ACADEMIA CLÍNICA DO SABER – VESTIBULANDO

RESOLUÇÃO DOS TESTES DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO FACULDADE DE ENGENHARIA 2008 Á 2019

O SABER NÃO OCUPA LUGAR

A REPETIÇÃO É A MÃE DAS CIENCIAS

UM GUIA DE PREPARAÇÃO

Pedro Rafael Afonso

QUEM SOMOS / NOSSA MISSÃO

ACADEMIA CLÍNICA DO SABER é um centro de Preparatório que tem como missão oferecer orientações, habilidades e conhecimentos que permitem que nossos estudantes superem os desafios e melhorarem o seu desempenho em uma academia cada vez mais desafiador.

Alguns dos serviços oferecido pela **ACADEMIA CLÍNICA DO SABER:**

- **EXPLICAÇÃO:** Orientação com qualidade para diversos cursos, tanto do Ensino Médio como Superior.

- **PREPARATÓRIO:** Preparação com qualidade para admissão em diversas universidades e cursos.

Temos Professores de qualidade e capacitados para leccionar. Professores Licenciado em diversas áreas.

PREFÁCIO

PARA O ESTUDANTE,

O propósito deste manual é de ajudar os estudantes na resolução dos exercícios dos testes de matemática na área de engenharias. Portanto, recomendamos a utilizar o seu maior tempo em resolver os exercícios.

Quando se resolve um exercício, se aprende muito mais do que só se lê a resolução. É bem sabido que, a prática leva a perfeição. Onde verdadeira aprendizagem requer uma participação activa de sua parte.

Utilize este manual como incentivo para resolver problemas, não como uma forma de evitar a sua resolução.

As suas críticas, sugestão ou dificuldades que tenha encontrado na hora da resolução, pedimos que entre em contacto connosco urgentemente, afim de aperfeiçoamento do manual e suas ideias são fundamentais para o nosso trabalho.

Contactos: 938-979-070 / 940-553-898
E-mail: **academia.clinicadosaber@gmail.com**

1) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:
$2(1 - sen^2\alpha\ cos^2\alpha)^2 - sen^8\alpha - cos^8\alpha$

Resp: $A)\ 2\ \ B)\ 0\ \ C)\ 2\ sen^2\alpha\ \ D)\ \frac{1}{2}\ cos^2\alpha\ \ E)\ 1\ \ F)\ sen^2\alpha\ \ cos^2\alpha$

$G)\ cos2\alpha\ \ H)\ outro$

Resolução:

$$2(1 - sen^2\alpha\ cos^2\alpha)^2 - (sen^8\alpha + cos^8\alpha)$$

Aplicando a transformação: $a^8 + b^8 = (a^4 + b^4)^2 - 2a^4b^4$ na segunda expressão, fica:

$$sen^8\alpha + cos^8\alpha = (sen^4\alpha + cos^4\alpha)^2 - 2sen^4\alpha\ cos^4\alpha$$

Aplicando novamente a transformação: $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2\ ;fica$:

$sen^4\alpha + cos^4\alpha = (sen^2\alpha + cos^2\alpha)^2 - 2sen^2\alpha\ cos^2\alpha$, Substituindo fica:

$sen^8\alpha + cos^8\alpha = [(sen^2\alpha + cos^2\alpha)^2 - 2sen^2\alpha\ cos^2\alpha]^2 - 2sen^4\alpha\ cos^4\alpha$

Obs.: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$sen^8\alpha + cos^8\alpha = [1 - 2sen^2\alpha\ cos^2\alpha]^2 - 2sen^4\alpha\ cos^4\alpha$,Voltando na expressão inicial, vem:

$2(1 - sen^2\alpha\ cos^2\alpha)^2 -\ ([1 - 2sen^2\alpha\ cos^2\alpha]^2 - 2sen^4\alpha\ cos^4\alpha)$

Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$2(1 - 2sen^2\alpha\ cos^2\alpha + sen^4\alpha\ cos^4\alpha) - ((1 - 4sen^2\alpha\ cos^2\alpha + 4sen^4\alpha\ cos^4\alpha) - 2sen^4\alpha\ cos^4\alpha)$

Eliminando os parênteses:

$2 - \cancel{4sen^2\alpha\ cos^2\alpha} + \cancel{2sen^4\alpha\ cos^4\alpha} - 1 + \cancel{4sen^2\alpha\ cos^2\alpha} - \cancel{4sen^4\alpha\ cos^4\alpha} + \cancel{2sen^4\alpha\ cos^4\alpha}$

Reduzindo os termos semelhantes:

=1 Resposta: 1 , Línea E

2) (Exame 2019/2008) simplifique a expressão:

$(1 + sen\alpha + cos\alpha)(1 - sen\alpha + cos\alpha)(1 + sen\alpha - cos\alpha)(sen\alpha + cos\alpha - 1)$

Resp: $A)\ sen^2 2\alpha\ \ B)\ 1\ \ C)\ 0\ \ D)\ cos^2 2\alpha\ \ E)\ \frac{1}{2}\ cos^2\alpha\ \ F)\ 2\ cos^2\alpha\ \ G)\ sen\alpha\ cos\alpha$

$H)\ outro$

Resolução:

$[(1 + sen\alpha + cos\alpha)(sen\alpha + cos\alpha - 1)][(1 - sen\alpha + cos\alpha)(1 + sen\alpha - cos\alpha)]$

Multiplicando termo à termos os dois produtos em parentes rectos fica:

$(sen\alpha + cos\alpha - 1 + sen^2\alpha + sen\alpha\, cos\alpha - sen\alpha + sen\alpha\, cos\alpha + cos^2\alpha - cos\alpha) \times$

$(1 + sen\alpha - cos\alpha - sen\alpha - sen^2\alpha + sen\alpha\, cos\alpha + cos\alpha + sen\alpha\, cos\alpha - cos^2\alpha)$

Reduzindo os termos semelhantes, fica:

$(2sen\alpha\, cos\alpha + sen^2\alpha + cos^2\alpha - 1)(2sen\alpha\, cos\alpha - sen^2\alpha - cos^2\alpha + 1)$

$[2sen\alpha\, cos\alpha + (sen^2\alpha + cos^2\alpha) - 1][2sen\alpha\, cos\alpha - (sen^2\alpha + cos^2\alpha) + 1]$

Obs.: $(sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$(2sen\alpha\, cos\alpha + \cancel{1} - \cancel{1})(2sen\alpha\, cos\alpha - \cancel{1} + \cancel{1})$

$(2sen\alpha\, cos\alpha)(2sen\alpha\, cos\alpha\,)$; $\quad obs: 2sen\alpha\, cos\alpha = sen2\alpha$

$(sen2\alpha)(sen2\alpha) = \ sen^2 2\alpha$, Línea A)

3) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão: $\frac{1-sen^6\alpha\, -\, cos^6\alpha}{1-sen^4-cos^4\alpha}$

Resp: $A)\ tg^2\alpha \quad B)\ 1 \quad C)\ \frac{1}{2} \quad D)\ \frac{3}{2} \quad E)\ sen^2\alpha \quad F)\ 2sec^2\alpha \quad G)\ sen^2 2\alpha \quad H)\ outro$

Resolução:

$\frac{1-(sen^6\alpha + cos^6\alpha)}{1-(sen^4+cos^4\alpha)}$

Aplicando as transformações:

$a^6 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 - 2a^3b^3 \ \ e \qquad a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$

$sen^6\alpha + \ cos^6\alpha = (sen^3\alpha + cos^3\alpha)^2 - 2sen^3\alpha\, cos^3\alpha$

Sabe-se que: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, então:

$sen^3\alpha + cos^3\alpha = (sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha\, cos\alpha + cos^2\alpha)$

$sen^6\alpha + \ cos^6\alpha = [(sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha\, cos\alpha + cos^2\alpha)]^2 - 2sen^3\alpha\, cos^3\alpha$

$sen^6\alpha + \ cos^6\alpha = [(sen\alpha + cos\alpha)(1 - sen\alpha\, cos\alpha)]^2 - 2sen^3\alpha\, cos^3\alpha$

$sen^6\alpha + \ cos^6\alpha = (sen\alpha + cos\alpha)^2(1 - sen\alpha\, cos\alpha\,)^2 - 2sen^3\alpha\, cos^3\alpha$

Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$= (1 + 2sen\alpha\, cos\alpha)(1 - 2sen\alpha\, cos\alpha + sen^2\alpha\, cos^2\alpha) - 2sen^3\alpha\, cos^3\alpha$.

