CURSO PREPARATÓRIO

ASSOCIAÇÃO DE ESTUDANTES
AEFC
FACULDADE DE CIÊNCIAS

FÍSICA GERAL

<<TELESCÓPIO>>

Carlos Ngola; Gilson Paulo

EDIÇÕES
UM SÓ CAMINHO

ÍNDICE GERAL

INTRODUÇÃO

Sistema Internacional de Unidades (SI)

Unidades fundamentais

Comprimento (L): m (metro)

Massa (M): kg (quilograma)

Tempo (T): s (segundo)

Unidades derivadas do S.I

São as que se obtêm a partir das unidades fundamentais, como as unidades:

Superfície $(\boldsymbol{S}) \rightarrow \mathbf{m^2}$	**Aceleração** $(\boldsymbol{a}) \rightarrow \mathbf{ms^{-2}}$
Volume $(\boldsymbol{V}) \rightarrow \mathbf{m^3}$	Força $(F) \rightarrow$ N
Velocidade $(\boldsymbol{v}) \rightarrow \mathbf{ms^{-1}}$	Pressão$(p) \rightarrow$ Pa
densidade $(\boldsymbol{\rho}) \rightarrow \mathbf{kgm^{-3}}$	

Unidades das principais grandezas conhecidas

Múltiplos e Submúltiplos das unidades principais

Os múltiplos e submúltiplos das unidades principais são necessários para exprimir de maneira cômoda os valores de grandezas muito grandes ou muito pequenas; correspondem a um prefixo que antecede a unidade principal.

MÚLTIPLOS			SUBMÚLTIPLOS		
Prefixo	Símbolo	Factor numérico	Prefixo	Símbolo	Factor numérico
Deca	da	10	Deci	d	10^{-1}
Hecto	h	10^2	Centi	c	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Mili	m	10^{-3}
Mega	M	10^6	Micro	µ	10^{-6}
Giga	G	10^9	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Pico	p	10^{-12}

Obs.: $1l = 1\ \mathrm{dm}^3$, dá-nos a relação das unidades de capacidade e de volume.

Unidades de Comprimento

	Designação	Símbolo
Múltiplos	Quilómetro	km
	Hectómetro	hm
	Decâmetro	dam
Unidade Principal	metro	m
Submúltiplos	Decímetro	dm
	Centímetro	cm
	Milímetro	mm

Unidades de Superfície ou de Área

	Designação	Símbolo
Múltiplos	Quilómetro quadrado	km^2
	Hectómetro quadrado	hm^2
	Decâmetro quadrado	dam^2
Unidade Principal	metro quadrado	m^2
Submúltiplos	Decímetro quadrado	dm^2
	Centímetro quadrado	cm^2
	Milímetro quadrado	mm^2

Unidades de Volume

	Designação	Símbolo
Múltiplos	Quilómetro cúbico	km^3
	Hectómetro cúbico	hm^3
	Decâmetro cúbico	dam^3
Unidade Principal	metro cúbico	m^3
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm^3
	Centímetro cúbico	cm^3
	Milímetro cúbico	mm^3

Unidades de Capacidade

	Designação	Símbolo
Múltiplos	Quilolitro	kl
	Hectolitro	hl
	Decalitro	dal
Unidade Principal	litro	l
Submúltiplos	Decilitro	dl
	Centilitro	cl
	Mililitro	ml

Unidades de Massa

Designação	Símbolo
Tonelada	t
Quintal	q
Decaquilograma	dakg
Quilograma (unidade principal)	kg
Hectograma	hg
Decagrama	dag
Grama	g
Decigrama	dg
Centigrama	cg
Miligrama	mg

Unidades de Tempo

$\textbf{Superfície } (\boldsymbol{S}) \rightarrow \mathbf{m^2}$	$\textbf{Aceleração } (\boldsymbol{a}) \rightarrow \mathbf{ms^{-2}}$
$\mathbf{1\ ano = 365\ dias\ (d)}$	$1\ \text{min} = 60\ \text{s} = \frac{1}{60}\ \text{h}$
$\mathbf{1\ dia\ (d) = 24\ h}$	$1\ \text{s} = \frac{1}{60}\ \text{min} = \frac{1}{3600}\ \text{h}$
$\mathbf{1\ h = 60\ min = 3600\ s}$	Unidade Principal: s (segundo)

CAPÍTULO 1. CINEMÁTICA

1.1 MOVIMENTO RECTILÍNEO UNIFORME (M.R.U)

É aquele em que o corpo descreve uma trajectória rectilínea, percorrendo espaços iguais em intervalos de tempos também iguais.

Característica: $v - const.$

Equações:

- Espaço, posição:

$$s = s_0 \pm v \cdot t \qquad [s] = \mathrm{m}$$

$(+) \Rightarrow v > 0, utilizamos\ se\ o\ corpo\ se\ move\ no\ sentido\ do\ eixo$

$(-) \Rightarrow v < 0, utilizamos\ se\ o\ corpo\ se\ move\ em\ sentido\ contrário\ ao\ do\ eixo$

- Velocidade:

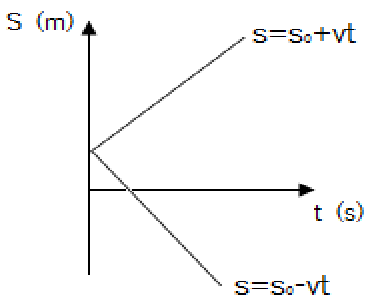
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad [v] = \mathrm{ms^{-1}}$$

- Aceleração:

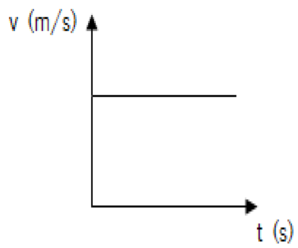
$$a = 0 \qquad [a] = \mathrm{ms^{-2}}$$

Gráficos do M.R.U:

a) Espaço: $s = s_0 \pm v \cdot t$ $\quad é\ uma\ recta\ variável$



b) Velocidade: $v - const.$ $\quad é\ uma\ recta\ constante$



1.2 MOVIMENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO E RETARDADO (M.R.U.A E M.R.U.R)

As definições dos parágrafos anteriores permitem ao estudante definir o M.R.U.A e o M.R.U.R.

Característica: $a - const.$, M.R.U.A (a>0) e M.R.U.R (a<0)

Equações:

- Espaço, posição:

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

$(+) \Rightarrow a > 0, utilizamos\ no\ M.R.U.A$

$(-) \Rightarrow a < 0, utilizamos\ no\ M.R.U.R$

- Velocidade:

$$v = v_0 \pm at$$

- Aceleração:

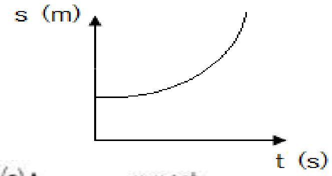
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

- Equação de Torricelli:

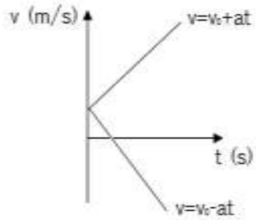
$$s = s_0 \pm \frac{v^2 - {v_0}^2}{2 \cdot a}$$

Gráfico do M.R.U.A e M.R.U.R:

a) Espaço: $s = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$ $\quad é\ uma\ parábola$



b) Velocidade: $v = v_0 \pm at$ $\quad é\ uma\ recta\ variável$



1.3 **Deslocamento**

a) Deslocamento escalar ou espaço: é a distância efectiva percorrida, medida sobre a trajectória.

$$\Delta s = l\ (comprimento\ da\ trajectória)$$

b) Deslocamento vectorial (vector deslocamento) ou simplesmente deslocamento: é a distância medida em linha recta desde a posição final até a inicial.

$$\Delta s = s - s_0$$

1.4 **Velocidade instantânea**

É a velocidade que o corpo possui num dado instante qualquer do seu trajecto.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

1.5 **Velocidade média**

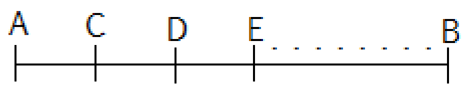
É a velocidade que o móvel teria se percorresse o mesmo trajecto com movimento uniforme.

A expressão de cálculo da velocidade média são duas:

a) Para um só percurso ou uma só etapa:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

b) Para mais de um percurso ou vária etapas



$$v_m = \frac{s_T}{t_T} = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}$$

s_T *e* $t_T -$ *espaço e tempo total, durante todo o percurso*

$s_1, t_1 -$ *espaço e tempo do primeiro percurso ou da primeira etapa*

1.6 **Movimento Circular**

Movimento durante o qual o corpo descreve uma circunferência.

Num movimento curvilíneo, a velocidade é num ponto é tangente à curva nesse ponto.

Período (T): intervalo de tempo necessário para o corpo dar uma volta.

$$T = \frac{t}{n} \qquad [T] = s; min; h$$

Frequência linear (f): número de voltas que o corpo realiza por unidade de tempo.

$$f = \frac{n}{t}$$

$[f] = Hz\ (Hertz) = s^{-1}; ciclo\ (volta)/s; rps\ (rad/s); rpm\ (rad/min) \qquad 1Hz = 1ciclo/s = 2\pi\ rad/s$

Relação entre grandezas angulares

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Relação entre grandezas angulares e lineares

$$S = \theta \cdot R \qquad (S - deslocamento\ linear)$$

$$v = \omega \cdot R \qquad (v - velocidade\ linear)$$

$$a = \alpha \cdot R \qquad (a - aceleração\ linear\ )$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \qquad (a_n - aceleração\ normal\ ou\ centrípeta) \qquad [a_n] = m/s^2$$

a) Movimento circular uniforme (M.C.U)

Característica: $\omega - const.$

Equações:

- Espaço, posição angular:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \qquad [\theta] = rad$$

Outra unidade: grau (º). $1\ rad = 57.3°$

- Velocidade angular:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \qquad [\omega] = rads^{-1} = rps; rpm$$

- Aceleração angular:

$$\alpha = 0 \qquad [rads^{-2}] = rads^{-2}$$

b) Movimento circular Uniformemente variado (uniformemente acelerado/retardado)

Equações:

- Posição angular:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$(+) \Rightarrow \alpha > 0, utilizamos\ no\ M.R.U.A$

$(-) \Rightarrow \alpha < 0, utilizamos\ no\ M.R.U.R$

- Velocidade angular:

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$$

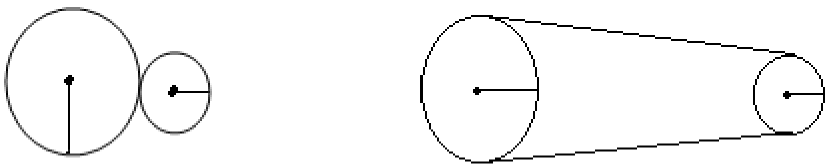
- Aceleração:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

- Equação de Torricelli:

$$\theta = \theta_0 \pm \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{2 \cdot \alpha}$$

1.6.1 Transmissão de movimento de circular



Transmissão de movimento circular por contacto e por correia

No caso da transmissão de movimento circular, quer na transmissão por contacto quer na transmissão por correia, as velocidades lineares dos pontos periféricos das duas rodas são iguais, em cada instante.

$$v_1 = v_2$$

Sendo $v = \omega \cdot R$ e $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

$$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2$$

$$f_1 \cdot R_1 = f_2 \cdot R_2$$

1.7 **Cinemática vectorial**

Equações:

a) Equação paramétrica

$$\begin{cases} X = x(t) \\ Y = y(t) \\ Z = z(t) \end{cases}$$

$X, Y, Z - são\ as\ coordenads\ do\ ponto\ material\ em\ função\ do\ tempo$

b) Vector posição (posição)

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad [r] = m$$

$x, y, z - coordenadas\ do\ ponto\ material$

c) Equação da trajectória

É a equação $y = f(x)$. Obtém-se das equações paramétricas por eliminação do parâmetro t.

d) Vector velocidade

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

e) Aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

No movimento curvilíneo, a aceleração total (a) do corpo tem duas componentes: a componente tangencial (a_t)e a componente normal (a_n).

$$a_t = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$$

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

$$a^2 = a_t{}^2 + a_n{}^2$$

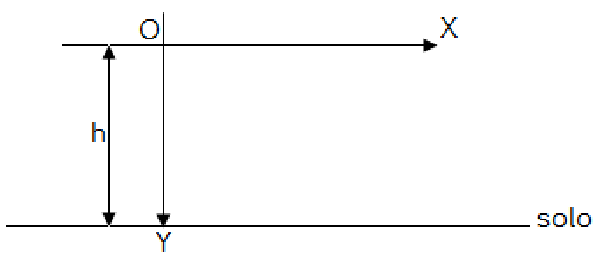
1.8 **Lançamento dos corpos em queda livre**

A aceleração com que os corpos se movem em queda livre é igual a aceleração de gravidade, $g = 9.8\ ms^{-2}$.

Nos problemas de lançamento adotaremos sempre um sistema de referência cuja orientação deverá coincidir com o sentido do movimento do corpo, a contar do início do movimento.

1- Lançamento vertical

a) Lançamento de descida (M.R.U.A, pois, o sentido de g coincide com o do movimento)



Equações:

- Posição

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

- Velocidade

$$v = v_0 + gt$$

- Equação de Torricelli

$$h = h_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}$$

b) Lançamento de subida (M.R.U.R, pois, o sentido de g é contrário ao do movimento)

Equações:

- Posição

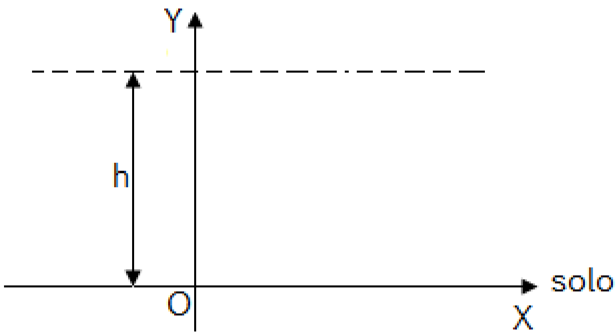
$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

- Velocidade

$$v = v_0 - gt$$

- Equação de Torricelli

$$h = h_0 - \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}$$



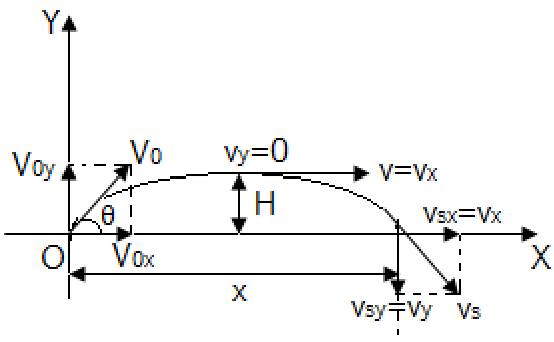
Observações:

Na altura máxima $v = 0$.

Tempo de subida é o tempo que o corpo leva para atingir a altura máxima. Desse modo, para o tempo de subida $v = 0$.

Nesse tipo de movimento, o tempo de subida e descida são iguais.

2- Lançamento oblíquo ou parabólico



Equações:

Eixo X (MRU, pois, a gravidade em x é nula)

- Alcance

Alcance é a distância percorrida entre dois pontos da trajectória, medido na horizontal. Se esses pontos forem o inicial e final da trajectória, o alcance designa-se por alcance máximo.

$$x = v_x t$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\theta$$

$$x = v_0 \cdot cos\theta \cdot t \qquad t - é\ o\ tempo\ de\ movimento\ entre\ os\ dois\ pontos$$

Eixo Y (M.R.U.R)

- Posição

$$h = h_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} a t^2$$

- Velocidade

$$v_y = v_{0y} - gt$$

- Equação de Torricelli

$$h = h_0 - \frac{{v_y}^2 - {v_{0y}}^2}{2g}$$

Observações:

θ −é o ângulo com a horizontal.

No ponto máximo (altura máx), a componente vertical da velocidade é nula, $v_y = 0$.

Nesse movimento, o tempo de subida (t_s) e o de descida (t_d) são iguais.

No tempo do vôo (t_v) $h = 0$.

O tempo do vôo é, também, a soma dos tempos de subida e descida.

Se o alcance a ser determinado é o máximo, então, o tempo da sua equação é o tempo do vôo (t_v).

A velocidade com que o corpo atinge o solo (v_s) é calculada sob forma vectorial:

$$\vec{v_s} = v_x\vec{e}_x - v_y\vec{e}_y$$

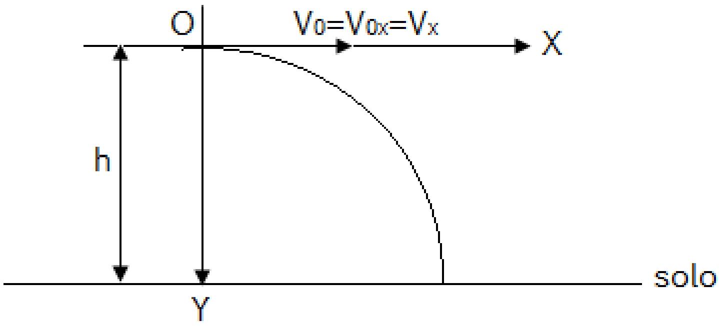
$$v_s = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Onde,

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - gt_v$$

3- Lançamento horizontal apartir duma certa altura



Equações:

Eixo X (MRU):

- Alcance

$$x = v_x t$$

$$v_x = v_{0x} = v_0$$

$$x = v_0 \cdot t$$

Eixo Y (M.R.U.A)

- Posição

$$h = h_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$

- Velocidade

$$v_y = v_{0y} + gt$$

- Equação de Torricelli

$$h = h_0 + \frac{{v_y}^2 - {v_{0y}}^2}{2g}$$

Observações:

No instante inicial (ângulo com a horizontal é 0°), a velocidade do corpo só tem componente horizontal $v = v_x$, a componente vertical nesse instante é nula $v_{0y} = 0$.

Nesse movimento, quando o corpo atinge o solo, a altura não é nula, ele terá apenas percorrido a altura desde o ponto inicial até o solo, pois, nesse caso, a origem do sistema de referência não passa pelo solo, logo não tem como anular.

A velocidade com que atinge o solo (v_s) é calculada sob forma vectorial:

$$\overrightarrow{v_s} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$$

$$v_s = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

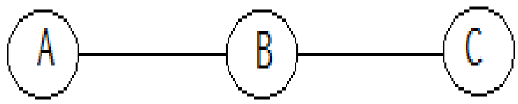
Onde,

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} + gt_v$$

1.9 **Relatividade do Movimento**

Movimento relativo de um corpo é o movimento uniforme desse corpo em relação um referencial que está ligado a um outro referencial.



O movimento do corpo em relação ao referencial em movimento é relativo.

O movimento do corpo em relação ao referencial em repouso é resultante.

1.9.1 **Movimento relativo do barco num rio**

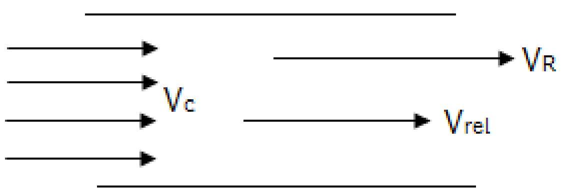
Tomando o barco como o corpo em estudo, passamos a ter dois referenciais: o rio (correnteza), referencial em movimento, e as margens, referencial em repouso.

A velocidade do barco em relação as margens é resultante: V_R; $V_R = \frac{x}{t}$

A velocidade do barco em relação ao rio é relativa: V_{rel}

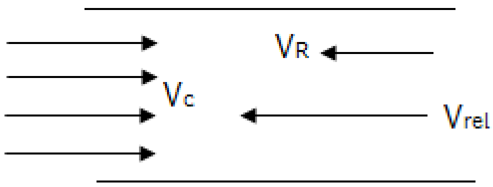
Desse modo, podemos ter as seguintes situações:

a) O barco se desloca paralelamente ao rio (corrente) e no mesmo sentido



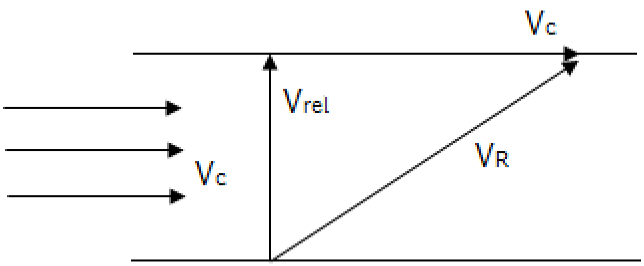
$$V_R = V_{rel} + V_c$$

b) O barco se desloca paralelamente ao rio e no sentido contrário



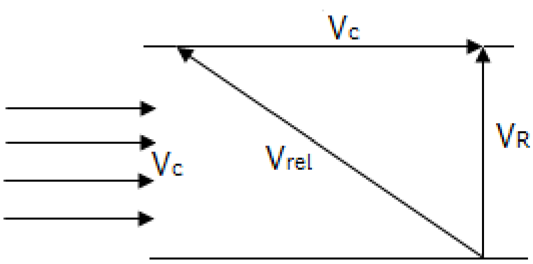
$$V_R = V_{rel} - V_c$$

c) O barco se desloca perpendicularmente à corrente



$$V_R{}^2 = V_{rel}{}^2 + V_c{}^2$$

d) O barco se desloca perpendicularmente às margens



$$V_{rel}{}^2 = V_R{}^2 + V_c{}^2$$

PROBLEMAS

1.1. Movimento rectilíneo

1.1.1. A equação horária do movimento de um corpo é a seguinte: S = 6.0 + 14t (S.I).

a) De quanto se deslocou ao fim de 4 segundos?
b) De quanto se deslocou no 4.º segundo?

c) De quanto se deslocou no 4.º segundo 4 segundos?
R: a) 62 m   b) 14 m   c) 56 m

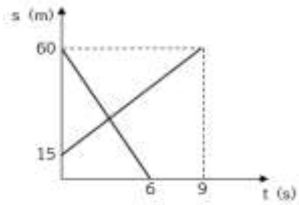
1.1.2. Um móvel executa um movimento cuja função horária é S = 40 – 5t (S.I). Determine:

a) O instante em que o móvel passa pela origem da trajectória;

b) O espaço no instante t = 10 s.

R: a) 8 s   b) - 10 m

1.1.3. O movimento de dois automóveis é representado na fig. abaixo. Determine as funções horárias de cada automóvel. Qual o instante e a posição do encontro?



R: S = 60 – 10t   (m)   ,   S = 15 + 5t   (m)   ;   t = 3 s   e   S = 30 m

1.1.4. Dois automóveis, A e B, deslocam-se numa trajectória com movimento uniforme. Num determinado instante, a diferença de espaço entre eles é de 720 m. Sabendo que suas velocidades escalares são respectivamente iguais a 108 kmh^{-1} e 72 kmh^{-1}. Determine o espaço e o instante do encontro quando se deslocam:

a) no mesmo sentido;   b) em sentidos contrários.
R: a) 72 s e 2160 m   b) 14.4 s e 432 m

1.1.5. Dois trens partem simultaneamente de um mesmo local e percorrem a mesma trajectória rectilínea com velocidades, respectivamente, iguais a 300 kmh^{-1} e 250 kmh^{-1} . Há comunicação entre os dois trens se a distância entre eles não ultrapassar 10 km. Depois de quanto tempo após a saída os trens perderão a comunicação via rádio.
R: 12 min

1.1.6. Um móvel parte de certo ponto com uma velocidade constante de 240 m/min. Passados 4 s parte do mesmo ponto, na mesma direcção e no mesmo sentido, do primeiro móvel, um segundo móvel com uma velocidade constante de 21.6 kmh^{-1}. Quantos segundos após a partida do 2º móvel este encontrará o 1º ? E qual a posição de encontro.
R: 8 s e 48 m

1.1.7. A distância de dois corpos A e B é de 225 km. Se eles andam um ao encontro do outro com 60 kmh^{-1} e 90 kmh^{-1} respectivamente, ao fim de quantas horas se encontrarão?
R: 1 h 30 min

1.1.8. Dois corpos A e B partem simultaneamente do mesmo ponto, com velocidades constantes iguais a 6 $\mathrm{m}s^{-1}$ e 8 $\mathrm{m}s^{-1}$, respectivamente. Qual a distância entre os eles em metros, depois de 5 s, se eles se movem na mesma direcção e no mesmo sentido?   R: 10 m

1.1.9. Um atirador acciona o gatilho de sua espingarda que aponta para um alvo fixo na terra. Depois de 1 s ele ouve o barulho da bala atingindo o alvo. Qual a distância do atirador ao alvo? Sabe-se que a velocidade da bala ao deixar a espingarda é 1000 $\mathrm{m}s^{-1}$ e que a velocidade do som é 340 $\mathrm{m}s^{-1}$.
R: 254 m

1.1.10. Dois corpos A e B deslocam – se ortogonalmente entre si com movimento rectilíneo uniforme e com velocidades $v_A = 72\ \mathrm{kmh}^{-1}$ e $v_B = 108\ \mathrm{kmh}^{-1}$. O corpo A desloca-se ao longo do eixo x e o B ao longo do eixo y. Considerando que no instante t = 0 s A se encontra a 10 m da origem do sistema de referência xoy e B na origem, determine o instante em que a distância entre eles é de $10\sqrt{18}$ m. R: 1 s

1.1.11. Um automóvel move-se à velocidade de 80 kmh^{-1} durante a primeira metade do caminho percorrido e à velocidade de 40 kmh^{-1} durante a segunda metade. Encontrar a velocidade média do automóvel. R: 53.33 kmh^{-1}

1.1.12. Um automóvel move-se à velocidade de 80 kmh^{-1} durante a primeira metade do tempo percorrido e à velocidade de 40 kmh^{-1} durante a segunda metade. Encontrar a velocidade média do automóvel.

R: 60 kmh^{-1}

1.1.13. A primeira parte de um caminho foi percorrida por um comboio com uma velocidade de 54 kmh^{-1} durante 2 h e o resto, igual a 216 km durante 3 h. Determine a velocidade média do movimento. R: 64.8 kmh^{-1}

1.1.14. Um móvel percorre o primeiro terço de uma estrada com uma velocidade de 25 $\mathrm{m}s^{-1}$ e os dois terços seguintes com uma velocidade de 50 $\mathrm{m}s^{-1}$. Determine a velocidade média durante todo o percurso. R: 37.5 $\mathrm{m}s^{-1}$

1.1.15. Um carro viaja de uma cidade A a uma cidade B, distantes 200 km. Seu percurso demora 4 horas, pois decorrida uma hora de viagem, o pneu dianteiro esquerdo furou e precisou ser trocado, levando 1 h e 20 min do tempo total gasto. Qual foi a velocidade média que o carro desenvolveu durante a viagem?

R: 50 kmh^{-1}

1.1.16. No problema anterior, qual foi a velocidade nos intervalos antes e depois de o pneu furar? Sabendo que o incidente ocorreu quando faltavam 115 km para chegar à cidade B.

R: Antes de o pneu furar 85 kmh^{-1} . Depois de furar 69 kmh^{-1}

1.1.17. Um trem com velocidade escalar média de 72 kmh^{-1} leva 1 min para atravessar um túnel de 800 m de comprimento. Qual o comprimento do trem? R: 400 m

1.1.18. Uma composição ferroviária com 19 vagões e uma locomotiva desloca-se com uma velocidade escalar média de 20 $\mathrm{m}s^{-1}$. Sendo o comprimento de cada composição igual a 10 m, qual o tempo que o trem gasta para ultrapassar:

a) Um sinaleiro?

b) Uma ponte de 100 m de comprimento?

R: a) 10 s

b) 15 s

1.1.19. Considere uma viagem qualquer na qual um corpo se move com uma certa velocidade escalar média. Se a mesma fosse feita com uma velocidade escalar média 50% maior que a anterior, qual seria a

faixa da economia do tempo?
R: 33%

1.1.20. Um automóvel percorre um trecho rectilíneo, indo da cidade A até a cidade B distante 150 km da primeira. Saindo às 10 h de A, pára às 11 h em um restaurante situado no ponto médio do trecho AB, onde gasta exactamente 1 h para almoçar. A seguir prossegue a viagem e gasta mais uma hora para chegar à cidade B. Determine sua velocidade média no trecho AB. R: 50 kmh^{-1}

1.1.21. Diante de uma agência do BFA há uma fila de aproximadamente 100 m de comprimento, ao longo da qual se distribuem de maneira uniforme 200 pessoas. Aberta a porta, as pessoas entram, durante 15 s, com uma velocidade média de 1 $\mathrm{m}s^{-1}$. Avalie:
a) O número de pessoas que entraram na agência durante os 15 s.
b) O comprimento da fila que restou do lado de fora.
R: a) 30 pessoas b) 85 m

1.1.22. Um carro com aceleração constante de 1,0 $\mathrm{m}s^{-2}$ a partir do repouso. Depois de 20 s, ele passa a andar uniformemente com a velocidade então obtida durante 30 s. Calcule a sua velocidade média durante todo esse tempo de movimento.
R: 16 $\mathrm{m}s^{-1}$

1.1.23. Um carro partindo do repouso move-se durante os primeiros 4 s com uma aceleração de 1 $\mathrm{m}s^{-2}$. Depois, durante 0.1 min, ele moveu-se uniformemente e os últimos 20 m, uniformemente retardado à paragem. Achar a velocidade média durante todo o movimento.
R: 2.6 $\mathrm{m}s^{-1}$

1.1.24. Um móvel, animado de movimento uniformemente acelerado, percorreu 45 m durante o 5.º s. Que espaço percorrerá no 10º s, supondo que não houve velocidade inicial?
R: 95 m

1.1.25. Um automóvel está parado diante de um sinal fechado. No instante em que o sinal fica verde, passa por ele uma motocicleta que mantém uma velocidade constante de 15 $\mathrm{m}s^{-1}$. Supondo que nesse instante o automóvel comece a mover-se com aceleração igual a 2 $\mathrm{m}s^{-2}$, determine:

a. Após quanto tempo o automóvel estará lado a lado com a moto;

b. Que distância o automóvel percorre até estar lado a lado com a moto;

c. A velocidade do automóvel no instante em que estará lado a lado com a moto.

R: a) 15 s b) 225 m c) 30 $\mathrm{m}s^{-1}$

1.1.26. Deslocando-se com um movimento uniformemente retardado, um comboio durante 1 min reduz a sua velocidade de 40 kmh^{-1} para 28 kmh^{-1} . Encontrar a aceleração do comboio e a distância que ele percorre desde que começa a travar até parar. R: a = -0.055 $\mathrm{ms}s^{-2}$, s = 566 m

1.1.27. A distância entre duas estações de metro é de 1.5 km. Percorrendo a primeira metade do percurso do caminho, o comboio move-se com movimento uniformemente acelerado e percorrendo a segunda, com movimento uniformemente retardado, sem que varie o módulo da aceleração. A velocidade máxima do comboio é de 50 kmh^{-1} . Encontrar o módulo da aceleração e o tempo gasto pelo comboio para percorrer a distância referida. R: a = 0.129 mss^{-2} t = 1.79 min

1.1.28. O corpo A está animado de um movimento uniformemente acelerado, sendo a sua velocidade inicial igual a 2 mss^{-1} . 10 s após o início do movimento deste corpo, o corpo B inicia um movimento uniformemente acelerado com a velocidade inicial de 12 mss^{-1} e aceleração igual a de A. Calcular o valor que a aceleração deve ter para que o corpo B possa atingir o corpo A.

R: a = 0.2 ms^{-2} t = 1 s

1.1.30. Um móvel animado de movimento rectilíneo uniformemente acelerado passa num determinado ponto A com uma velocidade de valor 10 ms^{-1} e num outro ponto B, à distância de 50 m do primeiro, com velocidade de 20 ms^{-1} . Determine a aceleração do movimento e o tempo que o móvel demora a ir de A até B.

R: a = 3.0 mss^{-2} t = 3.3 s

1.1.31. Dois móveis partem repouso de um mesmo ponto e no mesmo sentido, com movimento rectilíneo uniformemente acelerado. Após 8 s, a distância entre eles é de 50 m e a soma dos espaços percorridos é 590 m. Determine:

a. Os valores das acelerações de cada um dos móveis;

b. Os valores das velocidades dos móveis no instante t = 8 s.

R: a) 10 mss^{-2} , 8.4 mss^{-2} b) 80 mss^{-1} , 67 mss^{-1}

1.2. Movimento curvilíneo

1.2.1. A lei do movimento de uma partícula é: r$\vec{r}$ = 2tt^2 $\overrightarrow{e_x}$ + 2t $\overrightarrow{e_y}$, m. Determine o raio de curvatura da trajectória no instante t = 2.3 s. R: 104 m

1.2.2. O vector posição de uma partícula material é: $\vec{r}$ = $(2.0t^2 - 3.0t)\overrightarrow{e_x} - (2t+1)\overrightarrow{e_y}$ (SI) . Determine, para t = 1.0 s, a aceleração tangencial e a aceleração normal. R: $a_t =$ 1.8 ms^{-2} $a_n = 3.6$ ms^{-2}

1.2.3. Uma partícula descreve uma trajectória circular de acordo com a lei: s = 2 + 4t $- 2t^2$. Determine o valor da aceleração tangencial e normal no instante t = 0.5 s, sabendo que o raio da trajectória vale 2 m.

