

2021/04/09

満点:20点 / 目標:12点

ヒントがあります。必要なら参考にしてください。

a, b を整数とする. 3 次方程式 $x^3 - 2ax^2 + bx - 1 = 0$ は $0 < x < 3$ の範囲に 3 つの異なる実数解をもち, その解のいずれかは整数である. a, b の値を求めよ.

ヒント・方針

- $0 < x < 3$ の範囲に整数解を持つことから, とりうる整数解の値は限られる. それぞれの場合で a を用いて b を表すと, 「 b は整数である」という条件を用いてさらに整数解を絞り込むことができる.
- 3次方程式とはいうものの, 先に求めた整数解を使って因数分解できるはずなので, 結局2次方程式の問題に帰着する.

解答・解説 (2021/04/15)

3次方程式の**解の存在範囲**の問題です. うまいことやると2次方程式の解の存在範囲の問題になるのですが, そこまで到達していないようでした. 前半の流れは今後の模試でよく見ることになると思うので, 解き直しておきましょう.

- 解と係数の関係に持ち込もうとした答案がありました. 解と係数の関係を用いて, 2次方程式に帰着させることもできます. 別解に載せました.
- 答案中で記号が重複しないようにする必要があります.

4/9 数7022

$$x^3 - 2ax^2 + bx - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

①が $0 < x < 3$ の範囲に 整数解 を持つとき、
その整数解は $x=1$ か $x=2$ のいずれかである。

(i) ①が $x=1$ を解に持つとき

①に $x=1$ を代入して、 $b=2a$ を得る。

よって①は

$$x^3 - 2ax^2 - 2ax - 1 = 0$$

と書けて、これを変形して

$$(x-1)(x^2 + (-2a+1)x + 1) = 0$$

と得る。こゝで、

$$x^2 + (-2a+1)x + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

と得る。

①が $0 < x < 3$ の範囲に異なる3つの実数解を持つのは、②が $0 < x < 3$ ($x \neq 1$) の範囲に異なる2つの実数解を持つときである。

↑
こゝで、下線部が成り立つような a の値の範囲を求める。

$$f(x) = x^2 + (-2a+1)x + 1$$

とすると、下線部が成り立つのは

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{2} \text{の判別式の値} > 0 \quad \dots (i) \\ 0 < (f(x) \text{の軸の位置}) < 3 \quad \dots (ii) \\ f(0) > 0 \quad \dots (iii) \\ f(3) > 0 \quad \dots (iv) \\ x \neq 1 \quad \dots (v) \end{array} \right.$$

を全て満たすときである。

(i) ②の判別式の値は

$$(-2a+1)^2 - 4 = 4a^2 - 4a - 3$$

だから、 $4a^2 - 4a - 3 > 0$ を解いて

$$a < -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} < a$$

(ii) $y=f(x)$ とするとき、軸は $x = \frac{2a-1}{2}$

$$0 < \frac{2a-1}{2} < 3 \quad \text{を解いて}$$

$$1 < a < 7$$

(iii) $f(0) = 1 > 0$ で必ず成り立つ。

(iv) $f(3) = 13 - 6a$ だから、

$$13 - 6a > 0 \quad \text{を解いて} \quad a < \frac{13}{6}$$

(v) $x=1$ のとき $a = \frac{3}{2}$ であることから

$$x \neq 1 \text{ のとき} \quad a \neq \frac{3}{2}$$

(i) (v) の共通範囲は $\frac{3}{2} < a < \frac{13}{6}$

これを満たす整数 a は $a=2$ 。

またこのとき $b=4$ となり整数である。

(ii) ①が $x=2$ を解に持つとき

①に $x=2$ を代入して、 $b = 4a - \frac{7}{2}$ を得る。

どのような整数 a に対しても b は整数にはならないので不適。

(i), (ii) より 求める a, b の値は

$$\underline{a=2, b=4}$$

<別解 (解と係数の関係でスタート)>

$$x^3 - 2ax^2 + bx - 1 = 0 \quad \dots (1)$$

(1) の3つの解をそれぞれ α, β, γ とすると、

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = 1 \end{cases} \quad \dots (*)$$

が成り立つ。

(i) (1) が $x=1$ を解に持つとき

$\alpha=1$ とし (*) に代入して

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 2a - 1 & \dots (i-1) \\ \beta + \gamma + \beta\gamma = b & \dots (i-2) \\ \beta\gamma = 1 & \dots (i-3) \end{cases}$$

を得る。すなわち、 β, γ の2解を持つ

2次方程式 $x^2 - (2a-1)x + 1 = 0$ (i-1), (i-3) より

$$x^2 - (2a-1)x + 1 = 0 \quad \dots (i-4)$$

と表される。

(1) が $0 < x < 3$ の範囲に異なる3つの実数解を持つのは、(i-4) が

$0 < x < 3$ ($x \neq 1$) の範囲に異なる

2つの実数解を持つときである。

(以下、本解と同じ)

(ii) (1) が $x=2$ を解に持つとき

$\alpha=2$ とし (*) に代入して

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 2a - 2 & \dots (ii-1) \\ 2\beta + 2\gamma + \beta\gamma = b & \dots (ii-2) \\ 2\beta\gamma = 1 & \dots (ii-3) \end{cases}$$

を得る。(ii-1), (ii-3) を (ii-2) に代入して

$$b = 4(a-1) + \frac{1}{2}$$

とある。どのような整数 a に代入しても

b は整数にはならないので不適。