2021/07/02

出典: 2016東北大理系大問3

満点:20点 / 目標:10点

サイコロを振って出た目の数をそれぞれ順に a, b, c とする. 次の問に答えよ.

(1) a, b, c が直角三角形の 3 辺の長さになる確率を求めよ.

(2) a, b, c が鈍角三角形の 3 辺の長さになる確率を求めよ.

ヒント・方針

▶ 方針

- いきなり全部数えようとすると破綻する.
- 話をわかりやすくするために, $a,\ b < c$ だと仮定して $(a,\ b,\ c)$ の組を見つけたあと, その並べ方を考える.
    - 例えば, $(a,\ b,\ c) = (1,\ 2,\ 3)$ が見つかったら, $\{1,\ 2,\ 3\}$ の並べ方は全部で 6 通りある.
- どうしてもわからない場合は, 216 通り書き出す.

解答・解説

▶ 解答・解説

オーソドックスな確率の問題です. 数え上げるときに何らかの方針を立てないと, 「これ数えたっけ...？」となってしまいます.

数学の「一般性」

今回の解答では, $a,\ b < c$ としても**一般性を失わない**として進めるのが効果的です. 数学の答案では, よく「一般性を失わない」という文言が登場するのですが, これは

> とりあえずそう決めておいても, 議論に問題はない

ときに使われます. 例えば, 三角関数の話をするときに単位円(原点中心, 半径 1 の円)がよく出てきますが, 三角関数の議論をするだけなら, 半径が 2 でも 100 でも π でも特に問題ありません. あえて半径を 1 としているのは, 余計なこと(半径由来の無駄な計算など)を考えなくていいからです. このとき,

> 半径を 1 としても, 一般性を失わない

とすることができます.

話を戻して, 今回の解答ではとりあえず $a,\ b < c$ と決めておいて $(a,\ b,\ c)$ の組を見つけたあと, $\{a,\ b,\ c\}$ の並べ方を考えれば, 全部数えたことになります. だから, 一般性が失われていないんですね.

「場合の数と確率」最終手段

全部書き出すことです. 全通りで高々 216 通りですから, 15 分くらいで書き終わります. 特に高校数学の問題だと「考え方」を重視する傾向がありますが, きれいな式を書いて効率よく求める方法がもてはやされて, 単純に書き出す方法が邪道のように扱われることがあります.

全てのパターンを書き出して数えることは, 立派なひとつの解法です. ただ, 少しでもミスしたら部分点はもらえないかもしれないので, 実行するなら覚悟しましょう.

私は大学受験本番でこの問題が出されて, 全通り書きました.

7/2 数TO2改

(1) a, b, c が直角三角形の3辺になる条件は，サイコロを3回振ったときに3が1回，4が1回，5が1回出ることである．

よって，組 (a, b, c) は $\{3, 4, 5\}$ の並べ方の総数を数えて 6通り．

したがって求める確率は $\dfrac{6}{216} = \underline{\dfrac{1}{36}}$

(2) a, b, c が鈍角三角形の3辺になる条件は，最大の辺を c として

$$\begin{cases} a+b > c & \cdots ① \\ a^2+b^2 < c^2 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つことである．

ここで，a^2 と b^2 および a^2+b^2 の値をまとめると以下のようになる．

a^2 \ b^2	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

以下，c の値によって場合分けして調べる．

(i) $c = 1$ のとき
②より適する a, b がない．

(ii) $c = 2$ のとき
②より適する a, b がない．

(iii) $c = 3$ のとき
$(a, b) = (2, 2)$

(iv) $c = 4$ のとき
$(a, b) = (2, 3), (3, 2)$

(v) $c = 5$ のとき
$(a, b) = (2, 4), (3, 3), (4, 2)$

(vi) $c = 6$ のとき
$(a, b) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (3, 5), (4, 4), (5, 3)$

(i)〜(vi)より，組 (a, b) は全部で 13通り．

同様にして最大の辺が a，b となるような場合も 13通りずつある．

したがって求める確率は $\dfrac{39}{216} = \underline{\dfrac{13}{72}}$