2020/10/30

出典:Focus Gold 数学1A(啓林館)例題107

満点:20点 / 目標:14点

2次方程式 $x^2-2ax+3a=0$ の異なる2つの実数解が, ともに2より大きくなるような定数 a の値の範囲を求めよ.

解答・解説(2020/11/05)

解の存在範囲の問題です. 2次方程式・不等式の問題の中で高難易度パターンに属し, また最重要項目です.
2次方程式の実数解は, 図形的には x 軸との交点の x 座標です. グラフを図示して, どんな条件を満たせばよいか考えましょう. 主に考えるべき項目は, 以下の3つです.

- 判別式 または グラフの頂点の y 座標
- 軸の位置
- 区間の端の y 座標の正負

他にもテクニックはあるのですが, まずはグラフを描いて条件を考える練習をしましょう. それで十分です.
なお, 図形的な考察ではなく, 論理のみで解答することもできます. 別解として掲載しました. 難しいので非推奨です.

さらに練習したい人のための問題

下にいくほど難しくなります.

1. $x^2-2ax+a+2=0$ の異なる2つの実数解が, ともに1より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ.
2. $x^2-2ax+1=0$ が $0<x<3$ の範囲に異なる2つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.
3. $x^2-ax+a^2-7=0$ の異なる2つの実数解のうち, 1つは2より大きく, 他の1つは2より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ.
4. $ax^2-(a+1)x-3=0$ の1つの解が-1と1の間にあり, 他の解が2と4の間にあるような定数 a の値の範囲を求めよ.
5. $x^2-2ax+a-3=0$ の異なる2つの実数解のうち, ただ1つが $1<x<2$ の範囲にあるような定数 a の値の範囲を求めよ.
6. $x^2-2ax+4a-9=0$ の異なる2つの実数解のうち, ただ1つが $0\leqq x\leqq 4$ の範囲にあるような定数 a の値の範囲を求めよ.
7. a を実数とする. $(a^2+1)x^2+(a+2)x-1=0$ の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ.

採点基準です.

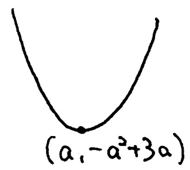
- 条件を列挙している(1つにつき5点, 3つできて15点)
- 共通範囲を求めている(5点)
- 問題文で定義されていないもの(関数 $f(x)$, 判別式 D など)を持ち出して使うなら, その場で明確に定義していないと減点されます.

以下は解答です(A4用紙1枚).

10/30 数III改

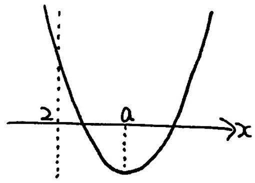
2次関数 $f(x)=x^2-2ax+3a$ のグラフを考える。

$f(x)=(x-a)^2-a^2+3a$ だから、$y=f(x)$ のグラフは右図のとおり。



このグラフが右下図のようになっているとき、すなわち

$$\begin{cases} \text{(i)} & -a^2+3a<0 \\ \text{(ii)} & a>2 \\ \text{(iii)} & f(2)>0 \end{cases}$$

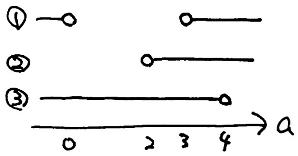


が全て成り立っているときのみ、2次方程式 $f(x)=0$ は 2より大きい解を2つもつ。

(i) $-a^2+3a<0$ これを解いて $a<0,\ 3<a$ …①

(ii) $a>2$ …②

(iii) $f(2)=4-a$ だから $4-a>0$ より $a<4$ …③



①,②,③の共通範囲を求めて、$\underline{3<a<4}$

<別解> 同値変形のみで解決する解法

$x^2-2ax+3a=0$ …(*) の2解が2以上

$\Longleftrightarrow$ (*)の判別式が正 かつ (*)の解 $a\pm\sqrt{a^2-3a}$ がどちらも2以上

$\Longleftrightarrow$ $a^2-3a>0$ かつ $a+\sqrt{a^2-3a}>2$ かつ $a-\sqrt{a^2-3a}>2$

$\Longleftrightarrow$ $a^2-3a>0$ かつ $a-\sqrt{a^2-3a}>2$

$\Longleftrightarrow$ $a^2-3a>0$ かつ $\sqrt{a^2-3a}<a-2$

$\Longleftrightarrow$ $a^2-3a>0$ かつ $a-2>0$ かつ $a^2-3a<(a-2)^2$

$\Longleftrightarrow$ $(a<0$ または $3<a)$ かつ $2<a$ かつ $a<4$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{3<a<4}$