2020/12/26

満点:20点 / 目標:15点

(1) 連続する 2 つの整数の積は 2 の倍数であることを示せ.

(2) 連続する 3 つの整数の積は 3 の倍数であることを示せ.

(3) n が奇数のとき, $n^3 - n$ は 24 の倍数であることを示せ.

(4) n が奇数のとき, $n(n^4 - 1)$ は 240 の倍数であることを示せ.

解答・解説(2021/01/07)

整数の問題です. 整数問題は際限なく難しくできますし, パズル要素高めですが, この問題は比較的取り組みやすい内容かと思います.

- n の他に文字を使おうと思ったら, かならず定義しましょう.
- (1)と(2)は, あっさり書いてしまって問題ないと思います. 解答例は, 丁寧に書こうと思って書き始めたら, 後半がかなり駆け足になってしまいました.

  > (1) 連続する2つの整数の一方は必ず偶数になるから, それらの積は偶数である.
  > (2) 連続する3つの整数のうち1つは必ず3の倍数だから, それらの積は3の倍数である.

- **倍数を示すときは余りで分類する**のが定石です.
- 「24の倍数」と書いてある時点で, 24=8*3だから, 「8の倍数であり, かつ, 3の倍数である」ことを示せればOKだな, と気付くと思います. **ならばそれを1行目に書いておくべきです.**
  - (4)では「240の倍数」のため, 先に素因数分解しました.
  - わかっているならば書いておきましょう. 点をくれるかもしれない.

12/26 数〒ロ改

以下，k を整数とする．

(1) 連続する2つの整数を n，$n+1$ とする．

(i) $n=2k$ のとき $n(n+1)=2k(2k+1)$

(ii) $n=2k+1$ のとき $n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2(2k+1)(k+1)$

より，(i)，(ii)のいずれも連続する2つの整数の積は2の倍数である．

(2) 連続する3つの整数を n，$n+1$，$n+2$ とする．$B=n(n+1)(n+2)$ とする．

(i) $n=3k$ のとき B は明らかに3の倍数．

(ii) $n=3k+1$ のとき $n+2=3k+3=3(k+1)$ だから B は3の倍数．

(iii) $n=3k+2$ のとき $n+1=3k+3=3(k+1)$ だから B は3の倍数．

よって連続する3つの整数の積は3の倍数である．

(3) n が奇数のとき，$n=2k+1$ と表される．

$n^3-n=(n-1)n(n+1)$ …①

$\quad=2k(2k+1)(2k+2)=4k(k+1)(2k+1)$ …②

①より，n^3-n は3の倍数である．

また，②より，n^3-n は8の倍数でもある．

よって，n^3-n は24の倍数である．

(4) $240=2^4\times3\times5$ と素因数分解できるので，

$n(n^4-1)$ が 2^4，3，5 を因数に含むことを示すことにする．

$n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$

$\quad=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ …③

$\quad=2k(2k+1)(2k+2)((2k+1)^2+1)$

$\quad=8k(k+1)(2k+1)(2k^2+2k+1)$ …④

③より $n(n^4-1)$ は3の倍数，④より $n(n^4-1)$ は16の倍数である．

また，④中の項に着目して，$P=2k^2+2k+1$ とする．また，m を整数とする．

(i) $k=5m$ のとき，④全体が5の倍数となる．

(ii) $k=5m+1$ のとき，$P=5(10m^2+6m+1)$ だから P は5の倍数．

(iii) $k=5m+2$ のとき，$2k+1=5(2m+1)$ より，④は5の倍数．

(iv) $k=5m+3$ のとき，$P=5(10m^2+14m+5)$ だから P は5の倍数．

(v) $k=5m+4$ のとき，$k+1=5(m+1)$ より，④は5の倍数．

(i)〜(v)より，④は5の倍数である．

以上のことから，$n(n^4-1)$ は，$2^4\times3\times5$ すなわち240の倍数である．