2021/08/27

満点:20点 / 目標:12点

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=m(x+1)$ が異なる 2 点 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ で交わるとき, 線分 AB の中点の軌跡を求めよ.

誘導あり版

▶ 誘導あり版

放物線 $C: y = \dfrac{1}{2}x^2$ と直線 $l: y = m(x+1)$ がある.

(1) C と l が異なる 2 点で交わるような m の値の範囲を求めよ.

(2) (1) のとき, 2 つの交点をそれぞれ $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ とし, A の x 座標を α, B の x 座標を β とする. 線分 AB の中点 P の座標を, m, α, β を用いて表せ.

(3) (2) で得た P の座標表記から α, β を消去し, P の座標を m を用いて表せ.

(4) P の軌跡を求めよ.

解答・解説

▶ 解答・解説

「放物線の弦の中点の軌跡」の問題です. 呼び方がある程度には典型問題です.

(1) まず, 図形的な意味を確認しましょう. $y=m(x+1)$ は m の値によらず $(x,\ y)=(-1,0)$ を代入すると成り立つことから, 点 $(-1,0)$ を通る傾き m の直線を表します. 交点が 2 つないと中点もなにもありませんから, 交点が 2 つあるように m の範囲を決めておく必要がありました.

(2)(3) 2 交点の x 座標は, (1) で解いた方程式の 2 解です. 無理に表そうとすると非常に煩雑になってしまうことがあるので, いったん $\alpha,\ \beta$ として, 解と係数の関係を使って消去しました. P は直線 $y=m(x+1)$ 上にあることから, x 座標が求まれば y 座標はすぐ求まります.

ちなみに今回の問題では $\alpha=m-\sqrt{m^2+2m},\ \beta=m+\sqrt{m^2+2m}$ になりますから, 中点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=m$ になります. 今回はたまたま簡単に求まる形だったということです.

(4) 媒介変数表示された点の軌跡の問題です. 媒介変数 m を消去するのでした.

逆の確認は？

この問題の構造を確認します.

- 線分 AB の中点 P は, 放物線 $y=x^2+x$ 上のどこかにある.
- **逆に, P は, $m<-2,\ 0<m$ のとき存在する.**
  $x=m$ の関係があるから, x の範囲は $x<-2,\ 0<x$ である.
- ということで, P の軌跡は, 放物線 $y=x^2+x$ の $x<-2,\ 0<x$ の部分である.

どうしても「逆に, 求めた式の任意の点は条件を満たす」と書いてしまいがちですが, 論理の方向をよく考えて粘ってほしいと思います.

逆の記述を避けて, 同値変形を基に記述すると以下のようになります.

> $\mathrm{P}(x,\ y)$ が軌跡上の点である
>
> $$\Leftrightarrow \begin{cases} m<-2,\ 0<m \\ x=m \\ y=m(m+1) \end{cases} \quad \text{を満たす実数 } m \text{ が存在する}$$
>
> $$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-2,\ 0<x \\ y=x(x+1) \end{cases}$$
>
> $\therefore$ 求める軌跡は, 放物線 $y=x^2+x$ の $x<-2,\ 0<x$ の部分

8/27 数研改

(1) 放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $l: y=m(x+1)$

が異なる2点で交わるのは，

方程式 $\frac{1}{2}x^2=m(x+1)$ …① が異なる2つの

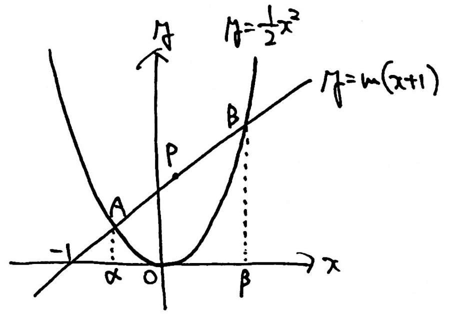
実数解をもつときである．

①は2次方程式だから判別式をDとすると

$D=m^2+2m$

よって $D>0$ を解いて $\underline{m<-2,\ 0<m}$

(2)



線分ABの中点Pの座標は，

$\underline{P\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ m\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\right)}$

(3) α,β は①の2解に等しいから，

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2m$

が成り立つ．

よってPの座標は $\underline{P(m,\ m(m+1))}$

(4) $P(x, y)$ とおくと，

$$\begin{cases} x=m \\ y=m(m+1) \end{cases}$$

すなわち $y=x(x+1)$

また(1)の範囲より $x<-2,\ 0<x$

したがって求める軌跡は

<u>放物線 $y=x^2+x$ の</u>

<u>$x<-2,\ 0<x$ の部分</u> である．