

Academia Clínica do saber

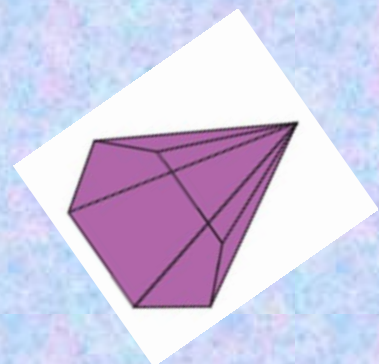
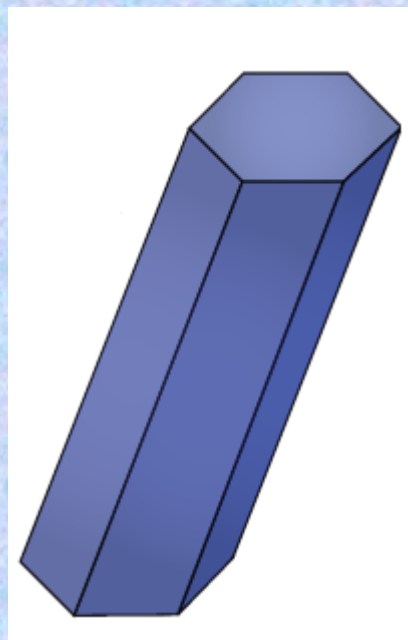
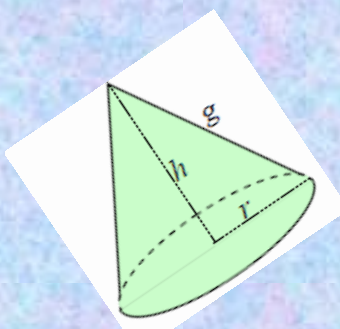
Pedro Rafael Afonso

Sebenta de matemática

Exames de Acesso 2007-2020

Universidade Agostinho Neto

Faculdade de ciências e Engenharia



180 Exames solucionados

2º Edição

Editorial Clínica do Saber

QUEM SOMOS / NOSSA MISSÃO

ACADEMIA CLÍNICA DO SABER é um centro Preparatório que tem como missão oferecer orientações, habilidades e conhecimentos que permitem que estudantes superem os desafios e melhorem o seu desempenho académico em qualquer instituição de ensino. As aulas são direccionadas para todos os níveis de ensino.

PREFÁCIO

PARA O ESTUDANTE,

O propósito deste manual é de ajudar os estudantes na resolução dos exercícios dos testes de matemática na área de engenharias. Portanto, recomendamos a utilizar o seu maior tempo em resolver os exercícios.

Quando se resolve um exercício, se aprende muito mais do que só se lê a resolução. É bem sabido que, a prática leva a perfeição, onde a verdadeira aprendizagem requer uma participação activa de sua parte.

Utilize este manual como incentivo para resolver problemas, não como uma forma de evitar a sua resolução.

As suas críticas, sugestão ou dificuldades que tenha encontrado na hora da resolução, pedimos que entre em contacto connosco urgentemente, afim de aperfeiçoamento do manual e suas ideias são fundamentais para o nosso trabalho.

Facebook: Página Academia Clínica do Saber

E-mail: delarafapedro@gmail.com

Obs: A venda do presente material sem autorização do autor é punível pela Lei nº 4/19, de março, lei dos direitos do autor, que regula a protecção de Autor e conexos nas áreas das artes, literatura, ciência ou outra forma de reconhecimento. Respeite a lei.

Índice

Sumário

PARA O ESTUDANTE	2
<i>I-Exames de Acesso 2020.....</i>	4
<i>Exames de Acesso 2019.....</i>	16
<i>Exame de Acesso 2018</i>	33
<i>Exames de Acesso 2017.....</i>	40
<i>Exame de Acesso 2016.....</i>	52
<i>Exame de Acesso 2015</i>	59
<i>Exame de Acesso 2014</i>	69
<i>Exame de Acesso 2013</i>	74
<i>Exame de Acesso 2012</i>	77
<i>Exame de Acesso 2011</i>	80
<i>Exames de Acesso 2010.....</i>	95
<i>Exame de Acesso 2009</i>	104
<i>Exames de Acesso 2008.....</i>	120
<i>Exame de Acesso 2007</i>	123

I-Exames de Acesso 2020

1º) (Exame 2020) Simplique a expressão: $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \div \frac{1}{\sqrt{x}-x^2} + x$

Resp: a) -1 B) \sqrt{x} c) 1 d) x e) *outro*

Resolução: $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \div \frac{1}{\sqrt{x}-x^2} + x$, supondo que: $\sqrt{x} = t, x = t^2$

$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \div \frac{1}{\sqrt{x}-x^2} + x$, supondo que: $\sqrt{x} = t, x = t^2$

$$\frac{t+1}{t^3+t^2+t} \div \frac{1}{t-t^4} + t^2 = \frac{t+1}{t(t^2+t+1)} \div \frac{1}{t(1-t^3)} + t^2 = \frac{t+1}{t(t^2+t+1)} \times t(1-t^3) + t^2$$

$$= \frac{t+1}{(t^2+t+1)} \times (1-t)(1+t+t^2) + t^2 = (t+1)(1-t) + t^2$$

$$= 1 - t^2 + t^2 = 1, \text{ Línea c)}$$

2º) (Exame 2020) Simplifique a expressão: $\left(\frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}\right) : \left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}\right)$

Resp: a) -1 B) $a-b$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ e) *outro*

Resolução: $\left(\frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}\right) : \left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}\right)$

Vamos transformar todos os expoentes negativo em radicais

$$\left(\frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}\right) \div \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}\right) = \left(\frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}\right) \div \left(\frac{\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}}{\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}}\right) = \left(\frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}\right) \div \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)$$

$$\text{Nota: } a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$= - \left[\frac{(a-b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \right] \left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right] = - \left[\frac{(a-b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right], \text{ nota: } \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= - \left[\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right] = -1, \text{ Línea a)}$$

3º) (Exame 2020) Simplifique a expressão: $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Resp: a) \sqrt{x} B) $4x$ c) $\sqrt{x}+1$ d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ e) *outro*

Resolução: $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, supondo que: $\sqrt{x} = t$

$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, supondo que: $\sqrt{x} = t$

$$\left(\frac{t+1}{t-1} - \frac{t-1}{t+1} + 4t\right) \left(t - \frac{1}{t}\right) = \left[\frac{(t+1)(t+1)-(t-1)(t-1)}{(t-1)(t+1)} + 4t\right] \left(\frac{t^2-1}{t}\right)$$

$$\left[\frac{t^2+2t+1-(t^2-2t+1)}{t^2-1} + 4t \right] \left(\frac{t^2-1}{t} \right) = \left[\frac{t^2+2t+1-t^2+2t-1}{t^2-1} + 4t \right] \left(\frac{t^2-1}{t} \right)$$

$$\left[\frac{4t}{t^2-1} + 4t \right] \left(\frac{t^2-1}{t} \right) = 4t \left(\frac{1+t^2-1}{t^2-1} \right) \left(\frac{t^2-1}{t} \right) = 4t^2, \text{ voltando na suposição: } 4x, \text{ Línea B)}$$

4º) (Exame 2020) Simplifique a expressão: $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a+2}} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$

Resp: a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{2}$ e) *outro*

Resolução: $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a+2}} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$, supondo que: $\sqrt{a} = A$ e $\sqrt{2} = B$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A^2+B^2}{AB} - \frac{A^2}{AB+B^2} + \frac{B^2}{A^2-AB} \right) \cdot \frac{(A-B)}{A^2+B^2} = \left[\frac{A^2+B^2}{AB} - \frac{A^2}{B(A+B)} + \frac{B^2}{A(A-B)} \right] \\ &= \left[\frac{A^2+B^2}{AB} - \frac{A^3(A-B)+B^3(A+B)}{AB(A^2-B^2)} \right] \frac{(A-B)}{A^2+B^2} = \frac{1}{AB} \left[\frac{A^4-B^4-A^4+A^3B+AB^3+B^4}{(A^2-B^2)} \right] \frac{(A-B)}{A^2+B^2} \\ &= \frac{1}{AB} \left[\frac{A^3B+AB^3}{(A^2-B^2)} \right] \frac{(A-B)}{A^2+B^2} = \frac{1}{AB} \left[\frac{AB(A^2+B^2)}{(A^2-B^2)} \right] \frac{(A-B)}{A^2+B^2} = \left[\frac{1}{(A^2-B^2)} \right] [A-B] \\ & \left[\frac{1}{(A-B)(A+B)} \right] [A-B] = \frac{1}{A+B}, \text{ voltando na suposição: } \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}, \text{ Línea B)} \end{aligned}$$

5º) (Exame 2020) Simplifique a expressão: $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{a}{\sqrt{2}}} + 2 - \frac{a^2 \sqrt[4]{2-2\sqrt{a}}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$

$$\text{Resolução: } \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{a}{\sqrt{2}}} + 2 - \frac{a^2 \sqrt[4]{2-2\sqrt{a}}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$$

Resp: a) -1 b) $\sqrt{2}/a$ c) $\sqrt{2a}$ d) \sqrt{a} e) *outro*

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a^2+2a\sqrt{2}+2}{a\sqrt{2}}} - \left[\frac{\sqrt[4]{a^8} \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2^4} \sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{2^2} \sqrt[4]{a^4} \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{a^4} \sqrt[4]{2^3}} \right] = \sqrt{\frac{(a+\sqrt{2})^2}{a\sqrt{2}}} - \left[\frac{\sqrt[4]{a^8} \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2^4} \sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{2^2} \sqrt[4]{a^6} - \sqrt[4]{a^4} \sqrt[4]{2^3}} \right] \\ &= \frac{a+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2a^2}} - \frac{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{2^2} \sqrt[4]{a^4}} \left[\frac{\sqrt[4]{a^6} - \sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{2}} \right] = \frac{a+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2a^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}} \left[\frac{(\sqrt[4]{a^2})^3 - (\sqrt[4]{2})^3}{(\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{2})} \right] \\ &= \frac{a+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2a^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}} \left[\frac{((\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{2^2}))}{(\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{2})} \right] = \frac{a+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2a^2}} - \frac{(\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{2^2})}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}} \\ &= \frac{a+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}} - \frac{(\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{2^2})}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}} = \frac{a+\sqrt{2} - \sqrt[4]{a^4} - \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}} \\ &= \frac{a+\sqrt{2} - a - \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2} - \sqrt{2}}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}} = -\frac{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{a^2}} = -1, \text{ Línea a)} \end{aligned}$$

6º) (Exame 2020) A equação da parábola com vértice na origem das coordenadas, simétrica em relação ao eixo oy e que passa pelo ponto $A(1; 1)$ é:

Resp: a) $x^2 + 1 = 2y$ b) $(y-1)^2 = 2(x-1)$ c) $x^2 = y$ d) $y^2 = x$ e) *outro*

Resolução: A equação de uma parábola com vértice na origem e simétrica em relação ao eixo oy é: $x = p y^2$. Vamos encontrar o valor de p .

$$A(1; 1) \rightarrow x = p y^2 \rightarrow 1 = p (1)^2 \rightarrow p = 1$$

A equação pedida é: $y^2 = x$, Línea d)

7º) (Exame 2020) A equação da parábola com vértice na origem das coordenadas, simétrica em relação ao eixo ox e que passa pelo ponto $A(-1; 3)$ é:

Resp: a) $y^2 = 3(x + 5)$ b) $y^2 = -9x$ c) $y^2 = 2x$ d) $x^2 = \frac{y}{3}$ e) *outro*

Resolução: A equação de uma parábola com vértice na origem e simétrica em relação ao eixo ox é: $y = p x^2$. Vamos encontrar o valor de p .

$$A(-1; 3) \rightarrow x = p y^2 \rightarrow 3 = p (-1)^2 \rightarrow p = 3$$

A equação pedida é: $y = 3x^2 \rightarrow x^2 = \frac{y}{3}$, Línea d)

8º) (Exame 2020) Determine o valor de $\sin 2\alpha$, sabendo que $\sin \alpha - \cos \alpha = p$

Resp: a) $2p$ b) $1 - p^2$ c) p d) p^2 e) *outro*

Resolução: $\sin \alpha - \cos \alpha = p \quad ()^2, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = p^2$

Sabe-se que: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$,

$$1 - \sin 2\alpha = p^2 \rightarrow \sin 2\alpha = 1 - p^2, \text{ Línea b)}$$

9º) (Exame 2020) Determine o valor $2 - 13 \cos 2a + \frac{1}{\sin 2a}$, sabendo que $\cot a = -\frac{1}{5}$.

Resp: a) $\frac{57}{5}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{27}{2}$ e) *outro*

Resolução: $2 - 13 \cos 2a + \frac{1}{\sin 2a} = ? \quad (1) \quad \cot a = -\frac{1}{5}$

$$\cot a = -\frac{1}{5} \rightarrow \tan a = -5 \rightarrow a = \arct(-5) = -\arct(5)$$

Nota: $\sin(\arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e $\cos(\arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2(-\arct(5)) - \sin^2(-\arct(5)) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 = -\frac{24}{26} = -\frac{12}{13} \quad (2)$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \sin(-\arct(5)) \cos(-\arct(5)) = -\frac{10}{\sqrt{26}} \times \frac{1}{\sqrt{26}} = -\frac{5}{13}$$

(3)

Substituindo (2) e (3) em (1), vem:

$$2 - 13 \cos 2a + \frac{1}{\sin 2a} = 2 - 13 \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{1}{\left(-\frac{5}{13}\right)} = 2 + 12 - \frac{13}{5} = \frac{57}{5}, \text{ Línea a)}$$

10º) (Exame 2020) A distância entre o planos: $\pi_1: x - 2y - 2z - 12 = 0$ e $\pi_2: x - 2y - 2z - 6 = 0$ é: a) 5 b) 4 c) 2 d) 12 e) outro

Resolução: $\pi_1: x - 2y - 2z - 12 = 0$ e $\pi_2: x - 2y - 2z - 6 = 0$

A distância entre dois planos é: $d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Onde $P(a_0; b_0; c_0)$ é um ponto que pertence a um plano.

Considerando um ponto que pertence ao plano π_1 , $P(0; 0; -6)$, temos:

$$d(P, \pi) = \frac{|1(0) + (-2)(0) + (-2)(-6) + (-12)|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2, \text{ Línea c)}$$

11º) (Exame 2020) Resolva a inequação: $\log_{(x+1)} \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) \leq 1$

Resp:

$$\text{Resolução: } \log_{(x+1)} \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) \leq 1 \rightarrow \log_{(x+1)} \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) \leq \log_{(x+1)}(x+1)$$

A inequação é válida nas seguintes condições:

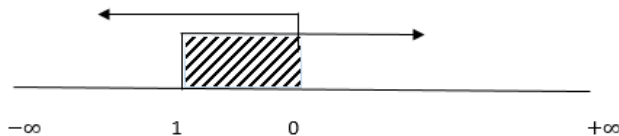
$$I) \begin{cases} x+1 > 1 \text{ (base)} \\ \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) > 0 \text{ (logaritmando)} \\ x+1 > 0 \text{ (logaritmando)} \\ \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) \leq x+1 \end{cases} \quad II) \begin{cases} 0 < x+1 < 1 \text{ (base)} \\ \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) > 0 \text{ (logaritmando)} \\ x+1 > 0 \text{ (logaritmando)} \\ \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) \geq x+1 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações por parte:

$$I^\circ) x+1 > 1 \rightarrow x > 0, x \in]0; +\infty[$$

$$II^\circ) 0 < x+1 < 1 \rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \rightarrow x > -1, x \in]-1; +\infty[\\ x+1 < 1 \rightarrow x < 0, x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

$$x \in]-1; +\infty[\cap x \in]-\infty; 0[=]-1; 0[$$



$$I^\circ) \text{ e } II^\circ) \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) > 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \text{ (} x_1 = -4 \text{ e } x_2 = 1 \text{)} \\ 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$f(x)$	$-\infty$ $+\infty$	-4	1	2		
$x^2 + 3x - 4$	$+$	O	$-$	O	$+$	$+$
$2x - 4$	$-$		$-$		$-$	$-$
s	$-$		$+$		$-$	$-$

$$x \in]-4; 1[$$

$$I^o) x + 1 > 0 \rightarrow x > -1, x \in]-1; +\infty[$$

$$I^o) \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) \leq x + 1 \rightarrow \frac{x^2-5x}{2x-4} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0 \ (x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 5) \\ 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$f(x)$	$-\infty$ $+\infty$	0	2	5		
$x^2 - 5x$	+	O	-	-	O	+
$2x - 4$	-	-	+	+		
s	-	+	-	+		

$$x \in [0; 2[\cup [5; +\infty[$$

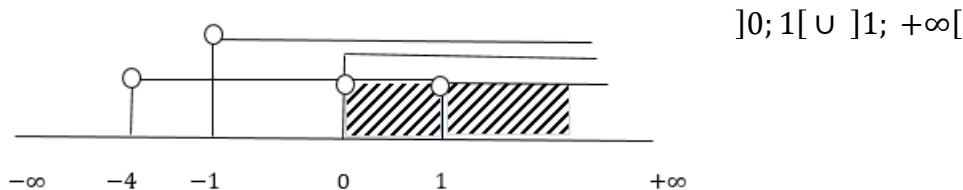
$II^o) \left(\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \right) \geq x + 1 \rightarrow \frac{x^2-5x}{2x-4} \leq 0$, esta inequação é análoga a anterior, so inverte-se na desigualdade, solução é: $]-\infty; 0] \cup]2; 5]$

Voltando nos sistemas de inequações acima, temos:

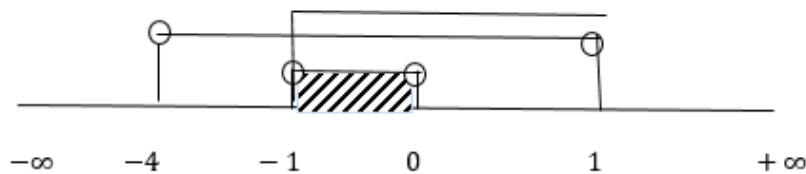
$$I^o) \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ x \in]-4; 1[\\ x \in]-1; +\infty[\\ x \in [0; 2[\cup [5; +\infty[\end{cases}$$

$$II^o) \begin{cases} x \in]-1; 0[\\ x \in]-4; 1[\\ x \in]-1; +\infty[\\]-\infty; 0] \cup [2; 5] \end{cases}$$

Intercedendo a 1º), a 2º) e 3º) solução do sistema de Inequação Iº) vem:



Intercedendo a 1º), a 2º) e 3º) solução do sistema de Inequação IIº) vem: $]-1; 0[$

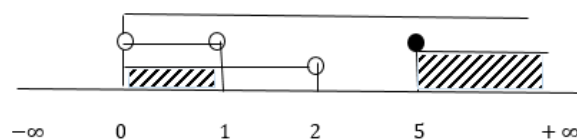


$$I^o) \begin{cases}]0; 1[\cup]0; +\infty[\\ x \in [0; 2[\cup [5; +\infty[\end{cases}$$

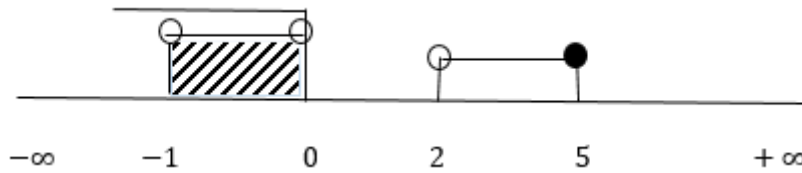
$$II^o) \begin{cases}]-1; 0[\\]-\infty; 0] \cup [2; 5] \end{cases}$$

Intercedendo as duas últimas soluções do Sistema Iº):

$$S(I) =]0; 1[\cup [5; +\infty[$$



Intercedendo as duas últimas soluções do Sistema IIº: $S(II) =]-1; 0[$



A solução da inequação é: $S = S(I) \cup S(II)$, $S =]-1; 0[\cup]2; 5[$

12º) (Exame 2020) Resolve a inequação: $\log_{(9x^2-6x+1)} \left(\frac{1}{9x^2-18x+8} \right) < -1$

Resp: a) $]-1; 0[\cup]5; +\infty[$ b) $]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]5; +\infty[$ c) $]2; +\infty[$ d) $]-\infty; 0[\cup]\frac{7}{12}; \frac{2}{3}[$

e) outro

Resolução:

$$\log_{(9x^2-6x+1)} \left(\frac{1}{9x^2-18x+8} \right) < -1 \rightarrow \log_{(9x^2-6x+1)} \left(\frac{1}{9x^2-18x+8} \right) < \log_{9x^2-6x+1} \left(\frac{1}{9x^2-6x+1} \right)$$

A inequação é válida nas seguintes condições:

$$I) \begin{cases} 9x^2 - 6x + 1 > 1 \text{ (base)} \\ \frac{1}{9x^2-18x+8} > 0 \text{ (logaritmando)} \\ \frac{1}{9x^2-6x+1} > 0 \text{ (logaritmando)} \\ \frac{1}{9x^2-18x+8} < \left(\frac{1}{9x^2-6x+1} \right) \end{cases} \quad II) \begin{cases} 0 < 9x^2 - 6x + 1 < 1 \text{ (base)} \\ \frac{1}{9x^2-18x+8} > 0 \text{ (logaritmando)} \\ \frac{1}{9x^2-6x+1} > 0 \text{ (logaritmando)} \\ \frac{1}{9x^2-18x+8} > \left(\frac{1}{9x^2-6x+1} \right) \end{cases}$$

Resolvendo as inequações por parte:

$$I^\circ) 9x^2 - 6x + 1 > 1 \rightarrow 9x^2 - 6x > 0 \left(x_1 = 0 \text{ e } x_2 = \frac{2}{3} \right)$$

$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$9x^2 - 6x$	+	0	-	+
S	+	-	+	+

$$x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$$

$$I^\circ) \text{ e } II^\circ) \frac{1}{9x^2-18x+8} > 0 \text{ (se } 1 > 0 \text{ então } 9x^2 - 18x + 8 > 0 \left(x_1 = \frac{2}{3} \text{ e } x_2 = \frac{4}{3} \right))$$

$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$9x^2 - 18x + 8$	+	O	- O	+
s	+	-	+	

$$x \in \left] -\infty; \frac{2}{3} \right[\cup \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$$

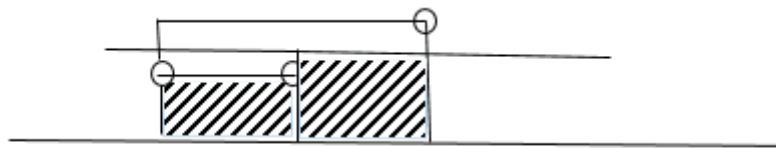
$$\text{I}^\circ) \text{ e } \text{II}^\circ) \frac{1}{9x^2 - 6x + 1} > 0, \quad 9x^2 - 6x + 1 > 0 \rightarrow \left(x_1 = x_2 = \frac{1}{3} \right)$$

$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$9x^2 - 18x + 8$	+	O	+
s	+		+

$$x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$$

$$\text{II}^\circ) 0 < 9x^2 - 6x + 1 < 1 \rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 6x + 1 > 0, & x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[\\ 9x^2 - 6x + 1 < 1 \rightarrow 9x^2 - 6x < 0, & x \in \left] 0; \frac{2}{3} \right[\end{cases}$$

$$\text{Intercedendo } \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[\cap \left] 0; \frac{2}{3} \right[= x \in \left] 0; \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right[$$



$$-\infty \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad +\infty$$

$$\text{I}^\circ) \frac{1}{9x^2 - 18x + 8} < \frac{1}{9x^2 - 6x + 1} \rightarrow \frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 18x + 8} < 1 \rightarrow \frac{12x - 7}{9x^2 - 18x + 8} < 0,$$

$$\begin{cases} 12x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{12}, \left(x = \frac{7}{12} \right) \\ 9x^2 - 18x + 8 \neq 0 \left(x_1 = \frac{2}{3} \text{ e } x_2 = \frac{4}{3} \right) \end{cases}$$

$f(x)$	$-\infty$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$12x - 7 = 0$	-	O	+	+	+
$9x^2 - 18x + 8 \neq 0$	+	+	-	+	
s	-	+	-	+	

$$x \in \left] -\infty; \frac{7}{12} \right[\cup \left] \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right[$$

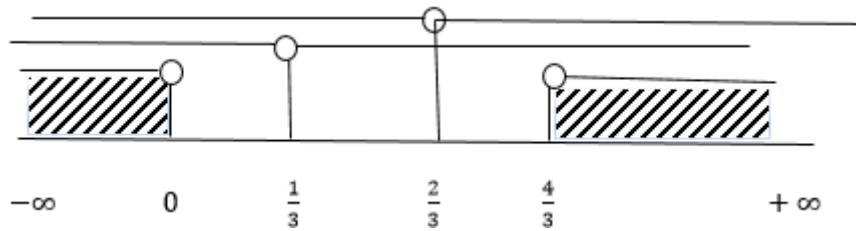
$$\text{II}^\circ) \frac{1}{9x^2 - 18x + 8} > \left(\frac{1}{9x^2 - 6x + 1} \right) \rightarrow \frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 18x + 8} > 1 \rightarrow \frac{12x - 7}{9x^2 - 18x + 8} > 0$$

$$\text{Análoga a inequação anterior: } x \in \left] \frac{7}{12}; \frac{2}{3} \right[\cup \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$$

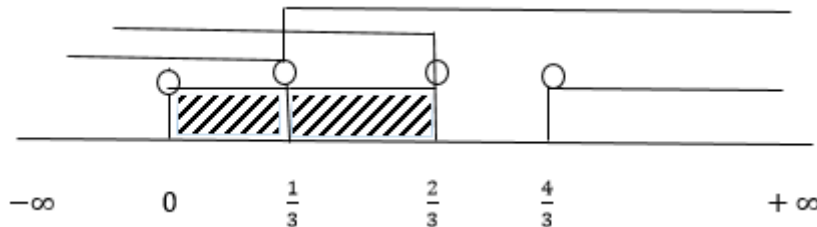
Colocando no sistemas acima:

$$I^o) \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[\\ x \in]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[\\ x \in]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[\\ x \in]-\infty; \frac{7}{12}[\cup]\frac{2}{3}; \frac{4}{3}[\end{cases} \quad II^o) \begin{cases} x \in]0; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[\\ x \in]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[\\ x \in]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[\\ x \in]\frac{7}{12}; \frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[\end{cases}$$

Intercedendo a 1º), a 2º) e a terceira solução do sistema Iº): $x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[$

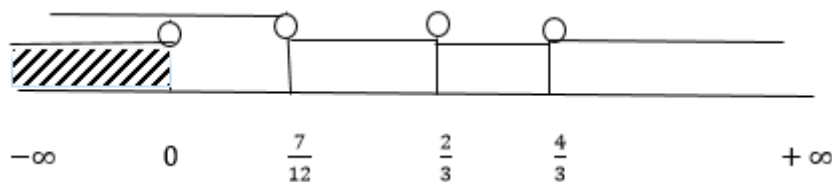


Intercedendo a 1º), a 2º) e a terceira solução do sistema IIº): $x \in]0; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$

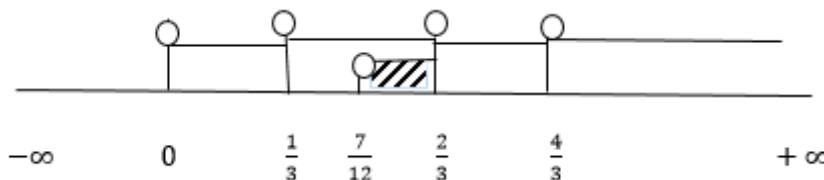


$$I^o) \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[\\ x \in]-\infty; \frac{7}{12}[\cup]\frac{2}{3}; \frac{4}{3}[\end{cases} \quad II^o) \begin{cases} x \in]0; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[\\ x \in]\frac{7}{12}; \frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[\end{cases}$$

Intercedendo as duas últimas solução do sistem Iº): $S(I) =]-\infty; 0[$



Intercedendo as duas últimas solução do sistem IIº): $S(II) =]\frac{7}{12}; \frac{2}{3}[$



A solução da inequação é: $S = S(I) \cup S(II), S =]-\infty; 0[\cup]\frac{7}{12}; \frac{2}{3}[$, Línea d)

13º) (Exame 2020) Resolva a inequação: $\log_{(2x-x^2)} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 0$

Resolução:

$$\log_{(2x-x^2)} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 0 \rightarrow \log_{(2x-x^2)} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > \log_{(2x-x^2)} 1$$

A inequação é válida nas seguintes condições:

$$\text{I}^\circ) \begin{cases} (2x - x^2) > 1 \text{ (base)} \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 0 \text{ (logaritmando)} \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 1 \end{cases} \quad \text{II}^\circ) \begin{cases} 0 < (2x - x^2) < 1 \text{ (base)} \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 0 \text{ (logaritmando)} \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < 1 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações por parte:

$$\text{I}^\circ) (2x - x^2) > 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 < 0, (x_1 = x_2 = 1)$$

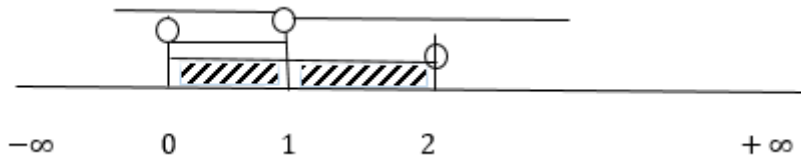
$$s = \emptyset$$

$$\text{I}^\circ) \text{ e } \text{II}^\circ) \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 0, (x_1 = x_2 = \frac{3}{2}), x \in]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

$$\text{II}^\circ) 0 < (2x - x^2) < 1 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0, (x_1 = x_2 = 1), x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\\ x^2 - 2x < 0 \rightarrow (x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2) x \in]0; 2[\end{cases}$$

$$\text{Intercedendo: }]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\cap]0; 2[=]0; 1[\cup]1; 2[$$



$$\text{I}^\circ) \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 1 \rightarrow 4x^2 - 12x + 5 > 0, (x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{5}{2})$$

$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$4x^2 - 12x + 5$	+	O	-	O	+
s	+		-		+

$$x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$$

$$\text{II}^\circ) \text{I}^\circ) \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < 1 \rightarrow 4x^2 - 12x + 5 > 0, (x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{5}{2})$$

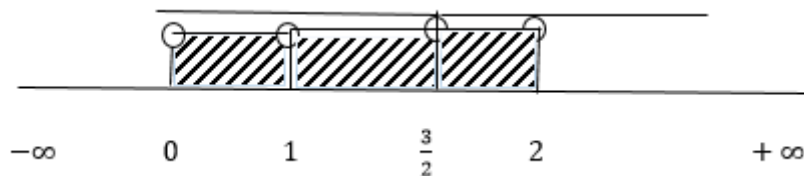
$$\text{Análogo a inequação anterior: } x \in]\frac{1}{2}; \frac{5}{2}[$$

Voltando nos sistemas acima:

$$I^o) \begin{cases} S = \emptyset \\ x \in]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[\\ x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[\end{cases} \quad II^o) \begin{cases}]0; 1[\cup]1; 2[\\ x \in]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[\\ x \in]\frac{1}{2}; \frac{5}{2}[\end{cases}$$

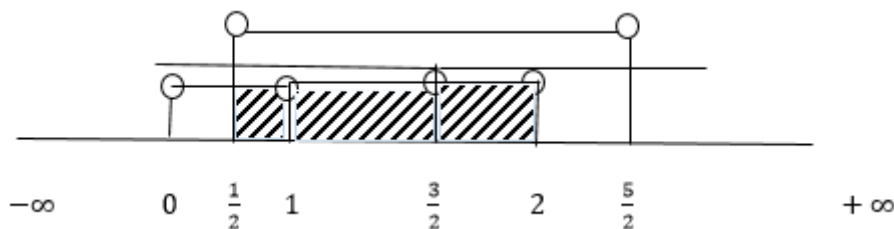
Intercedendo todas as soluções do sistema I^o): $S(I) = \emptyset$

Intercedendo a 1^o) e a 2^o) solução do sistema II^o): $]0; 1[\cup]1; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; 2[$



$$II^o) \begin{cases}]0; 1[\cup]1; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; 2[\\ x \in]\frac{1}{2}; \frac{5}{2}[\end{cases}$$

Intercedendo as duas últimas soluções do Sistema II^o): $S(II) =]\frac{1}{2}; 1[\cup]1; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; 2[$



A solução da inequação é: $= S(I) \cup S(II), S =]\frac{1}{2}; 1[\cup]1; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; 2[$

14^o) (Exame 2020/2016) A solução da inequação $\log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)}\left(\frac{x-1}{2}\right) \geq 0$ é:

Resp:) $] -1; 0[\cup] 5, +\infty [$ B) $] -1; 0[\cup] 0; 1[\cup] 5, +\infty [$

C) $] 1, \frac{1+\sqrt{21}}{2} [\cup] 3, +\infty [$

D) $] -\infty; -4 [\cup] 1; +\infty [$ E) *outro*

Resolução:

$$\log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)}\left(\frac{x-1}{2}\right) \geq 0 \rightarrow \log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)}\left(\frac{x-1}{2}\right) \geq \log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)} 1$$

A inequação tem sentido quando:

$$I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} > 0 \\ \left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \\ \left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 (base) \\ \left(\frac{x-1}{2}\right) \geq 1 \end{array} \right\} \quad e \quad II) \left\{ \begin{array}{l} 0 < \left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1 \\ \left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \\ \left(\frac{x-1}{2}\right) > 0 \\ \left(\frac{x-1}{2}\right) \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ x^2 - x > 0 \\ x \geq 3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \text{ e } \left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1 \\ x^2 - x > 0 \\ x > 1 \\ x \leq 3 \end{array} \right\}$$

Resolução das inequações por parte:

I.2) e II.2) $x^2 - x > 0 \rightarrow x(x-1) > 0 \text{ (} x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 1 \text{)}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	O	- O	+

I.2) e II.2) $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

II.) $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \text{ e } \left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1$

1º) $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \rightarrow x^2 - x > 0 \rightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

2º) $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1 \rightarrow x^2 - x - 5 < 0 \text{ (} a = 1; b = -1; c = -5 \text{)}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	$+\infty$
$x^2 - x$	+	O	-	+

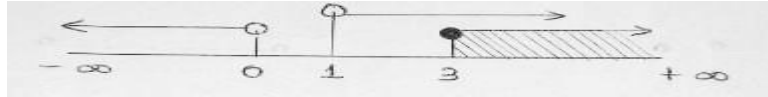
$x \in \left] \frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[$, Agora vamos encontrar uma solução única, intercedendo:

$$]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\cap \left] \frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[= \left] \frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0 \right[\cup \left] 1; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[$$

Colocando nos sistemas de inequações, temos:

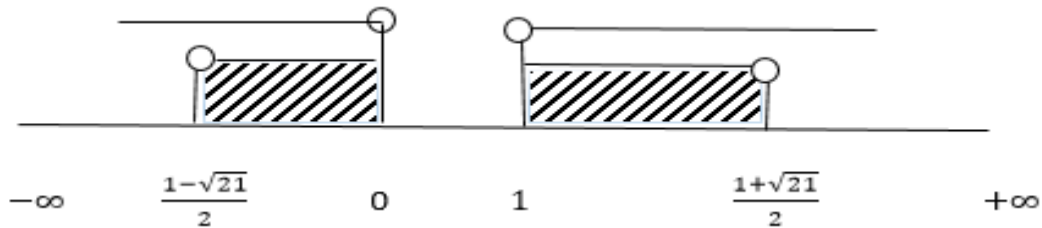
$$I) \left\{ \begin{array}{l} 1; +\infty \\]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\\ [3; +\infty[\end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l}]\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0[\cup]1; \frac{1+\sqrt{21}}{2}[\\]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\\]1; +\infty[\\]-\infty, 3] \end{array} \right\}$$

Intercedendo todas as soluções do sistema I), temos:



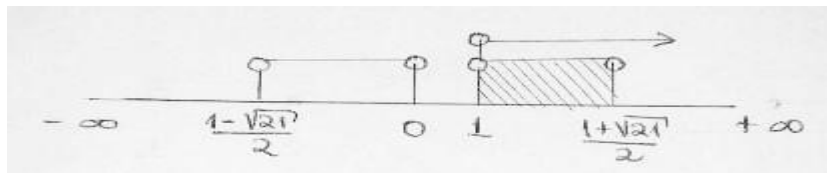
$$S_1 = [3; +\infty[$$

Intercedendo a 1ª a 2ª solução do sistema II), temos:



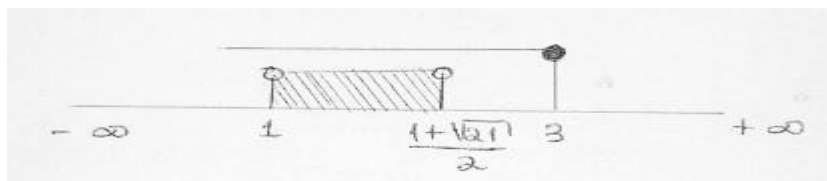
$$x \in]\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0[\cup]1; \frac{1+\sqrt{21}}{2}[\rightarrow II) \left\{ \begin{array}{l}]\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0[\cup]1; \frac{1+\sqrt{21}}{2}[\\]1; +\infty[\\]-\infty, 3] \end{array} \right\}$$

$$\text{Intercedendo no sistema II)} :]\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0[\cup]1; \frac{1+\sqrt{21}}{2}[\cap]1; +\infty[$$



$$x \in]1; \frac{1+\sqrt{21}}{2}[\rightarrow II) \left\{ \begin{array}{l}]1; \frac{1+\sqrt{21}}{2}[\\]-\infty, 3] \end{array} \right\},$$

Intercedendo finalmente as duas últimas soluções do sistema II), temos:



$$S_2 =]1; \frac{1+\sqrt{21}}{2}[$$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cup S_2$

$$S =]1; \frac{1+\sqrt{21}}{2}[\cup [3; +\infty[, \text{Linha C)}$$

Exames de Acesso 2019**15º) (Exame 2019/2008)** Simplifique a expressão:

$$2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 - \sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha$$

Resp: A) 2 B) 0 C) $2 \sin^2 \alpha$ D) $\frac{1}{2} \cos^2 \alpha$ E) 1 F) $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

G) $\cos 2\alpha$ H) outro

Resolução:

$$2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 - (\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha)$$

Aplicando a transformação: $a^8 + b^8 = (a^4 + b^4)^2 - 2a^4b^4$ na segunda expressão, fica:

$$\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)^2 - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$$

Aplicando novamente a transformação: $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$; fica:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \text{ Substituindo fica:}$$

$$\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha]^2 - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$$

Obs.: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = [1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha]^2 - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$, Voltando na expressão inicial, vem:

$$2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 - ([1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha]^2 - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha)$$

Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$$2(1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha \cos^4 \alpha) - ((1 - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha) - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha)$$

Eliminando os parênteses:

$$2 - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha - 1 + 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 4\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha + 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$$

Reduzindo os termos semelhantes:

$$= 1 \text{ Resposta: 1, Línea E}$$

16º) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$$

Resp: A) $\sin^2 2\alpha$ B) 1 C) 0 D) $\cos^2 2\alpha$ E) $\frac{1}{2} \cos^2 \alpha$ F) $2 \cos^2 \alpha$ G) $\sin \alpha \cos \alpha$

H) outro

Resolução:

$$[(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)][(1 - \sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha - \cos \alpha)]$$

Multiplicando termo à termos os dois produtos em parentes rectos fica:

$$(sen\alpha + cos\alpha - 1 + sen^2\alpha + sen\alpha cos\alpha - sen\alpha + sen\alpha cos\alpha + cos^2\alpha - cos\alpha) \times$$

$$(1 + sen\alpha - cos\alpha - sen\alpha - sen^2\alpha + sen\alpha cos\alpha + cos\alpha + sen\alpha cos\alpha - cos^2\alpha)$$

Reduzindo os termos semelhantes, fica:

$$(2sen\alpha cos\alpha + sen^2\alpha + cos^2\alpha - 1)(2sen\alpha cos\alpha - sen^2\alpha - cos^2\alpha + 1)$$

$$[2sen\alpha cos\alpha + (sen^2\alpha + cos^2\alpha) - 1][2sen\alpha cos\alpha - (sen^2\alpha + cos^2\alpha) + 1]$$

$$\text{Obs.: } (sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$(2sen\alpha cos\alpha + \cancel{1} - \cancel{1})(2sen\alpha cos\alpha - \cancel{1} + \cancel{1})$$

$$(2sen\alpha cos\alpha)(2sen\alpha cos\alpha); \quad \text{obs: } 2sen\alpha cos\alpha = sen2\alpha$$

$$(sen2\alpha)(sen2\alpha) = sen^2 2\alpha, \text{ Línea A)}$$

17º) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão: $\frac{1-sen^6\alpha - cos^6\alpha}{1-sen^4\alpha - cos^4\alpha}$

Resp: A) $tg^2\alpha$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $sen^2\alpha$ F) $2sec^2\alpha$ G) $sen^2 2\alpha$ H) outro

Resolução:

$$\frac{1-(sen^6\alpha + cos^6\alpha)}{1-(sen^4\alpha + cos^4\alpha)}$$

Aplicando as transformações:

$$a^6 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 - 2a^3b^3 \quad e \quad a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = (sen^3\alpha + cos^3\alpha)^2 - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

Sabe-se que: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, então:

$$sen^3\alpha + cos^3\alpha = (sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha cos\alpha + cos^2\alpha)$$

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = [(sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha cos\alpha + cos^2\alpha)]^2 - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = [(sen\alpha + cos\alpha)(1 - sen\alpha cos\alpha)]^2 - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = (sen\alpha + cos\alpha)^2(1 - sen\alpha cos\alpha)^2 - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$$= (1 + 2sen\alpha cos\alpha)(1 - 2sen\alpha cos\alpha + sen^2\alpha cos^2\alpha) - 2sen^3\alpha cos^3\alpha.$$

Desenvolvendo o producto em parenteses:

$$= 1 - \cancel{2sen\alpha cos\alpha} + sen^2\alpha cos^2\alpha + \cancel{2sen\alpha cos\alpha} - 4sen^2\alpha cos^2\alpha +$$

$$2sen^3\alpha \cancel{cos^3\alpha} - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

Reduzindo os termos semelhante:

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = 1 - 3sen^2\alpha cos^2\alpha$$

$$sen^4\alpha + cos^4\alpha = (sen^2\alpha + cos^2\alpha)^2 - 2sen^2\alpha cos^2\alpha$$

Obs.: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

Voltando na expressão inicial, temos:

$\frac{1-(1-3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{1-(1-2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}$, Eliminando os parênteses fica:

$$\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1-1+2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{3}{2}, \text{ Línea D)}$$

18º) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão: $\sin 3\alpha \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cos^3 \alpha$

Resp:

A) $\cos^3 2\alpha$ B) 1 C) 0 D) $\frac{1}{2} \sin^3 2\alpha$ E) $\cos^2 \alpha$ F) $2\sin^2 \alpha$ G) $\sin \alpha \cos \alpha$ H) outro

Resolução:

sabe-se que: $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ e $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

$(3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)\sin^3 \alpha + (4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha)\cos^3 \alpha$ eliminando os parenteses, vem:

$3\sin^4 \alpha - 4\sin^6 \alpha + 4\cos^6 \alpha - 3\cos^4 \alpha \rightarrow$ Agrupando

$(3\sin^4 \alpha - 3\cos^4 \alpha) + (-4\sin^6 \alpha + 4\cos^6 \alpha)$ factorizando os termos comuns, vem:

$$3(\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) - 4(\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha)$$

Sabe-se que: $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ e $a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$

$$3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4(\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha)(\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha)$$

Note que: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4[(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)] \times [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)]$$

$$3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)[(1 + \sin \alpha \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)]$$

$$3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

Factorizando a expressão $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$, temos:

$$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)[3 - 4(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)] \rightarrow$$

$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(3 - 4 + 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$ factorizando os sinais, temos:

$$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(-1 + 2^2(\sin \alpha \cos \alpha)^2) \rightarrow$$

$$[-(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)][-(1 - (2\sin \alpha \cos \alpha)^2)]$$

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)[-(1 - (2\sin \alpha \cos \alpha)^2)],$$

Note: $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ e $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha(1 - \sin^2 2\alpha)$, sabe-se que: $1 - \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$

$\cos 2\alpha \times \cos^2 2\alpha = \cos^3 2\alpha$, Línea A)

19º (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1} + \sqrt[4]{x} \left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1} - \sqrt[4]{x} \right)}}{x - \sqrt{x^3}}$$

Resp: A) \sqrt{x} B) 1 C) $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ D) $\frac{1}{x}$ E) $\sqrt[4]{x} - 1$

F) $\frac{x}{\sqrt{x}-1}$ G) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}$ H) outro

Resolução: Igualando os índices de todos os radicais com denominador 4, vem:

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1} + \sqrt[4]{x} \left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1} - \sqrt[4]{x} \right)}}{\sqrt[4]{x^4} - \sqrt[4]{x^6}} \quad \text{Fazendo: } \sqrt[4]{x} = t, \text{ Temos:}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{\frac{t^3-1}{t-1} + t \left(\frac{t^3+1}{t+1} - t^2 \right)}}{t^4 - t^6} = \frac{\sqrt{\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1} + t \left[\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - t^2 \right]}}{t^4(1-t^2)} = \frac{\sqrt{t^2+t+1+t(t^2-t+1-t^2)}}{t^4(1-t^2)} \\ &= \frac{\sqrt{t^2+2t+1}(-t+1)}{t^4(1-t^2)} = -\frac{\sqrt{(t+1)^2}(t-1)}{t^4(t^2-1)} = \frac{(t+1)(t-1)}{t^4(t^2-1)} = \frac{(t^2-1)}{t^4(t^2-1)} = \frac{1}{t^4} \end{aligned}$$

Voltando, temos: $\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^4} = \frac{1}{x}$. Resposta: $\frac{1}{x}$, Línea D)

