2021/08/06

満点:20点 / 目標:15点

整式 $P(x) = x^4 + ax^2 + bx - 4$ は, $x^2 - x + 2$ で割ると余りが $-3x + 4$ になる.

(1) 実数 a, b の値を求めよ.

(2) i を虚数単位とする. $P\left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)$ の値を求めよ.

ヒント・方針

▶ 方針

- (1) 頑張って割り算をしたあと, 余りを係数比較する.
- (2) $x = \dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$ をそのまま代入すると先が見えない.
  - 変形して2次方程式を作り, 効率の良い計算を考える.
  - 黄チャートIIB 例題56
- **次数下げ**による解法もあり

解答・解説

▶ 解答・解説

整式の除算に関する問題です. 毎度のことですが, 高校生は**剰余の定理**くらいしか道具がないので, 難しい問題はつくれないことになります.

(1) は, 頑張って除算をする問題でした. よくできていました.
(2) は, 工夫を凝らして計算しようと試みたり, ゴリ押ししようとした答案がありました. 4 次式にゴリ押しは通用しません.

問題の「主題」を考える

(1) で, 割り算の筆算を答案に書く必要はありません. また, 筆算を書いたとしても部分点にはつながりません.

この問題で求められているのは, a, b を求めることです. 答案に書くべきは,

- 割り算して余りを係数比較したら a と b が求まる
- 実際に計算すると $a=-3$, $b=3$ になる

ということのみです.

次数下げを意識した別解

$x^2-x+2=0$ から $x^2=x-2$ を連想し, 恒等式の性質と次数下げを利用して解くことができます. とても利用価値の高い解法です. ぜひ習得してください.

8/6 数チロ改

(1) $P(x) = x^4 + ax^2 + bx - 4$

$= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + (a-1))$

$+ (a+b-3)x - 2a - 2$ …①

と変形できる．余りの部分を係数比較して，

$$\begin{cases} a+b-3 = -3 \\ -2a-2 = 4 \end{cases}$$

これを解いて，$\underline{a=-3,\ b=3}$

(2) $x = \dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$ のとき，

$2x - 1 = -\sqrt{7}i$ より両辺を2乗して

$4x^2 - 4x + 1 = -7$．整理して

$x^2 - x + 2 = 0$ を得る．

① に $a=-3,\ b=3$ を代入して

$P(x) = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 4) - 3x + 4$

であるから，

$P\left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right) = -3 \cdot \dfrac{1-\sqrt{7}i}{2} + 4$

$= \underline{\dfrac{5+3\sqrt{7}i}{2}}$

＜次数下げを意識した別解＞

$P(x)$ を $x^2 - x + 2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする．

$P(x) = x^4 + ax^2 + bx - 4$

$= (x^2 - x + 2)Q(x) - 3x + 4$ …①

と書けて，①は x に関する恒等式である．

(1) $x^2 - x + 2 = 0$ が成り立つときを考える．

このとき $x^2 = x - 2$ である．①の

各辺に繰り返し代入して，

$x^4 + ax^2 + bx - 4$

$= (x-2)^2 + a(x-2) + bx - 4$

$= (x-2) - 4x + 4 + a(x-2) + bx - 4$

$= (a+b-3)x - 2a - 2$ …②

$\underbrace{(x^2 - x + 2)}_{=0}Q(x) - 3x + 4 = -3x + 4$ …③

②,③を係数比較して，

$$\begin{cases} a+b-3 = -3 \\ -2a-2 = 4 \end{cases}$$

これを解いて，$\underline{a=-3,\ b=3}$

(2) は本解と同じです．