R: $a_t = 3.5$ ms^{-2} $a_n = 2$ ms^{-2}

1.2.4. Uma partícula move-se sobre uma circunferência de raio 0.5 m, no sentido directo, de acordo com as seguintes equações paramétricas: x = 0.5cos2t (m) e y = 0.5sen2t (m) . Calcule o primeiro instante em que a velocidade da partícula é: $\vec{v} = -1.0sen2t\,\overrightarrow{e_x}$ (ms^{-1}).
R: $\frac{\pi}{4}\ s$

1.2.5. Num dado instante, o vector velocidade e o vector aceleração de uma partícula material valem, respectivamente, 9 ms^{-1} e 6 ms^{-2} , e fazem entre si um ângulo de 30º . Calcule, para esse instante: a aceleração tangencial e o raio da trajectória. R: $a_t = 5.2$ ms^{-2} r = 27 m

1.2.6. Uma pedra descreve um movimento circular uniforme, de raio 2.0 m. Se a pedra descreve um arco de 1.0 m em 0.25 s, calcule o valor da aceleração dirigida para o centro da curva. R: 8 ms^{-2}

1.2.7. Em duas pistas circulares e concêntricas, com raios 3 m e 6 m, dois móveis executam movimentos circulares uniformes com frequências iguais a 0.5 Hz. Nessa situação, calcule a relação entre as velocidades tangenciais do primeiro e segundo móvel. R: 0.5

1.2.8. Uma polia A, de raio 8 cm, é ligada por uma correia a outra polia B, de raio 20 cm. Não havendo deslizamento enquanto giram, se o período de rotação da polia A é de 0.50 s, determine o período da polia B.

R: 1.25 s

1.2.9. Um disco realiza 10 rps. Uma pedra cai de uma altura de 20 m. Determine quantas voltas terá realizado o disco durante a queda da pedra.
R: 20 voltas

1.3. Lançamento de corpos no campo gravitacional da terra

1.3.1. Uma partícula que se move no campo gravitacional da terra ao fim de 1.0 s do movimento possui a velocidade $\vec{v} = 10.0\,\overrightarrow{e_x} - 4.0\,\overrightarrow{e_y}$ (ms^{-1}). Determine a sua aceleração normal nesse instante. R: 9.1 ms^{-2}

1.3.2. Uma partícula é lançada de uma altura que é dobro do alcance atingido pela partícula com velocidade de 10 ms^{-1} que faz um ângulo de 30º com a horizontal. De que altura foi lançada a partícula.
R: 79 m

1.3.3. Um futebolista chuta a bola e, 4 s depois, esta atinge o solo a uma distância de 20 m. Desprezando a resistência do ar, calcule:

a. o ângulo de lançamento com a horizontal;
b. a velocidade da bola no instante em que atinge o solo;

c. a altura máxima.

R: a) 76º b) 20.6 ms^{-1} c) 20.1 m

1.3.4. Um corpo é lançado a partir da altura 20 m para cima na direcção que faz com o plano horizontal um ângulo de 60º com velocidade inicial 20 ms^{-1} . Após quanto tempo é que o corpo atinge o seu ponto mais alto, e qual o valor da altura desse ponto em relação à superfície da terra, g = 10 ms^{-2} . R: 1.73 s , 35 m

1.3.5. Um corpo é lançado verticalmente para cima com uma velocidade de 30 ms^{-1} .

a. a que altura a sua velocidade será três vezes inferior do que a inicial?;

b. quanto tempo passará até esse momento?

R: a) 40 m b) 2 s e 4 s

1.3.6. Um corpo é lançado verticalmente para cima. Quantas vezes é necessário aumentar a sua velocidade para elevar a altura de subida quatro vezes.
R: 2 vezes.

1.3.7. Um corpo é lançado, horizontalmente, com velocidade de 20 ms^{-1} e cai, no solo, a 100 m de distância do ponto de lançamento. Calcule a altura de que o corpo foi lançado.
R: 125 m

1.3.8. Um projéctil é lançado verticalmente para cima, com a velocidade inicial $\overrightarrow{v_0} = 30\,\overrightarrow{e_x} + 20\,\overrightarrow{e_y}$ (ms^{-1}). Determine :

a. o ângulo de lançamento;

b. a altura máxima e o alcance;
R: a) 33.69º b) 20 m e 120 m

1.3.9. Um corpo cai livremente e chega ao solo durante 3 s. Determine a velocidade com que se chega ao solo.

R: 29.4 ms^{-1}

1.3.10. Um corpo é lançado com a velocidade inicial de 10 ms^{-1} sob o ângulo de 60º com a vertical. Encontrar o raio de curvatura da trajectória 1 s após o inicio do movimento. R: 2.84 m

1.3.11. Um corpo é lançado do solo verticalmente para cima. Quando a sua altura é de 2 m, o objecto está com uma velocidade de 3 ms^{-1} . Calcule a velocidade com que esse objecto foi lançado. g = 10 R: 42.4 ms^{-1}

1.3.12. Um corpo é lançado de uma altura de 15.0 m em relação ao solo com uma velocidade de 30 ms^{-1} sob o ângulo de 45º em relação ao horizonte. Calcula:

a. a altura máxima de subida do corpo em relação ao solo;

b. a duração do vôo;

c. a distância passada na horizontal;
d) a velocidade no fim do movimento.
R: a) 37.5 m b) 4.9 s   c) 104 m   d) 35 m

1.3.13. Um projéctil é lançado obliquamente com velocidade que forma com a horizontal com um ângulo θ, atingindo a altura máxima de 7.2 m. Sabendo que no ponto mais alto da trajectória é 10 $\mathrm{m}s^{-1}$, determine:

a. o ângulo e a velocidade de lançamento;
b. o alcance e o tempo do movimento.

R: a) $\theta = 50$º v_0 = 15.6 $\mathrm{m}s^{-1}$ b) x = 24 m   t = 2.4 s

1.3.14. Uma bola é lançada com velocidade 20 $\mathrm{m}s^{-1}$ numa direcção que faz um ângulo de 60º com a horizontal. A bola, em sua trajectória, choca-se contra um muro vertical, situado a 30 m do ponto de lançamento. Determine:

a. o instante em que a bola atinge o muro;
b. a altura do ponto do muro atingindo pela bola.

R: a) 3 s.   b) 7.2 m

1.3.15. Uma pedra é lançada horizontalmente, com a velocidade de 15 $\mathrm{m}s^{-1}$, de uma torre com altura 25 m. Calcular o tempo durante o qual a pedra se move. Qual será o ângulo entre a trajectória da pedra e o horizonte, no ponto em que cair.   R: 2.24 s , 56.15º

1.3.16. Um corpo cai livremente percorre uma altura de 15 m durante o último segundo. Determina a altura a que o corpo foi lançado.   R: 20 m

1.3.17. Um corpo que cai livremente percorre no último segundo a metade do percurso. Calcular a altura de que o corpo cai e o tempo de queda.   R: 57 m , 3.4 s

1.3.18. Um corpo cai livremente de uma altura de 19.6 m. Calcular a distância percorrida pelo corpo durante o primeiro e o último 0.1 s do movimento.
R: 0.049 m e 1.9 m

1.3.19. Um corpo cai livremente da altura de 19.6 m. Calcular o tempo necessário para percorrer o primeiro e o último metro do percurso.   R: 0.45 s e 0.05 s

1.3.30. De uma torre de 20 m horizontalmente foi lançado um projéctil com a velocidade de 15 $\mathrm{m}s^{-1}$. Determine o ângulo em relação à horizontal que faz o vector da velocidade com que o projéctil chega ao solo.   R: 53.13º

1.4. Relatividade do movimento

1.4.1.Um objecto A desloca-se à velocidade de $3\,\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}$ ms^{-1}, enquanto que um objecto B tem a velocidade de $-2\,\overrightarrow{e_x} + 5\,\overrightarrow{e_y}$ ms^{-1} . Determine a velocidade de B em relação a A. R: $-5\,\overrightarrow{e_x} + 4\overrightarrow{e_y}$ ms^{-1}

1.4.2. A velocidade de um objecto A é $3.0\overrightarrow{e_x} - 5.0\overrightarrow{e_y}$ ms^{-1} , enquanto que a velocidade de um outro objecto, B, relativamente a A é de $4.0\overrightarrow{e_y}$ ms^{-1} . Determine a velocidade de B. R: $3.0\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y}$ ms^{-1}

1.4.3. Um barco passa uma distância de 20 km durante 2 h indo com a corrente de um rio e perde 2.5 h para superar essa distância contra corrente. a) calcule a velocidade do barco relativamente a água;
b) qual a velocidade da corrente do rio.
R: a) 9 kmh^{-1} b) 1 kmh^{-1}

1.4.4. Um barco a motor atravessa, de norte para sul, um rio de largura 1.5 km em 2.5 min e cuja corrente tem a velocidade de 5.0 ms^{-1} para oeste. Determine a direcção imposta pelo piloto, ao barco, para que a travessia se dê perpendicular às margens. R: 26.6º

1.4.5. Um barco atravessando um rio move-se perpendicular a corrente do rio com uma velocidade de 4 ms^{-1} em relação a água. Determine o deslocamento do barco ao fim da viagem se a largura do rio é de 800 m e a velocidade da água da corrente é de 1 ms^{-1} . R: 200 m

1.4.6. Um nadador cuja velocidade em relação a água é de 5.4 kmh^{-1} atravessa um rio perpendicular a sua corrente, a velocidade da corrente é de 3.6 kmh^{-1} .

a. Qual a velocidade do nadador relativamente a margem;

b. sob que ângulo relativamente a corrente se move o nadador.

R: a) 6.5 kmh^{-1} b) 48.2º

1.4.7. Um barco desce um rio a velocidade de 45 kmh^{-1} e sobe a velocidade de 36 kmh^{-1} quando o motor está a funcionar em potência máxima. Determine o tempo que demora a fazer a travessia perpendicularmente as margens, sabendo que o rio tem de largura 2.2 km. R: 3 min

1.4.8. Um barco faz a viagem entre duas localidades situadas na mesma margem e que distam 8 km. Quando o motor está a funcionar em potência máxima, a viagem de descida do rio demora 0.5 h e a subida 1.0 h. O valor da velocidade do rio e a velocidade máxima que o motor comunica ao barco. R: 4 kmh^{-1} , 12 kmh^{-1}

1.4.9. Uma embarcação turística faz a viagem entre duas localidades, A e B, que distam 6.0 km na mesma margem de um rio cuja corrente tem a velocidade de 3.0 kmh^{-1} . A viagem da ida e volta entre as duas localidades demora 2 h 40 min, quando o motor está a funcionar em potência máxima. Calcule:
a) os tempos que o barco demora nas viagens de A para B e de B para A;

b) o valor máximo da velocidade que o motor comunica ao barco.

R: a) 40 min e 2 h; b) 60 kmh^{-1}

CAPÍTULO 2. DINÂMICA

Definição: é a parte da mecânica que estuda os movimentos dos corpos e suas causas, isto é, a força.

Inércia: é a propriedade da matéria de resistir ou opor-se a qualquer variação do seu estado cinético (repouso ou movimento).

Massa: é a medida da inércia da matéria (massa inercial).

2.1. Leis de Newton

a) Primeira lei de Newton – Princípio da inércia.

– Este princípio estabelece que um ponto material isolado permanece ou em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme.

b) Segunda lei de Newton – Lei da força (lei fundamental da dinâmica).

– Esta lei estabelece que a resultante das forças aplicadas a um ponto material é igual ao produto de sua massa pela aceleração adquirida.

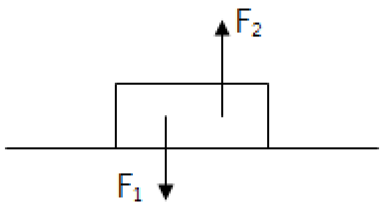
Equação vectorial: $\overrightarrow{F_R} = m \cdot \vec{a}$ $[F] = N -$ lê-se Newton

Equação escalar: $F_R = m \cdot a$

Em condição de equilíbrio dos corpos $F_R = 0$

c) Terceira lei de Newton – Lei da acção e reacção.

– Estabelece que a cada acção exercida corresponde sempre uma reacção de igual intensidade, mesma direcção, mas sentido oposto.



$$\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$$

Mas $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}|$ ou simplesmente, $F_1 = F_2$

2.2. Tipos de forças

a) Força de gravidade

É a força de atracção que a terra exerce nos corpos.

$$F_g = m \cdot g \qquad [F_g] = N; kgf \qquad 1\,kgf = 9.8\,N$$

Onde, F_g: é a força de gravidade.

g: é a aceleração de gravidade. $[g] = ms^{-2}$

m: massa gravítica ou gravitatória.

Aceleração de gravidade é a aceleração adquirida por um corpo quando está sujeito unicamente a acção da força de gravidade. Representa-se por g e é igual a $9.8\,ms^{-2} \approx 10\,ms^{-2}$ (valor médio na terra); ela varia consoante a altitude, a latitude e o lugar.

Massa gravítica é a massa obtida por pesagem numa balança.

b) Força peso (Peso)

Peso de um corpo é a força de reacção de uma superfície de apoio ou suporte (cabos, fios, etc.) sujeito a acção do mesmo corpo.

O peso de um corpo é uma força de acção que o corpo exerce sobre uma superfície de apoio ou suporte, mas que é igual a reacção dessa mesma superfície de apoio ou suporte.

Em queda livre $P = 0$, pois o corpo não exerce acção em nenhuma superficie de apoio ou suporte. A este fenómeno chamamos de imponderabilidade (ausência de peso).

c) Força de atrito

É a força que se opõe tangencialmente ao movimento de um corpo sobre uma superfície de apoio ou sobre outro corpo.

Existem dois tipos de atrito:

- Atrito estático: quando não há movimento relativo entre os corpos em contacto.

$$F_a = \mu_e \cdot N$$

- Atrito dinâmico: quando há movimento relativo entre os corpos em contacto.

$$F_a = \mu_d \cdot N$$

Onde, F_a: é a força de atrito (estático ou dinâmico).

μ_e: é o coeficiente estático de atrito. $0 \leq \mu_e \leq 1$

μ_d: é o coeficiente dinâmico de atrito. $0 \leq \mu_d \leq 1$

N: é a força de reacção normal da superfície ou simplesmente força normal ou ainda normal.

$$\mu_e > \mu_d$$

d) Forças de Reacção

- Força Normal (N): é a força de reacção de superfícies (planas e curvas), e é sempre perpendicular à superfície de apoio.

Numa superfície curva a normal num ponto coincide com a linha que une esse ponto ao centro de curvatura.

- Força de Tensão (T): é a força de reacção de fios e cabos.

- Força Elástica (F_{el}): é a força de reacção de corpos elásticos (mola).

É a força regida pelas deformações elásticas, fazendo os corpos voltarem à sua posição de equilíbrio. A fórmula é dada pela *lei de Hooke* que diz: "as intensidades das forças são proporcionais as deformações."

Equação vectorial: $\overrightarrow{F_{el}} = -k \cdot \vec{x}$

Equação escalar: $F_{el} = k \cdot x$

Onde, F_{el}: é a força elástica

k: é a constante elástica (da mola) $[k] = Nm^{-1}$

x: é a elongação da mola: distância até a posição de equilíbrio. $[x] = m$

e) Força Centrípeta (F_C)

É a força que actua no movimento curvilíneo (circular); corresponde a força resultante.

Pela segunda lei de Newton: $F_R = m \cdot a$

Quando o movimento for curvilíneo (circular), $F_R \equiv F_C$, ou seja,

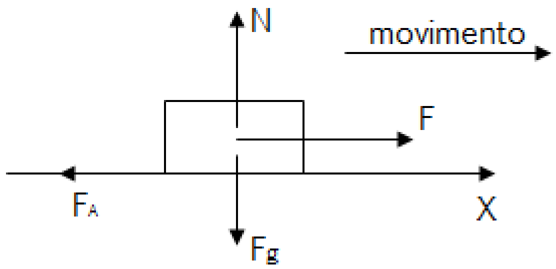
$$F_C = m \cdot a_c \qquad \text{com} \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

é a segunda lei de Newton para o movimento curvilíneo (circular).

2.2.1. Aplicação dos tipos de forças

1- Plano horizontal

Um corpo se desloca sobre um plano horizontal com força de atrito e força de tracção (força responsável pelo movimento) F.



Pela 2ª lei de Newton:

Eixo X: Eixo Y:

$F_{Rx} = ma \quad ou \quad \sum F_x = ma \qquad F_{Ry} = 0 \quad ou \quad \sum F_y = 0 \quad , \; não\ há\ movimento$

$F - F_A = ma \qquad N - F_g = 0$

$F - \mu N = ma \qquad N = F_g$

$F = ma + \mu N \quad (1) \qquad N = mg \quad (2)$

Substituindo (2) em (1),

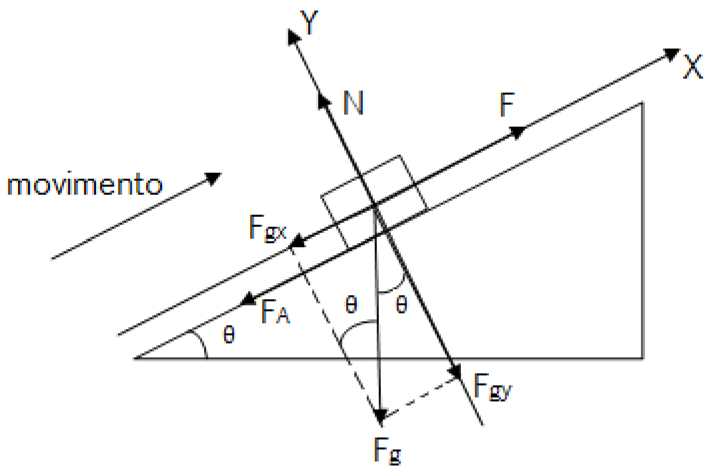
$$F = ma + \mu mg$$

$$F = m(a + \mu g)$$

Obs.: Há problemas nos quais não teremos a força de tracção ou a de atrito; nessas condições, elas ficam de fora das equações.

2- Plano inclinado

a) Movimento de subida (com atrito e tracção)



Eixo X: Eixo Y:

$F_{Rx} = ma \quad ou \quad \sum F_x = ma \qquad F_{Ry} = 0 \quad ou \quad \sum F_y = 0 \quad , \; não\ há\ movimento$

$F - F_A - F_{gx} = ma \qquad N - F_{gy} = 0$

$F - \mu N - F_g sen\theta = ma \qquad N = F_{gy}$

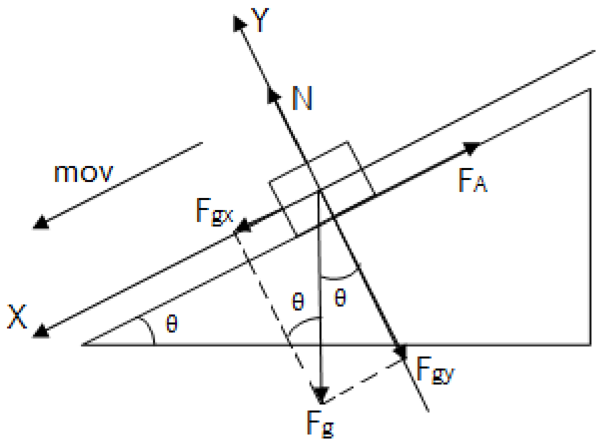
$F = ma + \mu N + mgsen\theta \quad (1) \qquad N = mgcos\theta \quad (2)$

Substituindo (2) em (1),

$$F = ma + \mu mgcos\theta + mgsen\theta$$

$$F = m(a + \mu g cos\theta + g sen\theta)$$

b) Movimento de descida



Eixo X: Eixo Y:

$F_{Rx} = ma \quad ou \quad \sum F_x = ma \qquad F_{Ry} = 0 \quad ou \quad \sum F_y = 0 \quad , \text{ não há } movimento$

$F_{gx} - F_A = ma \qquad N - F_{gy} = 0$

$F_g sen\theta - \mu N = ma \qquad N = F_{gy}$

$mgsen\theta - \mu N = ma \quad (1) \qquad N = mgcos\theta \quad (2)$

Substituindo (2) em (1),

$mgsen\theta - \mu mgcos\theta = ma$ dividindo membro a membro por $\underline{m}$

$gsen\theta - \mu gcos\theta = a$

Nota1: Num problema de plano inclinado, se nos deram a altura H e o comprimento do plano L, podemos determinar θ por $sen\theta = \frac{H}{L}$ e para $cos\theta$, podemos usar a relação trigonométrica fundamental, $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$.

Nota2: Num problema de plano inclinado, se o ângulo for dado como a pendente P (valor percentual), o valor do ângulo é determinado por $sen\theta = P\ (pendente)$.

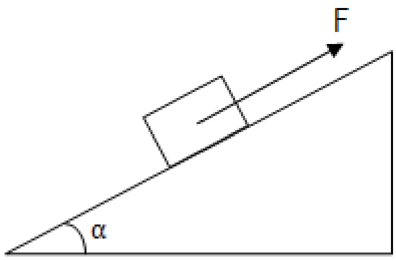
Ex.: $P = 20\% = 0.2 \implies sen\theta = 0.2$

Nota3: Em planos inclinados, quando um corpo parte do repouso, está na verdade em movimento rectilíneo uniforme.

Nota4: Em planos inclinados, se não há informação sobre a aceleração, significa que ela é igual a zero, isto é, $a = 0$.

2.1. Caso particular

É dado o esquema e nos pedem para calcular a força F, nos seguintes casos em que



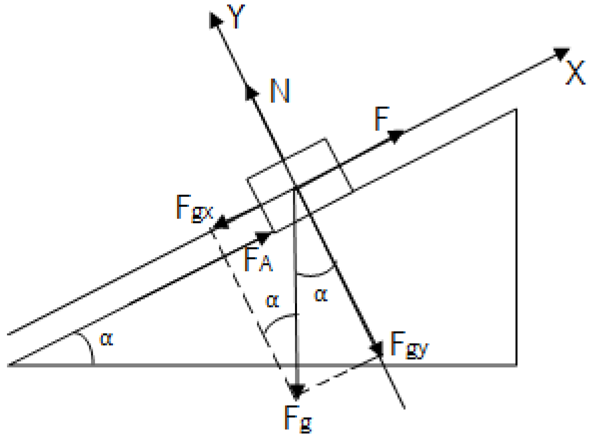
o corpo está em repouso.

a) Para que o corpo não desça

b) Para que o corpo não suba

Solução:

a) Para que o bloco não desça, a resistência (F_A) tem que estar orientada para cima.



Eixo X: Eixo Y:

$F_{Rx} = 0 \quad ou \quad \sum F_x = 0$ $\quad$ $F_{Ry} = 0 \quad ou \quad \sum F_y = 0 \quad , \text{ não há } movimento$

$F - F_{gx} + F_A = 0$ $\quad$ $N - F_{gy} = 0$

$F - F_g sen\alpha + \mu N = 0$ $\quad$ $N = F_{gy}$

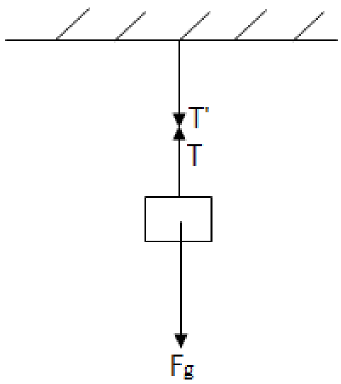
$F = mgsen\alpha - \mu N \quad (1)$ $\quad$ $N = mgcos\alpha \quad (2)$

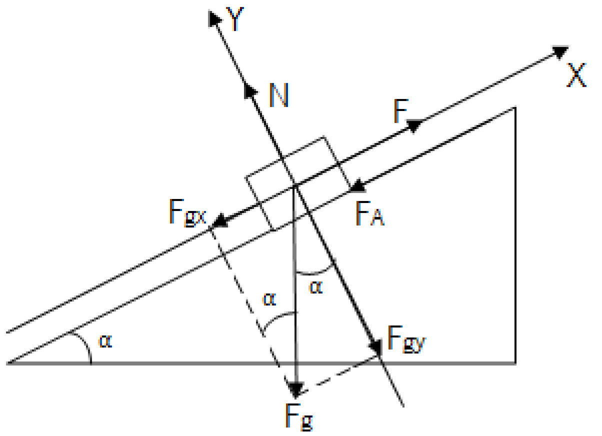
Substituindo (2) em (1),

$$F = mgsen\alpha - \mu mgcos\alpha$$

$$F = mgsen\alpha - \mu mgcos\alpha$$

b) Para que o bloco não suba, a resistência (F_A) tem que estar orientada para baixo.





Eixo X: Eixo Y:

$F_{Rx} = 0 \quad ou \quad \sum F_x = 0$ $\qquad$ $F_{Ry} = 0 \quad ou \quad \sum F_y = 0 \quad , \; não\ há\ movimento$

$F + F_{gx} - F_A = 0$ $\qquad$ $N - F_{gy} = 0$

$F + F_g sen\alpha - \mu N = 0$ $\qquad$ $N = F_{gy}$

$F = \mu N - mgsen\alpha \quad (1)$ $\qquad$ $N = mgcosa \quad (2)$

Substituindo (2) em (1),

$$F = \mu mgcosa - mgsen\alpha$$

2.3. Cabos, fios e roldanas

Um corpo está em repouso quando a resultante das forças que sobre ele actuam é igual a zero, ou seja, quando está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Tensão é a força de reacção dum cabo ou fio à acção de uma força (tracção).

Nota1: Num único fio, a tensão ao longo dela é a mesma caso esteja sujeito ao mesmo sistema.

Nota2: Em caso de roldanas, as acelerações serão diferentes quando os corpos estiverem em roldanas diferentes, pois têm velocidades lineares diferentes (independentemente da massa da roldana ser desprezível ou não).

Aplicação 1:

Relações: $T = T'$

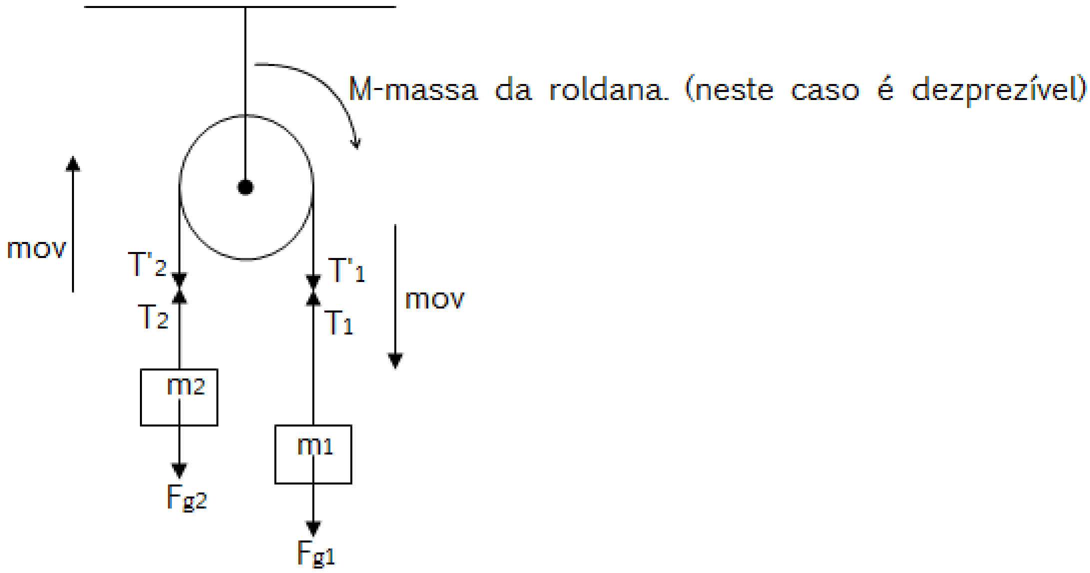
Pela segunda lei de Newton:

$F_R = 0 \quad$ (condição de equilíbrio)

$F_g - T = 0$

$T = mg$

Aplicação 2:



Relações: $T_1 = T'_1$; $T_2 = T'_2$; como M é desprezível, $T_1 = T_2 = T$

Como o sistema é único, pois M é desprezível, $a_1 = a_2 = a$

Corpo 1: $F_{R1} = m_1 a_1$

$$F_{g1} - T_1 = m_1 a_1$$

$$m_1 g - T = m_1 a \qquad (1)$$

Corpo 2: $F_{R2} = m_2 a_2$

$$T_2 - F_{g2} = m_2 a_2$$

$$T - m_2 g = m_2 a \qquad (2)$$

Aplicação 3:

Relações: $T_1 = T'_1$; $T_2 = T'_2$; $T_1 = T_2 = T_B = T \neq T_A$ (T_A está noutro fio)

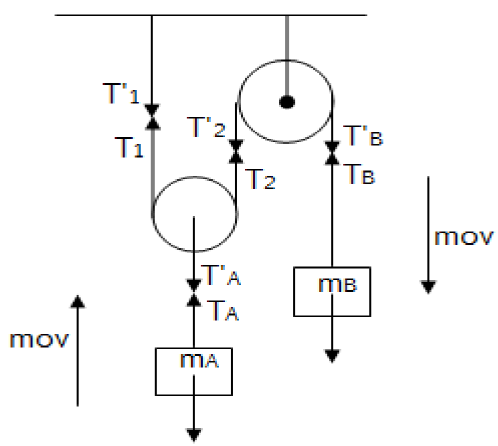
$a_A \neq a_B$

$T_A = T_1 + T_2 = T + T = 2T$

Corpo A: $F_{RA} = m_A a_A$

$$T_A - F_{gA} = m_A a_A$$

$$2T - m_A g = m_A a_A \qquad (1)$$



Corpo B: $F_{RB} = m_B a_B$

$$F_{gB} - T_B = m_B a_B$$

$$m_B g - T = m_B a_B \qquad (2)$$

2.4. Interacção Gravitacional (Gravitação Universal)

a) Leis de Kepler

Primeira lei de Kepler – Lei das órbitas: cada planeta descreve uma órbita elíptica ocupando o sol um dos focos.

Segunda lei de Kepler – Lei das áreas: o segmento imaginário que une o centro do sol e o centro do planeta varre áreas iguais em intervalos tempos iguais.

Terceira lei de Kepler – Lei dos períodos: o quadrado dos períodos de revolução (tempo que o planeta gasta para realizar uma volta em torno do sol) são proporcionais aos cubos dos raios das órbitas (toma-se para raio de um planeta o valor do semi-eixo maior da elipse).

$$T^2 = k \cdot R^3 \quad ou \quad \frac{T^2}{R^3} = k$$

$k -$ constante de proporcionalidade;

$T -$ período de revolução;

$R -$ raio médio da órbita do planeta.

b) Lei da Gravitação Universal

Diz que: " dois corpos ou pontos materiais atraem-se com forças cujas intensidades são proporcionais ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa."

$$F_G = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$F_G -$ força de interacção gravitacional;

m_1 *e* $m_2 -$ massa dos corpos;

$G -$ constante gravitacional (costante de gravitação universal), $G = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$;

$r -$ distância entre os corpos, medida apartir do centro de massa de cada corpo.

Vejamos alguns casos de interacção gravitacional entre a Terra com massa M e um outro corpo em órbita de massa m:

1- Aceleração de gravidade (g)

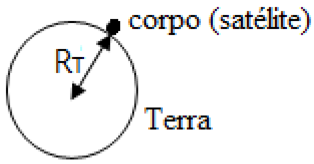
de: $F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2} \qquad e \qquad F_g = m \cdot g$

$$F_G = F_g$$

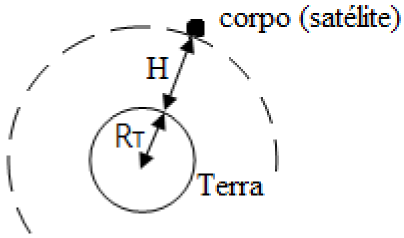
$$G\frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot g$$

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Na superfície da terra: $r = R_T \implies g_s = G\frac{M}{(R_T)^2}$



À uma altitude H da superficie da terra: $r = R_T + H \implies g_h = G\frac{M}{(R_T + H)^2}$



Obs.: O valor de g diminui a medida que aumenta a altitude.

2- Velocidade do corpo em órbita

Sendo a órbita circular,

$$F_G = F_C$$

$$G\frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot a_c$$

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{R}$$

$R -$ é o raio da órbita do corpo

No entanto, $r = R \implies G\frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R} \implies G\frac{M}{R} = v^2 \implies v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$

Na superfície da terra: $r = R = R_T$

À uma altitude H da superficie da terra: $r = R = R_T + H$

PROBLEMAS

2.1. Uma pessoa de massa igual a 50 kg está de pé dentro da cabine de um elevador. Determine o seu peso nos dois casos seguintes: a) o elevador sobe com aceleração constante de 3 ms^{-2}.
b) o elevador desce com aceleração constante de 3 ms^{-2} .
R: a) 650 N b) 340 N

2.2. Uma viatura de massa 2400 kg passa pelo cume de uma ponte curvada para cima de raio 60 m. Calcular: a) a força centrípeta necessária para manter o movimento circular desta viatura nesta posição. b) a força de reacção que a ponte actua sobre a viatura sabendo que v = 36 kmh^{-1} . Adote g = 10 ms^{-2}.
R: a) 4 KN b) 20 KN

2.3. Um carro de massa 1000 kg passa pela depressão (ponto mais baixo A) de uma estrada com velocidade v = 54 kmh^{-1} . Sabendo que o raio de curvatura da estrada nesta parte mais baixa é de 100 m, calcule o peso do carro neste ponto. R: 12.25 KN

2.4. Uma força de 60 N dá a um corpo uma aceleração de 0.8 ms^{-2} . Que valor deve ter uma força para dar aceleração de 2.0 ms^{-2} . R: 150 N

2.5. Dois corpos A e B (conectados), de massas respectivamente iguais a 2 kg e 3 kg, estão apoiados numa superfície horizontal perfeitamente lisa. A força horizontal de intensidade 10 N constante é aplicada no bloco A. Determine:

a) a aceleração adquirida pelo conjunto. b) a intensidade da força que A aplica em B.