20º (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$\sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}} + \sqrt{3ab} - \sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}} - \sqrt{3ab} \quad \forall 3b > a^3 > 0$$

Resp: A) $\frac{\sqrt{6a}b}{a}$ B) $\sqrt{2}a$ C) $\frac{\sqrt{6a}b}{b}$ D) $\frac{b}{2}$ E) $\frac{2a}{\sqrt{b}}$ F) $\frac{b}{\sqrt{2}a}$ G) $2\sqrt{ab}$

H) outro

Resolução:

$$\text{Fazendo: } A = \sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}} + \sqrt{3ab} - \sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}} - \sqrt{3ab} \quad ()^2$$

Sabe-se que: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, Aplicando temos:

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{2a} + \sqrt{3ab} + \frac{a^3-3b}{2a} - \sqrt{3ab} - 2\sqrt{\left(\frac{a^3+3b}{2a} + \sqrt{3ab}\right)\left(\frac{a^3+3b}{2a} - \sqrt{3ab}\right)}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b+a^3-3b}{2a} - 2\sqrt{\left(\frac{a^3+3b}{2a}\right)^2 - (\sqrt{3ab})^2}$$

$$A^2 = \frac{2a^3+6b}{2a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6+6a^3b+9b^2}{4a^2} - 3ab\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6+6a^3b+9b^2-12a^3b}{4a^2}\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6-6a^3b+9b^2}{4a^2}\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\frac{(a^3-3b)^2}{4a^2}} = \frac{a^3+3b}{a} - 2\frac{\sqrt{(a^3-3b)^2}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{a^3+3b}{a} - \frac{2(a^3-3b)}{2a} = \frac{a^3+3b}{a} - \frac{(a^3-3b)}{a}$$

pela condição dada, $3b > a^3 > 0$, $|(a^3 - 3b)| = 3b - a^3$

$$A^2 = \frac{a^3+3b-(3b-a^3)}{a} = \frac{a^3+3b-3b+a^3}{a} = \frac{2a^3}{a} = 2a^2$$

$$A^2 = 2a^2, A = \sqrt{2} a. \text{ Resposta: } \sqrt{2} a, \text{ Línea B)}$$

21º (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$\frac{1 - \frac{1+xy}{1+\sqrt[3]{xy}}}{\sqrt{xy}(1-\sqrt[3]{xy}) - \frac{(1-xy)(\sqrt[3]{xy}-1)}{1+\sqrt{xy}}} \quad \forall xy \geq 0, e xy \neq 1$$

Resp: A) xy B) 1 C) 0 D) $2\sqrt{xy}$ E) $1 - \sqrt{xy}$

F) $1 + \sqrt[3]{xy}$ G) $\sqrt[3]{xy}$ H) outro

Resolução:

$$\frac{\frac{1 + \sqrt[3]{xy} - (1-xy)}{1 + \sqrt[3]{xy}}}{\frac{\sqrt{xy}(1 - \sqrt[3]{xy})(1 + \sqrt{xy}) - (1-xy)(\sqrt[3]{xy}-1)}{1 + \sqrt{xy}}} = \frac{\frac{1 + \sqrt[6]{(xy)^2} - (1-xy)}{1 + \sqrt[6]{(xy)^2}}}{\frac{\sqrt[6]{(xy)^3} \left(1 - \sqrt[6]{(xy)^2}\right) \left(1 + \sqrt[6]{(xy)^3}\right) - (1-xy) \left(\sqrt[6]{(xy)^2} - 1\right)}{1 + \sqrt[6]{(xy)^3}}}$$

Supondo que: $\sqrt[6]{xy} = t, xy = t^6$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1+t^2-(1-t^6)}{1+t^2}}{\frac{t^3(1-t^2)(1+t^3)-(1-t^6)(t^2-1)}{1+t^3}} &= \frac{\frac{1+t^2-1+t^6}{1+t^2}}{\frac{t^3(1-t^2)(1+t^3)+(1-t^6)(1-t^2)}{1+t^3}} = \frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{\frac{(1-t^2)(t^3+t^6+1-t^6)}{1+t^3}} = \frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{\frac{(1-t^2)(1+t^3)}{1+t^3}} \\ &= \frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{\frac{t^2(t^4+1)}{(1+t^2)(1-t^2)}} = \frac{t^2(t^4+1)}{1-t^4}, \text{ pela condição dada: } xy \geq 0, |-t^4| = t^4, \text{ temos:} \\ &= \frac{t^2(t^4+1)}{1-t^4} = t^2, \text{ voltando, temos:} \end{aligned}$$

$$\sqrt[6]{xy} = t, (\sqrt[6]{xy})^2 = \sqrt[3]{xy}. \text{ R: } \sqrt[3]{xy}, \text{ Línea G)}$$

22º (Exame 2019/2008) Resolva a inequação: $\log_2 |x^2 - x| < 1$

Resp: A) $] -1; 1[\cup] 1; 2[$ B) $] -1; 0[\cup] 0; 1[\cup] 1; 2[$ C) $] -\infty; 0[\cup] 1; 2[$

D) $] 0; 1[\cup] 2; +\infty[$ E) $] 0; 1[\cup] 1; +\infty[$

F) $] -1; 0[\cup] 1; 2[$ G) $] -\infty; -1[\cup] 0; 1[\cup] 2; +\infty[$ H) *outro*

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular, temos:

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x^2 - x \geq 0 \\ -(x^2 - x) & \text{se } x^2 - x < 0 \end{cases}$$

A inequação é válida em dois sentidos:

$$I) \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x > 0 \\ \log_2 x^2 - x < 1 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ -(x^2 - x) > 0 / \times (-1) \\ \log_2 -(x^2 - x) < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x-1) > 0 \\ \log_2 x^2 - x < \log_2 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x(x-1) < 0 \\ \log_2 (-x^2 + x) < \log_2 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x-1) > 0 \\ x^2 - x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x(x-1) < 0 \\ -x^2 + x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x-1) > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$






$$\begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x(x-1) > 0 \\ x^2 - x + 2 > 0 \end{cases}$$

I.1) $x(x-1) \geq 0$ (inequação do 2º grau)

II.1) $x(x-1) < 0$ (Inequação Do 2º grau)

I.2, II.2 $x(x-1) > 0$ (inequação do 2º grau)

Aplicando a lei do anulamento do produto para achar as raízes das três inequações acima obtemos: ($x_1 = 0$ e $x_2 = 1$)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
I.1) $x(x-1) \geq 0$ ($a > 0$)	 +	O	-	O  +
II.1) $x(x-1) < 0$ ($a > 0$)	+	O	 -	O +
I.2, II.2 $x(x-1) > 0$ ($a > 0$)	 +	O	-	O  +

I.1) $x(x-1) \geq 0 \rightarrow x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

$$\text{II.1) } x(x-1) < 0 \rightarrow x \in]0; 1[$$

$$\text{I.2, II.2 } x(x-1) > 0 \rightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{I.3) } x^2 - x - 2 < 0 \text{ (inequação do 2º grau)}$$

Aplicando Vieth para achar as raízes da inequação, temos:

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -1$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2 < 0$	+	0	-	0

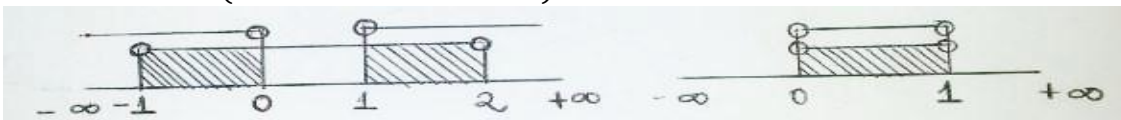
$$\text{I.3) } x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow x \in]-1; 2[$$

$$\text{II.3) } x^2 - x + 2 > 0 \text{ (inequação do 2º grau)}$$

Aplicando a fórmula resolvente: $a = 1, b = -1, c = 2$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = -7 \rightarrow \Delta < 0, \text{ Não existe } x_1 \text{ e } x_2$$

$$\text{I) } \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\\ x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\\ x \in]-1; 2[\end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} x \in]0; 1[\\ x \in]0; 1[\end{cases}$$



$$S(I) =]-1; 0[\cup]1; 2[$$

$$S(II) =]0; 1[$$

$$S = S(I) \cup S(II) =]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; 2[, \text{ Línea B)}$$

23º) (Exame 2019/2008) Resolva a inequação:

$$\log_{3x+4} x^2 < 1$$

$$\text{Resp: A) }]-\infty; -\frac{4}{3}[\cup]-1; 0[\cup]4; +\infty[\text{ B) }]-1; 0[\cup]1; 4[$$

$$\text{C) }]-1; 12[\cup]1; 4[\text{ D) }]-\frac{4}{3}; 0[\cup]0; 1[\cup]1; 4[$$

$$\text{E) }]-\frac{4}{3}; -1[\cup]0; 4[\text{ F) }]-\frac{4}{3}; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 4[$$

$$\text{G) }]-1; 0[\cup]0; 1[\text{ H) } \text{outro}$$

Resolução:

$$\log_{3x+4} x^2 < 1 \rightarrow \log_{(3x+4)}(3x+4)$$

A inequação será válida nas seguintes condições:

$$I) \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 < 3x+4 \end{cases} \quad II) \begin{cases} 0 < 3x+4 < 1 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 > 3x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < 3x+4 < 1 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$I.1) \text{ e } II.3) \quad x^2 > 0 \rightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$I.2) \text{ e } II.2) \quad 3x+4 > 0 \rightarrow x > -\frac{4}{3} \rightarrow x \in]-\frac{4}{3}; +\infty[$$

$$II.1) \quad 0 < 3x+4 < 1; 3x+4 > 0 \text{ e } 3x+4 < 1$$

$$3x+4 > 0 \rightarrow x > -\frac{4}{3} \rightarrow x \in]-\frac{4}{3}; +\infty[$$

$$3x+4 < 1 \rightarrow x < -1 \rightarrow x \in]-\infty; -1[$$

Solução verdadeira:



$$II.1) \quad x \in]-\frac{4}{3}; -1[$$

$$I.3) \quad x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ (pelo método de vieth } x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -1)$$

$$II.4) \quad x^2 - 3x - 4 > 0 \text{ (pelo método de vieth } x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -1)$$

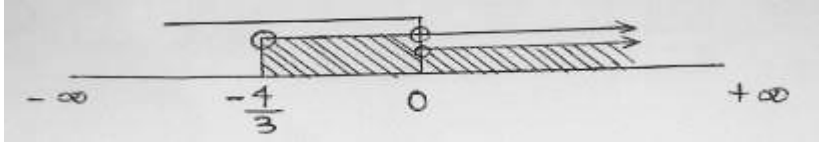
$a > 0$	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4 < 0$	+	O	O	+
$x^2 - 3x - 4 > 0$	+	O	O	+

$$I.3) \quad x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow x \in]-1; 4[$$

$$II.4) \quad x^2 - 3x - 4 > 0 \rightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$$

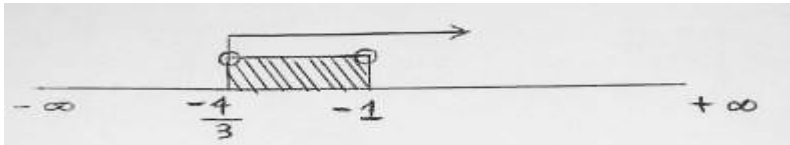
$$I) \left\{ \begin{array}{l} x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\\ x \in]-\frac{4}{3}; +\infty[\\ x \in]-1; 4[\end{array} \right\} \quad II) \left\{ \begin{array}{l} x \in]-\frac{4}{3}; -1[\\ x \in]-\frac{4}{3}; +\infty[\\ x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\\ x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[\end{array} \right\}$$

Intersecção I.1) e I.2) :



$$I.4) x \in]-\frac{4}{3}; 0[\cup]0; +\infty[$$

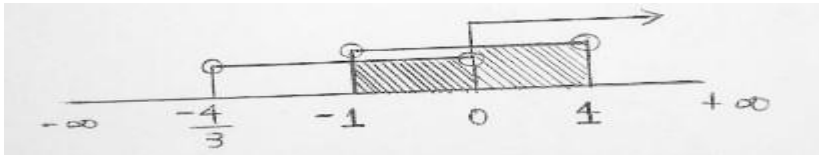
Intersecção II .1) e II.2)



$$II.5) x \in]-\frac{4}{3}; -1[$$

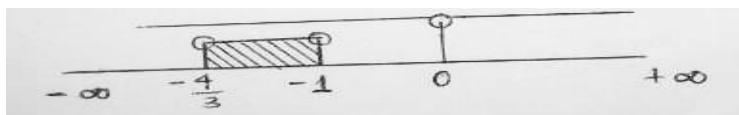
$$I) \left\{ \begin{array}{l} x \in]-\frac{4}{3}; 0[\cup]0; +\infty[\\ x \in]-1; 4[\end{array} \right\} \quad II) \left\{ \begin{array}{l} x \in]-\frac{4}{3}; -1[\\ x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\\ x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[\end{array} \right\}$$

Intersecção I.4) e I.3):



$$S(I) =]-1; 0[\cup]0; 4[$$

Intersecção II.5) e II.3):

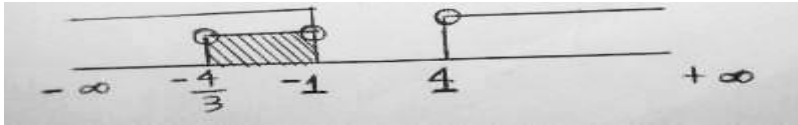


II.6)

$$x \in]-\frac{4}{3}; -1[$$

$$II) \left\{ \begin{array}{l} x \in]-\frac{4}{3}; -1[\\ x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[\end{array} \right\}$$

Intersecção II.4) e II.6) :



$$S(II) = \left] -\frac{4}{3}; -1 \right[$$

A solução geral da inequação será: $S = S(I) \cup S(II)$

$$S = \left] -\frac{4}{3}; -1 \right[\cup] -1; 0 [\cup] 0; 4 [, \text{Línea F}$$

24º (Exame 2019/2008) Resolve a inequação:

$$x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{Resp: A) } \left] 0; \frac{1}{8} \right[\cup [1; +\infty[\quad B)] 0; 1[\cup] 2; +\infty[\quad C) \left] 0; \frac{1}{8} \right[\cup] 1; 2[$$

$$D)] 0; 1[\cup] 1; +\infty[\quad E) \left] \frac{1}{8}; 1 \right[\cup] 1; 2[\quad F) \left] \frac{1}{8}; 1 \right[\cup] 2; +\infty[$$

$$G)] 0; 1[\cup] 1; 2[\quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0 \rightarrow x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \frac{1}{x}$$

$$x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > x^{-1} \text{ (Inequação exponencial)}$$

A inequação será válida em dois sentidos :

$$\text{I) } \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1 \end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 0 \\ 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1 \end{cases}$$

$$\text{I.3) } 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1 \text{ (inequação logarítmica)}$$

Multiplicando por (-1) todos os termos da inequação, vem:

$$\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 2 < 1 \rightarrow \log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 < 0$$

$$\text{Fazendo: } \log_2 x = t, \quad t^2 + 2t - 3 < 0 \text{ (inequação do 2º grau)}$$

Resolvendo pelo método de Vieth para encontrarmos as raízes, achamos:

$$t_1 = 1 \text{ e } t_2 = -3$$

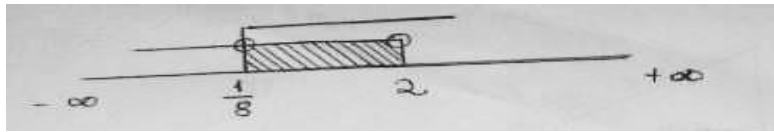
x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$t^2 + 2t - 3 < 0$	+	O	O	+

$$t \in]-3; 1[\text{ ou } t > -3 \text{ e } t < 1, \text{ Voltando na suposição:}$$

$$t > -3 \rightarrow \log_2 x > -3 \rightarrow \log_2 x > \log_2 2^{-3} \rightarrow x > 2^{-3} \rightarrow x > \frac{1}{8}$$

$$t < 1 \rightarrow \log_2 x < 1 \rightarrow \log_2 x < \log_2 2 \rightarrow x < 2$$

Intercedendo as desigualdades: $x > \frac{1}{8}$ e $x < 2$



$$\text{I.3) } x \in \left] \frac{1}{8}; 2 \right[$$

$$\text{II.3) } 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1 \text{ (inequação logarítmica)}$$

Multiplicando por (-1) todos os termos da inequação, vem:

$$\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 2 > 1 \rightarrow \log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 > 0$$

$$\text{Fazendo: } \log_2 x = t, \quad t^2 + 2t - 3 > 0 \text{ (inequação do 2º grau)}$$

Resolvendo pelo método de Vieth para encontrarmos as raízes, achamos:

$$t_1 = 1 \text{ e } t_2 = -3$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$t^2 + 2t - 3 > 0$		+	-	+

$$t \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[\text{ ou } t < -3 \text{ e } t > 1, \text{ Voltando na suposição:}$$

$$t < -3 \rightarrow \log_2 x < -3 \rightarrow \log_2 x < \log_2 2^{-3} \rightarrow x < 2^{-3} \rightarrow x < \frac{1}{8}$$

$$t > 1 \rightarrow \log_2 x > 1 \rightarrow \log_2 x > \log_2 2 \rightarrow x > 2$$

$$\text{II.3) } x \in \left] -\infty; \frac{1}{8} \right[\cup]1; +\infty[$$

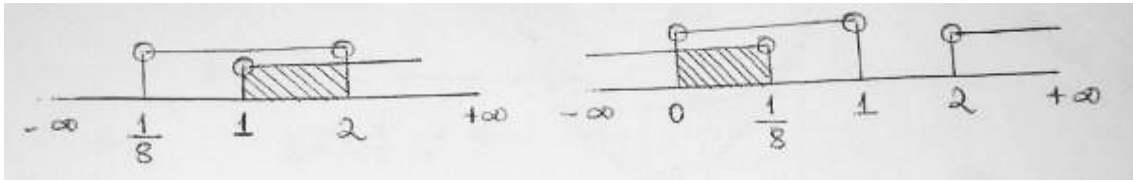
$$\text{I) } \left\{ \begin{array}{l}]1; +\infty[\\]0; +\infty[\\ \left] \frac{1}{8}; 2 \right[\\]0; 1[\\]0; +\infty[\\ \left] -\infty; \frac{1}{8} \right[\cup]2; +\infty[\end{array} \right. \quad \text{II)}$$

$$\text{Interceder aos intervalos: }]1; +\infty[\cap]0; +\infty[=]1; +\infty[$$

$$\text{Interceder os intervalos: }]0; +\infty[\cap]0; 1[=]0; 1[$$

$$\text{I) } \left\{ \begin{array}{l}]1; +\infty[\\ \left] \frac{1}{8}; 2 \right[\end{array} \right\} \quad \text{II) } \left\{ \begin{array}{l}]0; 1[\\ \left] -\infty; \frac{1}{8} \right[\cup]2; +\infty[\end{array} \right\}$$

Intercedendo finalmente as duas soluções de cada sistema, vem:



$$S_1 =]1; 2[$$

$$S_2 =]0; \frac{1}{8}[$$

A solução da inequação será: $S = S_1 \cup S_2$

$$S =]0; \frac{1}{8}[\cup]1; 2[\quad , \text{Linha C)}$$

25º) (Exame 2019) O valor de $\text{sen} \left(2\alpha + \frac{5\pi}{4} \right)$ dado que $\text{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ é:

Resp: A) $\frac{7\sqrt{7}}{6}$ B) $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$ C) $-\frac{17\sqrt{3}}{13}$ D) $\frac{17\sqrt{2}}{26}$ E) $\frac{17\sqrt{2}}{13}$

Resolução:

Sabe-se que:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a, \text{ então:}$$

$$\text{sen} \left(2\alpha + \frac{5\pi}{4} \right) = \text{sen} 2\alpha \cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + \text{sen} \left(\frac{5\pi}{4} \right) \cos 2\alpha$$

$$\text{sen} \left(2\alpha + \frac{5\pi}{4} \right) = \text{sen} 2\alpha \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos 2\alpha$$

$$\text{sen} \left(2\alpha + \frac{5\pi}{4} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\text{sen} 2\alpha + \cos 2\alpha) (*)$$

$$\text{Sabe-se que: } \text{sen}^2 \alpha = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} \rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^2}{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{13}{9}} = \frac{4}{13} \rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{4}{13} \rightarrow$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha} \rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} = \frac{1}{\frac{13}{9}} = \frac{9}{13} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{13} \rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Sabe-se também que:

$$\text{sen} 2\alpha = 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha \rightarrow \text{sen} 2\alpha = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right) = \frac{12}{13} (**)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \rightarrow \cos 2\alpha = \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2 = \frac{5}{13} (***)$$

Substituindo (**) e (***) em (*), vem:

$$\operatorname{sen} \left(2\alpha + \frac{5\pi}{4} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13} \right) = -\frac{17\sqrt{2}}{26}, \text{ Línea B)}$$

26º) (Exame 2019) A área limitada pelas curvas $x + y = 2y^2$ e $y = x^3$ é:

A) 0,5 B) $\frac{7}{12}$ C) 1 D) $\frac{11}{4}$ E) 0,45

Resolução:

1º) Passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$$x + y = 2y^2 \rightarrow x = 2y^2 - y, \quad y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$\text{Fazendo: } x = x \rightarrow 2y^2 - y = \sqrt[3]{y} \rightarrow 2y^2 - y - \sqrt[3]{y} = 0 (*)$$

Supondo que: $\sqrt[3]{y} = t \rightarrow y = t^3$, Colocando na equação (*), vem:

$$2t^6 - t^3 - t = 0 \rightarrow t(2t^5 - t^2 - 1) = 0 \rightarrow t_1 = 0 \text{ e}$$

$2t^5 - t^2 - 1 = 0$, Considerando que $P(t) = 2t^5 - t^2 - 1$, pelo teorema do resto :
Se $t = 1$

$$P(1) = 2(1)^5 - (1)^2 - 1 \rightarrow P(1) = 0$$

$t_2 = 1$ é uma das raízes da equação

Voltando na suposição:

$$y = t^3 \text{ se } t_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0, \text{ se } t_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1$$

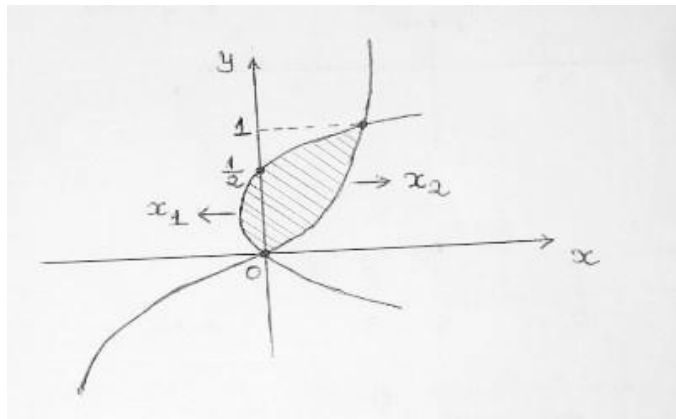
2º) construir o gráfico:

$$x = 2y^2 - y \text{ (Parábola)}$$

$$\text{ox: } y = 0, x = 0, \text{ oy: } x = 0, y = 0 \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

$$y = x^3 \text{ (Parábola cúbica)}$$

Intersecta o eixo das ordenadas e das abscissas na origem (0; 0)



3º) Calcular a área: Vamos integrar em relação ao eixo oy

$$A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - (2y^2 - y)) dy = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - 2y^2 + y) dy \quad A = \int_0^1 y^{\frac{1}{3}} dy -$$

$$2 \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 y dy = \left(\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right) \Big|_0^1 - 2 \left(\frac{1}{3} \right) (y^3) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2} \right) (y^2) \Big|_0^1$$

$$A = \frac{3}{4} \left[\left(1^{\frac{4}{3}} \right) - \left(0^{\frac{4}{3}} \right) \right] - \frac{2}{3} [(1^3) - (0^3)] + \frac{1}{2} [(1^2) - (0^2)]$$

$$A = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{9-8+6}{12} \rightarrow A = \frac{7}{12} \quad , \text{Línea B)}$$

27º) (Exame 2019) A área limitada pelas curvas $x + y^2 - 4 = 0$ e $x + y = 2$ é: A) 2,3 B) 2,5 C) 2 D) 0,5 E) $\frac{9}{2}$

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$$x + y^2 - 4 = 0 \rightarrow x = 4 - y^2 \text{ e } x + y = 2 \rightarrow x = 2 - y$$

$$\text{Fazendo: } x = x \rightarrow 4 - y^2 = 2 - y \rightarrow y^2 - y - 2 = 0$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1) = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0 \rightarrow y_1 = 2 \text{ e } y_2 = -1$$

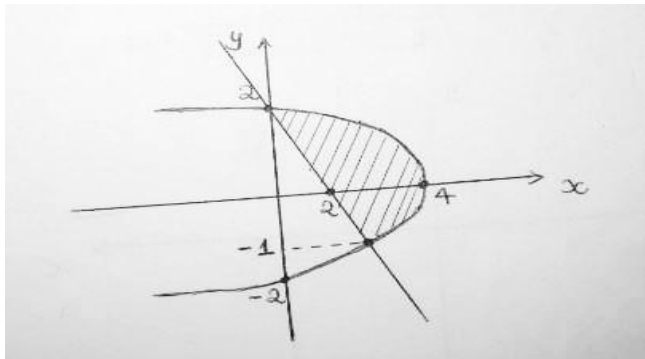
2º) Passo: construir o gráfico:

$$x + y^2 - 4 = 0 \text{ (Parábola)}$$

$$ox: y = 0, x = 4; oy: x = 0, y = \pm 2$$

$$x + y = 2 \text{ (Recta)}$$

$$ox: y = 0, x = 2; oy: x = 0, y = 2$$



3º) Passo: Calcular a área (Vamos integrar em relação ao eixo oy)

$$A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$$

$$A = \int_{-1}^2 ((4 - y^2) - (2 - y)) dy = \int_{-1}^2 (4 - y^2 - 2 + y) dy$$

$$A = \int_{-1}^2 (2 + y - y^2) dy = 2 \int_{-1}^2 dy + \int_{-1}^2 y dy - \int_{-1}^2 y^2 dy$$

$$A = 2(y)_{-1}^2 + \frac{1}{2}(y^2)_{-1}^2 - \frac{1}{3}(y^3)_{-1}^2$$

$$A = 2(2 - (-1)) + \frac{1}{2} [(2^2) - ((-1)^2)] - \frac{1}{3} [(2^3) - ((-1)^3)]$$

$$A = 6 + \frac{3}{2} - 3 \rightarrow A = \frac{9}{2}, \text{ Línea E)}$$

28º) (Exame – 2019) Dado um plano $\pi: x - 4y + 5z + 3 = 0$, um plano que contém o ponto $A(2; 0; 1)$ e é paralelo a π é:

Resp: A) $x + 3y - z - 1 = 0$ B) $6x - 6y + 5z - 17 = 0$

C) $x - 4y + 5z - 7 = 0$ D) $y + 5z - 5 = 0$

E) $-3x + y + 5z + 1 = 0$

Resolução:

A equação de um plano é: $\pi': ax + by + cz + d = 0$

Onde: $v' = (a; b; c)$ é o vector director do plano π'

O vector director do plano π é: $v = (1; -4; 5)$

O plano π é paralelo ao plano π' ($\pi' \parallel \pi$), Logo terão o mesmo vector director, ou seja:

$$v' = v = (1; -4; 5)$$

$$v' = (1; -4; 5) = (a; b; c)$$

Teremos: $\pi': x - 4y + 5z + d = 0$

Falta encontrar o parâmetro (d)

Como o plano π' contém o ponto $A(2; 0; 1)$ temos:

$$2 - 4(0) + 5(1) + d = 0$$

$$2 + 5 + d = 0$$

$$d = -7$$

Finalmente temos: $\pi': x - 4y + 5z - 7 = 0$, Línea C)

29º) (Exame 2019 – Variante 8E) O valor de $\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right)$ se $\cot\alpha = \frac{1}{2}$ é:

Resolução: $\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right) = ?$ se $\cot\alpha = \frac{1}{2}$

OBS.: $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$$\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right) = \cos 2\alpha \cdot \cos \frac{7\pi}{4} - \sin 2\alpha \cdot \sin \frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin 2\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$$

Sabe-se que que:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{e} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) (*)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Substituindo em (*):

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right) + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{5}\right) \right]$$

$$\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

30º) (Exame – 2019 – segunda chamada) Em um triângulo rectângulo, a hipotenusa mede 25 cm e a soma dos catetos é 35 cm. Determina a medida de cada cateto

Resolução:

$$c = 25 \text{ cm}$$

$$a + b = 35 \text{ cm}, b = 35 \text{ cm} - a$$

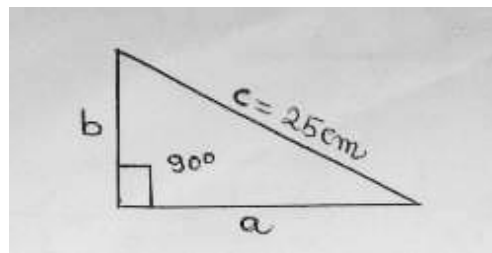
Condição de existência: $a < 25 \text{ cm}$ e $b < 25 \text{ cm}$

Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 + (35 - a)^2 = (25)^2 \rightarrow a^2 + 1225 - 70a + a^2 = 625$$

$$2a^2 - 70a + 1225 - 625 = 0 \rightarrow 2a^2 - 70a + 600 = 0$$

$$2a^2 - 70a + 600 = 0 \quad \div (2)$$



$$a^2 - 35a + 300 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \Delta = (-35)^2 - 4(1)(300), \Delta = 1225 - 1200, \Delta = 25$$

$$a_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow a_{1/2} = \frac{-(-35) \pm \sqrt{25}}{2(1)} \rightarrow a_{1/2} = \frac{35 \pm 5}{2}$$

$$a_1 = \frac{35+5}{2} \rightarrow a_1 = \frac{40}{2} \rightarrow a_1 = 20 \text{ cm}$$

$$a_2 = \frac{35-5}{2} \rightarrow a_2 = \frac{30}{2} \rightarrow a_2 = 10 \text{ cm}$$

$$b = 35 \text{ cm} - a$$

$$\text{se } a = 20 \text{ cm} \rightarrow b = 15 \text{ cm}$$

$$\text{se } a = 10 \text{ cm} \rightarrow b = 25 \text{ cm (não satisfaz a condição)}$$

Logo, os catetos do triângulo são: 20 cm e 15 cm

31º (Exame 2019) calcular a área limitada pela curva

$$x + y^2 = 0 \text{ e a recta } x + y = 0$$

Resp: A) 2,25 B) 2,5 C) 0,5 D) 2 E) outro

Resolução:

1º) Achar os pontos de intersecção entre a curva e a recta

$$x + y^2 = 0 \rightarrow x = -y^2 \text{ e } x + y = 0 \rightarrow x = -y, \text{ fazendo: } x = x$$

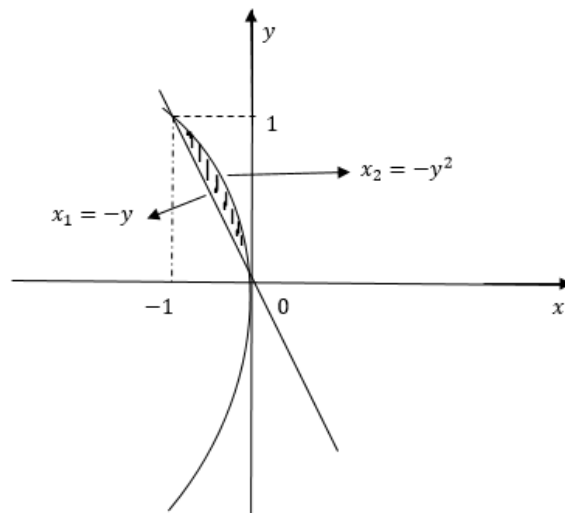
$$-y^2 = -y \rightarrow y^2 - y = 0 \rightarrow y(y - 1) = 0 \rightarrow y_1 = 0 \text{ e } y_2 = 1$$

2º) Construir o gráfico:

$$x + y^2 = 0 \text{ (função par)}$$

$$\text{ox: } y = 0 \rightarrow x = 0, (0; 0) ; \text{ oy: } x = 0 \rightarrow y = 0, (0; 0)$$

$$x + y = 0 \rightarrow y = -x \text{ (função ímpar, recta que passa na origem)}$$



3º) Passo: calcular a área: $A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$, integrando em relação ao eixo oy

$$A = \int_0^1 [-y^2 - (-y)] dy = \int_0^1 (y - y^2) dy = \int_0^1 y dy - \int_0^1 y^2 dy, \text{ integrando:}$$

$$A = \frac{1}{2} (y^2)_0^1 - \frac{1}{3} (y^3)_0^1 = \frac{1}{2} [(1)^2 - (0)^2] - \frac{1}{3} [(1)^3 - (0)^3] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{6}, \text{ Línea E)}$$

32º) (Exame 2019) Simplificar a expressão:

$$\left[\frac{(x + \sqrt[3]{2ax^2})(2a + \sqrt[3]{4a^2x})^{-1} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - (2a)^{-\frac{1}{3}} \right]^{-6}$$

Resp:

A) $12a^2x^2$ B) $15a^2x^4$ C) $16\frac{a^4}{x^2}$ D) $10\frac{a^2}{x^4}$ E) $12\frac{a^3}{x^2}$ F) $10\frac{a^2}{x^2}$ G) $16a^4x^2$ H) *outro*

Resolução:

$$\begin{aligned} \left[\frac{((\sqrt[3]{x})^3 + \sqrt[3]{2ax^2})(\sqrt[3]{2a})^3 + \sqrt[3]{4a^2x})^{-1} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} &= \left[\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a})}{(\sqrt[3]{2a})^3 + \sqrt[3]{4a^2x})^1} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} \\ \left[\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a})}{\sqrt[3]{4a^2}(\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{x})} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} &= \left[\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{4a^2}} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[3]{4a^2}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} \\ \left[\frac{(\sqrt[3]{x})^2 - (\sqrt[3]{2a})^2}{\sqrt[3]{4a^2}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} &= \left[\frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a})}{\sqrt[3]{4a^2}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} \\ \left[\frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a})}{\sqrt[3]{4a^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} &= \left[\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{4a^2}} \right]^{-6} = \left[\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4a^2}} \right]^{-6} = \left[\frac{\sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[3]{x}} \right]^6 = \frac{(\sqrt[3]{4a^2})^6}{(\sqrt[3]{x})^6} \end{aligned}$$

Simplificando os expoentes temos finalmente: $\frac{16a^4}{x^2}$, Línea C)

Exame de Acesso 2018

33º) (Exame 2018) Resolva a equação:

$$tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + cotg^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 4tgx$$

Resp: A) $x = \pi k$ B) $x = \pi k - \frac{\pi}{4}$ C) $x = \pi k - \frac{\pi}{2}$ D) $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$

E) $x = \pi k + \frac{\pi}{4}$ F) $x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$ G) $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$ H) *outro*

Resolução:

Obs.:

$$tg^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}, \cotg^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}, tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Voltando na expressão inicial:

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{1-\cos x} - 2 = 4 \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ achando o denominador comum vem:}$$

$$\frac{1-2\cos^2 x + \cos^2 x + 1+2\cos^2 x + \cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{4 \sin x}{\cos x},$$

reduzindo os termos semelhantes:

$$\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{4 \sin x}{\cos x} \rightarrow \cos^3 x = \sin^3 x \rightarrow \sin^3 x = \cos^3 x$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $\cos^3 x$, fica:

$$tg^3 x = 1 \rightarrow tg x = \sqrt[3]{1} \rightarrow tg x = 1$$

$$tg x = 1 \rightarrow tg x = tg(1), \text{ o arco cujo tangente vale 1 é: } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Expressão geral para as tangentes: $x = \alpha + \pi k$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Condição de existência:

$$1 + \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq -1 \rightarrow x \neq \pi + 2\pi k$$

$$1 - \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq 1 \rightarrow x \neq 2\pi k$$

$$\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

A solução $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ satisfaz a condição de existência, logo:

$$S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \right\} k \in \mathbb{Z}, \text{ Línea E)}$$

34º) (Exame 2018) Resolver a equação:

$$(\sin x - \cos x)^2 + tg x = 2\sin^2 x$$

$$\text{Resp: A) } x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{B) } x = \pi k - \frac{\pi}{4} \quad \text{C) } x = 2\pi k - \frac{\pi}{4} \quad \text{D) } x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{E) } x = \frac{\pi k}{4} - \frac{\pi}{8} \quad \text{F) } x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8} \quad \text{G) } x = \pi k + \frac{\pi}{2} \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução:

Desenvolvendo o quadrado da diferença do primeiro termo:

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x + tg x = 2\sin^2 x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x \cos x + tg x = 2\sin^2 x \quad (2\sin^2 x = 1 - \cos 2x)$$

$$1 - 2\sin x \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \cos 2x, \quad -2\sin x \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} = -\cos 2x$$

Factorizando a expressão $\sin x$

$$\operatorname{sen} x \left(-2\cos x + \frac{1}{\cos x} \right) = -\cos 2x \rightarrow \operatorname{sen} x \left(\frac{-2\cos^2 x + 1}{\cos x} \right) = -\cos 2x$$

$$\operatorname{sen} x \left(\frac{1-2\cos^2 x}{\cos x} \right) = -\cos 2x, -\operatorname{sen} x \left(\frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} \right) = -\cos 2x$$

Sabe-se que: $(2\cos^2 x - 1 = \cos 2x)$

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos 2x}{\cos x} - \cos 2x = 0 \text{ (Factorizando a expressão } \cos 2x \text{)}$$

$$\cos 2x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1 \right) = 0 \rightarrow \cos 2x \left(\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x} \right) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$$\cos 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = \cos 0 \rightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right), 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \rightarrow \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \left(\frac{\cos x}{\cos x} \right) \rightarrow \operatorname{tg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (1) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ Condição de existência: } \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

As soluções $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ e $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k$ Satisfazem a condição de existência. Como a solução x_2 está contida na solução x_1 , a solução da equação será:

$$S = \left\{ x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \right\}, \text{ Línea A)}$$

35º) (Exame 2018) Resolva a seguinte inequação:

$$|2x - 6| + |x| \leq 4 - x$$

Resp: A) $]1; 15[$ B) $[-1; 10]$ C) $[1; 5]$ D) $[10; -5]$ E) $] -1; 25[$

F) $[-5; 2[$ G) $[-1; 4]$ H) *outro*

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular:

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } 2x - 6 \geq 0 \\ -(2x - 6) & \text{se } 2x - 6 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Somando as expressões por meio da tabela:

x	0	3	
$ 2x - 6 $	$-2x + 6$	$-2x + 6$	$2x + 6$
$ x $	$-x$	x	x
$+S$	$-3x + 6$	$-x + 6$	$3x - 6$

$$\left\{ \begin{array}{l} I =]-\infty; 0[; -3x + 6 \leq 4 - x \\ I = [0; 3]; -x + 6 \leq 4 - x \\ I = [3; +\infty[; 3x - 6 \leq 4 - x \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I =]-\infty; 0[; x \geq 1 \\ I = [0; 3]; 6 \leq 4 \\ I = [3; +\infty[; x \leq \frac{5}{2} \end{array} \right\}$$

$I =]-\infty; 0[; x \geq 1$ (1 não pertence ao intervalo I , logo $x \geq 1$ não é uma das soluções da inequação)

$I = [0; 3]; 6 \leq 4$ (esta desigualdade é falsa, $6 > 4$, logo neste intervalo não temos soluções)

$I = [3; +\infty[; x \leq \frac{5}{2}$ ($\frac{5}{2}$ não pertence ao intervalo I , logo $x \leq \frac{5}{2}$) não é uma das soluções da equação

A solução da inequação é:

$$S = \{\emptyset\}, \text{ Línea H)}$$

36º) (Exame 2018) Seja $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$ calcular $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Resp: A) -1 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2 F) $-\pi$

Resolução:

Sabe-se que: $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ e $(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$

$$f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$f(x) = (\sin^2 x - \cos^2 x) = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

Nota que: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$f(x) = -\cos 2x$$

Derivando, teremos:

$$f'(x) = -(-2\sin 2x) = 2 \sin 2x$$

Achando a derivada no ponto $x = \frac{\pi}{12}$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1, \text{ Línea C)}$$

37º) (Exame 2018) Dado o sistema: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ se adicionarmos ao sistema a equação: $5x + y + \alpha z = \beta$, obtemos o sistema seguinte:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 5x + y + \alpha z = \beta \end{cases}, \text{ os valores de } \alpha \text{ e } \beta \text{ para que este sistema compatível}$$

indeterminado são:

Resolução:

Formando uma matriz A e uma matriz B, calculando os seus respectivos determinantes aplicando o método de crammer, teremos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (\alpha - 10 + 6) - (15 - 1 + 4\alpha) = \alpha - 4 - 14 - 4\alpha \rightarrow \Delta = -3\alpha - 18$$

Se $\Delta = 0$ o sistema torna-se compatível indeterminado, ou seja:

$$-3\alpha - 18 = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{18}{3} \rightarrow \alpha = -6$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = (-2\beta + 6 + \alpha) - (-1 + 4\alpha + 3\beta), \alpha = -6$$

$$\Delta_1 = (-2\beta + 6 - 6) - (-1 + 4(-6) + 3\beta) \rightarrow \Delta_1 = -2\beta + 25 - 3\beta \rightarrow$$

$$\Delta_1 = -5\beta + 25 = 0, \Delta_1 = 0 \text{ o sistema torna-se compatível indeterminado}$$

$$-5\beta + 25 = 0 \rightarrow -5\beta = -25 \rightarrow \beta = \frac{25}{5} \rightarrow \beta = 5$$

Os valores de α e β são: $S = \{ \alpha = -6; \beta = 5 \}$

38º) (Exame 2018) calcular a área da figura limitada pelas linhas:

$$y = \frac{7}{9}x^2 + 1; y = \frac{5}{9}x^2 + 3$$

Resp: A) 4 B) 7 C) 6 D) 5 E) 9 F) 10 G) 8 H) outro

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$$\text{Fazendo } y = y \rightarrow \frac{7}{9}x^2 + 1 = \frac{5}{9}x^2 + 3 \rightarrow 7x^2 + 9 = 5x^2 + 27$$

$$7x^2 + 9 = 5x^2 + 27 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$$

2º) Passo: construir o gráfico:

$$y = \frac{7}{9}x^2 + 1 \text{ (Parábola)}$$

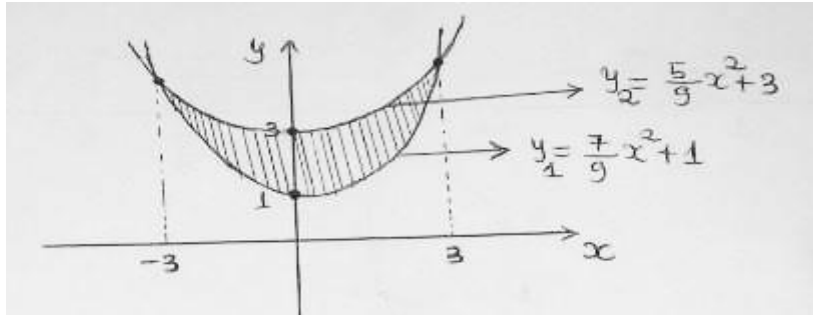
$$ox: y = 0 \rightarrow \nexists \text{ intersecção com o eixo } ox$$

$$oy: x = 0, y = 1$$

$$y = \frac{5}{9}x^2 + 3 \text{ (Parábola)}$$

$$ox: y = 0 \rightarrow \nexists \text{ intersecção com o eixo } ox$$

$$oy: x = 0, y = 3$$



3º) Passo: Calcular a área (Vamos integrar em relação ao eixo ox)

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_{-3}^3 \left(\frac{5}{9} x^2 + 3 - \left(\frac{7}{9} x^2 + 1 \right) \right) dx =$$

$$A = \int_{-3}^3 \left(\frac{5}{9} x^2 + 3 - \frac{7}{9} x^2 - 1 \right) dx = \int_{-3}^3 \left(2 - \frac{2x^2}{9} \right) dx$$

$$\text{Obs.: } \int_{-a}^a f(x) = 2 \int_0^a f(x)$$

$$A = 2 \int_0^3 \left(2 - \frac{2x^2}{9} \right) dx = 2 \left[2 \int_0^3 dx - \frac{2}{9} \int_0^3 x^2 dx \right]$$

$$A = 2 \left[(2x)_0^3 - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3} \right) (x^3)_0^3 \right], A = 2 \left[(2x)_0^3 - \frac{2}{27} (x^3)_0^3 \right]$$

$$A = 2 \left[2(3 - 0) - \frac{2}{27} (3^3 - 0^3) \right] = 2(6 - 2), A = 8, \text{ Línea G}$$

39º) (Exame -2018) Resolva a equação:

$$\text{sen } 2x - 2 \cos^2 x + 4 (\text{sen } x - \cos x + \text{tg } x - 1)$$

$$\text{Resp: A) } x = \pi k \quad \text{B) } x = \pi k - \frac{\pi}{3} \quad \text{C) } x = \pi k - \frac{\pi}{3} \quad \text{D) } x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{E) } x = \pi k + \frac{\pi}{4} \quad \text{F) } x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{3} \quad \text{G) } x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \text{H) outro}$$

Resolução:

$$\text{Obs.: } \text{sen } 2x = 2 \text{sen } x \cos x \text{ e } \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$2 \text{sen } x \cos x - 2 \cos^2 x + 4 \left(\text{sen } x - \cos x + \frac{\text{sen } x}{\cos x} - 1 \right) = 0$$

$$2 \text{sen } x \cos x - 2 \cos^2 x + 4 \left(\frac{\text{sen } x \cos x - \cos^2 x + \text{sen } x - \cos x}{\cos x} \right) = 0$$

$$2 \cos x (\text{sen } x - \cos x) + 4 \left[\frac{(\text{sen } x \cos x - \cos^2 x) + (\text{sen } x - \cos x)}{\cos x} \right] = 0$$

$$2 \cos x (\text{sen } x - \cos x) + 4 \left[\frac{\cos x (\text{sen } x - \cos x) + (\text{sen } x - \cos x)}{\cos x} \right] = 0$$