Desenvolvendo o producto em parenteses:

$= 1 - 2\cancel{sen\alpha} \cdot cos\alpha + sen^2\alpha\, cos^2\alpha + 2\cancel{sen\alpha} \cdot cos\alpha - 4sen^2\alpha\, cos^2\alpha +$
$2sen^3\cancel{\alpha\, cos^3}\alpha - 2\cancel{sen^3}\alpha\, cos^3\alpha$

Reduzindo os termos semelhante:

$sen^6\alpha + \ cos^6\alpha = 1 - 3sen^2\alpha\, cos^2\alpha$

$sen^4\alpha + cos^4\alpha = (sen^2\alpha + cos^2\alpha)^2 - 2sen^2\alpha\, cos^2\alpha$

Obs.: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; $sen^4\alpha + cos^4\alpha = 1 - 2sen^2\alpha\, cos^2\alpha$

Voltando na expressão inicial, temos:

$\frac{1-(1-3sen^2\alpha\, cos^2\alpha\ )}{1-(1-2sen^2\alpha\, cos^2\alpha\,)}$, Eliminando os parênteses fica:

$\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+3sen^2\alpha\, cos^2\alpha}{1-1+2sen^2\alpha\, cos^2\alpha} = \frac{3\cancel{sen^2\alpha\, cos^2}\alpha}{2\cancel{sen^2\alpha\, cos^2}\alpha} = \frac{3}{2}$, Línea D)

4) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão: $sen3\alpha\, sen^3\alpha + cos3\alpha\, cos^3\alpha$

Resp:

$A)\ cos^3 2\alpha$ $B)\ 1$ $C)\ 0$ $D)\ \frac{1}{2}\, sen^3 2\alpha$ $E) cos^2\alpha$ $F)\ 2sen^2\alpha$ $G)\ sen\alpha\, cos\alpha$ $H)\ outro$

Resolução:

sabe-se que: $sen3\alpha = 3sen\alpha - 4sen^3\alpha$ e $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$

$(3sen\alpha - 4sen^3\alpha)sen^3\alpha + (4cos^3\alpha - 3cos\alpha)cos^3\alpha$ eliminando os parenteses, vem:

$3sen^4\alpha - 4sen^6\alpha + 4cos^6\alpha - 3cos^4\alpha \rightarrow$ Agrupando

$(3sen^4\alpha - 3cos^4\alpha) + (-4sen^6\alpha + 4cos^6\alpha)$ factorizando os termos comuns, vem:

$3(sen^4\alpha - cos^4\alpha) - 4(sen^6\alpha - cos^6\alpha)$

Sabe-se que: $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)\ e\ a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$

$3(sen^2\alpha + cos^2\alpha)(sen^2\alpha - cos^2\alpha) - 4(sen^3\alpha - cos^3\alpha)(sen^3\alpha + cos^3\alpha)$

Note que: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$3(sen^2\alpha - cos^2\alpha) - 4(sen\alpha - cos\alpha)(sen^2\alpha + sen\alpha\, cos\alpha + cos^2\alpha)(sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha\, cos\alpha + cos^2\alpha)$

$3(sen^2\alpha - cos^2\alpha) - 4[(sen\alpha - cos\alpha)(sen\alpha + cos\alpha)] \times [(sen^2\alpha + cos^2\alpha + sen\alpha\, cos\alpha)(sen^2\alpha + cos^2\alpha - sen\alpha\, cos\alpha]$

$3(sen^2\alpha - cos^2\alpha) - 4(sen^2\alpha - cos^2\alpha)[(1 + sen\alpha\, cos\alpha\ )(1 - sen\alpha\, cos\alpha)]$

$3(sen^2\alpha - cos^2\alpha) - 4(sen^2\alpha - cos^2\alpha)(1 - sen^2\alpha\, cos^2\alpha)$

Factorizando a expressão $(sen^2\alpha - cos^2\alpha)$, temos:

$(sen^2\alpha - cos^2\alpha)[3 - 4(1 - sen^2\alpha\, cos^2\alpha)] \rightarrow$

$(sen^2\alpha - cos^2\alpha)(3 - 4 + 4sen^2\alpha\, cos^2\alpha)$ factorizando os sinais , temos:

$(sen^2\alpha - cos^2\alpha)(-1 + 2^2(sen\alpha\, cos\alpha)^2\ ) \rightarrow$

$[-(cos^2\alpha - sen^2\alpha)][-(1 - (2sen\alpha\, cos\alpha)^2)]$

$(cos^2\alpha - sen^2\alpha)[-(1-(2sen\alpha\ cos\alpha)^2)]$,

Note: $cos^2\alpha - sen^2\alpha = cos2\alpha \ \ e\ sen2\alpha = 2sen\alpha\ cos\alpha$

$cos2\alpha(1-sen^2 2\alpha)\ \ , sabe - se\ que:\ 1 - sen^2 2\alpha = cos^2 2\alpha$

$cos2\alpha \times cos^2 2\alpha = cos^3 2\alpha$, Línea A)

5) (Exame 2019/2008). Simplifique a expressão:

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}+\sqrt[4]{x}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}}{x-\sqrt{x^3}}$$

$Resp$: $A)\ \sqrt{x}\quad B)\ 1\quad C)\ \frac{1}{1+\sqrt{x}}\quad D)\ \frac{1}{x}\quad E)\ \sqrt[4]{x}-1$

F) $\frac{x}{\sqrt{x}-1}\quad G)\ \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\quad H)\ outro$

Resolução: $Igualando\ os\ índices\ de\ todos\ os\ radicais\ com\ denominador\ 4, vem$:

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}+\sqrt[4]{x}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt[4]{x^2}\right)}}{\sqrt[4]{x^4}-\sqrt[4]{x^6}}$$ Fazendo: $\sqrt[4]{x} = t$, Temos:

$$= \frac{\sqrt{\frac{t^3-1}{t-1}+t\left(\frac{t^3+1}{t+1}-t^2\right)}}{t^4-t^6} = \frac{\sqrt{\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}+t\left[\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}-t^2\right]}}{t^4(1-t^2)} = \frac{\sqrt{t^2+t+1+t\,(\cancel{t^2}-t+1-\cancel{t^2})}}{t^4(1-t^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{t^2+2t+1}\ (-t+1)}{t^4(1-t^2)} = -\frac{\sqrt{(t+1)^2}\ (t-1)}{-t^4(t^2-1)} = \frac{(t+1)(t-1)}{t^4(t^2-1)} = \frac{\cancel{(t^2-1)}}{t^4\cancel{(t^2-1)}} = \frac{1}{t^4}$$

Voltando, temos: $\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^{\cancel{4}}} = \frac{1}{x}$. Resposta: $\frac{1}{x}$, Línea D)

6) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$\sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}+\sqrt{3ab}} - \sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}-\sqrt{3ab}} \qquad \forall\ 3b > a^3 > 0$$

Resp: $A)\ \frac{\sqrt{6a\,b}}{a}\quad B)\ \sqrt{2}\,a\quad C)\ \frac{\sqrt{6a\,b}}{b}\quad D)\ \frac{b}{2}\quad E)\ \frac{2a}{\sqrt{b}}\quad F)\ \frac{b}{\sqrt{2}\,a}\quad G)\ 2\sqrt{ab}$

$H)\ outro$

Resolução:

Fazendo: A = $\sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}+\sqrt{3ab}} - \sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}-\sqrt{3ab}}\ \ /\ (\ )^2$

Sabe-se que: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, Aplicando temos:

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{2a} + \sqrt{3ab} + \frac{a^3-3b}{2a} - \sqrt{3ab} - 2\sqrt{\left(\frac{a^3+3b}{2a} + \sqrt{3ab}\right)\left(\frac{a^3+3b}{2a} - \sqrt{3ab}\right)}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b+a^3+3b}{2a} - 2\sqrt{\left(\frac{a^3+3b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{3ab}\right)^2}$$

$$A^2 = \frac{2a^3+6b}{2a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6+6a^3b+9b^2}{4a^2} - 3ab\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6+6a^3+9b^2-12a^3b}{4a^2}\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6-6a^3b+9b^2}{4a^2}\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\frac{(a^3-3b)^2}{4a^2}} = \frac{a^3+3b}{a} - 2\frac{\sqrt{(a^3-3b)^2}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{a^3+3b}{a} - \frac{2(a^3-3b)}{2a} = \frac{a^3+3b}{a} - \frac{(a^3-3b)}{a}$$

$pela\ condição\ dada, 3b > a^3 > 0$, $|(a^3-3b)| = 3b - a^3$

$$A^2 = \frac{a^3+3b-(3b-a^3)}{a} = \frac{a^3+\cancel{3b}-\cancel{3b}+a^3}{a} = \frac{2a^3}{a} = 2a^2$$

$A^2 = 2a^2$, $A = \sqrt{2}\,a$. Resposta: $\sqrt{2}\,a$, Línea B)

7) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$\frac{1-\frac{1+xy}{1+\sqrt[3]{xy}}}{\sqrt{xy}\left(1-\sqrt[3]{xy}\right) - \frac{(1-xy)\left(\sqrt[3]{xy}-1\right)}{1+\sqrt{xy}}} \qquad \forall\ xy \geq 0, e\ xy \neq 1$$

