2021/06/18

満点:20点 / 目標:16点

> ヒントがあります。必要なら参考にしてください。

m がすべての正の実数値をとって変化するとき, 放物線 $y=x^2-2(m+1)x+2m^2-2m+3$ の頂点の軌跡を求め, 座標平面上に図示せよ.

ヒント・方針

テスト範囲そのものです.

- キーワード: **媒介変数表示**
    - 黄チャートIIB 例題100
- m の変域に注意

解答・解説

素直な軌跡の問題です. 放物線の頂点の座標が $(m+1, m^2-4m+2)$ になることから, x と y はそれぞれ

$$\begin{cases} x = m+1 \\ y = m^2-4m+2 \end{cases}$$

と表されます. あとは m を消去して x と y の関係式を導きましょう. **ここまでで10点です.**

さて, 現時点で

> 問題の放物線の頂点は, $y = x^2 - 6x + 7$ 上にある

ことはわかっていますが,

> 問題の放物線の頂点は, $y = x^2 - 6x + 7$ 上の**すべての**部分を通る

ことは分かっていません.

ここで m の条件が気になります. よく「軌跡の問題は逆の確認をしましょう」といわれますが, 今回は m の範囲に連動して x の範囲が定まります.

$m > 0$ から, $x > 1$ であることがわかります. x の定義域が定まったところで, 最終解答です.

6/18 数IIα改

$$y = x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 - 2m + 3$$
$$= \{x - (m+1)\}^2 + m^2 - 4m + 2$$

より，この放物線の頂点の座標は

$(m+1,\ m^2-4m+2)$ と表される．

mが正の範囲を動くことに注意して．
いま x, y と m のあいだには

$$\begin{cases} m > 0 \\ x = m+1 \\ y = m^2 - 4m + 2 \end{cases}$$

の関係が成り立つ．この連立方程式より．

$$\begin{cases} x > 1 \\ y = x^2 - 6x + 7 \end{cases}$$

を得る．したがって求める軌跡は

$y = x^2 - 6x + 7$ の $x > 1$ の部分

であり，図示すると下図のようになる．