2020/11/20

出典:東北大文系数学2015大問3改題

満点:15点 / 目標:11点

1. サイコロを1回投げて出た目の数を p とする. x の2次方程式
$$px^2+4x+1=0$$
が実数解を持つ確率を求めよ.
2. サイコロを3回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とする. x の2次方程式
$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$$
が実数解を持つ確率を求めよ.

解答・解説(2020/11/26)

「場合の数と確率」と2次方程式の融合問題です. やっていることは判別式の処理だけなので簡単ですが, 見たことがない形式で戸惑ったかもしれません.

- ひとつの問題のなかで異なる判別式を扱うときは, それぞれの判別式を D_1 とか D_2 とか添字をつけて区別して表すのがよいでしょう.
- 変数が3個あると難しいので, どれかひとつを基準にして順に考えるとよいです.
  - この問題では p_2 で分けました.
- 大学入試で出題されたときは, こんな感じの問題でした.
  - (1)だけを出題しました. ただ, そのままだと取り組みづらいので, より簡単な例題を追加しました.
  - (2)は数学2で学習する「解と係数の関係」で解くことになります.

> サイコロを3回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とする. x の2次方程式
>
> $$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0\cdots(*)$$
>
> を考える.
>
> 1. 方程式 $(*)$ が実数解を持つ確率を求めよ.
> 2. 方程式 $(*)$ が実数でない2つの複素数解 α, β を持ち, かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ.

採点基準です.

- (1)は5点です.
  - 「2次方程式が実数解をもつ」 ⇔ 「 (判別式の値) $\geqq 0$ 」 を踏まえていれば, 部分点として2点
- (2)は10点です.
  - 「2次方程式が実数解をもつ」 ⇔ 「 (判別式の値) $\geqq 0$ 」 を踏まえていれば, 部分点として2点

以下は解答です(A4用紙1枚).

11/20 数学Ⅱ改

1. $px^2+4x+1=0$ …① が実数解をもつのは、①の判別式の値が0以上のときである。

①の判別式を D_1 とおく。

$D_1 = 16-4p$ より、 $D_1 \geqq 0$ を満たす p は $p \leqq 4$

サイコロを1回振って4以下の目が出る確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ だから、

求める確率は $\frac{2}{3}$ である。

2. $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ …② が実数解をもつのは、②の判別式の値が0以上のときである。

②の判別式を D_2 とおく。

$D_2 = p_2^2-16p_1p_3$ より、 $p_2^2-16p_1p_3 \geqq 0$ …③ が成り立つような

(p_1, p_2, p_3) の組を求める。

$p_1 \geqq 1$, $p_3 \geqq 1$ であることに注意すると、$p_2 \leqq 3$ のときは③は成立しない。

$p_2=4$ のとき $p_1=p_3=1$ で③は成立。

$p_2=5$ のとき $p_1=p_3=1$ で③は成立。

$p_2=6$ のとき $(p_1, p_3)=(1,1), (1,2), (2,1)$ で③は成立。

よって③を満たすような (p_1, p_2, p_3) の組は5組ある。

(p_1, p_2, p_3) の組合せは全部で $6^3=216$ 通りあるので、

求める確率は $\frac{5}{216}$ である。