$Resp$: $A)\ xy$ $B)\ 1$ $C)\ 0$ $D)\ 2\sqrt{xy}$ $E)\ 1-\sqrt{xy}$

F) $1+\sqrt[3]{xy}$ $G)\ \sqrt[3]{xy}$ $H)\ outro$

Resolução:

$$\frac{\frac{1+\sqrt[3]{xy}-(1-xy)}{1+\sqrt[3]{xy}}}{\frac{\sqrt{xy}\left(1-\sqrt[3]{xy}\right)\left(1+\sqrt{xy}\right)-(1-xy)\left(\sqrt[3]{xy}-1\right)}{1+\sqrt{xy}}} = \frac{\frac{1+\sqrt[6]{(xy)^2}-(1-xy)}{1+\sqrt[6]{(xy)^2}}}{\frac{\sqrt[6]{(xy)^3}\left(1-\sqrt[6]{(xy)^2}\right)\left(1+\sqrt[6]{(xy)^3}\right)-(1-xy)\left(\sqrt[6]{(xy)^2}-1\right)}{1+\sqrt[6]{(xy)^3}}}$$

Supondo que: $\sqrt[6]{xy} = t, xy = t^6$

$$\frac{\frac{1+t^2-(1-t^6)}{1+t^2}}{\frac{t^3(1-t^2)(1+t^3)-(1-t^6)(t^2-1)}{1+t^3}}=\frac{\frac{1+t^2-1+t^6}{1+t^2}}{\frac{t^3(1-t^2)(1+t^3)+(1-t^6)(1-t^2)}{1+t^3}}=\frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{\frac{(1-t^2)(t^3+t^6+1-t^6)}{1+t^3}}=$$

$$\frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{\frac{(1-t^2)(1+t^3)}{1+t^3}}$$

$=\frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{1-t^2}=\frac{t^2(t^4+1)}{(1+t^2)(1-t^2)}=\frac{t^2(t^4+1)}{1-t^4}$, pela condição dada: $xy\geq 0$, $|-t^4|=t^4$, temos:

$=\frac{t^2\cancel{(t^4+1)}}{\cancel{1+t^4}}=t^2$, voltando, temos:

$\sqrt[6]{xy}=t, (\sqrt[\cancel{6}]{xy})^{\cancel{2}}=\sqrt[3]{xy}$. R: $\sqrt[3]{xy}$, Línea G)

8) (Exame 2019/2008) Resolve a inequação: $\boxed{\log_2|x^2-x|<1}$

Resp: A) $]-1;1[\ \cup\ ]1;2[$ $B)\ ]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;2[$ $C)\ ]-\infty;0[\cup]1;2[$

$D)$ $]0;1[\cup]2;+\infty[$ $E)\ ]0;1[\cup]1;+\infty[$

$F)\ ]-1;0[\cup]1;2[$ $G)\ ]-\infty;-1[\cup]0;1[\cup]2;\ +\infty[$ $H)\ outro$

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular, temos:

$$|x^2-x|=\begin{Bmatrix} x^2-x\ se\ x^2-x\geq 0 \\ -(x^2-x)se\ x^2-x\ <0\end{Bmatrix}$$

A inequação é válida em dois sentidos:

$$I)\begin{Bmatrix} x^2-x\geq 0 \\ x^2-x>0 \\ \log_2 x^2-x<1\end{Bmatrix} \qquad II)\begin{Bmatrix} x^2-x<0 \\ -(x^2-x)>0\ /\times(-1) \\ \log_2-(x^2-x)<1\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x(x-1)\geq 0 \\ x(x-1)>0 \\ \log_2 x^2-x<\log_2 2\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x(x-1)<0 \\ x(x-1)<0 \\ \log_2(-x^2+x)<\log_2 2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x(x-1)\geq 0 \\ x(x-1)>0 \\ x^2-x\ <2\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x(x-1)<0 \\ x(x-1)<0 \\ -x^2+x<2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x(x-1)\geq 0 \\ x(x-1)>0 \\ x^2-x-2<0\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x(x-1)<0 \\ x(x-1)>0 \\ x^2-x+2>0\end{Bmatrix}$$

I.1) $x(x-1) \geq 0(\,inequação\ do\ 2^{º}\ grau)$

II.1) $x(x-1)\ < 0$ (Inequação Do 2º grau)

I.2, II.2 $\ x(x-1) > 0(\,inequção\ do\ 2^{º}\ grau\,)$

Aplicando a lei do anulamento do produto para achar as raízes das três inequações acimas obtemos: $(x_1 = 0\ e\ x_2 = 1)$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ **0** **1** $+\infty$
I.1) $\boldsymbol{x(x-1) \geq 0\ (a > \ 0)}$	+ O - O +
II.1) $\boldsymbol{x(x-1)\ < 0\ (a > 0)}$	+ O - O +
I.2, II.2 $\boldsymbol{x(x-1) > \ 0\ (a > 0)}$	+ O - O +

I.1) $x(x-1) \geq 0\ \rightarrow x\ \epsilon\ ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

II.1) $x(x-1)\ < 0\ \rightarrow x\ \epsilon\ ]0; 1\ [$

I.2, II.2 $\ x(x-1) > 0\ \rightarrow x\ \epsilon\ ]-\infty\ ; 0[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$

I.3) $x^2 - x - 2 < 0\ \ (\,inequação\ do\ 2^{º}\ grau\,)$

Aplicando Vieth para achas as raízes da inequação, temos:

$x_1 = 2\ e\ x_2 = -1$

x	$-\infty$ -1 2 $+\ \infty$
$x^2 - x - 2 < 0$	+ O - O +

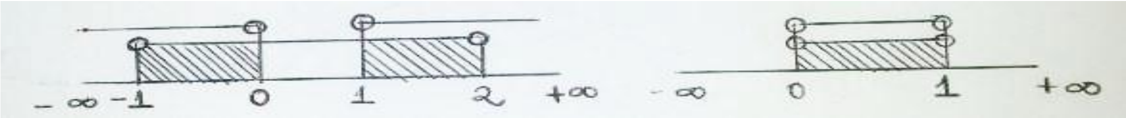
I.3) $x^2 - x - 2 < 0\ \ \ \rightarrow x\ \epsilon\ ]-1; 2\ [$

II.3) $x^2 - x + 2 > 0$ (inequação do 2º grau)

Aplicando a fórmula resolvente: $a = 1, b = -1\ , c = 2$

$\Delta = \ (-1)^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = \ -7\ \ \rightarrow\ \ \Delta < 0$, Não existe $x_1\ e\ x_2$

I) $\left\{\begin{array}{c} x \in \,]-\infty;0] \cup [1;+\infty[\\ x \in \,]-\infty\,;0[\cup \,]1;\,+\infty[\\ x \in \,]-1;2\,[\end{array}\right\}$ II) $\left\{\begin{array}{c} x \in \,]0;1\,[\\ x \in \,]0;1\,[\end{array}\right\}$



$S(I) = \,]-1;0[\cup \,]1;2[$ $S(II) = \,]0;1[$

$S = S(I) \cup S(II) = \,]-1;0[\cup \,]0;1[\cup \,]1;2[$, Línea B)

9) (Exame 2019/2008) Resolva a inequação:

$$\boxed{\log_{3x+4} x^2 < 1}$$

Resp: $A)\ \left]-\infty;\,-\frac{4}{3}\right[\ \cup\ ]-1;0[\ \cup\ ]4;\ +\infty[\ \ B)\ ]-1;0[\ \cup\ ]1;\ 4[$

$C)\ ]-1;12[\ \cup\ ]1;4[\ \ D)\ \left]-\frac{4}{3};0\right[\ \cup\ ]0;1[\ \cup\ ]1;\ 4[$

$E)\ \left]-\frac{4}{3};-1\right[\ \cup\ ]0;4[$ $\boxed{F)\ \left]-\frac{4}{3};-1\right[\ \cup\ ]-1;0[\ \cup\ ]0;\ 4[}$

$G)\ ]-1;0[\ \cup\ ]0;\ 1[$ $\quad H)\ outro$

Resolução:

$$\log_{3x+4} x^2 < 1 \rightarrow \log_{(3x+4)}(3x+4)$$

A inequação será válida nas seguintes condições:

I) $\left\{\begin{array}{c} x^2 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 < 3x+4 \end{array}\right\}$ $II)$ $\left(\begin{array}{c} 0 < 3x+4 < 1 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 > 3x+4 \end{array}\right)$

$\left\{\begin{array}{c} x^2 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c} 0 < 3x+4 < 1 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{array}\right\}$

I.1) e II.3) $x^2 > 0 \ \rightarrow x\ \in\ \ ]-\infty;0[\cup \,]0;\ +\infty[$

I.2) e II.2) $3x+4 >\ 0\ \rightarrow x >\ -\frac{4}{3}\ \rightarrow x\ \in\ \left]-\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$

II.1) $0\ < 3x+4\ < 1;\ 3x+4 >\ 0\ e\ 3x+4\ < 1$

$3x+4 >\ 0\ \rightarrow x >\ -\frac{4}{3}\ \rightarrow x\ \in\ \left]-\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$

