

# 2020/10/09

---

出典：総合的研究・記述式答案の書き方(旺文社)例題6-18, 6-19 満点:10点 / 目標:8点

以下の問に答えよ. 解答の際は, 文章の表現に注意すること.

1.  $a$  を実数の定数とする.  $x$  の2次方程式  $x^2 + ax + a - 3 = 0$  は実数解を持つことを示せ.
2.  $x$  の2次方程式  $x^2 + ax + a + 3 = 0$  が重解を持つような実数の定数  $a$  の値を求めよ.

## 解答・解説 (2020/10/16)

2次方程式の判別式と実数解の個数の問題です。ただ解くだけなら簡単だし、マーク式や答えのみの穴埋め問題なら瞬殺できると思います。しかし、記述になると慎重さが求められます。

この2つの問題は、見た目はとても良く似ていますが、**全く別の種類の問題**であることに注意してください。問1は、"証明問題"です。「 $a > 0$ 」が既知の真の**命題**として提示され、それをもとに「 $x^2 + ax + a - 3 = 0$  が実数解を持つ」という**命題**が真であることを証明することが求められています。問2は、実数  $a$  についての**条件**「 $x^2 + ax + a + 3 = 0$  が重解を持つ」が与えられ、この条件をよりわかりやすい**条件**に書き換えることが求められています。

「命題」と「条件」の区別が意識されていない答案だと、採点官の印象が悪くなります。特に注意したいのが、等号を連ねて長い式を書くときです。問2を例にして考えてみます。(ブラウザの都合で式が最後まで表示されなかったらごめんなさい)

$x^2 + ax + a + 3 = 0$  の判別式を  $D$  とすると、

$$D = a^2 - 4a - 12 = 0$$

だから、これを解いて  $a = -2, 6$

と書いてしまうと、あまりよくない答案です。

$$D = a^2 - 4a - 12$$

ここは  $a$  の値に関係なく成り立ちます。**命題**を表す等式です。

$$a^2 - 4a - 12 = 0$$

これは  $a$  の値によって成り立つことも成り立たないこともあります。**条件**を表す等式です。この2式をつなげて書いてしまうと、命題と条件を混同してしまうことになるので、分けて書いておくのが無難です。

ちなみに、模試で「よくない答案」を書いても、たぶん減点されません。採点が雑なので。また、学校の授業でも、このあたりの話はスルーされがちです。難しいので仕方ない部分もあるのですが、大学入試の採点官はガチの数学者なので、ちゃんとわかっておくのは大事だと思います。

採点基準についても触れておきましょう。

- 問1は5点です。
  - 「2次方程式が実数解をもつ」 $\Leftrightarrow$ 「(判別式の値) $\geq 0$ 」を踏まえている (2点)
  - 「 $a$  の値にかかわらず、(判別式の値) $\geq 0$ 」であることを示す (3点)
- 問2は5点です。
  - 「2次方程式が重解を持つ」 $\Leftrightarrow$ 「(判別式の値) $= 0$ 」を踏まえている (2点)
  - 「(判別式の値) $= 0$ 」を満たす  $a$  の値を求めている (3点)
- 説明不足, 文字の定義不足, 論理の取り違えは適宜減点しました。

以下は解答です(A4用紙1枚).

10/9 数研口試

1.  $x^2 + ax + a - 3 = 0$   $a$  の値の範囲を  $D_1$  とする。

$$D_1 = a^2 - 4(a - 3) = a^2 - 4a + 12 = (a - 2)^2 + 8$$

任意の  $a$  について  $D_1 > 0$  が成り立つので、与えられた2次方程式は必ず実数解をもつ。

2.  $x^2 + ax + a + 3 = 0$   $a$  の値の範囲を  $D_2$  とする。

$$D_2 = a^2 - 4(a + 3) = a^2 - 4a - 12 = (a - 6)(a + 2)$$

である。与えられた2次方程式が重解をもつのは  $D_2 = 0$  のときだから、

$$(a - 6)(a + 2) = 0 \text{ を満たす } a \text{ の値は } a = -2, 6 \text{ が答えである。}$$