Factorizando a expressão: $(\text{sen } x - \cos x)$

$$(\text{sen } x - \cos x) \left[2 \cos x + 4 \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x} \right) \right] = 0 \rightarrow (\text{sen } x - \cos x) \left[\frac{2 \cos^2 x + 4 \cos x + 4}{\cos x} \right] = 0$$

Aplicando o anulamento do produto, temos:

$$(\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \text{ e } \left[\frac{2\cos^2 x + 4\cos x + 4}{\cos x} \right] = 0 \text{ (Equação fraccionária)}$$

$(\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$ (dividindo ambos membros por $\cos x$), vem:

$$\operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(1), \text{ o arco cujo tangente equivale a 1 é } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Fórmulas das tangentes: } x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\left[\frac{2\cos^2 x + 4\cos x + 4}{\cos x} \right] = 0, 2\cos^2 x + 4\cos x + 4 = 0 \text{ e } \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2\cos^2 x + 4\cos x + 4 = 0 \text{ (dividir todos os termos da equação por 2)}$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 2 = 0$$

$$\text{fazendo } \cos x = t \text{ onde } t \in [-1; 1]$$

$$t^2 + 2t + 2 = 0 \text{ (} a = 1; b = 2; c = 2 \text{)}$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(2) \rightarrow \Delta = -4 \rightarrow \nexists t$$

A solução $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, satisfaz a condição, logo a solução da equação é:

$$S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ Línea E)}$$

40º) (Exame 2018) Resolva a equação:

$$\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3)$$

$$\text{Resp: A) } -\frac{3}{2} \text{ B) } \frac{3}{2} \text{ C) } \frac{3}{4} \text{ D) } -3 \text{ E) } -\frac{4}{3} \text{ F) } \frac{4}{3} \text{ G) } -\frac{3}{4} \text{ H) outro}$$

Resolução:

$$\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3), \text{ Simplificando as bases:}$$

$$5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 \rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ (} a = 4, b = -5, c = -6 \text{)}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)} = \frac{5 \pm 11}{8}$$

$$x_1 = \frac{5+11}{8} = \frac{16}{8} \rightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{5-11}{8} = -\frac{6}{8} \rightarrow x_2 = -\frac{3}{4}$$

Verificação para $x_1 = 2$

$$\log_{(2+3)}(5(2)^2 - 7(2) - 9) = \log_{(2+3)}((2)^2 - 2(2) - 3)$$

$\log_{(5)}(-3) = \log_{(5)}(-3)$, O logaritmando não pode ser negativo, logo $x_1 = 2$ não é solução da equação

Verificação para $x_2 = -\frac{3}{4}$

$$\log_{(-\frac{3}{4}+3)}\left(5\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 7\left(-\frac{3}{4}\right) - 9\right) = \log_{(-\frac{3}{4}+3)}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) - 3\right)$$

$\log_{\left(\frac{9}{4}\right)}\left(-\frac{15}{16}\right) = \log_{\left(\frac{9}{4}\right)}\left(-\frac{15}{16}\right)$, como o logaritmando não pode ser negativo, $x_2 = -\frac{3}{4}$, Também não é solução da equação. A solução da equação é: $S = \{\emptyset\}$, Línea H)

Exames de Acesso 2017

41º (Exame 2017) Resolver :

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3$$

Resp: A) $\left[\frac{3}{7}; 1\right[$ B) $]-\infty; \frac{3}{7}]$ C) $\left[\frac{3}{7}; 1\right[\cup]3; +\infty[$ D) $\left[\frac{3}{7}; 3\right[$ E) $\left[\frac{2}{7}; +\infty\right[$
F) $\left]\frac{3}{7}, 1\right[\cup]3; +\infty[$ G) $]3; +\infty[$ H) *outro*

Resolução:

Pela propriedade de uma expressão modular temos:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Formando um sistema de inequações para as duas expressões, temos:

$$\text{I) } \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-2-1} \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+2-1} \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-3} - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+1} - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x+9}{x-3} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ \frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x+9}{x-3} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$x+9=0 \rightarrow x=-9 \text{ e } x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

	$-\infty$	-9	3	$+\infty$
$x+9=0$	$-$	0	$+$	$+$
$x-3 \neq 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
S	$+$	$-$	$+$	

$$x \in]-\infty; -9] \cup]3; +\infty[$$

$$\frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$7x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{7} \text{ e } -x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

	$-\infty$	$\frac{3}{7}$	1	$+\infty$
--	-----------	---------------	-----	-----------

$7x - 3 = 0$	-	O	+		+
$-x + 1 \neq 0$	+		+		+
S	-		+		-

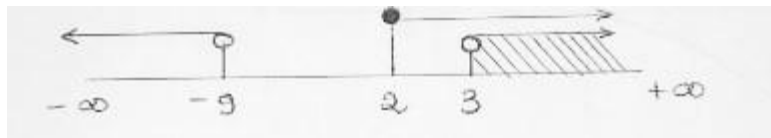
$$x \in \left[\frac{3}{7}; 1\right[$$

Voltando nos sistemas de inequações I) e II) temos:

$$I) \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \in]-\infty; -9] \cup]3; +\infty[\end{array} \right\}$$

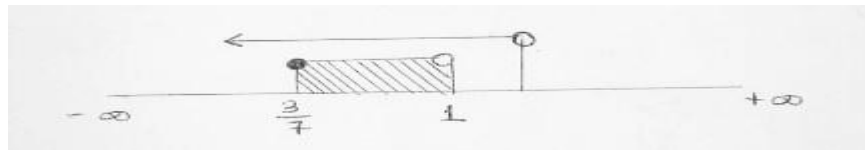
$$II) \left\{ \begin{array}{l} x < 2 \\ x \in \left[\frac{3}{7}; 1\right[\end{array} \right\}$$

Interceder as duas soluções do sistema I) , temos:



$$S_1 =]3; +\infty[$$

Interceder as duas soluções do sistema II), temos:



$$S_2 = \left[\frac{3}{7}; 1\right[$$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cup S_2$

$$S = \left[\frac{3}{7}; 1\right[\cup]3; +\infty[, \text{Linha C)}$$

42º) (Exame 2017) A área limitada pelas curvas $y = x - x^2$ e $y = x\sqrt{1-x}$ é
 A) 0,5 B) 0,1 C) 1 D) 6 E) 0,45 F) 10 G) 0,75 H) outro

Resolução:

1º) passo : Achar os pontos de intersecção entre as curvas:

$$y = y \rightarrow x - x^2 = x\sqrt{1-x}$$

$$x - x^2 - x\sqrt{1-x} = 0 \rightarrow x(1 - x + \sqrt{1-x}) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$$x_1 = 0 \text{ e } (1 - x + \sqrt{1-x}) = 0$$

$$(1 - x + \sqrt{1-x}) = 0 \rightarrow (\sqrt{1-x}) = x - 1 \rightarrow$$

$$(\sqrt{1-x})^2 = (x-1)^2 \rightarrow 1-x = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - x = 0$$

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x_2 = 0 \text{ e } x_3 = 1$$

Limites de integração em relação ao eixo ox : $0 \leq x \leq 1$

2º) Passo: Traçar o gráfico para visualizar a área a calcular:

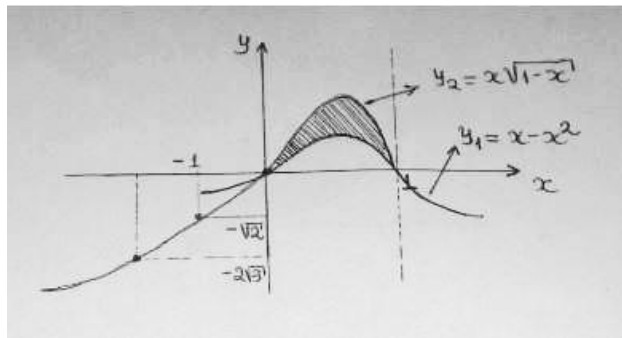
$$y = x - x^2, ox: y = 0, x - x^2 = 0, x = 0 \text{ e } x = 1$$

$$y = x - x^2, oy: x = 0, y = 0$$

$$y = x\sqrt{1-x} \quad Df =]-\infty; 1]$$

$$ox: y = 0, x\sqrt{1-x} = 0, x = 0 \text{ e } x = 1$$

$$oy: x = 0; y = 0$$



3º) Passo : calcular a área:

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_0^1 [x\sqrt{1-x} - (x - x^2)] dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx - \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx, \text{ fazendo: } \sqrt{1-x} = t,$$

$$1-x = t^2 \rightarrow x = 1-t^2, dx = -2t dt$$

$$I_1 = \int_0^1 (1-t^2)t(-2t) dt = \int_0^1 (t^2-1) 2t^2 dt = 2 \int_0^1 (t^4 - t^2) dt$$

$$I_1 = 2 \left[\int_0^1 t^4 dt - \int_0^1 t^2 dt \right] = 2 \left[\left(\frac{1}{5} t^5 \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 \right]$$

$$I_1 = 2 \left[\left(\frac{1}{5} (\sqrt{1-x})^5 \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{3} (\sqrt{1-x})^3 \right) \Big|_0^1 \right]$$

$$I_1 = 2 \left[\frac{1}{5} \left((\sqrt{1-1})^5 - (\sqrt{1-0})^5 \right) - \frac{1}{3} \left((\sqrt{1-1})^3 - (\sqrt{1-0})^3 \right) \right]$$

$$I_1 = \frac{4}{15}$$

$$I_2 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$I_2 = \left[\left(\frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^2}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{1^3}{3} \right) - \left(\frac{0^3}{3} \right) \right] = \frac{1}{6}$$

A área finalmente será: $A = I_1 - I_2$

$$A = \frac{4}{15} - \frac{1}{6} \rightarrow A = \frac{1}{10} \rightarrow A = 0,1 \text{ u}^2, \text{ Linha B)}$$

43º) (Exame 2017) Simplifica a expressão:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2(\alpha - 270^\circ)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos}^2(\alpha - 270^\circ)(1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha)$$

$$\text{Resp: A) } \sqrt{2} \cos(\alpha + 15^\circ) \quad \text{B) } \sqrt{3} \operatorname{sen}^2(\alpha + 270^\circ) \quad \text{C) } \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha + 225^\circ)$$

$$\text{D) } \sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ) \quad \text{E) } \operatorname{cotg}(\alpha + 75^\circ) \quad \text{F) } \sqrt{2} \cos(\alpha + 215^\circ)$$

$$\text{G) } \sqrt{3} \operatorname{sen}(2\alpha + 85^\circ) \quad \text{H) } \textit{outro}$$

Resolução:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \times \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} b \times \operatorname{cos} a$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - 270^\circ) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} 270^\circ - \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{cos}(a - b) = \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{cos}(\alpha - 270^\circ) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} 270^\circ + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 270^\circ = -\operatorname{sen} \alpha$$

Voltando na expressão inicial :

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \right) + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \left(1 + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \right) + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha$$

$$\text{Nota que : } \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Nota que: } \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \operatorname{cos} \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \alpha + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \alpha - \frac{\pi}{2}}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right), \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ), \text{ Línea D)}$$

44º) (Exame 2017) Resolva a equação: $\frac{x-2}{|x-2|} \leq 4 - x^2$

Resp: A) $(-1; \infty)$ B) $[0; 2[$ C) $[-\sqrt{5}; 2[$ D) $\left(-2; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

E) $[2; 5[\cup (4; \infty)$ F) $(4; \infty)$ G) $\left]-4; \frac{1}{4}\right]$ H) *outro*

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular, temos:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

A inequação será válida em dois sentidos:

$$I) \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x-2}{x-2} \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} x < 2 \\ \frac{x-2}{-(x-2)} \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 1 \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -1 \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x^2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x^2 \leq 3 \quad (x^2 = 3, x = \pm \sqrt{3})$$

$a > 0$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 \leq 3$	+	O	O	+

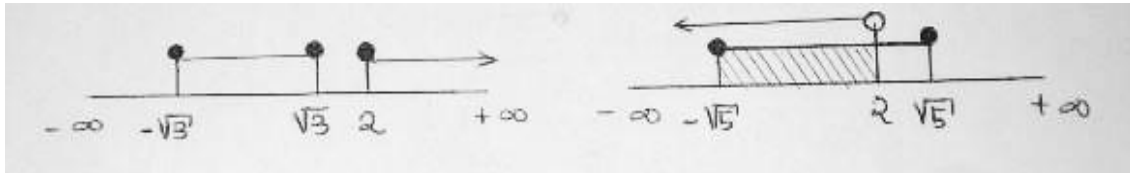
$$x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

$$x^2 \leq 5 \quad (x^2 = 5, x = \pm \sqrt{5})$$

$a > 0$	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x^2 \leq 3$	+	0	0	+

$$x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$$

$$\text{I) } \left\{ \begin{array}{l} [2; +\infty[\\ x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \end{array} \right\} \quad \text{II) } \left\{ \begin{array}{l}]-\infty; 2[\\ x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \end{array} \right\}$$



$$S(I) = \{\emptyset\}$$

$$S(II) = [-\sqrt{5}; 2[$$

A solução geral da inequação será: $S = S(I) \cup S(II)$

$$S = [-\sqrt{5}; 2[, \text{ Línea C)}$$

45º) (Exame 2017) Simplifique a expressão:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) \operatorname{sen}^3(\pi - 2\alpha) - \cos(6\alpha - \pi) \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$$

Resp: A) $\cos^3 4\alpha$ B) $\operatorname{sen} 2\alpha$ C) $\cos 6\alpha$ D) $\operatorname{sen}^2 3\alpha$ E) $\operatorname{sen}^3 3\alpha$

F) $\operatorname{sen} 2\alpha \cos 4\alpha$ G) $\cos^2 2\alpha \operatorname{sen} \alpha$ H) outro

Resolução:

Aplicando as fórmulas:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) \cos 6\alpha + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) \operatorname{sen} 6\alpha = \operatorname{sen} 6\alpha$$

$$\cos(6\alpha - \pi) = \cos 6\alpha \cos \pi + \operatorname{sen} 6\alpha \operatorname{sen} \pi = -\cos 6\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha) = \operatorname{sen} \pi \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos \pi = \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos \frac{\pi}{2} = \cos 2\alpha$$

Voltando na expressão inicial, temos:

$$\operatorname{sen} 6\alpha \operatorname{sen}^3 2\alpha + \cos 6\alpha \cos^3 2\alpha$$

$$(\sin 6\alpha \sin 2\alpha) \sin^2 2\alpha + (\cos 6\alpha \cos 2\alpha) \cos^2 2\alpha (*)$$

Aplicando as fórmulas:

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \rightarrow \sin 6\alpha \sin 2\alpha = \frac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{2} \\ \cos a \cos b &= \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2} \rightarrow \cos 6\alpha \cos 2\alpha = \frac{\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{2} \end{aligned}$$

Voltando em (*), temos:

$$\left(\frac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{2} \right) \sin^2 2\alpha + \left(\frac{\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{2} \right) \cos^2 2\alpha$$

Multiplicando os termos fora dos parênteses e mantendo o denominador:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sin^2 2\alpha \cos 4\alpha - \sin^2 2\alpha \cos 8\alpha + \cos^2 2\alpha \cos 4\alpha + \cos^2 2\alpha \cos 8\alpha}{2} \right) \\ &\left[\frac{(\sin^2 2\alpha \cos 4\alpha + \cos^2 2\alpha \cos 4\alpha) + (\cos^2 2\alpha \cos 8\alpha - \sin^2 2\alpha \cos 8\alpha)}{2} \right] \\ &\left[\frac{\cos 4\alpha (\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) + \cos 8\alpha (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{2} \right] (**)$$

$$\text{Sabe-se que: } \cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha$$

$$\text{Voltando em (**), temos: } \left[\frac{\cos 4\alpha + (\cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha) \cos 4\alpha}{2} \right] = \left[\frac{\cos 4\alpha + \cos^3 4\alpha - \cos 4\alpha \sin^2 4\alpha}{2} \right]$$

$$\left[\frac{(\cos 4\alpha - \cos 4\alpha \sin^2 4\alpha) + \cos^3 4\alpha}{2} \right] = \left[\frac{\cos 4\alpha (1 - \sin^2 4\alpha) + \cos^3 4\alpha}{2} \right] (***)$$

$$\text{sabe-se que: } 1 - \sin^2 4\alpha = \cos^2 4\alpha$$

Voltando em (***) , finalmente temos:

$$\left[\frac{\cos 4\alpha (\cos^2 4\alpha) + \cos^3 4\alpha}{2} \right] = \left(\frac{\cos^3 4\alpha + \cos^3 4\alpha}{2} \right) = \left(\frac{2\cos^3 4\alpha}{2} \right)$$

$$= \cos^3 4\alpha, \text{ Linha A}$$

46º) (Exame 2017) Resolva inequação:

$$(|x| - 1)(2x^2 + x - 1) \leq 1$$

$$\text{Resp: A) } [-1; 1] \quad \text{B) } \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad \text{C) } \left[\frac{1}{4}; 1\right] \quad \text{D) } (0; 1) \quad \text{E) } [0; 1]$$

$$\text{F) } \left[-1; \frac{1}{4}\right] \quad \text{G) } \left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução:

Aplicando a lei do anulamento do produto para encontrar as raízes da inequação:

$$(|x| - 1) = 0 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

$$(2x^2 + x - 1) = 0 \quad (a = 2; b = 1; c = -1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm 3}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \text{ e } x_4 = -1$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$(x - 1) = 0$	+	O	-	O	+
$(2x^2 + x - 1)$	+	O	-	O	+
S	+	+	-	+	+

$$S = \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right], \text{ Línea B)}$$

47º) (Exame 2017) Resolva inequação: $\frac{x+1}{|x-1|} + \frac{1-2x}{x-1} \geq 0$

Resp: A) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ B) $[2; \infty[$ C) $\left[\frac{1}{2}; 1\right[\cup (1; \infty)$

D) $\left]\frac{1}{2}; 2\right[$ E) $[0; 1[\cup]1; 2]$ F) $]1; 2]$ G) $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ H) *outro*

Resolução:

Pela condição da expressão modular, teremos:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 > 0 \\ -(x - 1) & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 1 & \text{se } x > 1 \\ -(x - 1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

A inequação será válida nas seguintes condições:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x+1}{x-1} + \frac{1-2x}{x-1} \geq 0 \end{cases} & \text{II)} \quad \begin{cases} x < 1 \\ -\frac{x-1}{x-1} + \frac{1-2x}{x-1} \geq 0 \end{cases} \\ \text{I)} \quad & \begin{cases} x > 1 \\ \frac{-x+2}{x-1} \geq 0 \end{cases} & \text{II)} \quad \begin{cases} x < 1 \\ \frac{-3x}{x-1} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Multiplicando as segundas equações dos dois sistemas por (-1), temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x-2}{x-1} \leq 0 \end{cases} & \qquad \begin{cases} x < 1 \\ \frac{3x}{x-1} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

I.2) $\frac{x-2}{x-1} \leq 0$ (inequação racional fraccionária)

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad e \quad x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x - 1$	-	+	+	
$x - 2$	-	-	O	+
S	+	-	+	

$$I.2) \quad x \in]1; 2]$$

$$II.2) \quad \frac{3x}{x-1} \leq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$3x = 0 \rightarrow x = 0 \quad e \quad x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

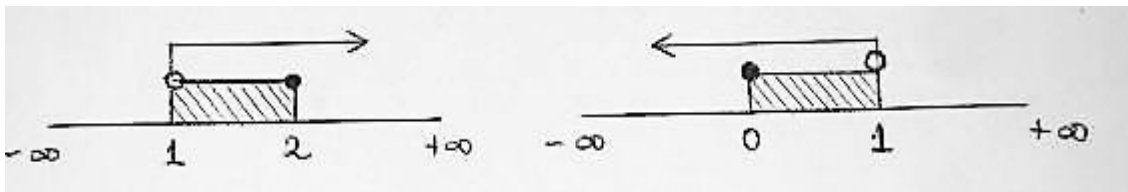
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - 1$	-	+	+	
$x - 2$	-	-	O	+
S	+	-	+	

$$II.2) \quad x \in [0; 1[$$

$$I) \quad \left\{ \begin{array}{l}]1; +\infty[\\ x \in]1; 2] \end{array} \right\}$$

$$II) \quad \left\{ \begin{array}{l}]-\infty; 1[\\ x \in [0; 1[\end{array} \right\}$$

Intercedendo as soluções dos dois sistemas:



$$S(I) = x \in]1; 2]$$

$$S(II) = x \in [0; 1[$$

A solução da inequação será: $S = S(I) \cup S(II)$

$$S = [0; 1[\cup]1; 2], \text{ Línea E)}$$

48º) (Exame 2017) Simplifique a expressão:

$$\cot g(270^\circ - 2\alpha) + \cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)$$

Resp: A) $\cot g 2\alpha$ B) $2 \cot g 4\alpha$ C) $\cot g^2 3\alpha$ D) $\cot g 2\alpha \cot g 2\alpha$

E) $\cot g 6\alpha$ F) $\cot g 4\alpha$ G) $3 \cot g 6\alpha$ H) outro

Resolução:

$$\cot(270^\circ - 2\alpha) + [\cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)]$$

Aplicando a fórmula:

$$\cot g(a - b) = \frac{\cot g a \cot g b + 1}{\cot g b - \cot g a}$$

$$\cot g(270^\circ - 2\alpha) = \frac{\cot g 270^\circ \cot g 2\alpha + 1}{\cot g 2\alpha - \cot g 270^\circ} = \frac{1}{\cot g 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\cot g a + \cot g b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$[\cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)] = \frac{\sin(210^\circ - 2\alpha + 150^\circ - 2\alpha)}{\sin(210^\circ - 2\alpha) \sin(150^\circ - 2\alpha)} [\cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)] = \frac{\sin(360^\circ - 4\alpha)}{\sin(210^\circ - 2\alpha) \sin(150^\circ - 2\alpha)} (*)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(360^\circ - 4\alpha) = \sin 360^\circ \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos 360^\circ = -\sin 4\alpha$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(210^\circ - 2\alpha) \sin(150^\circ - 2\alpha) = \frac{\cos 60^\circ - \cos(360^\circ - 4\alpha)}{2}$$

$$\text{Sabe-se que: } \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(360^\circ - 4\alpha) = \cos 360^\circ \cos 4\alpha + \sin 360^\circ \sin 4\alpha = \cos 4\alpha$$

Então:

$$\sin(210^\circ - 2\alpha) \sin(150^\circ - 2\alpha) = \frac{\frac{1}{2} - \cos 4\alpha}{2} = \frac{1 - 2\cos 4\alpha}{4}$$

Voltando em (*), temos:

$$[\cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)] = \frac{-\sin 4\alpha}{\frac{1 - 2\cos 4\alpha}{4}} = -\frac{4 \sin 4\alpha}{1 - 2\cos 4\alpha}$$

Voltando na expressão inicial e achando o denominador comum, teremos:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{4 \sin 4\alpha}{1 - 2\cos 4\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 4\alpha - 4\sin 4\alpha \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha (1 - 2\cos 4\alpha)}$$

$$\frac{\sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 4\alpha - 2\sin 4\alpha \cos 2\alpha - 2\sin 4\alpha \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2\cos 4\alpha \cos 2\alpha}$$

$$\frac{\sin 2\alpha - 2(\sin 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 4\alpha) - 2\sin 4\alpha \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2\cos 4\alpha \cos 2\alpha} (**)$$

Sabe-se que :

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2}$$

$$2\sin 4\alpha \cos 2\alpha = \sin 2\alpha + \sin 6\alpha$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

$$2\cos 4\alpha \cos 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos 6\alpha$$

$$(\sin 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 4\alpha) = \sin 6\alpha$$

Voltando em (**), temos:

$$\frac{\sin 2\alpha - 2\sin 6\alpha - (\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)}{\cos 2\alpha - (\cos 2\alpha + \cos 6\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - 2\sin 6\alpha - \sin 2\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 2\alpha - \cos 6\alpha} =$$

$$= \frac{3\sin 6\alpha}{-\cos 6\alpha} = 3 \operatorname{tg} 6\alpha, \text{ Línea G}$$

49º) (Exame 2017) Resolver :

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3$$

Resp: A) $\left[\frac{3}{7}; 1\right[$ B) $]-\infty; \frac{3}{7}]$ C) $\left[\frac{3}{7}; 1\right[$ U) $]3; +\infty[$ D) $\left[\frac{3}{7}; 3\right[$ E) $\left]\frac{2}{7}; +\infty\right[$
 F) $\left]\frac{3}{7}; 1\right[$ U) $]3; +\infty[$ G) $]3; +\infty[$ H) *outro*

Resolução:

Pela propriedade de uma expressão modular temos:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Formando um sistema de inequações para as duas expressões, temos:

$$\text{I) } \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-2-1} \geq 3 \end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+2-1} \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-3} - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+1} - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x+9}{x-3} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 \\ \frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x+9}{x-3} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$x+9=0 \rightarrow x=-9 \text{ e } x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

	$-\infty$	-9	3	$+\infty$
$x+9=0$	$-$	0	$+$	$+$

$x - 3 \neq 0$	-	-	+
s	+	-	+

$$x \in]-\infty; -9] \cup]3; +\infty[$$

$$\frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$7x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{7} \text{ e } -x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

	$-\infty$	$\frac{3}{7}$	1	$+\infty$
$7x - 3 = 0$	-	O	+	+
$-x + 1 \neq 0$	+	+	+	+
s	-	+	-	-

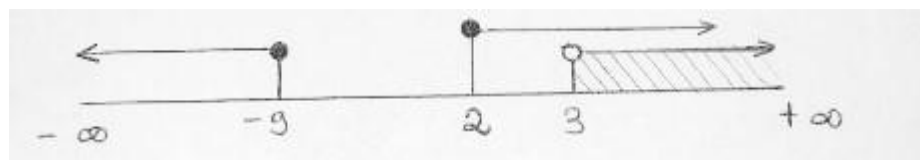
$$x \in \left[\frac{3}{7}; 1\right[$$

Voltando nos sistemas de inequações I) e II) temos:

$$\text{I)} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \in]-\infty; -9] \cup]3; +\infty[\end{array} \right\}$$

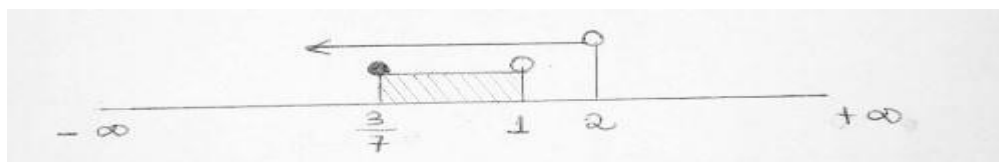
$$\text{II)} \left\{ \begin{array}{l} x < 2 \\ x \in \left[\frac{3}{7}; 1\right[\end{array} \right\}$$

Interceder as duas soluções do sistema I) , temos:



$$S_1 =]3; +\infty[$$

Interceder as duas soluções do sistema II), temos:



$$S_2 = \left[\frac{3}{7}; 1\right[$$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cup S_2$

$$S = \left[\frac{3}{7}; 1\right[\cup]3; +\infty[, \text{Línea C)}$$

Exame de Acesso 2016

50º) (Exame 2016) A área da região limitada pelo gráfico da função

$y = \frac{|x|}{1+x^2}$, o eixo ox e as rectas $x = -2$ e $x = 1$ é:

A) $\ln 10 u^2$ B) $\frac{\ln 10}{3} u^2$ C) $\ln\left(\frac{2}{3}\right) u^2$ D) $\arctg 2 u^2$ E) $\arctg\left(\frac{5}{2}\right) u^2$

F) $\arctg(10) u^2$ G) outro

Resolução:

$$1^\circ \text{ passo: } y = \frac{|x|}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

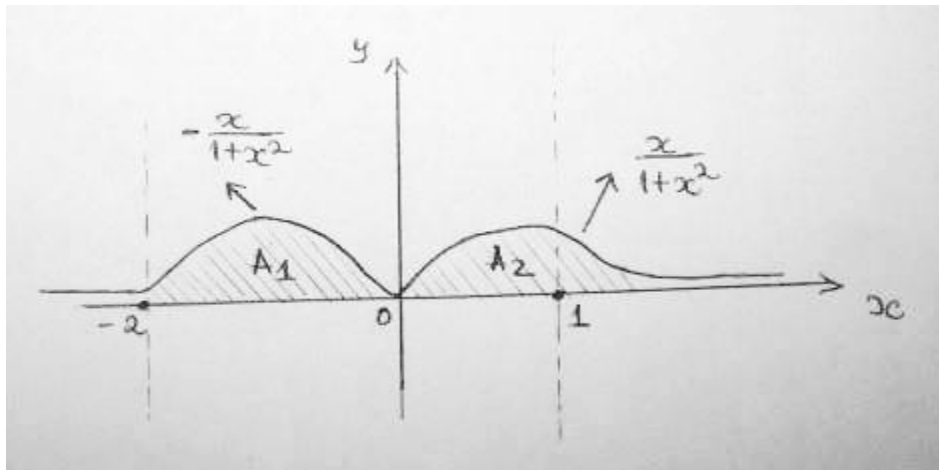
2º) Passo: Achar os interceptos e construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os seus limites de integração:

$$y = \frac{x}{1+x^2}, \text{ ox: } y = 0, x = 0; \text{ oy: } x = 0, y = 0 \text{ (} f(x) \text{ passa na origem)}$$

$$\forall x \geq 0; x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$$

$$y = -\frac{x}{1+x^2}, \text{ ox: } y = 0, x = 0; \text{ oy: } x = 0, y = 0 \text{ (} f(x) \text{ passa na origem)}$$

$$\forall x < 0; x \rightarrow -\infty; y \rightarrow 0$$



3º) Passo: calcular a área:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_{-2}^0 -\frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_{-2}^0 =$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} [\ln(1+0^2) - \ln(1+(-2)^2)] \rightarrow A_1 = \frac{\ln 5}{2}$$

$$A_2 = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1$$

$$A_2 = \frac{1}{2} [\ln(1 + 1^2) - \ln(1 + (0)^2)] \rightarrow A_2 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{Então a área será: } A = A_1 + A_2 = \frac{\ln 5}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} (\ln 5 + \ln 2)$$

$$A = \frac{1}{2} \ln(5 \times 2) \rightarrow A = \frac{1}{2} \ln 10, \text{ Línea H)}$$

51º) (Exame 2016) A área limitada pela curva $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$ e as rectas $y = 0$ e $x = 1$ é:

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) π F) 3 G) 6 H) outro

Resolução:

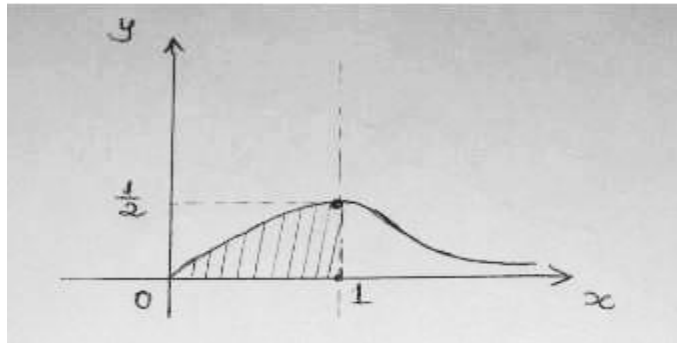
1º) Passo: Achar o domínio, os interceptos e construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os seus limites de integração:

$$D_f = [0; +\infty[$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}, \text{ ox: } y = 0, x = 0; \text{ oy: } x = 0, y = 0 \text{ (} f(x) \text{ passa na origem)}$$

$$\forall x \geq 0; x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$$

$$\text{se } x = 1, y = \frac{1}{2}, \text{ se } x = 0, y = 0$$



2º) Passo: calcular a área

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx, \text{ fazendo: } x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$$

Trocando os limites de integração em relação a t:

$$\text{se } x = 1 \rightarrow t = 1, \text{ se } x = 0 \rightarrow t = 0$$

$$A = \int_0^1 \frac{t(2t)dt}{1+(t^2)^3} = 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+(t^3)^2},$$

$$\text{supondo novamente que: } t^3 = y \rightarrow 3t^2 dt = dy \rightarrow t^2 dt = \frac{dy}{3}$$

Trocando os limites de integração em relação:

$$\text{se } t = 1 \rightarrow y = 1, \text{ se } t = 0 \rightarrow y = 0$$

$$A = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} \right) \left(\frac{dy}{3} \right) = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dy}{1+t^2} = \frac{2}{3} \operatorname{artg}(y) \Big|_0^1$$

$$A = \frac{2}{3} \left(\arctan(1) - \arctan(0) \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right)$$

$$A = \frac{\pi}{6}, \text{ Línea D)}$$

52º) (Exame 2016) Seja $f(x) = \frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$, Calcule $f'(0)$

- A) $-2 \ln 3$ B) $-\frac{1}{3} \ln 2$ C) $\frac{1}{2} \ln 3$ D) $2 \log 3$ E) $-3 \log 2$ F) $3 \ln 2$ G) 1 H) *outro*

Resolução:

Aplicando da derivada do cociente:

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Derivando a função temos:

$$f'(x) = \frac{(2^{2x})' \sqrt{2-2^{2x}} - (2^{2x})(\sqrt{2-2^{2x}})'}{(\sqrt{2-2^{2x}})^2} (*)$$

Sabe-se que:

$$\text{se } y = a^x \rightarrow y' = (x)' a^x \ln a$$

$$\text{se } y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Voltando em (*), temos:

$$f'(x) = \frac{(2 \cdot 2^x \ln 2) \sqrt{2-2^{2x}} - (2^{2x}) \frac{(2-2^{2x})'}{2(\sqrt{2-2^{2x}})}}{(\sqrt{2-2^{2x}})^2} = \frac{(4 \cdot 2^x \ln 2)(2-2^{2x}) - 2^{2x}(-2 \cdot 2^{2x} \ln 2)}{2(\sqrt{2-2^{2x}})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4 \cdot 2^x \ln 2)(2-2^{2x}) + 2 \cdot 2^{2x} (2^{2x} \ln 2)}{2(\sqrt{2-2^{2x}})(\sqrt{2-2^{2x}})^2}, \text{ factorizando } 2 \cdot 2^{2x} \ln 2, \text{ temos:}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2^{2x} \ln 2 [2(2-2^{2x}) + 2^{2x}]}{2(\sqrt{2-2^{2x}})^3}, \text{ desfazendo o produto e reduzindo os termos}$$

semelhantes, fica:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2^{2x} \ln 2 (4-2^{2x})}{2(\sqrt{2-2^{2x}})^3}, \text{ substituindo o ponto } x = 0$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 2^{2 \times 0} \ln 2 (4-2^{2 \times 0})}{2(\sqrt{2-2^{2 \times 0}})^3} = \frac{2 \ln 2 (3)}{2} = \frac{(2 \times 3) \ln 2}{2} = \frac{6 \ln 2}{2}$$

$$f'(0) = 3 \ln 2, \text{ Línea F)}$$

53º) (Exame 2016) Resolva a equação :

$$\tan(x+1) \cot(2x+3) = 0$$

Resp:

$$x = \frac{\pi k}{2} - 3 \quad B) x = \frac{\pi k}{2} + 2 \quad C) x = 2\pi k + 1 \quad D) x = 2\pi k - 2 \quad E) x = \pi k + 1$$

F) $x = \pi k - 2$ G) $x = 4\pi k - 1$ H) *outro*

Resolução:

$$\operatorname{tg}(x+1) \cot \operatorname{tg}(2x+3) = 0 \rightarrow \operatorname{tg}(x+1) \frac{1}{\operatorname{tg}(2x+3)} = 1 \rightarrow \operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3)$$

$$\operatorname{tg}(2x+3) = \operatorname{tg}(x+1)$$

A equação torna-se mais simples Aplicando o seguinte conceito:

$$\text{Se } \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \rightarrow a = b + \pi k$$

$$\operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3) \rightarrow 2x+3 = x+1 + \pi k \rightarrow 2x-x = 1-3 + \pi k \rightarrow$$

$$x = -2 + \pi k \rightarrow x = \pi k - 2$$

CE: condição de existência:

$$\operatorname{tg}(2x+3) \neq 0 \rightarrow 2x+3 \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow x \neq \frac{\pi k - 3}{2}$$

A solução $x = \pi k - 2$ satisfaz a condição de existência, logo, a solução da equação é:

$$S = \{x = \pi k - 2\}, \text{ Línea F)}$$

54º) (Exame 2016) Seja $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$, Calcule $f'(2)$

A) $-\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) 1 F) 0 G) $\frac{1}{30}$

Resolução:

Transformando todos os radicais em potência:

$$f(x) = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}},$$

Aplicando a derivada do cociente: $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, Temos:

$$f'(x) = \frac{\left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}} \right]' (x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}} \right] \left[(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]'}{\left[(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]^2}$$

Aplicando a derivada da potência no numerador : se $y = u^n \rightarrow y' = n u^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{5}(x-1)^{-\frac{4}{5}} \right] (x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}} \right] \left[\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} \right]}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Transformando todas as potenciais em radicais, temos:

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{(x-1)^4}} \right] \left[\sqrt[3]{x-1} \right] - \left[\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1} \right] \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Substituindo o ponto $x = 2$

$$f'(2) = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{2-1}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{(2-1)^4}} \right] [\sqrt[3]{2-1}] - [\sqrt{2-1} + \sqrt[5]{2-1}] \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-1)^2}} \right]}{\sqrt[3]{(2-1)^2}}$$

$$f'(2) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - (2)\left(\frac{1}{3}\right)}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{15+6-20}{30} = \frac{1}{30}$$

$$f'(2) = \frac{1}{30}, \text{ Línea G)}$$

55º) (Exame 2016) Seja $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}$, calcule $f'(1)$

A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{8}{7}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{5}{6}$ F) 1 G) $\frac{7}{8}$ H) outro

Resolução:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}} \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}$$

Para derivar aplicar a fórmula: se $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = \frac{\left[x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}} \right]'}{2\sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}}, \text{ Aplicando a derivar da potência:}$$

$$y = u^n \rightarrow y' = n u^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{2x + \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}}}{6\sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{6x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{6x^{\frac{3}{3}}\sqrt[3]{x^2} + 1}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}}, \text{ Substituindo o ponto } x = 1$$

$$f'(1) = \frac{6(1)^{\frac{3}{3}}\sqrt[3]{(1)^2} + 1}{6\sqrt[3]{(1)^2}\sqrt{(1)^2 - 1 + \sqrt[3]{1}}} = \frac{7}{6} \rightarrow f'(1) = \frac{7}{6}, \text{ Línea B)}$$

56º) (Exame 2016) A área da região compreendida entre a curva $y = 2x^2 - 2x - 1$ e as rectas $x = 1$ e $x = 10$ e o eixo ox é:

Resp: A) $\left(\frac{13\sqrt{2}}{9} -$

$4\right)u^2$ B) $28u^2$ C) $12u^2$ D) $2016u^2$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}u^2$ F) $57u^2\sqrt{2}u^2$ G) outro

Resolução:

$$\text{A área da figura será: } A = \int_1^{10} (2x^2 - 2x - 1) dx$$

$$A = 2 \int_1^{10} x^2 dx - 2 \int_1^{10} x dx - \int_1^{10} dx, \text{ Integrando temos:}$$

$$A = \frac{2}{3} (x^3)_1^{10} - 2 \left(\frac{1}{2}\right) (x^2)_1^{10} - (x)_1^{10} = \frac{2}{3} (x^3)_1^{10} - (x^2)_1^{10} - (x)_1^{10}$$

$$A = \frac{2}{3} [(10)^3 - (1)^3] - [(10)^2 - (1)^2] - (10 - 1)$$

$$A = (666 - 99 - 9) \rightarrow A = 558 u^2, \text{ Línea G}$$

57º) (Exame 2016) A área da região compreendida entre o eixo OX e o gráfico da função: $f(x) = x e^{2x}$ entre $-1 < x < 1$, é:

Resp: A) $\frac{e^4+2e^2}{4e^2} u^2$ B) $\frac{e^4-1}{4e^2} u^2$ C) $\frac{e^{-4}+2e^2}{4e^2} u^2$ D) $\frac{e^4+2e^2-3}{e^2} u^2$ E) $\frac{e^4-e^2-3}{4e^2} u^2$
F) $\frac{e^4+2e^2-3}{4e^2} u^2$ G) *outro*

Resolução:

A área da região será: $A = \int_{-1}^1 x e^{2x} dx$, Sabe-se que: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

$A = \int_{-1}^1 x e^{2x} dx = 2 \int_0^1 x e^{2x} dx$, Integrando por parte:

$$A = 2 \left[(u v)_0^1 - \int_0^1 v du \right]$$

$$u = x \rightarrow du = dx; v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$A = 2 \left[\left(\frac{1}{2} x e^{2x} \right)_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \right] = 2 \left[\frac{1}{2} \{ x e^{2x} \}_0^1 - \frac{1}{4} (e^{2x})_0^1 \right],$$

Substituindo os limites de integração vem:

$$A = 2 \left[\frac{1}{2} \{ 1 \times e^{2(1)} - (0 \times e^{2(0)}) \} - \frac{1}{4} \{ (e^{2(1)}) - (e^{2(0)}) \} \right]$$

$$A = 2 \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \right) \rightarrow A = \left(\frac{e^2+1}{2} \right) u^2, \text{ Línea G}$$

58º) (Exame 2016) A solução da inequação $\log_7 \frac{|x^2+4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 0$ é:

Resp: a) $\left[\frac{2}{5}; +\infty \right[$ b) $[0; 1[\cup]3; 4]$ c) $[-1; 0] \cup]3; 4]$ d) $\left[-\frac{2}{5}; +\infty \right[\cup [3; 4]$ e) $\left] -\frac{2}{5}; 2 \right[$ f) *outro*

Resolução: $\log_7 \frac{|x^2+4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 0$

Condição de existência: $\frac{|x^2+4x|+3}{x^2+|x-5|} > 0$, desigualdade verifica-se para todos os valores reais:

Condição de existência: $] -\infty; +\infty[$

$$\log_7 \frac{|x^2+4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 0 \rightarrow \frac{|x^2+4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1 \rightarrow |x^2+4x| - |x-5| \geq x^2-3$$

$$|x^2+4x| = |x| |x+4|$$

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}, |x+4| = \begin{cases} -x-4, & x < -4 \\ x+4, & x \geq -4 \end{cases}; |x-5| = \begin{cases} -x+5, & x < 5 \\ x-5, & x \geq 5 \end{cases}$$

$f(x)$	$-\infty$	-4	0	5
--------	-----------	------	-----	-----

$ x + 4 $	$-x - 4$	$x + 4$	$x + 4$	$x + 4$
$ x $	$-x$	$-x$	x	x
$ x - 5 $	$-x + 5$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
S	$x^2 + 5x - 5$	$-x^2 - 3x - 5$	$x^2 + 5x - 5$	$x^2 + 3x + 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -4; x^2 + 5x - 5 \geq x^2 - 3 \rightarrow x \geq \frac{2}{5}, S_1: \left[\frac{2}{5}; +\infty\right[\\ -4 \leq x \leq 0, -x^2 - 3x - 5 \geq x^2 - 3 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 \leq 0, (\Delta < 0), S_2 = \emptyset \\ 0 \leq x \leq 5, x^2 + 5x - 5 \geq x^2 - 3 \rightarrow x \geq \frac{2}{5}, S_3: \left[\frac{2}{5}; +\infty\right[\\ x > 5; x^2 + 3x + 5 \geq x^2 - 3 \rightarrow x \geq -1; (Nota: -1 < 5), S_4 = \emptyset \end{array} \right.$$

A solução da inequação é: $S: \left[\frac{2}{5}; +\infty\right[$; Línea a)

59º) (Exame 2016) As equações paramétricas da recta que passa pelo ponto $(1; -1; 0)$ e é paralela aos planos $x + y = 1, x + z = 1$ são:

Resp: A) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ B) $\frac{x-9}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{13}$ C) $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases}$ F) $\begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = -4 - 2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$ G) *outro*

Resolução: $P(1; -1; 0), x_1 = 1; y_1 = -1$ e $z_1 = 0$

A equação paramétrica da recta é: $\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$

Onde $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vector director da recta

O plano $\pi_1: x + y = 1$ tem vector director $\vec{n}_1 = (1; 1; 0)$

O plano $\pi_2: x + z = 1$ tem vector director $\vec{n}_2 = (1; 0; 1)$

O vector director da recta é: $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\vec{n} = (-1)^{1+1}i \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}j \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{n} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$\vec{n} = (1; -1; -1)$, a equação paramétrica pedida é: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases}$, Línea E)

60º) (Exame 2016) A solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3) \geq -1$ é:

Resp: A) $[0; 1[\cup]3; 4]$ B) $[0; 1] \cup [-3; 4]$ C) $]0; 1] \cup [3; 4]$ D) $]0; 1[\cup]3; 4]$
E) $[0; 1] \cup [3; 4]$ F) $]0; 1[\cup]3; 4[$

Resolução: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3) \geq -1$

Condição de existência: $x^2 - 4x + 3 > 0$ ($x_1 = 3$ e $x_2 = 1$)

$f(x)$	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3 > 0$	+	O	-	O	+

$$S_1 =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$$

Resolvendo a inequação: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3) \geq -1 \rightarrow -1 \log_3(x^2 - 4x + 3) \geq -1$

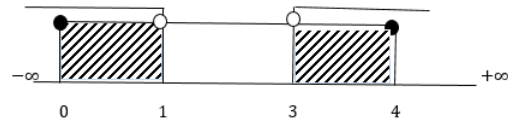
$$(x^2 - 4x + 3) \leq 3 \rightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 3, x^2 - 4x \leq 0 \text{ (} x_1 = 4 \text{ e } x_2 = 0 \text{)}$$

