

2021/09/03

満点:20点 / 目標:20点

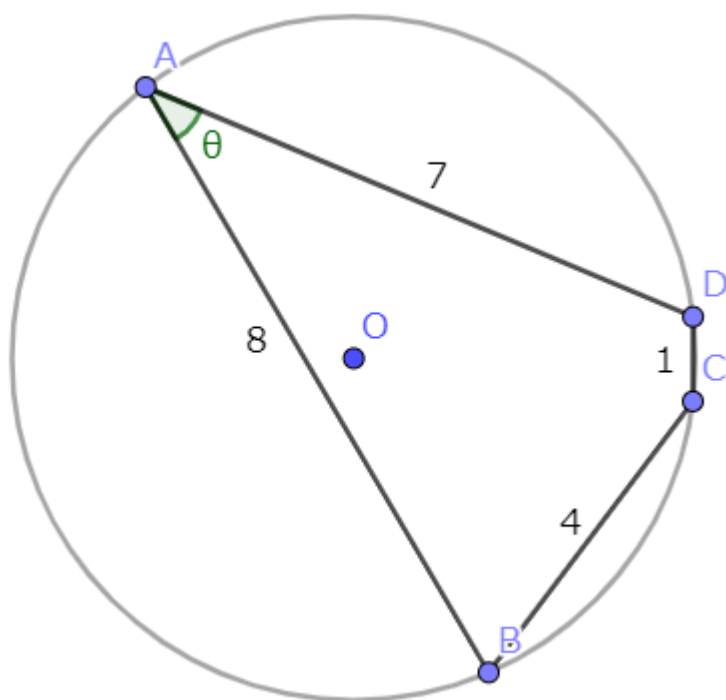
四角形 $ABCD$ は円 O に内接しており, $AB = 8, BC = 4, CD = 1, DA = 7$ である. 四角形 $ABCD$ の面積と円 O の面積をそれぞれ求めよ.

解答・解説

▶ 解答・解説

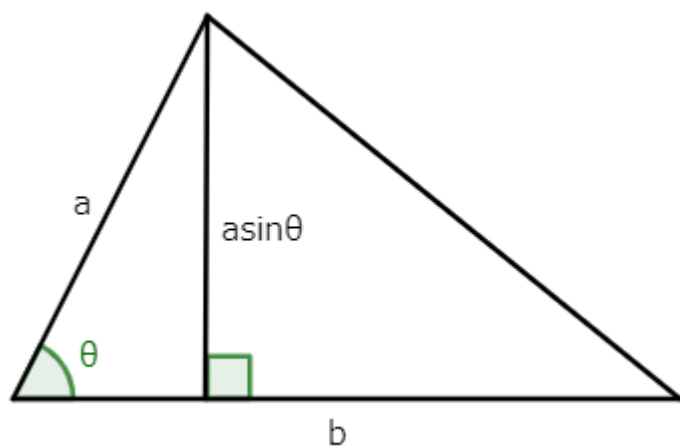
基本かつ超頻出問題です.

まずは図を描きます.



次に, 余弦定理を用いて, 対角線の長さを 2 通りに表します. 四角形 ABCD は円に内接しているから, 向かい合う角の大きさの和は 180° になります.

三角形の面積の公式



もちろん上の三角形の面積は $\frac{1}{2}ab \sin \theta$ です. この式が成り立つ理由は明確に説明できるでしょう.

計算ミスを防ぐために

対角線のとり方は2通りあります. この問題では AC と BD です. どちらを選んでも最終的な答えは変わりませんが, 計算量が大きく変わります. 時間の許す限り両方計算して, $\cos \theta$ や $\sin \theta$ の値がよりシンプルになる方を選んで使いましょう.

ブラーマグプタの公式 (検算用)

インドの数学者ブラーマグプタによる, 円に内接する四角形の面積を求める公式があります. ブラーマグプタの公式 (Brahmagupta's formula) と呼ばれます.

円に内接する四角形の4辺の長さをそれぞれ a, b, c, d とする.

$$p = \frac{a + b + c + d}{2}$$

とすると, 四角形の面積 S は,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

と表される.

今回の問題でこれを用いると, $p = \frac{8+4+1+7}{2} = 10$, $S = \sqrt{(10-8)(10-4)(10-1)(10-7)} = 18$ となり, 爆速で面積が求まります. 穴埋め式の問題や解答の検算に用いるとよいでしょう.

参考: [【高校数学 I】円に内接する四角形の面積ブラーマグプタの公式\(裏技\)の証明と円に内接しない四角形の面積プレートシュナイダーの公式\(裏技\) | 受験の月](#)