R: a) 2 ms^{-2} b) 6 N

2.6. Três corpos A, B e C de massas respectivamente iguais a 1 kg, 3 kg e 6 kg estão apoiados numa superfície perfeitamente lisa. A força constante de 5 N, horizontal, é aplicada ao primeiro bloco A. Determine:

a) a aceleração adquirida pelo conjunto.

b) a intensidade da força que A exerce em B.
c) a intensidade da força que B exerce em C.
R. a) 0.5 ms^{-2} b) 4.5 N c) 3 N

2.7. Dois corpos A e B de massas iguais a 2 kg e 4kg respectivamente estão apoiados numa superfície horizontal perfeitamente lisa. O fio que liga A e B é ideal, isto é, de massa desprezível e inextensível. A força horizontal tem intensidade igual a 12 N, constante e aplicada em B. Determine:
a) a aceleração do sistema.

b) a intensidade da força de tracção do fio.

R: a) 2 ms^{-2} b) 4 N

2.8. Dois corpos de massas 3 kg e 2 kg estão ligadas entre si por um fio inextensível que passa por uma roldana cuja massa é desprezível. Desprezando o atrito no eixo da roldana, calcule a aceleração do sistema destes corpos e a distância percorrida de cada corpo após t = 1 s, sabendo que inicialmente eles estão em repouso e tomando g = 10 ms^{-2} . R: 2 ms^{-2} , 1 m

2.9. Um bloco de massa 5.0 kg desloca-se na horizontal sob acção da força $\vec{\mathrm{F}}$, de intensidade F = 50 N e que faz um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito entre o bloco e o solo é 0.40. Determine a aceleração do bloco. (dados: g = 10 ms^{-2} , sen θ = 0.60 e cos θ = 0.80.)
R: 6.4 ms^{-2}

2.10. Um bloco A encontra-se apoiado sobre um carrinho B, que se movimenta com aceleração constante de módulo 2.0 ms^{-2} . Para que o bloco A não se movimente em relação ao carrinho B, qual deve ser o coeficiente de atrito mínimo entre as superfícies de A e B? g = 10 ms^{-2} .
R: 0.20

2.11. Um corpo de 0.5 kg de massa move-se em linha recta, sendo a variação do caminho s percorrido pelo corpo em função do tempo t dada pela equação s = A – Bt + Ct^2 – Dt^3 , onde C = 5 ms^{-2} e D = 1 ms^{-3} . Calcular a força que actua sobre o corpo no fim do primeiro segundo de movimento.
R: 2 N

2.12. Sob a acção da força de 10 N um corpo move-se rectilineamente de maneira tal que a variação do caminho s percorrido pelo corpo, em função do tempo t, é dada pela equação s = A – Bt + Ct^2 , onde C = 1 ms^{-2} . Achar a massa m do corpo. R: 4.9 kg

2.13. Um eléctrico, ao arrancar, move-se com aceleração de 0.5 ms^{-2} . Ao fim do tempo de 12 s após o início de movimento, o motor desliga-se, e o eléctrico, até parar, desloca-se com movimento uniformemente retardado. O coeficiente de atrito em todo o percurso é de 0.01. Calcular a velocidade máxima e o tempo de movimento do eléctrico. Qual é a sua aceleração no caso do movimento uniformemente retardado? Qual é a distância percorrida pelo eléctrico durante o tempo de movimento?
R: 216 kmh^{-1} , 73 s , -0.098 ms^{-2} , 218 m

2.14. Numa calha metálica, com a inclinação de 10% (pendente), lança-se debaixo para cima um móvel com a velocidade de 3.0 ms^{-1}.

a) que tempo demorou o móvel a regressar ao ponto de partida?

b) que distância total percorreu o móvel?

c) que tempo demoraria o móvel, em queda livre, no vazio, a cair da altura máxima atingida na subida da calh R: a) 6.1 s b) 9.2 m c) 0.30 s

2.15. Um corpo A de massa 500 g está unido a um outro corpo B de massa 300 g por uma corda de massa desprezível. Considerando que o corpo A desloca-se ao longo duma mesa e B está suspenso, calcule a aceleração do sistema destes corpos sabendo que o coeficiente de atrito entre a mesa e o corpo A é igual a 0.4. Adote g = 10 ms^{-2} . R: 4.75 ms^{-2}

2.16. Um corpo com a massa de 300 g, colocado num plano inclinado, está ligado a um peso de 0.1 kg suspenso de uma roldana fixa colocada no topo superior do plano. A inclinação do plano é de 50%.

Determinar o sentido do movimento e a aceleração de A. g = 9.8 ms^{-2}. R: 1.25 ms^{-2}

2.17. AB e BC são duas linhas de maior declive de dois planos, cujos ângulos de inclinação são, respectivamente, 50º e 30º . Sabendo que duas esferas de massas iguais que se encontram cada uma em cada linha estão ligadas por um fio ideal, determine as acelerações das esferas e as tensões nos fios.
R: 1.3 ms^{-2}

2.18. Num plano inclinado encontra-se um bloco. Que coeficiente deve ser entre o plano e o bloco para que o levantar verticalmente seja mais fácil do que puxar para cima ao longo do plano inclinado? O movimento em ambos os casos considere uniforme. O plano forma o ângulo de 60º com o horizonte.
R: 0.27

2.19. Um projéctil com a massa de 60 g e a velocidade de 500 ms^{-1} penetra 1.0 dm num pedaço de madeira fina numa parede indeformável. Supondo constante a força resistente da madeira, calcular o tempo de penetração e o coeficiente de atrito entre o projéctil e madeira.
R: 0.40 ms

2.20. Um automóvel faz uma curva de raio 40 m à velocidade constante de 100 kmh^{-1} . O coeficiente de atrito entre as rodas e o asfalto é 0.40.

a) verifique se o automóvel consegue fazer a curva sem se despistar.

b) determine a inclinação mínima da curva para que o automóvel não se despiste à de 100 kmh^{-1} .
R: a) despista-se b) 41º

2.21. Suponha que uma pedra lunar trazida pelos astronautas, suspensa de um dinamómetro num local da lua onde g = 1.63 ms^{-2} , acusava um peso de 20 N. Quanto pesaria a referida pedra num local da terra onde g = 9.78 ms^{-2} . R: 120 N

2.22. O período de revolução da Lua é de 27.3 dias. A sua distância à terra é de $3.8\mathrm{x}10^{5}$ km. Calcula a aceleração centrípeta da Lua. R: 0.28 cms^{-2}

2.23. A distância entre o centro da Terra e o centro da Lua é de $3.9\mathrm{x}10^{5}$ km, sendo as massas dos planetas, respectivamente, $6.0\mathrm{x}10^{24}$ kg e $7.3\mathrm{x}10^{22}$ kg. Determine a que distância do centro da lua deve encontrar-se um satélite para que a resultante das forças gravitacionais seja nula.
R: $3.9\mathrm{x}10^{4}$ km

2.24. Um satélite de telecomunicações descreve uma órbita circular em torno da Terra em 3.0 h. Determine:

a) a altura a que se encontra o satélite.

b) a distância entre a órbita descrita e a órbita que o satélite descreveria se geostacionária. Nota: Um satélite geostacionário é aquele que tem um período igual a 24 h.
R: a) $4.19\mathrm{x}10^{6}$ m b) $3.18\mathrm{x}10^{7}$ m

2.25. O período de rotação de Júpiter em torno do Sol é de 12 anos e a distância que o separa do Sol é de 7.86×10^8 km. Determine a distância da terra ao Sol, sabendo que o período de revolução da Terra é de 1.0 ano.

R: 1.5×10^{11} m

2.26. Calcule a massa do Sol, sabendo que o raio médio da órbita de Júpiter em torno do Sol é de 7.78×10^{11} m e o período de revolução de Júpiter em torno do Sol é de 11.89 anos.
R: 1.98×10^{30} kg

2.27. Determine a altura, em relação à Terra, da órbita descrita por um satélite geostacionário.
R: 3.6 m

2.28. Um corpo de massa 50.0 kg pesa na Lua na superfície da Lua 81 N. Determine a massa da Lua, sabendo que o seu raio é 1.74×10^6 m. R: 7.35×10^{22} kg

2.29. Um satélite artificial descreve uma órbita circular a uma altura de 600 km acima da superfície da Terra. Calcule a velocidade e o período de revolução do satélite, sabendo que o raio da Terra é de 6.37×10^6 m.

R: 7.54×10^3 ms^{-1} , 1.61 h

2.30. Determine em função do raio da Terra, a altura a que deve subir um corpo para que a orça gravítica que sobre ele actua seja 80% do valor a que está sujeito à superfície da Terra.
R: 0.12 R_T

2.31. Determine quanto diminui o peso de um corpo quando é elevado a uma altura tripla do raio da Terra.

R: diminui $\frac{15}{16}$ P

CAPÍTULO 3. LEIS DE CONSERVAÇÃO

3.1. Trabalho. Potência. Energia.

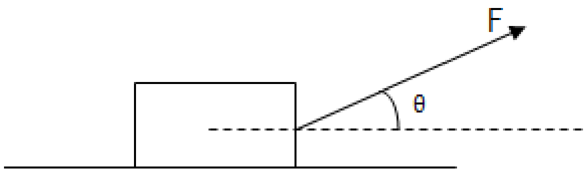
3.1.1. Trabalho.

Trabalho é a capacidade de produzir energia.

Energia é a capacidade de produzir trabalho.

Trabalho (w) e energia são (E) são quivalentes.

a) Trabalho de uma Força F



$$w = F \cdot \Delta S \cdot cos\theta \qquad [w] = J \quad (Joule)$$

F: força aplicada ao corpo capaz de realizar w. $[F] = N$

ΔS: deslocamento. $[\Delta S] = m$

θ: ângulo entre a direcção da força e a do deslocamento.

Se $w < 0$, F tem sentido contrário ao deslocamento.

Se $w = 0$, F é perpendicular à direcção do deslocamento.

Se $w > 0$, F tem o sentido do deslocamento.

Nota: Trabalho é uma grandeza escalar. Representa o produto escalar do vector força com o vector deslocamento.

b) Trabalho total

É o trabalho realizado sobre o corpo pela resultante das forças que nele actuam.

$$w_T = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n$$

c) Trabalho da força elástica

$$w_{F_{el}} = \frac{kx^2}{2}$$

3.1.2. Potência

A potência mede a rapidez com que o trabalho é realizado ou, mede a rapidez com que a energia é gasta ou produzida.

$$P = \frac{w}{t} \quad ou \quad P = \frac{E}{t} \qquad [P] = W\,(Watt) \quad S.I$$

Outras unidades:

$CV\ (Cavalo\ Vapor)$, $1CV = 735W$

$HP\ (Horse - Power)$, $1HP = 746\ W$

Sendo $w = F \cdot \Delta S$

$$P = \frac{w}{t} \Rightarrow P = \frac{F \cdot \Delta S}{t}$$

Para $v - const.$ $P = F \cdot v$

3.1.3. Rendimento de uma máquina

$$\eta = \frac{w_u}{w_t} \cdot 100\% \qquad 0 \leq \eta < 1$$

$$w_t = w_u + w_d \qquad w_t > w_u$$

w_t: trabalho total ou fornecido.

w_u: trabalho útil ou consumido.

w_d: trabalho dissipado ou perdido.

Ou,

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} \cdot 100\%$$

$$P_t = P_u + P_d \qquad P_t > P_u$$

3.1.4. Energia Cinética (E_c)

É a energia que um corpo possui devido a sua velocidade.

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \qquad [E_c] = J$$

Se $v = 0 \Rightarrow E_c = 0$

Para um sistema material constituídos por corpos de massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.

$$E_c = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2} + \frac{m_3 {v_3}^2}{2} + \cdots + \frac{m_n {v_n}^2}{2}$$

3.1.5. Energia Potencial (E_p)

É a energia que um corpo possui devida a sua posição no campo gravitacional.

$$E_p = mgh \qquad [E_P] = J$$

Se $h = 0 \Rightarrow E_p = 0$

3.1.6. Energia Mecânica ou Total (E_M)

É a soma das energias cinética e potencial.

$$E_M = E_c + E_p \qquad [E_M] = J$$

3.1.7. Lei da conservação da energia mecânica

“ Num sistema isolado a energia mecânica permanece constante”.

a) Para um sistema isolado

Sistema isolado é aquele que não troca energia com o exterior. Não há acções de forças exteriores (por ex.: força de tracção ou motora) nem de forças resistentes (por ex.: força de atrito).

$$E_{M1} = E_{M2} \qquad ou \qquad \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$

b) Para um sistema não isolado.

Um sistema não isolado é aquele que troca energia com o exterior. Há acção das forças exteriores e/ou de atrito.

$$E_{M1} + w_F - w_{F_A} = E_{M2} \quad ou \quad w_F - w_{F_A} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

onde,

w_F: trabalho das forças externas (é um trabalho positivo); representa a energia que o sistema *recebe* do exterior.

w_{F_A}: trabalho da força resistente de atrito (é um trabalho negativo ou resistente); representa a energia que o sistema *devolve* ao exterior (energia dissipada).

A força de gravidade (peso) e a força elástica são forças conservativas, e no sistema o trabalho dessas forças encontra-se armazenada sob a forma de energia potencial gravítica e elástica, respectivamente.

3.2. Impulso. Momento linear (quantidade de movimento).

3.2.1. Impulso (I)

$$I = F \cdot \Delta t \qquad [I] = N \cdot s$$

3.2.2. Momento linear ou quantidade de movimento (p)

$$p = m \cdot v \qquad [p] = kg \cdot ms^{-1}$$

3.2.3. Relação entre impulso e momento linear

$$I = \Delta p$$

$$I = p_2 - p_1$$

3.2.4. Segunda lei de Newton em termos do momento linear

$$F = ma$$

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad ou \quad F = \frac{dv}{dt}$$

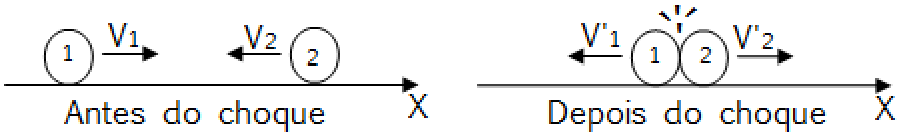
3.2.5. Lei da conservação do momento linear

“ Num sistema isolado o momento linear permanece constante”.

$$m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 + \cdots + m_nv_n = m_1v'_1 + m_2v'_2 + m_3v'_3 + \cdots + m_nv'_n$$

Esta lei é aplicada para casos de choques, colisões, explosões, pêndulo balístico, foguetões, etc.

Para caso de dois corpos,



$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

Onde, m_1, m_2: *são as massa dos corpos* 1 *e* 2, *respectivamente.*

v_1, v_2: *são as velocidades dos corpos antes do choque.*

v'_1, v'_2: *são as velocidades dos corpos depois do choque.*

a) Choques mecânicos

Choque perfeitamente elástico: é aquele em que há conservação do momento linear e da energia cinética; os corpos chocam-se e separam-se.

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \qquad e \qquad E_c = E'_c$$

Onde, $E_c = \frac{m_1{v_1}^2}{2} + \frac{m_2{v_2}^2}{2}$

$$E'_c = \frac{m_1{v'_1}^2}{2} + \frac{m_2{v'_2}^2}{2}$$

representam as energias cinéticas do sistema antes e depois do choque.

No choque elástico nã há a enegria dissipida, ou seja, ela é nula.

b) Choque perfeitamente inelástico: é aquele em que há conservação do momento linear sem conservação da energia cinética; os corpos chocam-se e seguem juntos após o choque.

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \qquad e \qquad E_c \neq E'_c$$

Quando o choque for inelástico, a energia dissipida Q é dada por:

$$Q = E'_c - E_c = \left(\frac{m_1{v'_1}^2}{2} + \frac{m_2{v'_2}^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1{v_1}^2}{2} + \frac{m_2{v_2}^2}{2}\right)$$

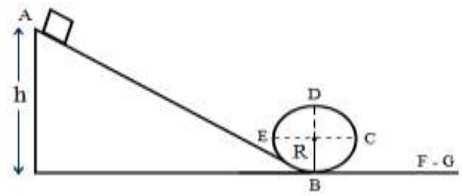
c) Coeficiente de restituição (e)

É uma medida da relação das velocidades dos corpos antes e depois do choque.

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

No choque perfeitamente elástico, $e = 0 \Rightarrow \; v'_1 = v'_2 = v'$

No choque perfeitamente inelástico, $e = 1 \Rightarrow \; v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$



PROBLEMAS

3.1. Que trabalho realiza a força que actua sobre uma gota de 20 mg de massa durante a queda livre de altura de 2 km.
R: 0.4 J

3.2 Que trabalho realiza um homem levantando uma carga de massa de 2 kg à altura de 1 m com aceleração de 3 ms^{-2} .
R: 26 J

3.3. Exerce-se sobre um corpo a força F de módulo 64.0 N, inclinada de 60º com a horizontal. A força de atrito cinético entre o corpo e a superfície é igual a 6.5 N. O deslocamento do corpo sobre a mesa é de 5.0 m. Calcular o trabalho realizado pela força F, pela força de gravidade, pela força de atrito, pela resultante das forças, ou seja, o trabalho total realizado sobre o corpo.
R: 160 J , 0 , -32.5 J , 128 J

3.4. Como varia a energia cinética de um carro quando duplica a sua velocidade?
R: Quadruplica.

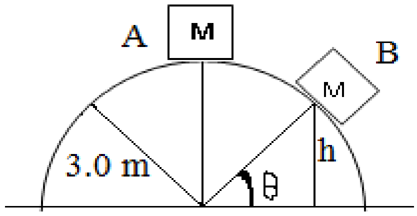
3.5. Um corpo com massa inercial de 20 kg foi lançado de baixo para cima segundo a linha de maior declive de um plano inclinado, que faz um ângulo de 30º com a horizontal. A velocidade inicial foi de 10.2 ms^{-1} . O corpo percorreu 6.4 m até parar, após o que regressou ao ponto de partida.

a) calcular o valor da força de atrito.

b) com que velocidade regressou o corpo ao ponto de partida?

R: a) 63 N b) 5 ms^{-1}

3.6. Um corpo de massa M está colocado sobre um monte de gelo de forma hemisférica, como indica a figura abaixo. Desprezando o atrito, o corpo desliza, partindo do repouso do ponto A. Determine a altura h e a velocidade no ponto B onde perde o contacto com o gelo.



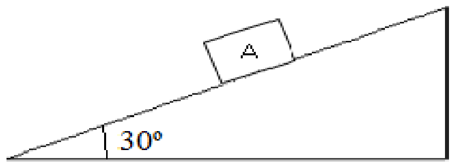
R: 2.0 m e $2\sqrt{5}$ ms^{-1}

3.7. Um carrinho de massa 200 g é abandonado no topo de um plano inclinado de altura h, descrevendo uma trajectória circular no plano vertical de raio 40 cm, conforme a figura abaixo. Determine a altura do plano para que o carrinho atinja, com velocidade mínima, o ponto mais alto da trajectória circular.
R: 1.0 m

3.8. Um carrinho pesa de massa 10 kg desce, sem atrito, segundo a linha de maior declive, no plano inclinado AB (figura do problema anterior). A inclinação do plano é 20% e o carrinho percorre a seguir o aro BCDE, continuando depois no plano horizontal FG. Sendo AB = 98 cm e partindo o carrinho do topo do plano, sem velocidade inicial, determinar o valor da velocidade com que o carrinho passa em B.

R: 1.96 ms^{-1}

3.9. O bloco A de massa 2.0 kg desloca-se ao longo do plano, representado na fig. abaixo, com velocidade constante. Calcule a aceleração que o bloco adquire se a inclinação do plano com a horizontal for de 60º. R: 5.8 ms^{-2}



3.10. Levantando uma carga de massa de 2 kg à altura de 1 m, força F realiza o trabalho de 78.5 J. Calcular a aceleração com que ascende a carga. Adote g = 9.8 ms^{-2}. R: 29.45 ms^{-2}

3.11. Uma pedra de massa m lançada pela superfície do gelo com a velocidade de 3 ms^{-1}, percorreu até parar a distância de 20.4 m. Encontrar o coeficiente de atrito da pedra contra o gelo.

R: 0.15

3.12. Um vagão de 20 t de massa desloca-se com movimento uniformemente retardado, com velocidade inicial de 54 kmh^{-1} e, ao decorrer de certo tempo, pára sob a acção da força de atrito de 6 KN. Encontrar o trabalho das forças de atrito e a distância percorrida pelo vagão até parar.

R: -2.25 MJ , 375 m

3.13. Determine as energias potencial e cinética de um corpo de massa de 3 kg em queda livre de altura de 5 m a distância de distância de 2 m em relação ao solo. R: 90 J , 60 J

3.14. Uma pedra é lançada de verticalmente para cima com a velocidade de 10 ms^{-1}. A que altura a energia potencial será igual a energia cinética? R: 2.5 m

3.15. Um corpo desliza primeiramente por um plano inclinado que forma um ângulo de 8º com a vertical e, secundariamente pela superfície horizontal. Achar o coeficiente de atrito em todo o percurso, sabendo que o corpo percorre pela superfície horizontal a mesma distância pelo plano inclinado.
R: 0.07

3.16. Uma esfera de massa 100 g parte do repouso e desce uma rampa com inclinação constante e atrito desprezável. A esfera percorreu 12.20 m durante o 3.º segundo do movimento. Calcular:
a) o ângulo de inclinação da rampa.
b) a diminuição de energia potencial gravítica no trajecto entre dois pontos A e B da rampa distanciados 20.0 m.
c) o aumento da energia cinética da esfera entre os referidos pontos. R: a) 30º b) -9.8 J c) 9.8 J

3.17. Uma estrada tem uma curva com inclinação de 15º e raio de curvatura 150 m. Determine o valor máximo da velocidade com que é possível descrever a curva. R: 20 ms^{-1}

3.18. Um automóvel descreve uma curva de raio 100 m com movimento circular. Determine a inclinação mínima da curva de modo que o automóvel a possa descrever com uma velocidade máxima de 72 kmh^{-1}.
R: 22º

3.19. Quando um ciclista de massa 80 kg se desloca numa pista circular com velocidade de valor 14 ms^{-1}, o seu peso aparente é de 25% superior ao seu peso real. Determine a inclinação e o raio da pista.
R: 37º , 26 m

3.20. Um motociclista de peso 70 kgf faz uma curva de raio 60 m à velocidade de 65 kmh^{-1}. Determine a mínima inclinação da curva e o peso aparente do motociclista. R: 28º30' , 80 kgf

3.21. Numa estrada horizontal, um automóvel, de massa 1.5 t, faz uma curva de raio 50 m, à velocidade constante de 60 km^{-1}. Calcule o valor da força de atrito e o coeficiente de atrito.
R: 8.4×10^3 N , 0.56

3.22. Um automóvel faz uma curva de raio 60.0 m com uma inclinação de 20º à velocidade de 112 km^{-1}. Determine o coeficiente de atrito e o peso aparente do condutor de massa 80 kg.
R: 0.79 , 1.19×10^3 N

3.23. Uma pedra cai de certa altura durante o tempo de 1.43 s. Calcular as energias cinética e potencial da pedra no ponto médio do percurso. A massa da pedra é de 2 kg. (g = 9.8 ms^{-2}).
R: 98.2 J , 98.2 J

3.24. Um ponto material com 10 g de massa move-se por uma circunferência de raio igual a 6.4 cm. Calcular a aceleração tangencial do ponto, sabendo que no fim da segunda rotação, após o início do movimento, a sua energia cinética é de 0.8 mJ. R: 0.1 ms^{-2}

3.25. Um corpo de massa 4 kg comprime uma mola de constante elástica 100 KN/m, causando uma deformação de 20 cm. Ao liberar a mola, o corpo segue um percurso na horizontal e depois sobe ao longo duma rampa.

a) qual a velocidade que o corpo adquire?

b) qual a altura que atinge a rampa?

R: a) 1 ms^{-1} b) 4cm

2.26. Para distender uma mola em 4 mm é preciso efectuar um trabalho de 0.02 J. Que trabalho é necessário realizar para distende-la de 4 cm. R: 2 J

3.27. Para comprimir uma mola em 3 cm foi aplicada uma força de 20 N. Determine a energia potencial adquirida pela mola. R: 0.3 J

3.28. Uma bala de massa de 5 g sai de um fuzil de massa de 5 kg com a velocidade de 2160 kmh^{-1}. Calcular a velocidade de recuo do fuzil. R: 0.6 ms^{-1}

3.29. Dois blocos A e B, de massas 10.0 kg e 2.0 kg, deslocam-se em sentido contrário sobre uma superfície horizontal, sem atrito. Os valores das velocidades dos blocos são respectivamente iguais a 2.0 ms^{-1} e 0.5 ms^{-1}. Os blocos sofrem uma colisão perfeitamente inelástica. Determine a velocidade do sistema após o choque.

R: 1.8 ms^{-1}

3.30. Duas esferas, A e B, deslocam-se em sentidos contrários. A esfera A, de massa 1.6 kg, desloca-se a velocidade de 10.0 ms^{-1}, choca com a esfera B, de massa 0.8 kg. Sabendo que não há atrito entre as esferas e a superfície, e que seguem juntas após o choque à velocidade 6.0 ms^{-1}, determine a velocidade da esfera B, imediatamente antes do choque. R: 2.0 ms^{-1}

3.31. Um carro A, de massa 3500 kg, desloca-se para a direita, à velocidade de 20.0 kmh^{-1}, numa estrada plana e horizontal sem atrito, quando choca com um carro B de massa igual a 1000 kg, que se encontra parado. Verifica-se que a colisão é perfeitamente inelástica. Determine a velocidade com que os carros A e B passam a mover-se após o choque. R: 16 kmh^{-1}

3.32. Um bloco B, de massa 5.0 kg, que se encontra em repouso sobre uma superfície horizontal, sem atrito, é atingido por um projéctil de massa 10 g que se desloca com velocidade de valor 500 ms^{-1}. Sabendo que o projéctil fica alojado no bloco, determine a velocidade do conjunto depois do impacto. R: 1.0 ms^{-1}

3.33. Uma granada é lançada verticalmente para cima com velocidade de valor 80 ms^{-1}. Quando atinge a altura máxima explode, dando origem a três fragmentos, A, B e C, de massas respectivamente 10 kg, 20 kg e 40 kg. A sai disparado com uma velocidade $50\overrightarrow{e_x} + 20\overrightarrow{e_y}$ ms^{-1} e B $-20\overrightarrow{e_x}$ ms^{-1}. Determine a velocidade de C logo após a explosão.

R: 5.6 ms^{-1}

3.34. Um corpo de 3 kg de massa move-se com velocidade de 4 ms^{-1} e choca com um corpo fixo de massa igual. Considerando que o choque é perfeitamente inelástico, achar a quantidade de calor libertada durante o choque. R: 12 J

3.35. Uma partícula de massa 6m desintegra-se dando origem a três partículas, de massa 2m, m e 3m, que se movimentam no plano XOY e cujas posições em função do tempo são: $6t\overrightarrow{e_y}$, $-3t^2\overrightarrow{e_x}$ e $t^2\overrightarrow{e_x}$ respectivamente. Determine a velocidade da partícula antes de se desintegrar.
R: 2 ms^{-1}

3.36. Uma bala de massa 50.0 g disparada horizontalmente. A bala colide com um bloco, de massa 5.0 kg, que se encontra repouso, suspenso por um fio inextensível e de massa desprezável. Imediatamente após a colisão a bala fica incrustada no bloco e o conjunto sobe a uma altura de 5.0 cm antes de parar. Calcule a velocidade inicial da bala.
R: 1.01×10^2 ms^{-1}

CAPÍTULO 4. OSCILAÇÕES MECÂNICAS

4.1. Movimento Harmónico Simples (MHS)

É um movimento rectilíneo periódico de vaivém.

Equações do MHS

a) Elongação ou deslocamento (x)

É a distância medida desde uma posição à posição de equilíbrio.

$$x = Asen(\omega t + \alpha_0) \qquad (1) \qquad ou \qquad x = Acos(\omega t + \alpha_0)$$

$x - elongação.$ $\qquad [x] = m$

$A - amplitude$: é $a\ máxima\ elongação.$ $\qquad [A] = m$

$\omega - velocidade\ angular\ ou\ pulsação.$ $\qquad [x] = m$

$\alpha_0 - \ fase\ inicial.$ $\qquad [\alpha_0] = rad$

$\alpha - \ fase\ inicial.$ $\qquad [\alpha] = rad \qquad \alpha = \alpha_0 + \omega t$

$de\ (1)$: $\quad se \quad \alpha_0 = 0 \ \Rightarrow \ x = Asen(\omega t)$

b) Velocidade

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{d[Asen(\omega t + \alpha_0)]}{dt}$$

$v = A\omega cos(\omega t + \alpha_0)$ $\qquad$ é $a\ equação\ de\ definição\ da\ velocidade\ no\ M.H.S$

Outra expressão de v é dada por:

Pela relação trigonométrica fundamental, $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \ cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$

Da equação da velecidade $v = A\omega cos(\omega t + \alpha_0)$, assim teremos,

$$v = A\omega\sqrt{1 - sen^2(\omega t + \alpha_0)}$$

como $x = Asen(\omega t + \alpha_0) \Rightarrow sen(\omega t + \alpha_0) = \frac{x}{A}$

$$v = A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad com \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

c) Percurso (l)

$$l = 4 \cdot A \cdot N \qquad [l] = m$$

$A - amplitude$

$N - número\ de\ voltas$

d) Aceleração (a)

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{d[Acos(\omega t + \alpha_0)]}{dt}$$

$a = -A\omega^2 sen(\omega t + \alpha_0)$ é $a\ equação\ de\ definição\ da\ aceleração$

Sendo $x = A\omega sen(\omega t + \alpha_0)$

$$a = -x\omega^2$$

O sinal de menos $(-)$ só significa que a aceleração tem sentido contrário à elongação.

e) Período de um M.H.S

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$k - constante\ elástica$

f) Constante elástica (k)

Sendo $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ $\quad e \quad$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Igualando ambas expressões e isolando k, teremos,

$$k = m\omega^2 \qquad [k] = N/m = Nm^{-1}$$

g) Energia cinética

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Como $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$$E_c = \frac{m\omega^2(A^2 - x^2)}{2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2)$$

h) Energia potencial do M.H.S

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

i) Energia mecânica

É a soma das energias cinética e potencial.

$$E_M = E_c + E_p$$

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot kx^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

4.2. Pêndulo

Um pêndulo é qualquer corpo suspenso de um fio podendo oscilar em volta de um eixo de suspensão que não passe pelo seu centro de gravidade.

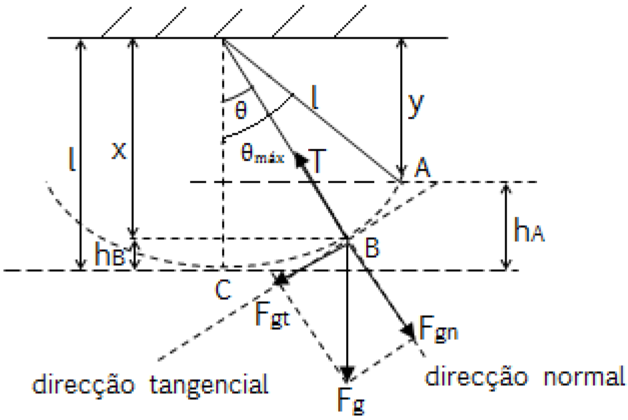
O período de um pêndulo é dado por,

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$l - comprimento\ do\ fio$

4.2.1. Pêndulo gravítico simples

É um pêndulo constituído por uma partícula de massa m, suspensa de um fio de comprimento l e massa desprezível, que realiza um movimento de vaivém em torno da sua posição de equilíbrio.



