2020/11/13

出典:サクシード数1_485

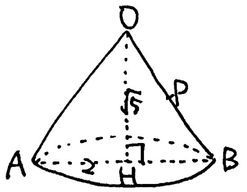
満点:10点 / 目標:8点

底面の半径 2, 高さ $\sqrt{5}$ の直円錐がある. この直円錐の頂点を O, 底面の直径の両端をA, B とし，線分 OB の中点を P とするとき，側面上で A から P に至る最短距離を求めよ.

解答・解説(2020/11/20)

三角比の問題…と思いきや, ただの立体図形の計量でした. 最後の計算すら中学生でもできます.
図形問題で大事なのは, 図を描いてどこの話をしているかはっきりさせることです.

11/13 教T10改



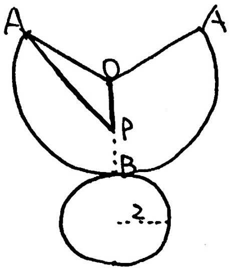
直円錐の頂点Oから底面に垂線を下ろし、足をHとする。

三平方の定理より $OB=3$ だから $OP=\frac{3}{2}$

この直円錐の展開図をかくと、左下図のようになる。

底面の周の長さは 4π だから、側面の扇形の中心角を θ とすると

$$6\pi\times\frac{\theta}{360}=4\pi \quad より \quad \theta=240^\circ$$

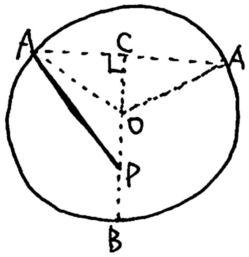


よって AP の長さは 余弦定理より

$$AP^2=AO^2+OP^2-2\cdot AO\cdot OP\cdot\cos\angle AOP$$
$$=3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot3\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{63}{4}$$

$AP>0$ より $\underline{AP=\frac{3\sqrt{7}}{2}}$

〈別解〉 中学3年生なら…



$\angle AOP=120^\circ$ より $\angle AOC=60^\circ$ だから,

$AO=3$ より $OC=\frac{3}{2}$, $AC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

よって $\triangle ACP$ において 三平方の定理より

$$AP^2=AC^2+CP^2$$
$$=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+3^2=\frac{63}{4}$$

$AP>0$ より $\underline{AP=\frac{3\sqrt{7}}{2}}$