$3x + 4 \ < 1 \rightarrow x \ < \ -1 \ \rightarrow x \in \ \left]-\infty; \ -1\right[$

Solução verdadeira:

II.1) $x \ \in \left]-\frac{4}{3}; \ -1\right[$

I.3) $x^2 - 3x - 4 < 0$ ($pelo\ método\ de\ vieth\ x_1 = 4\ e\ x_2 = -1$)

II.4) $x^2 - 3x - 4 > 0$ ($pelo\ método\ de\ vieth\ x_1 = 4\ e\ x_2 = -1$)

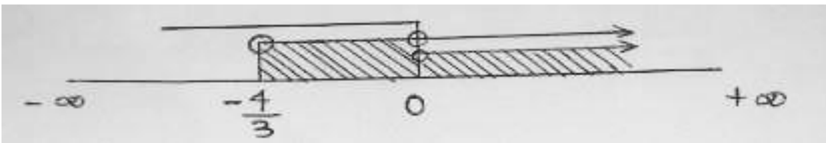
$a > 0$	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x^2 - 3x - 4 < 0$		+	O	$-$	O	+	
$x^2 - 3x - 4 > 0$		+	O	$-$	O	+	

$I.3)$ $x^2 - 3x - 4 < 0 \ \rightarrow x \ \in \left]-1; 4\right[$

$II.4)$ $x^2 - 3x - 4 > 0 \ \rightarrow \ x \ \in \ \left]-\infty; \ -1\right[\ \cup \ \left]4; \ +\infty\right[$

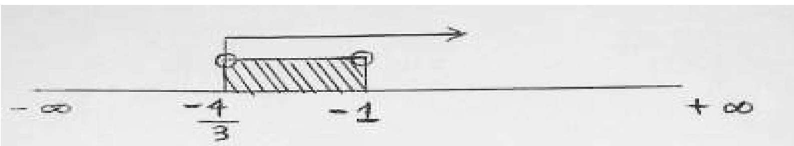
$$I) \left\{\begin{array}{c} x \ \in \ \left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; \ +\infty\right[\\ x \ \in \ \left]-\frac{4}{3} \ ; \ +\infty\right[\\ x \ \in \left]-1; 4\right[\end{array}\right\} \quad II) \left\{\begin{array}{c} x \ \in \left]-\frac{4}{3}; \ -1\right[\\ x \ \in \ \left]-\frac{4}{3} \ ; \ +\infty\right[\\ x \ \in \ \left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; \ +\infty\right[\\ x \ \in \ \left]-\infty; \ -1\right[\ \cup \ \left]4; \ +\infty\right[\end{array}\right\}$$

Intersecção I.1) e I.2) :



I.4) $x \ \in \ \left]-\frac{4}{3}; 0\right[\ \cup \left]0; \ +\infty\right[$

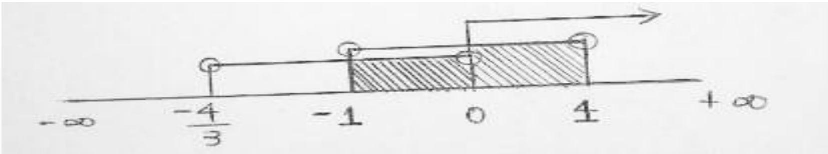
Intersecção II .1) e II.2)



II.5) $x \ \in \ \ x \ \in \left]-\frac{4}{3}; \ -1\right[$

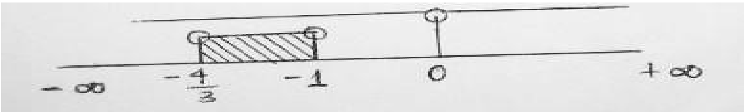
$I)\ \begin{Bmatrix} x \in \left]-\frac{4}{3}; 0\right[\cup]0;\ +\infty[\\ x\ \in]-1; 4\ [\end{Bmatrix}$ $\qquad$ $\text{II)} \begin{Bmatrix} x\ \in \left]-\frac{4}{3};\ -1\right[\\ x\ \in\ ]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[\\ x\ \in\ ]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]4;\ +\infty[\end{Bmatrix}$

Intersecção I.4) e I.3):



$S(I) =\ ]-1; 0\ [\ \cup\ ]0; 4[$

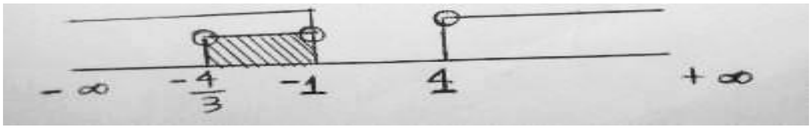
Intersecção II.5) e II.3):



II.6) $x\ \in \left]-\frac{4}{3};\ -1\right[$

$\text{II)} \quad \begin{Bmatrix} x\ \in \left]-\frac{4}{3};\ -1\right[\\ x\ \in\ ]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]4;\ +\infty[\end{Bmatrix}$

Intersecção II.4) e II.6) :



$S(II) = \left]-\frac{4}{3}\ ;\ -1\right[$

A solução geral da inequação será: $S = S(I)\ \cup\ S(II)$

$S = \left]-\frac{4}{3}\ ;\ -1\right[\cup]-1; 0\ [\ \cup\ ]0; 4[$, Línea F)

10) (Exame 2019/2008 – Variante 1E): Resolve a inequação:

$x^{2-log_2^2 x - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0$

Resp: $A)\ \left]0; \frac{1}{8}\right]\ \cup\ [1; +\infty[\ \ B)\ ]0; 1[\cup]2;\ +\infty[\ \ C)\ \left]0; \frac{1}{8}\right[\cup]1;\ 2[$

$D)\ ]0; 1[\cup]1;\ +\infty[\ \ E)\ \left]\frac{1}{8}; 1\right[\cup]1;\ 2[\ \ F)\ \left]\frac{1}{8}; 1\right]\ \cup]2; +\infty[$

$G)\ ]0; 1[\cup]1; 2[\qquad H)\ outro$

Resolução:

$x^{2-log_2^2 x - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0 \rightarrow x^{2-log_2^2 x - \log_2 x^2} > \frac{1}{x}$

$x^{2-log_2^2 x - \log_2 x^2} \; > \; x^{-1}$ (Inequação exponencial)

A inequação será válida em dois sentidos :

I) $\begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ 2 - log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 0 \\ 2 - log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1 \end{cases}$

I.3) $2 - log_2^2 x - \log_2 x^2 \; > \; -1$ (inequação logarítmica)

Multiplicando por (-1) todos os termos da inequação, vem:

$log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 \; < \; 1 \; \rightarrow log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 < 0$

Fazendo: $\log_2 x = t$, $t^2 + 2\,t - 3 \; < 0$ (inequação do 2º grau)

Resolvendo pelo método de Vieth para encontrares as raízes, achamos:

$t_1 = 1 \; e \; t_2 = -3$

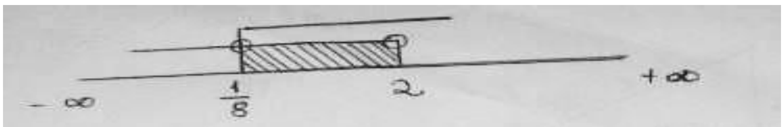
x	$-\infty$ -3 1 $+\infty$
$t^2 + 2\,t - 3 \; < 0$	+ O − O +

$t \; \in \;]-3; 1[\; ou \, t \; > \; -3 \; e \; t \; < 1$, Voltando na suposição:

$t \; > \; -3 \; \rightarrow \; \log_2 x \; > \; -3 \; \rightarrow \; \log_2 x > \; \log_2 2^{-3} \rightarrow x > \; 2^{-3} \rightarrow x > \frac{1}{8}$

$t \; < 1 \rightarrow \; \log_2 x \; < 1 \; \rightarrow \; \log_2 x \; < \; \log_2 2 \; \rightarrow x \; < 2$

Intercedendo as desigualdades: $x > \frac{1}{8}$ e $x \; < 2$



I.3) $x \; \in \; \left]\frac{1}{8} \; ; 2\right[$

II.3) $2 - log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1$ (inequação logarítmica)

Multiplicando por (-1) todos os termos da inequação, vem:

$log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 \; > \; 1 \; \rightarrow log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 > 0$

Fazendo: $\log_2 x = t$, $t^2 + 2\,t - 3 \; > 0$ (inequação do 2º grau)

Resolvendo pelo método de Vieth para encontrares as raízes, achamos:

$t_1 = 1 \; e \; t_2 = -3$

x	$-\infty$ -3 1 $+\infty$
$t^2+2t-3>0$	+ O − O +

$t \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$ $ou\ t < -3\ e\ t > 1$, Voltando na suposição:

$t < -3 \rightarrow \log_2 x < -3 \rightarrow \log_2 x < \log_2 2^{-3} \rightarrow x < 2^{-3} \rightarrow x < \frac{1}{8}$

