2020/10/23

出典:総合的研究・記述式答案の書き方問題集数学1A(旺文社)405

満点:10点 / 目標:7点

正八面体の隣り合う2面がなす角を θ とする. $\cos\theta$ の値を求めよ.

解答・解説(2020/10/29)

何度も言っていますがこれは「答案作成の練習」です. 全く手がつけられないような問題はそもそも出題されません. 模試や本番と同じように, 点をもらうために記述する練習をしましょう. でないと絶対にまともな答案を書けるようにはなりません.

さて, これは有名問題です. ここで重視したのは

- 図形を書き表して, 適切な説明ができるか
- 目標を設定できるか

の2点です.

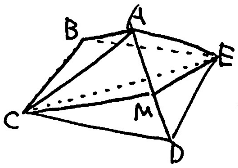
- 正八面体の形はだいたい想像がつくと思います. しかし問題では「正八面体」としか述べられていないので, 図を描いて点を設定し, 説明する必要があります.
- 「隣り合う2面がなす角」を正しく認識していないと, 議論のスタート地点に立てていないことになるので, 点数はほぼ与えられません.
    - 面と面のなす角(もっと単純に「面角」ということもあります)について, もう一度復習しておきましょう. 数学Aの後半で再び図形を扱います.
- 複数の解法が存在します.
    - 数学 II で学習する2倍角の公式を用いる解法があります. 別解として掲載しました.

以下は解答です(A4用紙1枚).

(2020/10/31追記)解答にミスがありました. $CE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ と書いていましたが, $CE=\sqrt{2}a$ でした.

10/23 数テロ改

正八面体の上半分は図のようになっている。



5つの頂点を図のようにA, B, C, D, Eと名付ける。

いま求めるべき角度θは、

ADの中点をMとしたときの$\angle CME$に相当する。

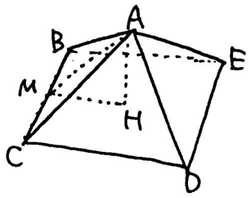
1辺の長さをaとする。$CM = EM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$、$CE = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ だから、

$\triangle CME$に余弦定理を適用して

$$\cos\angle CME = \frac{CM^2 + EM^2 - CE^2}{2\cdot CM\cdot EM} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a} = -\frac{1}{3}$$

したがって $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ である。

〈別解〉半角の公式を用いた解法（数学II）



いま求めるべき角度θは、

Aから面BCDEに下ろした垂線の足をH、

BCの中点をMとしたとき、

$\angle AMH$の2倍に相当する。

すなわち、$\angle AMH = \frac{1}{2}\theta$ ~~と相当する~~ と表せる。

~~AM = 2~~ 1辺の長さをaとする。$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$、$HM = \frac{1}{2}a$ だから、

$$\cos\angle AMH = \cos\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

半角の公式を適用して、$\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1 = -\frac{1}{3}$ である。