$A - posição\ genérica\ (início\ do\ movimento). Para\ A: v_A = 0\ ,\ T_A = 0$

$B - posição\ qualquer. Para\ B: v_B\ ,\ T_B$

$C - posição\ de\ equilíbrio\ (estabilidade). Para\ C: v_C = v_{máx}\ ,\ T_C = T_{máx}$

$l - comprimento\ do\ fio$

$T - tensão$

$F_{gn} - componente\ normal\ da\ F_g$

$F_{gt} - componente\ tangencial\ da\ F_g$

$Se\ a\ velocidade\ for\ máxima, a\ tensão\ também\ será\ máxima.$

$Se\ a\ velocidade\ for\ crítica\ ou\ nula, a\ tensão\ será, em\ ambas\ situções, nula.$

Equações:

1- Altura (h)

Na posição A: h_A =?, $\sphericalangle = \theta_{máx}$

$h_A + y = l \Rightarrow h_A = l - y$

$y = l \cdot cos\theta_{máx}$

$h_A = l - l \cdot cos\theta_{máx}$

$h_A = l(1 - cos\theta_{máx})$

Na posição B: h_B =?, $\sphericalangle = \theta$

$h_B + x = l \Rightarrow h_B = l - x$

$x = l \cdot cos\theta$

$h_B = l - l \cdot cos\theta$

$h_B = l(1 - cos\theta)$

Na posição C: $h_C = 0,\ \sphericalangle = 0$

2- Período (T)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

3- Velociade (v)

Na posição A: $v_A = 0$

Na posição B: $v_B =?$

Pela *lei da consevação da energia mecânica*,

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

$$0 + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

$$mgh_A = \frac{m{v_B}^2}{2} + mgh_B \qquad multiplicando\ membro\ a\ membro\ por\ \frac{2}{m}$$

$$2gh_A = {v_B}^2 + 2gh_B \ \Rightarrow\ {v_B}^2 = 2gh_A - 2gh_B \ \Rightarrow\ v_B = \sqrt{2gh_A - 2gh_B}$$

$$v_B = \sqrt{2gl(1 - cos\theta_{máx}) - 2gl(1 - cos\theta)}$$

$$v_B = \sqrt{2gl[(1 - cos\theta_{máx}) - (1 - cos\theta)]}$$

$$v_B = \sqrt{2gl(1 - cos\theta_{máx} - 1 + cos\theta)}$$

$$v_B = \sqrt{2gl(cos\theta - cos\theta_{máx})}$$

Na posição C: $v_B = v_{máx} =?$

Pela *lei da consevação da energia mecânica*,

$$E_{MA} = E_{MC}$$

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cC} + E_{pC}$$

$$0 + E_{pA} = E_{cC} + 0$$

$$mgh_A = \frac{m{v_C}^2}{2}$$

$$2gh_A = {v_C}^2 \ \Rightarrow\ v_C = \sqrt{2gh_A}$$

$$v_C = \sqrt{2gl(1 - cos\theta_{máx})}$$

4- Tensão (T)

Na posição A: $T_A = 0$

Na posição B: $T_B = ?$

Para a direcção normal,

$$F_{Rn} = ma_c$$

$$T_B - F_{gn} = m\frac{{v_B}^2}{R}$$

$$T_B = F_g \cdot cos\theta + m\frac{{v_B}^2}{R} \qquad R = l$$

$$T_B = F_g \cdot cos\theta + \frac{m \cdot 2gl(cos\theta - cos\theta_{máx})}{l}$$

$$T_B = m \cdot g \cdot cos\theta + 2 \cdot g \cdot m \cdot (cos\theta - cos\theta_{máx})$$

$$T_B = m \cdot g \cdot [cos\theta + 2 \cdot (cos\theta - cos\theta_{máx})]$$

$$T_B = m \cdot g \cdot (3cos\theta - 2cos\theta_{máx})]$$

Na posição C: $T_C = T_{máx} = ?$

$$F_{RC} = m \cdot a_c$$

$$T_C - F_g = m \cdot \frac{{v_C}^2}{R}$$

$$T_C = mg + m \cdot \frac{{v_C}^2}{R} \qquad R = l$$

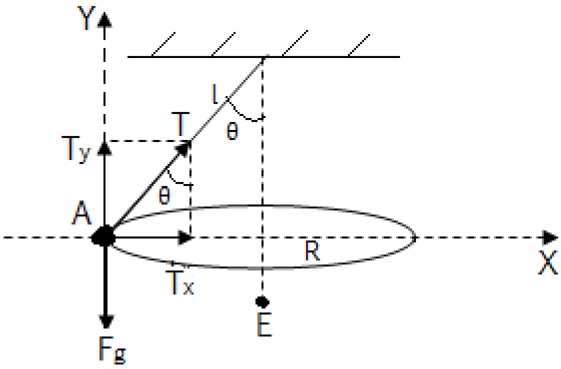
$$T_C = mg + m \cdot \frac{2gl(1 - cos\theta_{máx})}{l}$$

$$T_C = mg + 2mg(1 - cos\theta_{máx})$$

$$T_C = mg(3 - 2cos\theta_{máx})$$

4.2.2. Pêndulo cónico

É aquele pêndulo que realiza um movimento circular no plano horizontal.



$$E - posição\ de\ equilíbrio\ (estabilidade)$$

$$A - posição\ genérica$$

$Eixo\ X$ $\qquad\qquad$ $Eixo\ X$

$F_{Rx} = ma_c$ $\qquad\qquad$ $F_{Ry} = 0 \quad não\ há\ movimento$

$T_x = m \cdot \frac{v^2}{R}$ $\qquad\qquad$ $T_y - F_g = 0$

$T \cdot sen\theta = m \cdot \frac{v^2}{R}$ $\qquad\qquad$ $T_y = mg$

$$Tcos\theta = mg$$

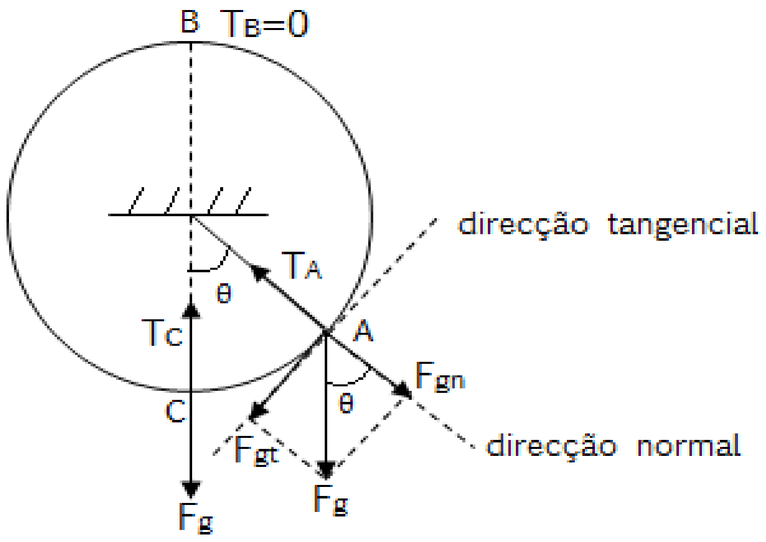
Também, $tg\theta = \frac{T_x}{T_y} \quad \Rightarrow \quad tg\theta = \frac{m \cdot \frac{v^2}{R}}{mg}$

$$tg\theta = \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{R \cdot tg\theta} \qquad\qquad R = l \cdot sen\theta$$

4.2.3. Pêndulo circular

É aquele pêndulo que realiza um movimento circular no plano vertical.



$A - posição\ qualquer$

$B - posição\ mais\ elevada$

$C - posição\ de\ equilíbrio, mais\ baixa$

Posição A:

- direcção tangencial

$$F_{Rt} = m \cdot a_t$$

$$F_{gt} = m \cdot a_t$$

$$mgsen\theta = m \cdot a_t$$

$$gsen\theta = a_t$$

- direcção normal

$$F_{Rn} = m \cdot a_n$$

$$T_A - F_{gn} = m \cdot \frac{{v_A}^2}{R} \qquad R = l$$

$$T_A = mgcos\theta + m \cdot \frac{{v_A}^2}{l}$$

Isto se em A o corpo tiver velocidade. Pois, se em A o corpo não tiver velocidade, então, $v_A = 0$.

Posição B:

Quando o corpo atinge o ponto B o fio fica frouxo ($T_B = 0$).Mas para continuar o trajecto será necessário que o corpo possua uma velocidade mínima (crítica). Pois, se m B a velocidade for nula o corpo cai e não há movimento circular.

$$F_{RB} = ma_c$$

$$T_B + F_g = ma_c$$

$$0 + mg = m\frac{{v_B}^2}{R}$$

$${v_B}^2 = gR \qquad R = l$$

$$v_B = \sqrt{gl} \qquad \acute{e}\ a\ velocidade\ cr\acute{\imath}tica$$

Posição C:

$$F_{RC} = ma_c$$

$$T_C - F_g = m\frac{{v_C}^2}{R}$$

$$T_C = mg + m\frac{{v_C}^2}{R} \qquad R = l$$

$$v_C = ?$$

Pela lei da conservação da energia mecânica

$$E_{MB} = E_{MC}$$

$$E_{cB} + E_{pB} = E_{cC} + E_{pC}$$

$$\frac{m{v_B}^2}{2} + mgh_B = \frac{m{v_C}^2}{2} + 0 \qquad multiplicando\ por\ \frac{2}{m}$$

$${v_B}^2 + 2gh_B = {v_C}^2 \qquad h_B = l + l = 2l$$

$${v_C}^2 = gl + 4gl$$

$v_C = \sqrt{5gl}$ substituíndo v_C em T_C

$$T_C = mg + m\frac{5gl}{l}$$

$$T_C = mg + 5mg$$

$$T_C = 6mg \qquad \acute{e}\ a\ tens\tilde{a}o\ na\ posi\c{c}\tilde{a}o\ mais\ baixa; \acute{e}\ a\ tens\tilde{a}o\ m\acute{a}xima.$$

Problemas

4.1. Escrever a equação das oscilações harmónicas de um oscilador se a amplitude das oscilações for igual a 5 cm e a frequência 0.2 Hz. Determinar a posição no instante t = 1.5 s.

R: $x = 0.05sen(0.4\pi t)$ m, x = 4.8 cm.

4.2. Escrever a equação das oscilações harmónicas com amplitude igual a 10 cm, período 4 s e fase inicial 30º. Qual a posição no instante t = 0 s e t = $\frac{2}{3}$ s. R: $x = 0.1sen(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6})$ m, x= 5 cm e x = 0

4.3. Um ponto material realiza oscilações harmónicas ao longo do eixo X´´OX em torno da origem O com amplitude 10 cm e frequência 2 Hz. Ache o comprimento total do percurso percorrido pelo corpo durante o intervalo de tempo igual a 2 s. R: 0.80 m

4.4. Ao fim de quanto tempo após o inicio do movimento um ponto que efectua o movimento oscilatório de acordo com a lei $x = 7sen\frac{\pi}{2}t$, percorre a distancia que vai desde a posição de equilíbrio até ao deslocamento máximo? R: 1 s

4.5. A amplitude das oscilações de um bloco de aço de 2 kg que realiza MHS é 25 cm e o período 3 s. Calcular: a) a velocidade máxima, a aceleração máxima, a máxima força restauradora, a energia cinética máxima e a energia potencial máxima;
b) a velocidade, a aceleração, a força restauradora, as energia cinética e potencial, para uma posição de 15 cm;
c) a energia total posição qualquer. R: a) 0.52 ms^{-1}, 1.10 ms^{-2}, 2.2 N, 0.27 J, 0.27 J. b) 0.42 ms^{-1}, 0.66 ms^{-2}, 1.32 N, 0.18 J, 0.10 J. c) 0.27 J

4.6. A lei do movimento de um oscilador harmónico de massa 300 g é: $x = 5sen(2\pi t + \frac{\pi}{3})$. Calcular:
a) a velocidade máxima, a aceleração máxima, a máxima força restauradora, a energia cinética máxima e a energia potencial máxima;

b) a velocidade, a aceleração, a força restauradora, as energia cinética e potencial, para uma posição de 3 m;

c) a energia total posição qualquer.
R: a) 31.4 ms^{-1}, 197.2 ms^{-2}, 59.2 N, 148 J, 148 J. b) 25.12 ms^{-1}, 118.32 ms^{-2}, 35.5 N, 94.7 J, 53.24 J. c) 148 J

4.7. Considere um oscilador harmónico com a massa de 0.25 kg e k = 100 N/m. Quantas oscilações realiza por minuto? R: 2 min^{-1}

4.8. Um oscilador harmónico realiza as oscilações com frequência de 50 Hz. Se diminuir a sua massa de 147 g, a frequência das oscilações torna-se igual a 70 Hz. Qual a sua massa inicial? R: 300 g

4.9. Se aumentar a massa de um oscilador harmónico em 100, a frequência das oscilações diminui-se 1.41 vezes. Qual foi a massa inicial? R: 100 g

4.10. Considere um oscilador harmónico (sistema massa-mola) de 200 g de massa. Se aumentar a sua massa o período das oscilações aumenta-se 1.10 vezes. Determine o aumento de massa? R: 42 g

4.11. Considere um oscilador harmónico (sistema massa-mola). Se aumentar a sua massa de 21 g o período das oscilações aumenta-se 1.10 vezes. Qual a massa inicial do oscilador? R: 100 g

4.12. A energia total de um oscilador harmónico da lei do movimento $x = 0.36sen31.4t$ é igual a 21 J. Qual a sua massa? R: 0.33 kg

4.13. A energia total de um oscilador harmónico da lei do movimento $x = Asen\pi t$ é de $80\pi^2$ J tem a massa de 40 kg. Determine a sua amplitude.
R: 2 m

4.14. Um pêndulo simples de comprimento de 80 cm realizou 14 oscilações durante 1 minuto. Que valor tem a aceleração de gravidade? R: 1.72 ms^{-2}

4.15. Durante algum intervalo de tempo um pêndulo simples realiza 50 oscilações e um outro, 30 oscilações. Determine os seus comprimentos se um deles é mais comprido de 32 cm que o outro.
R: 18 cm e 50 cm

4.16. Considere um pêndulo simples de 24 cm de comprimento. Se aumentar o seu comprimento o período das oscilações aumenta-se 1.5 vezes. Determine o aumento de comprimento. R: 30 cm

4.17. Um pêndulo simples de comprimento de 1 m é desviado da sua posição de equilíbrio a uma amplitude de 60º. Com que velocidade passará à posição de equilíbrio? R: 3.1 ms^{-1}

4.18. Um corpo de massa 2.0 kg está ligado a um fio de comprimento 50 cm e descreve uma circunferência, no plano horizontal, de raio 25 cm, com velocidade de valor constante. Determine o valor:

a) da tensão do fio;

b) da velocidade da partícula;
c) do período do movimento;
R: a) 23 N b) 1.2 ms^{-1} c) 1.3 s

4.19. Um pêndulo gravítico constituído por uma esfera homogénea de massa 2.0×10^{-1} kg, suspensa de um fio inextensível e de massa desprezível de um metro de comprimento. A amplitude angular máxima do pêndulo é de 60º.

a) calcule a tensão quando a esfera se encontra na posição angular de 37º;

b) calcule o módulo da velocidade com que a esfera passa pela posição de equilíbrio;

c) calcule a tensão máxima.

R: a) 2.8 N b) 3.2 ms^{-1} c) 4.0 N

4.20. Um fio inextensível e sem peso, de 2.0 m comprimento, tem uma extremidade fixa e a outra presa a uma partícula de massa m, que roda em torno da vertical que passa pelo ponto ao qual se prende a outra extremidade, com velocidade angular de 2.5 rads^{-1}. Determine o valor do ângulo que o fio faz com a horizontal. Adote g = 9.8 ms^{-2}. R: 53º

4.21. Uma bala de massa de 9.0 g atinge o pêndulo balístico (dispositivo utilizado para medir a velocidade de projécteis) de massa 1.5 kg, onde fica incrustada. O sistema entra em movimento atingindo a altura de 15 cm. Determine a velocidade da bala. R: 285 ms^{-1}

4.22. Uma partícula de massa de 68 g, presa por um fio de comprimento de 58 cm, está a girar no plano vertical. Determine o valor da tracção do fio quando a partícula passa o ponto mais baixo da trajectória.
R: 4.0 N

4.23. Um corpo de massa 60 g, suspenso de um fio de comprimento 20 cm, movimenta-se pendularmente no plano verticalmente. Num determinado ponto A, a tensão do fio é $\vec{T} = -2\vec{P}$. Determine a amplitude do movimento e a aceleração no ponto correspondente a essa amplitude. R: 60º , 8.7 ms^{-2}

4.24. O pêndulo de um relógio do século XIX oscila, sendo auxiliado por um mecanismo que compensa as por atrito. Sabendo que o fio tem 50 cm de comprimento e que a massa do pêndulo é igual a 150 g, determine o valor das tensões e das acelerações nas posições correspondentes as alturas máximas e mínimas. A amplitude do movimento é de 15º. R: 1.4 N e 0.68 ms^{-2} (h máx) , 1.5 N e 2.6 ms^{-2} (h mín)

CAPÍTULO 5. DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS (SÓLIDO INDEFORMÁVEL)

5.1. Momento de uma força em relação a um eixo (M)

O momento de uma força é uma medida da capacidade que possui a mesma força para produzir num corpo um movimento de rotação ao redor de um eixo.

Equação vectorial: $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$

Equação escalar: $M = F \cdot r \cdot sen\varphi$

$M - momento\ da\ força\ F$ $\qquad [M] = Nm$

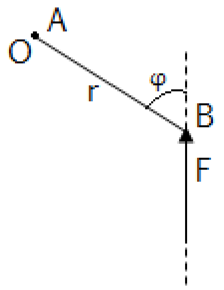
$F - força\ aplicada \qquad\qquad [F] = N$

$r - distância\ medida\ desde\ o\ eixo\ até\ o\ ponto\ de\ aplicação\ da\ força \qquad [r] = m$

$\varphi -$ é $o\ menor\ ângulo\ entre\ r\ e\ a\ linha\ de\ acção\ da\ força\ F$

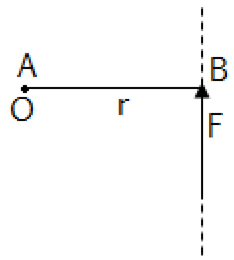
A seguir temos algumas situações do momento duma força:

a)

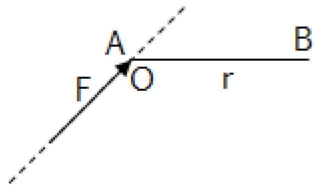


$M = F \cdot r \cdot sen\varphi$

b)



$\varphi = 90°\qquad M = F \cdot r$



c)

$M = 0,\ pois\ \ r = 0$

Se num corpo actuarem em simultâneo várias forças, o momento para esse sistema de forças (momento resultante) em relção a um eixo é:

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$$

Nestas condições, toma-se como positivo os momentos no sentido anti-horário e, como negativos, os momentos no sentido horário.

Em condições de equilíbrio o momento resultante é igual a zero.

5.2. Momento de Inércia (I) de um corpo

O momento de inércia de um corpo é uma medida da resistência que o corpo oferece a pôr-se em movimento de rotação.

Para uma massa pequena de raio de giração R,

$$I = mR^2 \qquad\qquad [I] = kg \cdot m^2$$

Para um corpo constituído pelas massas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, as distâncias $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, respectivamente, do eixo de rotação,

$$I = m_1 \cdot {r_1}^2 + m_2 \cdot {r_2}^2 + m_3 \cdot {r_3}^2 + \cdots + m_n \cdot {r_n}^2$$

5.3. Equações do movimento de rotação

As equações do movimento de rotação são obtidas por analogia entre as grandezas lineares (movimento de translação) e angulares (movimento de rotação).

$$S(deslocamento\ linear)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\theta(deslocamento\ angular)$$

$$v(velocidade\ linear)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\omega(velocidade\ angular)$$

$$a(aceleração\ linear)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\alpha(aceleração\ angular)$$

$$F(força)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_M(momento\ duma\ força)$$

$$p(momento\ linear)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_L(momento\ angular)$$

$$I\ (impulso\ linear)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\tau(impulso\ angular)$$

$$Movimento\ de\ translação\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Movimento\ de\ rotação$$

$$v = \frac{ds}{dt}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$v = v_0 + at\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$F = ma\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_M = I\alpha$$

$$E_{ctransl} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_E_{crotação} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

$$P = \frac{w}{t} = F \cdot v\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_P_{rot} = M \cdot \omega$$

$$p = m \cdot v\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_L = I \cdot \omega$$

$$I = F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\tau = M \cdot \Delta t = I \cdot \Delta\omega$$

A relação das grandezas lineares e angulares é dada por:

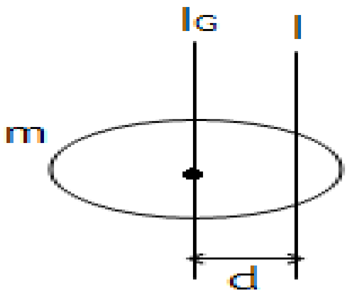
$$S = \theta \cdot R$$

$$v = \omega \cdot R$$

$$a = \alpha \cdot R$$

5.4. Teorema de Steiner (Teorema dos eixos paralelos)

Enuncia que: O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer e que é paralelo ao eixo que passa pelo seu centro de massa é:



$$I = I_G + m \cdot d^2$$

$I_G - momento\ de\ inércia\ em\ relação\ ao\ eixo\ que\ passa\ pelo\ centro\ de\ massa$

$m - massa\ total\ do\ corpo$

$d - distância\ entre\ os\ dois\ eixos\ paralelos$

5.5. Momentos de inércia de corpos simétricos em relação a um eixo que passa por seus centros de massa

$I = mR^2$ é $o\ momento\ de\ inércia\ de\ uma\ pequena\ massa\ m\ de\ raio\ de\ giração\ R$

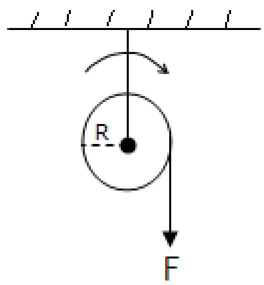
$I = \frac{1}{2}mR^2$ é $o\ momento\ de\ inércia\ de\ um\ cilindro\ maciço\ uniforme\ ou\ de\ um\ disco\ de\ massa\ m\ e\ raio\ R$

$I = \frac{2}{5}mR^2$ é $o\ momento\ de\ inércia\ de\ uma\ esfera\ maciça\ uniforme\ de\ massa\ m\ e\ raio\ R$

5.6. Casos particulares

a) Caso roldana

1- Uma força tangente à roldana.



Neste caso só temos um único corpo, a roldana, cujo o movimento é de rotação.

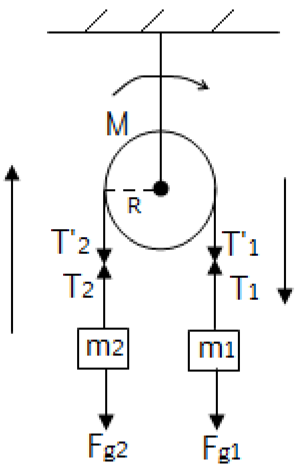
Roldana: mov. rotação

Pela 2ª lei de Newton

$$M_R = I\alpha$$

$$F \cdot R = I\alpha \qquad com\ a = \alpha R$$

2- Duas forças tangentes à roldana.



Neste casos, temos três corpos: corpo 1 (mov. transl), corpo 2 (mov. transl) e a roldana (mov. rotação).

Relações: $a_1 = a_2 = a$

$$T_1 = T'_1\ ;\ \ T_2 = T'_2\ ;\ T_1 \neq T_2$$

Corpo 1: mov. transl.

$$F_{R1} = m_1 a_1$$

$$F_{g1} - T_1 = m_1 a$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a \qquad (1)$$

Corpo 2: mov. transl.

$$F_{R2} = m_2 a_2$$

$$T_2 - F_{g2} = m_2 a$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 a \qquad (2)$$

Roldana: mov. rotação.

$$M_R = I\alpha \qquad a = \alpha \cdot R$$

$$T'_1 \cdot R - T'_2 \cdot R = I\alpha$$

$$(T'_1 - T'_2) \cdot R = I\alpha \qquad (3)$$

Substuíndo (1) e (2) em (3),

$$[(m_1 g - m_1 a) - (m_2 g + m_2 a)] \cdot R = I \cdot \frac{a}{R}$$

b) Caso de um plano inclinado

Um cilindro de raio r e momento de inércia $I = \frac{1}{2}mr^2$ sobe sem deslizar ao longo de um plano inclinado de comprimento l e inclinação θ. Detremine a velocidade mínima com que parte da base para que atinja o topo.

Sol.:

Dados: Cálculo:

r Como o cilindro sobe sem deslizar, ele percorre a distância l (mov.transl) rolando (mov. rotação).

$I = \frac{1}{2}mr^2$

l

θ

$v_{mín} =?$

Pela lei da conservação da energia mecânica,

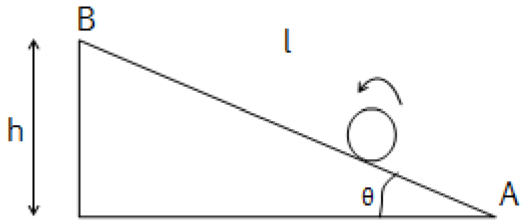
$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

$$E_{cA} + 0 = 0 + E_{pB}$$

$$E_{cAtr} + E_{cArot} = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mglcos\theta$$



$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega^2 = mglcos\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mr^2\omega^2 = mglcos\theta$$

$$multiplicando\ membro\ a\ membro\ por\ \frac{4}{m}$$

$$2v^2 + r^2\omega^2 = 4glcos\theta$$

$$2v^2 + r^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = 4glcos\theta$$

$$2v^2 + v^2 = 4glcos\theta$$

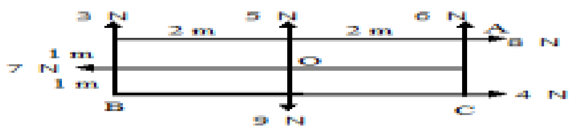
$$3v^2 = 4glcos\theta$$

$$v = \sqrt{\frac{4glcos\theta}{3}}$$

PROBLEMAS

5.1. Um homem aplica uma força de 18 N sobre a margem de uma porta de largura 84 cm. Qual é o momento da força se ele actua: a) perpendicularmente à porta. b) sob um ângulo de 60º em relação ao plano da porta. R: a) 15 Nm b) 13 Nm

5.2. Sobre um rectângulo de 4x2 m agem as forças de 8, 6, 5, 3, 7, 9 e 4 N conforme a figura abaixo. Achar o momento de força do sistema em relação a um eixo a) que passe por A, b) que passe por B, c) que passe por C, d) que passe por O. R: a) -3 Nm b) 7 Nm c) -13 NM d) 2 Nm



5.3. Calcule o momento de inércia de uma esfera homogénea e maciça de raio 15 cm e massa 20 kg em relação a um eixo que passa tangente a sua superfície. R: 0.45 kgm^2

5.4. Duas partículas A e B de massa 300 g e 100 g , respectivamente, estão ligadas por uma haste metálica de massa desprezável e de 1.2 m de comprimento. O sistema roda em torno de um eixo colocado perpendicularmente a haste a uma distância de 20 cm da partícula B. Calcule o momento de inércia do sistema. R: 0.304 kgm^2

5.5. Três partículas A, B e C de massas 100 g, 200g e 300 g equidistantes estão ligadas por uma haste metálica de massa desprezável de 200 cm de comprimento. O sistema roda perpendicularmente em torno de um eixo colocado verticalmente a uma distância de 0.5 m da partícula A. Calcule o momento de inércia do sistema.

R: 0.75 kgm^2

5.7. Quatro corpos pontuais com massa iguais a m, são colocadas nos vértices de um quadrado com lado a. Qual o momento de inércia desse sistema relativamente a um eixo perpendicularmente ao plano do quadrado e que a) passa através de um dos corpos b) passa através do centro do quadrado. c) passa no meio de um dos lados.
R: a) $4ma^2$ kgm^2 b) $4ma^2$ kgm^2 c) $2.4ma^2$ kgm^2

5.7. Duas partículas de massa de 5.0 kg e 7.0 kg são fixas numa barra de massa desprezável a distância de 4.0 m uma da outra. Calcule o momento de inércia desse sistema em relação a um eixo perpendicular a recta que une as partículas se:

a) o eixo se encontra na metade da distância entre as partículas;

b) o eixo se encontra à esquerda relativamente a ambas as partículas distanciado de 0.50 m da partícula de 5.0 kg.

R: a) 48 kgm^2 b) 143 kgm^2

5.8. Um volante de raio 0.3 m parte do repouso e se acelera com aceleração angular constante de 0.6 rads^{-2}. Calcule o módulo da aceleração tangencial, da aceleração radial e da aceleração total de um ponto da periferia do volante.

a) depois de ter girado um ângulo de 60º;

b) depois de ter girado um ângulo de 120º.

R: a) $a_t = 0.18$ ms^{-2}, $a_n = 0.38$ ms^{-2}, $a = 0.42$ ms^{-2} b) $a_t = 0.18$ ms^{-2}, $a_n = 0.75$ ms^{-2}, $a = 0.77$ ms^{-2}

5.9. Duas partículas de massa iguais a 4.0 kg e 10.0 kg estão ligadas por uma vara de 4.0 m de comprimento e massa desprezável.

a) calcule o momento de inércia do sistema constituído pelas duas partículas relativamente a um eixo que passa perpendicularmente pelo ponto médio da vara.

b) sabendo que o sistema executa em torno do eixo 120 rpm no sentido anti-horário, determine o momento angular do sistema relativamente ao eixo e a energia cinética do sistema.

R: a) 56 kgm^2 b) 703.36 k , 4.4 KJ

5.10. Um cilindro com o momento de inércia de 20 kgm^2 e a velocidade inicial de 0.8 rad/s pára sob a acção da forca de atrito durante 10 s. Determine o momento da força de atrito (o seu módulo). R: 1.6 Nm

5.11. O rotor de uma centrífuga girando com uma aceleração angular constante atinge a frequência de 200 rpm durante 5.0 min a partir do estado de repouso.

a) qual a aceleração angular;

b) quantas voltas efectuou?

R: a) 0.07 $rads^{-2}$ b) 500 voltas

5.12. Determine o momento de força necessário para aumentar a velocidade de um motor com o momento de inércia de kgm^2, de 120 rpm até 420 rpm em 6 s. R: 15 Nm

5.13. Determinar o trabalho que é necessário realizar para aumentar a velocidade angular duma roda, com o momento de inércia de 15 kgm^2, de 3 rps até 7 rps. R: 120 J

5.14. Determine a potência de um motor que realiza 20 rps e cujo momento da força é de 110 Nm. R: 5.97 CV

5.15. Um motor de 3/4 CV acopla-se durante 8 s a uma roda de momento de inércia de 1.2 kgm^2. Determine a velocidade angular adquirida pela roda. R: 99 $rads^{-1}$

5.16. Um corpo de massa 4.0 kg está preso a um fio de massa desprezável que passa pela gola de uma roldana de massa 2.0 kg e raio 4 dm. Determine:

a) o valor da tensão no fio;

b) a velocidade do corpo ao fim de 5.0 s;

c) o número de voltas dado pela roldana durante os 5.0 s.

R: a) 8.0 N b) 40 ms^{-1} c) 40 voltas

5.17. Dois blocos A e B de massas 5.0 kg e 7.0 kg, respectivamente, estão ligados por um fio ideal, que passa pela gola de uma roldana de massa 2.0 kg e raio 10 cm. Considerando o atrito desprezável determine o valor:

a) da aceleração adquirida pelos corpos;

b) das tensões no fio.

R: a) 1.5 ms^{-2} b) T_A = 58 N , T_B = 60 N

5.18. Dois blocos A e B de massas 20.0 kg e 10.0 kg, respectivamente, estão ligados por um fio inextensível e de massa desprezável, que passa pela gola de uma roldana de massa 5.0 kg e raio 5 dm. Supondo que não existe atrito entre a roldana e o eixo de rotação, calcule:

a) a aceleração angular da roldana;

b) as tensões no fio;

c) a energia cinética do sistema ao fim de 5.0 s.

R: a) 6.2 $rads^{-2}$ b) T_A = 138 N , T_B = 131 N c) 3.9×10^3 J

5.19. Dois corpos A e B de massas 20.0 kg e 4.0 kg, respectivamente, estão ligados por um fio ideal que passa na gola de uma roldana de massa 2.0 kg e diâmetro 20.0 cm. O bloco B encontra-se apoiado numa mesa enquanto o A está suspenso. Supondo que não há atrito entre o bloco B e a superfície, determine:

a) a aceleração linear do bloco A.

b) a aceleração angular da roldana.

c) o valor das tensões.

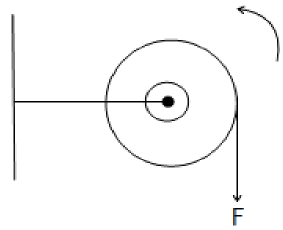
R: a) 8.0 ms^{-2} b) 80 rads^{-2} b) T_A = 40 N , T_B = 32 N

5.20. Dois corpos iguais A e B de massas de 5.0 kg, estão ligados por um fio ideal que passa na gola de uma roldana de massa 4.0 kg e raio r. O bloco A encontra-se apoiado numa mesa enquanto o B está suspenso. O coeficiente de atrito entre a superfície de A e a de apoio é de 0.40.

a) determine a aceleração do sistema;
b) calcule as tensões dos fios.

R: a) 2.5 ms^{-2} b) T_A = 32.5 N , T_B = 37.5 N

5.21. A roldana, de massa 1.5 kg e raio 30 cm, representada na figura abaixo, está em movimento em torno do seu eixo com uma velocidade de 20 rads^{-1}.



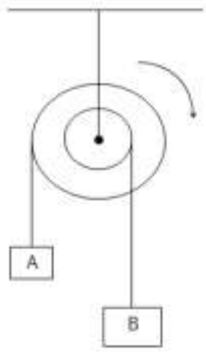
a) calcule a energia cinética de rotação da roldana;

b) a intensidade da força tangencial constante que aplicada num ponto da periferia é capaz de a fazer parar ao fim de 10 s.

R: a)14 J b) 0.5 N

5.22. Um volante adquire um movimento de rotação em torno de um eixo pela acção de 8 kg de massa unido a uma corda enrolada em seu eixo de 10 cm de raio. O peso cai verticalmente percorrendo uma distância de 2 m em 6 s partindo do repouso. Calcular o momento de inércia do volante em relação a seu eixo. R: 0.72 kgm^2

5.23. O momento de inércia do sistema de duas polias da figura abaixo é 0.3 kgm^2. A massa do bloco A é de 30 kg e do B, 80 kg. Determinar a aceleração do bloco A sabendo que os raios das polias são de 40 cm e 20 cm. Adote g = 10 ms^{-2}.
R: 1.93 ms^{-2}.



