

2021/03/26

満点:20点 / 目標:12点

この問題は誘導をつけるかどうか自分で選べます。必要があれば【誘導あり版】を使ってください。

誘導なし版

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする. また, a を正の定数とする.

2次方程式 $4x^2 - 2ax - 2a^2 + 3 = 0$ の2つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ であるとき, $\tan \theta$ の値を求めよ.

誘導あり版

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする. また, a を正の定数とする.

2次方程式 $4x^2 - 2ax - 2a^2 + 3 = 0$ の2つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ であるとき, 次の問に答えよ.

(1) $\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta \cos \theta$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) a の値を求めよ.

(3) $\sin \theta, \cos \theta$ の値をそれぞれ求めよ. また, $\tan \theta$ の値を求めよ.

解答・解説(2021/04/02)

「2つの解が」と書いてある時点で**解と係数の関係**の活用を疑うのが大事です。

誘導あり版

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする. また, a を正の定数とする.

2次方程式 $4x^2 - 2ax - 2a^2 + 3 = 0$ の2つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ であるとき, 次の問に答えよ.

(1) $\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta \cos \theta$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) a の値を求めよ.

(3) $\sin \theta, \cos \theta$ の値をそれぞれ求めよ. また, $\tan \theta$ の値を求めよ.

(1) $4x^2 - 2ax - 2a^2 + 3 = 0 \quad \cdots (*)$ について, **解と係数の関係**より

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}a, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{-2a^2 + 3}{4}$$

(2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}a$ より,

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{-2a^2 + 3}{4} = \frac{1}{2}a^2 \quad a > 0 \text{ に注意して } a = \sqrt{2} \end{aligned}$$

(3) $a = \sqrt{2}$ を $(*)$ に代入して $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$$

ここで, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であるから,

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -2 - \sqrt{3}$$