$f(x)$	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$x^2 - 4 > 0$	+	O	-	O	+

$$S_2 = [0; 4]$$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cap S_2$

$$S = [0; 1[\cup]3; 4] \text{ , Línea A)}$$



Exame de Acesso 2015

61º) (Exame 2015) Simplifique a expressão: $\frac{\text{sen}(2a) + \text{sen}(5a) - \text{sen}(3a)}{\cos(a) + 1 - 2\text{sen}^2(2a)}$

Resolução: $\frac{\text{sen}(2a) + [\text{sen}(5a) - \text{sen}(3a)]}{\cos(a) + 1 - 2\text{sen}^2(2a)}$

Nota que:

$$\text{sen}(2a) = 2 \text{ sen } a \cos a$$

$$\text{sen}^2 2a = \frac{1}{2}(1 - \cos 4a) \rightarrow 1 - 2\text{sen}^2 2a = \cos 4a$$

$$\text{sen}(5a) - \text{sen}(3a) = 2\text{sen}\left(\frac{5a-3a}{2}\right) \cos\left(\frac{5a+3a}{2}\right) = 2 \text{ sen } a \cos 4a$$

Voltando na expressão inicial:

$$\frac{2 \text{ sen } a \cos a + 2 \text{ sen } a \cos 4a}{\cos(a) + \cos 4a} = \frac{2 \text{ sen } a (\cos a + \cos 4a)}{[\cos(a) + \cos 4a]} = 2 \text{ sen } a$$

62º) (Exame 2015) Resolver a inequação: $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$

Resp: A) $x \in]-\infty; 1,5]$ B) $x \in [1,5; 2[$ C) $x \in]2; +\infty[$

D) $x \in]-\infty; 1,5] \cup]2; +\infty[$ E) $x \in]-\infty; 2[$ F) $x \in [1,5; +\infty[$

G) $x \in]2; 3[$ H) *outro*

Resolução:

Pela definição do módulo:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 3 \\ -(x - 3) & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \begin{cases} \frac{x-3}{x^2-5x+6} \geq 2 \\ \frac{x-3}{x^2-5x+6} - 2 \geq 0 \\ \frac{x-3-2x^2+10x-12}{x^2-5x+6} \geq 0 \\ \frac{-2x^2+11x-15}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases} & \text{II)} \quad \begin{cases} \frac{-x+3}{x^2-5x+6} \geq 2 \\ \frac{-x+3}{x^2-5x+6} - 2 \geq 0 \\ \frac{-x+3-2x^2+10x-12}{x^2-5x+6} \geq 0 \\ \frac{-2x^2+9x-9}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Multiplicando as segundas equações dos dois sistemas de inequações por (-1), as desigualdades invertem-se fica:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x^2-5x+6} \leq 0 \\ \frac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-x+3}{x^2-5x+6} \leq 0 \\ \frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases}$$

I.2)

$$\frac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6} \leq 0 \text{ (Inequação racional fraccionária)}$$

$$2x^2 - 11x + 15 = 0 \text{ Pelo método de Vieth: } x = \frac{5}{2} \text{ e } x = 3$$

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \text{ Pelo método de Vieth: } x = 2 \text{ e } x = 3$$

x	$-\infty$	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$2x^2 - 11x + 15$	+	+	+	-	+
$x^2 - 5x + 6$	+	-	-	+	+
S	+	-	+	+	+

$$\text{I.2)} \quad x \in \left] 2; \frac{5}{2} \right]$$

$$\text{II.2)} \quad \frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$2x^2 - 9x + 9 = 0 \text{ Pelo método de Vieth } x = \frac{3}{2} \text{ e } x = 3$$

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \text{ Pelo método de Vieth: } x = 2 \text{ e } x = 3$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x^2 - 11x + 15$	+	-	-	+	+

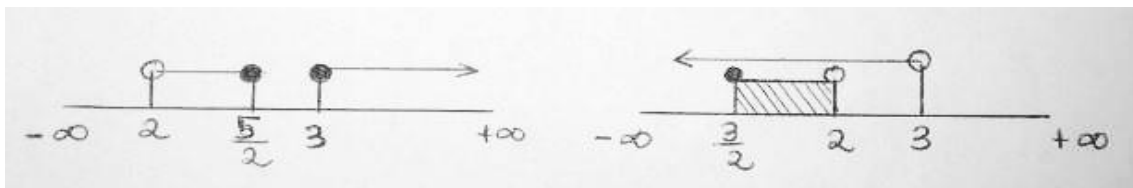
$x^2 - 5x + 6$	+	+	-	+
S	+	-	+	+

$$\text{II.2) } x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right[$$

$$\text{I) } \left\{ \begin{array}{l} [3; +\infty[\\ x \in \left]2; \frac{5}{2}\right] \end{array} \right\}$$

$$\text{II) } \left\{ \begin{array}{l}]-\infty; 3[\\ x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right[\end{array} \right\}$$

Achando a intersecção das soluções de cada sistema:



$$S(I) = \emptyset$$

$$S(II) = \left[\frac{3}{2}; 2\right[$$

A solução do sistema será: $S = S(I) \cup S(II)$

$$S = \left[\frac{3}{2}; 2\right[\text{ ou } S = [1,5 ; 2[, \text{ Línea B}$$

63º) (Exame 2015) Achar a equação da circunferência que passa pela origem e tem o centro em ponto $(6; -8)$

$$\text{Resp: A) } x^2 + y^2 = 36 \quad \text{B) } (x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$$

$$\text{C) } x^2 + y^2 = 64 \quad \text{D) } (x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 10$$

$$\text{E) } (x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 4 \quad \text{F) } (x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 4$$

$$\text{G) } x^2 + y^2 = 4 \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução:

A equação de uma circunferência é:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

O centro é ponto $P(6; -8)$, $\alpha = 6$ e $\beta = -8$

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = R^2$$

Quando passa pela origem temos: $A(0; 0)$

Vamos determinar o raio da circunferência:

$$R = d_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$R = \sqrt{(6 - 0)^2 + (-8 - 0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

A equação da circunferência será:

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = (10)^2 \rightarrow (x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100, \text{ linha B)}$$

64º) (Exame 2015) Calcular a área da figura limitada pelas linhas:

$$y = x^4; y = x$$

$$\text{Resp: A) } \frac{1}{5} \quad \text{B) } \frac{2}{5} \quad \text{C) } \frac{1}{2} \quad \text{D) } \frac{3}{5} \quad \text{E) } \frac{7}{10} \quad \text{F) } \frac{4}{5} \quad \text{G) } \frac{3}{10} \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução:

1º) Passo: Achar a intersecção entre as linhas:

$$y = y \rightarrow x^4 = x = 0 \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

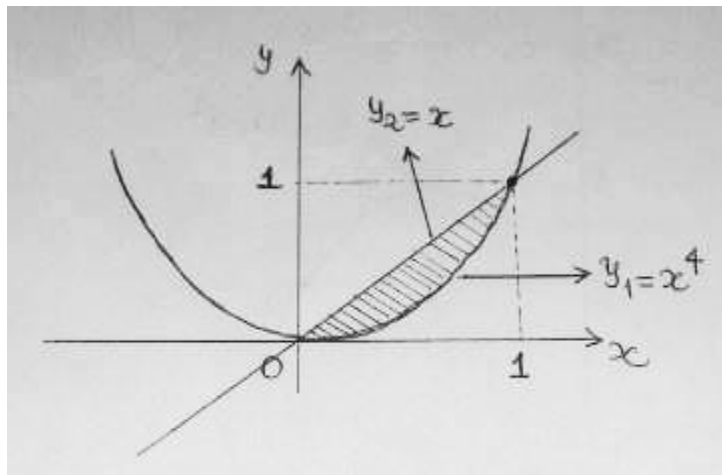
$x(x^3 - 1) = 0$, pelo anulamento do produto, temos:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1$$

2º) Passo: construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os limites de integração:

$y = x^4$ (função par), $ox: y = 0; x = 0$, $oy: x = 0$ e $y = 0$

$y = x$ (função ímpar), $ox: y = 0; x = 0$, $oy: x = 0; y = 0$



3º) Passo: calcular a área

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_0^1 (x - x^4) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^4 dx = \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^1 - \left(\frac{x^5}{5} \right)_0^1$$

$$A = \left[\left(\frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^2}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^5}{5} \right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \rightarrow A = \frac{3}{10}, \text{ Línea G)}$$

65º) (Exame 2015) Resolva a equação:

$$\frac{\cot 2x}{\cot x} + \frac{\cot x}{\cot 2x} + 2 = 0$$

$$\text{Resp: A) } x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} \quad \text{B) } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{C) } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$\text{D) } x = \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \text{E) } x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{F) } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$G) x = x = (-1)^k \frac{\pi}{3} \pi k \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$\frac{\cot 2x}{\cot x} + \frac{\cot x}{\cot 2x} + 2 = 0, \text{ Achando o denominador comum :}$$

$$\frac{\cot^2 2x + \cot^2 x + 2 \cot 2x \cot x}{\cot 2x \cot x} = 0 \rightarrow \frac{\cot^2 2x + 2 \cot 2x \cot x + \cot^2 x}{\cot 2x \cot x} = 0$$

$$\text{Obs.: } \cot^2 2x + 2 \cot 2x \cot x + \cot^2 x = (\cot 2x + \cot x)^2$$

$$\frac{(\cot 2x + \cot x)^2}{\cot 2x \cot x} = 0 \text{ (equação racional fraccionária)}$$

$$(\cot 2x + \cot x)^2 = 0 \text{ e } \cot 2x \cot x \neq 0$$

$$(\cot 2x + \cot x)^2 = 0 \rightarrow \cot 2x + \cot x = 0 (*)$$

$$\text{Sabe-se que: } \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

Substituindo em (*), temos:

$$\frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} + \cot x = 0, \text{ achando o denominador comum, fica:}$$

$$\frac{3 \cot^2 x - 1}{2 \cot x} = 0$$

$$3 \cot^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cot x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cot x = \cot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cot x = \cot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \rightarrow \cot x = -\cot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

Condição de existência:

$$\cot x \neq 0 \rightarrow x \neq \pi k$$

$$\cot 2x \neq 0 \rightarrow 2x \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}$$

As soluções $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$ e $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ satisfazem a condição de existência, logo a solução da equação é:

$$S = \left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \right\}, \text{ Línea C}$$

66º) (Exame 2015) Resolva a equação:

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x - \sin x}{0,5 \sin 2x}$$

$$\text{Resp: A) } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad B) x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad C) (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$D) x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad E) x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad F) x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$G) x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{\frac{1}{2}\sin 2x} \rightarrow \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x \cos x} - \frac{2(\cos x - \sin x)}{\sin 2x} = 0$$

$$\text{OBs: } 2\sin x \cos x = \sin 2x \rightarrow \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\frac{\sin 2x}{2}} - \frac{2(\cos x - \sin x)}{\sin 2x} = 0$$

$$\frac{2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin 2x} - \frac{2(\cos x - \sin x)}{\sin 2x} = 0, \text{ factorizando } 2(\cos x - \sin x)$$

$$2(\cos x - \sin x) \left(\frac{\cos x + \sin x - 1}{\sin 2x} \right) = 0$$

Anulando os produtos temos:

$$2(\cos x - \sin x) = 0, \cos x + \sin x - 1 = 0, \sin 2x \neq 0$$

$$2(\cos x - \sin x) = 0 \rightarrow \sin x = \cos x \text{ (dividir por } \cos x) \rightarrow \tan x = 1$$

$$\tan x = 1 \rightarrow \tan x = \tan(1), \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\cos x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow \cos x + \sin x = 1, \text{ Elevar ambos membros } ()^2$$

$$1 + 2\sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 2x = \sin(0), \alpha = 0^\circ$$

$$2x = \pi k \rightarrow x = \frac{\pi k}{2}$$

$$\sin 2x \neq 0 \rightarrow 2x \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}$$

A solução $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ satisfaz e a solução $x = \frac{\pi k}{2}$ não satisfaz, logo a solução da equação é: $S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$, Línea F)

67º) (Exame 2015) Calcular a área da figura limitada pelas linhas

$$y = \frac{1}{x^2}; y = 0 : x = 0,5 \text{ e } x = 2,5$$

Resp: A) 1,5 B) 1,6 C) 1,4 D) 1,8 E) 2,0 F) 1,9 G) 1,7 H) outro

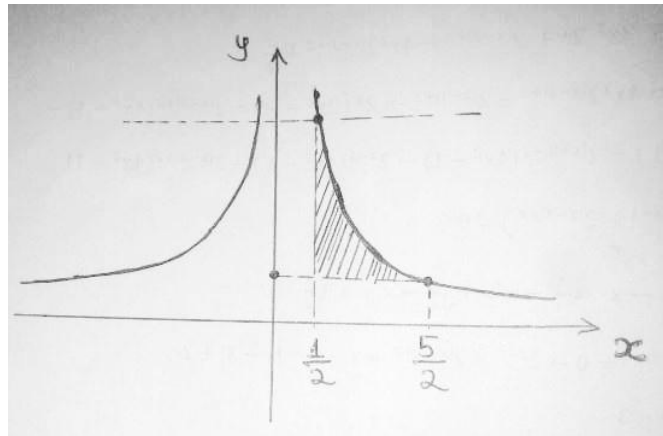
Resolução:

1º) construir o gráfico para visualiza a área a calcular e os limites de integração:

$$y = \frac{1}{x^2} \text{ (Função par)}, x = 0,5 \rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ e } x = 2,5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Quando $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$

se $x = 0,5, y = 4$; se $x = 2,5, y = \frac{4}{25}$



2º) Passo: calcular a área:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} = -\left(\frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = -\left(\frac{2}{5} - 2\right)$$

$$A = -\left(-\frac{8}{5}\right) \rightarrow A = 1,6 \text{ Línea B)}$$

68º) (Exame 2015) Encontre a função $F(x)$ cujo gráfico passa pelo ponto $M(3; -2)$ e $F'(x) = 4x^2 + 9x^{-2}$

Resp: A) $x + 1$ B) $\frac{4x}{3} + x + 10$ C) $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}$ D) $4x^3 - \frac{9}{x^3}$

E) $\frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{x} - 35$ F) $\frac{x^{-1}}{2} + x^{-2} - 3$ G) $3x + x^2 + 2$ H) *outro*

Resolução :

Vamos encontrar a primitiva de $F'(x)$ aplicando integral indefinida:

$$F(x) = I = \int F'(x) dx$$

$$I = \int (4x^2 + 9x^{-2}) dx = \int 4x^2 dx + \int 9x^{-2} dx = 4 \int x^2 dx + 9 \int x^{-2} dx$$

$$I = \frac{4}{3} x^3 - \frac{9}{x} + c \rightarrow F(x) = \frac{4}{3} x^3 - \frac{9}{x} + c$$

Vamos achar a constante c :

Como o gráfico de $F(x)$ passa pelo ponto $M(3; -2)$, então:

$$F(x) = \frac{4}{3} x^3 - \frac{9}{x} + c \rightarrow$$

$$-2 = \frac{4}{3} (3)^3 - \frac{9}{3} + c \rightarrow -2 = 33 + c \rightarrow c = -35$$

Então a função $F(x)$ procurada será:

$$F(x) = \frac{4}{3} x^3 - \frac{9}{x} - 35, \text{ Línea E}$$

69º) (Exame 2015) Simplificar a expressão:

$$36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}$$

Resp: A) 0 B) 1 C) 25 D) -1 E) 49 F) 4 G) 24 H) outro

Resolução:

$$\begin{aligned} 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36} &\rightarrow (6^2)^{\log_6 5} + 10 \cdot 10^{-\log 2} - 3^{\log_{(3^2)}(36)} \rightarrow \\ 6^{2\log_6 5} + 10 \cdot 10^{\log(2^{-1})} - 3^{\frac{1}{2}\log_3 36} &\rightarrow 6^{\log_6(5^2)} + 10 \cdot 10^{\log(\frac{1}{2})} - 3^{\log_3\left(36^{\frac{1}{2}}\right)} \rightarrow \\ 6^{\log_6 25} + 10 \cdot 10^{\log(\frac{1}{2})} - 3^{\log_3(\sqrt{36})} &\rightarrow 6^{\log_6 25} + 10 \cdot 10^{\log(\frac{1}{2})} - 3^{\log_3(6)} (*) \end{aligned}$$

Nota que: $6^{\log_6 25} = 25$; $10^{\log(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$; $3^{\log_3(6)} = 6$, substituindo em (*):

$$25 + 10\left(\frac{1}{2}\right) - 6 \rightarrow 25 + 5 - 6 \rightarrow 25 - 10 = 24, \text{ Línea G)}$$

70º) (Exame 2015) Resolva a inequação:

$$5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$$

Resp: A) (0; 10) B) [-1; 0[C)]-1; 1] D) [2,5 ; 7,5] E) (0; 1)

F) (-1,5 ; 2) G) $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$

Resolução:

$$5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}} \rightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 + 5 < 5 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}, \text{ Fazendo: } 5^{\sqrt{x}} = t, \text{ temos:}$$

$$\text{Condição de existência: } x \geq 0 \rightarrow S_1 = [0; +\infty[$$

$$t^2 + 5 < 5t + t \rightarrow t^2 + 5 < 6t \rightarrow t^2 - 6t + 5 < 0 \quad (\text{inequação do 2º grau})$$

$$(a = 1; b = -6; c = 5)$$

Aplicando a fórmula resolvente, temos:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = \frac{6+4}{2} \rightarrow t_1 = 5 \quad ; \quad t_2 = \frac{6-4}{2} \rightarrow t_2 = 1$$

t	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$t^2 - 6t + 5 < 0$	+	O	O	+

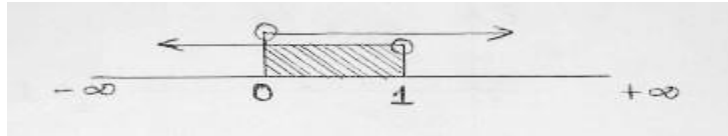
$$t \in [1; 5] \text{ ou } 1 < t < 5 \text{ ou ainda } t > 1 \text{ e } t < 5$$

Voltando na suposição:

$$\left\{ \begin{array}{l} t > 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} > 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} > 5^0 \rightarrow \sqrt{x} > 0 \rightarrow (\sqrt{x})^2 > 0^2 \rightarrow x > 0 \rightarrow x \in]0; \infty[\\ t < 5 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} < 5^1 \rightarrow \sqrt{x} < 1 \rightarrow (\sqrt{x})^2 < (1)^2 \rightarrow x < 1 \rightarrow x \in]-\infty; 1[\end{array} \right\}$$

A solução do sistema de inequação é: $S_2 = x \in]0; \infty[\cap x \in]-\infty; 1[=]0; 1[$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cap S_2$



$S = (0; 1)$, Línea E)

71º) (Exame 2015) A equação $x^2 - 2x + c = 0$ tem raízes x_1 e x_2 que gozam à condição $7x_2 - 4x_1 = 47$. Determine o valor de c .

Resp: A) 20 B) -15 C) 0 D) 1 E) 10 F) -1 G) -5 H) outro

Resolução:

$$7x_2 - 4x_1 = 47 \quad (*)$$

Pela fórmula de composição de uma equação quadrática:

$$x^2 - sx + p = 0 \text{ onde } s = x_1 + x_2 \text{ e } p = x_1 \times x_2, \text{ na equação dada: } x^2 - 2x + c = 0$$

$$s = 2 \text{ e } p = c$$

$$s = x_1 + x_2 = 2 \rightarrow x_1 + x_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2 - x_2 \quad (**)$$

$$p = x_1 \times x_2 \rightarrow x_1 \times x_2 = c \quad (***)$$

Substituindo a equação (**) em (*) temos:

$$7x_2 - 4x_1 = 47 \rightarrow 7x_2 - 4(2 - x_2) = 47 \rightarrow 7x_2 - 8 + 4x_2 = 47 \rightarrow$$

$$11x_2 = 47 + 8 \rightarrow 11x_2 = 55 \rightarrow x_2 = \frac{55}{11} \rightarrow x_2 = 5$$

Substituindo $x_2 = 5$ na equação (**) para encontrar x_1 temos:

$$x_1 = 2 - x_2 \rightarrow x_1 = 2 - 5 \rightarrow x_1 = -3$$

Pela equação (***) sabe-se que: $x_1 \times x_2 = c$

$$(-3) \times (5) = c \rightarrow c = -15, \text{ Línea B)}$$

72º) (Exame 2015) para qual valor de x a função: $y = \sqrt[4]{10+x} - \sqrt{2-x}$ seja positiva:

Resp: A) $(-1; 1)$ B) $[0; 2]$ C) $[-5; 0[$ D) $(-2; 3)$ E) $]-1; 2]$ F) -5 G) 4 H) outro

Resolução:

Condição de existência:

$$10 + x \geq 0 \rightarrow x \geq -10 \rightarrow x \in [-10; +\infty[$$

$$2 - x \geq 0 \text{ (multiplicando pela constante -1)};$$

$$x - 2 \leq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow x \in]-\infty; 2]$$

A solução verdadeira da condição de existência é:

$$S_1 = x \in [-10; +\infty[\cap x \in]-\infty; 2] \rightarrow S_1 = [-10; 2]$$

O valor de x na função será positivo se:

$$\sqrt[4]{10+x} > \sqrt{2-x} \text{ (inequação irracional)}$$

Elevando ambos os membros da desigualdade a quarta: $(\quad)^4$, temos:

$$(\sqrt[4]{10+x})^4 > (\sqrt{2-x})^2 \rightarrow 10+x > (2-x)^2 \rightarrow 10+x > 4-4x+x^2 \rightarrow$$

$$10+x > 4-4x+x^2 \rightarrow x^2-5x-6 < 0, \text{ pelo método de vieth, temos:}$$

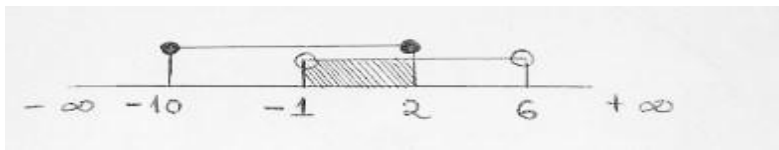
$$x^2-5x-6 = (x-6)(x+1) < 0 \rightarrow (x_1 = 6 \text{ e } x_2 = -1)$$

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$
$x^2 - 5x - 6 < 0$ ($a > 0$)		+	-	+

A solução da inequação do 2º grau é: $s_2 =]-1; 6[$

O valor de x na função para que seja positiva, é encontrado, fazendo:

$$S = S_1 \cap S_2$$



$$S =]-1; 2], \text{ Línea E)}$$

73º) (Exame 2015) Calcule a área limitada pelas linhas $y = 2x - x^2$; $y = \frac{3}{4}$

Resp: A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1 F) $\frac{2}{3}$ G) $\frac{7}{6}$ G) outro

Resolução:

1º) Achar a intersecção entre as linhas fazendo: $y = y$

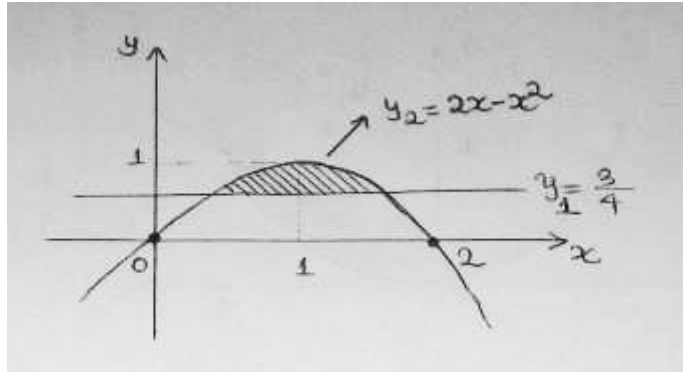
$$2x - x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow 8x - 4x^2 - 3 = 0, \text{ Multiplicando pela constante (-1), temos.}$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow (2x - 1)(2x - 3) = 0 \rightarrow \left(x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{3}{2}\right)$$

2º) Construir o gráfico:

$$y = 2x - x^2, \text{ox: } y = 0, x = 0 \text{ e } x = \frac{1}{2}; \text{oy: } x = 0 \text{ e } y = 0$$

$$y = \frac{3}{4} \text{ (Recta horizontal)}$$



3º) Calcular a área:

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[2x - x^2 - \left(\frac{3}{4}\right) \right] dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (8x - 4x^2 - 3) dx$$

$$A = \frac{1}{4} \left[8 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x dx - 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 dx - 3 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx \right], \text{ Integrando, temos: } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$A = \frac{1}{4} \left[8 \cdot \frac{1}{2} (x^2)_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \frac{1}{3} (x^3)_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - 3 (x)_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$A = \frac{1}{4} \left[4 \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} - \frac{4}{3} \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\} - 3 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[8 - \frac{13}{3} - 3 \right]$$

$$A = \frac{2}{3}, \text{ Línea F)}$$

Exame de Acesso 2014

74º) (Exame 2014) Resolva a equação:

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\text{Resp: A) } x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 2 + \sqrt{3}, x_4 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{B) } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = 2 + \sqrt{3}, x_4 = 2 - \sqrt{3}$$

$$C) x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 3 + \sqrt{2}, x_4 = 3 - \sqrt{2}$$

$$D) x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 2 + \sqrt{3}, x_4 = 2 - \sqrt{3}$$

$$E) x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = 3 + 2, x_4 = 3 - \sqrt{2}$$

$$F) x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 3 + \sqrt{2}, x_4 = 3 - \sqrt{2}$$

$$G) x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}, x_3 = 3 + \sqrt{2}, x_4 = 3 - \sqrt{2}$$

Res.: $p(x) = 4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1$ (Teorema do resto)

$$p(1/2) = 4(1/2)^4 - 16(1/2)^3 + 3(1/2)^2 + 4(1/2) - 1$$

$p(1/2) = 0$, isto quer dizer $x_1 = 1/2$ é uma das raízes do polinómio

$x - 1/2 = 0 \rightarrow D(x) = x - 1/2$ (Método dos coeficientes indeterminados)

$$p(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$gr(Q(x)) = gr(P(x)) - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = (x - 1/2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = ax^4 + x^3 \left(b - \frac{a}{2}\right) + x^2 \left(c - \frac{b}{2}\right) + x \left(d - \frac{c}{2}\right) - \frac{d}{2}$$

$$a = 4, \quad b - \frac{a}{2} = -16 \rightarrow b = -14, \quad c - \frac{b}{2} = 3 \rightarrow c = -4,$$

$$d - \frac{c}{2} = 4 \rightarrow d = 2$$

$$gr(R(x)) = gr(D(x)) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Substituindo os coeficientes encontrados no Q(x) temos:

$$(x - 1/2)(4x^3 - 14x^2 - 4x + 2) = 0, \quad x_1 = 1/2 \text{ e } 4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$p(x)_1 = 4x^3 - 14x^2 - 4x + 2$$

$$p(-1/2)_1 = 4(-1/2)^3 - 14(-1/2)^2 - 4(-1/2) + 2$$

$p(-1/2)_1 = 0$, isto quer dizer $x_2 = -1/2$ é uma das raízes do polinómio

$$x + 1/2 = 0 \rightarrow D(x)_1 = x + 1/2$$

$$p(x)_1 = D(x)_1 \cdot Q(x)_1 + R(x)_1$$

$$gr(Q(x)_1) = 3 - 1 = 2, \quad gr(R(x)_1) = 1 - 1 = 0$$

$$4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = (x + 1/2)(a_1x^2 + b_1x + c_1)$$

$$4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = ax^3 + x^2(b_1 + \frac{a_1}{2}) + x(c_1 + \frac{b_1}{2}) + \frac{c_1}{2}$$

$$a_1 = 4, b_1 + \frac{a_1}{2} = -14 \rightarrow b_1 = -16, c_1 + \frac{b_1}{2} = -4 \rightarrow c_1 = 4$$

Substituindo os coeficientes encontrados no $Q(x)_1$, temos:

$$p(x) = (x + \frac{1}{2})(4x^2 - 16x + 4) = 0, x_2 = -1/2 \text{ e } 4x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$4x^2 - 16x + 4 = 0, \Delta = 192, x_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{192}}{8} = \frac{16 \pm 16\sqrt{3}}{8}$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{3} \text{ e } x_4 = 2 - \sqrt{3}$$

$$S: (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$$

75º) (Exame 2014) Resolva a equação:

$$\operatorname{sen} 2x + 2\cot gx = 3$$

$$\text{Resp: A) } x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ B) } x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \text{ C) } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$D) x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \text{ E) } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ F) } x = \frac{\pi}{4} + \pi k \text{ G) } x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

H) outro

Resolução:

$$2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cot gx = 3$$

$$\text{Sabe-se que: } \operatorname{sen} x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}, \cot gx = \frac{1}{tgx}$$

$$2 \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} \times \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} + \frac{2}{tgx} = 3 \rightarrow \frac{2tgx}{1+tg^2x} + \frac{2}{tgx} = 3$$

$$\frac{2tg^2x+2+2tg^2x}{tgx+tg^3x} = 3 \rightarrow \frac{4tg^2x+2}{tgx+tg^3x} = 3 \rightarrow 4tg^2x+2 = 3tgx+3tg^3x$$

$$3tg^3x - 4tg^2x + 3tgx - 2 = 0, \text{fazendo: } tgx = t$$

$$3t^3 - 4t^2 + 3t - 2 = 0$$

Decompondo e factorizando os termos:

$$3t^3 - 3t^2 - t^2 + 2t + t - 2 = 0$$

$$(3t^3 - 3t^2) + (-t^2 + t) + (2t - 2) = 0$$

$$3t^2(t - 1) - t(t - 1) + 2(t - 1) = 0$$

$$(t - 1)(3t^2 - t + 2) = 0, \text{Aplicando o anulamento do produto:}$$

$$(t - 1) = 0 \text{ e } (3t^2 - t + 2) = 0$$

$$(t - 1) = 0 \rightarrow t_1 = 1$$

$$3t^2 - t + 2 = 0 \quad (\Delta < 0, \nexists t)$$

Voltando na suposição:

$$tgx = t \rightarrow tgx = 1 \rightarrow tgx = tg(1), \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Condição de existência:

$$tgx \neq 0 \rightarrow x \neq \pi k$$

A solução $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ Satisfaz a condição de existência, o logo:

$$S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \right\}, \text{ Línea F}$$

76º) (Exame 2014) A recta que passa pelo ponto $P(1; 5; 2)$ e é paralela ao vector $\vec{v} = (4; 3; 7)$, tem como equação paramétrica:

A) $x - 3 = 2t; y - 5 = t \text{ e } z - 1 = 7t$ B) $x - 2 = 2t; y - 3 = t \text{ e } z - 7 = 7t$

C) $x - 1 = 4t; y - 5 = 3t \text{ e } z - 2 = 7t$ D) $x - 8 = 5t; y - 15 = 3t \text{ e } z - 11 = 17t$

E) $x - 7 = 5t; y - 1 = 3t \text{ e } z - 18 = 17t$ F) $x - 4 = 5t; y - 6 = 3t \text{ e } z - 8 = 17t$

G) $x - 8 = 11t; y - 15 = 7t \text{ e } z - 11 = 3t$ H) *outro*

Resolução:

A equação paramétrica de uma recta que passa pelo ponto $P(x_1; y_1; z_1)$ e é paralela ao vector $\vec{v} = (a; b; c)$ tem como equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \text{ em que no ponto } P(1; 5; 2), x_1 = 1; y_1 = 5 \text{ e } z_1 = 2$$

E no vector $\vec{v} = (4; 3; 7), a = 4; b = 3 \text{ e } c = 7$, Substituindo temos:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 5 + 3t \\ z = 2 + 7t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 4t \\ y - 5 = 3t \\ z - 2 = 7t \end{cases};$$

$$x - 1 = 4t; y - 5 = 3t \text{ e } z - 2 = 7t, \text{ Línea C}$$

77º) (Exame 2014) Calcular a área da figura limitada pelas linhas

$$y = x^3; y = 1; x = 2$$

Resp: A) 2,25 B) 2 C) 2,75 D) 2,35 E) 2,5 F) 2,65 G) 3 H) *outro*

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as líneas:

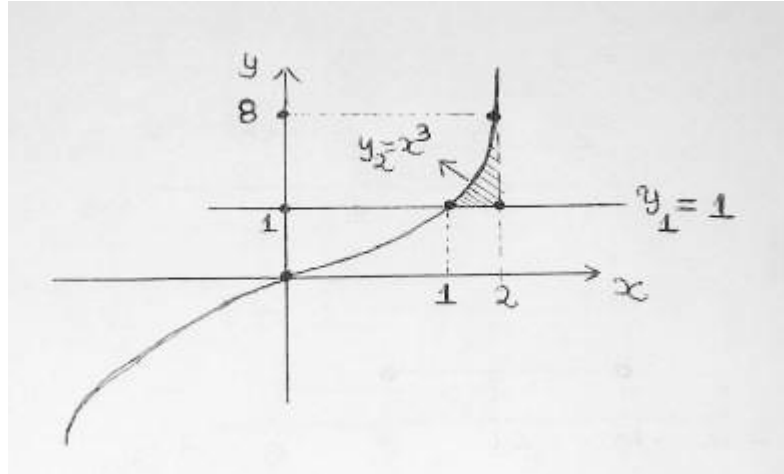
$$y = y \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1, \text{ se } x = 1, y = 1$$

$$\text{se } x = 2 \rightarrow y = (2)^3 \rightarrow y = 8$$

2º) Passo: construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os limites de integração:

$$y = x^3 (\text{parábola cúbica})$$

$$y = 1 (\text{recta horizontal}), x = 2 (\text{recta vertical})$$



3º) Passo calcular a área:

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_1^2 (x^3 - 1) dx = \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 1 dx = \left(\frac{x^4}{4} \right)_1^2 - (x)_1^2$$

$$A = \frac{1}{4} [(2)^4 - (1)^4] - (2 - 1) = \frac{15}{4} - 1 = \frac{11}{4} \rightarrow A = 2,75 \text{ line C}$$

78º) (Exame 2014) Resolva a equação:

$$\sin^3 x (1 + \cot gx) + \cos^3 x (1 + \tan gx) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$$

$$\text{Resp: a) } x = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad \text{b) } x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{c) } x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \quad \text{d) } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\text{e) } x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \quad \text{f) } x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{g) } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{h) outro}$$

$$\text{Resolução: } \sin^3 x (1 + \cot gx) + \cos^3 x (1 + \tan gx) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$$

$$\text{Condição de existência: } \sqrt{\sin 2x} \geq 0 \rightarrow \left(\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$$

$$\sin^3 x \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x} \right) + \cos^3 x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x} \right) = 2\sqrt{\sin x \cos x} \rightarrow$$

$$\sin^3 x \left(\frac{\cos x + \sin x}{\sin x} \right) + \cos^3 x \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \right) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$$

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{\sin x \cos x} \quad / \text{ elevando ambo os membros da igualdade ao quadrado, vem:}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 4 \operatorname{sen} x \cos x \rightarrow (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 0, \text{ nota: } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \rightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ Linha}$$

d)

Exame de Acesso 2013

79º) (Exame 2013) simplifique a expressão:

$$\sqrt{(\sqrt{a} + 2)^2 - 8\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a} - 2)^2 + 8\sqrt{a}}, \quad 0 \leq a \leq 4$$

Resolução: Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$$\sqrt{a + 4\sqrt{a} + 4 - 8\sqrt{a}} + \sqrt{a - 4\sqrt{a} + 4 + 8\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a - 4\sqrt{a} + 4} + \sqrt{a + 4\sqrt{a} + 4}$$

$$\sqrt{(\sqrt{a})^2 - 2(2\sqrt{a}) + 2^2} + \sqrt{(\sqrt{a})^2 + 2(2\sqrt{a}) + 2^2}$$

$$\text{Nota que: } x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

$$\sqrt{(\sqrt{a} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a} + 2)^2}$$

$$\text{Pela condição: } 0 \leq a \leq 4; |\sqrt{a} - 2| = (2 - \sqrt{a})$$

$$\sqrt{(2 - \sqrt{a})^2} + \sqrt{(\sqrt{a} + 2)^2}$$

$$2 - \sqrt{a} + \sqrt{a} + 2 = 4$$

80º) (Exame 2013) Resolva a equação: $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$

$$\text{Resp: A) } x_1 = 9 \quad \text{B) } x_2 = \frac{1}{9} \quad \text{C) } x_1 = 9; x_2 = \frac{1}{9} \quad \text{D) } x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = 9$$

$$\text{E) } x_1 = 3; x_2 = \frac{1}{9} \quad \text{F) } x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{G) } x_1 = 0 \quad \text{H) } \textit{outro}$$

Resolução:

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162 \rightarrow 3^{(\log_3 x)^2} + x^{\log_3 x} = 162$$

$$\text{Fazendo: } \log_3 x = t \rightarrow x = 3^t$$

$$\text{Condição de existência: } (x > 0 \text{ e } 0 < x \neq 1)$$

$$3^{t^2} + (3^t)^t = 162 \rightarrow 3^{t^2} + 3^{t^2} = 162 \rightarrow 2 \cdot 3^{t^2} = 162 \rightarrow 3^{t^2} = \frac{162}{2} \rightarrow 3^{t^2} = 81$$

$$3^{t^2} = 3^4 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = \pm\sqrt{4} \rightarrow t = \pm 2 \rightarrow t_1 = 2 \text{ e } t_2 = -2$$

Voltando na suposição:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_3 x = 2 \rightarrow x_1 = 3^2 \rightarrow x_1 = 9 \\ \log_3 x = -2 \rightarrow x_2 = 3^{-2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{3^2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{9} \end{array} \right\}$$

A solução $x_1 = 9$ e $x_2 = \frac{1}{9}$ satisfazem a condição logo:

$$S = \left\{ x_1 = 9; x_2 = \frac{1}{9} \right\}, \text{ Línea C)}$$

81º) (Exame 2013) Simplifique a expressão:

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5} \quad \text{se } -4 \leq a \leq -3$$

Resp: A) 1 B) $2\sqrt{a+4}$ C) $\sqrt{a+4}$ D) 4 E) $2 + \sqrt{a+4}$ F) $1 - \sqrt{a+4}$ G) 2 H) outro

Resolução:

Fazendo: $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5}$, elevando ao quadrado, temos:

$$A^2 = \left(\sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5} \right)^2$$

$$A^2 = a + 2\sqrt{a+4} + 5 + 2\sqrt{(a + 2\sqrt{a+4} + 5)(a - 2\sqrt{a+4} + 5)} + a - 2\sqrt{a+4} + 5$$

$$A^2 = 2a + 10 +$$

$$2\sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a+4} + 5a + 2a\sqrt{a+4} - 4(a+4) + 10\sqrt{a+4} + 5a - 10\sqrt{a+4} + 25}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 10a - 4(a+4) + 25}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 10a - 4a + 25 - 16} = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 6a + 9}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 6a + 9}$$

Nota: $a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$ (quadrado da soma)

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{(a + 3)^2} \quad (*)$$

Pela condição: $-4 \leq a \leq -3$; $\sqrt{(a + 3)^2} = -(a + 3)$, substituindo em (*), temos:

$$A^2 = 2a + 10 - 2(a + 3) = 2a + 10 - 2a - 6 = 4 \rightarrow A^2 = 4 \rightarrow A = \sqrt{4} \rightarrow$$

$A = 2$, Línea G

82º) (Exame 2013) Resolva a equação:

$$\sqrt{\sin x} (4 - 5\cos x - 2\sin^2 x) = 0$$

Resp: A) $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$; $x_2 = \pi k$ B) $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ C) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x_2 = \pi k$

D) $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$ E) $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$; $x_2 = 2\pi k$ F) $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ G) $x_1 = \pi k$ H) *outro*

Resolução:

Condição de existência:

$$\text{sen } x \geq 0 \rightarrow 0^\circ + 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k \rightarrow 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$$

$\sqrt{\text{sen } x} (4 - 5\cos x - 2\text{sen}^2 x) = 0$, aplicando a lei do anulamento do produto:

$$\sqrt{\text{sen } x} = 0 \rightarrow (\sqrt{\text{sen } x})^2 = (0)^2 \rightarrow \text{sen } x = 0 \quad (\alpha = 0^\circ)$$

, caso particular de equações do tipo $\text{sen } x$, $x = \alpha + \pi k \rightarrow x_2 = \pi k$

$$(4 - 5\cos x - 2\text{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 4 - 5\cos x - 2(1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow$$

$$4 - 5\cos x - 2 + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Fazendo: $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \text{ (equação do 2º; } a = 2; b = -5; c = 2)$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{5-3}{4} \rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \text{ (satisfaz); } t_2 = \frac{5+3}{4} \rightarrow t_2 = 2 \text{ (não satisfaz)}$$

A única raiz que pertence no intervalo de $[-1; 1]$ é $t_1 = \frac{1}{2}$

Voltando na suposição:

$$\cos x = t_2 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}\right)$$

Formula dos cossenos: $x = \pm \alpha + 2\pi k$

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ ou } -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \cup \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

A solução $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ não satisfaz a condição de existência, logo a solução verdadeira da equação é: $S = \left\{x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; x_2 = \pi k\right\}$, Línea C)

83º) (Exame 2013) Seja π o plano que contém os pontos $P = (1; 0; 0)$, $Q = (0; 2; 0)$ e $R = (0; 0; 3)$, o volume do tetraedro formado pela origem de coordenadas e os pontos P , Q e R é:

Resp: A) $10 u^3$ B) $5 u^3$ C) $1 u^3$ D) $0 u^3$ E) *nenhum ds anteriores*

Resolução: $P = (1; 0; 0)$, $Q = (0; 2; 0)$ e $R = (0; 0; 3)$

Vamos considerar a origem de coordenadas um ponto $A(0; 0; 0)$

$$\overline{AP} = (1; 0; 0), \overline{AQ} = (0; 2; 0), \overline{AR} = (0; 0; 3)$$

O volume do tetraedro será um sexto do módulo do producto misto de \overline{AP} , \overline{AQ} e \overline{AR} , ou seja:

$$V = \frac{1}{6} |\Delta|, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, V = \frac{1}{6} |6| \rightarrow V = 1u^3, \text{Línea C)}$$

Exame de Acesso 2012

84º) (Exame 2012) Simplifique a expressão:

$$\left(a^{1/3} + b + \frac{4b^2 - a^{2/3}}{\sqrt[3]{a-b}}\right) : \left(\frac{a^{1/3}}{\sqrt[3]{a^2-b^2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a-b}}\right)$$

Resp: A) $\sqrt[3]{a^2} - b^2$ B) $b(\sqrt[3]{a^2} - b^2)$ C) $b(b + \sqrt[3]{a})$ D) $\sqrt[3]{a^2} + b^2$

E) $\sqrt[3]{a}(b - \sqrt[3]{a})$ F) $\frac{a^{1/3}}{\sqrt[3]{a+b}}$ G) $\frac{\sqrt[3]{a-b}}{b}$ H) *outro*

Resolução:

$$\left(\sqrt[3]{a} + b + \frac{4b^2 - \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a-b}}\right) : \left[\frac{\sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})} - \frac{2}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a-b}}\right]$$

$$\left[\frac{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b}) + 4b^2 - \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a-b}}\right] : \left[\frac{\sqrt[3]{a} - 2(\sqrt[3]{a-b}) + \sqrt[3]{a+b}}{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})}\right] =$$

$$\left[\frac{\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}^2 + 4b^2 - \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a-b}}\right] : \left[\frac{\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{a+b}}{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})}\right] = \left[\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a-b}}\right] : \left[\frac{3b}{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})}\right] =$$

$$\left[\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a-b}}\right] \times \left[\frac{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})}{3b}\right] = b(\sqrt[3]{a} + b)$$

85º) (Exame 2012/2010) Ache a solução da equação:

$$x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$$

Resp: A) $x_1 = \frac{1}{2} \cup x_2 \in [3; +\infty[$ B) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}; x_3 = 3$

C) $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 3$ D) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \cup x_2 \in [3; 4]$

E) $x_1 = -\frac{1}{2} \cup x_2 \in [-3; 3]$ F) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \cup x_2 \in [3; +\infty]$

G) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$ H) *outro*

$$\text{Resolução: } 2x^2 \cdot 2^x + 2^{|x-3|+2} = 4x^2 2^{|x-3|+2} + \frac{2^x}{2}$$

$$2x^2 \cdot 2^x - \frac{2^x}{2} = 4x^2 2^{|x-3|+2} - 2^{|x-3|+2} \rightarrow 2^x \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right) = 2^{|x-3|+2}(4x^2 - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2^x}{2}(4x^2 - 1) = 2^{|x-3|+2}(4x^2 - 1) \rightarrow 2^{x-1}(4x^2 - 1) - 2^{|x-3|+2}(4x^2 - 1)$$

$$(4x^2 - 1)(2^{x-1} - 2^{|x-3|+2}) = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$2^{x-1} - 2^{|x-3|+2} = 0 \rightarrow 2^{x-1} = 2^{|x-3|+2} \rightarrow x-1 = |x-3| + 2$$

$$|x-3| = x-3$$

condição de existência da expressão modular:

$$|x-3| = (x-3 \text{ se } x-3 \geq 0, x-3 \text{ se } x \geq 3) \text{ e } (-x+3 \text{ se } x-3 < 0, -x+3 \text{ se } x < 3)$$

1º) $x-3 = x-3$, é válida a desigualdade $x \geq 3$, ($x \geq 3$ é uma das soluções)

2º) $x-3 = -x+3 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x_3 = 3$ (pela CE $3 < 3$ não satisfaz)

$$S: \left\{ \pm \frac{1}{2}; \cup x \in [3; +\infty[\right\}, \text{ Línea F}$$

86º) (Exame 2012/ 2011) Determine a equação da circunferência com o centro sobre ox e que passa pelos pontos $A(3; 2)$ e $B(-1; 6)$

$$\text{Resp: A) } (x+1)^2 + (y-6)^2 = 32 \quad \text{B) } x^2 + (y+2)^2 = 40$$

$$\text{C) } (x+3)^2 + (y+2)^2 = 52 \quad \text{D) } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 36$$

$$\text{E) } (x+3)^2 + y^2 = 40 \quad \text{F) } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

$$\text{G) } x^2 + (y-6)^2 = 25 \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução: Equação geral da circunferência:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \rightarrow \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

$$\text{Centro : } C = \left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$$

Como o centro está sobre o eixo ox , uma das suas coordenadas do centro é nula, ou seja: $E = 0$

$$C = \left(-\frac{D}{2}; 0\right)$$

$$A(3; 2) \rightarrow 3^2 + 2^2 + 3D + 0 \times 2 = 0 \rightarrow 13 + 3D + F = 0 \quad (I)$$

$$B(-1; 6) \rightarrow (-1)^2 + 6^2 - D + 0 \times 6 = 0 \rightarrow 37 - D + F = 0 \quad (II)$$

Formando um sistema de duas equações a duas incógnitas com as equações (I) e (II), vem:

$$\begin{cases} 13 + 3D + F = 0 \\ 37 - D + F = 0 \end{cases}, \text{ multiplicando a 1ª por } (-1)$$

$$\begin{cases} -13 - 3D - F = 0 \\ 37 - D + F = 0 \end{cases}, \text{ Resolvendo pelo método de redução temos:}$$

$$24 - 4D = 0 \rightarrow D = \frac{24}{4} \rightarrow D = 6$$

$$\text{II)} \quad 37 - 6 + F = 0 \rightarrow F = -31$$

A equação da circunferência será:

$$\left(x + \frac{6}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{0}{2}\right)^2 = \frac{(6)^2 + (0)^2 - 4(-31)}{4}$$

$$(x + 3)^2 + y^2 = 40, \text{ Línea E)}$$

87º) (Exame 2012/2010) Determinar a distância do ponto

$$P(1; 2) \text{ à recta } y = -2x - 1$$

Resp: A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) 2,5 F) 3 G) 2 H) outro

Resolução:

$$P(1; 2), x_0 = 1 \text{ e } y_0 = 2$$

A distância de um ponto à uma recta é determinada pela expressão:

$$d_{P,r} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{na recta } y = -2x - 1 \rightarrow 2x + y + 1 = 0 \quad (a = 2; b = 1 \text{ e } c = 1)$$

$$d_{P,r} = \frac{2(1) + 1(2) + 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow d_{P,r} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} \rightarrow d_{P,r} = \sqrt{5}, \text{ Línea C)}$$

88º) (Exame 2012) Resolva a equação:

$$\log_{25} x = 0,25^{\log 2} \cdot 0,4^{\log 2} - 81^{0,5 \log_9 7} + 5^{\log_{25} 49}$$

Resp: A) $x = 25$ B) $x = 2$ C) $x = 5$ D) $x = 7$ E) $x = 9$ F) $x = \frac{1}{5}$ G) $x = 1$ H) outro

Resolução: Condição de existência: ($x > 0$)

$$\log_{25} x = (0,25 \times 0,4)^{\log 2} - (3^4)^{\frac{1}{2} \log_{(3^2)} 7} + 5^{\log_{(5^2)} (7^2)}$$

$$\log_{25} x = (0,1)^{\log 2} - (3^4)^{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \log_3 7} + 5^{(2)\left(\frac{1}{2}\right) \log_5 7}$$

$$\log_{25} x = (10^{-1})^{\log 2} - (3^4)^{\left(\frac{1}{4}\right) \log_3 7} + 5^{\log_5 7}$$

$$\log_{25} x = 10^{\log(2^{-1})} - 3^{\log_3 7} + 5^{\log_5 7}$$

$$\log_{25} x = 2^{-1} - 7 + 7 \rightarrow \log_{25} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 25^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \sqrt{25} \rightarrow x = 5$$

$$S = \{x = 5\}, \text{ Línea C}$$

89º) (Exame 2012/ 2008) Resolva a equação:

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

Resp: A) $x = \frac{\pi k}{2} \cup x = \frac{2\pi k}{3}$ B) $\frac{\pi k}{3}$ C) $x = \frac{\pi k}{6} \cup x = \frac{2\pi k}{5}$

D) $x = \frac{\pi k}{3} \cup x = \frac{\pi k}{5}$ E) $x = \frac{\pi k}{6}$ F) $x = \frac{3\pi k}{5}$ G) $x = \frac{2\pi k}{5} \cup x = \frac{2\pi k}{3}$

H) *outro*

Resolução: $(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) - \cos x = 0$ (1)

Sabe-se que: $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cos 2x = (2\cos^2 x - 1)$ e $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 4x = (2\cos^2 x - 1)^2 - (2\sin x \cos x)^2$

$\cos 4x = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 4\sin^2 x \cos^2 x$, nota: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos 4x = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 4(1 - \cos^2 x) \cos^2 x$

$\cos 4x = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x$

$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ (2)

Substituindo (2) em (1)

$\cos 4x - \cos x = 0$, nota: $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\cos 4x - \cos x = -2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$

Anulando os productos:

$-2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \rightarrow \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{3x}{2} = \pi k \rightarrow x = \frac{2\pi k}{3}$

$\sin\left(\frac{5x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{5x}{2} = \pi k \rightarrow x = \frac{2\pi k}{5}$

$s = \left(x = \frac{2\pi k}{5} \cup x = \frac{2\pi k}{3}\right)$, Línea G)

Exame de Acesso 2011

90º) (Exame 2011) Compor a equação da circunferência que passa pelos pontos A(2; 0) e B(5; 0) e toca o eixo *oy*.