CAPÍTULO 6. ESTÁTICA DOS FLUÍDOS (HIDROSTÁTICA)

6.1. Densidade absoluta ou massa volúmica/específica de uma substância (ρ)

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad [\rho] = kg/m^3 = kgm^{-3} \qquad (S.I)$$

$m - massa\ da\ substância$

$V - volume\ ocupado\ pela\ substância$

Outras unidades derivadas da densidade comummente utilizadas são: g/cm^3 e g/ml.

$$1l = 1dm^3 \ ; \ 1cm^3 = 1ml$$

$$1g/cm^3 = 1g/ml = 10^3\ kg/m^3$$

Para água no estado líquido: $\rho_{água} = 1g/cm^3 = 1000\ kg/m^3$

6.2. Densidade relativa de uma substância (d)

Tomando a densidade absoluta da água como padrão, a densidade relativa de uma substância x é dada por:

$$d_x = \frac{\rho_x}{\rho_{água}}$$

Para água no estado líquido: $d_{água} = 1$

$d - é\ uma\ grandeza\ adimensional.$

6.3. Peso volúmico ou específico de uma substância (π)

$$\pi = \frac{P}{V} \qquad [\pi] = N/m^2$$

$P - peso\ do\ corpo$

Sendo $P = mg$,

$$\pi = \frac{mg}{V} = \rho \cdot g$$

6.4. Pressão (p)

$$p = \frac{F}{A} \qquad [p] = Pa \quad (S.I) \qquad 1Pa = 1N/m^2$$

$F - é\ a\ intensidade\ da\ força\ normal\ (pependicular)\ à\ supefície\ a\ comprimir$

$A - é\ a\ área\ da\ superfície.$

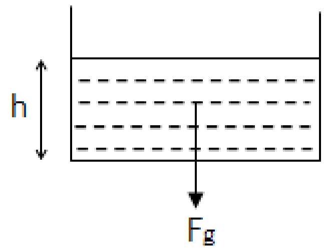
Outras unidades derivadas da pressão e suas equivalências são:

$1atm = 1.013 \cdot 10^3\ Pa$

$1mmHg\ (1\ Torr) = 133\ Pa$

$1atm = 760\ mmHg$

6.5. Pressão devida ao peso de uma coluna líquida.



A pressão que a coluna líquida exerce sobre o fundo e paredes do recipiente é determinada por:

$p = \frac{F_g}{A}$ $\qquad F_g = mg$

$p = \frac{mg}{A}$ $\qquad m = \rho_{líq} \cdot V$

$p = \frac{\rho_{líq} \cdot V \cdot g}{A}$ $\qquad V = Ah$

$p = \rho_{líq} \cdot h \cdot g$

$\rho_{líq} - densidade\ do\ líquido$

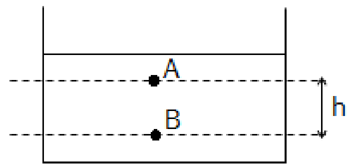
$h - altura\ da\ coluna\ líquida$

6.6. Pressão atmosférica (p_a)

É a pressão que a atmosfera exerce sobre os corpos imersos nela.

Na superfície da terra, a pressão atmosférica é igual a 1 atm, ou seja, $p_a = 1\ atm$.

6.7. Teorema de Stevin (teorema fundamental da hidrostática)



"A diferença de pressão entre dois pontos A e B de um líquido, situados em níveis diferentes, é igual a pressão da coluna líquida compreendida entre os níveis determinados por A e B.

$$p_B - p_A = \rho hg$$

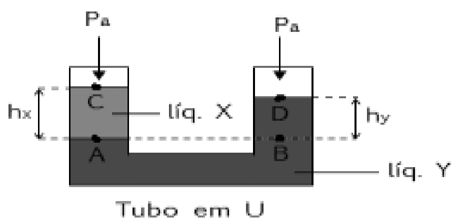
Obs.: A pressão aumenta com a profundidade, e é uma grandeza escalar.

Consequência do teorma fundamental da hidrostática: em diferentes pontos do mesmo líquido e num mesmo nível $(h = 0)$ as pressões são iguais.

Do teorema fundamental da hidrostática, $p_B - p_A = \rho hg$

$$\text{para } h = 0 \;\Rightarrow\; p_B = p_A$$

6.7.1. Vasos Comunicantes



Ao sistema de vasos que se comunicam entre si, chamamos vasos comunicantes.

$líquido\ x$: $\quad p_A - p_C = \rho_x h_x g \qquad\qquad p_C = p_a$

$$p_A - p_a = \rho_x h_x g$$

$$p_A = p_a + \rho_x h_x g$$

$líquido\ y$: $\quad p_B - p_D = \rho_y h_y g \qquad\qquad p_D = p_a$

$$p_B - p_D = \rho_y h_y g$$

$$p_B = p_D + \rho_y h_y g$$

Da consequência do teorema de Stevin,

$$p_A = p_B$$

$$p_a + \rho_x h_x g = p_a + \rho_y h_y g$$

$$\rho_x h_x g = \rho_y h_y g$$

$$\rho_x h_x = \rho_y h_y$$

6.8. Teorema de Pascal

Pode enunciar-se de de dois modos:

- Em termos da pressão, estabelece que a pressão exercida num ponto de um líquido que não se comprime transmite-se integralmente a todos os pontos do líquido com igual intensidade.

$$p_A = p_B \qquad \forall_{A,B \in líquido}$$

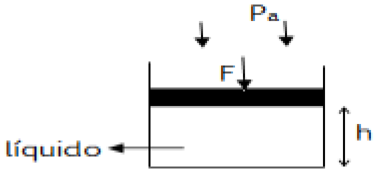
- Em termos da força de pressão, estabelece que as forças de pressão quando transmitidas através de um líquido incompreensível, são proporcionais as áreas das superfícies sobre os as quais as forças actuam. Deste modo:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Esta propriedade é aplicada na prensa hidraúlica, no macaco hidraúlico, etc.

Se, porém, temos um êmbolo sobre o líquido tal como,

A pressão total nos pontos situados à profundidade h é:



$$p = p_a + \frac{F}{A} + \rho h g$$

6.9. Teorema de Arquímedes

Quando um corpo de volume V $(volume\ total\ do\ corpo)$ é imerso total $(V_i = V)$ ou parcialmente $(V_i < V)$ num líquido, ele passa a preencher a região que resulta da deslocação duma porção do fluído, sem alterar o nível do fluído no recipiente. Facilmente entende-se que, a acção do corpo sobre o líquido provoca uma força de reacção por parte do líquido e que tende a elevar para cima o corpo, é a impulsão.

O volume do líquido deslocado pelo corpo corresponde ao volume da parte imersa do corpo no fluído.

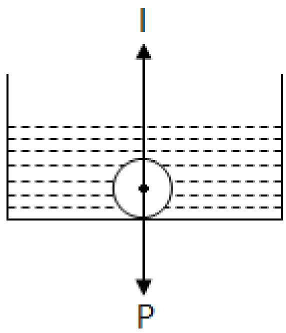
A impulsão (ou força de Arquímedes) que um líquido exerce sobre um corpo é dada por:

$$I = F_A = \rho_L \cdot V_i \cdot g$$

$\rho_L - densidade\ do\ líquido\ onde\ o\ corpo$ é $mergulhado$

$V_i - volume\ da\ parte\ imersa\ do\ corpo$

6.9.1. Peso real. Peso aparente



Peso real corresponde ao peso do corpo no ar, medido por um dinamómetro.

$$P_r = F_g = mg$$

Peso aparente corresponde ao peso do corpo na água, medido por um dinamómetro.

$$P_a = I - P_r$$

Dessa forma, a diferença entre os valores indicados pelo dinamómetro, com o corpo no ar e com o corpo mergulhado na água, dá o valor da impulsão.

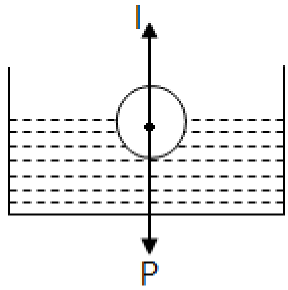
$$I = P_r - P_a$$

6.9.2. Equilíbrio dos corpos imersos

a) O corpo é mais denso do que o líquido

Neste caso, o peso do corpo é superior à impulsão do líquido, o corpo afunda-se.

$$I < P$$



b) A densidade do corpo é igual à densidade do líquido

Neste caso, o peso do corpo é igual à impulsão do líquido, o corpo fica em equilíbrio no meio do líquido.

$$I = P$$

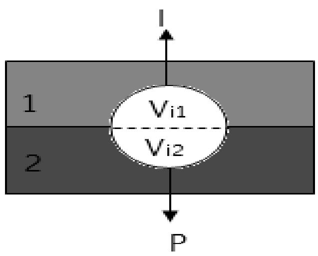
c) O corpo é menos denso do que o líquido

Neste caso, o peso do corpo é inferior à impulsão do líquido, o corpo sobe até à superfície do líquido, emergindo parcialmente e ficando a flutuar.

$$I > P$$

Obs.: Em condições de equilíbrio (alínea b), $I = P_r \Rightarrow P_a = 0$

Caso Particular:



Quando um corpo está imerso em mais de um líquido, a impulsão total é a soma das impulsões devida a cada um dos líquidos.

$$I = P \qquad \textit{condição de equilíbrio}$$

$I_1 + I_2 = mg$b

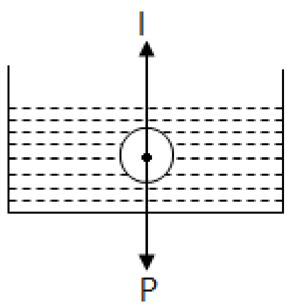
$$\rho_{L1} \cdot V_{i1} \cdot g + \rho_{L2} \cdot V_{i2} \cdot g = m \cdot g$$

$$m = V_c \cdot \rho_c \quad e \quad V_c = V_{i1} + V_{i2}$$

PROBLEMAS

6.1. Sobre o êmbolo menor de uma prensa hidráulica, de diâmetro 30 cm, exerce-se uma força de intensidade 5.0 N, enquanto que no maior a força exercida tem o valor de 20 N. Determine o diâmetro do êmbolo maior.

R: 60 cm



6.2. Pretende-se elevar um objecto de massa 500 kg utilizando uma prensa hidráulica. Os êmbolos têm, respectivamente, 20 cm e 1.0 m de diâmetro e o líquido contido na prensa tem densidade 0.8. Sabendo que o objecto utilizado é posto no pistão maior, calcule a intensidade da força necessária para elevar o objecto com movimento uniforme. R: 200 N

6.3. Numa prensa hidráulica uma força de 100 N é exercida no pistão de menor área, para se erguer uma carga no pistão maior, de área cinco vezes maior que a do pistão menor. Qual é a intensidade da força que deve ser aplicada no pistão de maior área? R: 500 N

6.4. As áreas das secções dos êmbolos de uma prensa hidráulica são, respectivamente, 20.0 c e 150.0 cm^2. Os êmbolos são homogéneos, feitos de ferro (d = 7.86) com 5.0 cm de espessura cada um. O êmbolo da direita (maior) suporta um objecto de 50.0 kg de massa. Calcule a intensidade da força exercida no êmbolo da esquerda, para que o sistema se mantenha em equilíbrio. R: 66.6 N

6.5. Uma garrafa de altura 35 cm e fundo horizontal de área 12 cm^2 contém um vinho de densidade 0.95.a) determinar o valor da pressão exercida na base do líquido; b) determine o valor da força de pressão exercida no fundo da garrafa pelo vinho. R: a) 3.3 Pa b) 4.0 N

6.6. Pretende-se transportar de um lado para o outro de um lago blocos de ferro com 10.0 kg de massa cada um. É utilizado como meio de transporte uma tábua de madeira de densidade 0.70 e 100 dm^3. Calcule o número máximo de blocos que pode colocar sobre a tábua sem esta ir ao fundo.
R: 3

6.7. Um recipiente, de altura 30 cm e cujo fundo tem de área 12 cm^2, contém dois líquidos, A e B imiscíveis e de massas volúmicas 0.8 gcm^{-3} e 4.0 gcm^{-3}, respectivamente. A superfície liquida em contacto com a atmosfera encontra-se à altura de 20 cm e a altura do líquido A é de 12 cm.

a) determine a intensidade da força de pressão exercida pelo líquido no fundo do recipiente;

b) determine a diferença de pressão entre a superfície de separação dos dois líquidos e a que se encontra a 4.0 cm do fundo do recipiente.

R: a) 5.0 N b) $1.6x10^3$

6.8. Mistura-se num recipiente, 250 cm^3 de água (d = 1.0) com 50 cm^3 azeite (d = 0.92). Desprezando a contracção de volume, determine a densidade da mistura que obteve. R: 0.99 kgm^{-3}

6.9. Num tubo em U (manómetro de liquido) aberto de ambas as extremidades, inicialmente encontra-se água. Numa parte (num joelho) deita-se outro liquido que não faz mistura com a água. Noutro joelho a água sobe de 8.7 cm em relação ao seu nível inicial e o seu nível novo fica de 4.9 cm abaixo do nível do liquido deitado. Determine a densidade desse líquido.
R: 0.78 g/ml

6.10. Num tubo em U aberto de ambas as extremidades encontra-se água. Num dos ramos deita-se outro líquido imiscível com a água. Noutro ramo a água sobe de 8.3 e o seu nível fica de 2.1 cm abaixo do nível do liquido deitado. Determine a densidade outro liquido. R: 14 g/ml

6.11. Num tubo em U de área de secção transversal de 1.0 cm^2, aberto de ambas as extremidades, está a água. Que massa de um liquido de densidade 1600 kgm^{-3} é necessário deitar num dos ramos para que o nível da água noutro ramo subir de 8.0 cm em relação ao seu estado inicial. R: 16 g

6.12. Um tubo em U cuja área A tem secção uniforme e igual a 2 cm^2, aberto de ambas as extremidades, contém água de densidade 1000 kgm^{-3}. Num dos ramos coloca-se óleo de densidade 800 kgm^{-3} até que o outro fique completamente cheio. Sabendo que o nível do ramo que contém a água desceu 10 cm, determine a massa de óleo no tubo. R: 40 g

6.13. Num tubo em U aberto de ambas as extremidades encontra-se a água. Em ramos deitam-se líquidos imiscíveis com a água, num dos ramos, de densidade de 0.95 g/ml, noutro, de densidade 0.78 g/ml. A altura da coluna dos líquidos deitados nos ramos é de 25 cm. Qual a diferença de níveis de água nos ramos. R: 4.2 cm

6.14. Num tubo em U encontra-se mercúrio. Num dos ramos deita-se um líquido de densidade 1.6 g/ml e de altura 30 cm. Acima dele deita-se mais um liquido imiscível de densidade 0.85 g/ml e de altura 20 cm. Qual a diferença de níveis do mercúrio nos ramos. R: 4.8 cm

6.15. Num tubo em U encontra-se mercúrio. Num dos ramos deita-se um liquido de densidade 1.6 g/ml. Acima dele deita-se mais um liquido imiscível de densidade 0.85 g/ml e de altura 30 cm. A diferença dos níveis do mercúrio nos ramos é igual a 11.5 cm. Determine a altura da coluna do segundo líquido. R: 82 cm

6.16. Um corpo pesa no ar 3.84 N. Num liquido de densidade de 1.63 g/ml o seu peso aparente é de 1.52 N. Determine a densidade do corpo. R: 2.78 g/ml

6.17. Um objecto de ouro (d = 19.3) pesa, no ar, 250 gf. Quando mergulhado totalmente num líquido pesa 150 gf. Determine a densidade do líquido. R: 7.7×10^3 kgm^{-3}

6.18. Uma peça de densidade 11.3 gcm^{-3} mergulhada num liquido de densidade de 0.92 gcm^{-3} tem o peso de 9.2 N menor do que no ar. Qual o peso dela aparente? R: 104 N

6.19. Uma peça de densidade 11.5 gcm^{-3} mergulhada num liquido de densidade de 1.5 gcm^{-3} tem o peso de 15 N menor do que no ar. Qual o peso dela no ar. R: 155 N

6.20. Um corpo de massa 4.5 kg está mergulhado em e o seu peso aparente é de 40 N. Determine a massa volúmica da substancia de que o corpo é feito. R: 9.0×10^3 kgm^{-3}

6.21. Um cubo de 60 cm^{-3} de volume é forçado a manter-se totalmente imerso, à superfície da água (d = 1.0) por acção de uma força de 0.40 N de intensidade. Calcule a densidade do cubo. R: 0.33×10^3 kgm^{-3}

6.22. Um corpo está mergulhado num líquido, de tal forma que a razão de volumes das partes imersas e emersas é de 3/4. Quantas vezes a densidade do corpo é menor que a do líquido? R: 7/3

6.23. Um sólido flutua em água com 1/8 de seu volume. O mesmo flutua em óleo com 1/6 de seu volume. Determine a relação entre a densidade do óleo e a da água. R: 0.75

6.24. Um cubo de cortiça de densidade relativa 0.25 flutua num recipiente com álcool etílico de densidade 0.79. Determine a fracção do volume da parte imersa do cubo. R: 3/10

6.25. Um pedaço de madeira de volume 90 cm^3 e de massa volúmica 0.80 gcm^{-3} flutua num liquido de densidade 1.24 gcm^{-3}.

a) determine a fracção de volume emerso;
b) determine a massa de uma sobrecarga a colocar sobre a madeira para que esta mergulhe 3/4 do deu volume.

R: a) 1/3 b) 9.0 g

6.26. Determine o volume emerso de um icebergue de massa 120 t sabendo que a massa volúmica do gelo é de 0.92 gcm^{-3} e a da água do mar é 1.03 gcm^{-3}. R: 13.9 m^3

6.27. Um cubo maciço e homogéneo, de massa volúmica 9.0×10^3 kgm^{-3}, encontra-se em equilíbrio à superfície de um líquido de densidade relativa 1.2. Determine a fracção de volume emerso do cubo.
R: 0.25

6.28. Sobre um corpo de massa 4.0 kg é exercida uma força de 20 N para que fique completamente mergulhado num líquido de massa volúmica 1.2 gcm^{-3}. Determine a massa volúmica da substancia de que é feito o corpo.

R: 0.80 gcm^{-3}

6.29. Um paralelepípedo de madeira, de massa 400 g, flutua num recipiente com água. Calcule o volume imerso. R: $4.0x10^{2}$

6.30. Um corpo flutua num líquido de massa volúmica ρ. A razão entre os volumes imerso e emerso do corpo é igual a 2/3. Determine a relação entre as massas volúmicas do material do corpo e do líquido. R: 2/5

6.31. Um cubo homogénea de densidade relativa 0.95, está em equilíbrio entre dois liquido: água (d = 1.0) e azeite (d = 0.92). Determinar a fracção do volume do cubo mergulhado em azeite. R: 5/8

6.32. Um corpo de densidade ρ, encontra-se em equilíbrio entre dois líquidos: A (ρ_A = 0.8 ρ) e B (ρ_B = 1.4 ρ). Determine a razão entre os volumes imersos nos líquidos A e B. R: 2

6.33. Uma esfera de massa 2.5 kg e densidade 0.80 gcm^{-3} encontra-se presa ao fundo de um recipiente cheio de água, até uma altura de 2.0 m, por um fio inextensível e de massa desprezável. Determine:

a) a tensão do fio;

b) o tempo que a esfera leva a atingir a superfície livre do liquido se o fio for cortado;

c) o volume imerso quando atinge a superfície livre.
R: a) 6.3 N b) 1.3 s c) 2.5 dm^3

6.34. Um cubo feito de um material de densidade relativa 0.5 e com 20.0 cm^3 de volume mergulha verticalmente num recipiente com água (d= 1.0) com uma velocidade de 4.0 ms^{-1}. Desprezando a resistência da água, determine:

a) a distância percorrida pelo cubo até parar;

b) a pressão exercida pela água no ponto em que o cubo pára;

c) o tempo que demora a chegar a superfície, desde o instante em que entrou na água.

R: a) 0.80 m b) $1.09x10^5$ Pa c) 0.8 s

6.35. O sistema representado na figura abaixo é constituído por duas roldanas solidárias de raios 5.0 cm e 10.0 cm. O momento de inércia total das duas roldanas é 0.20 kgm^2. Os corpos A e B têm de massa respectivamente 1.0 kg e 3.0 kg. A densidade do corpo B é 1.85 gcm^{-3} e está completamente mergulhado em água e o coeficiente de atrito entre o corpo A e a superfície de apoio é 0.10. Determine o valor da aceleração de cada um dos corpos e o valor das tensões. Adote g = 10 ms^{-2}.
R: $a_A = 4.7x10^{-2}$ ms^{-2}, $a_B = 2.4x10^{-2}$ ms^{-2}; T_A = 5.92 N, T_B = 13.7 N

CAPÍTULO 7. TEORIA CINÉTICA MOLECULAR DOS GASES (TCM)

7.1. Massa atómica relativa (A_r)

$$A_r = \frac{m_{\acute{a}tomo}}{\frac{1}{12} m_{\acute{a}tomo\ carbono}} \qquad [A_r] = uma\ ; \quad 1uma = 1.67 \cdot 10^{-27} kg$$

7.2. Massa molecular relativa (M_r)

Para uma molécula,

$$M_r = \sum [A_r(elemento\ na\ mol\acute{e}cula) \times n^{\underline{o}}\ de\ \acute{a}tomos]$$

Ex.1: $M_r(H_2O) = ?$ $\qquad A_r(H) = 1;\ A_r(O) = 16$

$M_r = A_r(H) \times 2 + A_r(O) \times 1$

$M_r = 1 \times 2 + 16 \times 1$

$M_r = 18$

Ex.2: $M_r(CO_2) = ?$ $\qquad A_r(C) = 12;\ A_r(O) = 16$

$M_r = A_r(C) \times 1 + A_r(O) \times 2$

$M_r = 12 \times 1 + 16 \times 2$

$M_r = 44$

7.3. Massa molar ou molecular (M)

É a massa molecular relativa expressa em g/mol

$$M = M_r \quad g/mol \qquad ou$$

$$M = M_r \times 10^{-3} \quad kg/mol$$

$[M] = g/mol \quad ou \quad kg/mol$

Ex.1: $M_r(H_2O) = 18 \quad \Rightarrow \quad M\ (H_2O) = 18\ g/mol$

Ex.2: $M_r(CO_2) = 44 \quad \Rightarrow \quad M\ (CO_2) = 44\ g/mol$

7.4. Número de moles ou quantidade de substância (n)

$$n = \frac{N}{N_A} \qquad\qquad [n] = mol$$

$N - número\ de\ partículas\ ou\ moléculas$

$N_A - número\ de\ Avogadro. \qquad N_A = 6.02 \cdot 10^{23}\ partículas\ ou\ mol^{-1}$

7.5. Massa da substância ou do gás (m)

$$m = m_0 \cdot N$$

$m_0 - massa\ de\ uma\ molécula$

7.6. Concentração (n_0)

Corresponde ao número de partículas por unidade de volume.

$$n_0 = \frac{N}{V} \qquad\qquad [n_0] = m^{-3}$$

7.7. Relação de $m\ e\ M$

$$n = \frac{m}{M}$$

7.8. Relação de $M\ e\ m_0$

$$M = m_0 \cdot N_A$$

7.9. Equação fundamental da TCM

$$p = \frac{1}{3} \cdot n_0 \cdot m_0 \cdot \bar{v}^2 \qquad\qquad [p] = Pa$$

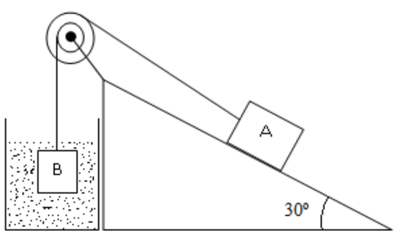
$\bar{v} - velocidade\ quadrática\ média\ das\ moléculas\ do\ gás\ (é\ a\ mesma\ para\ cada\ molécula)$

7.9.1. Relação de $p\ \ e\ \ \rho$

$$Sendo\ \ \rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho \cdot V$$

$$e \qquad p = \frac{1}{3} \cdot n_0 \cdot m_0 \cdot \bar{v}^2$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{N \cdot m_0}{V} \cdot \bar{v}^2$$



$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{V} \cdot \bar{v}^2$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \bar{v}^2$$

7.10. Equação de estado dos gases perfeitos

Temos duas equações de estado:

a) Em função da constante universal dos gases perfeitos (equação de Clayperon)

$$pV = nRT$$

$R - constante\ universal\ dos\ gases.$ $\quad R = 8.31\ J/mol \cdot K$

$T - temperatura\ absoluta\ ou\ termodinâmica$ $\quad [T] = K\ (Kelvin)$

b) Em função da constante de Boltzmann

$$p = n_0 \cdot k \cdot T$$

$K - constante\ de\ Boltzmann.$ $\quad k = 1.38 \cdot 10^{23}\ J/K$

7.11. Escala de temperatura absoluta (termodinâmica)

$$T = t + 273 \qquad [T] = K\ (Kelvin)$$

$t - temperatura\ em\ graus\ celsius\ (°c)$

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

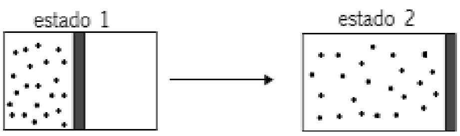
$$\Delta T = (t_2 + 273) - (t_1 + 273)$$

$$\Delta T = t_2 - t_1$$

$$\Delta T = \Delta t$$

7.12. Equação geral dos gases perfeitos

Seja um gás que efectua um processo, isto é, passagem de um estado (1) para outro (2), sem variação da sua quantidade de substância.



$$Estado\ 1: p_1V_1 = n_1RT_1$$

$$Estado\ 2: p_2V_2 = n_2RT_2$$

Como não há variação da quantidade de substância,

$$n_1 = n_2$$

$$\frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{p_2V_2}{RT_2}$$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

Ou seja,

$$\frac{pV}{T} = const.$$

7.13. Leis dos gases perfeitos

a) Lei de Boyle-Mariotte: é a lei do processo isotérmico.

b) Lei de Gay- Lussac: é a lei do processo isobárico.

c) Lei de Charles: é a lei do processo isocórico.

7.14. Processos termodinâmicos (Isoprocessos)

a) Processo isotérmico: T-const.

$$T_1 = T_2$$

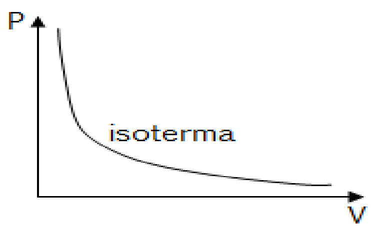
da equação geral dos gases $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

$$pV = const \quad \Rightarrow \quad pV = c \quad \Rightarrow \quad p = \frac{c}{V} \qquad (é\ uma\ hipérbole)$$

$p\ é\ inversamente\ proporcional\ V$

Gráfico do processo isotérmico



b) Processo Isobárico: P-const.

$$p_1 = p_2$$

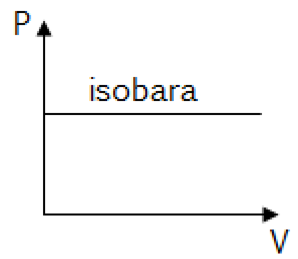
da equação geral dos gases perfeitos $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\frac{V}{T} = const \ \Rightarrow \ \frac{V}{T} = c \ \Rightarrow \ V = cT \quad (\text{é } uma\ recta)$$

V é $directamente\ proporcional\ T$

Gráfico do processo isobárico



c) Processo Isocórico: V-const.

$$V_1 = V_2$$

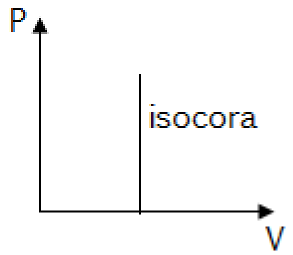
da equação geral dos gases perfeitos $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$\frac{p}{T} = const \ \Rightarrow \ \frac{p}{T} = c \ \Rightarrow \ p = cT \quad (\text{é } uma\ recta)$$

p é $directamente\ proporcional\ a\ T$

Gráfico do processo isobárico



7.15. Velocidade quadrática média ($\bar{v}$)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \qquad ou \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{3pV}{m}}$$

7.16. Energia cinética média

a) De uma molécula (E_{c_0})

$$E_{c_0} = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot \bar{v}^2 \qquad ou \qquad E_{c_0} = \frac{i}{2} \cdot k \cdot T$$

$i - número\ de\ graus\ de\ liberdade, depende\ do\ gás.$

b) De N moléculas (E_c)

$$E_c = N \cdot E_{c_0} \qquad ou \qquad E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \bar{v}^2$$

também, $E_c = \frac{i}{2} \cdot p \cdot V$

7.17. Mistura de gases perfeitos

Para mistura de vários gases num mesmo recipiente.

a) Pressão da mistura (p)

Lei de Dalton: A pressão duma mistura de gases é igual a soma das pressões parciais de cada gás da mistura.

Pressão parcial: pressão que cada gás exerce como se estivesse sozinho.

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

b) Massa molar da mistura (M)

$$de \qquad n = \frac{m}{M} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{m}{n}$$

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_n$$

$$com \quad n_1 = \frac{m_1}{M_1}\ ;\ n_2 = \frac{m_2}{M_2}\ ;\ \ldots\ ;\ n_n = \frac{m_n}{M_n}$$

$\frac{m_1}{m}\ ;\ \frac{m_2}{m}\ ;\ \frac{m_3}{m}\ ; \ldots ; \frac{m_n}{m} \qquad representa\ a\ parte\ em\ massa\ de\ cada\ gás.$

c) Densidade da mistura (ρ)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$m_1 = \rho_1 V_1 \quad ; \quad m_2 = \rho_2 V_2\ ; \ldots$$

7.18. Graus de liberdade da molécula (i)

a) Molécula moneoatómica: só tem um átomo. $i = 3$.

Ex.: A_r ; He ; ...

b) Molécula diatómica: tem dois átomos. $i = 5$.

Ex.: H_2 ; O_2 ; N_2 ; CO ; ...

c) Molécula poliatómica: tem três ou mais átomos. $i = 6$.

Ex.: H_2O ; CO_2 ; NH_3 ; CH_4 ; ...

PROBLEMAS

7.1. Um gás que se encontra sob a pressão de 200 kPa ocupa o volume de 5 m^3 tendo a massa de 6 kg. Determine a velocidade quadrática média. R: 707 ms^{-1}

7.2. Durante o aquecimento de um gás num recipiente fechado a sua temperatura aumentou-se 4 vezes. Quantas vezes variará a velocidade quadrática média? R: 2 vezes

7.3. Achar a temperatura de um gás que tem a pressão de 100 kPa e a concentração de moléculas de 1x10^{25} m^{-3}. R: 725 K

7.4. Calcule a velocidade quadrática média de mole de hidrogénio com a temperatura de 27 ºC. R: 1900 ms^{-1}

7.5. Achar a energia cinética média de moléculas de um gás monoatómico que tem a pressão de 20 kPa e a concentração de 3x10^{25} m^{-3}. R: 1x10^{-21}

7.6. Quantas vezes é menor a velocidade quadrática média das moléculas de oxigénio do as de hidrogénio se as suas temperaturas forem iguais. R: 4 vezes

7.7. Um gás diatómico de massa de 1.0 kg sob a pressão de 80 kNm^{-2} tem a densidade igual a 4.0 kgm^{-3}. Determine a energia do movimento térmico das suas moléculas. R: 50 kJ

7.8. O vapor de água de 1.0 kmol tem a temperatura de 600 k. Calule:

a) a energia cinética média do movimento de translação de uma molécula;

b) a energia cinética média total de todas as moléculas;

c) a energia do movimento de translação de todas as moléculas.

R: a) 1.24x10^{-20} J b) 2.5x10^{-20} c) 7.5 J

7.9. Se a temperatura absoluta de um gás perfeito elevar-se duas vezes a pressão aumenta-se de 25%. Quantas vezes varia o volume? R: 1.6 vezes

7.10. Durante uma transformação, o volume de um gás ideal diminuiu-se 2 vezes, a pressão aumentou-se de 120 kPa e a temperatura absoluta, também, aumentou-se de 10 %. Qual foi a pressão inicial. R: 100 kP

7.11. Num cilindro de um motor diesel a temperatura inicial do ar foi de 50 ºC. Achar a temperatura final do ar se o seu volume se diminui 17 vezes e a pressão se aumenta 50 vezes. R: 667 ºC

7.12. Um gás perfeito com a pressão de 0.2 MPa e a temperatura de 15 ºC ocupa o volume de 5 l. Que volume ocupará esse gás nas condições normais? R: 9.4 l

7.13. Durante a compressão isotérmica o volume de um gás diminuiu-se de 8 l a 5 l, e a pressão elevou-se de 60 kPa. Achar foi a pressão inicial. R: 100 kPa

7.14. Numa transformação isotérmica a pressão de um gás aumentou-se 1.5 vezes e o volume diminuiu-se de 30 ml. Qual foi o volume inicial? R: 90 ml

7.15. Num reservatório de água de profundidade de 6.0 m sobe uma bolha de ar do fundo à superfície livre. Determine o volume da bolha perto da superfície se perto do fundo ele foi de 10 mm^3. A pressão atmosférica é igual a 1.0 bar. R: 16 mm^3

7.16. Se elevar a temperatura de um gás 1.4 vezes o seu volume aumentar-se-á de 40 cm^3. Calcule o volume inicial. R: 100 cm^3

7.17. Que volume ocupará um gás com a temperatura de 77 ºC se com a temperatura de 27 ºC o seu volume foi de 6 l. R: 7 l

7.18. Qual foi a temperatura inicial de um gás se durante o aquecimento o volume aumentou de 1%. R: 800 K

7.19. Qual foi a temperatura inicial de um gás num recipiente fechado se durante o aquecimento de 140 K a pressão aumentou-se 1.5 vezes. R: 7 ºC

7.20. Duas esferas de 20 cm^3 de volume cada, são aquecidas por um tubo horizontal de vidro de 50 cm de comprimento e de 2.0 mm^2 de área da secção transversal. O espaço interior deste sistema é dividido em duas partes iguais por uma gota de mercúrio. Em consequência do aquecimento de uma das esferas a gota de desloca-se em 20 cm. Determine a temperatura do gás no interior da esfera aquecida se a temperatura inicial foi igual a 27 ºC. R: 39 ºC

7.23. Para o interior de um cilindro horizontal de comprimento de 1.6 m com o ar de pressão atmosférica normal, lentamente se introduz um êmbolo de área de 200 cm^2. Que força actua sobre o êmbolo se a distância entre ele e a base do cilindro for de 10 cm. R: 30 kN

7.24. Considere um cilindro com o êmbolo móvel de área de 24 cm^2. No estado inicial o volume do ar no interior do cilindro é de 240 cm^3 a pressão, de 100 kPa. Que força actuará sobre o êmbolo se deslocar ele em 2 cm,

a) à direita;

b) à esquerda.

