# 2021/02/19

満点:20点 / 目標:12点

2次関数 $f(x) = x^2 - 4ax + 5a^2 - 2a - 4$ があり, $y = f(x)$ のグラフを $K$ とする. ただし, $a$ は正の定数とする.

1. グラフ $K$ の頂点の座標を $a$ を用いて表せ.
2. $a \leqq x \leqq a + 2$ における関数 $f(x)$ の最小値を $a$ を用いて表せ.
3. $A(a,\ 0)$, $B(a + 2,\ 0)$, $C(a + 2,\ 2)$, $D(a,\ 2)$ とする. 正方形 $ABCD$ とグラフ $K$ が共有点をもたないような $a$ の値の範囲を求めよ.

## 解答・解説 (2020/03/05)

遅れてしまったことをお詫びします. 申し訳ありません.

さて, しつこく2次関数を出題しているので, さすがに (2) くらいは解けてもいいんじゃないでしょうか.

- (2) は定義域にも軸にも文字が入っているのでちょっとやりづらい. でもそのまま式を立てればOKです.
- (3) は「正方形」に惑わされず最大・最小の考え方で進みましょう.
    - 先の答案が書けなくても, 考え方だけでも書いておけば加点の対象になることがあります.

2/19 数IA改

$y=f(x)=x^2-4ax+5a^2-2a-4$

$\quad=(x-2a)^2+a^2-2a-4$

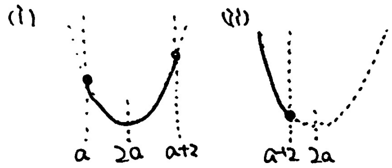
$(a>0)$

(1) 上記の式変形より、
Kの頂点の座標は $(2a,\ a^2-2a-4)$

(2) 軸は $x=2a$
軸の位置によって場合分けする。

(i) $a \leqq 2a \leqq a+2$
すなわち $0 \leqq a \leqq 2$ のとき
最小値は $f(2a)=a^2-2a-4$

(ii) $a+2<2a$
すなわち $2<a$ のとき
最小値は $f(a+2)=2a^2-6a$




(3) 正方形ABCDとグラフKが
共有点を持たないのは、
$a \leqq x \leqq a+2$ において
($f(x)$の最大値) $<0$ または
($f(x)$の最小値) $>2$
が成り立っているときである。

・ ($f(x)$の最大値) $<0$ になるような $a$の値を求める。
$f(x)$の最大値は、軸の位置で場合分けして

(i) $2a \leqq a+1$ すなわち $0<a \leqq 1$ のとき、
最大値は $f(a+2)=2a^2+6a$

(ii) $a+1 \leqq 2a$ すなわち $1 \leqq a$ のとき、
最大値は $f(a)=2a^2-2a-4$

と求まる。

$0<a \leqq 1$ のとき、$2a^2+6a<0$ を解いて
$0<a<3$。条件と合わせて、$0<a \leqq 1$。…①
$1 \leqq a$ のとき、$2a^2-2a-4<0$ を解いて
$-1<a<2$。条件と合わせて $1 \leqq a<2$。…②

したがって①、②より、
($f(x)$の最大値) $<0$ を満たすような$a$の値の範囲は
$0<a<2$ である。

・ ($f(x)$の最小値) $>2$ になるような $a$の値を求める。
(2)で求めた最小値を用いる。
$0 \leqq a \leqq 2$ のとき、$a^2-2a-4>2$ を解いて
$a<1-\sqrt{7}$, $1+\sqrt{7}<a$ を得るが、
これは条件を満たさない。 …③
$2<a$ のとき、$2a^2-6a>2$ を解いて
$a<\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}<a$ を得る。
条件と合わせて、$\frac{3+\sqrt{13}}{2}<a$。 …④

したがって③、④より、
($f(x)$の最小値) $>2$ を満たすような$a$の値の範囲は、
$\frac{3+\sqrt{13}}{2}<a$ である。

以上のことから、題意を満たす$a$の値の範囲は
$0<a<2$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}<a$ である。