Resp: A) $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{8})^2 = 9$ B) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{10})^2 = 8$

C) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 = \frac{49}{4}$ D) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{10})^2 = 12$

E) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8$ F) $(x - 3)^2 + (y \pm \sqrt{8})^2 = 11$

G) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = 12$ H) *outro*

Resolução: A equação de uma circunferência é: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

A(2; 0) $\rightarrow (2 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = R^2$,

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$4 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = R^2$ (*)

B(5; 0) $\rightarrow (5 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = R^2$

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$$25 - 10\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = R^2 \quad (**)$$

Igualando as equações (*) e (**), vem:

$$4 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 25 - 10\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \rightarrow 6\alpha = 21 \rightarrow \alpha = \frac{7}{2}$$

Quando toca o eixo oy uma das coordenadas do centro é nula: $(0; \beta)$

$$(0; \beta) \rightarrow (0 - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 = R^2 \rightarrow \alpha^2 = R^2 \rightarrow R^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 = \frac{49}{4}$$

$$4 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = R^2 \quad (*), R^2 = \frac{49}{4} \text{ e } \alpha = \frac{7}{2}$$

$$4 - 4\left(\frac{7}{2}\right) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \beta^2 = \frac{49}{4} \rightarrow \beta^2 = 10 \rightarrow \beta = \pm\sqrt{10}$$

Então, a equação da circunferência será:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 = \frac{49}{4}, \text{ Línea C)}$$

91º) (Exame 2011) Compor a equação da circunferência que passa pelo ponto $A(2; 1)$ toca o eixo de coordenadas.

Resp: A) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ou $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$

B) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ou $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

C) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ ou $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

D) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ ou $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

E) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 8$ F) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$

G) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$ H) *outro*

Resolução: A equação de uma circunferência é:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$A(2; 1) \rightarrow (2 - \alpha)^2 + (1 - \beta)^2 = R^2,$$

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$$4 - 4\alpha + \alpha^2 + 1 - 2\beta + \beta^2 = R^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 2\beta + 5 = R^2 \quad (*)$$

I) Quando toca o eixo de coordenadas:

I.1) Quando toca o eixo OX: $(\alpha; 0)$

$$(\alpha; 0) \rightarrow (\alpha - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = R^2 \rightarrow \beta^2 = R^2 \quad (**)$$

I.2) Quando toca o eixo OY: $(0; \beta)$

$$(0; \beta) \rightarrow (0 - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 = R^2 \rightarrow \alpha^2 = R^2 (***)$$

Igualando as equações (**) e (***), vem:

$$\alpha^2 = \beta^2 = R^2 \rightarrow |\alpha| = |\beta| = |R|$$

Pela equação (*), temos:

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha + 5 = \alpha^2 \rightarrow$$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \rightarrow (\alpha - 5)(\alpha - 1) = 0$$

Pela lei do anulamento do produto:

$$(\alpha - 5) = 0 \rightarrow \alpha_1 = 5, \quad (\alpha - 1) = 0 \rightarrow \alpha_2 = 1$$

$\alpha_1 = 5 \rightarrow \beta_1 = 5$ e $R_1 = 5$, A equação da circunferência será:

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = R_1^2 \rightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$\alpha_2 = 1 \rightarrow \beta_2 = 1$ e $R_2 = 1$, A equação da circunferência será:

$$(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 = R_2^2 \rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

A equação da circunferência pedida será:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ ou } (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25, \text{ Línea B)}$$

92º) (Exame 2011) Compor a equação da esfera que passa pelo ponto

$A(1; -1; 4)$ e toca os planos de coordenadas

Resp: A) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$

B) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 11$

C) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 6$

D) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$

E) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 8$

F) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 9$

G) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

H) *outro*

Resolução: A equação de uma esfera é dada pela fórmula: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$

$$A(1; -1; 4) \rightarrow (1 - \alpha)^2 + (-1 - \beta)^2 + (4 - \gamma)^2 = R^2$$

Desenvolvendo os quadrados da soma, fica:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha + 2\beta - 8\gamma + 18 = R^2 (*)$$

I) Quando toca o plano coordenado oxy : $(\alpha; \beta; 0)$

$$(\alpha; \beta; 0) \rightarrow (\alpha - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 + (0 - \gamma)^2 = R^2 \rightarrow \gamma^2 = R^2$$

I) Quando toca o plano coordenado oyz : $(0; \beta; \gamma)$

$$\text{II)} \quad (0; \beta; \gamma) \rightarrow (0 - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 + (\gamma - \gamma)^2 R^2 \rightarrow \alpha^2 = R^2$$

$$\text{III)} \quad \text{Quando toca o plano coordenado } oxz: (\alpha; 0; \gamma)$$

$$(\alpha; 0; \gamma) \rightarrow (\alpha - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 + (\gamma - \gamma)^2 = R^2 \rightarrow \beta^2 = R^2$$

Igualando as equações obtidas em I) II) e III) , vem:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = R^2 \rightarrow |\alpha| = |\beta| = |\gamma| = R$$

$$\alpha = -\beta = \gamma = R$$

Pela equação (*), temos:

$$\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha - 8\alpha + 18 = \alpha^2 \rightarrow 2\alpha^2 - 12\alpha + 18 = 0$$

Dividindo toda a equação por dois (2) , vem:

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \rightarrow (\alpha - 3)^2 = 0 \rightarrow \alpha = 3$$

$$\text{se } \alpha = 3 \rightarrow \beta = -3, \gamma = 3, R = 3$$

A equação da esfera pedida será:

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9 \text{ , Línea A)}$$

93º) (Exame 2011) Simplifique a expressão trigonométrica:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)$$

$$\text{Resp: A) } -1 \text{ B) } \frac{1}{2} \text{ C) } \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \text{ D) } 1 \text{ E) } -\operatorname{sen}\alpha \text{ F) } \text{outro}$$

Resolução:

Sabe-se que:

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)}, \text{ Então:}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \pi - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \pi + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \pi - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \pi + \alpha\right)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = -1 \text{ , Línea A)}$$

94º) (Exame 2011) Resolver a equação:

$$i z^2 + 5 z - 6 i = 0$$

$$\text{Resp: A) } z_1 = 3i; z_2 = -2i \text{ B) } z_1 = 3i; z_2 = 2i \text{ C) } z_1 = -3i; z_2 = 2i$$

$$\text{D) } z_1 = -3i; z_2 = -2i \text{ E) } z_1 = 3; z_2 = 2i \text{ F) } z_1 = 3i; z_2 = 2$$

$$\text{G) } z_1 = 3; z_2 = -2i \text{ H) } \text{outro}$$

Resolução:

$$i z^2 + 5 z - 6 i = 0 \text{ (Equação complexa do 2º grau)}$$

Aplicando a fórmula resolvente: $a = i$; $b = 5$ e $c = -6i$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (5)^2 - 4(i)(-6i) \rightarrow \Delta = 25 + 24i^2$$

No conjunto dos números completos $i^2 = -1$

$$\Delta = 25 + 24(-1) \rightarrow \Delta = 25 - 24 \rightarrow \Delta = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow z = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2i} = \frac{-5 \pm 1}{2i}$$

$$z_2 = \frac{-5+1}{2i} = -\frac{4}{2i} = -\frac{2}{i} = \frac{(-1)2}{i} \rightarrow z_2 = \frac{2i^2}{i} \rightarrow z_2 = 2i$$

$$z_1 = \frac{-5-1}{2i} = -\frac{6}{2i} = -\frac{3}{i} = \frac{(-1)3}{i} \rightarrow z_1 = \frac{3i^2}{i} \rightarrow z_1 = 3i$$

A solução da equação é: $S = \{z_1 = 3i; z_2 = 2i\}$, Línea B)

95º) (Exame 2011) Calcular: $\int_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$

Resp: A) 16 B) 10 C) 9 D) 15 E) 8 F) 12 G) 5 H) outro

Resolução: Racionalizando o denominar da integral:

$$I = \int_{-1}^{15} \frac{[\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}]dx}{[(\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1})]} = \int_{-1}^{15} \frac{[\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}]dx}{[(\sqrt{x+10})^2 - (\sqrt{x+1})^2]}$$

$$I = \int_{-1}^{15} \frac{(\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1})}{x+10-x-1} = \int_{-1}^{15} \frac{(\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1})}{9}$$

$$I = \frac{1}{9} \left[\int_{-1}^{15} \sqrt{x+10} dx + \int_{-1}^{15} \sqrt{x+1} dx \right]$$

$$I = \frac{1}{9} \left[\int_{-1}^{15} (x+10)^{\frac{1}{2}} dx + \int_{-1}^{15} (x+1)^{\frac{1}{2}} dx \right], \text{ Integrando:}$$

$$I = \frac{1}{9} \left[\left(\frac{(x+10)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{15} + \left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{15} \right] = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} \left((x+10)^{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{15} + \frac{2}{3} \left((x+1)^{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{15} \right]$$

$$I = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} \left(\sqrt{(x+10)^3} \right)_{-1}^{15} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{(x+1)^3} \right)_{-1}^{15} \right]$$

$$I = \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} \left[\left(\sqrt{(15+10)^3} - \sqrt{(-1+10)^3} \right) + \left(\sqrt{(15+1)^3} - \sqrt{(-1+1)^3} \right) \right]$$

$$I = \frac{2}{27} (125 - 27 + 64 - 0) = \frac{2}{27} (162)$$

I = 12, Línea F)

96º) (Exame 2011/ 2010) Resolva a inequação:

$$2\cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5$$

$$\text{Resp: A) } \left] 2\pi n - \frac{\pi}{4}; 2\pi n + \frac{\pi}{4} \right[$$

$$\text{B) } \left] 2\pi n - \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right[$$

$$C) \left] \pi n - \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + \pi n \right[$$

$$D) \left] -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right[$$

$$E) \left] \pi n - \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4} + \pi n \right[\cup \left] \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right[$$

$$F) \left] \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \right[\quad G) \left] \pi n + \frac{\pi}{6}; \pi n + \frac{\pi}{2} \right[\quad H) \text{ outro}$$

$$\text{Resolução: } 2\cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5$$

$$2\cos x (\cos x - \sqrt{8} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}) < 5 \rightarrow 2\cos x \left(\frac{\cos^2 x - \sqrt{8} \operatorname{sen} x}{\cos x} \right) < 5$$

$$2(\cos^2 x - \sqrt{8} \operatorname{sen} x) < 5 \quad \text{CE: } \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\text{Nota que: } \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x - \sqrt{8} \operatorname{sen} x) < 5 \rightarrow 2 - 2\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{8} \operatorname{sen} x - 3 < 0$$

Multiplicando todos os termos da inequação por (-1), vem:

$$2\operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{8} \operatorname{sen} x + 3 > 0 \quad , \text{ fazendo } \operatorname{sen} x = t, t \in [-1; 1]$$

$$2t^2 + 2\sqrt{8} t + 3 > 0 \quad (\text{inequação do } 2^\circ \text{ grau, } a = 2; b = 2\sqrt{8}; c = 3)$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2\sqrt{8}) \pm \sqrt{(2\sqrt{8})^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{-2\sqrt{8} \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{-4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$t_1 = \frac{-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{4} \rightarrow t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad t_2 = \frac{-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{4} \rightarrow t_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

t	$-\infty$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$2t^2 + 2\sqrt{8}t + 3 > 0$		+	O	-

$$t \in \left] -\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty \right[\quad \text{ou } t < -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ e } t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ não pertence a } [-1; 1] \text{ e } -\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1] \right]$$

Voltando na suposição:

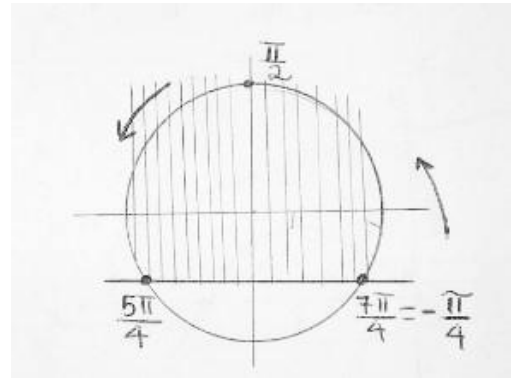
$$\operatorname{sen} x = t \rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ de acordo o ciclo}$$

Trigonométrico, a solução da inequação é:

$$S = \left] -\frac{\pi}{4} + 2\pi n ; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi n ; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right[, \text{ Línea D)}$$



97º) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$$\sqrt{3} (\cos x)^{-2} < 4 \operatorname{tg} x$$

Resp: A) $\left] \frac{\pi}{6} + \pi n ; \frac{\pi}{3} + \pi n \right[$ B) $\left] \frac{\pi}{6} + 2\pi n ; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right[$ C) $\left] \frac{\pi}{6} + 2\pi n ; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[$

D) $\left] \frac{\pi}{3} + \pi n ; \frac{\pi}{2} + \pi n \right[$ E) $\left] \frac{\pi}{6} + \pi n ; \frac{\pi}{2} + \pi n \right[$ F) $\left] \frac{\pi}{3} + 2\pi n ; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[$

G) $\left] \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} ; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \right[$ H) *outro*

Resolução:

$$\sqrt{3} \frac{1}{\cos^2 x} < 4 \operatorname{tg} x$$

Nota que: $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, Assim teremos:

$$\sqrt{3} (\operatorname{tg}^2 x + 1) < 4 \operatorname{tg} x \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} < 4 \operatorname{tg} x, \text{ Agrupando;}$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0 ; \text{ supondo que } \operatorname{tg} x = t$$

$$\sqrt{3} t^2 - 4t + \sqrt{3} < 0 ; \text{ usando a fórmula resolvente, temos:}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(\sqrt{3})(\sqrt{3})}}{2(\sqrt{3})} = \frac{4 \pm 2}{2\sqrt{3}}$$

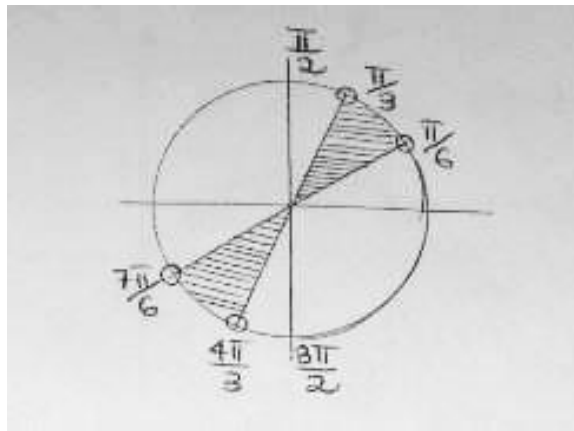
$$t_1 = \sqrt{3} ; t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

t	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\sqrt{3} t^2 - 4t + \sqrt{3} < 0$	+	0	- 0	+

$$t \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3} ; \sqrt{3} \right[\text{ ou } t > \sqrt{3} \text{ e } t < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Voltando na suposição :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x > \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \operatorname{tg} x < \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x < \operatorname{tg}(\sqrt{3}) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\}$$



De acordo o trigonométrico a solução da inequação é a área de intersecção sombreada no 1º quadrante ou seja:

$$S = x \in \left] \frac{\pi}{6} + \pi k ; \frac{\pi}{3} + \pi k \right[, \text{Linha A)}$$

98º) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$$2 + \operatorname{tg} 2x + \cotg 2x < 0$$

$$\text{Resp: A) } \left] \frac{\pi}{2} (4n - 1); 2\pi n \right[\quad \text{B) } \left] \frac{\pi}{4} (2n - 1); \frac{\pi n}{2} \right[\quad \text{C) } \left] \frac{\pi}{8} (4n - 1); \frac{\pi n}{2} \right[$$

$$\text{D) } \left] \frac{\pi}{4} (2n - 1); \frac{\pi}{6} (3n - 1) \right[\cup \left] \frac{\pi}{6} (3n - 1); \frac{\pi n}{2} \right[$$

$$\text{E) } \left] \frac{\pi}{3} (3n - 1); \frac{\pi}{4} (4n - 1) \right[\cup \left] \frac{\pi}{4} (2n - 1); \pi n \right[$$

$$\text{F) } \left] \frac{\pi}{3} (3n - 1); \pi n \right[\quad \text{G) } \left] \frac{\pi}{4} (2n - 1); \frac{\pi}{8} (4n - 1) \right[\cup \left] \frac{\pi}{8} (4n - 1); \frac{\pi n}{2} \right[$$

H) outro

Resolução:

$$2 + \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} < 0 \rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 2x + 2 \operatorname{tg} 2x + 1}{\operatorname{tg} 2x} < 0, \text{fazendo } \operatorname{tg} 2x = t$$

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{t} < 0 \rightarrow \frac{(t+1)^2}{t} < 0 \text{ (Inequação racional fraccionária)}$$

$$t + 1 = 0 \rightarrow t = -1 \text{ e } t \neq 0$$

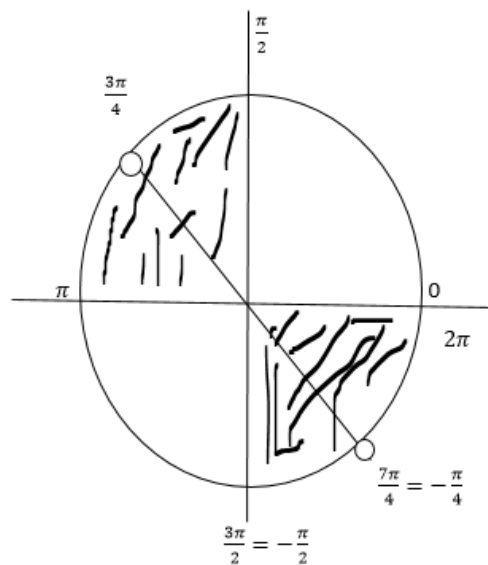
t	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$t + 1$	+	O	-	+
t	+	-	+	+

$$t \in [-1; 0] \text{ ou } t > -1 \text{ e } t < 0$$

Voltando na suposição:

$$\begin{cases} \text{tgx} > -1 \rightarrow \text{tgx} > \text{tg}(-1) \rightarrow \text{tgx} > -\text{tg}(1) \rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} \\ \text{tgx} < 0 \rightarrow \text{tgx} < \text{tg}(0) \rightarrow \alpha = 0^\circ \end{cases}$$

Obs.: $\text{tgx} < 0$ (os valores da tangente que são menores que zero encontram-se no IIº quadrante e no IVº quando. Isto quer dizer que a intersecção da desigualdade $\text{tgx} < 0$ e $\text{tgx} > -1$, pode ocorrer somente no IIº e no IVº Q



Conforme o ciclo trigonométrico, teremos:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \pi k < 2x < -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ -\frac{\pi}{4} + \pi k < 2x < 0 + \pi k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{4}(2k-1) < x < \frac{\pi}{8}(4k-1) \\ \frac{\pi}{8}(4k-1) < x < \frac{\pi k}{2} \end{array} \right\}, \text{ A solução da inequação será:}$$

$$S = \left] \frac{\pi}{4}(2k-1); \frac{\pi}{8}(4k-1) \right[\cup \left] \frac{\pi}{8}(4k-1); \frac{\pi k}{2} \right[\text{ se } k = n$$

$$S = \left] \frac{\pi}{4}(2n-1); \frac{\pi}{8}(4n-1) \right[\cup \left] \frac{\pi}{8}(4n-1); \frac{\pi n}{2} \right[, \text{ Línea G)}$$

99º) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$$\text{sen}4x + \cos4x \cotg2x > 1$$

$$\text{Resp: A) } \left] 2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n \right[\text{ B) } \left] \pi n; \pi n + \frac{\pi}{4} \right[\text{ C) } \left] 2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n \right[$$

$$D) \left] \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8}; \frac{\pi n}{2} \right[\quad E) \left] \pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n \right[\quad F) \left] \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + n\pi \right[\\ G) \left] \pi n; \pi n + \frac{\pi}{2} \right[\quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

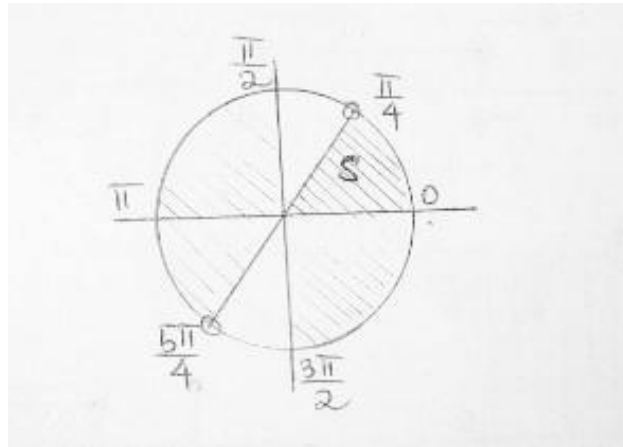
$$\sin 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1 \rightarrow \frac{\sin 4x \sin 2x + \cos 4x \cos 2x}{\sin 2x} > 1 \quad (*)$$

$$\text{Nota que: } \cos(4x - 2x) = \cos 2x = \sin 4x \sin 2x + \cos 4x \cos 2x$$

Voltando em (*), temos:

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1 \rightarrow \cotg 2x > 1 \rightarrow \frac{1}{\tg 2x} > 1, \text{ Multiplicar por } (\tg 2x)$$

$$\tg 2x < 1 \quad (\tg x < \tg(1) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4})$$



Conforme o ciclo trigonométrico:

$$0 + k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + k\pi$$

A solução da inequação é:

$$S = \left] \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + k\pi \right[\text{ se } n = k, S = \left] \frac{n\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + n\pi \right[, \text{ Línea F)}$$

100º) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$$(\cos x - \sin x)\sqrt{3x - x^2} \geq 0$$

$$\text{Resp: A) } \left[0; \frac{\pi}{4} \right] \quad B) \left[0; \frac{\pi}{4} \right[\cup \{3\} \quad C) \left[0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \{3\} \quad D) \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$E) \left[0; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right[\quad F) \left[0; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; 3 \right] \quad G) [0; 3] \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x - \sin x \geq 0 \\ 3x - x^2 \geq 0 \end{array} \right\}; \text{ sabe-se que } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0 ; (*)$$

sabe-se que: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Voltando em (*):

$$-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \text{ (Multiplicar todos os termos por -1) , vem:}$$

$$2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$

Conforme o ciclo

Trigonométrico, temos:

$$-\pi + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 0 + 2k\pi$$

$$-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$S_1 = x \in -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

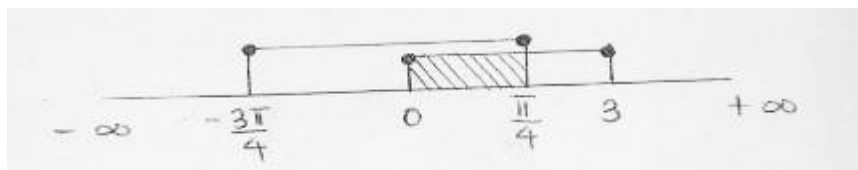
$3x - x^2 \geq 0$, multiplicar por -1 e factorizar x ,
temos:

$$x^2 - 3x \leq 0 \rightarrow x(x - 3x) \leq 0 \text{ (} x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 3 \text{)}$$

t	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$x^2 - 3x \leq 0$	+	0	-	+

$$S_2 = x \in [0; 3]$$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cap S_2$



$$S = \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \{3\} ; \text{Línea C}$$

101º) (Exame 2011) Resolver a equação: $i z^2 - z + 2i = 0$

Resp: A) $z_1 = 2 ; z_2 = -i$ B) $z_1 = 2i ; z_2 = -i$ C) $z_1 = 2i ; z_2 = i$

D) $z_1 = -2i$; $z_2 = -i$ E) $z_1 = 2$; $z_2 = i$ F) $z_1 = 2i$; $z_2 = 1$ G) $z_1 = -2i$; $z_2 = i$ H) *outro*

Resolução:

$i z^2 - z + 2i = 0$ (equação complexa do 2º grau; $a = i$; $b = -1$; $c = 2i$)

Aplicando a fórmula resolvente, temos:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(i)(2i)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8i^2}}{2i}, \text{ sabe-se que: } i^2 = -1$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8(-1)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2i} = \frac{1 \pm 3}{2i}$$

$$z_1 = \frac{1+3}{2i} = \frac{4}{2i} = \frac{2}{i} = \left(\frac{2}{i}\right) \left(\frac{i}{i}\right) = \frac{2i}{i^2} = \frac{2i}{(-1)} \rightarrow z_1 = -2i$$

$$z_2 = \frac{1-3}{2i} = -\frac{2}{2i} = (-1) \frac{1}{i} = (-1) \left(\frac{1}{i}\right) \left(\frac{i}{i}\right) = (-1) \frac{i}{i^2} = (-1) \frac{i}{(-1)} \rightarrow z_2 = i$$

A solução da equação é: $S = \{z_1 = -2i \text{ e } z_2 = i\}$, Línea G)

102º) (Exame 2011) Calcular $\int_0^\pi (\cos x)^4 dx$

Resp: A) $\frac{5\pi}{9}$ B) $\frac{3\pi}{8}$ C) $\frac{2\pi}{7}$ D) $\frac{5\pi}{8}$ E) $\frac{4\pi}{9}$ F) $\frac{\pi}{2}$ G) $\frac{3\pi}{7}$ H) *outro*

Resolução: $I = \int_0^\pi (\cos x)^4 dx = \int_0^\pi (\cos^2 x) (\cos^2 x) dx$

Sabe-se que: $\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$

$$I = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2x)\right) \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2x)\right) dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$I = \frac{1}{4} \left[\int_0^\pi dx + 2 \int_0^\pi \cos 2x dx + \int_0^\pi \cos^2 2x dx \right]$$

Sabe-se que: $\cos^2 2x = \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)$

$$I = \frac{1}{4} \left[\int_0^\pi dx + 2 \int_0^\pi \cos 2x dx + \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) dx \right]$$

$$I = \frac{1}{4} \left[\int_0^\pi dx + 2 \int_0^\pi \cos 2x dx + \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos 4x dx \right) \right]$$

Integrando todas as expressões temos:

$$I = \frac{1}{4} \left[(x)_0^\pi + 2 \left(\frac{1}{2} \right) (\sin 2x)_0^\pi + \frac{1}{2} \left\{ (x)_0^\pi + \frac{1}{4} (\cos 4x)_0^\pi \right\} \right]$$

$$I = \frac{1}{4} \left[(\pi - 0) + (\sin 2\pi - \sin 0) + \frac{1}{2} \left\{ (\pi - 0) + \frac{1}{4} (\cos 4\pi - \cos 0) \right\} \right]$$

$$I = \frac{1}{4} \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{8} \rightarrow I = \frac{3\pi}{8}, \text{ Línea B)}$$

103º) (Exame 2011) Resolva a inequação logarítmica:

$$\log_{\frac{1}{8}}(3-x) < \log_{\frac{1}{8}} 5$$

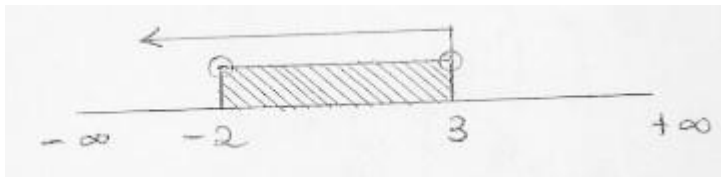
Resp: A) $x \in]0; 2[$ B) $x \in]-\infty, -2[$ C) $x \in]2; 0[$ D) *não tem soluções*
E) $] -2; +\infty[$ F) *outro*

Resolução: Condição de existência: $3 - x > 0 \rightarrow x < 3 \rightarrow S_1 = x \in]-\infty; 3[$

$\log_{\frac{1}{8}}(3-x) < \log_{\frac{1}{8}} 5$, Simplificando as bases temos:

$$3 - x < 5 \rightarrow x > -5 + 3 \rightarrow x > -2 \rightarrow S_2 = x \in]-2; +\infty[$$

A solução da inequação logarítmica é: $S = S_1 \cap S_2$



$S =]-2; 3[$, Línea F)

104º) (Exame 2011) Resolva a equação algébrica:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = 4$$

Resp: A) $x = 6 \cup x = 4$ B) *não tem soluções* C) $x = 2$ D) $x = 4$

E) $x = 6 \cup x = 14$ F) *outro*

Resolução: Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$$(\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5})^2 = (4)^2 \rightarrow x - 3 + 2\sqrt{(x-3)(x+5)} + x + 5 = 16 \rightarrow$$

$$2\sqrt{x^2 + 2x - 15} + 2x + 2 = 16, \text{ dividindo todos os termos da equação por } (2)$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 15} + x + 1 = 8 \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 7 - x, \text{ elevando mais ao quadrado:}$$

$$(\sqrt{x^2 + 2x - 15})^2 = (7 - x)^2 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 49 - 14x + x^2$$

$$2x + 14x = 49 + 15 \rightarrow 16x = 64 \rightarrow x = \frac{64}{16} \rightarrow x = 4$$

$$\text{Verificação: } x = 4, \sqrt{4-3} + \sqrt{4+5} = 4, \sqrt{1} + \sqrt{9} = 4, 1 + 3 = 4, 4 = 4$$

A solução da equação é: $S = \{x = 4\}$, Línea D

105º) (Exame 2011) Os três pontos $A(2; 1); B(3; -1); C(-4; 0)$ são vértices do trapézio isósceles ABCD. Achar as coordenadas do ponto D se $AB \parallel CD$

Resp: A) $(1,5; 5,5)$ B) $(-1,5; -5,5)$ C) $(-1,2; -5,4)$ D) $(-1,4; -5,2)$

E) $(1,5; -5,5)$ F) $(-1,1; -5,6)$ G) $(-1,8; -5,2)$ H) *outro*

Resolução.

É fácil notar a partir da figura que:

$d_{AC} = d_{BD}$ e os declives das rectas

Que passa pontos AB e CD

Serão iguais ou seja: $m_{AB} = m_{CD}$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_A)^2} \text{ e}$$

$$d_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$$

Se $d_{AC} = d_{BD}$, teremos:

$\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$, Elevando ao quadrado temos:

$$(-4 - 2)^2 + (0 - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y + 1)^2$$

$$37 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y - 27 = 0 \quad (I)$$

A equação da recta que passa pelos Pontos: $A(2; 1); B(3; -1)$ é:

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} \rightarrow \frac{x-2}{2-3} = \frac{y-1}{1-(-1)} \rightarrow 2x - 4 = -y + 3 \rightarrow 2x + y - 5 \quad (r_1)$$

O declive da recta r_1 é: $m_{AB} = -\frac{2}{1} \rightarrow m_{AB} = -2$

A equação da recta que passa pelos pontos: $C(-4; 0)$ e D é:

$$y - y_1 = m_{BC}(x - x_1) \rightarrow y - 0 = m_{BC}(x + 4)$$

$$y = m_{BC}(x + 4) \quad (r_2)$$

Como $r_1 \parallel r_2 \rightarrow m_{BC} = -2$

$y = -2(x + 4) \rightarrow y = -2x - 8$ (II), substituindo (II) em (I), temos:

$$x^2 + (-2x - 8)^2 - 6x + 2(-2x - 8) - 27 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 32x + 64 - 6x - 4x - 16 - 27 = 0 \rightarrow 5x^2 + 22x + 21 = 0$$

Pelo método de Vieth: $5x^2 + 22x + 21 = (5x + 7)(x + 3) = 0$

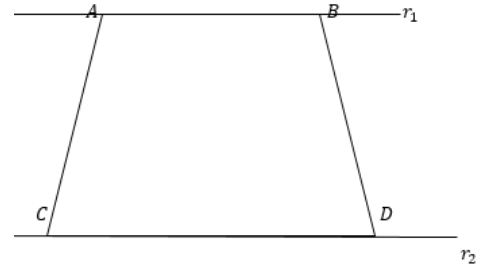
$$(5x + 7)(x + 3) = 0 \rightarrow 5x + 7 = 0 \text{ e } x + 3 = 0$$

$$5x + 7 = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{5} \rightarrow x_1 = -1,4; x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3$$

$$\text{Para } x_1 = -1,4 \rightarrow y = -2(-1,4) - 8 \rightarrow y_1 = -5,2 \quad P_1(-1,4; -5,2)$$

$$\text{Para } x_2 = -3 \rightarrow y = -2(-3) - 8 \rightarrow y_2 = -2 \quad P_2(-3; -2)$$

As coordenadas do ponto D são: $(-1,4; -5,2)$, Línea D



106º) (Exame 2011) Calcular: $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{9+16x}}$

Resp: A) $\frac{11}{96}$ B) $\frac{13}{96}$ C) $\frac{15}{92}$ E) $\frac{11}{95}$ F) $\frac{13}{95}$ G) $\frac{13}{92}$ H) *outro*

Resolução: $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{9+16x}}$

Fazendo:

$$\sqrt{9+16x} = t \rightarrow 9+16x = t^2 \rightarrow x = \frac{t^2-9}{16} (*)$$

Derivando ambos membros da igualdade (*), temos:

$$(x)'dx = \left(\frac{t^2-9}{16}\right)'dt \rightarrow dx = \frac{2tdt}{16} \rightarrow dx = \frac{tdt}{8},$$

Mudando os limites de integração temos em função da nova variável: $\sqrt{9+16x} = t$

$$\text{se } x = 1 \rightarrow t = \sqrt{9+16(1)} \rightarrow t = 5$$

$$\text{se } x = 0 \rightarrow t = \sqrt{9+16(0)} \rightarrow t = 3$$

Novos limites de integração: $3 \leq t \leq 5$

Substituindo devidamente na integral, temos:

$$I = \int_3^5 \left(\frac{t^2-9}{16}\right) \frac{tdt}{8} = \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8}\right) \int_3^5 (t^2-9)dt = \frac{1}{128} \left[\int_3^5 t^2 dt - 9 \int_3^5 dt \right]$$

Integrando pela fórmula da potência: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$I = \frac{1}{128} \left[\frac{1}{3} (t^3) \Big|_3^5 - 9 (t) \Big|_3^5 \right] = \frac{1}{128} \left[\frac{1}{3} (\{5^3\} - \{3^3\}) - 9(5-3) \right]$$

$$I = \frac{1}{128} \left[\frac{1}{3} (125-27) - 18 \right] = \frac{1}{128} \left(\frac{44}{3} \right) = \frac{44}{384} : \left(\frac{4}{4} \right) = \frac{11}{96}$$

$$I = \frac{11}{96}, \text{ Línea A}$$

107º) (Exame 2011) Calcular: $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$

Resp: A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{2}{9}$ F) $\frac{4}{9}$ G) $\frac{1}{2}$ H) *outro*

Resolução: $I = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$

Fazendo: $x+1 = t \rightarrow x = t-1$, derivando ambos os membros:

$$(x)'dx = (t-1)'dt \rightarrow dx = dt$$

Trocando os limites de integração em função da nova variável, temos:

$$x+1 = t$$

$$\text{se } x = 1 \rightarrow t = 1+1 \rightarrow t = 2$$

$$\text{se } x = 0 \rightarrow t = 0+1 \rightarrow t = 1$$

Novos limites de integração: $1 \leq t \leq 2$

Substituindo devidamente na integral, temos:

$$I = \int_1^2 \frac{(t-1)dt}{t^3} = \int_1^2 \frac{tdt}{t^3} - \int_1^2 \frac{dt}{t^3} \rightarrow I = \int_1^2 \frac{dt}{t^2} - \int_1^2 t^{-3} dt$$

$$I = \int_1^2 t^{-2} dt - \int_1^2 t^{-3} dt, \text{ integrando com a fórmula: } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$I = - (t^{-1})_1^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) (t^{-2})_1^2 = -\left(\frac{1}{t}\right)_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t^2}\right)_1^0$$

$$I = -\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right)\right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{(2^2)}\right) - \left(\frac{1}{(1^2)}\right)\right] = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$I = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \rightarrow I = \frac{1}{8}, \text{ Línea D)}$$

Exames de Acesso 2010

108º) (Exame 2010) Simplifica a expressão:

$$\left(\frac{7}{b^{1/6}+7} + \frac{b^{1/3}+34}{b^{1/3}-49} - \frac{7}{b^{1/6}+7}\right) \left(\frac{b^{1/3}-14b^{1/6}+49}{(b^{1/6}+8)(b^{1/6}-8)}\right)$$

Resp: A) $b^{1/6} - 7$ B) $\frac{b^{1/6}+7}{b^{1/6}-7}$ C) $\frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7}$ D) 0 E) 1 F) outro

Resolução:

Transformando todas as expressões com expoentes fraccionários em radicais, vem:

$$\left(\frac{7}{\sqrt[6]{b}+7} + \frac{\sqrt[3]{b}+34}{\sqrt[3]{b}-49} - \frac{7}{\sqrt[6]{b}+7}\right) \left(\frac{\sqrt[3]{b}-14\sqrt[6]{b}+49}{(\sqrt[6]{b}+8)(\sqrt[6]{b}-8)}\right),$$

achando um mínimo múltiplo comum para todos os radicais (neste 6 é o denominador comum para todos os radicais), vem:

$$\left(\frac{7}{\sqrt[6]{b}+7} + \frac{\sqrt[6]{b^2}+34}{\sqrt[6]{b^2}-49} - \frac{7}{\sqrt[6]{b}+7}\right) \left(\frac{\sqrt[6]{b^2}-14(\sqrt[6]{b})+49}{(\sqrt[6]{b}+8)(\sqrt[6]{b}-8)}\right), \text{ Fazendo: } \sqrt[6]{b} = t$$

$$\left(\frac{7}{t+7} + \frac{t^2+34}{t^2-49} - \frac{7}{t+7}\right) \left(\frac{t^2-14t+49}{(t+8)(t-8)}\right) = \left[\frac{7(t-7)+t^2+34-7(t+7)}{t^2-49}\right] \left[\frac{(t-7)^2}{(t+8)(t-8)}\right]$$

$$= \left[\frac{7t-49+t^2+34-7t-49}{t^2-49}\right] \left[\frac{(t-7)^2}{(t+8)(t-8)}\right] = \left[\frac{t^2-64}{t^2-49}\right] \left[\frac{(t-7)^2}{(t+8)(t-8)}\right] = \left[\frac{t-7}{t+7}\right], \text{ Voltando, temos:}$$

$$= \left(\frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7}\right). \text{Resposta: } \left(\frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7}\right), \text{ Línea C)}$$

109º) (Exame 2010) Simplifica a expressão:

$$\left(\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2\right) \left[\frac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}\right]$$

Resp: A) $\frac{m^2}{n}$ B) mn C) $2mn^2$ D) $\frac{m}{n^2}$ E) $\frac{1}{2} m^2 n$

F) $-2mn$ G) $\frac{n}{m}$ H) *outro*

Resolução: $(\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2) \left[\frac{(\sqrt[3]{m^4} + n^2\sqrt[3]{m}) - (n^3 + mn)}{\frac{m+n^2}{n} - \left(\frac{n^4+mn^2}{m}\right)} \right]$
 $= (\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2) \left[\frac{\sqrt[3]{m}(m+n^2) - n(n^2+nm)}{m^3+mn^2-n^5-mn^3} \right] (mn)$
 $= (\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2) \left[\frac{(m+n^2)(\sqrt[3]{m}-n)}{m(m+n^2)-n^3(n^2+m)} \right] (mn)$
 $(\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2) \left[\frac{(m+n^2)(\sqrt[3]{m}-n)}{(m+n^2)(m-n^3)} \right] (mn) = (\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2) \left[\frac{(\sqrt[3]{m}-n)}{(m-n^3)} \right] (mn) =$
 $= (\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2) \left[\frac{(\sqrt[3]{m}-n)}{(\sqrt[3]{m^3}-n^3)} \right] (mn)$
 $= (\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2) \left[\frac{(\sqrt[3]{m}-n)}{(\sqrt[3]{m}-n)(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2)} \right] (mn) = mn$ Resposta: mn , Línea B

110º) (Exame 2010) Ache a solução da equação: $3^x \cdot 8^{x/x+2} = 6$

Resp: A) $x_1 = 1$; $x_2 = 2 \log_3 2$ B) $x_1 = 1$ C) $x_1 = 1$; $x_2 = 2 \log_3 6$; D) $x_1 = -2 \log_3 2$ E) $x_1 = 1$; $x_2 = -2 \log_3 2$ F) $x_1 = 0$; $x_2 = 2 \log_3 6$ G) $x_1 = 1$; $x_2 = -2 \log_3 6$ H) *outro*

Resolução: $3^x \cdot (2^3)^{x/x+2} = 3 \cdot 2 \rightarrow 3^x \cdot 2^{3x/x+2} = 3 \cdot 2 \rightarrow \frac{3^x}{3} = \frac{2}{2^{3x/x+2}}$

$3^{x-1} = 2^{1-3x/x+2} \rightarrow 3^{x-1} = 2^{2-2x/x+2}$

Aplicando logaritmo natural em ambos membros da igualdade (\ln), fica:

$\ln 3^{x-1} = \ln 2^{2-2x/x+2} \rightarrow (x-1) \ln 3 = \frac{(2-2x)}{x+2} \ln 2$

$(x-1) \ln 3 = \frac{-2(x-1) \ln 2}{x+2} \rightarrow (x-1) \ln 3 + \frac{2(x-1)}{x+2} \ln 2 = 0$