R: a) 200 N b) 300 N

7.25. Considere um cilindro com o ar fornecido por um êmbolo móvel. Quantas vezes variará a pressão no interior do cilindro se deslocar o êmbolo em l/3

a) à direita;
b) à esquerda.

R: a) $P_2/P_1 = 3/4$ b) 3/2 onde l é distância entre a base do cilindro e o êmbolo

7.26. Um cilindro de área da secção transversal A é partido num ponto por um êmbolo, em duas partes de comprimentos $l_1 = 20$ cm e $l_2 = 30$ cm. A pressão P_2 é 4 vezes maior do que a pressão P_1. Sabendo que o embolo se desloca sem atrito, determine a distância percorrida pelo êmbolo quando se atinge o estado de equilíbrio.

R.: 12.9 cm

7.26. Um cilindro de área da secção transversal A é partido num ponto por um êmbolo, em duas partes de comprimentos $l_1 = 20$ cm e $l_2 = 30$ cm. A pressão P_2 é 4 vezes menor do que a pressão P_1. Sabendo que o embolo se desloca sem atrito, determine a distância percorrida pelo êmbolo quando se atinge o estado de equilíbrio.

R.: 16.4 cm

7.27. A temperatura de um gás num cilindro é igual a 7 ºC. A que distância deslocar-se-á o êmbolo se durante o aquecimento do gás de 20 K se a distancia entre a base do cilindro e o êmbolo foi 14 cm.
R: 1 cm

7.28. A pressão de um gás com temperatura de 27 ºC num recipiente fechado foi de 75 kPa. Qual será a pressão do gás se a temperatura baixar até – 13 ºC. R: 65 kPa

7.29. Considere um gás perfeito que tem os parâmetros: P = 200 kPa, T = 240 K, V = 40 l. Que numero de moles tem ele? R: 4.0 moles

7.30. O ar de volume de 1.45 m^3 com a temperatura de 20 ºC e a pressão de 100 kPa transforma-se em líquido. Que volume ocupara o liquido se a sua densidade é de 861 kg/m^3?. R: 2.0 l

7.31. Numa botija de 20 l de volume encontra-se o ar com a temperatura de 12 ºC. Qual a pressão do ar se a sua massa é igual a 2 kg. A massa molar do ar é de 29 g/mol. R: 8.2 MPa

7.32. Numa botija está um gás de massa de 2 kg. Por causa de uma fuga a pressão do gás diminuiu-se 2 vezes. Que massa do gás saiu da botija? Considere que a temperatura não varie. R: 1 kg

7.32. Numa botija encontra-se um gás ideal de temperatura de 15 ºC. Quantas vezes diminuirá a pressão do gás se 40% dele sair da botija e a temperatura baixar em 8 ºC. R: 1.7 vezes

7.33. Num recipiente de 10 l de volume encontra-se o hélio de temperatura 300 K e pressão de 1.0 MPa. Do recipiente escapou-se 10 g do gás e a sua temperatura diminuiu-se a 290 K. Determine a pressão final do hélio. R: 360 kPa

7.34. Numa sala de área de 20 m^2 e de altura de 2.5 m a temperatura elevou-se de 288 K. A pressão é constante e igual a 100 kPa. Calcule a diminuição de massa do ar na sala. R: 2.0 kg

7.35. Determine a massa molar da mistura de 25 g de oxigénio e 75 g de azoto. R: 29 kg/mol

7.36. Num recipiente encontra-se uma mistura de gasosa que consiste de árgon com massa de 20 g e de hélio com a massa de 2 g. Qual a pressão da mistura se a sua temperatura é igual a 301 K. Massa molar 40 g/mol (árgon) e 4 g/mol (hélio). R: 100 kPa

7.37. Qual é nas condições normais de pressão e temperatura a densidade de um mistura gasosa que consiste de azoto a com massa de 56 g e gás carbónico com a massa de 44 g. R: 1.49 kgm^{-3}

7.38. Duas botijas de volume de 2l e 7l com o mesmo gás ligam por um tubo. Que pressão será nas botijas se as pressões iniciais foram iguais a 100 kPa e 50 kPa, respectivamente. R: 61 KPa

7.39. Um recipiente de 5 l contém a mistura de He e H_2 sob a pressão de 600 kPa. A massa da mistura é igual a 4 g, a parte em massa do hélio é de 0.6. Determine a temperatura da mistura. R: 15.1 ºC

7.40. Num recipiente encontra-se a mistura de hidrogénio e hélio de quantidades de substancia de 10 mol.. Calcule as massas das componentes se a parte de massa do hélio for de 0.15. R: 17.1 g (H_2) e 5.7 g (He)

7.41. Numa botija está a mistura de hélio e azoto. A quantidade de substância da mistura é igual a 5.0 mol, a parte em massa do hélio, 0.30. Calcule as massas das componentes. R: 15 g (He) e 35 g (N_2)

7.42. Que volume ocupa a mistura de 1.0 kg de azoto e 1.0 kg de hélio em C.N de PT. R: 6.4 m^3

7.43. Em C.N de PT a mistura de de hidrogénio e hélio ocupa o volume de o.168 m^3. Quais as massas das componentes se a massa da mistura for de 20 g? R: 10 g (H_2) e 10 g (He)

7.44. Num recipiente de 50 l de volume está a mistura de azoto e vapor de agua de massa igual a 381 g. A sua temperatura é de 17 ºC, a pressão é de 1.0 MPa. Calcule a massa do azoto. R: 21 g

CAPÍTULO 8. TERMODINÂMICA

8.1. Energia Interna (U)

$$U = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \qquad ou \qquad U = \frac{i}{2} \cdot p \cdot V \qquad\qquad [U] = J$$

$i - \text{número de graus de liberdade}$

$Se\ o\ \text{gás}\ for\ \text{monoatómico}: i = 3$

$Se\ o\ \text{gás}\ for\ \text{diatómico}: i = 5$

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot T_2 - \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot T_1$$

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T \qquad ou \qquad \Delta U = \frac{i}{2} \cdot (p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1)$$

$Se\ \ \Delta U > 0, o\ sistema\ recebeu\ calor\ do\ exterior.$

$Se\ \ \Delta U < 0, o\ sistema\ cedeu\ calor\ ao\ exterior.$

Para $T - const. \ \Rightarrow\ T_1 = T_2 \ \Rightarrow\ \Delta U = 0$

8.2. Trabalho (w)

Por definição,

$$w = \int \delta w$$

$$w = \int pdV \qquad [w] = J \qquad 1\,J = 1\,Pa \cdot m^3$$

$w - trabalho\ total\ realizado\ no\ decorrer\ de\ um\ só\ processo$

No caso de o gás sofrer,

- Expansão, $dV > 0 \Rightarrow w > 0$. Neste caso o gás realiza trabalho contra às forças externas.

- Compressão, $dV < 0 \Rightarrow w < 0$. Neste caso o gás realiza trabalho à custa (ou, à favor) das forças externas.

O trabalho total devido à várias transformações ou processos, é igual a soma dos trabalhos realizados no decorrer de cada transformação, ou seja,

$$w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

8.3. Quantidade de calor (ou simplesmente calor) que um corpo recebe ou cede sempre que não experimenta mudança de fase

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \qquad [Q] = J\ ou\ cal \qquad 1\ cal = 4.19\ J$$

$c - calor\ específico\ da\ substância \qquad [c] = J/kg \cdot K$

$Se\ Q > 0, o\ corpo\ (gás)\ recebeu\ calor\ do\ exterior.$

$Se\ Q < 0, o\ corpo\ (gás)\ cedeu\ calor\ ao\ exterior.$

8.4. Equação de Mayer

$$c_P = c_V + \frac{R}{M} \qquad c_P > c_V$$

$c_P - calor\ específico$ à $pressão\ constante$

$c_V - calor\ específico$ à $volume\ constante$

$$c_P = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M}$$

$$c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}$$

Desse modo,

$Para \quad p - const.: \quad Q = m \cdot c_P \cdot \Delta t$

$Para \quad V - const.: \quad Q = m \cdot c_V \cdot \Delta t$

8.5. Capacidade calorífica ou específica (C_c)

$$C_c = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad [C_c] = J/K$$

$$C_c = \frac{mc\Delta t}{\Delta t}$$

$$C_c = m \cdot c$$

8.6. Lei zero da termodinâmica (equilíbrio termodinâmico)

"Dois ou mais sistemas termodinâmicos estão em equilíbrio quando as suas temperaturas forem iguais."

O sistema de maior temperatura cede calor ao de menor temperatura até atingirem, ambos, uma mesma temperatura, denominada *temperatura de equilíbrio*.

8.7. Primeira lei da termodinâmica

Enuncia que: "o calor transferido ao sistema termodinâmico passa para aumento da energia interna do sistema e para o trabalho realizado pelo sistema contra o exterior."

$$Q = \Delta U + w$$

Quando o sistema recebe calor ($Q > 0$), ele realiza trabalho contra às forças exteriores ($w > 0$).

Quando o sistema cede calor ($Q < 0$), ele realiza trabalho à custa (ou, à favor) das forças exteriores ($w < 0$).

Desse modo,

- Na *expansão* ou *aquecimento*, o gás recebe calor.

- Na *compressão* ou *arrefecimento*, o gás cede calor.

8.7.1. Aplicação da primeira da termodinâmica nos isoprocessos e processo adiabático

a) Processo isotérmico: $T - const$

$$T_1 = T_2 = T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 0$$

da primeira lei da termodinâmica:

$$Q = \Delta U + w$$

$$Q = 0 + w$$

$$Q = w_{isotérmico}$$

Onde:

$$w_{isot} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Lembrar que, $pV = nRT \quad e \quad que\ para \quad T - const.: \quad p_1V_1 = p_2V_2$

b) Processo isobárico: $p - const$

$$p_1 = p_2 = p$$

da primeira lei da termodinâmica:

$$Q = \Delta U + w$$

Onde:

$$Q = n \cdot c_P \cdot \Delta t$$

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot (p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{i}{2} \cdot p \cdot (V_2 - V_1)$$

$$w = p \cdot \Delta V$$

c) Processo isocórico: $V - const$

$$V_1 = V_2 = V$$

da primeira lei da termodinâmica:

$$Q = \Delta U + w$$

Onde:

$$Q = n \cdot c_V \cdot \Delta t$$

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot (p_2V_2 - p_1V_2) = \frac{i}{2} \cdot V \cdot (p_2 - p_1)$$

$$w = 0 \qquad pois \quad dV = 0$$

d) Processo adiabático: $Q = 0$

É o processo no qual o sistema não recebe nem cede calor, ou seja, $Q = 0$.

da primeira lei da termodinâmica:

$$Q = \Delta U + w$$

$$0 = \Delta U + w$$

$$\Delta U = -\, w_{adiabático}$$

8.8. Calorimetria (troca de calor)

a) Equação geral

$$\sum Q_C + \sum Q_R = 0$$

Onde,

$$\sum Q_C - \ soma\ dos\ calores\ cedidos\ com\ ou\ sem\ mudança\ de\ fase$$

$$\sum Q_R - \ soma\ dos\ calores\ recebidos\ com\ ou\ sem\ mudança\ de\ fase$$

b) Calor cedido ou recebido sem mudança de fase

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

c) Calor necessário para a mudança de fase

$$Q = m \cdot L$$

$L - calor\ latente\ de\ transição\ (mudança) de\ fase$ $\qquad [L] = J/kg$

Temos as seguintes transições de fase:

- Fusão: $Q = m \cdot L_f \qquad (Q > 0)$

- Solidificação: $Q = m \cdot L_s \qquad (Q < 0)$

$$L_s = -L_f$$

- Vaporização: $Q = m \cdot L_V \qquad (Q > 0)$

- Condensação: $Q = m \cdot L_c \qquad (Q < 0)$

$$L_c = -L_V$$

Obs.: Nas trocas de calor, os patamares (temperaturasde transição de fase) não podem ser saltados. Caso haja salto, elimina-se tal salto considerando os patamares.

Ex.: Aqueceu-se o gelo de -20℃ a 120℃.

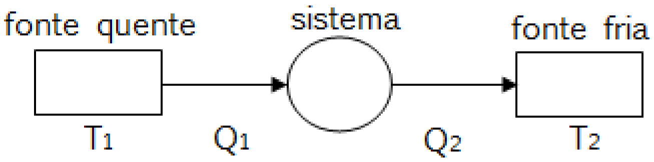
de $-20°c$ a $120°c$ temos dois saltos; aos 0℃ e aos 100℃. Nesse caso,

$$gelo\ (-20℃\ a\ 120℃) = \ gelo\ (-20℃; 0℃) + água\ (0℃) + água\ (0℃; 100℃) + vapor\ (100℃) +$$
$$+ vapor\ (100℃; 120℃)$$

8.9. Máquina térmica (ciclo de Carnot)

Ciclo de Carnot é um ciclo que se realiza com duas transformações isotérmicas e duas adiabáticas.

Sejam duas fontes: uma quente e outra fria. O calor transfere-se da fonte quente ao sistema e, do sistema à fonte fria.



$$Q_1, T_1 - calor\ e\ temperatura\ da\ fonte\ quente$$

$$Q_2, T_2 - calor\ e\ temperatura\ da\ fonte\ fria$$

a) Trabalho durante o ciclo de carnot

$$w = Q_1 - |Q_2|$$

$$w - trabalho\ realizado\ pela\ máquina$$

$$Q_1 - calor\ recebido \qquad Q_1 > 0$$

$$Q_2 - calor\ cedido \qquad Q_2 < 0$$

b) Rendimento da máquina

$$\eta = \frac{w}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}$$

Outra expressão de cálculo do rendimento é:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Igualando as duas fórmulas de cálculo,

$$\frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

PROBLEMAS

8.1. Calcule os valores dos calores específicos c_p e c_v do hélio e do hidrogénio.
R: hélio 5.2 kJ/kg·K e 3.1 kJ/kg·K; hidrogénio 14.5 kJ/kg·K e 10.4 kJ/kg·K
8.2. Qual é a energia interna de 10 moles de um gás ideal monoatómico com a temperatura igual a 27 ºC?

R: 3.4 kJ

8.3. Qual a energia interna do hélio que se encontra num recipiente de volume de 60 m^3 sob a pressão de 100 kPa. R: 9.0 MJ

8.4. Para aquecer isobaricamente um gás de 800 moles de 500 K, a ele forneceram 9.4 MJ de quantidade de calor. Determine:

a) o trabalho realizado pelo gás;

b) a variação da energia interna.

R: a) 3.3 MJ b) 6.1 MJ

8.5. Uma quantidade de 2 mol de um gás ideal expande-se à pressão constante de 1.0 atm ate ao volume de 50 l. Se o trabalho realizado seja de 2 atm·l, calcule o volume e a temperatura inicial do gás. R: 48 l, 20 ºC

8.6. Num processo a temperatura constante, 2 mol de um gás ideal expandem-se até duplicar o seu volume. Determine a temperatura com que se efectua o processo se o calor absorvido seja de 1.0 kcal. R: 91 ºC

8.7. A pressão do azoto de volume 3 l no decorrer do aquecimento isocórico aumentou de 1 MPa. Determinar a quantidade de calor absorvida pelo gás. R: 7.5 kJ

8.8. O calor específico a pressão constante do azoto é igual a 1.05 kJ/kg·K, o calor específico a volume constante, 0.75 kJ/kg·K. Que trabalho realizar-se durante o aquecimento isobárico de 1 kg do azoto de 1 K. R: 300 J

8.9. Qual a parte de quantidade de calor fornecida a um gás monoatómico numa transformação isobárica serve para variar a energia interna e para realizar o trabalho? R: 0.6 e 0.4

8.10. Num recipiente com 1.5 kg de água de temperatura de 15 ºC entram 200 g de vapor de água com a temperatura de 100 ºC. Qual será a temperatura de equilíbrio? R: 89.6 ºC

8.11. Na água de massa 2 kg a 50 ºC deita-se água de massa 0.5 kg a 10 ºC. Determine a temperatura de equilíbrio. R: 42 ºC

8.12. Misturam-se 50 g água a 10 ºC com gelo a 0 ºC. O sistema atinge a temperatura de equilíbrio igual a 4 ºC. Qual foi massa de gelo. R: 3.7 g

8.13. Misturam-se 50 g água a 10 ºC com água a 0 ºC. O sistema atinge a temperatura de equilíbrio igual a 4 ºC. Determine a massa do sistema. R: 125 g

8.14. Misturam-se 50 g de água a 0 ºC com 10 g de gelo a – 5 ºC. Determine a temperatura de equilíbrio.

R: 15.5 ºC

8.15. Misturam-se 5 l de água a 100 ºC com 8 l de água a 10 ºC. Determine a temperatura de equilíbrio. R: 45 ºC

8.16. Misturam-se 5 kg de vapor de água a 100 ºC com 250 kg de água a 10 ºC. Determine a temperatura de equilíbrio. R: 23.25 ºC

8.17. Determinar a temperatura de equilíbrio térmico da mistura de 1 kg de gelo a 0 ºC com 9 kg de água a 50 ºC R: 37 ºC .

8.18. Na água de massa 1kg a 5 ºC deitam 50 g de gelo a – 5 ºC. Calcule a temperatura de equilíbrio. R: 0.95 ºC

8.19. Calcular a quantidade de calor necessária para transformar 10 g de gelo a 0 ºC em vapor de água a 100 ºC. R: 7.2 kcal

8.20. Na água mergulharam uma peça de cobre de 0.3 kg de massa com a temperatura de 200 ºC Qual será a temperatura de equilíbrio do sistema água-peça se a massa da água foi igual a 2 kg e a sua temperatura inicial, 17 ºC. O calor especifico da água é igual a 4.19 kJ/kg·K, o calor especifico do cobre 0.38 kJ/kg·K. R: 19.5 ºC

8.21. Numa banheira de volume de 200 l misturam a água a fria de temperatura 10 ºC com a água quente de temperatura 60 ºC. Quantos litros de agua quente é necessário para fazer a temperatura de equilíbrio igual a 40 ºC? R: 120 l

8.22. Para esfriar 200 g de água com a temperatura de 25 ºC nela lançam peças de gelo de volume de 6.4 cm^3 com a temperatura de – 5 ºC. Quantas peças é necessário lançar na água para conseguir a temperatura de 5 ºC? O calor especifico do gelo é de 2.26 kJ/kg·K, o calor latente de fusão 333 kJ/kg, a densidade 0.9 g/m^3. R: 8

8.23. Num calorímetro com capacidade térmica de 63 J/K encontra-se 250 g de óleo com a temperatura de 12 ºC. Depois de mergulhar no óleo um corpo de cobre de 500 g de massa e de temperatura de 100 ºC fez-se a temperatura de equilíbrio igual a 33 ºC. Determine o calor específico do óleo. R: 2.17 kJ/kg·K.

8.24. Num recipiente que tem 2.8 l de água com a temperatura de 20 ºC entram uma peça de aço de 3 kg aquecida à temperatura de 460 ºC. A água aquece-se à temperatura de 60 e uma parte dela transforma-se em vapor. Determine a massa do vapor. O calor específico do aço é de 460 kJ/kg·K. Despreze a capacidade calorífica do recipiente. R: 36 g

8.25. Para determinar o calor latente de fusão do estanho num calorímetro com 330 g de água de temperatura 7 ºC verteram 350 g do estanho a temperatura de 232 ºC igual à temperatura de fusão. No calorímetro cuja capacidade calorífica é de 100 J/K fez-se a temperatura de equilíbrio igual a 32 ºC. Qual o calor latente de fusão se o calor do estanho é de 230 J/kg·K.
R: –60 kJ/kg.

8.26. Na água de massa 3.3 kg a 81 ºC deita-se o gelo de massa 1.2 kg a – 18 ºC. Determinar a temperatura de equilíbrio. R: 35 ºC

8.27. Mistura-se o gelo de 3.2 kg de massa a – 25 ºC e o vapor de água de 0.64 kg de massa a 100 ºC. Determinar a temperatura. O calor especifico do gelo é igual a 2.26 kJ/kg·K, o calor especifico da água 4.19 kJ/kg·K,o calor latente do gelo 333 kJ/kg·K, a temperatura de fusão do gelo 0 ºC, o calor latente de vaporização da água 2.26 MJ/kg. R: 29 ºC

8.28. Mistura-se o gelo de 3.3 kg de massa a – 18 ºC e o vapor de água de 0.7869 kg de massa a 100 ºC. Determinar a temperatura. R: 50.1 ºC

8.29. Mistura-se o gelo de 2.5 kg de massa a 0 ºC e o vapor de água de 0.45 kg de massa a 150 ºC. Determinar a temperatura de equilíbrio. O calor especifico do vapor de água é igual a 2.26 kJ/kg·K, o calor especifico da água 4.19 kJ/kg·K, o calor latente de fusão do gelo 333 kJ/kg, a temperatura de condensação da água 100 ºC, o calor latente de vaporização da água 2.26 MJ/kg.
R: 34.3 ºC

8.30. Mistura-se o gelo de 2.5 kg de massa a – 18 ºC e o vapor de água de 0.45 kg de massa a 150 ºC. Determinar a temperatura equilíbrio. O calor especifico do vapor de água e do gelo é o mesmo e igual a 2.26 kJ/kg·K, o calor latente do gelo 333 kJ/kg, a temperatura de fusão do gelo 0 ºC, a temperatura de condensação da água 100 ºC, o calor latente de vaporização da água 2.26 MJ/kg.
R: 26 ºC

8.31. Uma bala de chumbo voando com a velocidade de 200 ms^{-1} choca-se com uma parede. Calcule a elevação de temperatura da bala se 78% da sua energia cinética se transforma em energia interna. O calor específico do chumbo é de 130 J/kg·K. R: 120 K

8.32. Um estilhaço de aço caindo da altura de 500 m perto da superfície do solo teve a velocidade de 50 ms^{-1}. Considerando que todo o trabalho da força de resistência do ar é gasto para o aquecimento do estilhaço, determine a elevação da sua temperatura. O calor específico do aço é de 460 J/kg·K.
R: 8 K

8.33. Com que velocidade mínima tem de mover um chumbeiro para fundir-se durante o choque com uma parede. Considere que 80% da sua energia cinética transforma-se em energia interna e a sua temperatura antes do choque é de 127 ºC. O calor latente de fusão do chumbo é de 25 kJ/kg, a temperatura de fusão 327 ºC, o calor especifica 130 J/kg·K. R: 357 ms^{-1}

8.34. A temperatura da fonte quente de uma máquina térmica ideal é igual a 117 ºC, a temperatura da fonte fria 27 ºC. A quantidade de calor recebida da fonte quente é de 60 kJ por 1 s. Calcule.

a) o rendimento desta máquina térmica;

b) a quantidade de calor cedida na fonte;

c) a potência da máquina.

R: a) 23%   b) 46 kJ   c) 14 kW

8.35. Uma máquina térmica ideal a custa de 1.0 kJ da quantidade de calor recebida da fonte quente realiza um trabalho de 300 J. A temperatura da fonte fria é igual a 200 K. Determine o rendimento da máquina e a temperatura da fonte fria. R: 80% , 400 K

8.36. Uma máquina térmica ideal que funciona segundo o ciclo de Carnot, realiza durante o ciclo o trabalho igual a 2.94 kJ e comunica a fonte a quantidade de calor igual a 13.4 kJ durante o ciclo. Determinar o rendimento do ciclo. R: 18%

8.37. Uma máquina térmica ideal funciona segundo o ciclo de Carnot. Neste caso, 80% da quantidade de calor comunicada pela fonte quente transmite-se à fonte fria. O trabalho realizado durante o ciclo é 1.26 kJ. Calcular o rendimento do ciclo e o calor da fonte quente.

R: 20% e 6.28 kJ

8.38. Uma máquina térmica ideal que funciona segundo o ciclo de Carnot, recebe durante o ciclo a quantidade de calor igual a 20 kJ, comunicada pelo aquecedor. A temperatura do aquecedor é o dobro da temperatura do refrigerador. Determine:

a) o trabalho realizado pelo gás durante o ciclo;

b) a quantidade de calor comunicada a fonte fria.

R: a) 10 kJ   b) 10 kJ

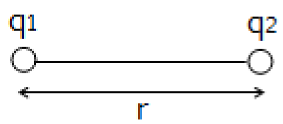
8.39. Uma máquina térmica ideal que funciona segundo o ciclo de Carnot, realiza o trabalho de 73.5 kJ durante o ciclo. A temperatura da fonte quente é de 100 ºC e da fonte fria 0 ºC. Calcular o rendimento do ciclo, a quantidade de calor na fonte quente e na fonte fria. R: 26.8%, 274 kJ, 200 kJ

8.40. Uma máquina de Carnot é operada entre dois reservatórios a temperaturas de 400 K e 300 K. Se a máquina recebe 1200 cal do primeiro, quando cederá ao segundo? R: 900 cal

CAPÍTULO 9. ELECTROSTÁTICA

9.1. Lei de Coulomb

Enuncia que: “A intensidade da força de interacção entre duas cargas pontuais em repouso é directamente proporcional ao produto do módulo de cada carga e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.”



$$F = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \qquad [F] = N$$

$k - constante\ de\ proporcionalidade. Depende\ do\ meio.$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \qquad [k] = Nm^2/C^2$$

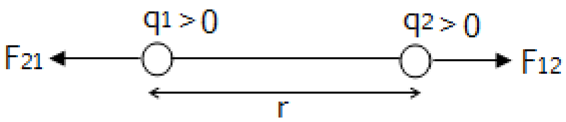
$\varepsilon_0 - permitividade\ eléctrica\ do\ vácuo.$ $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$

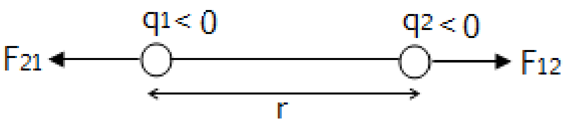
$$k = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}{\varepsilon} \Rightarrow k = \frac{9 \cdot 10^9}{\varepsilon} \qquad \varepsilon - permitividade\ relativa\ do\ meio$$

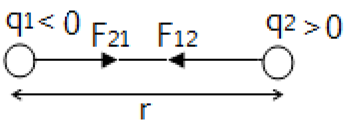
No vácuo ou ar: $\varepsilon = 1 \Rightarrow k = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

Orientação da força

Cargas de sinais iguais repelem-se; cargas de sinais opostos atraem-se. Em ambos os casos, a força actua sempre segundo a linha que une as cargas em consideração.





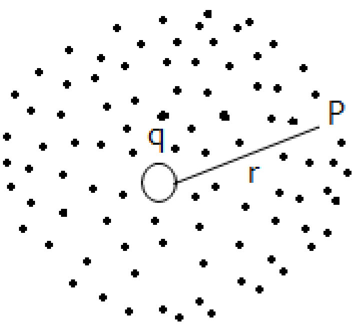


9.2. Campo eléctrico

É a região do espaço que envolve uma carga eléctrica e na qual, ao colocarmos outra carga, esta sofre a acção de uma força de atracção ou de repulsão.

O campo eléctrico criado por uma carga puntiforme q num ponto P à distância r é:

$$E = k\frac{|q|}{r^2} \qquad [E] = V/m = N/C \qquad 1\ V/m = 1N/C$$



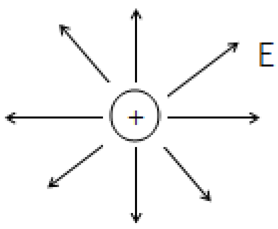
Em P só há acção do campo eléctrico, não há acção de nenhuma força. No entanto, se colocarmos em P uma carga Q, nela actuará não só o campo eléctrico, mas também a acção das forças do campo, que é dado por:

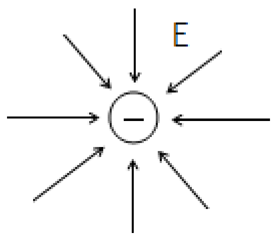
$$F = E \cdot |Q|$$

$\vec{F}\ e\ \vec{E}\ \ t\hat{e}m\ o\ mesmo\ sentido\ se\ Q > 0$

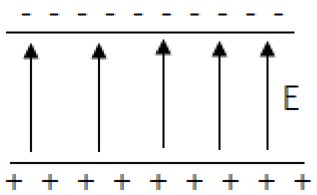
Orientação do campo eléctrico

Para cargas puntiformes, as linhas de força do campo eléctrico orientam-se de tal forma que, para cargas positivas, fogem (ou afastam-se) do centro, e para cargas negativas, dirigem-se (ou orientam-se) para o centro.





Para placas carregadas, o campo eléctrico orienta-se sempre da placa positiva para à negativa.



9.3. Potencial eléctrico

a) Potencial criado por uma carga q num ponto P à distância r.

$$V = k\frac{q}{r} \qquad\qquad [V] = V\ (Volt)$$

$V - \text{é}\ uma\ grandeza\ escalar$

O potencial num ponto devido a um sistema de cargas é igual a soma dos potenciais de cada carga, ou seja,

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

b) Relação de E e V

$$E = \frac{V}{r}$$

c) Tensão eléctrica (U)

- É a diferença entre o potencial inicial e o potencial final, isto é, diferença de potencial entre dois pontos, o inivial e o final, criado por uma carga.

$$U = V_1 - V_2$$

$$Sendo \quad V = k\frac{q}{r}$$

$$Se \;\; r_2 \longrightarrow \infty \;\; \Rightarrow \;\; V_2 = 0$$

$$U = V_1 - 0 \;\; \Rightarrow \;\; U = V_1 \;\; \Rightarrow \;\; U = V$$

- É o trabalho que é necessário realizar pelas forças eléctricas do campo por unidade de carga.

$$U = \frac{w}{q}$$

$$w = q(V_1 - V_2)$$

$w -$ é o trabalho realizado pelas forças do campo eléctrico no transporte da carga q do ponto inicial de potencial V_1 ao ponto final de potencial V_2.

d) Energia potencial eléctrica de interacção de duas cargas

$$U_P = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r}$$

$$\Delta U_P = U_{P1} - U_{P2} = k \cdot q_1 \cdot q_2 (\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$$

9.4. Capacidade eléctrica

$$C = \frac{q}{U} \qquad\qquad [C] = F\ (Farad)$$

a) Energia de um capacitor (condensador)

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

b) Capacidade de um condensador de placas paralelas

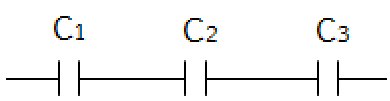
$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

$A - área\ da\ placa$

$d - distância\ entre\ as\ placas$

c) Associação de capacitores (condensadores)

- Associação em série:

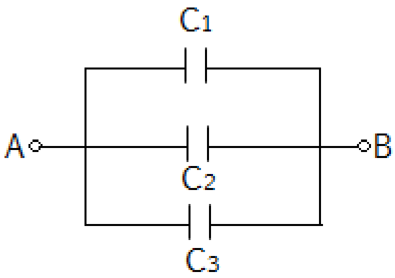


$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

$$q = q_1 = q_2 = \cdots = q_n$$

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

- Associação em paralelo:



$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

$$U = U_1 = U_2 = \cdots = U_n$$

PROBLEMAS

9.1. Duas cargas pontuais de 4.0 µC e – 4.0 µC encontram-se situadas à distancia de 50 cm uma da outra. Calcule a intensidade da força a que as cargas estão quando se encontram:

a) no ar;
b) na água, cuja permitividade relativa é 80.

