2021/06/11

満点:20点 / 目標:12点

> ヒントがあります。必要なら参考にしてください。

実数 x, y が連立不等式

$$x+y \leqq 8,\ \ x-2y \leqq -4,\ \ x-y \geqq -4$$

を満たすとき, 以下の式の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの x, y の値をそれぞれ求めよ.

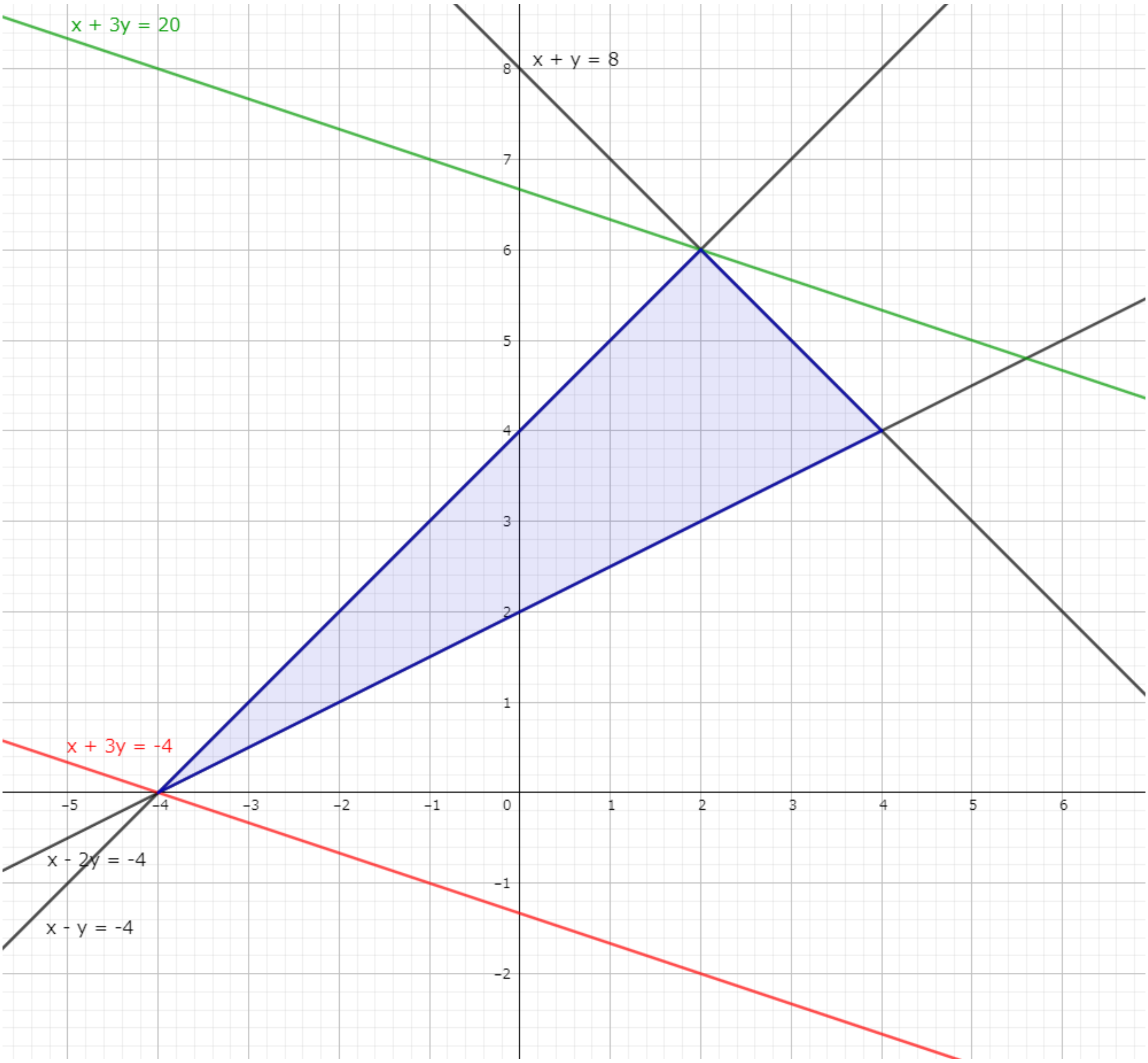
(1) $x+3y$ (2) x^2+y^2 (3) $\dfrac{y-4}{x+6}$