$(x-1) \left[\ln 3 + \frac{2 \ln 2}{x+2} \right] = 0 \rightarrow x-1 = 0 \text{ e } \left[\ln 3 + \frac{2 \ln 2}{x+2} \right] = 0$

$x-1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$

$\left[\ln 3 + \frac{2 \ln 2}{x+2} \right] = 0 \rightarrow x \ln 3 + 2 \ln 3 + 2 \ln 2 = 0 \rightarrow x \ln 3 + \ln 3^2 + \ln 2^2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x \ln 3 + \ln 9 + \ln 4 = 0 \rightarrow x \ln 3 + \ln 36 = 0 \rightarrow x \ln 4 = -\ln 36$

$x \ln 3 = -\ln 36 \rightarrow x = -\frac{\ln 36}{\ln 3} \rightarrow x = -\log_3 36 \rightarrow x = -(\log_3 6^2)$

$x = -2(\log_3 3 \cdot 2) \rightarrow x = -2(\log_3 3 + \log_3 2) \rightarrow x_2 = -2(1 + \log_3 2)$

$x_2 = -2(\log_3 3 + \log_3 2) = -2 \log_3 (3 \cdot 2)$

$$x_2 = -2 \log_3 6$$

S: (1; $-2 \log_3 6$) , Línea G

111º) (Exame 2010) Resolva a equação:

$$\log_{0,5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$$

Resp: A) $x_1 = 1 ; x_2 = 4 ; x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $x_1 = 1 ; x_2 = 4$

C) $x_1 = 4 ; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $x_1 = 1 ; x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $x_1 = 1 ; x_2 = 4 ; x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ F) $x_1 = 4 ; x_2 = \sqrt{2} ;$ G) $x_1 = 1 ; x_2 = \sqrt{2} ; x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ H) *outro*

Resolução: *condição de existência:* ($x > 0$ e $0 < x \neq 1$)

$$2 \log_{\frac{x}{2}}(x) - 14.3 \log_{16x} x + 40 \log_{4x} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$2 \log_{\frac{x}{2}}(x) - 42 \log_{16x} x + \frac{40}{2} \log_{4x} x = 0$$

$$2 \log_{\frac{x}{2}}(x) - 42 \log_{16x} x + 20 \log_{4x} x = 0$$

Fazendo a mudança de base em todos os termos da equação, vem:

$$\frac{2}{\log_x \frac{x}{2}} - \frac{42}{\log_x 16x} + \frac{20}{\log_x 4x} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{2}{(\log_x x - \log_x 2)} - \frac{42}{(\log_x 16 + \log_x x)} + \frac{20}{\log_x 4 + \log_x x} = 0 / : 2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{(1 - \log_x 2)} - \frac{21}{(\log_x 2^4 + 1)} + \frac{10}{(\log_x 2^2 + 1)} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{(1 - \log_x 2)} - \frac{21}{(4 \log_x 2 + 1)} + \frac{10}{(2 \log_x 2 + 1)} = 0 \text{ Fazendo mudança de base outra vez, vem:}$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\log_2 x}\right)} - \frac{21}{\left(\frac{4}{\log_2 x} + 1\right)} + \frac{10}{\left(\frac{2}{\log_2 x} + 1\right)} = 0 \rightarrow \frac{\log_2 x}{(\log_2 x - 1)} - \frac{21 \log_2 x}{(4 + \log_2 x)} + \frac{10 \log_2 x}{(2 + \log_2 x)} = 0,$$

fazendo: $\log_2 x = t$, vem:

$$\frac{t}{(t-1)} - \frac{21t}{(4+t)} + \frac{10t}{(2+t)} = 0 \rightarrow t \left(\frac{1}{t-1} - \frac{21}{t+4} + \frac{10}{2+t} \right) = 0 \rightarrow$$

Aplicando a lei do anulamento do produto temos: $t = 0$ e

$$\left(\frac{1}{t-1} - \frac{21}{t+4} + \frac{10}{2+t} \right) = 0 \rightarrow \left(\frac{t+4-21t+21}{(t-1)(t+4)} + \frac{10}{2+t} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{25-20t}{t^2+3t-4} + \frac{10}{2+t}\right) = 0 \rightarrow \left[\frac{(25-20t)(2+t)+10t^2+30t-40}{(t^2-3t-4)(2+t)}\right] \rightarrow$$

$$\left[\frac{50+25t-40t-20t^2+10t^2+30t-40}{(t^2-3t-4)(2+t)}\right] = 0 \rightarrow \left[\frac{-10t^2+15t+10}{(t^2-3t-4)(2+t)}\right] = 0/\times (-1) \rightarrow$$

$$\left[\frac{2t^2-3t-2}{(t^2-3t-4)(2+t)}\right] = 0 \rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \text{ e } (t^2 - 3t - 4)(2+t) \neq 0$$

$$\begin{cases} (t^2 - 3t - 4)(2+t) \neq 0 \rightarrow \\ (t+4)(t-1)(2+t) \neq 0 \rightarrow t \neq -4; t \neq 1 \text{ e } t \neq -2 \end{cases}$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2) \rightarrow \Delta = 25,$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \rightarrow t_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } t_2 = 2, \text{ os valores de } t \text{ são: } -\frac{1}{2}, 0 \text{ e } 2$$

$$\log_2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\log_2 x = 0 \rightarrow x = 2^0 \rightarrow x_2 = 1$$

$$\log_2 x = 2 \rightarrow x = 2^2 \rightarrow x_3 = 4 \quad S: \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; 4\right\}, \text{ Línea C)}$$

112º) (Exame 2010) Escrever uma equação reduzida da recta perpendicular à recta da equação $y = -3x + 7$ passando pelo ponto $(0; 2)$

$$\text{Resp: A) } y = \frac{1}{3}x + 2 \text{ B) } y = -\frac{1}{3}x + 2 \text{ C) } y = 3x + 2 \text{ D) } y = 3x - 2$$

$$\text{E) } y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \text{ F) } y = x + 2 \text{ G) } y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \text{ H) } \text{outro}$$

Resolução: A equação de uma recta que passa por um ponto é dada pela expressão:

$$y - y_0 = m(x - x_0), \text{ em que } x_0 = 0 \text{ e } y_0 = 2; y - 2 = m(x - 0) \rightarrow y - 2 = mx$$

Onde m é o declive ou coeficiente angular

Para que as rectas sejam perpendiculares é necessário que: $m_1 \cdot m_2 = -1$, em que m_1 é o declive da recta procurada e m_2 é declive da recta dada.

$$m_2 = -\frac{a}{b}, \text{ pela equação : } y = -3x + 7 \rightarrow y + 3x - 7 = 0,$$

$$\text{Na recta: } a = 3, b = 1$$

$$m_2 = -\frac{3}{1} \rightarrow m_2 = -3; m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow m_1(-3) = -1 \rightarrow m_1 = \frac{1}{3}$$

$$y - 2 = mx \rightarrow y - 2 = \frac{1}{3}x \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \text{ é a equação procurada, Línea A)}$$

113º)(Exame 2010) Determinar uma equação de uma circunferência de centro $(3; -2)$ tangente a recta $y = -\frac{1}{2}x + 3$. R

Resp: A) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ B) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{25}$

C) $(x + 3)^2 - (y - 2)^2 = \frac{36}{25}$ D) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

E) $(x - 3)^2 - (y + 2)^2 = \frac{49}{25}$ F) $(y + 2)^2 - (x - 3)^2 = \frac{36}{5}$

G) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{5}$ H) *outro*

Resolução:

C: (3; -2) A equação da circunferência é expressa pela equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \text{ em que o centro é } C: (x_0; y_0) \text{ e } R \text{ é o raio.}$$

Como C: (3; -2) $\rightarrow x_0 = 3$ e $y_0 = -2$; teremos:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = R^2$$

Vamos determinar o raio da circunferência:

Como a circunferência é tangente a recta, a distância do centro à recta corresponde ao raio da circunferência. Vamos determinar a distância de um ponto (neste caso o ponto é o centro C: (3; -2)) a uma recta:

$$R = d_{P,r} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 2y = -x + 6 \rightarrow x + 2y - 6 = 0 \text{ (} a = 1, b = 2 \text{ e } c = -6 \text{), então:}$$

$$d_{P,r} = \frac{1(3) + 2(-2) - 6}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = -\frac{7}{\sqrt{5}} \rightarrow R = -\frac{7}{\sqrt{5}}, \text{ a equação da circunferência será:}$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \left(-\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{5} \text{ é a equação procurada, Línea G)}$$

114º) (Exame 2010) Resolva a inequação:

$$(\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)\sqrt{5x - 4 - x^2} \geq 0$$

Resp: A) $\left[1; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \{4\}$ B) $\left[1; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \{4\}$ C) $[1; 4]$ D) $\left[\frac{\pi}{4}; 1\right]$

E) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[$ F) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup [3; 4]$ G) $\left[\frac{5\pi}{4}; 4\right]$ H) *outro*

Resolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x \geq 0 \\ 5x - 4 - x^2 \geq 0 \end{array} \right\}; \text{ sabe-se que } \operatorname{sen} x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0; (*)$$

$$\text{sabe-se que: } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2 \cos \left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Voltando em (*):

$-2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ (Multiplicar todos os termos por -1) , vem:

$$2 \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \rightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$

Conforme o ciclo

Trigonométrico, temos:

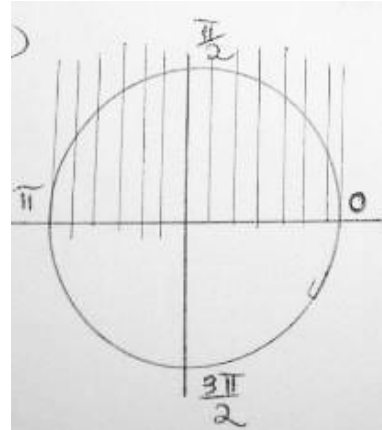
$$\pi + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 0 + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$S_1 = x \in \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$5x - 4 - x^2 \geq 0$, multiplicar por -1 e factorizar x , temos:

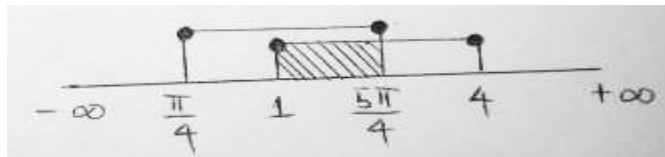
$$x^2 - 5x + 4 \leq 0 \rightarrow (x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 4)$$



x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$x^2 - 5x + 4 \leq 0$	+	0	0	+

$$S_2 = x \in [1; 4]$$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cap S_2$



$$S = \left[1; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \{4\}; \text{Línea A)}$$

115º) (Exame 2010) Resolva a equação :

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$$

Resp: A) $x_1 = 2$; $x_2 = 1 - \sqrt{33}$; $x_3 = -8$ B) $x_1 = 2$; $x_2 = 1 \pm \sqrt{33}$

C) $x_1 = 2$; $x_2 = 1 - \sqrt{33}$ D) $x_1 = 2$; $x_2 = -8$

E) $x_1 = 2$; $x_2 = 1 + \sqrt{33}$; $x_3 = -8$ F) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{33}$; $x_2 = -8$

G) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{33}$ H) *outro*

Resolução:

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$$

Condição de existência:

$$(4-x > 0 \rightarrow x < 4 \text{ e } x+6 > 0 \rightarrow x > -6, (x+2)^2 \rightarrow x \in \mathbb{R})$$

$$2 \times \left(\frac{3}{2}\right) \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3 \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}}(x+6), \text{ dividir todos os termos por (3):}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6) \rightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{1/4}(4-x)(x+6)$$

$$\log_{\frac{1}{4}}\frac{|x+2|}{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{4}}(4x+24-x^2-6x) \rightarrow \log_{\frac{1}{4}}4(x+2) = \log_{\frac{1}{4}}(-x^2-2x+24)$$

$$4|x+2| = (-x^2-2x+24) \rightarrow 4|x+2| = -x^2-2x+24$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2, & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Para $x \geq -2$

$$x^2 + 6x - 24 + 8 = 0 \rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \text{ (equação do 2º, } a=1; b=6; c=-16)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+10}{2} \rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{-6-10}{2} \rightarrow x_2 = -8$$

Como $x_1 = 2$ é a única solução que satisfaz a condição de existência,

Para $x < -2$

$$x^2 - 2x - 32 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-32)}}{2(1)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{33}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{33}}{2} \rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{33}; \quad x_2 = \frac{2-2\sqrt{33}}{2} \rightarrow x_2 = 1 - \sqrt{33}$$

$x_2 = 1 - \sqrt{33}$ é a única solução que satisfaz a condição de existência

A solução da equação é: $x_1 = 2$; $x_2 = 1 - \sqrt{33}$, Línea C)

116º) (Exame 2010) Resolva a inequação:

$$\sin 2x + 1 > 2 \cos x + \sin x$$

$$\text{Resp: A) } \left] \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right[\quad \text{B) } \left] \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \right[$$

$$C) \left] -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k \right[\quad D) \left] -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right[$$

$$E) \left] \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k \right[\quad F) \left] -\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k \right[$$

$$G) \left] \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \right[\quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$\sin 2x + 1 > 2\cos x + \sin x \rightarrow 2\sin x \cos x + 1 > 2\cos x + \sin x$$

$$2\sin x \cos x + 1 - 2\cos x - \sin x > 0 \rightarrow (2\sin x \cos x - 2\cos x) + (1 - \sin x) > 0$$

$$2\cos x (\sin x - 1) - (\sin x - 1) > 0 \rightarrow (\sin x - 1)(2\cos x - 1) > 0$$

A inequação é válida nas seguintes condições:

$$I) \begin{cases} \sin x - 1 > 0 \\ 2\cos x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} \sin x - 1 < 0 \\ 2\cos x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x > 0 \rightarrow S = \{\emptyset\} \\ \cos x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x < 1 \rightarrow x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\} \\ \cos x < \frac{1}{2} \rightarrow \cos x < \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

O sistema I) não tem solução, pois não há intersecção das desigualdades

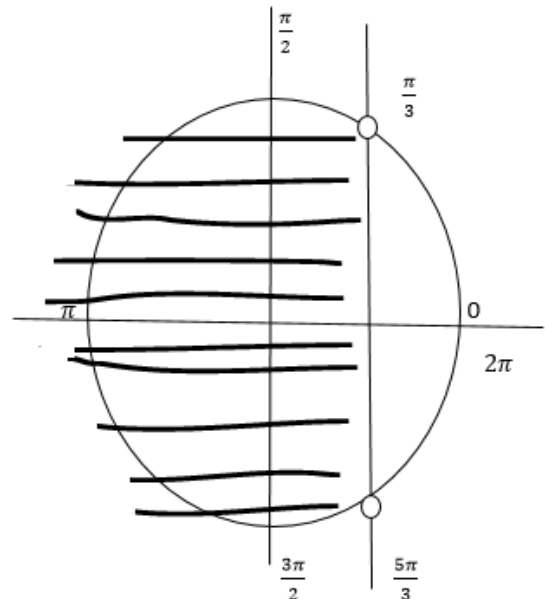
No sistema II) temos:

Conforme o ciclo trigonométrico

Ao lado, a solução da inequação

Trigonométrica será:

$$\left] \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \right[, \text{Línea G)}$$



117º) (Exame 2010)

Simplificar a expressão:

$$\frac{\left(a^2 b \sqrt{b} - 6a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{4}} + 12ab^3 \sqrt{a} - 8ab^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}}}{ab^3 \sqrt{a} - 4ab^{\frac{3}{4}} + 4a^{\frac{2}{3}} \sqrt{b}}$$

Resp: A) $\frac{1}{2}$ B) -2 C) $1,5$ D) $-0,5$ E) 1 F) 2 G) -1 H) *outro*

Resolução:

Transformando todas as potenciais em radicais, temos:

$$\frac{(a^2 b \sqrt{b} - 6 \sqrt[3]{a^5} \sqrt[4]{b^5} + 12 ab \sqrt[3]{a} - 8 a \sqrt[4]{b^3})^{\frac{2}{3}}}{ab \sqrt[3]{a} - 4 a \sqrt[4]{b^3} + 4 \sqrt[3]{a^2} \sqrt{b}},$$

Achando um mmc para todos os radicais: (neste caso 12)

$$\frac{(\sqrt[12]{a^{24}} \sqrt[12]{b^{12}} \sqrt[12]{b^6} - 6 \sqrt[12]{a^{20}} \sqrt[12]{b^{15}} + 12 \sqrt[12]{a^{12}} \sqrt[12]{b^{12}} \sqrt[12]{a^4} - 8 \sqrt[12]{a^{12}} \sqrt[12]{b^9})^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[12]{a^{12}} \sqrt[12]{b^{12}} \sqrt[12]{a^4} - 4 \sqrt[12]{a^{12}} \sqrt[12]{b^9} + 4 \sqrt[12]{a^8} \sqrt[12]{b^6}}$$

$$\frac{(\sqrt[12]{a^{24}} \sqrt[12]{b^{18}} - 6 \sqrt[12]{a^{20}} \sqrt[12]{b^{15}} + 12 \sqrt[12]{a^{16}} \sqrt[12]{b^{12}} - 8 \sqrt[12]{a^{12}} \sqrt[12]{b^9})^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[12]{a^{16}} \sqrt[12]{b^{12}} - 4 \sqrt[12]{a^{12}} \sqrt[12]{b^9} + 4 \sqrt[12]{a^8} \sqrt[12]{b^6}}$$

Supondo que: $\sqrt[12]{a} = x$ e $\sqrt[12]{b} = y$

$$\frac{(x^{24} y^{12} - 6 x^{20} y^{15} + 12 x^{16} y^{12} - 8 x^{12} y^9)^{\frac{2}{3}}}{x^{16} y^{12} - 4 x^{12} y^9 + 4 x^8 y^6}$$

Factorizando $x^{12} y^9$ no numerador e $x^8 y^6$ no denominador, temos:

$$\frac{[x^{12} y^9 (x^{12} y^3 - 6 x^8 y^6 + 12 x^4 y^3 - 8)]^{\frac{2}{3}}}{x^8 y^6 (x^8 y^6 - 4 x^4 y^3 + 4)} \quad (*)$$

Nota que:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 \text{ e}$$

$$(xy - 2)^3 = x^{12} y^3 - 6x^8 y^6 + 12x^4 y^3 - 8 \text{ e}$$

$$x^8 y^6 - 4x^4 y^3 + 4 = (xy - 2)^2$$

Voltando em (*):

$$\frac{[x^{12} y^9 (xy - 2)^3]^{\frac{2}{3}}}{x^8 y^6 (xy - 2)^2}, \text{ Separando os expoentes do numerador temos:}$$

$$\frac{(x^{12})^{\frac{2}{3}} \cdot (y^9)^{\frac{2}{3}} \cdot (xy - 2)^{\frac{2}{3}}}{x^8 y^6 (xy - 2)^2} = \frac{x^8 y^6 (xy - 2)^2}{x^8 y^6 (xy - 2)^2} = 1, \text{ Línea E)}$$

118º) (Exame 2010) Quantas saladas distintas são possível fazer de cinco espécies diferentes de verduras ?

Resp: A) 24 B) 32 C) 36 D) 35 E) 25 F) 31 G) 28 H) outro

Reolução: estamos diante de situação de combinação; (5; 1), (5;2), (5;3), (5;4) e

(5;5), Que reulta em: $n = C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}$, sabe-e que: $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$C_{5,1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5, C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10, C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10, C_{5,4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5,$$

$$C_{5,1} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = 1, \text{ então o número de saladas ditintas será:}$$

$$n = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \rightarrow n = 31, \text{ Línea F)}$$

119º) (Exame 2010) Quantos números de 4 algarismo podem ser formados de 10 algarismos, 0,1,2,3,...,8,9 sem repetições.

Resp: A) 504 B) 9000 C) 4536 D) 6561 E) 10000 F) 7290 G) 5040 H) *outro*

Resolução: estamos diante de uma situação de arranjo sem repetição;

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ onde: } n = 10 \text{ e } k = 4, A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040, \text{ Línea G)}$$

120º) (Exame 2010) De 5 matemáticos e 7 físicos deve-se constituir uma comissão de 2 matemáticos e 3 físicos. De quantas maneiras é possível formar a comissão se os dois determinados matemáticos não podem pertencer a comissão?

Resp: A) 525 B) 150 C) 350 D) 120 E) 105 F) 240 G) 45 H) *outro*

Resolução: estamos diante de uma situação de combinação, podemos formar as comissões do seguinte modo (Tendo em conta que dois matemáticos não podem participar na comissão):

$$\text{Matemáticos: } C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3, \text{ Físicos: } C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

$$C_{3,2} \times C_{7,3} = 105, \text{ Línea E)}$$

Exame de Acesso 2009

121º) (Exame 2009) Simplifique a expressão: $\frac{1-(\log_a b)^3}{(\log_a b + \log_b a + 1)(\log_a \frac{a}{b})}$

Resp: A) $\log_b a$ B) $\log_b a + 1$ C) $\sqrt{\log_a b}$ D) $2 \log_b a$

E) $1 - \log_a b$ F) $\log_a^2 b$ G) $\log_a b$ H) *outro*

Resolução:

obs: A expressão do numerador é uma diferença de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \frac{(1 - \log_a b)[1 + \log_a b + (\log_a b)^2]}{(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 1)(\log_a a - \log_a b)} \rightarrow$$

$$= \frac{(1 - \log_a b)[1 + \log_a b + (\log_a b)^2]}{\frac{[1 + \log_a b + (\log_a b)^2](1 - \log_a b)}{\log_a b}}, \text{ Simplificando vem: } = \log_a b, \text{ Línea G}$$

122º) (Exame 2009) Resolva a inequação: $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

Resp: A) $]0; +\infty[$ B) $[-12; -3] \cup]0; +\infty[$

C) $[-12; -3] \cup [4; +\infty[$ D) $[4; +\infty[$ E) $[-12; 4]$

F) $[-12; 0[\cup [4; +\infty[$ G) $]0; 4[\cup]4; +\infty[$ H) *outro*

Resolução:

$$\text{Condição de existência CE: } \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 12 \geq 0 \text{ (inequação do 2º grau)}$$

Aplicando Vieth para achar as raízes da inequação:

$$x^2 - x - 12 = 0, x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0$$

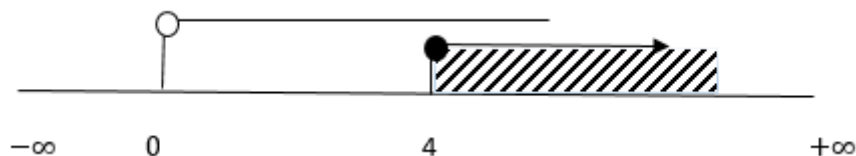
$$(x - 4)(x + 3) = 0, x - 4 = 0 \text{ e } x + 3 = 0 \rightarrow (x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -3)$$

$a > 0$	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$x^2 - x - 12 \geq 0$	<div><div></div><div>+</div><div></div></div>	<div><div></div><div>0</div><div></div></div>	<div><div></div><div>-</div><div></div></div>	<div><div></div><div>0</div><div></div></div>	<div><div></div><div>+</div><div></div></div>

$$x \in]-\infty; -3] \cup [4; +\infty[$$

$$x > 0 \rightarrow x \in]0; +\infty[$$

O conjunto verdadeiro da C.E é a intersecção dos dois intervalos numéricos



$$S_1 = [4; +\infty[$$

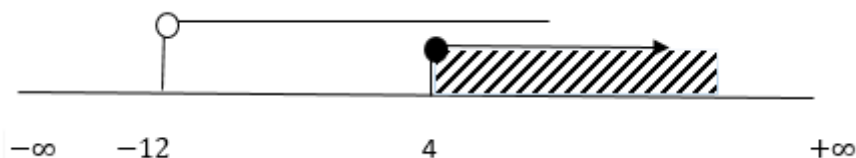
Resolvendo a inequação: $(\quad)^2$

$$(\sqrt{x^2 - x - 12})^2 < (x)^2 \rightarrow x^2 - x - 12 < x^2$$

$$x^2 - x - 12 < x^2 \rightarrow x > -12$$

$$x > -12 \rightarrow x \in]-12; +\infty[; \quad S_2 =]-12; +\infty[$$

A solução verdadeira da inequação será: $S = S_1 \cap S_2$



$$S = [4; +\infty[, \text{ Línea D}$$

123º) (Exame 2009) Resolva a equação:

$$1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x \quad R: x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Resolução:

Sabe-se que: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ (*)

Ou $a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$ (**)

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^3 - 3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

Sabe-se que: $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$

Voltando na expressão inicial:

$$1 + (\operatorname{sen} x + \cos x)^3 - 3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x) = \frac{3}{2} (2\operatorname{sen} x \cos x)$$

$$[1^3 + (\operatorname{sen} x + \cos x)^3] - 3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x) = 3\operatorname{sen} x \cos x$$

Aplicando a fórmula (**) para a expressão: $[1^3 + (\operatorname{sen} x + \cos x)^3]$, vem:

$$(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)[1^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x) + (\operatorname{sen} x + \cos x)^2] - 3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x) - 3\operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Factorizando a expressão $3\operatorname{sen} x \cos x$ no 2º e no 3º produto:

$$(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)[1^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x) + (\operatorname{sen} x + \cos x)^2] \rightarrow \rightarrow -3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x + 1) = 0$$

Factorizando a expressão : $(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)$

$$(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)[1 - \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - 3\operatorname{sen} x \cos x] = 0$$

$$(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)(1 - \operatorname{sen} x - \cos x + 1 + \operatorname{sen} 2x - 3\operatorname{sen} x \cos x) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$$1^\circ) (1 + \operatorname{sen} x + \cos x) = 0 \text{ e}$$

$$2^\circ) (1 - \operatorname{sen} x - \cos x + 1 + \operatorname{sen} 2x - 3\operatorname{sen} x \cos x) = 0$$

$$1^\circ) (1 + \operatorname{sen} x + \cos x) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = -1$$

$$\text{Obs.: } \cos x = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$\text{Sabe-se que: } \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Voltando na expressão inicial:

$$\sqrt{2} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \rightarrow \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ; \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Como $\alpha < 0$, a expressão geral para os senos é:

$$x = \pi k + (-1)^{k+1} \alpha$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \pi k + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4}$$

$$2^\circ) (1 - \operatorname{sen} x - \cos x + 1 + \operatorname{sen} 2x - 3 \operatorname{sen} x \cos x) = 0$$

$$2 - \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} 2x - 3 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \text{ / (multiplica por 2)}$$

$$4 - 2 \operatorname{sen} x - 2 \cos x + 2 \operatorname{sen} 2x - 3 \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow$$

$4 - \operatorname{sen} 2x = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$, elevar ambos membros ao quadrado:

$$(4 - \operatorname{sen} 2x)^2 = (2(\operatorname{sen} x + \cos x))^2$$

$$16 - 8 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}^2 2x = 4(\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x)$$

$$16 - 8 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}^2 2x = 4(1 + \operatorname{sen} 2x)$$

$$16 - 8 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}^2 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} 2x$$

$$\operatorname{sen}^2 2x + 4 \operatorname{sen} 2x + 12 = 0, \text{ Fazendo } \operatorname{sen} 2x = t, t \in [-1; 1]$$

$$t^2 + 4t + 12 = 0, \Delta = (4)^2 - 4(1)(12) = -32 \rightarrow \Delta < 0 \nexists t_1 \text{ e } t_2$$

$$S = \left\{ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} \right\}$$

124º) (Exame -2009) Simplifique a expressão:

$$(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} a) \log_b a - 1$$

Resolução:

$$\text{Obs.: } \log_x y = \frac{1}{\log_y x}$$

$$\left(\frac{1}{\log_b a} + \log_b a + 2 \right) \left(\log_a b - \frac{1}{\log_b ab} \right) \log_b a - 1$$

Achando o denominador comum no 1º produto e $\log_y xy = \log_y x + \log_y y$

$$\frac{[(\log_b a)^2 + 2 \log_b a + 1]}{\log_b a} \left[\log_a b - \frac{1}{\log_b a + \log_b b} \right] \log_b a - 1$$

$$\text{Obs.: } x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \quad \text{e} \quad \log_b b = 1$$

$$\frac{(\log_b a + 1)^2}{\log_b a} \left(\log_a b - \frac{1}{\log_b a + 1} \right) \log_b a - 1 \rightarrow \frac{(\log_b a + 1)^2}{\log_b a} \frac{(\log_a b \cdot \log_b a + \log_a b - 1) \log_b a - 1}{(\log_b a + 1)}$$

$$(\log_b a + 1) \left(\frac{\log_b a}{\log_b a} + \log_a b - 1 \right) - 1 \rightarrow (\log_b a + 1)(1 + \log_a b - 1) - 1$$

$$(\log_b a + 1)(\log_a b) - 1 \rightarrow \log_a b \times \log_b a + \log_a b - 1$$

$$\frac{\log_b a}{\log_b a} + \log_a b - 1 = 1 + \log_a b - 1 = \log_a b$$

125º)(Exame 2009) Resolva a equação:

$$3tg^2x + 4tgx + 4 \cot gx + 3 \cot g^2x + 2 = 0$$

$$\text{Resp: A) } \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad B)) \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad C)) \frac{\pi}{4} + \pi k \quad D) \pm) \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$E) \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \quad F)) - \frac{\pi}{4} + \pi k \quad G) \pm \frac{3\pi}{4} + \pi k \quad H) \text{ outro}$$

$$\text{Resolução: } 3tg^2x + 4tgx + 4 \left(\frac{1}{tgx} \right) + 3 \frac{1}{tg^2x} + 2 = 0$$

$$\frac{3tg^4x + 4tg^3x + 4tgx + 3 + 2tg^2x}{tg^2x} = 0 \rightarrow \frac{3tg^4 + 4tg^3x + 2tg^2x + 4tgx + 3}{tg^2x} = 0$$

$$\text{Fazendo: } t = tgx, \quad \frac{3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3}{t^2} = 0 \text{ (equação racional fraccionária)}$$

$$3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0 \text{ e } t^2 \neq 0 \rightarrow t \neq 0$$

$$3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0 \text{ (equação racional)}$$

$$\text{Considerando que } P(t) = 3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0, \text{ se } t = -1$$

$$P(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 + 2(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0$$

$t = -1$ é uma das raízes da equação racional

Dividindo pelo método de chave, onde:

$$P(t) = 3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 \text{ e } D(t) = t + 1 \text{ Obtemos:}$$

$$\text{O quociente } Q(t) = 3t^3 + t^2 + t + 1 \text{ e o resto } R(t) = 0 \text{ então:}$$

$$P(t) = D(t)Q(t) + R(t) = (t + 1)(3t^3 + t^2 + t + 1) = 0$$

Pelo anulamento do produto

$$t + 1 = 0 \rightarrow t = -1$$

$$3t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \text{ (A Equação não tem raízes reais)}$$

Voltando na suposição:

$$tgx = t \rightarrow tgx = tg(-1) \rightarrow tgx = -tg(1), \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k ; \text{CE: } tgx \neq 0 \rightarrow x \neq \pi k$$

$$\text{A solução da equação é: } S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k \right\}, \text{ Línea F)}$$

126º) (Exame 2009) No triângulo rectangular a altura traçada de um vértice do ângulo recto divide a hipotenusa em segmentos 3 cm e 9 cm. Então os catetos do triângulo são:

Resp: A) 6cm e 9cm B) 9cm e $6\sqrt{3}$ cm C) $3\sqrt{3}$ cm e 6 cm D) $3\sqrt{3}$ cm e 9cm
E) 9cm e 12 cm F) 6cm e $6\sqrt{3}$ cm

Resolução: $m = 3$ cm, $n = 9$ cm, $b = ?$, $c = ?$

$$a = m + n \rightarrow a = 3 + 9 \rightarrow a = 12 \text{ cm}$$

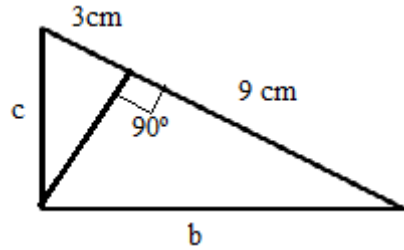
$$c^2 = m a \rightarrow c^2 = 3 \times 12 \rightarrow c^2 = 36$$

$$c^2 = 36 \rightarrow c = \sqrt{36} \rightarrow c = 6 \text{ cm}$$

$$b^2 = n a \rightarrow b^2 = 9 \times 12 \rightarrow b^2 = 36 \times 3$$

$$b^2 = 36 \times 3 \rightarrow b = \sqrt{36} \times \sqrt{3} \rightarrow b = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Os catetos dos triângulos são: 6 cm e $6\sqrt{3}$ cm, Línea F)



127º) (Exame 2009) A diagonal de um cubo é l . Então o volume do cubo é:

Resp:

A) $\frac{l^3}{3}$ B) $\frac{l^3\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{l^3\sqrt{3}}{9}$ D) $\frac{l^3\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{l^3\sqrt{2}}{9}$ F) $\frac{l^3}{9}$

Resolução: $D = l$, $V = ?$

Fórmula do volume do cubo: $V = a^3(*)$

Onde a é o cateto

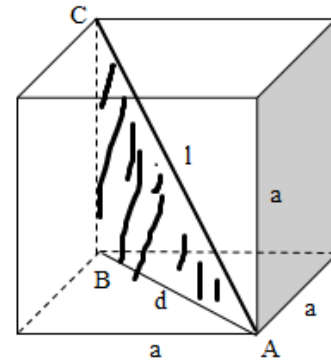
No triângulo rectângulo ABC,

Vem:

$$l^2 = a^2 + d^2 \quad (1), \text{ E a diagonal do quadrado da Base é: } d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d^2 = 2a^2 \quad (2)$$

$$\text{Substituindo (2) em (1), vem: } l^2 = a^2 + 2a^2 \rightarrow 3a^2 = l^2 \rightarrow a^2 = \frac{l^2}{3} \rightarrow a = \frac{l}{\sqrt{3}} \rightarrow a = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Substituindo em (*),vem: } V = \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{l^3\sqrt{3}}{27} = \frac{3l^3\sqrt{3}}{27} \rightarrow V = \frac{l^3\sqrt{3}}{9}, \text{ Línea C)}$$



128º) (Exame 2009) O perímetro de um triângulo isósceles é igual à 90 cm e a sua altura é igual à 15 cm. Ache a área desse triângulo.

Resp: A) 200 cm^2 B) $30\sqrt{2}$ cm^2 C) 420 cm^2 D) 300 cm^2 E) $45\sqrt{3}$ cm^2

F) outro

Resolução:

$$P = 90 \text{ cm} ; h = 15 \text{ cm} ; a = b , A = ?$$

Conforme a figura; vem: $c = 2m$

$$\rightarrow m = \frac{c}{2}$$

$$P = a + b + c \rightarrow P = 2a + c \rightarrow 2a + c = 90 \quad (1)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ATC

$$, \text{ vem: } a^2 = m^2 + h^2 \text{ e } m = \frac{c}{2}$$

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (15)^2 \rightarrow a^2 = \frac{c^2}{4} + (15)^2 \rightarrow 4a^2 = c^2 + 4 \times 225 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4a^2 = c^2 + 900 \quad (2)$$

Formando um sistema de equações , com as equações (1) e (2) , vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + c = 90 \rightarrow c = 90 - 2a \quad (*) \\ 4a^2 = c^2 + 900 \quad (**) \end{array} \right\}$$

Substituindo (*) em (**), vem:

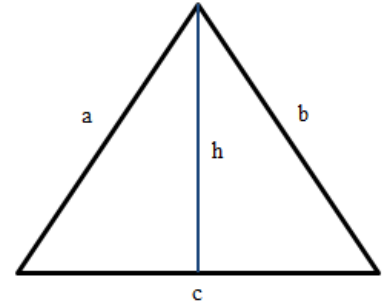
$$4a^2 = (90 - 2a)^2 + 900 \rightarrow 4a^2 = 8100 - 360a + 4a^2 + 900$$

$$360a = 9000 \rightarrow a = \frac{9000}{360} \rightarrow a = 25$$

$$a = 25 \text{ e } c = 90 - 2a \rightarrow c = 90 - 2(25) \rightarrow c = 90 - 50 \rightarrow c = 40$$

$$\text{A área do triângulo é: } A = \frac{1}{2} c h$$

$$A = \frac{1}{2} c h = \frac{1}{2} (40 \times 15) \rightarrow A = 300 \text{ cm}^2 , \text{ Línea D}$$



129º) (Exame 2009) No triângulo um lado é igual à 5 cm e dois ângulos adjacentes desse lado são respectivamente 30° e 60° . Então dois outros lados desse triângulo são:

Resp: A) 3 cm e 4 cm B) 2,5 cm e $2,5\sqrt{2}$ cm C) 2,5 cm e $2,5\sqrt{3}$ cm

D) 7 cm e $2,5\sqrt{2}$ cm E) 2,5 cm e $\sqrt{11}$ cm F) 4 cm e $\sqrt{41}$ cm

Resolução:

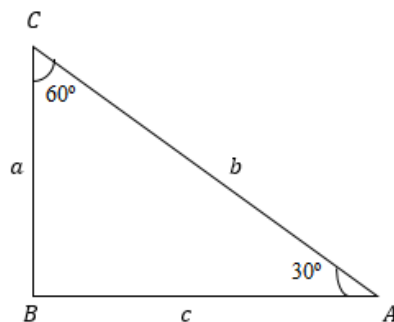
O triângulo é retângulo em B

$$\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$$

$$\text{sen}30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{5} \rightarrow a = 5 \text{ sen}30^\circ$$

$$a = 5 \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow a = 2,5 \text{ cm}$$

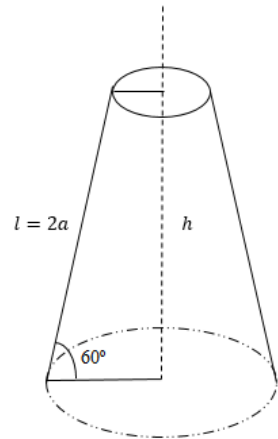
$$\text{sen}60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{5} \rightarrow c = 5 \text{ sen}60^\circ$$



$$a = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow a = 2,5 \sqrt{3} \text{ cm}$$

A solução é: $\{2,5 \text{ cm} ; 2,5 \sqrt{3} \text{ cm} \}$, Línea C)

130º) (Exame 2009) A geratriz de um cone truncado é igual à $2a$ e tem inclinação 60° em relação a maior base do cone. O raio de uma base desse cone é duas vezes maior do que o raio da outra base. Então os raios das bases são:



Resp: A) $\frac{\sqrt{3}}{2} a$ e $\sqrt{3} a$ B) $\frac{1}{2} a$ e a C) $\frac{\sqrt{2}}{2} a$ e a D) a e $2a$

E) $\sqrt{3} a$ e $2\sqrt{3} a$ F) a e $3a$

Resolução: Conforme a figura ao lado, temos:

$$R = 2r$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{R}{2a} \rightarrow R = 2a \cos 60^\circ \rightarrow R = 2a \left(\frac{1}{2} \right) \rightarrow R = a$$

$$R = a \text{ e } R = 2r \rightarrow r = \frac{R}{2} \rightarrow r = \frac{a}{2}, \text{ Então, os raios das bases desses cones são:}$$

$$S = \left\{ r = \frac{1}{2} a ; R = a \right\}, \text{ Línea B)}$$

131º) (Exame 2009) Resolver a inequação:

$$x + 1 > \sqrt{x + 3}$$

Resp: A) $[-1; +\infty[$ B) $[1; +\infty[$ C) $[-3; 2] \cup [1; +\infty[$ D) $[-3; +\infty[$

E) $]1; +\infty[$ F) $[-3; -2[\cup [1; +\infty[$ G) $]-1; 1[\cup]1; \infty[$ H) *outro*

Resolução: $\sqrt{x + 3} < x + 1$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow x \in [-3; +\infty[\\ x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \rightarrow x \in]-1; +\infty[\end{cases}$$

O conjunto verdadeiro da condição de existência é: $S_1 =]-1; +\infty[$

Resolvendo a inequação: elevando ambos membros da igualdade ao quadrado

$$(\sqrt{x + 3})^2 < (x + 1)^2 \rightarrow x + 3 < x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 + x - 2 > 0$$

Achando os zeros: $x^2 + x - 2 > 0$ ($a = 1; b = 1; c = -2$)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -2$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
$x^2 + x - 2 > 0$		<div>+</div>	<div>0</div>	<div>-</div>	<div>0</div>	<div>+</div>

$$s_2 = x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cap S_2$

$$S =]1; +\infty[\text{ , Línea E)}$$

132º) (Exame 2009) Resolver a equação:

$$(\cos x - \sin x) \left(2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right) + 2 = 0$$

$$\text{Resp: A) } \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \text{B) } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{C) } (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \text{D) } \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\text{E) } (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \text{F) } -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{G) } \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \text{H) } \textit{outro}$$

$$\text{Resolução: } (\cos x - \sin x) \left(2 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \right) + 2 = 0$$

Multiplicando todos os termos, vem:

$$\frac{2\sin x \cos x + \cos x - 2\sin^2 x - \sin x + 2\cos x}{\cos x} = 0$$

$$2\sin x \cos x + 3\cos x - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \text{ e}$$

$$\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ Sabe-se que: } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2\sin x \cos x + 3\cos x - 2(1 - \cos^2 x) - \sin x = 0$$

$$2\sin x \cos x + 3\cos x - 2 + 2\cos^2 x - \sin x = 0$$

$$(2\sin x \cos x - \sin x) + (2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = 0$$

$$\sin x(2\cos x - 1) + (2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = 0$$

$$\text{Nota que: } (2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = (2\cos x - 1)(\cos x + 2)$$

$$\sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$$

$$\text{Factorizando: } (2\cos x - 1), (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto, temos:

$$(2\cos x - 1) = 0 \text{ e } (\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$(2\cos x - 1) = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Fórmula geral dos cossenos: } x = \pm \alpha + 2k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$(\sin x + \cos x + 2) = 0 \rightarrow \sin x = -(2 + \cos x), \text{ elevando ao quadrado}$$

$$\sin^2 x = 4 + 4\cos x + \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 4 + 4\cos x + \cos^2 x \rightarrow 2\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0$$

$$\text{Fazendo: } \cos x = t \rightarrow 2t^2 + 4t + 3 = 0 \text{ (} a = 2; b = 4; c = 3 \text{)}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(3) \rightarrow \Delta = -8 < 0 \nexists t$$

$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ satisfaz a condição de existência $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, logo

A solução da equação é:

$$S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}, \text{ Línea B)}$$

133º) (Exame 2009) Simplificar a expressão:

$$a^{\frac{2}{\log_b a} + 1} \cdot b - 2 a^{\log_a b + 1} \cdot b^{\log_b a + 1} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b} + 1}$$

- A) $ab(a+b)$ B) $\frac{a-b}{ab}$ C) $\frac{ab}{a+b}$ D) $ab(a-b)$ E) $\frac{(a-b)^2}{ab}$ F) $ab(a-b)^2$
 G) $(a-b)^2$ H) *outro*

Resolução:

$$a \cdot a^{\frac{2}{\log_b a}} \cdot b - (2 a \cdot a^{\log_a b}) (b \cdot b^{\log_b a}) + a \cdot b \cdot b^{\frac{2}{\log_a b}}$$

$$\text{Mudanças de base: } \frac{1}{\log_b a} = \log_a b \quad e \quad \frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

$$a \cdot a^{2(\log_a b)} \cdot b - (2 a \cdot a^{\log_a b}) (b \cdot b^{\log_b a}) + a \cdot b \cdot b^{2(\log_b a)}$$

$$\text{Sabe-se que: } a^{\log_a b} = b \quad e \quad b^{\log_b a} = a \quad e \quad n \log_y x = \log_y x^n$$

$$a \cdot a^{(\log_a b^2)} \cdot b - (2 a \cdot b) (b \cdot a) + a \cdot b \cdot b^{(\log_b a^2)}$$

$$\text{Nota que: } a^{(\log_a b^2)} = b^2 \quad e \quad b^{(\log_b a^2)} = a^2$$

$$a b^2 b - 2 a^2 b^2 + a b a^2 = a b^3 - 2 a^2 b^2 + a^3 b$$

$$(a b^3 - a^2 b^2) + (a^3 b - a^2 b^2), \text{ factorizando:}$$

$$a b^2 (b - a) + a^2 b (a - b) = -a b^2 (a - b) + a^2 b (a - b)$$

Factorizando a expressão: $(a - b)$, temos:

$(a - b)(a^2 b - a b^2)$, factorizando ab no segundo produto, temos:

$$ab(a - b)(a - b) = ab(a - b)^2, \text{ Línea F)}$$

134º) (Exame 2009) Simplifique a expressão:

$$\frac{\left(\frac{1}{25^{2 \log_{49} 25} + 2^{\log_2 \log_2 \log_2 a^{2 \log_a 4}}} \right) \cdot 4^{\frac{2}{\log_3 4}} - a^2}{1-a}$$

Resp: A) $a - 1$ B) a C) a^2 D) $2a$ E) \sqrt{a} F) $1 - a$ G) $a + 1$ H) *outro*

Resolução:

$$\frac{\left(\frac{1}{25^{2\log_{(7^2)} 25} + 2\log_2 \log_2 \log_2 a^{\log_a 4^2}} \right) \cdot 4^{-2\log_4 3} - a^2}{1-a} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{25^{2\left(\frac{1}{2}\right)\log_7 25} + 2\log_2 \log_2 \log_2 a^{\log_a 4^2}} \right) \cdot 4^{\log_4 3^{-2}} - a^2}{1-a}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{25^{\log_7 25} + 2\log_2 \log_2 \log_2 4^2} \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{\left(25^{\log_{25} 7} + 2\log_2 \log_2 \log_2 (2)^4 \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a}$$

$$\frac{\left(7 + 2\log_2 \log_2 4^2 \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{\left(7 + 2\log_2 \log_2 2^2 \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{\left(7 + 2\log_2 2^2 \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a}$$

$$\frac{(7+2^1) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{(9) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{(3^2) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a ,$$

Línea G

135º) (Exame 2009) Resolva a equação:

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x$$

$$\text{Resp: A) } 2\pi k ; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \text{B) } 2\pi k ; \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \text{C) } \pi k ; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$\text{D) } \pi k ; \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \text{E) } 2\pi k ; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \text{F) } \pi k ; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$\text{G) } \pi k ; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \text{H) } \text{outro}$$

$$\text{Resolução: } \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x \rightarrow$$

$$4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 3x = 4\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x$$

$$4\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x - 4\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x \rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x(4\operatorname{sen} x - 1)$$

$$\text{Sabe-se que: } \operatorname{sen}^2 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$$

$$4\operatorname{sen}^2 x = (3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x)^2(4\operatorname{sen} x - 1) ,$$

Factorizando $\operatorname{sen} x$ na segunda expressão:

$$4\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x(3 - 4\operatorname{sen}^2 x)^2(4\operatorname{sen} x - 1) ,$$

$$4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x(3 - 4\operatorname{sen}^2 x)^2(4\operatorname{sen} x - 1) = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x[4 - (9 - 24\operatorname{sen}^2 x + 16\operatorname{sen}^4 x)(4\operatorname{sen} x - 1)] = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x[4 - (36\operatorname{sen} x - 9 - 96\operatorname{sen}^3 x + 24\operatorname{sen}^2 x + 64\operatorname{sen}^5 x - 16\operatorname{sen}^4 x)] = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x(4 - 36\operatorname{sen} x + 9 + 96\operatorname{sen}^3 x - 24\operatorname{sen}^2 x - 64\operatorname{sen}^5 x + 16\operatorname{sen}^4 x)$$

$$\operatorname{sen}^2 x(-64\operatorname{sen}^5 x + 16\operatorname{sen}^4 x + 96\operatorname{sen}^3 x + 24\operatorname{sen}^2 x + 36\operatorname{sen} x + 13) = 0$$

Multiplicar o segundo produto por (-1) temos:

$$\text{sen}^2 x (64\text{sen}^5 x - 16\text{sen}^4 x - 96\text{sen}^3 x + 24\text{sen}^2 x + 36\text{sen} x - 13) = 0$$

Fazendo: $\text{sen} x = t$

$$t^2 (64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13) = 0, \text{ Anulando os produtos temos:}$$

$$t^2 = 0 \rightarrow t_1 = 0 \text{ (raiz dupla)}$$

$$64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13 = 0$$

Considerando que: $p(t) = 64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13$ é um polinómio

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 64\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 96\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 36\left(\frac{1}{2}\right) - 13$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 1 - 12 + 6 + 18 - 13 \rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 0, t = \frac{1}{2} \text{ é uma das raízes da equação do } 5^\circ \text{ grau.}$$

Dividindo pelo método de chave, onde:

$$p(t) = 64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13 \text{ e } D(t) = t - \frac{1}{2}, \text{ Obtemos:}$$

$$Q(t) = 64t^4 + 16t^3 - 88t^2 - 20t + 26, R(t) = 0, p(t) = D(t) \cdot Q(t) + R(t)$$

$$p(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right) (64t^4 + 16t^3 - 88t^2 - 20t + 26) = 0$$

Anulando o produto:

$$t - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow t_2 = \frac{1}{2}$$

$$64t^4 + 16t^3 - 88t^2 - 20t + 26 = 0 \text{ (A equação não tem raízes reais)}$$

Voltando na suposição:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen} x = t_1 \rightarrow \text{sen} x = 0 \rightarrow \text{sen} x = \text{sen}(0) \rightarrow (\alpha = 0), x = \pi k \\ \text{sen} x = t_2 \rightarrow \text{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen} x = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{6}, \alpha > 0\right); x = (-1)^k \alpha + \pi k \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \pi k \\ x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \end{array} \right\} \text{ A solução da equação é: } S = \left\{ \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \right\}, \text{ Línea F}$$

136º) (Exame 2009) Seja dada $P(x) = ax^2 - ax - 2c$. Sabendo que a soma das raízes da equação $P(x) = 0$ iguala a $\log_a c$. Encontre o produto das raízes daquela equação.