R: a) $5.8\cdot10^{-1}$ N b) $7.2\cdot10^{-3}$ N

9.2. Duas cargas pontuais q_1 = – 3.0 nC e q_2 = 9.0 nC distam 12 cm uma da outra. Na recta que une q_1 e q_2 é colocada uma terceira carga q_3 = 6.0 nC distante 20 cm cm de q_1 à direita. Determine a força que actua em cada uma das cargas no problema. R: F_1 = 0.013 mN F_2 = – 0.15 mN F_3 = 0.13 mN

9.3. Duas cargas pontuais de q_1 = – 3.0 µC e q_2 = 12.0 µC, distam uma da outra 9.0 cm. Determine a distância à carga 1 do ponto, sobre a recta que une as cargas 1 e 2, onde deve ser colocada uma terceira carga q_3 = 2.0 µC, de modo que a resultante das forças seja nula.
R: 9.0 cm

9.4. Duas cargas pontuais, Q_1 = - 6.0 µC e Q_2 = 4.0 µC, estão colocadas no vazio, à distância de 40.0 dm uma da outra. Em que posição se deve colocar uma carga Q_3 = 1.0 µC, de modo que fique em equilíbrio em relação às cargas 1 e 2. R: 1.8 m

9.5. Três cargas pontuais iguais, de 0.1 µC, estão situadas, no vazio, nos vértices de um triângulo equilátero de 2.0 dm de lado. Calcule a força que actua em cada uma das cargas. R: $4.0 \cdot 10^{-2}$ N

9.6. A distância entre duas cargas pontuais, Q_1 = 60 nC e Q_2 = 40 nC é igual a 50 cm. Calcule a força eléctrica sobre uma carga Q_3 = 90 nC que se encontra à distância de 30 cm de Q_1 e 40 cm de Q_2.
R: 4.27 µN

9.7. A distância entre duas cargas pontuais, Q_1 = – 60 nC e Q_2 = 40 nC é igual a 30 cm. Calcule a força eléctrica sobre uma carga Q_3 = – 90 nC que se encontra à distância de 15 cm de Q_1 e 20 cm de Q_2.
R: 54.5 mN

9.8. Duas partículas com cargas q_1 = + 2q e Q_2 = q estão separadas por uma distancia d. Uma terceira partícula de carga Q_3 = – 2q é colocada num ponto P, pertencente à recta que une as cargas q_1 e q_2 . A resultante das forças que actua sobre ela é nula. Determine a distância do ponto P à carga q_1. R: $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}d$

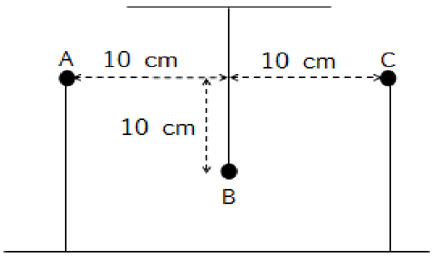
9.9. A distância entre duas cargas pontuais de valores 18 nC e 72 nC é de 60 cm. Em que ponto da recta que une estas cargas é necessário colocar uma terceira carga pontual para que todas as cargas estiverem em equilíbrio? Qual o valor desta carga. R: 20 cm , – 8.0 nC

9.10. Um corpo C, de carga – 2.0×10^{-11} C, está colocado sobre uma placa isoladora, mantendo em equilíbrio, à altura h, uma esfera E, de massa 2.0×10^{-14} kg e carga – 2.0×10^{-13} C. Determine a altura h. R: 0.42 m

9.11. Duas esferas condutoras, A e B, de massas iguais e cargas iguais, de valor 2.0 µC, estão suspensas, separadamente, por fios de comprimento 0.5 m, que fazem ângulos de 60º com a posição de equilíbrio. Determine as massas das esferas. R: 2.8 g

9.12. Aproxima-se duma esfera E, de massa 200 g e carga – 6.0 µC, suspensa por um fio de 15 cm de comprimento, um partícula de carga 8.0 µC. Quando o sistema atinge o equilíbrio, o fio faz um ângulo de 27º com a vertical. Determine a distancia entre a esfera E e a partícula.
R: 6.5 cm

9.13. As esferas A, B e C com cargas respectivamente iguais a 2.0 µC, – 2.0 µC e 2.0 µC, encontram-se em equilíbrio na posição indicada na figura abaixo. A esfera B encontra-se em equilíbrio suspensa por um fio de massa desprezável na posição de equilíbrio. Determine a massa da esfera B de modo que a tensão no fio que a suporta seja nula.
R: 19 g



9.14. Duas cargas pontuais q_1 = – 10 µC e q_2 = 5.0 µC estão colocadas no vazio, à distância de 10 cm uma da outra. Sabendo que a mesma distância de 4 cm de q_2 encontram-se dois pontos A (à direita de q_2) e B (à esquerda de q_2), Calcule:

a) a intensidade do vector campo eléctrico nos pontos A e B;

b) o potencial nos pontos A e B;

c) o ponto da recta que as cargas onde o campo eléctrico é nulo.

R: a) 5.3×10^7 V/m , 2.3×10^7 V/m b) -3.8×10^5 V, 4.8×10^5 V c) 24 cm (à direita de q_2)

9.15. Duas cargas de $q_1 = 2.0$ µC e q_2 estão colocadas no ar a distancia de 2.0 m uma da outra. O campo eléctrico criado pelas duas cargas é nulo num ponto entre as cargas, a 70 cm da carga q_1. Calcule o valor da carga q_2.

R: 7 µC

9.16. Duas cargas eléctricas de 10 µC e – 10 µC estão colocadas nos vértices de um triângulo equilátero de 20 cm de lado. Calcule a intensidade do vector campo eléctrico no outro vértice? R: 2.2×10^6 V/m

9.17. O potencial eléctrico criado no ponto P de um campo eléctrico por uma carga pontual Q = 10 nC é 450 V. Calcule:

a) a distância do ponto P à carga;

b) a intensidade do vector campo eléctrico no ponto P.

R: a) 20 cm b) 2.2×10^3 V/m

9.18. Duas cargas pontuais de 3.0 µC e – 6.0 µC encontram-se separadas 20 cm no vazio. Considere a origem do referencial o ponto médio da linha que une as duas cargas. Determine:

a) o campo eléctrico criado num ponto de coordenadas (0,4) cm;

b) o potencial no mesmo ponto.

R: a) 6.45×10^3 V/m b) -2.5×10^5 V

9.19. Uma pequena esfera, de massa 0.50 g e de carga + 6.0 µC, está suspensa por um fio ideal. O sistema é colocado no interior de um campo eléctrico uniforme e quando atinge o equilíbrio o fio faz um ângulo 20º com a vertical. Caracterize o campo eléctrico. R: 3.0×10^2 V/m

9.20. Num campo eléctrico uniforme de intensidade 4.0×10^2 V/m, é abandonada na origem do referencial XOY uma carga pontual de – 3.0 µC. Determine a energia cinética quando a carga percorreu 4.0 cm. R: 4.8×10^{-5} J

9.21. Considere duas cargas pontuais de 2.0 µC e – 0.5 µC colocadas no ar à distancia de 2 dm uma da outra. Determine o ponto em que o potencial eléctrico é nulo. R: 0.16 m

9.22. Duas esferas iguais $Q_1 = Q_2 = 10$ µC estão colocadas no vazio, nos vértices de um triangulo rectângulo em A. O ponto A dista de Q_1 e Q_2, 4 dm e 3 dm, respectivamente. Calcule a intensidade do vector campo eléctrico e o potencial no ponto A. R: 1.1×10^6 V/m, 5.2×10^5 V

9.23. Uma esfera de massa 20 g e carga 5.0×10^{-1} µC encontra-se em equilíbrio suspensa por um fio isolante, de massa desprezável, que forma um ângulo de 30º com a vertical, sob a acção de um campo eléctrico uniforme. Determine o valor da intensidade do vector campo eléctrico e da tensão no fio nessa posição.R: 2.2×10^5, 0.23 N

9.24. Um electrão entra num campo eléctrico uniforme de intensidade $2.0x10^3$ V/m, paralelamente às linhas de campo, com velocidade inicial de valor $2.0x10^5$ ms^{-1}. A diferença de potencial entre as placas é de 80 V. Determine:

a) a distancia entre as placas;

b) a velocidade com que o electrão abandona o campo eléctrico.

R: a) 4.0 cm b) $5.3x10^6$ ms^{-1}

9.25. Coloca-se uma esfera de massa m e carga 2.0 µC numa região do espaço onde existe um campo eléctrico uniforme, vertical, de intensidade $5.0x10^5$ V/m. Calcule a massa da esfera, sabendo que fica em equilíbrio no interior do campo eléctrico. R: 0.1 kg

CAPÍTULO 10. CORRENTE ELÉCTRICA CONTINUA

10.1. Corrente eléctrica e densidade de corrente

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad ou \qquad I = \frac{dq}{dt} \qquad\qquad [I] = A\ (Ampère)$$

Para um dado instante: $I = \frac{q}{t}$

A densidade de corrente é dada por:

$$J = \frac{I}{S} \qquad\qquad [J] = A/m^2$$

$S - secção\ transversal\ do\ material\ condutor$

10.2. Resistência eléctrica

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \qquad [R] = \Omega\ (Ohm)$$

$\rho - resistividade\ do\ materia\ condutor \qquad [\rho] = \Omega \cdot m$

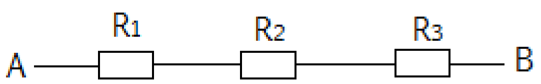
$l - comprimento\ do\ condutor$

$S - secção\ transversal\ do\ condutor$

10.3. Lei de Ohm para uma porção do circuito sem fem.

$$I = \frac{U}{R}$$

a) Associação de resistências em série:

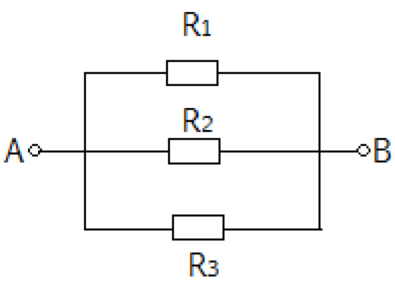


$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

$I = I_1 = I_2 = \cdots = I_n$

$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

b) Associação de resistências em paralelo:



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$

$U = U_1 = U_2 = \cdots = U_n$

10.4. Campo eléctrico externo aplicado a um condutor

$$E = \frac{U}{l}$$

$U - d.d.p\ (diferença\ de\ potencial)\ ou\ tensão$

$l - comprimento\ do\ condutor$

10.5. Efeito térmico da corrente eléctrica

a) Energia gasta ou calor libertado no transporte da carga de um terminal para outro

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t \qquad\qquad (Lei\ de\ Joule)$$

$t - \text{é}\ o\ tempo$

b) Potência útil (consumida) e dissipada

$$P_u = U \cdot I$$

$$P_d = I^2 \cdot R \qquad ou \qquad P_d = \frac{U^2}{R}$$

10.6. Força electromotriz (fem)

Por definição,

$$\varepsilon = \frac{w}{q} \qquad\qquad [\varepsilon] = V\ (Volt)$$

$w - trabalho\ realizado\ pela\ fonte$

A potência desenvolvida pela fonte é:

$$P = \varepsilon \cdot I$$

A potência desenvolvida pela fonte é a soma da potência gasta (consumida) e dissipada.

10.7. Lei de Ohm para um circuito com fem

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

$R - resist\hat{e}ncia\ externa\ \text{à}\ fonte$

$r - resist\hat{e}ncia\ interna\ da\ fonte$

$Se\ \ r = 0$: $\qquad I = \frac{\varepsilon}{R}$

- em série: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$

- em paralelo: $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n$

10.8. Tensão nos terminais de saída de um gerador

a) Quando fornece corrente (fem está no sentido da corrente)

$$U = \varepsilon - I \cdot r$$

b) Quando recebe corrente (fem está em oposição ao sentido da corrente)

$$U = \varepsilon + I \cdot r$$

c) Quando não há corrente

$$U = \varepsilon$$

10.9. Leis de Kirchhoff

1º $Lei\ dos\ nós$: “a soma algébrica de todas as correntes que entram e que saem em qualquer nó de um circuito é igual a zero.”

$$\sum I_{entram} + \sum I_{saem} = 0$$

Regra dos sinais para a primeira regra

- Se se adoptar como positivas as correntes que entram, as que saem serão negativas e, vice-versa.

2º $Lei\ das\ malhas$: “a soma algébrica de todas as quedas de tensão numa malha é igual a soma algébrica das forças electromotrizes na mesma malha.”

$$\sum I \cdot R = \sum \varepsilon$$

Regra dos sinais para a segunda regra

- Adopta-se um sentido da corrente para a malha.

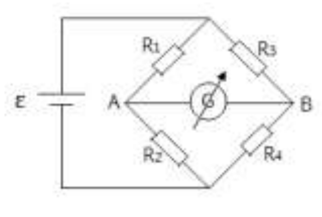
- Se um resistor for percorrido por uma corrente no sentido da corrente adoptada para a malha, a queda de tensão é positiva $(+IR)$, caso contrário é negativa $(-IR)$.

- Se uma fonte de fem for percorrida no sentido da corrente adoptada para a malha, a fem será positiva $(+\varepsilon)$, caso contrário é negativa $(-\varepsilon)$,

Embora não sendo uma grandeza vectorial, a fem é considerada como tendo um sentido. Por convenção, o sentido da fem é a do terminal positivo para o negativo da fonte.

10.10. Ponte de Wheatstone

A ponte de Wheatstone é um dispositivo costituído de quatro resistências, e que permite o cálculo da resistência de um resistor com bastante precisão.



Sendo a corrente no corrente no Galvanómetro nula, a ponte fica balanceada. Obtemos a relação:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \qquad ou \qquad R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$$

PROBLEMAS

10.1. Uma corrente permanente de 5 A circula por um condutor durante 1 min Determinar a carga transportada..
R: 300 C

10.2. Durante 4 min passa uma corrente de 5 A numa resistência de 10 Ω. Determine a) quantos coulombs e b) quantos electrões passam através de uma secção do fio, nesse intervalo de tempo?
R: a) 1200 C, b) 7.5×10^{21} electrões

10.3. Determinar o número de electrões por segundo que cruzam a secção normal de um fio condutor pelo qual circula a corrente de 0.125 A. R: 0.78×10^{18} electrões/s

10.4. A corrente eléctrica num fio varia com o tempo, de acordo com a relação $i = 4 + 2t^2$ (S.I.). Quantos coulombs passam pela secção do fio no intervalo de tempo t = 5 s e t = 10 s?
R: 603.3 C

10.5. Achar a resistência de um arame de prata alemã de 152.5 m de comprimento e 0.3 mm^2 de secção. A resistividade deste metal vale 33×10^{-6} Ωcm. R: 168 Ω

10.6. Determinar a resistência de um fio de cobre cuja secção é 5×10^{-6} m^2. A resistividade do cobre é 1.7×10^{-8} Ωm. O comprimento do fio é 200 m. R: 0.68 Ω

10.7. Um fio de cobre de massa de 0.21 kg tem a resistência de 0.83 Ω. Determine o comprimento e a área da secção transversal do fio. A densidade do cobre é de 8.9 gcm^{-3}, a resistência específica, 1.7×10^{-8} Ωm.
R: 34 m e 0.70 mm^2

10.8. A resistência eléctrica de um fio de cobre de massa de 13.7 g é igual a 26.7 Ω. Determine o diâmetro do fio. A densidade e a resistência especifica do cobre são iguais a, respectivamente, 8.9 g/cm^3 e 1.68×10^{-8} Ωm.

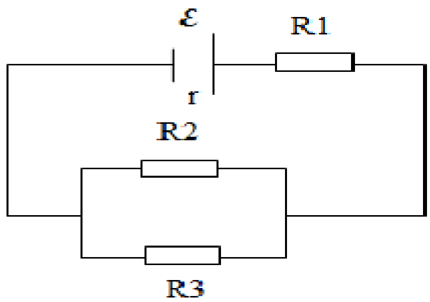
R: 0.20 mm

10.9. O trecho de um circuito eléctrico é constituído por um fio de aço de comprimento de 2 m e de 0.48 mm^2 de área e por outro fio de niquelina de 1 m de comprimento e de 0.21 mm^2 de área ligados em serie. Que tensão é preciso manter nas extremidades desse trecho para ter o valor de intensidade de corrente igual a 0.6 A? As resistências especificas do aço e da niquelina, respectivamente, são iguais a 12×10^{-6} Ωm e 42×10^{-8} Ωm. R: 1.5 V

10.10. Um circuito tem três condutores associados em série que são ligados a uma fonte de energia eléctrica de tensão de 24 V. A resistência do primeiro condutor é igual a 4 Ω e do segundo é de 6 Ω. A queda de tensão nos extremos do terceiro condutor é de 4 V. Determine a intensidade de corrente eléctrica nos condutores. R: 2 A

10.11. Um circuito é constituído por uma bateria de fem de 24 V e por um consumidor de resistência eléctrica de 4.0 Ω. Determine o valor da resistência interna da bateria se a potencia do consumidor for de 100 W. R: 0.8 Ω

10.12. Duas lâmpadas de resistências de 4.0 Ω e 9.0 Ω ligam-se separadamente a mesma fonte de energia eléctrica. Determine a resistência interna da fonte se as lâmpadas consomem a mesma potência. R: 6 Ω



10.13. A uma fonte de energia eléctrica de forca electromotriz de 30 V e resistência de 1.5 Ω é ligado um electroíman. A queda de tensão nele é igual a 27 V. Determine a intensidade da corrente neste circuito. R: 2 A

10.14. A uma fonte de energia eléctrica de forca electromotriz de 12 V e resistência de 1.0 Ω é ligado um reóstato de resistência de 5.0 Ω. Determine a queda de tensão no reóstato. R: 10 V

10.15. A potência consumida por dois condutores associados em paralelo é 4 vezes maior do que no caso destes em serie. A resistência de um dos condutores é igual a 1.2 Ω. Qual a resistência do outro? Em ambos os caos eles alimentam-se da mesma fonte de energia eléctrica. R: 1.2 Ω

10.16. A intensidade do campo eléctrico num fio de cobre de diâmetro de 1.0 mm é igual a 21.4 mV/m. Determine a intensidade da corrente eléctrica que o percorre. A resistência especifica do cobre é igual a $1.68\text{x}10^{-8}$ Ω·m. R: 1.00 A

10.17. Determine a intensidade do campo eléctrico num fio de alumínio de diâmetro de 1.2 mm percorrido pela corrente eléctrica de intensidade de 1.5 A? A resistência especifica do alumínio é igual a $2.65\text{x}10^{-8}$. R: 35 mV/m

10.18. Um fio de cobre tem a massa de 0.21 kg e a resistência eléctrica de 0.83 Ω. Qual a área da secção transversal do fio? A densidade do cobre é de 8.9 g/cm^3, a resistência especifica, $1.68\text{x}10^{-8}$ Ω·m. R: 0.69 mm^2

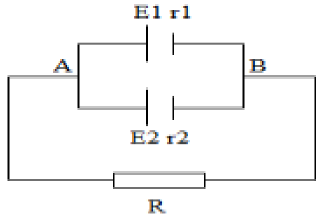
10.19. Se a intensidade de corrente eléctrica num circuito simples for de 30 A a potencia consumida pela parte externa do circuito será de 180 W. No caso de I_2 = 10 A a potencia consumida P_2 = 100 W. Determine a fem da fonte de energia eléctrica (que também possui uma resistência interna).
R: 12 V

10.20. A uma bateria, num caso, liga-se um consumidor de energia eléctrica de resistência de 16 Ω, no outro caso, de resistência de 8.0 Ω. No primeiro caso a intensidade de corrente eléctrica neste circuito simples é igual a 1.0 A, no segundo, 1.8 A. Determine a resistência interna da bateria. R: 4 Ω

10.21. Um circuito eléctrico é composto por uma pilha com fem igual a 12 V e uma resistência interna r = 1/8 Ω e dois resistores externos com as resistências eléctricas iguais a 1.5 Ω e 0.5 Ω ligados em paralelo. Calcule a intensidade da corrente total no circuito. R: 24 A

10.22. Um circuito eléctrico (figura acima, canto direito) é composto por uma pilha de forca electromotriz 6 V, de resistência interna r = 1 Ω que está ligada em serie com uma resistência R_1 = 7 Ω e dois ramos associados em paralelo com resistências R_2 = 30 Ω e R_3 = 30 Ω. Calcule:
a) a intensidade da corrente principal;
b) a diferença de potencial entre as extremidades da pilha.
R: a) 0.3 A b) 5.7 V

10.23. Um galvanómetro cuja resistência é igual a $R_g = 20\ \Omega$ pode medir a intensidade de corrente eléctrica até ao valor máximo de $I_g = 1$ mA. Qual o valor da sua resistência suplementar R_s que se deve associar em paralelo com a resistência R_g para que o galvanómetro se torne num amperímetro capaz de medir a corrente principal máximo de valor I = 1 A. R: 0.02 Ω



10.24. Dado um segmento do circuito AB (figura ao lado) em que $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$ e C = 10 μF. Sabendo que a corrente passando por este segmento é a corrente continua, e que a intensidade da corrente principal é igual a I = 22 A. Calcule:

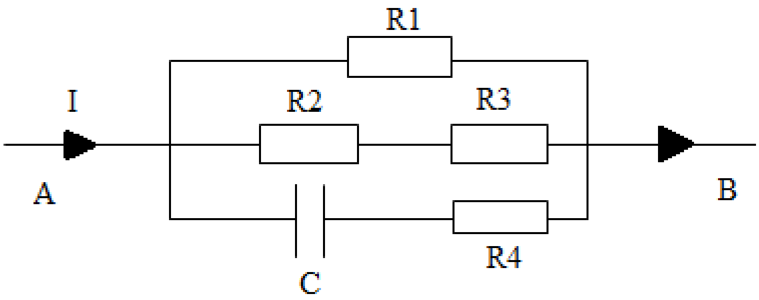
a) a resistência equivalente do segmento de circuito;

b) a intensidade de corrente que passa pela resistência R_2.

R: a) 10/11 Ω b) 2 A

10.25. Dado um circuito eléctrico como a figura ao lado (canto direito) em que $E_1 = 15$ V, $E_2 = 5$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1.5\ \Omega$, $R_3 = 0.5\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$ e C = 3 μF. a) qual o valor da intensidade eléctrica no circuito? b) qual o valor da carga eléctrica do condensador? R: a) 2 A b) 30 μC

10.26. Um motor eléctrico recebe do seu circuito uma potencia $P_1 = 800$ W e dissipa internamente uma potencia $P_2 = 320$ W na forma de calor. Sabendo que a intensidade de corrente no circuito é de 8 A, calcule: a) qual o valor da diferença de potencial transmitida ao motor? b) qual o valor da resistência interna r do motor? R: a) 100 V b) 5 Ω

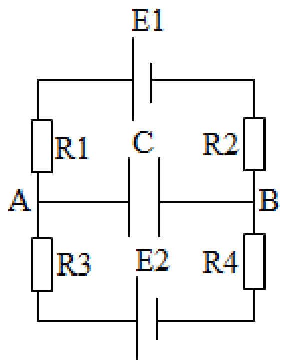


10.27. Dada uma ponte de Wheatstone constituída por quatro resistências $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $R_4 = ?$ ligadas entre si em dois ramos AR_1BR_3D e AR_2CR_4D, por um galvanómetro G colocado entre B e C e uma bateria de fem 24 V cujo pólo positiva esta ligado ao ponto A. Ajusta-se a resistência R_4 de tal maneira que a ponte esteja em equilíbrio, quer dizer, que a corrente através do galvanómetro G é nula. Calcule:

a) o valor da resistência R_4;

b) o valor da corrente principal.

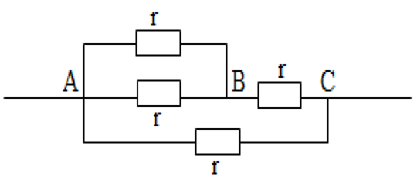
R: a) 16 Ω b) 2.2 Ω



10.28. Duas resistências $R_1 = 15\ \Omega$ e $R_2 = 10\ \Omega$ estão ligadas em paralelo e as suas extremidades são conectadas a uma diferença de potencial contínua U. Indique a) em qual das resistências a potencia desprendida é maior e b) é maior em quantas vezes? R: a) $P_2 > P_1$ b) $P_2 = 1.5P_1$

10.29. Dada a figura acima (canto direito), calcule a diferença de potencial eléctrico entre as extremidades A e B das pilhas, sendo que: E_1 e E_2 são iguais a 6 V, r = 1 Ω, R = 4.5 Ω. R: 4.5 V

10.30. Calcule o valor da resistência equivalente R do segmento de circuito AB que contém 4 resistores de mesma resistência r = 10 Ω



associado em serie e em paralelo na figura ao lado. R: 5 Ω.

10.31. Ache a temperatura inicial, no aquecimento de 20 l de água, sabendo que ao se ligar o chuveiro eléctrico de potência 2.0 kW imerso na água durante 10 minutos, a temperatura final da água é de 46ºC e que toda a energia eléctrica por ele dissipada é usada para aquecer a água.
R: 31ºC

10.32. A corrente num circuito de malha única 5.0 A. Quando uma resistência adicional de 2.0 Ω é colocada em serie, a corrente cai para 4.0 A. Qual era a resistência no circuito original? R: 8.0 Ω

10.33. Uma corrente $i = 0.64 \cdot e^{-1000t}$ passa por um resistor de resistência 125 Ω. Qual a quantidade de calor dissipada no mesmo até que a corrente desapareça? R: 25.6 mJ

10.34. Um conjunto de quatro resistores está ligado em série. A resistência do primeiro é 10 Ω, do segundo 20 Ω, do terceiro 40 Ω, e do último 80 Ω. O segundo resistor está submetido a uma diferença de potencial de 40 V. Determinar a potencia dissipada no terceiro resistor. R: 160 W

10.35. Considere um circuito simples. Se a tensão nos bordos da fonte de energia eléctrica seja de 50 V a intensidade de corrente eléctrica é de 5.5 A. Se a tensão nos bordos desta seja de 57.4 V a intensidade de corrente eléctrica é de 1.8 A. Determine a sua resistência interna. R: 2.0 Ω

CAPÍTULO 11. CAMPO MAGNÉTICO

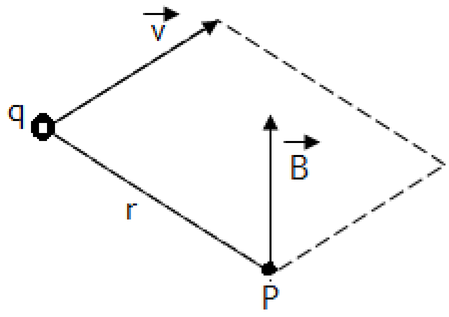
O campo magnético é a região do espaço onde se manifestam as propriedades magnéticas resultantes do movimento de cargas eléctricas.

11.1. Campo magnético criado por uma carga em movimento num ponto à distância *r*

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{|q| \cdot |\vec{v}|}{r^2} \cdot \text{sen}(\vec{v} \wedge \vec{r}) \qquad [B] = T\ (Tesla)$$

$\mu_0 - permeabilidade\ magnética\ no\ vácuo. \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$

B é $sempre\ perpendicular\ (\perp)\ ao\ plano\ formado\ por\ \vec{v}\ e\ \vec{r}$

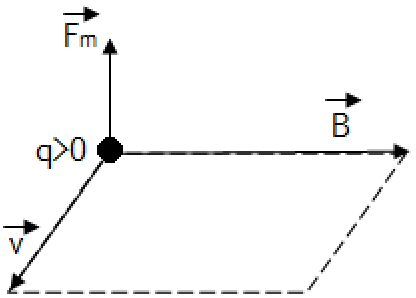


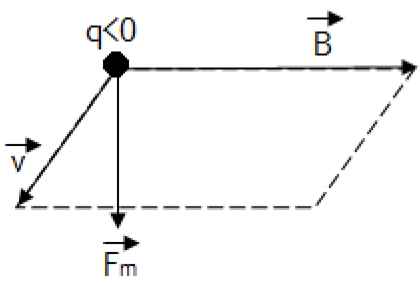
11.2. Força magnética que actua sobre uma carga que se desloca com velocidade $\vec{v}$ numa região onde existe um campo magnético $\vec{B}$

$$F_m = F_L = |q| \cdot v \cdot B \cdot sen(\vec{v} \wedge \vec{r}) \qquad \qquad Lei\ de\ Laplace$$

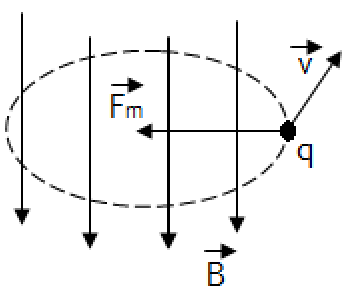
$$F_m \text{ é } perpendicular\ ao\ plano\ formado\ por\ \vec{v}\ e\ \vec{B}$$

A direcção e o sentido da força magnética que actua numa carga é dado pela regra da mão-esquerda: o polegar dá-nos o sentido do campo magnético, os restantes dedos esticados dão-nos o sentido da velocidade. A força magnética é perpendicular ao plano formado por $\vec{v}\ e\ \vec{B}$ e, dirigida do centro da palma-da-mão para fora, caso a carga seja positiva, ou do centro da palma-da-mão para dentro se a carga for negativa.





Quando uma partícula de massa m e carga q numa região onde existe um campo magnético uniforme (homogéneo) com velocidade $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{B}$, ficará animada de movimento circular uniforme. A força magnética é perpendicular à velocidade e dirigida para o centro da trajectória.



Quando uma partícula está simultâneamente sujeita a um campo eléctrico e a um campo magnético, a resultante das forças que sobre ela actuam é:

$$F_{em} = F_e + F_m$$

$$F_{em} = |q| \cdot E + |q| \cdot v \cdot B \cdot sen(\vec{v} \wedge \vec{r}) \qquad Lei\ de\ Lorentz$$

$$F_{em} - força\ resultante\ ou\ electromagnética$$

11.3. Aplicações da força de Lorentz

a) Seleccionador de velocidades

Uma partícula carregada com carga q e massa m é atirada numa região do espaço onde existe um campo eléctrico E e um campo mangético uniforme B perpendicular à direcção da velocidade.

Nas condições de equilíbrio, as forças devido os campos eléctricos e magnéticos são iguais, têm a mesma direcção e sentidos opostos. Nessas condições:

$$F_e = F_m$$

$$|q| \cdot E = |q| \cdot v \cdot B$$

$$E = v \cdot B$$

$$v = \frac{E}{B}$$

b) Tubos de raios catódicos

Os electrões são acelerados do repouso a partir do cátodo e submetidos a uma diferença de potencial U, chegando a atingir o ânodo com velocidade v. A velocidade com que o electrão chega ou sai do ânodo é,

pelo princípio da lei da conservação dada por:

$$W_{F_e} = \Delta E_c$$

$$q \cdot U = E_c - E_{c0}$$

$$q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

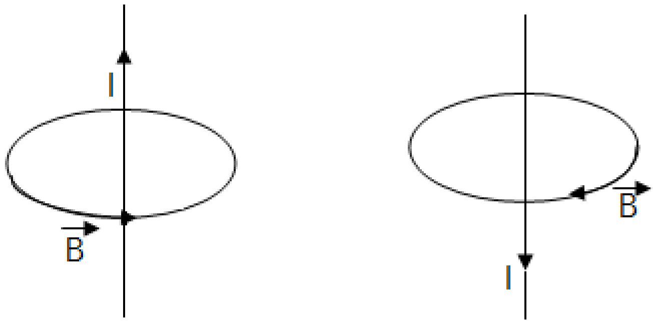
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}}$$

11.4. Campo magnético criado por um condutor rectilíneo de comprimento infinito, de intensidade I, num ponto à distância r do condutor

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad Lei\ de\ Biot - Savart$$

O sentido do campo magnético $\vec{B}$ criado por um condutor é dado pela regra da mão-directa. Para um condutor rectilíneo, o sentido do campo é dado pelo polegar e o do campo magnético é dado pelos restantes dedos curvos. Daqui se constrói somente as linhas de força do campo; num ponto, o campo magnético é tangente ao ponto na curva e perpendicular a distância do ponto ao condutor.

O sentido do campo magnético criado por um condutor circular é inverso ao do condutor rectilíneo.



11.5. Força magnética que actua num condutor colocado numa região onde existe um campo magnético $\vec{B}$, sendo I e l a intensidade e o comprimento do condutor

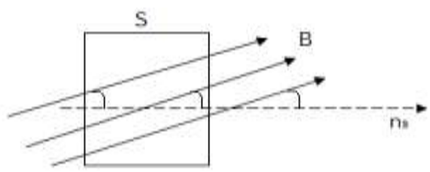
$$F_m = F_A = I \cdot l \cdot B \cdot sen(\vec{B} \wedge \vec{l}) \qquad Lei\ de\ Ampère$$

$$F_A - Força\ magnética\ que\ actua\ sobre\ o\ condutor\ ou\ força\ de\ Ampère$$

A força entre dois condutores é atractiva se as correntes tiverem o mesmo sentido e é repulsiva se as correntes tiverem sentidos opostos.

11.6. Fluxo magnético através de uma superfície

O fluxo magnético através é o número de linhas de força do campo magnético que atravessa uma superfície.



$$\phi = B \cdot S \cdot cos(\vec{B} \wedge \vec{n}_S) \qquad [\phi] = Wb\ (Webber) \qquad 1Wb = 1Tm^2$$

$\vec{n}_S - normal$ à $perpendicular$

$S - área\ da\ superfície\ atravessada\ pelas\ linhas\ de\ força\ do\ campo$

O fluxo depende de $B, S\ e\ \sphericalangle(\vec{B} \wedge \vec{n}_S)$. Se um desses valores variar, teremos uma variação do fluxo.

A variação do fluxo que atravessa um circuito limitado por uma área S origina uma fem induzida.

11.7. Fem induzida

Pela lei de Lenz temos:

$$\varepsilon_i = \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right| \qquad ou \qquad \varepsilon_i = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| \qquad [\varepsilon_i] = V\ (Volt)$$

Para $N - espiras$

$$\varepsilon_i = N \cdot \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right| \qquad ou \qquad \varepsilon_i = N \cdot \left|\frac{d\phi}{dt}\right|$$

Caso a superfície gire, ocorre uma variação do ângulo. E nesse caso $\sphericalangle(\vec{B} \wedge \vec{n}_S) = \theta$, com

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

$$\theta - deslocamento\ angular$$

$$\omega - velocidade\ ou\ frequência\ angular$$

de $\quad \phi = B \cdot S \cdot cos(\vec{B} \wedge \vec{n}_S)$

$$\phi = B \cdot S \cdot cos\theta$$

$$\phi = B \cdot S \cdot cos\omega t$$

e sendo,

$$\varepsilon_i = N \cdot \left|\frac{d\phi}{dt}\right|$$

$$\varepsilon_i = N \cdot \left|\frac{d(B \cdot S \cdot cos\omega t)}{dt}\right|$$

$$\varepsilon_i = N \cdot |-B \cdot S \cdot \omega \cdot sen\omega t|$$

$$\varepsilon_i = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot sen\omega t$$

Onde $\quad \varepsilon_{máx} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega$

11.8. Velocidade de indução do campo magnético

É a relação,

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} \quad ou \quad \frac{dB}{dt} \qquad\qquad \left[\frac{B}{t}\right] = T/s$$

11.9. Corrente induzida

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}$$

11.10. Fem de auto-indução

$$\varepsilon_a = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad ou \qquad \varepsilon_a = L \cdot \frac{dI}{\Delta t}$$

onde $L -$ é $a\ indutância \qquad [L] = H\ (Henry)$

$$L = \frac{\phi}{I}$$

Para $N - espiras$:

$$L = N \cdot \frac{\phi}{I}$$

11.11. Fem induzida num condutor móvel

$$\varepsilon = B \cdot l \cdot v$$

PROBLEMAS

11.1. Um electrão com velocidade de 2.0×10^{6} ms^{-1} penetra num campo magnético uniforme, ficando sujeito a uma força magnética de 4.2×10^{-15} N. R: 1.3×10^{-2} T

11.2. Uma partícula 6.0×10^{-4} g e carga 3.0 µC desloca-se horizontalmente com velocidade de valor 2.0×10^{2} ms^{-1}. Determine o campo magnético que equilibra o peso da partícula. R: 1.0×10^{-2} T

11.3. Um protão penetra num campo magnético uniforme com energia cinética de valor 600 keV e descreve, com velocidade constante, uma trajectória circular de raio 12 cm. Determine a força magnética que actua sobre a partícula e o campo magnético.

