2021/04/02

出典:2020北海道大(文系)大問3(一部改題)

満点:20点 / 目標:12点

> この問題は誘導をつけるかどうか自分で選べます。必要があれば【誘導あり版】を使ってください。

誘導なし版

n を 2 以上の自然数とする. 1 個のさいころを続けて n 回投げるとき, 出た目の最大公約数が 1 になる確率を n を用いて表せ.

誘導あり版

n を 2 以上の自然数とする. 1 個のさいころを続けて n 回投げるとき, 次の問に答えよ.

(1) 出た目の最大公約数が 6 になる確率を n を用いて表せ.

(2) 出た目の最大公約数が 3 になる確率を n を用いて表せ.

(3) 出た目の最大公約数が 1 になる確率を n を用いて表せ.

解答・解説 (2021/04/09)

確率の問題です. 頑張って調べるだけです. 今回かなり出来がよくてすごいなって思いました.

確率の問題だとよく累乗を使った表現が最終解答になりますが, 表現の仕方には制限はなく

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

でも

$$\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}$$

でも問題ありません. 自分の好みで選んでください.

4/2 数テロ改

・さいころをn回投げて最大公約数が6になるのは，

n回すべて6が出たときであるため その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

同様に，最大公約数が5になるとき・4になるときも

その確率は それぞれ $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である．

・最大公約数が3になる確率は．

（n回すべて3か6が出る確率）－（n回すべて6のみが出る確率）

で求まるので，$\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$

・最大公約数が2になる確率は，

（n回すべて2か4か6が出る確率）

－（（n回すべて4が出る確率）＋（n回すべて6が出る確率））

で求まるので，$\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$

したがって，最大公約数が1になる確率は

$$1 - \left(\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

$$\underline{= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$ である．