Resp: A) $(x_1 \ x_2 = 1)$ B) $(x_1 \ x_2 = -2)$ C) $(x_1 \ x_2 = -1)$ D) $(x_1 \ x_2 = 0)$ E) $\left(x_1 \ x_2 = -\frac{5}{2}\right)$ $(x_1 \ x_2 = -7)$

Resolução: $P(x) = ax^2 - ax - c$, a composição de uma equação quadrática é: $x^2 - x + p = 0$

$$\text{na equação: } ax^2 - ax - c = 0 \rightarrow \begin{cases} s = -\frac{b}{a} = \log_a c = -\frac{(-a)}{a} = \log_a c \rightarrow c = a \\ x_1 x_2 = p \left(p = \frac{c}{a} = \frac{-2c}{a} \rightarrow p = \left(-\frac{2a}{a} \right) \rightarrow p = -2 \right) \end{cases}$$

Línea B)

137º) (Exame 2009) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $S_n = 3n^2$. Além disso o seu terceiro termo é 45. Então a razão desta progressão é:

Resp: a) 20 b) 16 c) 21 d) 5 e) outra solução

Resolução: $S_n = 3n^2$ $a_3 = 45$, $r = ?$

O termo geral da PA é: $a_n = a_1 + (n - 1)r$, se $n = 3$

$$a_3 = a_1 + 2r \rightarrow a_1 + 2r = 45 \quad (1)$$

, a soma de n termos da PA é: $S_n = \frac{n}{2}(a_n + a_1) \rightarrow 3n^2 = \frac{n}{2}(a_n + a_1)$

$$\text{Para } n = 3 \rightarrow 3 \times 3^2 = \frac{3}{2}(a_3 + a_1) \rightarrow a_3 + a_1 = 18 \rightarrow 45 + a_1 = 18 \rightarrow a_1 = -27$$

Substituindo em (1): $-27 + 2r = 45 \rightarrow r = 36$, Línea e)

138º) (Exame 2009) Numa progressão aritmética (finita), o quarto termo é igual a catorze e a soma dos 20 primeiros termos é quatro vezes maior do que a soma dos dez primeiros ($S_n \neq 0$). Então o décimo termo desta progressão é igual a:

Resp: a) 24 b) 30 c) 36 d) 38 e) 40 f) outro valor

Resolução: $a_4 = 14$, $s_{20} = 4 s_{10}$, $a_{10} = ?$

O termo geral da PA é: $a_n = a_1 + (n - 1)r$, se $n = 4$, $a_4 = a_1 + 3r \rightarrow a_1 + 3r = 14$ (1)

$$\text{se } n = 10, a_{10} = a_1 + 9r \text{ e se } n = 20, a_{20} = a_1 + 19r$$

A soma de n termos da PA é: $S_n = \frac{n}{2}(a_n + a_1)$

$$\text{se } n = 20 \rightarrow s_{20} = 10(a_{20} + a_1) \rightarrow s_{20} = 10(2a_1 + 19r)$$

$$\text{se } n = 10 \rightarrow s_{20} = 5(a_{10} + a_1) \rightarrow s_{10} = 5(2a_1 + 9r), \text{ sabe-se que: } s_{20} = 4 s_{10}$$

$$10(2a_1 + 19r) = 4 \times 5(2a_1 + 9r) \rightarrow 2a_1 - r = 0 \rightarrow r = 2a_1 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 2a_1 = r \\ 14 = a_1 + 3r \end{cases}$, $a_1 = 2$ e $r = 4$, o décimo termo será:

$$a_{10} = 2 + 9(4) \rightarrow a_{10} = 38, \text{ Línea d)}$$

139º) (Exame 2009) A diagonais de um trapézio são reciprocamente perpendiculares iguais a 12 cm e 16 cm. Qual a altura do trapézio ?

Resp:

A) 9,6 cm B) 12 cm C) 10,8 cm D) 14,4 cm E) 7,2 cm F) 10,0 cm G) 12,4 cm H) outro

Resolução: $d_1 = 16 \text{ cm}, d_2 = 12 \text{ cm}, h = ?$

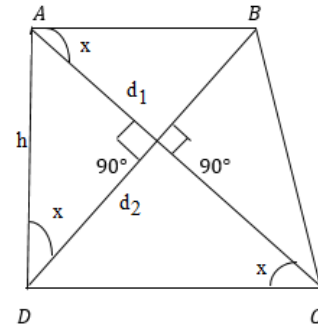
Pelo triângulo ADC: $\text{sen} x = \frac{h}{d_1}$

Pelo Triângulo ADB: $\text{cos} x = \frac{h}{d_2}$

Em trigonometria sabe-se que:

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \rightarrow \left(\frac{h}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{h}{d_2}\right)^2 = 1 \rightarrow$$

$$\text{Desdobrando vem: } h = \sqrt{\frac{d_1^2 \times d_2^2}{d_1^2 + d_2^2}} \rightarrow h = \sqrt{\frac{(16)^2 \times (12)^2}{[(16)^2 + (12)^2]}} \rightarrow h = 9,6 \text{ cm, Línea A)}$$



140º) (Exame 2009) A bissetriz do ângulo de um triângulo rectangular divide a sua hipotenunsa em dois segmentos de comprimentos 2 cm e 6 cm. Qual é a área deste triângulo?

Resp:

a) $\frac{28}{3} \text{ cm}^2$ b) $\frac{19}{2} \text{ cm}^2$ c) $\frac{48}{5} \text{ cm}^2$ d) $\frac{32}{3} \text{ cm}^2$ e) $\frac{52}{5} \text{ cm}^2$ f) $\frac{21}{2} \text{ cm}^2$ g) 10 cm^2 h) outro

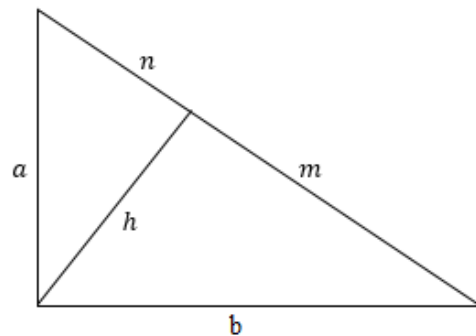
Resolução: $m = 6 \text{ cm}$ e $n = 2 \text{ cm}, A = ?$

A área do triângulo será dada por:

$$A = \frac{ab}{2}$$

Tendo em conta a relações métricas em um triângulo rectângulo:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} \rightarrow b = 3a$$



Pelo teorema de pitágora: $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 + (3a)^2 = (8)^2 \rightarrow a = \frac{8}{\sqrt{10}}$ e $b = \frac{24}{\sqrt{10}}$

$$A = \frac{ab}{2} \rightarrow A = \frac{1}{2} \times \frac{8}{\sqrt{10}} \times \frac{24}{\sqrt{10}} \rightarrow A = \frac{48}{5} \text{ cm}^2, \text{ Línea c)}$$

141º (Exame 2009) Resolva a inequação: $x + 4 < \sqrt{x + 46}$

Resp: A) $] -4; 3[$ B) $[-46; 3[$ C) $[-46; 10] \cup$
 $] -4; 3[$ D) $[-46; 3]$ E) $] -10; -4] \cup]3; +\infty[$

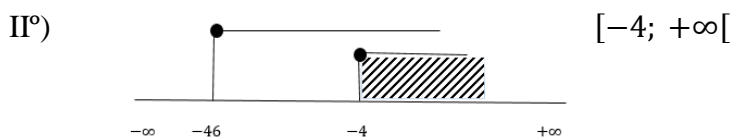
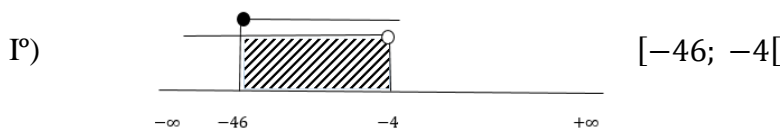
F) $] -10; 3[$ G) $] -4; \infty[$ H) *outro*

Resolução: $x + 4 < \sqrt{x + 46} \rightarrow \sqrt{x + 46} > x + 4$

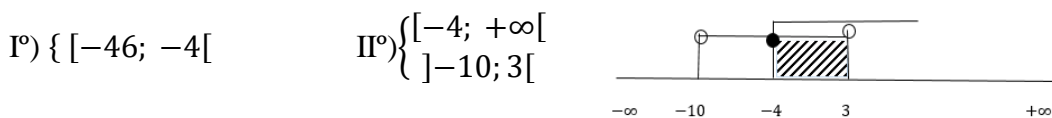
A inequação cumpre-se nas seguintes condições:

$$I^o) \begin{cases} x + 46 \geq 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases} \quad II^o) \begin{cases} x + 46 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \\ \sqrt{x + 46} > x + 4 \end{cases}$$

$$I^o) \begin{cases} x \geq -46 \\ x < -4 \end{cases} \quad II^o) \begin{cases} x \geq -46 \\ x \geq -4 \\ (\sqrt{x + 46})^2 > (x + 4)^2 \rightarrow x^2 + 7x - 30 < 0 \end{cases}$$



$$I^o) \{ [-46; -4[\quad II^o) \begin{cases} x \geq -46 \\ x \geq -4 \\ x^2 + 7x - 30 < 0 \quad (x_1 = 3; x_2 = -10) \end{cases}$$



$$I^o) \{ [-46; -4[\quad II^o) \{ [-4; 3[$$

A solução da inequação é: $S = S(I) \cup S(II) = [-46; -4[\cup [-4; 3[$, $S = [-46; 3[$, *Línea B*)

142º (Exame 2009) A altura do triângulo isóceles tracejada a base é igual a 20 cm e a altura tracejada ao lado lateral é igual a 24 cm. Qual é a área deste triângulo?

Resp

a) 300 cm^2 b) 320 cm^2 c) 256 cm^2 d) 360 cm^2 e) 280 cm^2 f) 240 cm^2 g) 200 cm^2 h) *outro*

Resolução: $h_a = m_A = 20 \text{ cm}$ e $h_c = 24 \text{ cm}$

a, b e c são os lados do triângulo isóceles, $c = b$

A, B e C são os vértices

Como o triângulo é isóceles, a altura tracejada a base de lado (a) é igual a mediana relativa ao vértice A :

$$m_A = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2} \rightarrow m_A = \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$$

$$20 = \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2} \rightarrow 4b^2 - a^2 - 1600 = 0 \text{ (I)}$$

Pela semelhança de triângulos temos:

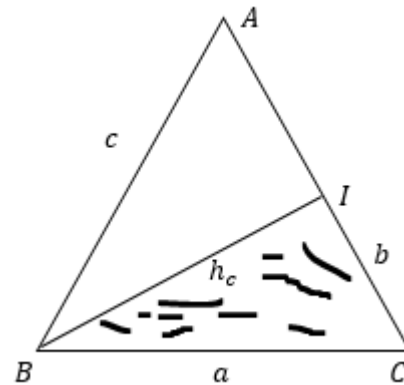
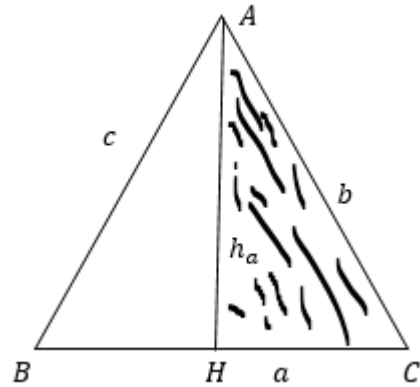
$$\frac{BC}{CA} = \frac{BI}{AH} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_c}{h_a} \rightarrow a = 1,2 b, \text{ substituindo em (I)}$$

$$4b^2 - (1,2b)^2 - 1600 = 0 \rightarrow b = 25 \text{ cm}$$

$$a = 1,2 \times 25 \rightarrow a = 30 \text{ cm}$$

$$\text{A área do triângulo é: } A = \frac{a h_a}{2}$$

$$A = \frac{30 \times 20}{2} \rightarrow A = 300 \text{ cm}^2, \text{ Línea a)}$$



143º) (Exame 2009) Os catetos de um triângulo rectângulos são iguais a 18 cm e 24 cm. Encontre a bissetriz do triângulo tracejada do vértice do ângulo agudo menor.

Resp:

a) $8\sqrt{10} \text{ cm}$ b) $12\sqrt{6} \text{ cm}$ c) $16\sqrt{3} \text{ cm}$ d) $16\sqrt{2} \text{ cm}$ e) $12\sqrt{5} \text{ cm}$ f) 24 cm g) 20 cm h) outro

Resolução: $a = 18 \text{ cm}$, $b = 24 \text{ cm}$, $l_A = ?$

A hipotenusa do triângulo é:

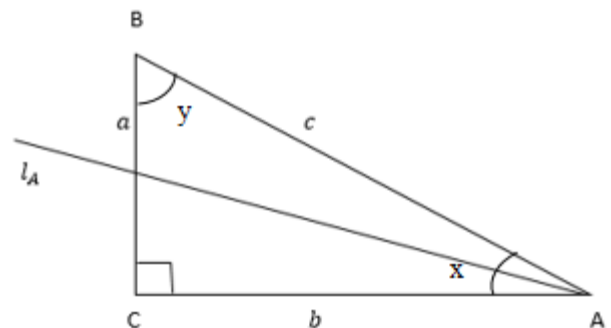
$$c^2 = 18^2 + 24^2 \rightarrow c = 30 \text{ cm}$$

A bissetriz relativa ao ângulo agudo menor (x) é:

$$l_A = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$$

$$l_A = \frac{\sqrt{24 \times 30 [(24+30)^2 - (18)^2]}}{24+30} \rightarrow, \text{ reduzindo as expresões vem:}$$

$$l_A = 8\sqrt{10} \text{ cm}, \text{ Línea a)}$$



Exames de Acesso 2008

144º)(Exame 2008) As bases de um trapézio são iguais a 1,0 cm e 7,0 cm. Determinar o comprimento do segmento que é paralelo às bases e divide a área do trapézio em partes equivalentes.

R:

a) $\frac{5}{3} \sqrt{3} \text{ cm}$ b) 7,5 cm c) $\frac{7}{2} \sqrt{2} \text{ cm}$ d) 5,0 cm e) 6,25 cm f) 5,75 cm g) 6,0 cm H) outro

Resolução: $B = 7,0 \text{ cm}$ e $b = 1,0 \text{ cm}$, $m = ?$ ($m > 0$)

A área do trapézio : $A_t = 2 A$

$$A_t = \frac{(B+b)h}{2} \rightarrow A_t = 4 h, h = h_1 + h_2$$

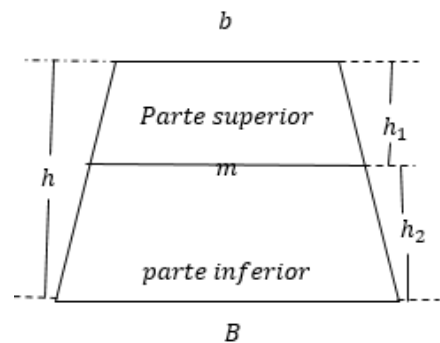
$$A_t = 4 (h_1 + h_2) \quad (1)$$

$$4 (h_1 + h_2) = 2A \rightarrow A = 2 (h_1 + h_2)$$

$$\text{Na parte superior: } A_1 = \frac{(m+b)h_1}{2} \rightarrow h_1 = \frac{2A}{m+1} \quad (2)$$

$$\text{Na parte inferior: } h_2 = \frac{2A}{m+7}$$

$$A = 2 \left(\frac{2A}{m+1} + \frac{2A}{m+7} \right) \rightarrow m^2 = 25 \rightarrow m = \pm 5, m = 5, \text{ Línea d)}$$



145º) (Exame 2008) A relação entre os catetos de um triângulo rectângulo é 1,05 e a diferença dos raios inscritos e circunscritos é igual a 17 cm. Determine a área do triângulo.

Resp:

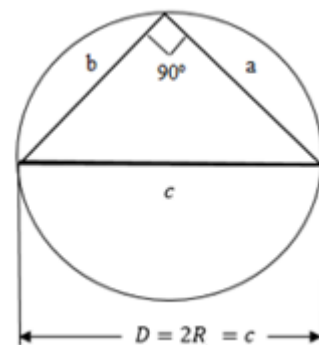
A) $600 \sqrt{2} \text{ cm}^2$ B) 840 cm^2 C) $644 \sqrt{2} \text{ cm}^2$ D) $485 \sqrt{3} \text{ cm}^2$ E) 828 cm^2 F) 860 cm^2 G) $450 \sqrt{3} \text{ cm}^2$ H) outro

Resolução: $\frac{a}{b} = 1,05 \rightarrow a = 1,05 b, R_1 - R_2 = 17 \text{ cm}$

A área do triângulo é: $A_\Delta = \frac{a b}{2}$

1º) Triângulo incrito: Quando um triângulo rectângulo encontra-se inscrito numa circunferência, a hipotenunsa é igual ao dobro do raio circunscrito ou seja: $c =$

$$D, R_1 = \frac{D}{2} \rightarrow R_1 = \frac{c}{2}$$



2º) Triângulo circunscritos : Quando um triângulo rectângulo encontra-se circunscritos num círculo, o raio é dado pela relação:

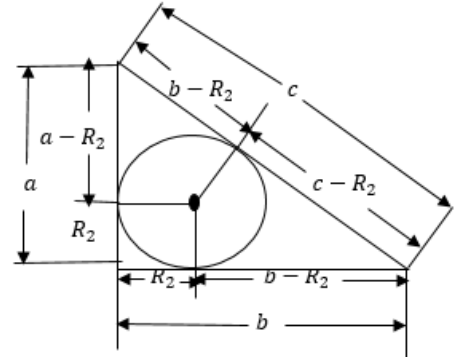
$$c = b - R_2 + a - R_2 \rightarrow R_2 = \frac{a+b-c}{2}.$$

Sabe-se que: $R_1 - R_2 = 17 \text{ cm}$

$$\frac{c}{2} - \frac{a+b-c}{2} = 17 \rightarrow 2c - a - b = 34, \text{ sabe-se que: } a = 1,05b, 2c - 2,05b = 34 \quad (1)$$

Pelo teorema de pitágora: $c^2 = a^2 + b^2$, onde: $a = 1,05b, b = \frac{c}{1,45} \quad (2)$

Substituindo (2) em (1), vem: $0,85c = 49,3 \rightarrow c = 58, b = 40 \text{ e } a = 42$, logo a área do triângulo é: $A_{\Delta} = \frac{42 \times 40}{2} \rightarrow A_{\Delta} = 840 \text{ cm}^2$, Línea B)



146º) (Exame 2008) Determine a área do triângulo se o seus dois lados são iguais a $1,0 \text{ cm}$ e $\sqrt{15} \text{ cm}$ e a mediana tracejada ao terceiro lado é $2,0 \text{ cm}$.

A) $\sqrt{5} \text{ cm}^2$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ cm}^2$ C) $\frac{5}{4}\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D) $\frac{3}{4}\sqrt{6} \text{ cm}^2$ E) $2,0 \text{ cm}^2$ F) $\frac{1}{2}\sqrt{15} \text{ cm}^2$ G) $\frac{3}{5}\sqrt{10} \text{ cm}^2$ H) outro

Resolução: $a = 1, b = \sqrt{15}, m_A = 2, A_{\Delta} = ?$

A mediana tracejada ao terceiro vértice é dado pela relação:

A área do triângulo é dado pela relação:

$A_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (1)$, p - é o perímetro

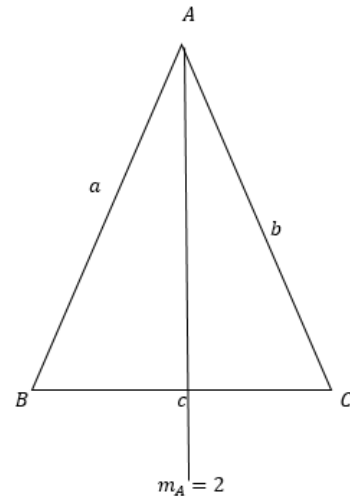
$$m_A = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2} \rightarrow 2 = \frac{\sqrt{2(1^2+15)-c^2}}{2} \rightarrow c = 4 \text{ cm}$$

Semi perímetro: $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{15} + 4)$

$p = \frac{5+\sqrt{15}}{2} \quad (2)$, substituindo (2) em (1), vem:

$$A_{\Delta} = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{15}}{2}\right)\left(\frac{5+\sqrt{15}}{2} - 1\right)\left(\frac{5+\sqrt{15}}{2} - \sqrt{15}\right)\left(\frac{5+\sqrt{15}}{2} - 4\right)}$$

$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \text{ cm}^2$, Línea F)



147º) (Exame 2008) Determina a área de um trapézio se o raios dos círculos inscrito e circunscrito são iguais a 5,0 cm e 6,0 cm, respectivamente.

Resp:

A) $45\sqrt{5} \text{ cm}^2$ B) 90 cm^2 C) $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D) $60\sqrt{2} \text{ cm}^2$ E) 96 cm^2 F) $45\sqrt{3} \text{ cm}^2$ G) $40\sqrt{5} \text{ cm}^2$ H) outro

Resolução: $R_1 = 5,0 \text{ cm}$, $R_2 = 6,0 \text{ cm}$, $A = ?$

A área de um trapézio é determinado pela relação: $A = \frac{(B+b)h}{2}$ (1)

1º) Caso: Raio inscrito

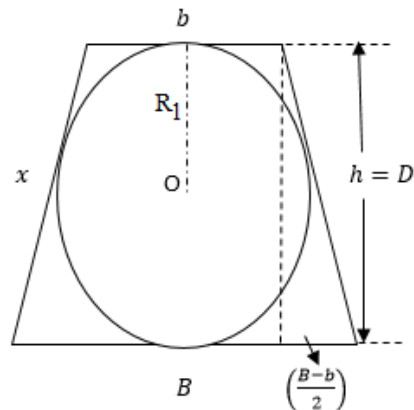
B - base maior do trapézio, b - base menor do trapézio, h - altura do trapézio, D - diâmetro

R_1 - Raio do círculo inscrito, x - é o comprimento do trapézio

Pela figura: $h = D = 2 R_1$, $h = 10 \text{ cm}$

Para um quadrilátero circunscrito é válida a relação:

$$x + x = B + b \rightarrow x = \frac{B+b}{2} \quad (2)$$



2º) Caso: Raio circunscrito

Pela figura é fácil deduzir que:

$$AE = \frac{B+b}{2}$$

Pelo triângulo AEC, temos:

$$d^2 = (AE)^2 + h^2, \text{ d - é a diagonal}$$

$$d^2 = 100 + \left(\frac{B+b}{2}\right)^2 \quad (3)$$

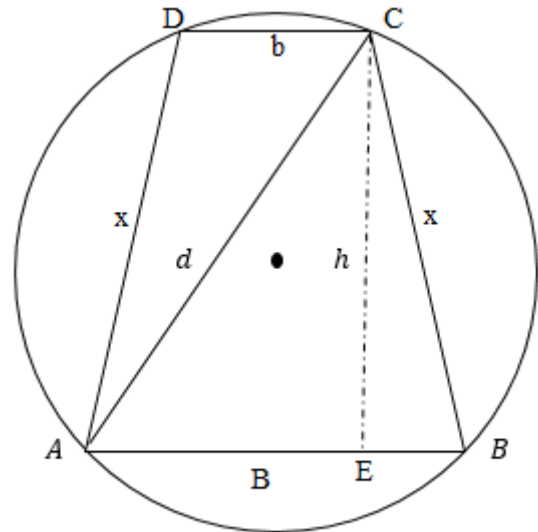
A área do triângulo ACB é:

$$A = \frac{Bh}{2} \rightarrow A = \frac{10B}{2} \rightarrow A = 5B$$

Como o centro da circunferência é um ponto interior do triângulo ACB, a área também pode ser determinada pela relação:

$$A = \frac{x d B}{4 R_2} \rightarrow A = \frac{x d}{24}, \text{ relacionado as áreas vem: } \frac{x d B}{24} = 5B \rightarrow x d = 120 \quad (4)$$

$$\text{Da equação (2), sabe-se que: } x = \frac{B+b}{2}, \left(\frac{B+b}{2}\right) d = 120 \rightarrow d = \frac{240}{(B+b)} \quad (5)$$



Substituindo a equação (5) em (3), vem:

$$\frac{57600}{(B+b)^2} = 100 + \left(\frac{B+b}{2}\right)^2 \rightarrow (B+b)^4 + 400(B+b)^2 - 230400 = 0$$

Supondo que: $(B+b)^2 = A$ ($A > 0$), $A^2 + 400A - 230400 = 0$

Resolvendo a equação: $A_1 = 320$ e $A_2 = -720$

Voltando na suposição: $(B+b)^2 = A \rightarrow (B+b)^2 = 320 \rightarrow (B+b) = 8\sqrt{5}$ (6)

Colocando (6) em (1), vem:

$$A = \frac{(B+b)h}{2} \rightarrow A = \frac{10 \times 8\sqrt{5}}{2} \rightarrow A = 40\sqrt{5} \text{ cm}^2, \text{ Línea G}$$

Exame de Acesso 2007

148º) (Exame 2007) Simplifique a expressão: $\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}$

Resp: a) $-\cos\alpha$ b) $1/2 \cos 4\alpha$ c) $\sin 2\alpha$ d) $2 \sin\alpha$ f) $-1/2 \sin 4\alpha$ g) $2 \cos 2\alpha$ h) *outro*

Resolução: $\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\alpha-2\pi)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}$

$$\frac{1+[\cos(4\alpha+2\pi)+\cos(2\alpha-2\pi)]-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\alpha-2\pi)+2[\cos(2\alpha+\pi)]^2-1} \quad (*)$$

Aplicando a transformação, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ para a expressão em parenteses, teremos;

$$[\cos(4\alpha+2\pi) + \cos(2\alpha-2\pi)] = 2\cos 3\alpha \cos(\alpha+2\pi)$$

$$\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$$

$$\rightarrow [\cos(4\alpha+2\pi) + \cos(2\alpha-2\pi)] = 2\cos 3\alpha \cos\alpha$$

$$\cos(6\alpha-\pi) = \cos 6\alpha \cdot \cos\pi + \sin 6\alpha \cdot \sin\pi = -\cos 6\alpha$$

$$\cos 6\alpha = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha \rightarrow \cos(6\alpha-\pi) = -(\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha)$$

$$\text{Nota: } \cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha = 1$$

$$\text{No denominador: } \cos(2\alpha-2\pi) = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\pi + \sin 2\alpha \cdot \sin 2\pi = \cos 2\alpha$$

$$\cos(2\alpha+\pi) = \cos 2\alpha \cdot \cos\pi - \sin 2\alpha \cdot \sin\pi = -\cos 2\alpha$$

Substituindo em (*), vem;

$$\frac{\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha + 2\cos 3\alpha \cos\alpha - [-(\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha)]}{\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1}$$

$$= \frac{\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha + 2 \cos 3\alpha \cos \alpha + \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha}{\cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha - 1} = \frac{2 \cos^2 3\alpha + 2 \cos 3\alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha + (2 \cos^2 2\alpha - 1)}$$

Nota: $(2 \cos^2 2\alpha - 1) = \cos 4\alpha$

$\frac{2 \cos 3\alpha (\cos 3\alpha + \cos \alpha)}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ (**), Pela transformação da soma em producto temos:

$$(\cos 3\alpha + \cos \alpha) = 2 \cos 2\alpha \cos \alpha \text{ e } \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 2 \cos 3\alpha \cos \alpha$$

Substituindo em (**), vem; $\frac{2 \cos 3\alpha \cdot (2 \cos 2\alpha \cos \alpha)}{2 \cos 3\alpha \cos \alpha} = 2 \cos 2\alpha$, Línea g)

149º) (Exame 2007) As medianas de um triângulo são 5, 6 e 5 m. Achar a área do triângulo.

Resp:

a) $18,5 \text{ m}^2$ b) 16 m^2 c) $20,5 \text{ m}^2$ d) 20 m^2 e) 15 m^2 f) $16,25 \text{ m}^2$ g) $20,25 \text{ m}^2$ h) outro

Resolução: $m_A = 6 \text{ m}$; $m_B = 5 \text{ m}$, $m_C = 5 \text{ m}$, $A = ?$

a área do triângulo é: $A = \frac{\text{base} \times h}{2}$

onde a base $\text{base} = a$ e $h = m_A = 6 \text{ m}$

A mediana relativa a A é:

$$m_A = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2} \rightarrow 6 = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 144 \text{ (I)}$$

A mediana relativa a B é:

$$m_B = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2} \rightarrow 5 = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}$$

$$2a^2 + 2c^2 - b^2 = 100 \text{ (II)}$$

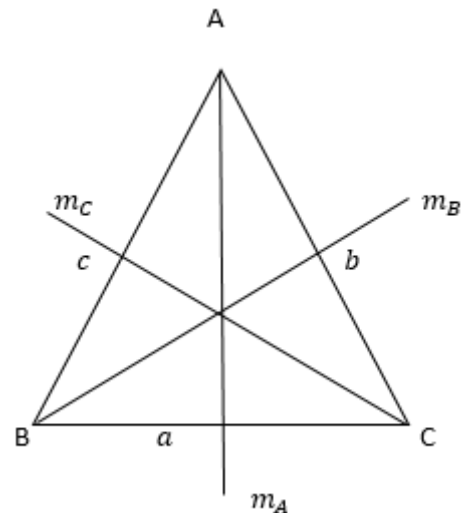
A mediana relativa a C é:

$$m_C = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2} \rightarrow 5 = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}$$

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 100 \text{ (III)}$$

$$\text{Resolvendo o sistema: } \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 144 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 100 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 100 \end{cases}, a = \frac{16}{3} \text{ m}, b = \frac{2\sqrt{97}}{3} \text{ e } c = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Logo temos: $A = \frac{16}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \rightarrow A = 16 \text{ m}^2$, Línea b)



150º) (Exame 2007) Resolver a equação: $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2$

Resp: a) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{66}}{4}$ b) $x_1 = 0, x_2 = -1, x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{62}}{2}$

c) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_{3,4} = \frac{2 \pm 3\sqrt{68}}{4}$ d) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}$

e) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_{3,4} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{62}}{2}$ f) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{3,4} = \frac{3 \pm 2\sqrt{68}}{4}$

g) $x_1 = -2, x_2 = -1, x_{3,4} = \frac{3 \pm 2\sqrt{62}}{4}$ h) *outro*

Resolução: $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2 \rightarrow \frac{24}{x^2+2x-3-5} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2$

Supondo que: $x^2 + 2x - 3 = t, \frac{24}{t-5} - \frac{15}{t} = 2 \rightarrow 2t^2 - 19t - 75 = 0 \left(t_1 = \frac{25}{2} \text{ e } t_2 = -3 \right)$

Para $t_1 = \frac{25}{2}, x^2 + 2x - 3 = \frac{25}{2} \rightarrow 2x^2 + 4x - 31 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-31)}}{2(2)} = -\frac{4 \pm \sqrt{264}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{66}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}$

Para $t_2 = -3, x^2 + 2x - 3 = -3 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow (x_3 = 0 \text{ e } x_4 = -2)$

A solução da equação é: $x_1 = 0, x_2 = -2, x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}$, Línea d)

151º) (Exame 2007) Resolver a inequação: $\sqrt{x+61} < x+5$

Resp: a) $[-5; 0[\cup]3; +\infty[$ b) $]-5; +\infty[$ c) $]-61; -5] \cup]3; +\infty[$ d) $[-12; -5] \cup]3; +\infty[$ e) $]3; +\infty[$ f) $[-61; -5[\cup [0; 3[$ g) $[-5; 0] \cup]3; 5]$ h) *outro*

Resolução: $\sqrt{x+61} < x+5$

Condição de existência: $\begin{cases} x+61 \geq 0 \rightarrow x \geq -61 \\ x+5 > 0 \rightarrow x > -5 \end{cases} \rightarrow s_1 =]-5; +\infty[$

Resolvendo a equação: Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado:

$(\sqrt{x+61})^2 < (x+5)^2 \rightarrow x+61 < x^2+10x+25 \rightarrow x^2+9x-36 > 0$

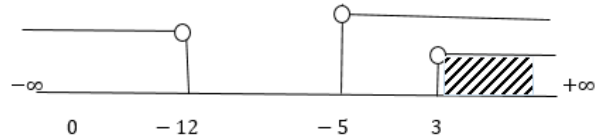
$(x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -12)$

x	$-\infty$	-12	3	$+\infty$
$x^2 + 9x - 36 > 0$		+	O	-

$s_2 =]-\infty; -12[\cup]3; +\infty[$

A solução da inequação é: $s = s_1 \cap s_2$

$$s =]3; +\infty[$$



152º) (Exame 2007) Simplificar a expressão:

$$(6 \log_a b \cdot \log_b a + 3 + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b, \text{ se } a > 1, 0 < b < a^3$$

Resp: a) $2 \log_a b - 3$ b) -3 c) $2 - 3 \log_b a$ d) 0 e) $\log_a b + 3$ f) $3 - 2 \log_a b$

g) 3 h) *outro*

$$\text{Resolução: } (6 \log_a b \cdot \log_b a + 3 + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$$

$$(6 \log_a b \cdot \log_b a + 3 - 6 \log_a b + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b, \text{ mudando as bases:}$$

$$\left(6 \log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} + 3 - 6 \log_a b + \log_a^2 b\right)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$$

$$(6 + 3 - 6 \log_a b + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b \rightarrow (9 - 6 \log_a b + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$$

$$(\log_a^2 b - 6 \log_a b + 9)^{\frac{1}{2}} - \log_a b, \text{ nota: quadrado perfeito:}$$

$$\log_a^2 b - 6 \log_a b + 9 = (\log_a b - 3)^2, \text{ assim temos:}$$

$$[(\log_a b - 3)^2]^{\frac{1}{2}} - \log_a b, \text{ simplificando os expoentes, fica:}$$

$$\log_a b - 3 - \log_a b = -3, \text{ Línea b)}$$

153º) (Exame 2007) Simplificar a expressão: $\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\left(\frac{\alpha}{4}\right) \left[\tan^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) - \tan^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)\right]}$

115) Resp: a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ d) 0 e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ f) 1 g) $1/8$ h) *outro*

Resolução:

$$\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \left[1 + \tan^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\cos^{-2}\left(\frac{\alpha}{4}\right) \left[\tan^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) - \tan^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)\right]}$$

Pela transformação: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Pela transformação: $tg\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos\frac{3}{4}\alpha}{\sin\frac{3}{4}\alpha}$; $tg\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\cos\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{4}}$; $tg\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) = -\frac{\cos\frac{3}{4}\alpha}{\sin\frac{3}{4}\alpha}$

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1 + \frac{\cos^2\frac{3}{4}\alpha}{\sin^2\frac{3}{4}\alpha}\right]}{\cos^{-2}\left(\frac{\alpha}{4}\right)\left[\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}} - \frac{\cos^2\frac{3}{4}\alpha}{\sin^2\frac{3}{4}\alpha}\right]} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\frac{\sin^2\frac{3}{4}\alpha + \cos^2\frac{3}{4}\alpha}{\sin^2\frac{3}{4}\alpha}\right]}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}\left[\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}} - \frac{\sin^2\frac{3}{4}\alpha - \sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3}{4}\alpha}\right]} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}\left[\frac{\left\{\sin\left(\frac{3}{4}\alpha\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right\}^2 - \left\{\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{4}\alpha\right)\right\}^2}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}\right]} \quad \text{Pela transformação: } \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3}{4}\alpha\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{4}\alpha\right) = \frac{-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\alpha}{2}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}\left[\frac{\left\{\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\alpha}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\alpha}{2}\right\}^2}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}\right]} =$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\left[\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha + \sin^2\alpha - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha - \sin^2\alpha}{4}\right]} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\left[\frac{4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}{4}\right]}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right]^2}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha},$$

Nota: $\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\right]^2}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\alpha} = \frac{\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{4\sin\alpha}$$

Nota: $\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\sin\alpha}{2}$

$$= \frac{\left[\frac{\sin\alpha}{2}\right]}{4\sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

154º) (Exame 2007) Resolver a equação: $\cot^4 x = \cos^2 2x - 1$

Resp: a) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ b) $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$ c) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ d) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

e) $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ f) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$ g) $x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi k$ h) *outro*

Resolução: $\cot^4 x = \cos^2 2x - 1$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ e $\cot^4 x = \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}$

$$\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} = (2\cos^2 x - 1)^2 - 1 \rightarrow \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 1$$

$$\cos^4 x = 4\cos^2 x (\cos^2 x - 1)\sin^4 x \rightarrow \cos^4 x = -4\cos^2 x (1 - \cos^2 x)\sin^4 x$$

$$\cos^4 x = -4\cos^2 x \sin^6 x \rightarrow \cos^4 x + 4\cos^2 x \sin^6 x = 0 \rightarrow$$

$$\cos^2 x [\cos^2 x + 4\sin^6 x] = 0, \text{ anulando os productos:}$$

$$\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\cos^2 x + 4\sin^6 x = 0 \rightarrow 1 - \sin^2 x + 4\sin^6 x = 0 \rightarrow 4\sin^6 x - \sin^2 x + 1 = 0$$

Supondo que: $\sin^2 x = t$, $4t^3 - t + 1 = 0$, esta equação cúbica não tem raízes reais.

