

第 10 回 模試テロ

【1】 (1) 不定方程式 $xy - 3x + y = 18$ を満たす自然数 (x, y) の組をすべて求めよ.

(2) x の不等式 $\left(\frac{1}{8}\right)^x \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$ を解け.

【2】 x の 2 次方程式 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ は 2 つの異なる実数解をもつ. そのうち 1 つが $\cos \theta$ であるとする.

(1) もう 1 つの解が $\cos 2\theta$ であることを示せ.

(2) $\cos 3\theta = \cos 2\theta$ が成り立つことを示せ.

(3) θ の値を求めよ. ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする.

【3】 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. a_{1000} を求めよ.

【4】 t を実数の定数とする. 曲線 $C: y = x^3 - 3x$ 上の点 $P(t, t^3 - 3t)$ における接線を l とする.

(1) 直線 l の方程式を求めよ.

(2) t が $0 \leq t \leq 1$ のすべての範囲で動くとき, l が通過する領域を xy 平面上に図示せよ.

【5】 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする. 平行四辺形 ABCD において, 対角線 AC を $2:3$ に内分する点を M, 辺 AB を $2:3$ に内分する点を N, 辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を L とし, AL と CN の交点を P とする.

(1) $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}$ とする. \overrightarrow{BP} を \vec{a}, \vec{c}, t を用いて表せ.

(2) 3 点 P, M, D が一直線上にあるとき, t の値を求めよ.