ヒント・方針

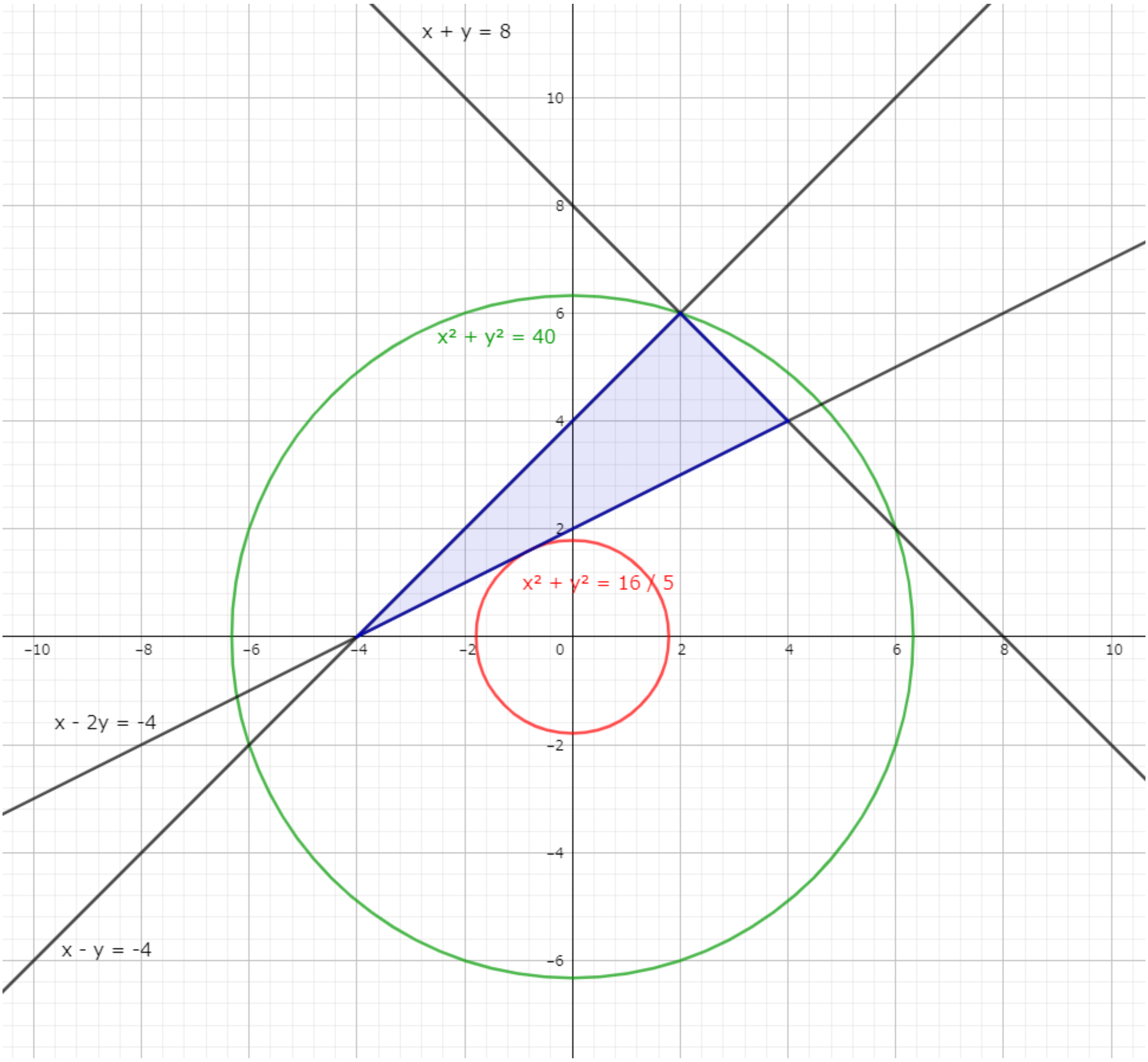
- まずは連立不等式の表す領域を図示する.
- (1) **線形計画法**の問題. $= k$ とおいて, 直線を動かして考える.
  - 黄チャートIIB 例題107
- (2) 線形(直線)ではないが, 考え方は (1) と同じ. $= k$ とおいて, 円を動かして考える.
  - 黄チャートIIB 例題110
  - できれば $= k^2$ とおくと後々の処理が楽になる
- (3) 同じく $= k$ とおく. 式がどのような図形を表しているか考える.
  - 黄チャートIIB 例題77