A solução da equação é: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, Línea d)

155º) (Exame 2007) Achar a área do triângulo se os seus lados são 35 e 14 cm e a bissetriz do ângulo entre estes dois lados é 12 cm.

resp: a) 242 cm^2 b) $235,2 \text{ cm}^2$ c) $240,5 \text{ cm}^2$ d) 236 cm^2 e) $234,5 \text{ cm}^2$

f) $230,2 \text{ cm}^2$ g) 240 cm^2 h) *outro*

Resolução: $c = 35 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$, $l_A = 12 \text{ cm}$, $A = ?$

A área do triângulo pode ser calculado pela relação:

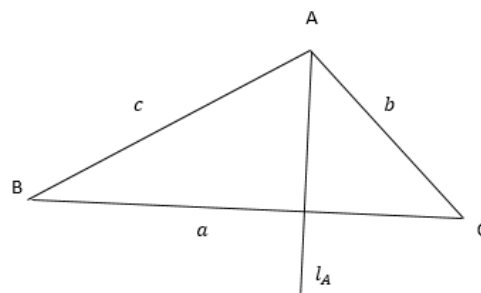
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Onde p é o semi perímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

O comprimento da bissetriz do ângulo é: $l_A = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c} \rightarrow 12 =$

$$\frac{\sqrt{14 \times 35 [(14+35)^2 - a^2]}}{14+35}$$



$$705,6 = 2401 - a^2 \rightarrow a \approx 41 \text{ cm}$$

$$p = \frac{41+14+35}{2} \rightarrow p = 45 \text{ cm}$$

$$A = \sqrt{45(45-41)(45-14)(45-35)} \rightarrow A = 236 \text{ cm}^2$$

156º) (Exame 2007) Simplificar a expressão:

$$\log_2 2x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x + 1)} + \frac{1}{2} \log_4^2 x^4 + 2^{-3 \log_{\frac{1}{2}} \log_2 x}$$

$$\text{Resp: a) } (\log_2 x - 1)^2 \quad b) 2 \log_2 x + 1 \quad c) (2 \log_2 x - 1)^{-1} \quad d) (\log_2 x + 1)^3$$

$$e) (2 \log_2 x - 1)^2 \quad f) (\log_2 x - 1)^3 \quad g) (3 \log_2 x + 2)^{-1} \quad h) \text{ outro}$$

$$\text{Resolução: } \log_2 2x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x + 1)} + \frac{1}{2} \log_4^2 x^4 + 2^{-3 \log_{\frac{1}{2}} \log_2 x}$$

$$\log_2 2 + \log_2 x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x + 1)} + \frac{1}{2} \log_4^2 x^4 + 2^{3 \log_2 \log_2 x}$$

$$\text{Nota: } 2^{3 \log_2 \log_2 x} = \log_2^3 x, \quad x^{\log_x(\log_2 x + 1)} = \log_2 x + 1$$

$$\log_2 2 + 2 \log_2 x + \log_2 x (\log_2 x + 1) + \frac{1}{2} \log_4^2 x^4 + \log_2^3 x$$

$$1 + 2 \log_2 x + \log_2^2 x + \log_2 x + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} \log_2 x \right)^2 + \log_2^3 x$$

$$\log_2^3 x + 3 \log_2 x + \log_2^2 x + 2 \log_2^2 x + 1 = \log_2^3 x + 3 \log_2^2 x + 3 \log_2 x + 1$$

$$\text{Nota: } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1, \text{ logo:}$$

$$\log_2^3 x + 3 \log_2 x + 3 \log_2^2 x + 1 = (\log_2 x + 1)^3, \text{ Linha d)}$$

157º) (Exame 2007) Simplificar a expressão:

$$\frac{\sin^2(135^\circ - \alpha) - \sin^2(210^\circ - \alpha) - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 2\alpha)}{\cos^2(255^\circ + \alpha) - \cos^2(210^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha)}$$

$$\text{Resp: a) } 1 \quad b) 0 \quad c) -2 \quad d) 1,5 \quad e) -1 \quad f) 1/2 \quad g) -1/4 \quad h) \text{ outro}$$

Resolução:

$$\frac{\sin^2(135^\circ - \alpha) - \sin^2(210^\circ - \alpha) - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 2\alpha)}{\cos^2(225^\circ + \alpha) - \cos^2(210^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha)}$$

$$\frac{[\sin(135^\circ - \alpha)]^2 - [\sin(210^\circ - \alpha)]^2 - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 2\alpha)}{[\cos(225^\circ + \alpha)]^2 - [\cos(210^\circ - \alpha)]^2 + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha)} \quad (1)$$

Sabe-se que:

$$\text{sen}(135^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \text{sen}\alpha) \quad (2), \text{sen}(210^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}(\cos\alpha - \sqrt{3}\text{sen}\alpha) \quad (3)$$

$$\cos(225^\circ + \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \text{sen}\alpha) \quad (4)$$

$$\cos(210^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha + \text{sen}\alpha)$$

$$\text{Pela transformação: } \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\text{sen}(\alpha-\beta) + \text{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\text{sen}195^\circ \cos(165^\circ - 2\alpha) = \frac{\text{sen}(30^\circ + 2\alpha) + \text{sen}(360^\circ - 2\alpha)}{2}$$

$$\text{sen}195^\circ \cos(165^\circ - 2\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen} 2\alpha - \text{sen}(2\alpha)}{2}$$

$$\text{sen}195^\circ \cos(165^\circ - 2\alpha) = \frac{\cos 2\alpha + \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - 2\text{sen}(2\alpha)}{4} \quad (5)$$

$$\text{Pela transformação: } \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\text{sen}15^\circ \text{sen}(75^\circ - 2\alpha) = \frac{\cos(-60^\circ + 2\alpha) - \cos(90^\circ - 2\alpha)}{2}$$

$$\text{sen}15^\circ \cos(75^\circ - 2\alpha) = \frac{\cos[-(60^\circ - 2\alpha)] - \cos(90^\circ - 2\alpha)}{2}$$

$$\text{sen}15^\circ \cos(75^\circ - 2\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen} 2\alpha - \text{sen} 2\alpha}{2}$$

$$\text{sen}15^\circ \cos(75^\circ - 2\alpha) = \frac{\cos 2\alpha + \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - 2\text{sen} 2\alpha}{4} \quad (6)$$

Substituindo (2), (3), (4), (5) e (6) em (1), vem;

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \text{sen}\alpha) \right]^2 - \left[-\frac{1}{2}(\cos\alpha - \sqrt{3}\text{sen}\alpha) \right]^2 - \left[\frac{\cos 2\alpha + \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - 2\text{sen}(2\alpha)}{4} \right] \\ & \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \text{sen}\alpha) \right]^2 - \left[-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha + \text{sen}\alpha) \right]^2 + \left[\frac{\cos 2\alpha + \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - 2\text{sen} 2\alpha}{4} \right] \\ &= \frac{\frac{1+\text{sen} 2\alpha}{2} - \frac{\cos^2 \alpha + \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - 3\text{sen}^2 \alpha}{4} - \frac{\cos 2\alpha - \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha + 2\text{sen} 2\alpha}{4}}{\frac{1-\text{sen} 2\alpha}{2} - \frac{3\cos^2 \alpha - 2\sqrt{3}\text{sen} \alpha \cos\alpha - \text{sen}^2 \alpha}{4} + \frac{\cos 2\alpha + \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - 2\text{sen} 2\alpha}{4}} \\ &= \frac{\frac{2+2\text{sen} 2\alpha - \cos^2 \alpha + \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - 3\text{sen}^2 \alpha - \cos 2\alpha - \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha + 2\text{sen} 2\alpha}{4}}{\frac{2-2\text{sen} 2\alpha - 3\cos^2 \alpha - \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - \text{sen}^2 \alpha + \cos 2\alpha + \sqrt{3}\text{sen} 2\alpha - 2\text{sen} 2\alpha}{4}} \\ &= \frac{4\text{sen} 2\alpha - \cos^2 \alpha - 3\text{sen}^2 \alpha - \cos 2\alpha + 2}{-4\text{sen} 2\alpha - 3\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha + \cos 2\alpha + 2} \\ &= \frac{4\text{sen} 2\alpha - \cos^2 \alpha - 3\text{sen}^2 \alpha - \cos 2\alpha + 2}{-(4\text{sen} 2\alpha + 3\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha - \cos 2\alpha - 2)}, \text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$= \frac{4\operatorname{sen}2\alpha - \cos^2\alpha - 3 + 3\cos^2\alpha - \cos2\alpha + 2}{-(4\operatorname{sen}2\alpha + 3\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha - \cos2\alpha - 2)}$$

$$= \frac{(4\operatorname{sen}2\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos2\alpha - 1)}{-(4\operatorname{sen}2\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos2\alpha - 1)} = -1$$

158º) (Exame 2007) Resolver a equação: $\operatorname{sen}6x + 2 = 2 \cos4x$

Resp: a) $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ b) $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$ c) $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ d) $x = x = \pi k \cup x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ e) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ f) $x = \frac{\pi k}{2} \cup x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ g) $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi k$ h) *outro*

Resolução: $\operatorname{sen}6x + 2 = 2 \cos4x$, $\operatorname{sen}6x = -2(1 - \cos4x)$

$$\operatorname{sen}6x = \operatorname{sen}(4x + 2x) = \operatorname{sen}4x \cdot \cos2x + \operatorname{sen}2x \cdot \cos4x \text{ e } 1 - \cos4x = 2\operatorname{sen}^2 2x$$

$$\operatorname{sen}4x \cdot \cos2x + \operatorname{sen}2x \cdot \cos4x = -4\operatorname{sen}^2 2x, \operatorname{sen}4x = 2 \operatorname{sen}2x \cos2x$$

$$2 \operatorname{sen}2x \cos^2 2x + \operatorname{sen}2x \cdot \cos4x + 4\operatorname{sen}^2 2x = 0 \rightarrow$$

$$\operatorname{sen}2x(2\cos^2 2x + \cos4x + 2 \operatorname{sen}2x) = 0, \text{ anulando os productos,}$$

$$\operatorname{sen}2x = 0 \rightarrow 2x = \pi k \rightarrow x = \frac{\pi k}{2}$$

$$2\cos^2 2x + \cos4x + 4 \operatorname{sen}2x = 0, \cos4x = \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x$$

$$2\cos^2 2x + \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x + 4 \operatorname{sen}2x = 0$$

$$3\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x + 2 \operatorname{sen}2x = 0, \cos^2 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 2x$$

$$4\operatorname{sen}^2 2x - 4 \operatorname{sen}2x - 3 = 0, \text{ supondo que: } \operatorname{sen}2x = t \text{ (} -1 \leq t \leq 1 \text{)}$$

$$4t^2 - 4t - 3 = 0 \rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ e } t = \frac{3}{2} \text{ rejeitado} \right)$$

$$\operatorname{sen}2x = -\frac{1}{2}, \left(\alpha = \frac{\pi}{6}; \alpha < 0 \right) \text{ fórmula dos seno para: } x = (-1)^{k+1} \alpha + \pi k$$

$$2x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k \rightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \text{ A solução da equação é:}$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \cup x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \text{ Línea f)}$$

159º) (Exame 2007) No triângulo ABC o valor do ângulo A é maior em duas vezes que o valor do ângulo B e os seus comprimentos dos lados opostos a estes ângulo são iguais 12 e 8 cm correspondentemente. Achar o comprimento do terceiro lado do triângulo.

Resp: a) 9 cm b) 11,2 cm c) 10 cm d) 9,5 cm e) 10,25 cm f) 11,2 cm g) 9,25 cm h) *outro*

Resolução: $\hat{A} = 2 \hat{B}$, $b = 12 \text{ cm}$ e $c = 8 \text{ cm}$, $a = ?$

Pela lei do senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{B}}$$

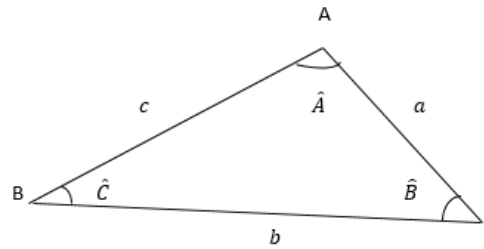
$$\frac{b}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{B}} \rightarrow \frac{12}{\text{sen}2\hat{B}} = \frac{8}{\text{sen}\hat{B}}$$

$$\text{sen}2\hat{B} = 2 \text{sen}\hat{B} \cos\hat{B}$$

$$\frac{12}{2 \text{sen}\hat{B} \cos\hat{B}} = \frac{8}{\text{sen}\hat{B}} \rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{12}{16}\right) \rightarrow \hat{B} \approx 41,4^\circ$$

$$\hat{C} + 3\hat{B} = 180 \rightarrow \hat{C} = 55,8^\circ$$

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{B}} \rightarrow a = \frac{c \text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{B}} \rightarrow a = \frac{8 \cdot \text{sen}55,8^\circ}{\text{sen}41,4^\circ} \rightarrow a = 10,0 \text{ cm}, \text{ Línea c)}$$



160º) (Exame 2007) Resolver a equação: $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$

Resp: a) $x_{1,2} = 3$; $x_{3,4} = 2 \pm 3\sqrt{5}$ b) $x_{1,2} = -3$; $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{5}$

c) $x_{1,2} = -3$; $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$ d) $x_{1,2} = 3$; $x_{3,4} = 3\sqrt{5} \pm 2$ e) $x_{1,2} = \pm 3$; $x_{3,4} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$

f) $x_{1,2} = 3$; $x_{3,4} = 3 \pm 2\sqrt{5}$ g) $x_{1,2} = 3$; $x_{3,4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{5}}{2}$ h) *outro*

Resolução: $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81 \rightarrow (x^2 - 6x)^2 - 9^2 = 2(x - 3)^2$

$$(x^2 - 6x - 9)(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2$$

Diferença de quadrados no dois 1º membros da equação:

$$(x^2 - 6x - 9)(x^2 - 6x + 9) - 2(x - 3)^2 = 0 \rightarrow (x^2 - 6x - 9)(x - 3)^2 - 2(x - 3)^2 = 0$$

$$(x - 3)^2[x^2 - 6x - 9 - 2] = 0 \rightarrow (x - 3)(x^2 - 6x - 11) = 0,$$

anulando os productos:

$$(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 3$$

$$(x^2 - 6x - 11) = 0 \rightarrow x_{3,4} = 3 \pm 2\sqrt{5}$$

A solução da equação é: $x_{1,2} = 3$; $x_{3,4} = 3 \pm 2\sqrt{5}$, Línea f)

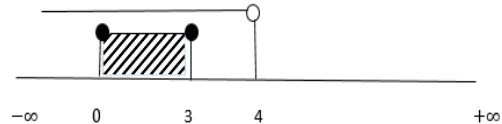
161º) (Exame 2007) Resolver a inequação: $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$

Resp: a) $[0; 4[$ b) $]0; 3[\cup]4; +\infty[$ c) $[3; +\infty[$ d) $[0; 3]$ e) $[3; 4[\cup]4; +\infty[$
f) $]4; +\infty[$ g) $]0; 3[$ h) *outro*

Reolução: $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$, condição de existência:

$$\begin{cases} 3x - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 3x \leq 0 \ (x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 3), \ x \in [0; 3] \\ 4 - x > 0 \rightarrow x - 4 < 0 \rightarrow x < 4, \ x \in]-\infty, 4[\end{cases}$$

$$s_1 = [0; 3]$$



Resolvendo a inequação: $(\)^2$:

$$(\sqrt{3x - x^2})^2 < (4 - x)^2 \rightarrow 3x - x^2 < 16 - 8x + x^2 \rightarrow 2x^2 - 11x + 16 > 0,$$

$\Delta < 0$; $\nexists x_{1,2}$ em \mathbb{R} , a solução da inequação é: $S = [0; 3]$, Línea d)

162º) (Exame 2007) Simplificar a expressão:

$$\left((\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{\frac{1}{2}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b, \ (0 < a < 1; 0 < b < 1)$$

Resp: a) 1 b) $\log_a b + \log_b a$ c) -1 d) $-2 (\log_a b + \log_b a)$ e) 0 f) -2
g) $\log_a b - \log_b a$ h) *outro*

$$\text{Resolução: } \left((\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{\frac{1}{2}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b$$

Fazendo mudança de base:

$$\left(\left(\frac{1}{\log_a^4 b} + \log_a^4 b + 2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\log_a b} - \log_a b$$

$$\left(\left(\frac{\log_a^8 b + 2\log_a^4 b + 1}{\log_a^4 b} \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\log_a b} - \log_a b,$$

$$\text{nota: } \log_a^8 b + 2\log_a^4 b + 1 = (\log_a^4 b + 1)^2$$

$$\left(\left(\frac{(\log_a^4 b + 1)^2}{\log_a^4 b} \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b, \text{ simplificando os expoentes, vem:}$$

$$\left(\frac{\log_a^4 b + 1}{\log_a^2 b} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b = \left(\frac{\log_a^4 b + 2\log_a^2 b + 1}{\log_a^2 b} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\log_a b} - \log_a b$$

nota: $\log_a^4 b + 2\log_a^2 b + 1 = (\log_a^2 b + 1)^2$

$$\left(\frac{(\log_a^2 b + 1)^2}{\log_a^2 b}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\log_a b} - \log_a b = \frac{\log_a^2 b + 1}{\log_a b} - \frac{1}{\log_a b} - \log_a b$$

$$= \frac{\log_a^2 b + 1 - 1 - \log_a^2 b}{\log_a b} = 0, \text{ Línea e)}$$

163º) (Exame 2007) Simplificar a expressão:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)\cot g\left(\alpha - \frac{5}{4}\pi\right)\operatorname{sen}^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi + \alpha\right)$$

Resp: a) 2 b) 0 c) -1 d) 1/2 e) -1/4 f) 1 g) -1/2 h) outro

Resolução:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot (\operatorname{tg}^2\alpha - 1)\cot g\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)\operatorname{sen}^{-2}\left(\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right]^2 (\operatorname{tg}^2\alpha - 1)\cot g\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)}{\left[\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)\right]^2}$$

Pela transformação: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

Pela transformação: $\cot g(\alpha - \beta) = \frac{\cot g\alpha \cdot \cot g\beta + 1}{\cot g\beta - \cot g\alpha}$

$$\cot g\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\cot g\alpha \cdot \cot g\frac{5\pi}{4} + 1}{\cot g\frac{5\pi}{4} - \cot g\alpha} = \frac{\cot g\alpha + 1}{1 - \cot g\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$$

$$\frac{[-\cos\alpha]^2 (\operatorname{tg}^2\alpha - 1) \left(\frac{\cot g\alpha + 1}{1 - \cot g\alpha}\right)}{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)\right]^2} = \frac{\cos^2\alpha (\operatorname{tg}^2\alpha - 1) \left(\frac{\frac{\cos\alpha}{1 - \cot g\alpha} + 1}{1 - \frac{\cos\alpha}{1 - \cot g\alpha}}\right)}{\frac{1}{2} (\operatorname{sen}^2\alpha + 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cos^2\alpha)}$$

$$= \frac{2 \cos^2\alpha \left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 1\right) \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}\right)}{(1 + 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)} = \frac{2 \cos^2\alpha \left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}\right)}{(1 + \operatorname{sen}2\alpha)} =$$

$$= \frac{2[(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)] \left[\frac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}{(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}\right]}{(1 + \operatorname{sen}2\alpha)} = \frac{2[(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)] \left[\frac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}{(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}\right]}{(1 + \operatorname{sen}2\alpha)} =$$

$$\frac{2(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}{(1 + \operatorname{sen}2\alpha)} = \frac{2((\operatorname{sen}^2\alpha + 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cos^2\alpha))}{(1 + \operatorname{sen}2\alpha)}$$

$$= \frac{2(1 + 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)}{(1 + \operatorname{sen}2\alpha)} = \frac{2(1 + \cancel{\operatorname{sen}2\alpha})}{(1 + \cancel{\operatorname{sen}2\alpha})} = 2, \text{ Línea a)}$$

164º) (Exame 2007) Resolver a equação: $\operatorname{sen} 2x + 2\cot gx = 3$

Resp: a) $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ b) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi k$ c) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ e) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ f) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ g) $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ h) *outro*

Resolução: $\operatorname{sen} 2x + 2\cot gx = 3$, $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ e $\cot gx = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x + \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen} x} = 3 \rightarrow \cos x \left(\frac{2 \operatorname{sen}^2 x + 2}{\operatorname{sen} x} \right) = 3$$

$$\cos x (2 \operatorname{sen}^2 x + 2) = 3 \operatorname{sen} x \rightarrow (2 \operatorname{sen}^2 x + 2) = \frac{3 \operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + 2 = 3 \operatorname{tg} x$$

$$\text{Sabe-se que: } \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2 = 3 \operatorname{tg} x \rightarrow 4 \operatorname{tg}^2 x + 2 = 3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg}^3 x \rightarrow$$

$$3 \operatorname{tg}^3 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0, \text{ supondo que: } \operatorname{tg} x = t$$

$$3t^3 - 4t^2 + 3t - 2 = 0, \text{ reduzindo pelo método de chaves:}$$

$$(t - 1)(3t^2 - t + 2) = 0, \text{ anulando os productos,}$$

$$t - 1 = 0 \rightarrow t = 1, 3t^2 - t + 2 = 0 \rightarrow (\Delta < 0, \nexists t_{1,2} \text{ em } \mathbb{R})$$

$$\text{Voltando na suposição: } \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ Línea f)}$$

165º) (Exame 2007) Calcular o comprimento da bissetriz do ângulo A do triângulo ABC se os comprimentos dos lados são $a = 18 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $c = 12 \text{ cm}$.

Resp:

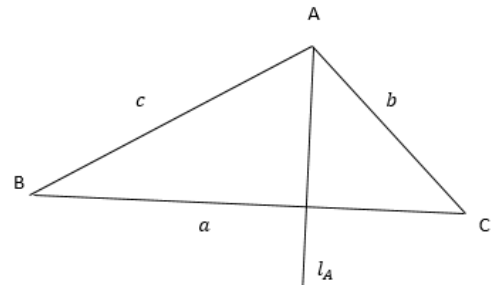
a) 16 cm b) $15,5 \text{ cm}$ c) 12 cm d) $13,5 \text{ cm}$ e) 10 cm f) $11,5 \text{ cm}$ g) 14 cm h) *outro*

Resolução: $a = 18 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $c = 12 \text{ cm}$, $l_A = ?$

O comprimento da bissetriz do ângulo é:

$$l_A = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c} \rightarrow l_A = \frac{\sqrt{15 \times 12 [(15+12)^2 - 18^2]}}{15+12}$$

$$l_A = 10 \text{ cm}, \text{ Línea e)}$$



166º) (Exame 2007) Resolver a equação: $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x} = \frac{25}{6}$

Resp: a) $x_1 = 2$; $x_{2,3} = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = -1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{7}$ c) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = 1 \pm \frac{\sqrt{7}}{5}$

d) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = -2 \pm \frac{2\sqrt{7}}{7}$ e) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = 2 \pm \frac{\sqrt{5}}{7}$ f) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = -1 \pm \frac{2\sqrt{7}}{5}$

g) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$ h) *outro*

Resolução: $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x} = \frac{25}{6}$, vamos achar o denominador comum:

$$\frac{x(x+2)x+(x+1)x(x+1)+(x+2)(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{25}{6}$$

$$\frac{x^3+2x^2+x^3+2x^2+x+x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2+2x} = \frac{25}{6} \rightarrow \frac{3x^3+9x^2+9x+4}{x^3+3x^2+2x} = \frac{25}{6}$$

$$18x^3 + 54x^2 + 54x + 24 = 25x^3 + 75x^2 + 50x$$

$7x^3 + 21x^2 - 4x - 24 = 0$, dividindo toda a expressão com o método de chave com o binómio $(x - 1)$:

$(x - 1)(7x^2 + 28x + 24) = 0$, anulando os productos:

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$$

$$7x^2 + 28x + 24 = 0 \rightarrow x_{2,3} = -2 \pm \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

A solução da equação é: $x_1 = 1$; $x_{2,3} = -2 \pm \frac{2\sqrt{7}}{7}$, Línea d)

167º) (Exame 2007) Resolver a inequação: $x - 3 < \sqrt{x - 2}$

Resp: a) $\left[3; \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right]$ b) $[2; 3[\cup \left[\frac{7+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ c) $\left[\frac{7-\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ d) $[2; 3[$ e)

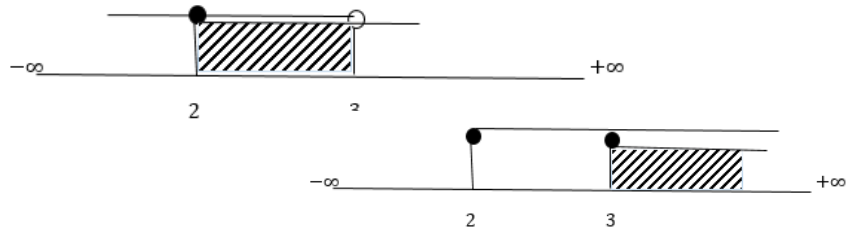
$\left[2; \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right]$ f) $\left[\frac{7-\sqrt{5}}{2}; 3\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ g) $\left[\frac{7+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ h) *outro*

A inequação cumpre-se nas seguintes condições:

$$\text{Iº)} \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \quad \text{IIº)} \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{x + 46} > x + 4 \end{cases}$$

$$I^o) \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$S(I) = [2; 3[$$

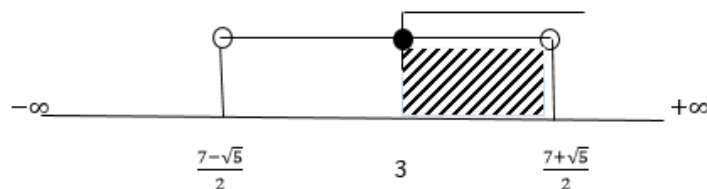


$$II^o) \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 3 \\ ((\sqrt{x-2})^2 > (x-3)^2 \rightarrow x^2 - 7x + 11 < 0 \end{cases}$$

$$II^o) \begin{cases} [3; +\infty[\\ x^2 - 7x + 11 < 0 \left(x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{7 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{7 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
$x^2 + 9x - 36 > 0$	+	0	-	0	+

$$II^o) \begin{cases} [3; +\infty[\\ \left[\frac{7 - \sqrt{5}}{2}; \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right[\end{cases}$$



$$S(I) = \left[3; \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right[,$$

A solução da inequação é: $S = S(I) \cup S(II)$, $S = \left[2; \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right[$, Línea e)

168º) (Exame 2007) Simplificar a expressão: $\frac{\log_a b - \log_{\frac{\sqrt{a}}{b^3}} \sqrt{b}}{\log_{\frac{a}{b^4}} b - \log_{\frac{a}{b^6}} b} : \log_b (a^3 b^{-12})$

Resp: a) $2 \log_a b - 1$ b) $\log_b a$ c) $\log_a b + \log_b a$ d) 1 e) 0 f) $\log_a b$ g) $\log_b a + 1$ h) *outro*

Resolução: $\frac{\log_a b - \log_{\frac{\sqrt{a}}{b^3}} \sqrt{b}}{\log_{\frac{a}{b^4}} b - \log_{\frac{a}{b^6}} b} : \log_b (a^3 b^{-12})$

$$\frac{\log_a b - \log_{\frac{1}{b^3}} b^{1/2}}{\log_{\frac{a}{b^4}} b - \log_{\frac{a}{b^6}} b} \times \left(\frac{1}{\log_b a^3 + \log_b b^{-12}} \right) = \frac{\frac{1}{\log_b a} - \frac{1}{\log_{\frac{1}{b^3}} \left(\frac{a^2}{b^3} \right)}}{\frac{1}{\log_b a - 4} - \frac{1}{\log_b a - 6}} \times \left(\frac{1}{3 \log_b a - 12} \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{\log_b a} - \frac{1}{\log_b a - 6}}{\frac{\log_b a - 6 - \log_b a + 4}{(\log_b a - 4)(\log_b a - 6)}} \times \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\log_b a - 4} \right) \right] = \frac{\frac{1}{\log_b a} - \frac{1}{\log_b a - 4}}{\frac{2}{(\log_b a - 4)(\log_b a - 6)}} \times \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\log_b a - 4} \right) \right]$$

$$\frac{\frac{-6}{\log_b a (\log_b a - 6)}}{\frac{-2}{(\log_b a - 4)(\log_b a - 6)}} \times \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\log_b a - 4} \right) \right] = \frac{-6 (\log_b a - 4)(\log_b a - 6)}{-6 \log_b a (\log_b a - 6)(\log_b a - 4)}$$

$$= \frac{1}{\log_b a} = \log_a b, \text{ Línea f)}$$

169º) (Exame 2007) Resolver a inequação: $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$

Resp: a) $]-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right[$ b) $]0; \frac{1}{2}]$ c) $]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$ d) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

e) $]0; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$ f) $]0; +\infty[$ g) $]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ h) *outro*

Resolução: $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$

$$(2^2)^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0 \rightarrow 2^{\frac{2}{x}-2} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0 \rightarrow \frac{2^{\frac{2}{x}}}{2} - \frac{2^{\frac{1}{x}}}{4} - 3 \leq 0$$

Supondo que: $2^{\frac{1}{x}} = t$ ($t > 0$), $\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - 3 \leq 0 \rightarrow t^2 - t - 12 \leq 0$ ($t_1 = 4$ e $t_2 = -3$)

$f(x)$	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$t^2 - t - 12 > 0$	+	O	-	O

$$-3 \leq t \leq 4 \rightarrow \begin{cases} t \geq -3 \\ t \leq 4 \end{cases}$$

$$t \leq 4 \rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \leq 2^2 \rightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \rightarrow 2x \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}, s = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

170º) (Exame 2007) Simplificar a expressão:

$$\frac{1+2a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}}}{1-a+4a^{\frac{3}{4}}-4a^{1/2}} + \frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}$$

Resp: a) $-\sqrt{a}$ b) $\sqrt[4]{a} + 1$ c) $2\sqrt[4]{a}$ d) $1/2 \sqrt{a}$ e) $\frac{2}{1+\sqrt{a}}$ f) $2\sqrt[4]{a} - 1$ g) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$ h) *outro*

$$\text{Resolução: } \frac{1+2a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}}}{1-a+4a^{\frac{3}{4}}-4a^{1/2}} + \frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}$$

$$\frac{1+2\sqrt[4]{a}-\sqrt{a}}{1-a+4\sqrt[4]{a^3}-4\sqrt{a}} + \frac{\sqrt[4]{a}-2}{(\sqrt[4]{a}-1)^2} = \frac{1+2\sqrt[4]{a}-\sqrt{a}}{(1-a)+4\sqrt[4]{a^3}-4\sqrt{a^2}} + \frac{\sqrt[4]{a}-2}{(\sqrt[4]{a}-1)^2}$$

supondo: $\sqrt[4]{a} = t$

$$\begin{aligned} \frac{1+2t-t^2}{(1-t^4)+4(t^3-t^2)} + \frac{t-2}{(t-1)^2} &= \frac{1+2t-t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)-4t^2(t-1)} + \frac{(t-2)}{(1-t)^2} \\ &= \frac{1}{(1-t)} \left[\frac{1+2t-t^2}{[(1+t)(1+t^2)-4t^2]} - \frac{t-2}{1-t} \right] = \frac{1}{(t-1)} \left[\frac{1+2t-t^2}{1+t^2+t+t^3-4t^2} + \frac{t-2}{1-t} \right] \\ &= \frac{1}{(1-t)} \left[\frac{1+2t-t^2}{t^3-3t^2+t+1} + \frac{t-2}{1-t} \right], \text{ nota: } t^3 - 3t^2 + t + 1 = -(1-t)(t^2 - 2t - 1) \\ &= \frac{1}{(1-t)} \left[\frac{1+2t-t^2}{-(1-t)(t^2-2t-1)} + \frac{t-2}{1-t} \right] = -\frac{1}{(1-t)} \left[\frac{1+2t-t^2-(t-2)(t^2-2t-1)}{(1-t)(t^2-2t-1)} \right] \\ &= -\frac{1}{(1-t)} \left[\frac{1+2t-t^2-t^3+2t^2+t+2t^2-4t-2}{(1-t)(t^2-2t-1)} \right] = -\frac{1}{(1-t)} \left[\frac{-t^3+3t^2-t-1}{(1-t)(t^2-2t-1)} \right] \\ &= -\frac{(-1)}{(1-t)} \left[\frac{t^3-3t^2+t+1}{(1-t)(t^2-2t-1)} \right] \text{ nota: } t^3 - 3t^2 + t + 1 = -(1-t)(t^2 - 2t - 1) \\ &= \frac{1}{(1-t)} \left[\frac{-(1-t)(t^2-2t-1)}{(1-t)(t^2-2t-1)} \right] = \frac{1}{t-1}, \text{ voltando na suposição: } \frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}, \text{ Línea g)} \end{aligned}$$

171º) (Exame 2007) Resolver a equação: $f'(x) - \frac{2}{x} f(x) = 0$ se $f(x) = x^3 \ln x$

Resp: a) $2e$ b) e^{-2} c) e d) 1 e) e^{-1} f) $\frac{1}{2} e^{-1}$ g) $2e^{-2}$ h) *outro*

Resolução: $f'(x) - \frac{2}{x} f(x) = 0$ se $f(x) = x^3 \ln x$

Condição de existência: $x \neq 0$

Achando a 1ª derivada de $f(x)$, temos:

$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$, substituindo na equação:

$$3x^2 \ln x + x^2 - \frac{2}{x} x^3 \ln x = 0 \rightarrow 3x^2 \ln x + x^2 + 2x^2 = 0 \rightarrow 3x^2 \ln x + 3x^2 = 0$$

$3x^2(\ln x + 1) = 0$, anulando os productos:

$$3x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad e \quad \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x_2 = e^{-1}$$

A solução da equação é: $x = e^{-1}$, Línea e)

172º) (Exame 2007) (Exame 2007) Resolva a inequação: $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$

Resp: a) $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ b) $[0; 1[$ c) $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ d) $]0; 1[$ e) $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$
f) $]0; +\infty[$ g) $]0; 1[\cup]4; +\infty[$

Resolução: $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$

Condição de existência: $s_1: [0; +\infty[$

$$5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}, \text{ supondo que: } 5^{\sqrt{x}} = A \ (A > 0)$$

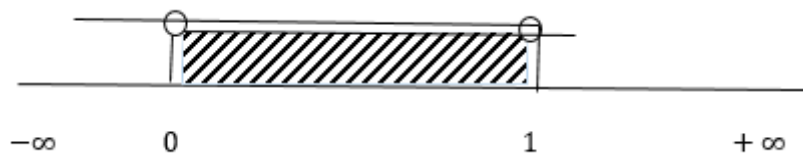
$$A^2 + 5 < 5A + A \rightarrow A^2 - 6A + 5 < 0 \ (\text{Zeros da equação: } A_1 = 1 \text{ e } A_2 = 5)$$

$f(x)$	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$A^2 - 6A + 5 < 0$	+	O	-	+

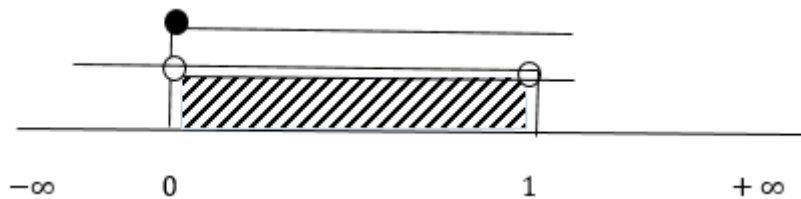
A solução da inequação é: $1 < t < 5$, assim temos:

$$\begin{cases} t > 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} > 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} > 5^0 \rightarrow \sqrt{x} > 0 \rightarrow x > 0, x \in]0; +\infty[\\ t < 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} < 5 \rightarrow \sqrt{x} < 1 \rightarrow x < 1, x \in]-\infty; 1[\end{cases}$$

Intercedendo a duas soluções: $s_2 =]0; 1[$



A solução verdadeira da inequação é: $s = s_1 \cap s_2$, $s =]0; 1[$, Línea d)



173º) (Exame 2007) Resolver a inequação: $f'(x) + \varphi'(x) \leq 0$, se $f(x) = 2x^3 + 12x^2$; $\varphi(x) = 9x^2 + 72x$

Resp: A) $] -\infty; -4[\cup] -3; +\infty[$ B) $] -\infty; -3[$ C) $[-4; -3]$ D) $[-4; +\infty[$

E) $] -\infty; -4[\cup] -4; -3[$ F) $[-4; -3[\cup] 3; +\infty[$ G) $] -4; -3[$ H) *outro*

Resolução: $f'(x) + \varphi'(x) \leq 0$, se $f(x) = 2x^3 + 12x^2$; $\varphi(x) = 9x^2 + 72x$

Achando a 1º derivada da função $\varphi(x)$, $\varphi'(x) = 18x + 72$

Achando a 1º derivada da função $f(x)$, $f'(x) = 6x^2 + 24x$

Colocando na inequação acima, vem:

$$6x^2 + 24x + 18x + 72 \leq 0 \rightarrow 6x^2 + 42x + 72 \leq 0 \ (\text{as raízes são: } x_1 = -3, x_2 = -4)$$

$f(x)$	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$
$6x^2 + 42x + 72 \leq 0$	+	O	-	+

A solução da inequação é: $[-4; -3]$, Línea C)

174º) (Exame 2007) (Exame 2007) Resolver a inequação:

$$f'(x) < g'(x); \text{ se } f(x) = \frac{x^3+1}{x} ; g(x) = 5x + \frac{1}{x}$$

Resp: a) $]-\infty; -1[\cup]0; 2,5[$ b) $]-\infty; 2,5[$ c) $]-\infty; 0[\cup]2,5; +\infty[$

d) $]-\infty; 0[\cup]0; 2,5[$ e) $]0; 2,5[$ f) $]-1; 0[\cup]0; 2,5[$ g) $]0; +\infty[$ h) *outro*

Resolução: $f'(x) < g'(x); \text{ se } f(x) = \frac{x^3+1}{x} ; g(x) = 5x + \frac{1}{x}$

Achando a 1ª derivada de $f(x)$, $f'(x) = \frac{2x^3-1}{x^2}$

Achando a 1ª derivada de $g(x)$, $g'(x) = \frac{5x^2-1}{x^2}$, colocando na desigualdade acima:

$$\frac{2x^3-1}{x^2} < \frac{5x^2-1}{x^2} \rightarrow \frac{2x^3-1-5x^2+1}{x^2} < 0 \rightarrow \frac{2x^3-5x^2}{x^2} < 0 \rightarrow \frac{x^2(2x-5)}{x^2} < 0$$

$$\frac{x^2(2x-5)}{x^2} < 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$\begin{cases} x^2(2x-5) = 0 \rightarrow x_{1,2} = 0 \text{ (raiz dupla)}, 2x-5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} \\ x^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \text{ (raiz dupla)} \end{cases}$$

$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{5}{2} = 2,5$	$+\infty$
x^2		+	+	+
$2x-5$		-	-	+
$x^2 \neq 0$		+	+	+
S		-	-	+

A solução da inequação é: $]-\infty; 0[\cup]0; 2,5[$, Línea d)

175º) (Exame 2007) A área da base do prisma triangular recto é 4 cm^2 , as arestas das faces laterais são 9,10 e 17 cm^2 . Achar o volume do prisma.

Resp

10 cm^3 b) $11,5 \text{ cm}^3$ c) 12 cm^3 d) $13,25 \text{ cm}^3$ e) 9 cm^3 f) $10,75 \text{ cm}^3$ g) $11,25 \text{ cm}^3$ h) *outro*

Resolução: $A_b = 4 \text{ cm}^2$, $A_1 = 9 \text{ cm}^2$, $A_2 = 10 \text{ cm}^2$, $A_3 = 17 \text{ cm}^2$, $V = ?$

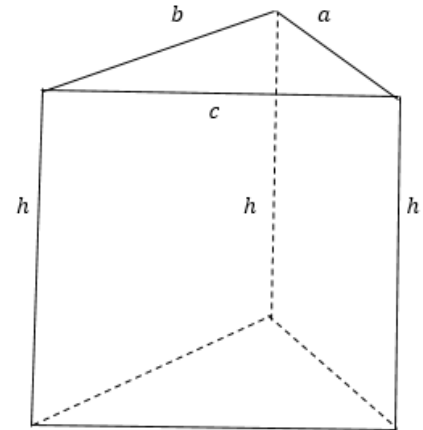
O volume de um prisma é: $V = A_b h$, onde h é altura do prisma.

A área da base é: $A_b = \frac{a \times b}{2}$, onde: $A_1 = bh \rightarrow b = \frac{A_1}{h}$

$$A_2 = ah \rightarrow a = \frac{A_2}{h}, A_b = \frac{A_1 \times A_2}{2h^2} \rightarrow h^2 = \frac{9 \times 10}{2 \times 4} \rightarrow h = \sqrt{11,25} \rightarrow h \cong 3$$

$$V = A_b h \rightarrow V = 4 \times 3, V = 12$$

$$V = 12 \text{ cm}^3, \text{ Línea c)}$$



176º) (Exame 2007) Calcular o volume do pirâmide triangular se duas arestas opostas desta pirâmide são 4 e 12 m e todas outras arestas são 7 m.

Resp:

a) 18 m^3 b) $20 \sqrt{2} \text{ m}^3$ c) $21 \sqrt{3} \text{ m}^3$ d) 24 m^3 e) 20 m^3 f) $32 \sqrt{2} \text{ m}^3$ g) 36 m^3 h) outro

Resolução: $a = 12 \text{ m}, b = 4 \text{ m}, d = 7 \text{ m}, V = ?$

A área do pirâmide será dado por: $V = \frac{A_b h}{3}$

(1)

Pelo triângulo rectângulo ABC de lados a, b e c , onde c é a hipotenunsa e b e c são os os catetos, temos:

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{(12)^2 + (4)^2} \rightarrow$$

$$c = 4 \sqrt{10} \text{ m}$$

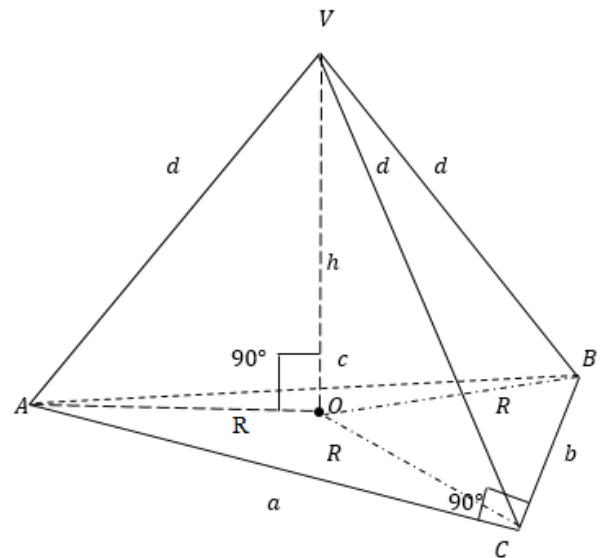
A base do pirâmide é o triângulo ABC, logo a área da base será:

$$A_b = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde p é o semi perímetro da base.

$$p = \frac{a+b+c}{2} \rightarrow p = \frac{12+4+4\sqrt{10}}{2} \rightarrow p = (2\sqrt{10} + 8)m$$

$$A_b = \sqrt{(2\sqrt{10} + 8)(2\sqrt{10} + 8 - 12)(2\sqrt{10} + 8 - 4)(2\sqrt{10} + 8 - 4\sqrt{10})}$$



$$A_b = 24 \text{ m}^2$$

Pelo triângulo AVO de lados d, h e R podemos ir buscar a altura da pirâmide:

$$h = \sqrt{d^2 - R^2}, \text{ onde } R \text{ é o raio inscrito na base da pirâmide:}$$

$$R = \frac{abc}{4A_b} \rightarrow R = \frac{12 \times 4 \times 4 \sqrt{10}}{4 \times 24} \rightarrow R = 2\sqrt{10} \text{ m}, \text{ logo a altura da pirâmide será:}$$

$$h = \sqrt{(7)^2 - (2\sqrt{10})^2} \rightarrow h = 3 \text{ m}$$

$$\text{Pela equação (1): } V = \frac{24 \times 3}{3} \rightarrow V = 24 \text{ m}^3, \text{ Línea d)}$$

177º) (Exame 2007) Num círculo de raio 2 cm está inscrito um triângulo rectângulo de perímetro 10 cm. Ache a área do triângulo.

Resp:

$$a) 4 \text{ cm}^2 \quad b) 2 \text{ cm}^2 \quad c) 2\pi \text{ cm}^2 \quad d) 5 \text{ cm}^2 \quad e) 1 \text{ cm}^2 \quad f) \text{ outro}$$

$$\text{A área do triângulo é: } A = \frac{ab}{2}$$

$$\text{Resolução: } p = 10 \text{ cm}, R = 2 \text{ cm}$$

$$\text{Hipotenunsa é: } c = 2R = 2 \times 2 \rightarrow c = 4 \text{ cm}$$

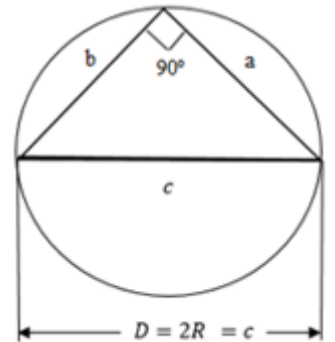
$$\text{O perímetro é: } a + b + c = 10 \text{ cm} \rightarrow a + b = 6 \text{ cm}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado vem:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 36, \text{ pelo teorema de pitágora: } a^2 + b^2 = 16$$

$$16 + 2ab = 36 \rightarrow ab = 10, \text{ logo a área pedida é:}$$

$$A = \frac{10}{2} \rightarrow A = 5 \text{ cm}^2, \text{ Línea d)}$$



178º) (Exame 2007) Num losângulo o lado é 13 cm e uma diagonal é de 24 cm. A outra diagonal é:

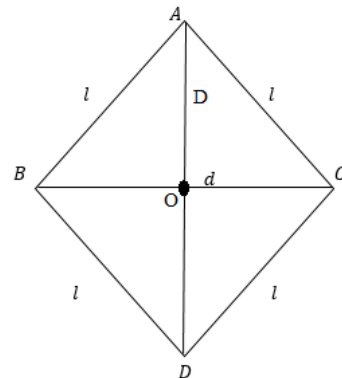
$$\text{Resp: } a) 13\sqrt{2} \text{ cm} \quad b) 10\sqrt{2} \text{ cm} \quad c) 5\sqrt{2} \text{ cm} \quad d) 10 \text{ cm} \quad e) 9\sqrt{2} \text{ cm} \quad f) \text{ outro}$$

$$\text{Resolução: } l = 13 \text{ cm}, D = 24 \text{ cm}, d = ?$$

Pelo triângulo AOC, temos:

$$l^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \rightarrow d = \sqrt{4l^2 - D^2}$$

$$d = \sqrt{4(13)^2 - (24)^2} \rightarrow d = 10 \text{ cm}, \text{ Línea d)}$$



179º) (Exame 2007) A base do paralelepípedo recto é paralelogramo e um dos ângulos deste paralelogramo é igual 30° . A área da base é igual a $4dm^2$. As áreas das faces laterais do paralelepípedo são 6 e $12 dm^2$. Achar o volume do paralelepípedo.

Resp:

- a) $10 dm^3$ b) $12 dm^3$ c) $11\sqrt{2} dm^3$ d) $10\sqrt{3} dm^3$ e) $11,5 dm^3$ f) $12,5 dm^3$
g) $9\sqrt{3} dm^3$ h) *outro*

Resolução: $A_b = 4dm^2$, $A_1 = 6 dm^2$, $A_2 = 12 dm^2$, $\alpha = 30^\circ$

O volume de um paralelepípedo é dado pela relação: $V = a b c$ (1)

Como a base é um paralelogramo, a área da base pode ser determinado pela relação:

$$A_b = a b \sin 30^\circ \rightarrow a b = 8 \quad (2)$$

A área das faces laterais é obtida multiplicando o dobro dos lados pela altura do paralelepípedo:

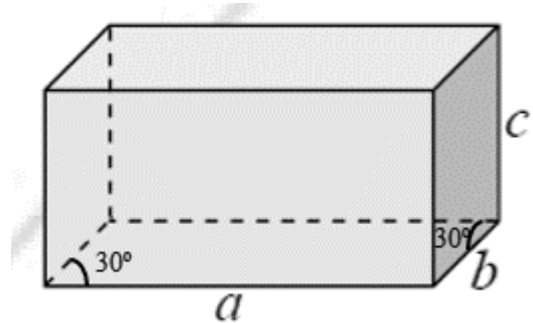
$$A_1 = 2b c \text{ e } A_2 = 2a c$$

Multiplicando a equação das duas áreas membro a membro, temos:

$$A_1 \times A_2 = 4 a b c^2, \text{ da equação (2) sabe-se que: } ab = 8$$

$$6 \times 12 = 4 \times 8 c^2 \rightarrow c = 1,5 dm, \text{ colocando na equação (1), vem:}$$

$$V = 8 \times 1,5 \rightarrow V = 12 dm^3, \text{ Línea b)}$$



180º) (Exame 2007) A base do paralelepípedo recto é paralelogramo que tem ângulo 120° e os lados 3 e 4 cm. A diagonal menor do paralelepípedo é igual à diagonal maior da base. Achar o volume do paralelepípedo.

Resp: a)

- $24 \sqrt{3} cm^3$ b) $32 cm^3$ c) $30 \sqrt{3} cm^3$ d) $30 cm^3$ e) $36 \sqrt{2} cm^3$ f) $40 cm^3$
g) $34 \sqrt{2} cm^3$ h) *outro*

Resolução: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $\beta = 120^\circ$, $D = d$, $V = ?$

O volume do paralelepípedo é: $V = a b c$ (1)

A base do paralelepípedo é um paralelogramo:

a diagonal maior da base pela lei dos cosseno é:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$$

$$d^2 = (4)^2 + (3)^2 - 2(4)(3) \cos 120^\circ$$

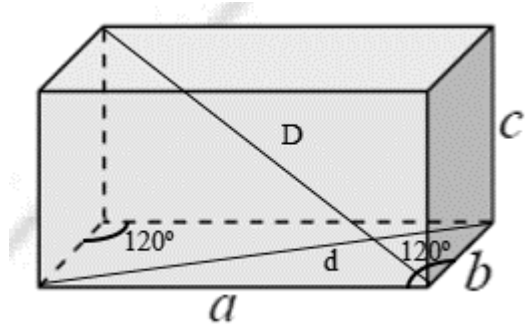
$$d = \sqrt{37} \text{ cm}$$

A diagonal menor do paralelepípedo é:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ , pelo enunciado, } D = d$$

$$\sqrt{37} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + c^2} \rightarrow c^2 = 37 - 25 \rightarrow c = 2\sqrt{3} \text{ cm} \text{ , colocando em (1), vem:}$$

$$V = 4 \times 3 \times 2\sqrt{3} \rightarrow V = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3 \text{ , Línea a)}$$



Pedro Rafael Afonso

*Licenciado em Geofísica,
Universidade Agostinho Neto,
Faculdade de Ciências*