第 3 回 模試テロ

【1】(1) $x = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ のとき, $4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ の値を求めよ.

(2) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする. 45^{54} の桁数を求めよ.

【2】$\triangle$OAB において, OA $= 3$, OB $= 2$, $\angle$AOB $= \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ とする. $0 < t < 1$ を満たす実数の定数 t に対して, 辺 OA を $t : (1-t)$ に内分する点を C, 辺 OB の中点を D, 線分 AD と線分 BC の交点を P とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を t, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

(2) 任意の θ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ.

【3】(1) 以下の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

$$1 \cdot 3,\ 3 \cdot 3^2,\ 5 \cdot 3^3,\ \cdots\cdots,\ (2n-1) \cdot 3^n$$

(2) 以下の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

$$1 \cdot 3,\ 4 \cdot 3^2,\ 9 \cdot 3^3,\ \cdots\cdots,\ n^2 \cdot 3^n$$

【4】放物線 $C : y = x^2$ 上に, 2 点 A$(\alpha,\ \alpha^2)$, B$(\beta,\ \beta^2)$ をとる. ただし, $\alpha \neq \beta$ とする. 点 A における C の接線を l, 点 B における C の接線を m とする.

(1) 直線 l, m の交点の座標を α, β を用いて表せ.

(2) 直線 l, m が直交するとき, $\alpha\beta$ の値を求めよ.

(3) 直線 l, m が直交するとき, その交点の軌跡を求めよ.

【5】$\sqrt{n^2 + 5n}$ が整数になるような自然数 n をすべて求めよ.