2021/01/09

出典:2020年第2回全統記述模試2B型大問4 改題

満点:20点 / 目標:12点

p は素数の定数とし, $x,\ y$ に関する方程式

$$xy - px - py = 0\ \cdots (*)$$

を考える.

(1) $p=2$ のとき, $(*)$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ.

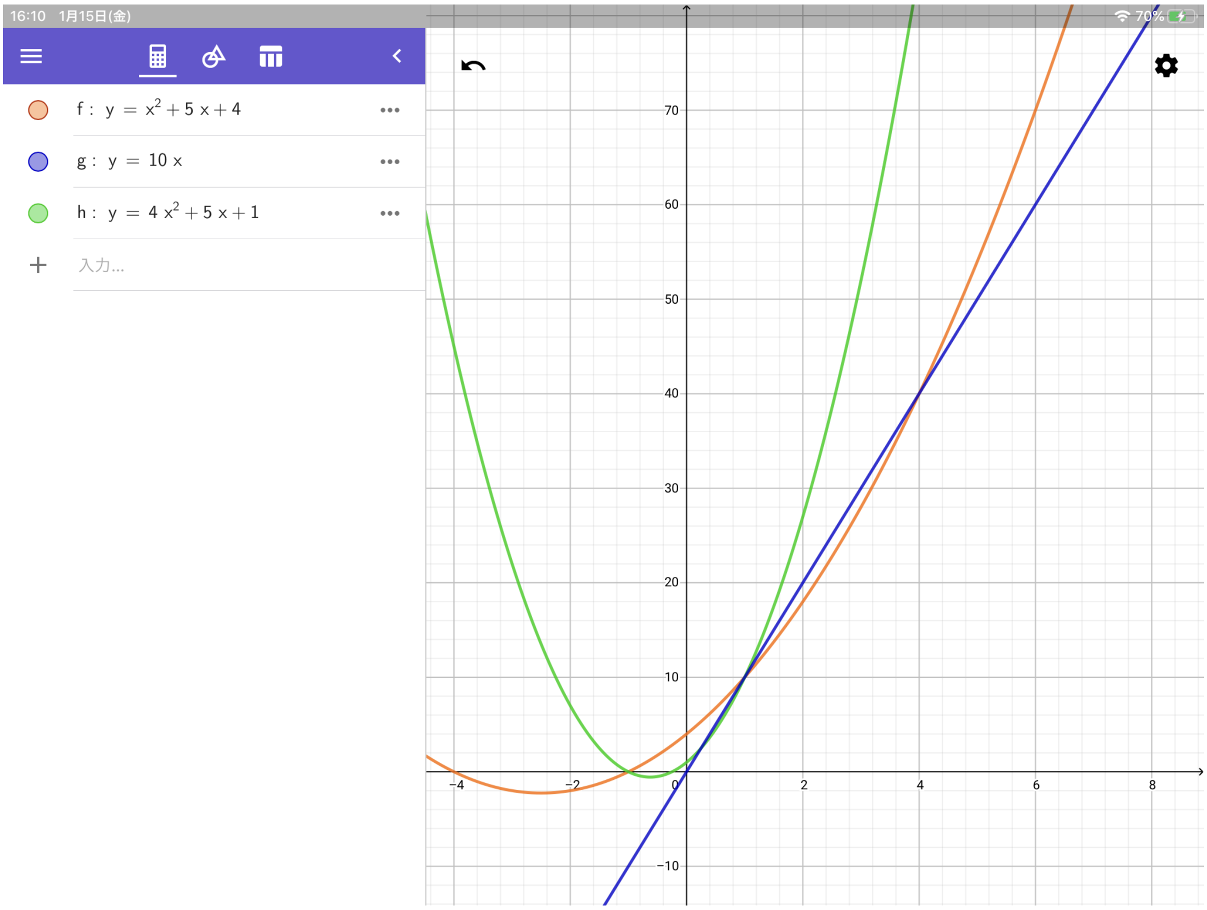
(2) $(*)$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組を, p を用いて表せ.

(3) (2) で求めた自然数 $x,\ y$ の組のうち, $x+4y$ が最小になるものを求めよ.

解答・解説(2021/01/15)

不定方程式の問題です. 特に(1)は必ず解ける必要があります.

- p が「素数の」定数であることが大事です. この条件があるから, p^2 を素直に処理できます.
- p の値によって, $x+4y$ が最小になるような自然数 $(x,\ y)$ の組が変わります.
    - 問題文を読んだときにこの可能性に思い至るのが理想ですが, なかなか大変だと思います.
    - **等式・不等式の証明は, 数学IIの範囲です.** 高校1年生ではグラフを使った直感的な説明がやりやすいと思います.



- 本来は(2)と(3)がまとめて出題されています.

> (1) $p=2$ のとき, $(*)$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ.
>
> (2) $(*)$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組のうちで, $x+4y$ を最小にするものを p を用いて表せ.

1/9 教ア口改

(1) $p=2$ のとき，(*) は

$$xy-2x-2y=0$$

変形して，$(x-2)(y-2)=4$

x, y は自然数だから，

$x-2 \geqq -1$ かつ $y-2 \geqq -1$ であるので

$(x-2, y-2)=(1,4), (4,1), (2,2)$

したがって

$(x, y)=(3,6), (6,3), (4,4)$

(2) $xy-px-py=0$ を変形して，

$(x-p)(y-p)=p^2$

いま，p は素数だから，積が p^2 になるような2数の組は

$(\pm 1, \pm p^2), (\pm p^2, \pm 1), (\pm p, \pm p)$

(複号同順)

のみである．

$x-p \geqq 1-p$, $y-p \geqq 1-p$ だから，

$(x-p, y-p)=(1, p^2), (p^2, 1), (p, p)$

したがって

$(x, y)=(p+1, p^2+p)$,

$(p^2+p, p+1)$,

$(2p, 2p)$

(3) (2)で求めた3組について，$x+4y$ の値をそれぞれ N_1, N_2, N_3 とおく．すなわち，

$(x, y)=(p+1, p^2+p)$ のとき

$N_1=4p^2+5p+1$，

$(x, y)=(p^2+p, p+1)$ のとき

$N_2=p^2+5p+4$，

$(x, y)=(2p, 2p)$ のとき

$N_3=10p$ とする．

N_1 と N_2 を比較すると，

$N_1-N_2=3p^2-3$ より

$p \geqq 2$ では常に $N_1>N_2$ である．

次に，N_2 と N_3 を比較すると

$N_2-N_3=p^2-5p+4=(p-1)(p-4)$ より

$p=2, 3$ のときは $N_2<N_3$，

$p \geqq 5$ のときは $N_2>N_3$ である．

よって，$x+4y$ を最小にするような (x, y) の組は，

$$\begin{cases} p=2,3 \text{ のとき } (x, y)=(p^2+p, p+1) \\ p \text{ が5以上の素数のとき } (x, y)=(2p, 2p) \end{cases}$$

となる．