2020/10/02

出典：令和3年度青森県第2回全県テスト数学大問4 (一部改題)

満点:20点 / 目標:15点

2直線 $l:\ y=ax+12$, $m:\ y=-\frac{1}{2}x+7$ がある. l と m の交点を A, l と x 軸の交点を B, m と x 軸の交点を C とする. B の x 座標は -6 である. また, x 軸上に点 P をとり,

- P を通り x 軸に垂直な直線と m との交点を Q とする.
- Q を通り x 軸に平行な直線と l との交点を R とする.
- R を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を S とする.

ただし, (B の x 座標) $<$ (P の x 座標) $<$ (C の x 座標) とする.

1. a の値を求めよ.
2. 点 A の座標を求めよ.
3. 点 P が線分 BC の中点であるとき, 線分 PQ の長さを求めよ.
4. 四角形 $PQRS$ が正方形になるとき, 四角形 $PQRS$ の面積を求めよ.

解答・解説 (2020/10/08)

直近の全県テストから, 問4のみを改題し, 図を提示せずに文章のみで出題しました.
正直, 問3までは当然のように解けてほしいところです. また, 模試等で記述が求められても, 簡潔に済ませてよいでしょう.

- 問4では, P の座標がわからないので, x 座標を文字で設定します. このときの文字は a とか p とか t がよく使われます.
  すると Q の座標, R の座標が芋づる式に導かれます. 問3は, Q の座標を設定させるための誘導となっていました.
- $PQ = QR$ になるときの P の座標を求めるのですが, Q と R の位置関係によって QR の表し方が異なるので, 場合分けを行っています.

解答です(A4用紙1枚). ボールペン一発書きなので誤字がありますが許してください.

10/2 数テロ改

(1) $y=ax+12$ が $B(-6,0)$ を通るので、

$0=-6a+12$ より $\underline{a=2}$

(2) l と m の交点の座標は 2つの直線の式を連立して得られるので、

l: $y=2x+12$ …①

m: $y=-\frac{1}{2}x+7$ …②

①、②を連立して解いて $x=-2$, $y=8$

$\therefore \underline{A(-2,8)}$

(3) m と x 軸の交点 C の座標は $C(14,0)$

よって 線分BCの中点は

$\left(\frac{-6+14}{2}, 0\right)=(4,0)$

いま、$P(4,0)$ であり、Qのx座標は

~~Pと同一だから、~~ ~~である。~~ Pのx座標と同一である。

Qは m 上の点であることを考慮して、

$Q(4, -\frac{1}{2}\cdot 4+7)$ すなわち $Q(4,5)$

よって $\underline{PQ=5}$

(4) p を実数として、$P(p,0)$ とおく。

$Q(p, -\frac{1}{2}p+7)$ とおける。

また Rの ~~x~~ y座標は Qのy座標と同一である。

Rは l 上の点であることを考慮して、

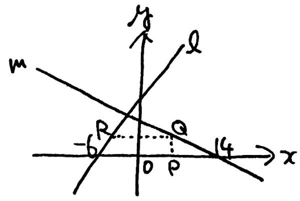
~~R(~~ $-\frac{1}{2}p+7=2x+12$ より

$x=-\frac{1}{4}p-\frac{5}{2}$

よって $R(-\frac{1}{4}p-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}p+7)$ と書ける。

ここで、p の値によって QとRの位置関係が変わるので場合分けをする。

(i) $-2 \leqq p < 14$ のとき



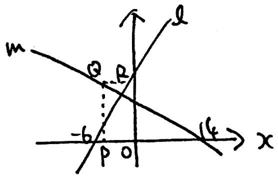
$QR = p-(-\frac{1}{4}p-\frac{5}{2}) = \frac{5}{4}p+\frac{5}{2}$

$PQ=QR$ を満たす p は

$-\frac{1}{2}p+7=\frac{5}{4}p+\frac{5}{2}$ を解いて $p=\frac{18}{7}$

これは場合分けの条件を満たす。

(ii) $-6<p<-2$ のとき



$QR = -\frac{1}{4}p-\frac{5}{2}-p = -\frac{5}{4}p-\frac{5}{2}$

$PQ=QR$ を満たす p は

$-\frac{1}{2}p+7=-\frac{5}{4}p-\frac{5}{2}$ を解いて $p=-\frac{38}{3}$

これは場合分けの条件を満たさないので不適。

(i), (ii) より、$PQ=QR$ を満たす p は $p=\frac{18}{7}$ のみ。

このとき ~~四角形~~ $PQ=-\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{7}+7=\frac{40}{7}$ より、

$\underline{\text{四角形PQRSの面積は } \left(\frac{40}{7}\right)^2=\frac{1600}{49} \text{ である。}}$