R: 1.6×10^{-12} N, 9.3×10^{-1} T

11.4. Entre as placas A e B (fig. abaixo) existe um campo eléctrico uniforme de valor 1.0×10^{-4} Vm. Abandona-se um electrão na placa A. O electrão entra em movimento sob a acção do campo eléctrico e penetra, através do orifício existente em B, num campo magnético uniforme de valor 2.0 T. Determine o raio de curvatura da trajectória descrita pelo electrão no campo magnético, o valor da velocidade angular do electrão e o período do movimento. R: 1.6×10^{-5} m, 3.6×10^{-11} rads^{-1}, 1.8×10^{-11} s

11.5. Iões de ^{35}Cl previamente acelerados por uma diferença de potencial de 800 V penetram num campo magnético uniforme e um espectrómetro de massa, descrevendo uma trajectória circular de raio r_1. Determine:

a) o raio descrito pelos iões ^{37}Cl, se forem acelerados pela mesma diferença de potencial em função de r_1.

b) a relação entre as diferenças de potencial a aplicar aos iões ^{37}Cl e ^{35}Cl para que descrevam trajectórias com o mesmo raio. R: a) 1.02 b) 1.06

11.6. Um electrão entra num magnético uniforme B = 4.0×10^{-1} T, perpendicular a este e com velocidade 2.0×10^{7} ms^{-1}. Determine o valor do raio da trajectória descrita pelo electrão. R: 2.8×10^{-4} m

11.7. Um protão penetra num campo magnético B = 2 T, perpendicularmente a este e com velocidade v = 1×10^{7} ms^{-1}. O protão passa a descrever um movimento circular uniforme. Determine o período do movimento e a intensidade da força magnética que actua sobre o protão. R: 3.3×10^{-8} s, 3.2×10^{-12} N

11.8. Uma partícula de massa $5.0x10^{-15}$ kg, carga 2.0 µC e E_c = 6.25 J penetra, perpendicularmente às linhas de campo, num campo uniforme de intensidade 2.5 T. Determine o raio da trajectória, o período do movimento e o valor da velocidade angular da partícula. R: $5.0x10^{-2}$ m, $6.3x10^{-9}$ s, $1.0x10^{9}$ $rads^{-1}$

11.9. Um electrão entra num campo eléctrico uniforme 300 Vm^{-1} com velocidade $3.0x10^{6}$ ms^{-1}. Determine o campo magnético necessário para que o electrão não sofra qualquer desvio. R: $1.0x10^{-4}$ T

11.10. Um electrão atravessa, sem se desviar, uma região do espaço onde existe um campo magnético e um campo eléctrico, uniformes e perpendiculares, de intensidades respectivamente $3.0x10^{-2}$ T e $1.5x10^{3}$ Vm^{-1}. Determine o valor da velocidade mínima do electrão. R: $5.0x10^{4}$ ms^{-1}

11.11. Uma partícula α é submetida a uma diferença de potencial V, entrando em seguida num campo magnético uniforme, de intensidade 0.50 T e perpendicular ao movimento, onde descreve imã trajectória circular de raio 3.2 cm. $m(\alpha) = 6.4x10^{-27}$ kg. Determine a diferença de potencial a que foi submetida.

R: $6.2x10^{3}$ V

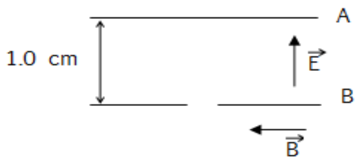
11.12. As placas A e B de um condensador plano estão distanciadas 60 cm uma da outra, sendo 200 V a diferença de potencial entre eles. Um electrão penetra no campo criado pelas placas do condensador paralelamente a estas com velocidade 500 ms^{-1}. Caracterize o campo magnético que se deve aplicar para que a partícula não sofra desvio da sua trajectória.

R: 0.7 T

11.13.Um feixe de protões com velocidade v desloca-se perpendicularmente a um campo electromagnético, sendo a intensidade do campo eléctrico $4.0x10^{5}$ Vm^{-1} e a do campo magnético $1.0x10^{-1}$ T. Calcule o valor da velocidade do feixe de protões quando o seu movimento é rectilíneo e uniforme. R: $4x10^{4}$ ms^{-1}

11.14. Um ião de massa $1.6x10^{-25}$ kg é submetido a uma diferença de potencial de 260 V, penetrando em seguida num campo magnético uniforme, perpendicular às linhas de campo, onde descreve uma trajectória de raio 5.8 cm. Determine o valor do momento linear e a intensidade do campo magnético. R: $2.1x10^{-22}$, $3.9x10^{-1}$ T

11.15. Um protão entra num campo magnético de intensidade 0.15 T, fazendo um ângulo de 30º com as linhas de campo. A intensidade da força magnética que sobre ele actua é de $3.2x10^{-14}$ N. Determine a energia cinética da partícula em eV. R: $3.7x10^{4}$ eV



11.16. Um fio de comprimento 20 cm, percorrido por uma corrente de 6.0 A, está sob a acção de uma força magnética de intensidade $2.4x10^{-1}$ N, resultante da interacção entre o fio e um campo magnético uniforme de intensidade $4.0x10^{-1}$ T. Determine o ângulo formado entre o fio e as linhas de campo. R: 30º

11.17. Dois fios condutores paralelos, de igual comprimento e à distância de 20 cm um do outro, são percorridos correntes de intensidade iguais a 2.0 A e com o mesmo sentido. Caracterize a força magnética por unidade de comprimento a que estão sujeitos os fios. R: $4.0x10^{-6}$ Nm^{-1}

11.18. Um fio condutor, de comprimento 40 cm e massa 50 g, está submetido a um campo magnético uniforme B = 4.5 T. Determine a intensidade da corrente eléctrica que percorre o fio, sabendo que o mesmo está em equilíbrio. R: 0.28 A

11.19. Um fio condutor rectilíneo, de comprimento 15 cm e massa 30 g, é percorrido por uma corrente de intensidade 1.33 A e está submetido à acção dum campo magnético. Sabendo que o mesmo está em equilíbrio, determine o campo magnético. R: 1.5 T

11.20. Um fio condutor rectilíneo de comprimento 20 cm e massa m, percorrido por uma corrente de intensidade 1.50 A, no sentido positivo do eixo dos xx, está em equilíbrio num campo magnético de intensidade 0.50 T, orientado segundo o eixo dos yy. Calcule a massa do fio.
R: 15 g

11.21. Dois condutores, rectilíneos e paralelos, à distância de 10 cm um do outro, são percorridos por correntes da mesma intensidade e sentidos opostos. A força magnética por unidade de comprimento resultante da interacção entre os condutores tem a intensidade de $4.0x10^{-5}$ N/m. Calcule:
a) a intensidade da corrente que percorre os condutores.
b) o valor do magnético no ponto médio da distância que separa os condutores.
R: a) 4.5 A b) $3.6x10^{-5}$ T

11.22. Dois condutores, A e B, rectilíneos e paralelos, percorridos por correntes do mesmo sentido e intensidades $I_A = I$ e $I_B = 3I$, estão à distância d um do outro. Determine a que distância do condutor A o campo magnético é nulo. R: 0.25d

11.23. Um fio condutor percorrido por uma corrente de intensidade 20 A, exerce uma força magnética de intensidade $4.0x10^{-4}$ N sobre um fio à distância de 10 cm e de comprimento 2.0 m, que é percorrido por uma corrente de intensidade I. Determine a intensidade I. R: 5.0 A

11.24. Dois condutores fixos, A e B, rectilíneos e paralelos de comprimento infinito, são colocados verticalmente a uma distância de 8 cm. Pelo condutor A circula uma corrente de 30 A e por B outra de 20 A, ambas para cima. Um terceiro condutor de comprimento infinito é C é colocado verticalmente entre A e B, à 3 cm de A, sendo que por ele circula uma corrente de 10 A de intensidade para baixo. Determine a força que age em cada 25 cm de comprimento do condutor B. R: 0.3 mN

11.25. Que fluxo magnético atravessa um plano de área de 50 cm^2 que se encontra num campo magnético uniforme de indução de 0.4 T se o plano está situado:

a) perpendicularmente às linhas de indução?

b) sob o ângulo de 30º relativamente às linhas de indução?

R: a) 2 mWb b) 1 mWb

11.26. O fluxo magnético através de uma superfície de uma espira de 60 cm^2 é igual a 0.3 mWb. Qual a indução do campo magnético se ele for uniforme? R: 0.05 T

11.27. Determine a velocidade de variação do fluxo magnético num solenóide com 2000 espiras nele se excita fem de 120 V. R: 0.06 Wb/s

11.28. A indução magnética numa bobina de área de secção transversal de 50 cm^2 varia de 0.2 T a 0.3 T durante 4 ms. Quantas espiras deve ter a bobina para que nela excitar fem de indução de 10 V.
R: 80

11.30. Que carga passará através da secção transversal de uma espira com resistência eléctrica de 0.03 Ω se o fluxo magnético se diminuir de 12 mWb? R: $4x10^{-1}$ C

11.31. Numa espira feita de um fio de alumínio (a resistência especifica é de $2.8x10^{-8}$ Ωm) de comprimento de 10 cm e área de secção transversal de 1.4 mm^2. A velocidade de variação do fluxo é igual a 10 mWb/s. Qual a intensidade de corrente induzida na espira? R: 5 A

11.32. Achar a fem de indução electromagnética num condutor de comprimento de 0.25 m que se desloca com a velocidade de 5 m/s sob o ângulo de 30º em relação às linhas de indução do campo magnético de 8 mT. R: 5mV

11.33. Num fio a variação uniforme de intensidade de corrente eléctrica de 2 A durante 0.25 s excita fem de auto-indução de 20 mV. Determine a indutância desse condutor. R: 2.5 mH

11.34. Numa bobina de indutância de 0.6 H a intensidade de corrente é igual a 20 A. a) qual a energia do campo magnético da bobina? b) como varia a energia do campo magnético se a intensidade diminuir duas vezes? R: a) 120 J b) 1/4

11.35. Um solenóide é percorrido pela corrente de intensidade de 10 A que provoca o aparecimento do fluxo magnético de 0.5 Wb. Determine a energia do campo magnético do solenóide.
R: 2.5 J

11.36. Durante a variação de intensidade de corrente eléctrica num electroíman de 4 A e 6 A a energia do campo magnético aumentou-se em 1 J. Determine a indutância do electroíman.
R: 0.1 H

11.37. Uma barra de cobre de 30 cm de comprimento é perpendicular a um campo magnético cuja indução é de 0.8 T e se move perpendicularmente a ele com uma velocidade de 50 m/s. Achar a fem induzida na barra. R: 0.12 V

11.38. Achar o coeficiente de auto-indução de uma bobina sabendo-se que quando a corrente que por ela circula varia na razão de 32 A/s. A fem induzida é de 8 V. R: 0.25 H

CAPÍTULO 12. ÓPTICA

É a parte da física que estuda a natureza da luz, as leis de propagação da luz e, as leis de interacção da luz coma matéria.

12.1. Reflexão da luz

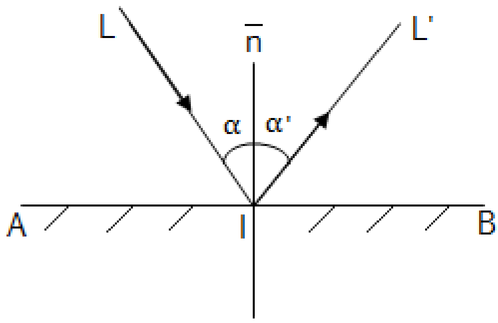
É o fenómeno que consiste no retorno da luz ao meio de incidência.

12.1.1. Leis da reflexão

As leis da reflexão são:

1- O raio incidente, o reflectido e a normal no ponto de incidência estão no mesmo plano.

2- O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão: $\alpha = \alpha'$.



$AB - supefície\ reflectora\ (espelho\ plano)$

$LI - raio\ incidente$

$L'I - raio\ reflectido$

$I - ponto\ de\ incidência$

$\overline{n} - normal\ no\ ponto\ de\ incidência$

$\alpha - ângulo\ de\ incidência$

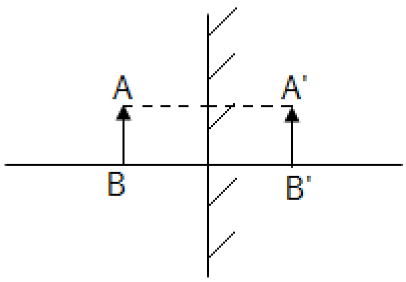
$\alpha' - ângulo\ de\ reflexão$

Ângulo de incidência: é o ângulo entre o raio incidente e a normal no ponto de incidência.

Ângulo de reflexão: é o ângulo entre o raio reflectido e a normal no ponto de incidência.

12.1.2. Espelhos

a) Espelhos planos

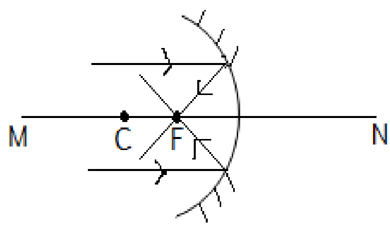


$R = \infty$

$d = -d'$

b) Espelhos esféricos

- Espelho côncavo



Características: Produzem uma imagem real ou virtual. Produzem uma imagem direita ou invertida. Produzem uma imagem maior, igual ou menor que o objecto. A imagem real é sempre invertida e menor, igual ou maior que o objecto. A imagem virtual é sempre direita e de maior tamanho que o objecto.

$C - centro\ de\ curvatura$

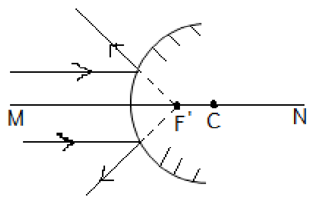
$F - foco\ principal\ do\ espelho$

$MN - eixo\ principal\ do\ espelho$

Foco: ponto no qual passam os raios reflectidos cujos incidentes são paralelos ao eixo óptico.

- Espelho convexo

Características: Produzem sempre imagem virtual, dirita e de menor tamanho que o objecto.



$F' - foco\ virtual\ do\ espelho$

12.1.2.1. Equação fundamental dos espelhos

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{R}{2}$$

$d - distância\ do\ objecto\ ao\ espelho$

$d' - distância\ da\ imagem\ ao\ espelho$

$f - distância\ focal\ espelho$

$R - raio\ de\ curvatura\ do\ espelho$

$Se\ o\ espelho\ for\ plano, R = \infty \Rightarrow f = \infty \Rightarrow d = -d'$

$Se\ o\ espelho\ for\ côncavo, R > 0\ \Rightarrow f > 0$

$Se\ o\ espelho\ for\ convexo, R < 0 \Rightarrow f < 0$

$Se\ o\ objecto\ é\ real, d > 0. Se\ o\ objecto\ é\ virtual, d < 0$

$Se\ a\ imgem\ é\ real, d' > 0. Se\ a\ imagem\ é\ virtual, d' < 0$

12.1.2.2. Equação da ampliação ou aumento linear

$$\frac{h'}{h} = -\frac{d'}{d}$$

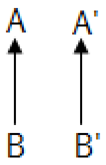
$h - tamanho\ ou\ altura\ do\ objecto$

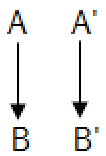
$h' - tamanho\ ou\ altura\ da\ imagem$

$Se\ h' > 0, imagem\ \text{é}\ direita$

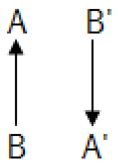
$Se\ h' < 0, imagem\ \text{é}\ invertida$

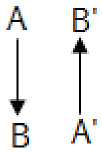
A imagem é direita quando tem o mesmo sentido do objecto.





A imagem é invertida quando tem sentido contrário (oposto) ao do objecto.





Relação de h' e h:

Se a imagem é direita, $\frac{h\prime}{h} > 0$

Se a imagem é invertida, $\frac{h\prime}{h} < 0$

Se a imagem tem maior tamanho que o objecto, $\left|\frac{h\prime}{h}\right| > 1$

Se a imagem tem menor tamanho que o objecto, $\left|\frac{h\prime}{h}\right| < 1$

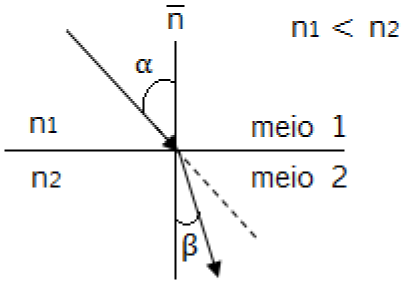
12.2. Refracção da luz

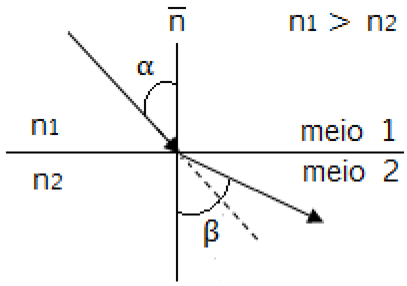
É o fen´meno que consiste na passagem da luz de um meio para outro, sofrendo um desvio.

Na passagem da luz de um meio para outro temos que:

- Um meio mais denso (com maior índice de refracção) aproxima o raio da normal.

- Um meio menos denso (com menor índice de refracção) afasta o raio da normal.





$\alpha - \hat{a}ngulo\ de\ incid\hat{e}ncia$

$\beta - \hat{a}ngulo\ de\ refrac\c{c}\tilde{a}o$

$n_1 - \acute{\imath}ndice\ de\ refrac\c{c}\tilde{a}o\ do\ primeiro\ meio\ ou\ \ meio\ incidente$

$n_2 - \acute{\imath}ndice\ de\ refrac\c{c}\tilde{a}o\ do\ segundo\ meio\ ou\ meio\ incidente$

12.2.1. Índice de refracção

a) Índice de refracção absoluto de um meio

É a relação entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz nesse meio.

$$n = \frac{c}{v} \qquad\qquad c = 3 \cdot 10^8\ m/s$$

$n_{ar} = 1$

$n_{\acute{a}gua} = \dfrac{4}{3} = 1.33$

$n_{vidro} = \dfrac{3}{2} = 1.5$

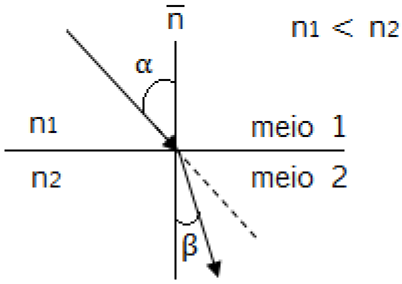
b) Índice de refracção relativo

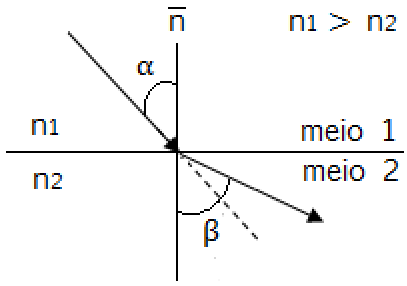
É a relação entre o índice de refracção absoluto do meio mais denso (mais refrangente) com o meio menos denso (menos refrangente).

$$n_{21} = \frac{n_1}{n_2}$$

$n_{21} - \acute{e}\ o\ \acute{\imath}ndice\ de\ refrac\c{c}\tilde{a}o\ do\ meio\ 2\ em\ rela\c{c}\tilde{a}o\ ao\ meio\ 1$

12.2.2. Lei de Snell (lei da refracção)





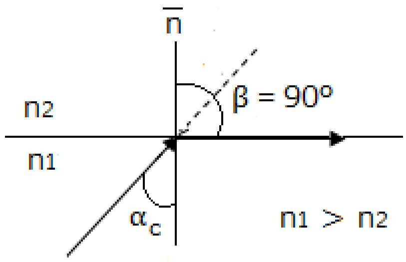
$n_1 \cdot sen\alpha = n_2 \cdot sen\beta$ *ou* $n_1 \cdot v_1 = n_2 \cdot v_2$ *Lei de Snell*

$v_1 - velocidade\ da\ luz\ no\ meio\ (1)$

$v_2 - velocidade\ da\ luz\ no\ meio\ (2)$

12.2.3. Ângulo crítico ou limite

É o ângulo de incidência para o qual o de refracção é igual a 90º.



$$\alpha_c = arcsen\left(\frac{n_{meio\ menos\ refrangente\ (x)}}{n_{meio\ mais\ refrangente\ (y)}}\right)$$

$\alpha_c - índice\ de\ refracção\ do\ meio\ (y)\ em\ relação\ ao\ meio\ (x)$

Caso o meio menos refrangente seja o ar, teremos:

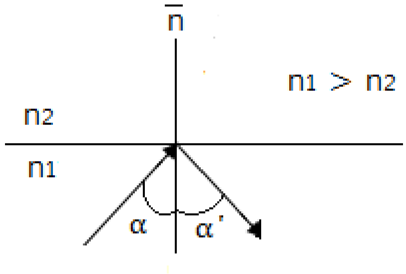
$n_{meio\ menos\ refrangente\ (x)} = 1$ $\quad e \quad$ $n_{meio\ mais\ refrangente\ (y)} = n$

$$\alpha_c = arcsen\left(\frac{1}{n}\right)$$

Nesse caso, n é o índice de refracção do meio y.

12.2.4. Fenómeno de reflexão total interna (fenómeno de reflexão total)

Se o ângulo de incidência for maior que o ângulo crítico, dá-se o fenómeno de reflexão total interna (o raio não sai); mas, para tal, é condição necessária e suficiente que a incidência se faça do meio mais denso para o menos denso.



Desse modo, na reflexão total temos que:

$$\alpha > \alpha_c$$

Aplicando seno a cada membro,

$$sen\alpha > sen\alpha_c$$

Da expressão de cálculo do ângulo crítico,

$$\alpha_c = arcsen\left(\frac{n_{meio\ menos\ refrangente\ (x)}}{n_{meio\ mais\ refrangente\ (y)}}\right)$$

Substituíndo, teremos:

$$sen\alpha > sen\left[arcsen\left(\frac{n_{meio\ menos\ refrangente\ (x)}}{n_{meio\ mais\ refrangente\ (y)}}\right)\right]$$

$$sen\alpha > \frac{n_{meio\ menos\ refrangente\ (x)}}{n_{meio\ mais\ refrangente\ (y)}}$$

12.3. Lentes delgadas

a) Equação das lentes

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$$

$d - distância\ do\ objecto$ à $lente$

$d' - distância\ da\ imagem$ à $lente$

$f - distância\ focal\ da\ lente$

$Se\ a\ lente\ for\ convergente, f > 0$

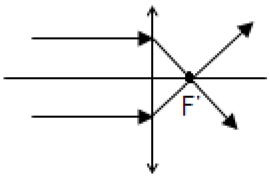
$Se\ a\ lente\ for\ divergente, f < 0$

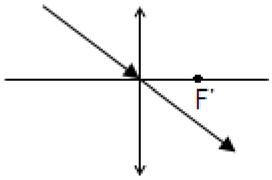
b) Poder óptico ou vergência ou dioptria da lente (D)

$$D = \frac{1}{f} \qquad [D] = dp\ (dioptria) \qquad 1dp = m^{-1}$$

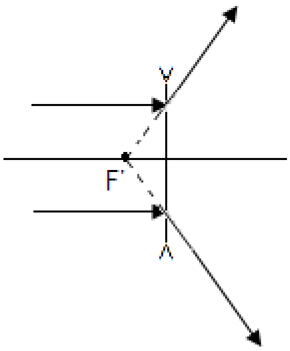
c) Lentes convergentes e divergentes

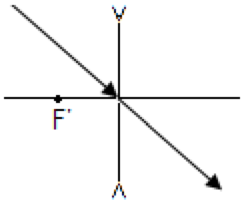
- Lentes convergentes





- Lentes divergentes





12.4. Energia radiante

$$E = h \cdot \nu \qquad [E] = J\ ou\ eV \qquad 1eV = 1.6 \cdot 10^{-19}\ J$$

$h -$ *constante de Planck.* $\qquad h = 6.63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$

$\nu -$ *frequência da radiação emitida*

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad [\nu] = Hz = s^{-1}$$

$\lambda -$ *comprimento de onda.* $\qquad [\lambda] = m$

PROBLEMAS

12.1. Um espelho esférico côncavo tem um raio de curvatura de 1.5 m. Determinar a posição e altura da imagem dum objecto real de 10 cm de altura situado a uma distancia de 1m do espelho.
R: d´´ = 3 m (imagem real), h´ = -30 cm (maior que o objecto) e invertida.

12.2. Um objecto de 6 cm de altura está situado a uma distância 30 cm de um espelho esférico convexo de 40 cm de raio. Determinar a natureza da imagem. R: d´´ = -12 cm (imagem virtual), h´´ = 2.4 cm (menor que o objecto) e direita.

12.3. Determinar a posição de um objecto, com referência a um espelho côncavo de 180 cm de raio, sabendo-se que este proporciona uma imagem real cujo tamanho é igual à metade do tamanho do objecto. R: 270 cm

12.4. Determinar a posição de um objecto, com referência a um espelho côncavo de 120 cm de raio, sabendo-se que este proporciona uma imagem direita e de tamanho 4 vezes superior ao do objecto.
R: 45 cm

12.5. Determinar a imagem obtida num espelho côncavo, de 60 cm de raio, dum objecto situado a distância de 20 cm do espelho. R: virtual, direita, d´´ = -60 cm, 3 vezes maior que o objecto.

12.6. Calcular a distancia a que se deve colocar, de um objecto, um espelho côncavo de 36 cm de raio para que a imagem seja real e 9 vezes menor que o objecto. R: 180 cm

12.7. Determinar a imagem de um objecto de 7 cm de altura colocado 15 cm diante de um espelho convexo de 45 cm de raio. R: virtual, direita, d´´ = -9 cm, 4.2 cm de altura.

12.8. Achar a distância focal de um espelho convexo sabendo-se que a imagem obtida de um objecto situado a 30 cm do espelho é 6 vezes menor. R: -6 cm

12.9. A velocidade da luz na água é 75% da correspondente no ar. Calcular o índice de refracção da água.

R: 3/4 ou 1.33

12.10. A velocidade da luz no ar é de $3x10^8$ m/s. Calcular a velocidade da luz num vidro de índice de refracção 1.5. R: $2x10^8$ m/s

12.11. Um raio luminoso incide sobre a fronteira de dois meios com o ângulo de incidência de 30º. O índice de refracção do primeiro meio é igual a 2.4. Determine o índice de refracção do segundo meio se é conhecido que os raios reflectidos e refractados são perpendiculares.
R: 1.39

12.12. Um raio luminoso incide sobre a superfície dum bloco de vidro com um ângulo de incidência de 50º. Calcular as direcções dos raios reflectido e refractado. O índice de refracção do vidro é 1.50.
R: 50º (reflectido), 30.7º (refratado)

12.13. O índice de refracção do diamante é 2.42. Calcular o ângulo critico ao passar a luz do diamante ao ar.
R: 24.4º

12.14. O ângulo limite na passagem da luz, de uma rocha salina à agua, é de 40.5º. Calcular o índice de refracção da rocha salina. R: 1.54

12.15. Os índices de refracção do diamante e do vidro “crown” são respectivamente, 5/2 e 3/2. Calcular o índice de refracção do diamante com relação ao vidro e o ângulo critico entre o diamante e o vidro.

R: 5/3, 37º

12.16. Um pescador vê um objecto num lago. O objecto encontra-se a 2.8 m de profundidade da superfície livre da água. Sabe-se que o índice de refracção absoluto do ar é igual a 1 e o da água 4/3. Determine:

a) a profundidade aparente em que o pescador vê o objecto;

b) a elevação aparente do objecto.

R: a) 0.7 m b) 2.1 m

12.17. Um objecto de 4 cm de altura esta situado 20 cm diante de uma lente delgada convergente de distancia focal 12 cm. Determinar a natureza da imagem.

R: real, invertida e de menor tamanho que o objecto. d´´´ = 30 cm, h´´ = -6 cm

12.18. Um objecto esta situado 10 cm diante de uma lente convergente de 15 cm de distância focal. Determinar a posição da imagem e a ampliação.

R: d´´ = -30 cm, k = 3

12.19. Determinar a posição e o tamanho da imagem dada por uma lente divergente de distancia focal –18 cm de um objecto de 9 cm de altura situado a uma distancia da lente de 27 cm.

R: d´´ = -10.8 cm , h´´ = 3.6 cm

12.20. Calcular a posição e a distância focal de uma lente convergente para que a imagem dum objecto se projecte sobre uma tela situada a 5 m do mesmo, com um tamanho 4 vezes superior ao do objecto.

R: a lente encontra-se a 1 m do objecto e 4 m da imagem, f = 0.8 m

12.21. Um objecto luminoso se encontra a uma distância de 12.5 m de uma tela. Calcular a posição e a distância focal de uma lente para se obter uma imagem sobre a tela com um aumento de 24.

R: 0.5 m em frente do objecto, f = 0.48 cm

12.22 Um raio luminoso proveniente do meio óptico com índice de refracção $n_1 = 1.72$ incide sobre outro meio óptico com índice de refracção $n_2 = 1.40$. Calcule o ângulo de incidência do raio luminoso que corresponde a reflexão interna total. R: 55º

12.23. Dada uma lente delgada de distancia focal f = 30 cm e de eixo principal FOF´´ . Um objecto real AB é colocado perpendicularmente ao eixo principal a uma distância OA = 50 cm da lente. A partir da construção da imagem no desenho, determina as características da imagem.

R: Real, invertida, aumentada.

12.24. Numa lente divergente delgada de distância focal -26.7 cm foi colocado um objecto real AB de tamanho 9 cm a distância de 20 cm da lente na direcção perpendicular ao seu eixo principal. Ache o tamanho da imagem formado por esta lente. R: 5.1 cm

12.25. Dada uma lente convergente delgada de distância focal 25 cm. A qual distancia da lente é que se deve colocar o objecto real AB sobre e na direcção perpendicular ao eixo principal da lente para que a sua imagem A´´B´´ seja também real e tenha o mesmo tamanho que o objecto. R: 50 cm

12.26. Dada uma lente convergente delgada de distância focal f = 60 cm. Um objecto real AB pode deslocar-se ao longo do eixo principal da lente mantendo-se sempre perpendicular a este eixo. A qual distancia da lente é que se deve colocar o objecto para que a sua imagem A´´B´´ seja também real e de tamanho igual à metade do objecto? R: 90 cm

12.27. Considere uma lente convergente delgada de distância focal f = 12 cm e um objecto real AB colocado a uma distância da lente em direcção perpendicular ao seu eixo principal. Ache o valor desta distancia para que a sua imagem seja virtual, do mesmo sentido que o objecto e de tamanho igual ao dobro do objecto. R: 6 cm

12.28. Dada uma lente convergente delgada de convergência D = 2.0 dp (dioptria). Um objecto real AB pequeno está colocado a uma distância de 30 cm da lente na direcção perpendicular ao seu eixo principal com a extremidade A sobre este eixo. Achar: a) a distância da imagem à lente; b) diga se esta imagem é real ou virtual. R: a) 0.5 cm b) real

12.29. Considere uma lente divergente de distância focal f e um objecto real AB colocado a uma distância de 20 cm da lente, em direcção perpendicular ao seu eixo principal. Ache o valor desta distância focal sabendo que a imagem dada pela lente é de tamanho igual a um quarto do objecto.

R: 6.67 cm

APÊNDICE

ALGUMAS CONSTANTES FÍSICAS

Quantidade	*Símbolo*	*Valor*
Aceleração da gravidade (valor médio na terra)	g	$9.8\ m/s^2$
Atmosfera	$1atm$	$1.013 \times 10^5\ Pa$
Carga elementar	e	$1.602 \times 10^{-19} C$
Carga protão	q_p	$6.37 \times 10^6\ m$
Constante de Boltzmann	$k\ ou\ k_B$	$1.38 \times 10^{-23}\ J/K$
Constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34}\ J \cdot s$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \times 10^{-8}\ J/K^4\ \cdot m^2 \cdot s$
Constante dos gases	R	$8.31\ J/mol \cdot K$
Electrón-volt	$1eV$	$1.602 \times 10^{-19}\ J$
Distância média terra-sol	d_{TS}	$15 \times 10^{10}\ m$
Massa da terra	M_T	$5.98 \times 10^{27}\ kg$
Massa do Electrão	m_e	$9.11 \times 10^{-31}\ kg$
Massa do Protão	m_P	$1.67 \times 10^{-27}\ kg$
Número de Avogadro	N_A	$6.02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$
Permeabilidade magnética no vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ H/m$
Permitividade eléctrica no vácuo	ε_0	$8.85 \times 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2$
Unidade de massa atómica	$u.m.a$	$1.66 \times 10^{-27}\ kg$
Velocidade da luz no vácuo	c	$3 \times 10^8\ m/s$