解答・解説

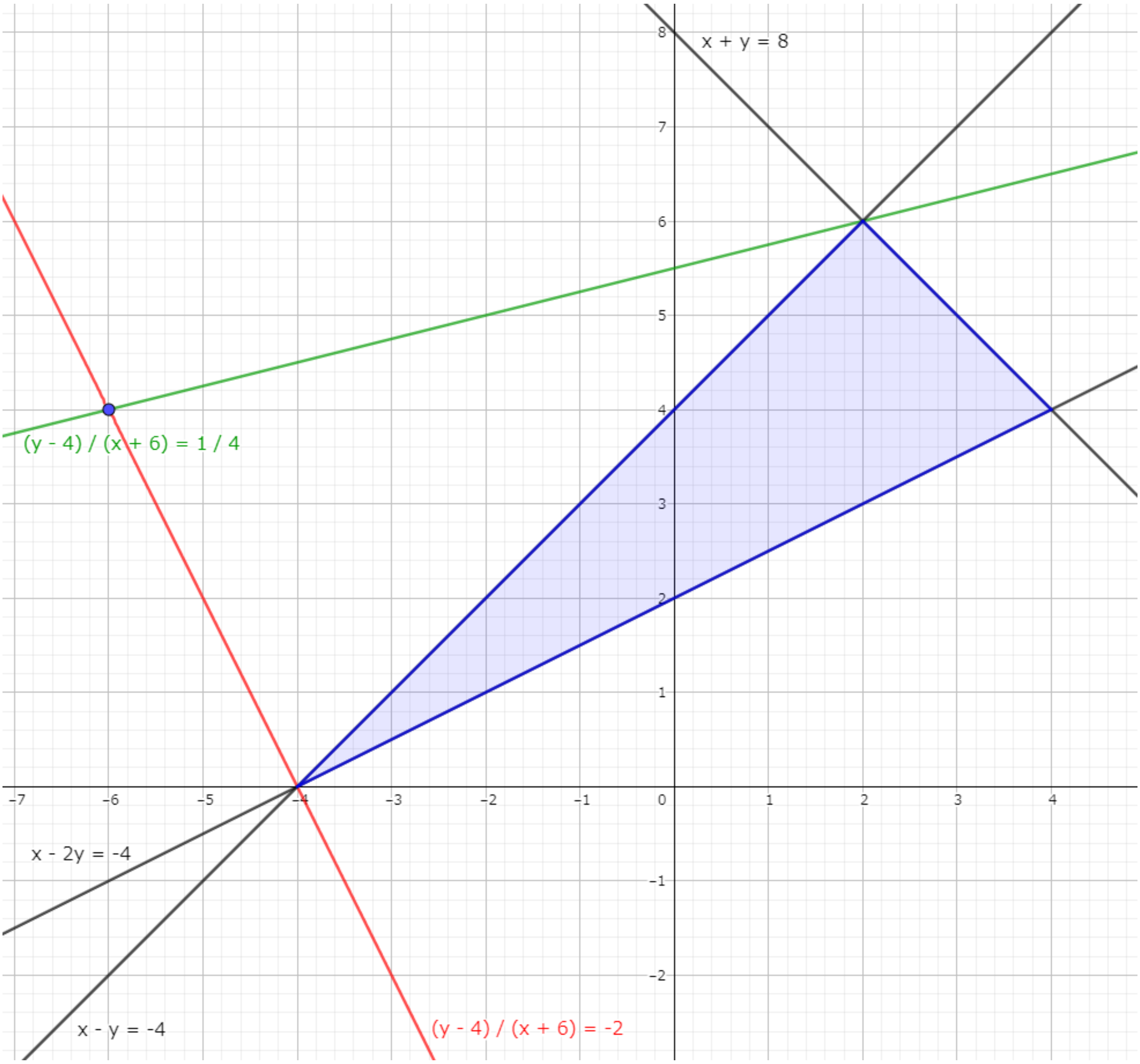
(1) 方針はよくできていましたが, よくわからない計算ミスや領域の図示ミスに気をつけましょう.



