけんで勝つことを○,
負けることを×,あいこになることを△と表す.
じゃんけんで勝つ/負ける/あいこになる確率は
いずれも $\frac{1}{3}$ で等しいので,
○,×,△の並びを考えればよい.

「優勝」が決まらないのは,○と×の数が
等しくなるとき,すなわち

○○××△ $\frac{5!}{2!2!1!} = 30$通り

○×△△△ $\frac{5!}{1!1!3!} = 20$通り

△△△△△ 1通り

よって「優勝」が決まらないのは全部で51通り.
一方○,×,△の並びは全部で $3^5 = 243$通り.
したがって「優勝」が決まらない確率は

$$\frac{51}{243} = \frac{17}{81}$$

しかるにAが「優勝」する確率は

$$\left(1-\frac{17}{81}\right)\times\frac{1}{2} = \underline{\frac{32}{81}}$$