

2020/12/11

出典:東北大入試実戦模試(駿台) 2015/2016 文系数学 大問3

満点:20点 / 目標:10点

袋の中に赤玉が3個, 白玉が5個入っている. 男女2人で「袋から玉を1個取り出す」という試行を繰り返す. ただし, 取り出した玉は袋に戻さないものとする. 1回目は男子が取り出し, 2回目は女子が取り出す. 以後, 交互に玉を取り出し, 3個目の赤玉を取り出した方を勝ちとする.

(1) 4回目に女子が勝つ確率を求めよ.

(2) 6回玉を取り出しても勝負がつかない確率を求めよ.

(3) 6回目に女子が勝った. このとき, すでに男子が2個の赤玉を取り出している条件付き確率を求めよ.

解答・解説(2020/12/17)

確率の問題です. 書いてあるとおりに式を立てて計算するだけです. まあそれが難しいんですけどね. 特に(3)が大変で, 今すぐにできるようなものでもないのですが, (1)と(2)は今の段階でもできるはずです. よく読んで書き方を真似てみましょう.

何度も言っていますが「場合の数と確率」では立式の理由を書かないと絶対に点数はもらえません. 私は優しいので突き返して再提出を求めますが, 黙って受け取って「採点対象外です」と返されても文句は言えないので, そのくらいの覚悟はしておきましょう.

- (1)は4点です.
 - 「互いに排反」を書き落とすと-3点
- (2)は6点です.
 - 否定文で書かれているので, 見た瞬間に余事象の活用を考えたと思います. よく検討して, 計算が楽な方を選びましょう
 - 全通り書き出すと途中で詰まります. 早めに規則性に気付きたい
- (3)は10点です.
 - 考え方を記述していれば, 適宜加点
 - 難しいです

12/11 数字の改

- (1) 4回目には3個目の赤玉を取り出せるのは、
3回目までは2個の赤玉と1個の白玉を取り出し、4回目で赤玉を取り出すということである。

これが起こる次の下の表のとおり。

1回目	2回目	3回目	4回目	
赤	赤	白	赤	... (i)
赤	白	赤	赤	... (ii)
白	赤	赤	赤	... (iii)

これらの事象が起こる確率は、

$$(i) \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{56}$$

$$(ii) \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{56}$$

$$(iii) \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{56}$$

(i), (ii), (iii) は互いに排反だから、

$$\text{求める確率は } \frac{3}{56}$$

- (2) 6回玉を取り出しても勝負がつかないのは、

(i) 6回目までで赤玉が1個取り出される

(ii) 6回目までで赤玉が2個取り出される

のどちらかである。

(i) 6回目までで赤玉が1個、白玉が5個取り出されるとき、

玉の取り出し方の順序は $\frac{6!}{5!1!}$ 通り。

よってこの場合の確率は

$$\frac{6!}{5!1!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3}{28}$$

- (ii) 6回目までで赤玉が2個、白玉が4個取り出されるとき、

玉の取り出し方の順序は $\frac{6!}{4!2!}$ 通り。

よってこの場合の確率は

$$\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{15}{28}$$

(i), (ii) は互いに排反だから、

$$\text{求める確率は } \frac{9}{14}$$

- (3) 6回目に女子が勝つのは、5回目までに2個の赤玉と3個の白玉を取り出し、6回目で赤玉を取り出すということである。

よってこの事象が起こる確率は

$$\frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{28}$$

一方、6回目に女子が勝つ、かつそれまでに

男子が赤玉を2個取り出しているのは、

・男子は3回中2回赤玉、1回白玉を取り出す

・女子は2回目と4回目で白玉、

6回目で赤玉を取り出す。

のいずれも満たすということである。

よってこの事象が起こる確率は

$$3C_2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{56}$$

よって求める条件付き確率は

$$\frac{3}{56} \div \frac{5}{28} = \frac{3}{10} \text{ である。}$$