

# 2021/01/09

---

出典:2020年第2回全統記述模試2B型大問4 改題

満点:20点 / 目標:12点

$p$  は素数の定数とし,  $x, y$  に関する方程式

$$xy - px - py = 0 \cdots (*)$$

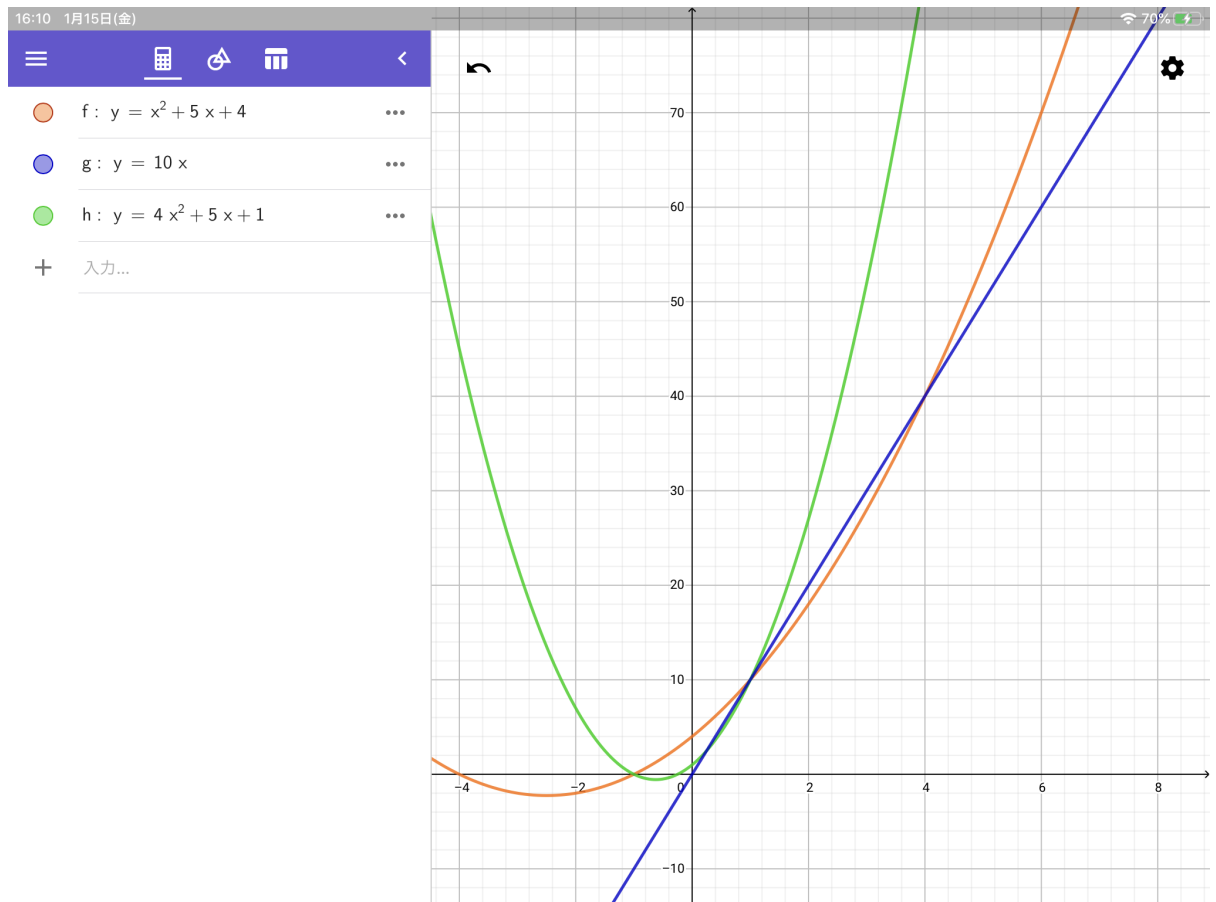
を考える.

- (1)  $p = 2$  のとき,  $(*)$  を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ.
- (2)  $(*)$  を満たす自然数  $x, y$  の組を,  $p$  を用いて表せ.
- (3) (2) で求めた自然数  $x, y$  の組のうち,  $x + 4y$  が最小になるものを求めよ.

## 解答・解説(2021/01/15)

不定方程式の問題です. 特に(1)は必ず解ける必要があります.

- $p$  が「素数の」定数であることが大事です. この条件があるから,  $p^2$  を素直に処理できます.
- $p$  の値によって,  $x + 4y$  が最小になるような自然数  $(x, y)$  の組が変わります.
  - 問題文を読んだときにこの可能性に思い至るのが理想ですが, なかなか大変だと思います.
  - **等式・不等式の証明は, 数学IIの範囲です.** 高校1年生ではグラフを使った直感的な説明がやりやすいと思います.



- 本来は(2)と(3)がまとめて出題されています.

(1)  $p = 2$  のとき, (\*) を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ. (2) (\*) を満たす自然数  $x, y$  の組のうちで,  $x + 4y$  を最小にするものを  $p$  を用いて表せ.

## 1/9 数70改

(1)  $p=2$  のとき, (\*) は

$$x^2 - 2x - 2y = 0$$

$$\text{変形して, } (x-2)(y-2) = 4$$

 $x, y$  は自然数だから,

$$x-2 \geq -1 \text{ かつ } y-2 \geq -1 \text{ であるから}$$

$$(x-2, y-2) = (1, 4), (4, 1), (2, 2)$$

したがって

$$(x, y) = (3, 6), (6, 3), (4, 4)$$

(2)  $x^2 - px - py = 0$  を変形して,

$$(x-p)(y-p) = p^2$$

いま,  $p$  は素数だから, 積が  $p^2$  に

なるような2数の組は

$$(\pm 1, \pm p^2), (\pm p^2, \pm 1), (\pm p, \pm p)$$

(符号同値)

のみである.

$$x-p \geq 1-p, y-p \geq 1-p \text{ だから,}$$

$$(x-p, y-p) = (1, p^2), (p^2, 1), (p, p)$$

したがって

$$(x, y) = (p+1, p^2+p),$$

$$(p^2+p, p+1),$$

$$(2p, 2p)$$

(3) (2) で求めた3組に  $p=1$  を  $x+4y$  の値に置き換えて  $N_1, N_2, N_3$  とおく. 可なり,

$$(x, y) = (p+1, p^2+p) \text{ のとき}$$

$$N_1 = 4p^2 + 5p + 1,$$

$$(x, y) = (p^2+p, p+1) \text{ のとき}$$

$$N_2 = p^2 + 5p + 4,$$

$$(x, y) = (2p, 2p) \text{ のとき}$$

$$N_3 = 10p \text{ と可なり.}$$

 $N_1$  と  $N_2$  を比較すると,

$$N_1 - N_2 = 3p^2 - 3 \text{ であり}$$

$$p \geq 2 \text{ ならば常に } N_1 > N_2 \text{ である.}$$

次に,  $N_2$  と  $N_3$  を比較すると

$$N_2 - N_3 = p^2 - 5p + 4 = (p-1)(p-4) \text{ であり}$$

$$p=2, 3 \text{ のときは } N_2 < N_3,$$

$$p \geq 5 \text{ のときは } N_2 > N_3 \text{ である.}$$

よって,  $x+4y$  の最小値は  $p=1$  であるから $(x, y)$  の組は,

$$\begin{cases} p=2, 3 \text{ のとき } (x, y) = (p^2+p, p+1) \\ p \text{ が5以上の素数のとき } (x, y) = (2p, 2p) \end{cases}$$

$$\text{と可なり.}$$