(2) 領域の端を通るときが最大・最小**ではありません**. 最小値は点と直線の距離の公式から求めるのが楽です.

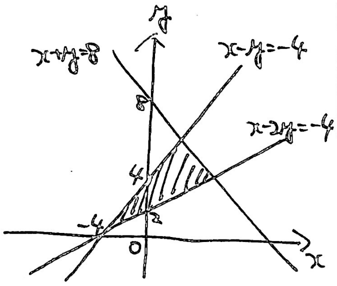


(3) ちょっと難しいです. $\dfrac{y-4}{x+6}=k$ は, 変形すると $y-4=k(x+6)$ なわけですが, これを k についての恒等式とみると, k の値にかかわらず点 $(-6,\ 4)$ を通ることがわかります.



6/11 数II改

図1 (x,y)の動く領域



連立不等式

$$\begin{cases} x+y \leqq 8 \\ x-2y \leqq -4 \\ x-y \geqq -4 \end{cases}$$

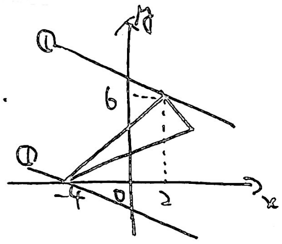
を全て満たすような点(x,y)が存在する領域は図1の斜線部分である。ただし境界線はいずれも含む。

(1) $x+3y=k$ とおく。(kは実数) …①

①は 傾き$-\frac{1}{3}$、切片$\frac{1}{3}k$の直線を表す。

①が点$(2,6)$を通るとき 切片$\frac{1}{3}k$は最大値をとり、

①が点$(-4,0)$を通るとき 切片$\frac{1}{3}k$は最小値をとる。



したがって $(x,y)=(2,6)$のとき 最大値 20

$(x,y)=(-4,0)$のとき 最小値 -4

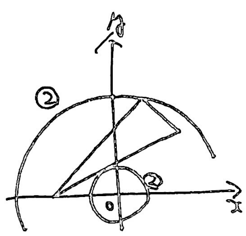
---

(2) $x^2+y^2=k^2$ とおく。(kは実数) …②

②は 中心$(0,0)$、半径kの円を表す。

②が点$(2,6)$を通るとき 半径kは最大になり、

②が 直線 $x-2y=-4$に接するとき 半径kは最小。



半径kが最小になるとき、

kは 原点と直線 $x-2y=-4$ の距離として求められる。すなわち、

$$k=\frac{|4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ である。}$$

またこのとき、直線 $x-2y=-4$ との接点を Pとすると、直線OPは直線 $x-2y=-4$と垂直であり、点$(0,0)$を通る。

よって OP: $2x+y=0$ と表せる。

したがって接点の座標は

$$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

を解いて、$(x,y)=\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

以上のことより

$(x,y)=(2,6)$のとき 最大値 40

$(x,y)=\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$のとき 最小値 $\frac{16}{5}$

---

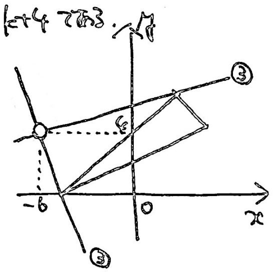
(3) $\frac{y-4}{x+6}=k$ とおく。(kは実数) …③

③は 点$(-6,4)$を通る直線を表す。

また 傾きk、切片$6k+4$である。

③が点$(2,6)$を通るとき 切片$6k+4$は最大、

③が点$(-4,0)$を通るとき 切片$6k+4$は最小。



したがって $(x,y)=(2,6)$のとき最大値 $\frac{1}{4}$

$(x,y)=(-4,0)$のとき最小値 -2