$t > 1 \rightarrow \log_2 x > 1 \rightarrow \log_2 x > \log_2 2 \rightarrow x > 2$

II.3) $x \in \left]-\infty;\frac{1}{8}\right[\cup]1;+\infty[$

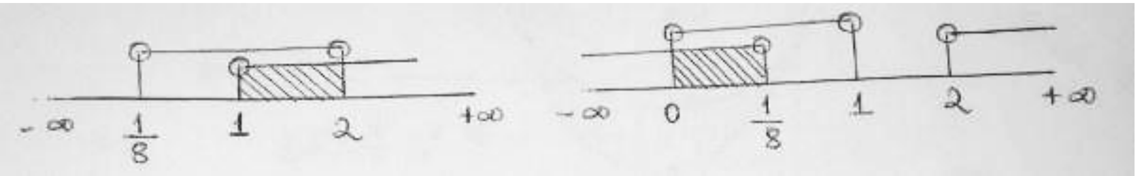
I) $\begin{cases}]1;+\infty[\\ ]0;+\infty[\\ \left]\frac{1}{8};2\right[\end{cases}$ II) $\begin{cases}]0;1[\\ ]0;+\infty[\\ \left]-\infty;\frac{1}{8}\right[\cup]2;+\infty[\end{cases}$

Interceder aos intervalos: $]1;+\infty[\cap]0;+\infty[=]1;+\infty[$

Interceder os intervalos: $]0;+\infty[\cap]0;1[=]0;1[$

I) $\begin{Bmatrix}]1;+\infty[\\ \left]\frac{1}{8};2\right[\end{Bmatrix}$ II) $\begin{Bmatrix}]0;1[\\ \left]-\infty;\frac{1}{8}\right[\cup]2;+\infty[\end{Bmatrix}$

Intercedendo finalmente as duas soluções de cada sistema, vem:



$S_1 =]1;2[$ $S_2 = \left]0;\frac{1}{8}\right[$

A solução da inequação será: $S = S_1 \cup S_2$

$S = \left]0;\frac{1}{8}\right[\cup]1;2[$, Línea C)

11) (Exame 2019) O valor de $sen\left(2\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$ dado que $tg\alpha = \frac{2}{3}$ é:

Resp: $A)\ \frac{7\sqrt{7}}{6}$ $B)\ -\frac{17\sqrt{2}}{26}$ $C)\ -\frac{17\sqrt{3}}{13}$ $D)\ \frac{17\sqrt{2}}{26}$ $E)\ \frac{17\sqrt{2}}{13}$

Resolução:

Sabe-se que:

$sen\,(a+b) = sen\,a\,cosb + senb\cos a$, então:

$sen\left(2\alpha+\frac{5\pi}{4}\right) = sen2\alpha\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\,cos2\alpha$

$sen\left(2\alpha+\frac{5\pi}{4}\right) = sen2\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,cos2\alpha$

$sen\left(2\alpha+\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\,sen2\alpha + cos2\alpha)$ (*)

Sabe-se que:

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \rightarrow sen^2\alpha = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{13}{9}} = \frac{4}{13} \rightarrow sen^2\alpha = \frac{4}{13} \rightarrow$$

$sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$$cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} \rightarrow sen^2\alpha = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{13}{9}} = \frac{9}{13} \rightarrow cos^2\alpha = \frac{9}{13} \rightarrow$$

$cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Sabe-se também que:

$sen2\alpha = 2sen\alpha\,cos\alpha \rightarrow sen2\alpha = 2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$ (**)

$cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha \rightarrow cos2\alpha = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{5}{13}$ (***)

Substituindo (**) e (***) em (*), vem:

$sen\left(2\alpha+\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\right) = -\frac{17\sqrt{2}}{26}$, Línea B)

12) (Exame 2019) A área limitada pelas curvas $x + y = 2y^2$ e $y = x^3$ é: $A)\ 0{,}5$ $B)\ \frac{7}{12}$ $C)\ 1$ $D)\ \frac{11}{4}$ $E)\ 0{,}45$

Resolução:

1º) Passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$x + y = 2y^2 \rightarrow x = 2y^2 - y$, $y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

Fazendo: $x = x \rightarrow 2y^2 - y = \sqrt[3]{y} \rightarrow 2y^2 - y - \sqrt[3]{y} = 0$ (*)

Supondo que: $\sqrt[3]{y} = t \rightarrow y = t^3$, Colocando na equação (*), vem:

$2t^6 - t^3 - t = 0 \rightarrow t(2t^5 - t^2 - 1) = 0 \rightarrow t_1 = 0$ e

$2t^5 - t^2 - 1 = 0$, Considerando que $P(t) = 2t^5 - t^2 - 1$, pelo teorema do resto : Se $t = 1$

$P(1) = 2(1)^5 - (1)^2 - 1 \rightarrow P(1) = 0$

$t_2 = 1$ é uma das raízes da equação

Voltando na suposição:

$y = t^3$ se $t_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0,\ se\ t_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1$

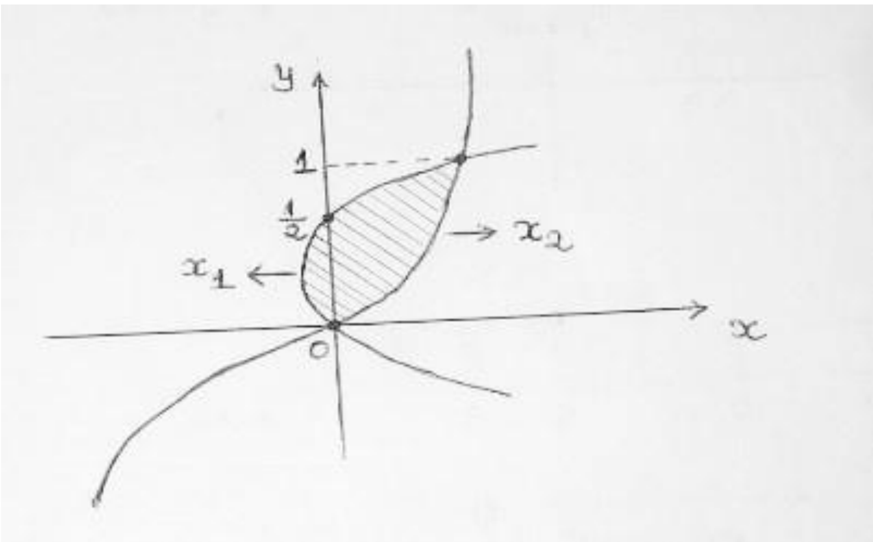
2º) construir o gráfico:

$x = 2y^2 - y \quad (Parábola)$

$ox: y = 0\ , x = 0\ , oy: x = 0\ , y = 0\ e\ y = \frac{1}{2}$

$y = x^3$ (Parábola cúbica)

Intersecta o eixo das ordenadas e das abcissas na origem $(0; 0)$



3º) Calcular a área: Vamos integrar em relação ao eixo oy

$$A = \int_a^b (x_2 - x_1)dy$$

$A = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{y} - (2y^2 - y)\right) dy = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - 2y^2 + y)\, dy \; A =$

$\int_0^1 y^{\frac{1}{3}} dy - 2 \int_0^1 y^2 d\,y + \int_0^1 y\, dy = \left(\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - 2\left(\frac{1}{3}\right)(y^3)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} + \left(\frac{1}{2}\right)(y^2)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$A = \frac{3}{4}\left[\left(1^{\frac{4}{3}}\right) - \left(0^{\frac{4}{3}}\right)\right] - \frac{2}{3}\left[(1^3) - (0^3)\right] + \frac{1}{2}\left[(1^2) - (0^2)\right]$

$A = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{9-8+6}{12} \rightarrow A = \frac{7}{12}$, $\textit{Línea B})$

13) (Exame 2019) A área limitada pelas curvas $x + y^2 - 4 = 0$ e $x + y = 2$ é: $A)\ 2{,}3 \quad B) 2{,}5 \quad C)\ 2 \quad D) 0{,}5 \quad E)\ \frac{9}{2}$

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$x + y^2 - 4 = 0 \ \rightarrow x = 4 - y^2 \; e \;\; x + y = 2 \ \rightarrow x = 2 - y$

Fazendo: $x = x \ \rightarrow \ 4 - y^2 = 2 - y \rightarrow \ y^2 - y - 2 = 0$

$y^2 - y - 2 = 0 \ \rightarrow \ y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1) = 0$

$(y - 2)(y + 1) = 0 \ \rightarrow \ y_1 = 2 \; e \; y_2 = -1$

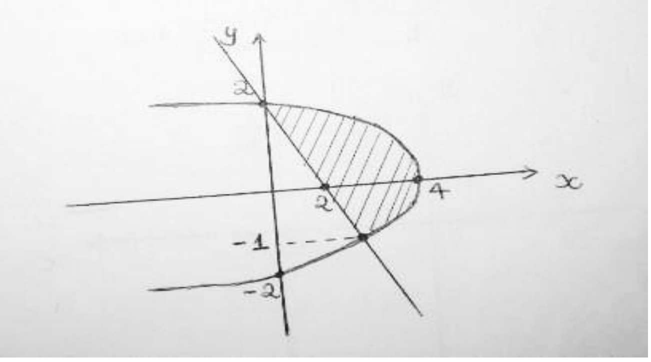
2º) Passo: construir o gráfico:

$x + y^2 - 4 = 0$ (Parábola)

$ox: y = 0 , x = 4 ; oy: x = 0 , y = \pm 2$

$x + y = 2$ (Recta)

$ox: y = 0 , x = 2 ; oy: x = 0 , y = 2$



3º) Passo: Calcular a área (Vamos integrar em relação ao eixo oy)

$A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$

$A = \int_{-1}^{2} \big((4 - y^2) - (2 - y)\big) dy = \int_{-1}^{2} (4 - y^2 - 2 + y) \, dy$

$A = \int_{-1}^{2} (2 + y - y^2) \, dy = 2 \int_{-1}^{2} dy + \int_{-1}^{2} y \, dy - \int_{-1}^{2} y^2 dy$

$A = 2 \, (y) \Big|_{-1}^{2} + \frac{1}{2} \, (y^2) \Big|_{-1}^{2} - \frac{1}{3} \, (y^3) \Big|_{-1}^{2}$

$A = 2\big(2 - (-1)\big) + \frac{1}{2} \, [(2^2) - ((-1)^2)] - \frac{1}{3} \, [(2^3) - ((-1)^3)]$

$A = 6 + \frac{3}{2} - 3 \rightarrow A = \frac{9}{2}$, Línea E)

14) (Exame – 2019): Dado um plano π: $x - 4y + 5z + 3 = 0$, um plano que contém o ponto $A \, (2; 0; 1)$ e é paralelo o π é:

Resp: $A) x + 3y - z - 1 = 0$ $B) \; 6x - 6y + 5z - 17 = 0$

$C) \; x - 4y + 5z - 7 = 0$ $D) \; y + 5z - 5 = 0$

$E) - 3x + y + 5z + 1 = 0$

Resolução:

A equação de um plano é: $\pi´$: $ax + by + cz + d = 0$

Onde: $v´ = (a; b; c)$ é o vector director do plano $\pi´$

O vector director do plano π é: $v = (1; -4; 5)$

O plano π é paralelo ao plano $\pi´$ $(\pi' \parallel \pi)$, Logo terão o mesmo vector director, ou seja:

$v´ = v = (1; -4; 5)$

$v´ = (1; -4; 5) = (a; b; c)$

Teremos: $\pi´$: $x - 4y + 5z + d = 0$

Falta encontrar o parâmetro (d)

Como o plano $\pi´$ contém o ponto $A(2; 0; 1)$ temos:

$2\ -4(0)+5(1)+\ d\ =0$

$2\ +\ 5\ +\ \mathrm{d}=\ 0$

$\mathrm{d}=-7$

Finalmente temos: $\pi\,': x\ -\ 4\,y\ +5\,z\ -7\ =\ 0$, Línea C)

15) (Exame 2019 – Variante 8E):

O valor de $\cos\left(2\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)$ se $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{2}$ é:

Resolução: $\cos\left(2\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)=?$ se $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{2}$

OBS.: $\cos(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\cos\mathrm{a}\cdot\cos\mathrm{b}-\sin\mathrm{a}\cdot\sin\mathrm{b}$

$\cos\left(2\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha\cdot\cos\frac{7\pi}{4}-\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{7\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin 2\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)$

Sabe-se que que:

$\cos 2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha$ e $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(cos^2\alpha-sin^2\alpha+\ 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$ (*)

$cos^2\alpha=\frac{cot^2\alpha}{1+cot^2\alpha}\rightarrow cos^2\alpha=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\ \rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

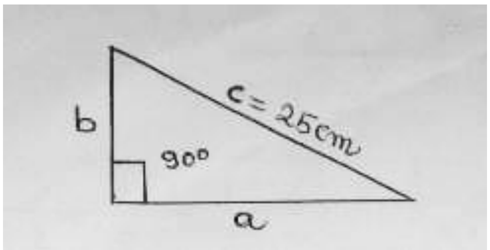
$sin^2\alpha=\frac{1}{1+cot^2\alpha}\rightarrow sin^2\alpha=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\rightarrow\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

Substituindo em (*) :

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]\ =\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\frac{-3}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\right]\ =\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\frac{1}{5}\right)\right]$

$\cos\left(2\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$

16) (Exame – 2019 – segunda chamada): Em um triângulo rectângulo, a hipotenusa mede 25 cm e a soma dos catetos é 35 cm. Determina a medida de cada cateto



Resolução:

$c = 25\ cm$

$a + b = 35\ cm\ , b = 35\ cm - a$

Condição de existência: $a < 25\ cm\ e\ b < 25\ cm$

Teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 + (35 - a)^2 = (25)^2 \rightarrow a^2 + 1225 - 70\,a + a^2 = 625$
$2a^2 - 70a + 1225 - 625 = 0 \rightarrow 2a^2 - 70\,a + 1225 - 625 = 0$
$2a^2 - 70\,a + 600 = 0 \quad \div (2)$

$a^2 - 35\,a + 300 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-35)^2 - 4(1)(300)$
$\Delta = 1225 - 1200$
$\Delta = 25$

$a_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow a_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{25}}{2a} \rightarrow a_{1/2} = \frac{35 \pm 5}{2}$

$a_1 = \frac{35 + 5}{2} \rightarrow a_1 = \frac{40}{2} \rightarrow a_1 = 20\ cm$

$a_2 = \frac{35 - 5}{2} \rightarrow a_2 = \frac{30}{2} \rightarrow a_2 = 10\ cm$

$b = 35\ cm - a$
$se\ a = 20\ cm \rightarrow b = 15\ cm$
$se\ a = 10\ cm \rightarrow b = 25\ cm\ (não\ satisfaz\ a\ condição)$

Logo os catetos do triângulo são: 20 cm e 15 cm

17) (Exame 2019) calcular a área limitada pela curva

$x + y^2 = 0$ e a recta $x + y = 0$

Resp: $A)$ 2,25 $B)$ 2,5 $C)$ 0,5 $D)$ 2 $E)$ $outro$

Resolução:

1º) Achar os pontos de intersecção entre a curva e a recta

$x + y^2 = 0 \rightarrow x = -y^2$ $e\ x + y = 0 \rightarrow x = -y$, fazendo: $x = x$

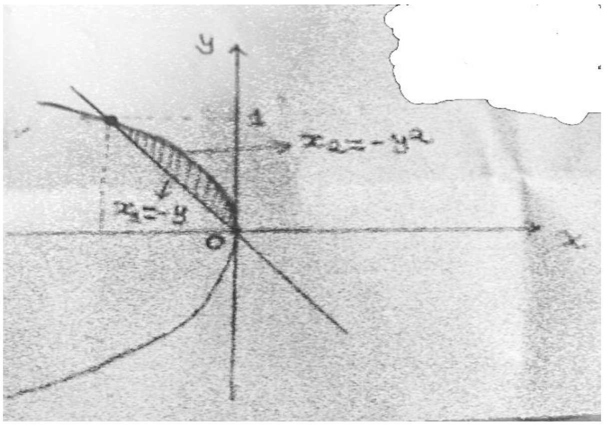
$-y^2 = -y \rightarrow y^2 - y = 0 \rightarrow y(y-1) = 0 \rightarrow y_1 = 0\ e\ y_2 = 1$

2º) Construir o gráfico:

$x + y^2 = 0$ (função par)

$ox: y = 0 \rightarrow x = 0$, $(0; 0)$; $oy: x = 0 \rightarrow y = 0$, $(0; 0)$

$x + y = 0 \rightarrow y = -x$ (função ímpar, recta que passa na origem)



3º) Passo: calcular a área: $A = \int_a^b (x_2 - x_1)dy$, integrando em relação ao eixo oy

$A = \int_0^1 [-y^2 - (-y)]dy = \int_o^1 (y - y^2)dy = \int_0^1 ydy - \int_0^1 y^2\,dy$, integrando:

$A = \frac{1}{2}(y^2)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}(y^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}[(1)^2 - (0)^2] - \frac{1}{3}[(1)^3 - (0)^3] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$A = \frac{1}{6}$, Línea E)

18) (Exame 2019) Simplificar a expressão:

$$\left[\frac{\left(x+\sqrt[3]{2ax^2}\right)(2a+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-6}$$

Resp:

$A)\ 12a^2x^2$ $B)\ 15\,a^2x^4$ $C)\ 16\,\frac{a}{x^2}^4$ $D)\ 10\,\frac{a}{x^4}^2$ $E)\ 12\,\frac{a}{x^2}^3$ $F)\ 10\,\frac{a}{x^2}^2$ $G)\ 16a^4x^2$ $H) outro$

