超・数テロ 2021秋

出題範囲

- 数学I
- 数学A
- 数学II (微分法・積分法を除く)

問題1

実数 x, y に関する以下の連立方程式の解 $(x,\ y)$ の個数を求めよ.

$$\begin{cases} x^3+2y=3 \\ 2x+y^3=3 \end{cases}$$

問題2

xy 平面上の 2 点 $(-4,\ 0)$, $(0,\ -4)$ を結ぶ線分(両端を含む)を L とする. また, a を実数の定数とする. 放物線 $C:\ y=x^2-ax-2a$ が L と共有点をもつように動くとき, C の通過領域を図示せよ.

問題3

以下の条件を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z,\ w)$ は存在するか.

$$x+xy+xyz+xyzw=79,\ x<y<z<w$$

問題4

以下の条件を満たす自然数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ.

$$a<b,\ ab=29!,\ a \text{ と } b \text{ は互いに素}$$

問題5

1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ.

問題6

正 5 角形 ABCDE があり, 線分 BE と線分 AC の交点を F とする. また点 F を通る直線が辺 AB, CD とそれぞれ点 G, H で交わり, $\mathrm{BG}=4$, $\mathrm{CH}=5$ が成り立つ. さらに, GH と CE の交点を I とする. このとき線分 AG の長さを求めよ.

問題7

以下, p_n は 小さい順に数えて n 番目の素数を表す.

7-A

以下の自然数 q を考えることにより, 素数が無限に存在することを証明せよ.

$$q = 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p_n + 1$$

7-B

n を自然数とする. 以下のように**フェルマー数** F_n を定める.

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

(1) フェルマー数はすべて互いに素であることを示せ.

(2) (1) の性質を用いて, 素数が無限に存在することを示せ.

7-C

自然数 j について, $N_j(x)$ は初めの j 個の素数 $2,\ 3,\ \cdots,\ p_j$ のみを素因数に持つ自然数 n で x を超えないものの集合とする. また, # N_j(x) を $N_j(x)$ に含まれる要素の個数とする.

(1) $N_1(100)$, # N_1(100) を求めよ.

(2) $N_n(n)$ を求めよ.

(3) 以下の不等式が成り立つことを示せ.

N_j(x) \leqq 2^j \sqrt{x}

(4) (3) の性質を用いて, 素数が無限に存在することを示せ.

問題8