2021/03/12

満点:20点 / 目標:12点

> この問題は誘導をつけるかどうか自分で選べます。
> 必要があれば【誘導あり問題】を開いて使ってください。

誘導なし版

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする. $2\cos\theta + \sin\theta + 1 = 0$ が成り立つとき, $\tan\theta$ の値を求めよ.

誘導あり版

(1) 方程式 $(*)$, $(**)$ を連立して解け.

$$2x+y+1=0 \ \cdots (*)$$

$$x^2+y^2=1 \ \cdots (**)$$

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする. $2\cos\theta+\sin\theta+1=0$ が成り立つとき, $\tan\theta$ の値を求めよ.

解答・解説 (2021/03/18)

三角比の相互関係の問題です. 相互関係といえば $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ですね.

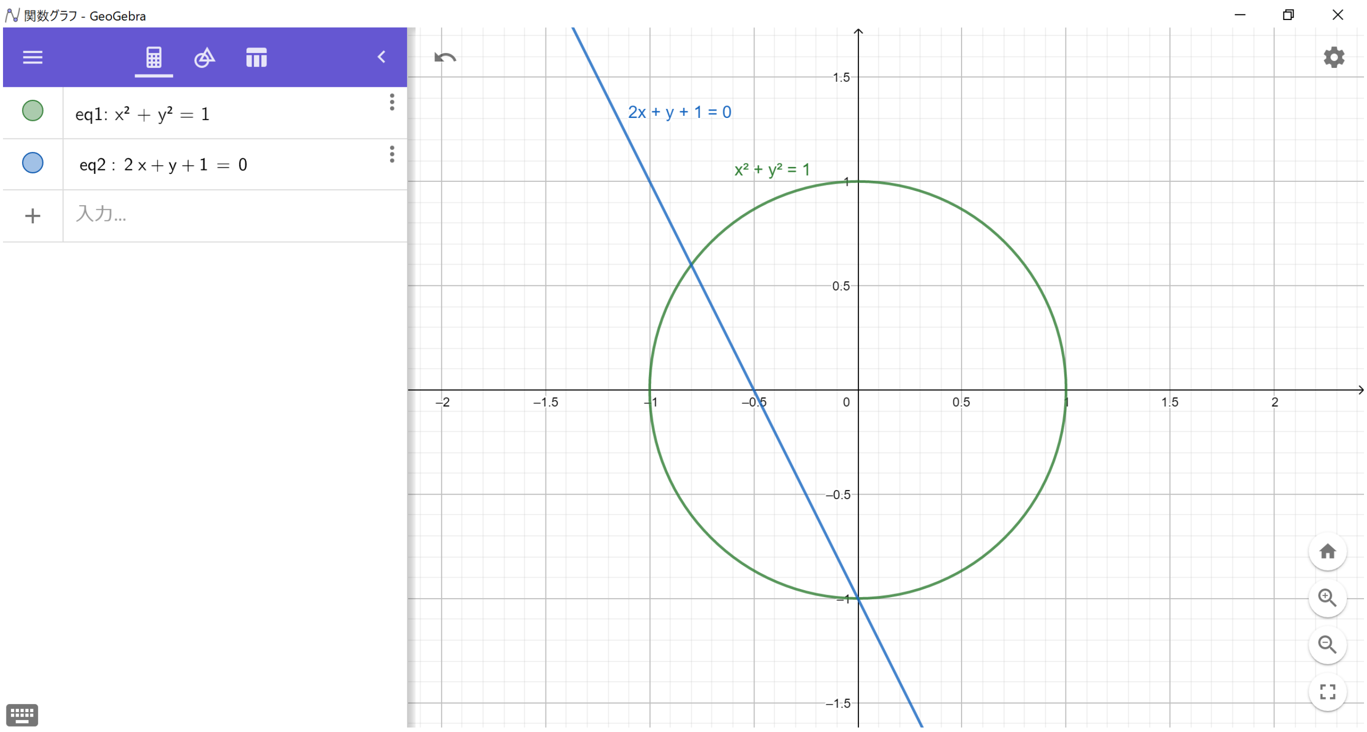
数学II「図形と方程式」の分野では, 座標平面上の円について学習します. 数学Iでさんざんお世話になった単位円は, 以下のように表されます:

$$x^2 + y^2 = 1$$

また, 数学Iで三角比を定義するとき, 単位円上の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ としました. つまり, 三角関数と座標平面には, 以下のような関係があることになります:

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$$

(2) では, $2\cos\theta + \sin\theta + 1 = 0$ を満たすような $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ の組を求めましたが, これは (1) の連立方程式を解いて, 交点を求めているのと同じことになります.



さて, 誘導をつけてみましたが, 連立方程式を正しく解けたでしょうか. 連立方程式と言われても, 「足したり引いたりしたら解ける」みたいに思っているのではないでしょうか. 確かに, 中学校で学習した連立方程式は, 係数が定数のものばかりだったので, 仕方のないことです.

中学校で学習した「代入法」を厳密に記述すると, 以下のようになります($\wedge$ は「かつ」の意味です).

$$y = f(x) \wedge g(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \wedge g(x,\ f(x)) = 0$$

式が 2 本あるとき, 式 (1) を変形して式 (2) に代入するわけですが, 出てきた値は必ず式 (1) に代入して正しいかどうか確認することになります. 記述例では同値性を重視して記述しました. たぶんここまで書かなくても許されます.

3/12 数IA改

(1) $\begin{cases} 2x+y=1=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x^2+(-2x-1)^2=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 5x^2+4x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x=0,\ -\frac{4}{5} \end{cases}$

よって連立方程式の解は $\underline{(x,y)=(0,-1),\ \left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)}$

(2) $\underbrace{\sin\theta=-2\cos\theta-1}_{\cdots①}$ を $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して、

$\cos^2\theta+(-2\cos\theta-1)^2=1$

整理して、$\cos\theta$ について解くと $\cos\theta=0,\ -\frac{4}{5}$

$\cos\theta=0$ のとき ①より $\sin\theta=-1$ だが、

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲では $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ だから不適.

$\cos\theta=-\frac{4}{5}$ のとき ①より $\sin\theta=\frac{3}{5}$.

したがって $\underline{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}}$