Resolução:

$$\left[\frac{\left((\sqrt[3]{x})^3+\sqrt[3]{2ax^2}\right)((\sqrt[3]{2a})^3+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right]^{-6}=\left[\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2a}\right)}{((\sqrt[3]{2a})^3+\sqrt[3]{4a^2x})^1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right]^{-6}$$

$$\left[\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2a}\right)}{\sqrt[3]{4a^2}\left(\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{x}\right)}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right]^{-6}=\left[\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{4a^2}}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right]^{-6}=\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[3]{4a^2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}\right)}-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right]^{-6}$$

$$\left[\frac{(\sqrt[3]{x})^2-(\sqrt[3]{2a})^2}{\sqrt[3]{4a^2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}\right)}-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right]^{-6}=\left[\frac{\cancel{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}\right)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2a}\right)}{\sqrt[3]{4a^2}\cancel{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}\right)}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right]^{-6}$$

$$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2a}\right)}{\sqrt[3]{4a^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right]^{-6}=\left[\frac{\sqrt[3]{x}+\cancel{\sqrt[3]{2a}}-\cancel{\sqrt[3]{2a}}}{\sqrt[3]{4a^2}}\right]^{-6}=\left[\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4a^2}}\right]^{-6}=\left[\frac{\sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[3]{x}}\right]^{6}=\frac{(\sqrt[3]{4a^2})^{\cancel{6}}}{(\sqrt[3]{x})^{\cancel{6}}}$$

Simplificando os expoentes temos finalmente: $\frac{16\,a^4}{x^2}$, Línea C)

19) (Exame 2018) Resolve a equação:

$$tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+cotg^2\left(\frac{x}{2}\right)-2=4tgx$$

Resp: $A)\ x=\pi k$ $B)\ x=\pi k-\frac{\pi}{4}$ $C)\ x=\ \pi k-\frac{\pi}{2}$ $D)\ x=2\pi k-\frac{\pi}{2}$

$E)\ x=\ \pi k+\frac{\pi}{4}$ $F)\ x=\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{4}$ $G)\ x=\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$ $H)\ outro$

Resolução:

Obs.:

$$tg^2\frac{x}{2}=\frac{1-cosx}{1+cosx}\ ,cotg^2\frac{x}{2}=\frac{1+cosx}{1-cosx}\ ,tgx=\frac{senx}{cosx}$$

Voltando na expressão inicial:

$\frac{1-cosx}{1+cosx}+\frac{1+cosx}{1-cosx}-2=4\frac{senx}{cosx}$, achando o denominador comum vem:

$\frac{1-2c\cancel{o}sx+cos^2x+1+2c\cancel{o}sx+cos^2x-2+2cos^2x}{1-cos^2x} = \frac{4\,senx}{cosx}$,

reduzindo os termos semelhantes:

$\frac{4cos^2x}{sen^2x} = \frac{4\,senx}{cosx} \to cos^3x = sen^3x \ \to \ sen^3x = cos^3x$

Dividindo ambos os membros da igualdade por cos^3x, fica:

$tg^3x = 1 \ \to tgx = \sqrt[3]{x} \ \to tgx = 1$

$tgx = 1 \to tgx = tg(1),\ o\ arco\ cujo\ tangente\ vale\ 1$ é: $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Expressão geral para as tangentes: $x = \ \alpha + \pi k$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Condição de existência:

$1 + cosx \ \neq 0 \to cosx \ \neq \ -1 \ \to x \ \neq \pi + 2\pi k$

$1 - cosx \ \neq 0 \to cosx \ \neq \ 1 \ \to x \ \neq 2\pi k$

$cosx \ \neq 0 \ \to x \neq \ \frac{\pi}{2} + \pi k$

A solução $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ satisfaz a condição de existência, logo:

$S = \left\{x = \frac{\pi}{4} + \pi k\right\} \ k \ \in z$, Línea E)

20)(Exame 2018) Resolver a equação:

$$(senx - cosx)^2 \ + tgx = 2sen^2x$$

Resp: $A)\ x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$ $\quad B)\ x = \pi k - \frac{\pi}{4}$ $\quad C)\ x = 2\pi k - \frac{\pi}{4}$ $\quad D)\ x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$

$E)\ x = \frac{\pi k}{4} - \frac{\pi}{8}$ $\quad F)\ x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}$ $\quad G)\ x = \pi k + \frac{\pi}{2}$ $\quad H)\ outro$

Resolução:

Desenvolvendo o quadrado da diferença do primeiro termo:

$sen^2x - 2senx\ cosx + cos^2x + tgx = 2\ sen^2x$

$(sen^2x + cos^2x) - 2senx\ cosx + tgx = 2sen^2x \ \ (2sen^2x = 1 - cos2x)$

$1 - 2senx\, cosx + \frac{senx}{cosx} = 1 - cos2x$

$-2senx\, cosx + \frac{senx}{cosx} = -cos2x$

Factorizando a expressão $senx$

$senx\, \left(-2cosx + \frac{1}{cosx}\right) = -cos2x \;\rightarrow\; senx\left(\frac{-2cos^2x+1}{cosx}\right) = -cos2x$

$senx\left(\frac{1-2cos^2x}{cosx}\right) = -cos2x$

$-\, senx\left(\frac{2cos^2x-1}{cosx}\right) = -cos2x$

Sabe-se que: ($2cos^2x - 1 = cos2x$)

$\frac{senx\, cos2x}{cosx} - cos2x = 0$ (Factorizando a expressão $cos2x$)

$cos2x\, \left(\frac{senx}{cosx} - 1\right) = 0 \;\rightarrow cos2x\left(\frac{senx-cosx}{cosx}\right) = 0$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$cos2x = 0 \rightarrow cos2x = cos0 \;\rightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

$senx - cosx = 0 \rightarrow senx = cosx \rightarrow \left(\frac{senx}{cosx}\right) = \left(\frac{cosx}{cosx}\right) \rightarrow tgx = 1$

$tgx = 1 \;\rightarrow tgx = tg\;(1) \rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{4}$

$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi\, k$

Condição de existência:

$cosx\; \neq 0 \;\rightarrow x\; \neq\; \frac{\pi}{2} + \pi\, k$

As soluções $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ e $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi\, k$ Satisfazem a condição de existência. Como a solução x_2 está contida na solução x_1, a solução da equação será:

$S = \left\{x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right\}$, Línea A)

21)(Exame 2018) Resolva a seguinte inequação:

$|2x - 6| + |x| \;\leq 4 - x$

Resp: $A)\ ]1;15[\quad B)\ [-1;10]\quad C)\ [1;5]\quad D)\ [10;-5]\quad E)\ ]-1;25[$
$F)\ [-5;2[\quad G)\ [-1;4]\quad H)\ outro$

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular:

$$|2x-6| = \begin{Bmatrix} 2x-6\ se\ 2x-6 \geq 0 \\ -(2x-6)\ se\ 2x-6\ < 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 2x-6\ \ se\ x \geq 3 \\ -2x+6\ se\ x\ < 3 \end{Bmatrix}$$

$$|x| = \begin{Bmatrix} x\ se\ x\ \geq 0 \\ -x\ se\ x\ < 0 \end{Bmatrix}$$

Somando as expressões por meio da tabela:

x	0	3	
$\|2x-6\|$	$-2x+6$	$-2x+6$	$2x+6$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$+S$	$-3x+6$	$-x+6$	$3x-6$

$$\begin{Bmatrix} I =]-\infty;0[;\ \ -3x+6\ \leq 4-x \\ I=[0;3]\,;\ -x+6\ \leq 4-x \\ I=[3;\ +\infty[;\ 3x-6 \leq 4-x \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} I =]-\infty;0[;\ \ x \geq 1 \\ I=[0;3];\ \ 6\ \leq 4 \\ I=[3;\ +\infty[;\ x\ \leq \frac{5}{2} \end{Bmatrix}$$

$I =]-\infty;0[;\ \ x \geq 1(\ 1\ não\ \ pertence\ ao\ intervalo\ I, logo\ x \geq$
$1\ não\ é\ uma\ das\ soluções\ da\ inequação)$

$I=[0;3];\ \ 6\ \leq 4(\ esta\ desigualdade\ é\ falsa\ , 6\ >$
$4, logo\ neste\ intervalo\ não\ temos\ soluções)$

$I=[3;\ +\infty[;\ x\ \leq \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\ \ não\ pertence\ ao\ intervalo\ I, logo\ x\ \leq\right.$
$\left.\frac{5}{2}\right) não\ é\ uma\ das\ soluções\ da\ equação$

A solução da inequação é:

$S = \{\emptyset\}$, Línea H)

22) (Exame 2018) Seja $f(x) = \ sen^4x - \ cos^4x$ calcular $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Resp: $A) -1\ \ B)\ 0\quad C)\ 1\quad D)\ \frac{1}{2}\quad E)\ 2\quad F) -\ \pi$

Resolução:

Sabe-se quê: $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ e $(sen^2x + cos^2x) = 1$

$f(x) = sen^4x - \ cos^4x = (sen^2x - cos^2x)(sen^2x + cos^2x)$

$f(x) = \ (sen^2x - cos^2x) = -(cos^2x - sen^2x)$

Nota que: $cos^2x - sen^2x = cos2x$

$f(x) = -cos2x$

Derivando , teremos:

$f'(x) = \ - (-2sen2x) = 2\ sen2x$

Achando a derivada no ponto $x = \frac{\pi}{12}$

$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\ sen\left(2\ \frac{\pi}{12}\right) = 2\ sen\ \left(\frac{\pi}{6}\right),\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$, Línea C)

23) (Exame 2018) Dado o sistema : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ se adicionarmos ao sistema a equação: $5x + y + \alpha z = \beta$, obtemos o sitema seguinte:

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 5x + y + \alpha z = \beta \end{cases}$, os valores de $\alpha\ e\ \beta$ para que este sistema compatível indeterminado são:

Resolução:

Formando uma matriz A e uma matriz B, calculando os seus respectivos determinantes aplicando o método de crammer, teremos.

