第 5 回 模試テロ

【1】(1) x の方程式 $\log_x(5x+6)=2$ を解け.

(2) $f(x)=3x^2+\int_0^1 xf(t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

【2】点 A で外接する 2 円 K_1, K_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とする. O_1 を通る K_2 の接線のうち 1 本を l とする. l と K_2 との接点を B, l と K_1 との 2 交点を B に近い順に C, D とする. また, 直線 AD と直線 BO_2 との交点を E, 直線 AD と K_2 との 2 交点のうち A でないものを F とする.

(1) $\triangle\mathrm{CAD}$ と $\triangle\mathrm{EBD}$ は相似であることを示せ.

(2) CE と BF は平行であることを示せ.

【3】$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(1) $y=2\sin\theta-\cos 2\theta$ とする. y の最大値と最小値を求めよ.

(2) a を実数の定数とする. θ の方程式 $2\sin\theta-\cos 2\theta-a=0$ が異なる 2 解をもつように a の値の範囲を定めよ.

【4】i を虚数単位とする. 複素数 z の方程式 $z^3=8i$ を解け.

【5】正の整数 X が以下の条件を満たすとき, X は**ルンルン数**であるという.

- n を $n \geqq 2$ を満たす自然数とする. X は n 桁の整数である.
- X の各桁を上の位から順に $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ とする.
  - すべての自然数 $1 \leqq k \leqq n$ に対して, $1 \leqq X_k \leqq 5$
  - すべての自然数 $1 \leqq k \leqq n-1$ に対して, $|X_{k+1}-X_k| \leqq 1$

例えば, 21, 334 は**ルンルン数**であり, 2, 456, 31415 は**ルンルン数**ではない.

(1) 2 桁の**ルンルン数**の個数を求めよ.

(2) 5 桁の**ルンルン数**の個数を求めよ.