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & \alpha \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

$\Delta = (\alpha - 10 + 6) - (15 - 1 + 4\alpha) = \alpha - 4 - 14 - 4\alpha \rightarrow \Delta = -3\alpha - 18$

Se $\Delta = 0$ o sistema torna-se compatível indeterminado, ou seja:

$-3\alpha - 18 = 0\ \rightarrow \alpha = -\frac{18}{3}\ \rightarrow\ \alpha =\ -6$

$$\Delta_1 = \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & \alpha & \beta \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{matrix}$$

$\Delta_1 = (-2\beta + 6 + \alpha) - (-1 + 4\alpha + 3\beta)$, $\alpha =\ -6$

$\Delta_1 = (-2\beta + 6 - 6) - (-1 + 4(-6) + 3\beta) \rightarrow \Delta_1 = -2\beta + 25 - 3\beta \rightarrow$

$\Delta_1 = -5\beta + 25 = 0$, $\Delta_1 = 0$ o sistema torna-se compatível indeterminado

$-5\beta + 25 = 0 \rightarrow -5\beta = -25 \rightarrow \beta = \frac{25}{5} \rightarrow \beta = 5$

Os valores de α e β são: $S = \{\alpha = -6; \beta = 5\}$

24) (Exame 2018) Resolva a equação:

$\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3)$

Resp: $A) -\frac{3}{2}$ $B) \frac{3}{2}$ $C) \frac{3}{4}$ $D) -3$ $E) -\frac{4}{3}$ $F) \frac{4}{3}$ $G) -\frac{3}{4}$ $H)\ outro$

Resolução:

$\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3)$, Simplificando as bases:

$5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 \rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0$ $(a = 4, b = -5, c = -6)$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)} = \frac{5 \pm 11}{8}$

$x_1 = \frac{5+11}{8} = \frac{16}{8} \rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = \frac{5-11}{8} = -\frac{6}{8} \rightarrow x_2 = -\frac{3}{4}$

Verificação para $x_1 = 2$

$\log_{(2+3)}(5(2)^2 - 7(2) - 9) = \log_{(2+3)}((2)^2 - 2(2) - 3)$

$\log_{(5)}(-3) = \log_{(2)}(-3)$, O logaritmando não pode ser negativo, logo $x_1 = 2$ não é solução da equação

Verificação para $x_2 = -\frac{3}{4}$

$\log_{\left(-\frac{3}{4}+3\right)}\left(5\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 7\left(-\frac{3}{4}\right) - 9\right) = \log_{\left(-\frac{3}{4}+3\right)}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) - 3\right)$

$\log_{\left(\frac{9}{4}\right)}\left(-\frac{15}{16}\right) = \log_{\left(\frac{9}{4}\right)}\left(-\frac{15}{15}\right)$, como o logaritmando não pode ser negativo, $x_2 = -\frac{3}{4}$, Também não é solução da equação. A solução da equação é: $S = \{\emptyset\}$, Línea H)

25)(Exame 2018) calcular a área da figura limitada pelas linhas:

$y = \frac{7}{9}x^2 + 1; y = \frac{5}{9}x^2 + 3$

Resp: $A)\ 4$ $B)\ 7$ $C)\ 6$ $D)\ 5$ $E)\ 9$ $F)\ 10$ $G)\ 8$ $H)\ outro$

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$Fazendo\ y = y \rightarrow \frac{7}{9}x^2 + 1 = \frac{5}{9}x^2 + 3 \rightarrow 7x^2 + 9 = 5x^2 + 27$

$7x^2 + 9 = 5x^2 + 27 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$

2º) Passo: construir o gráfico:

$y = \frac{7}{9}\, x^2 \; + 1$ (Parábola)

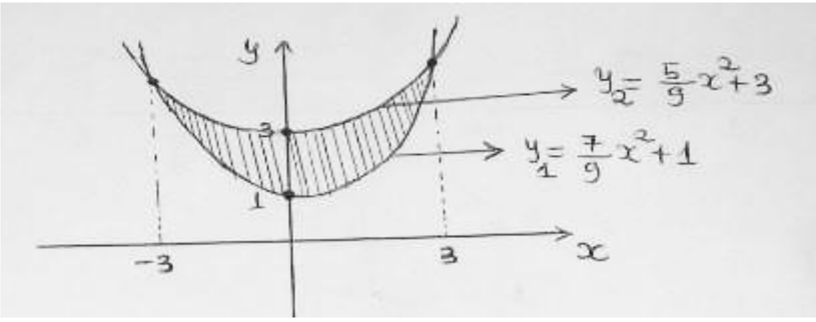
$ox: y = 0 \;\; \rightarrow \; \nexists \; intersecção \; com \; o \; eixo \; ox$

$oy: x = 0 \,, y = 1$

$y = \frac{5}{9}\, x^2 + 3$ (Parábola)

$ox: y = 0 \;\; \rightarrow \; \nexists \; intersecção \; com \; o \; eixo \; ox$

$oy: x = 0 \,, y = 3$



3º) Passo: Calcular a área (Vamos integrar em relação ao eixo ox)

$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$

$A = \int_{-3}^{3} \left(\frac{5}{9}\, x^2 + 3 - \left(\frac{7}{9}\, x^2 \; + 1 \right) \right) dx =$

$A = \int_{-3}^{3} \left(\frac{5}{9}\, x^2 + 3 - \frac{7}{9}\, x^2 \; - 1 \right) dx = \int_{-3}^{3} \left(2 - \frac{2x^2}{9} \right) dx$

Obs.: $\int_{-a}^{a} f(x) = 2 \; \int_0^a f(x)$

$A = 2 \; \int_0^3 \left(2 - \frac{2x^2}{9} \right) dx = 2 \left[2 \int_0^3 dx - \frac{2}{9} \; \int_0^3 x^2 dx \right]$

$A = 2 \; \left[(2x)_0^3 - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3} \right) (x^3)_0^3 \right]$

$A = 2 \; \left[(2x)_0^3 - \frac{2}{27} \; (x^3)_0^3 \right]$

$A = 2 \left[2(3 - 0) - \frac{2}{27} \;\; (3^3 - 0^3) \right] = 2(6 - 2)$

$A = 8$, Línea G

26) (Exame -2018) Resolve a equação:

$sen\ 2x - 2\ cos^2x + 4\ (senx - cosx + tgx - 1)$

Resp: $A)\ x = \pi k \quad B)\ x = \pi k - \frac{\pi}{3} \quad C)\ x = \ \pi k - \frac{\pi}{3} \quad D)\ x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$

$E)\ x = \pi k + \frac{\pi}{4} \quad F)\ x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{3} \quad G)\ x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4} \quad H)\ outro$

Resolução:

Obs.: $sen2x = 2senx\ cosx\ e\ tgx = \frac{senx}{cosx}$

$2senx\ cosx - 2\ cos^2x + 4\ \left(senx - cosx + \frac{senx}{cosx} - 1\right) = 0$

$2senx\ cosx - 2\ cos^2x + 4\left(\frac{senx\ cosx - cos^2x + senx - cosx}{cosx}\right) = 0$

$2\cos x(senx - cosx) + 4\ \left[\frac{(senxcosx - cos^2x) + (senx - cosx)}{cosx}\right] = 0$

$2cosx(senx - cosx) + 4\ \left[\frac{cosx(senx - cosx) + (senx - cosx)}{cosx}\right] = 0$

Factorizando a expressão: $(senx - cosx)$

$(senx - cosx)\left[2cosx + 4\left(\frac{cosx+1}{cosx}\right)\right] = 0 \rightarrow (senx - cosx)\left[\frac{2cos^2x + 4cosx + 4}{cosx}\right] = 0$

Aplicando o anulamento do produto, temos:

$(senx - cosx) = 0$ e $\left[\frac{2cos^2x + 4cosx + 4}{cosx}\right] = 0$ (Equação fraccionária)

$(senx - cosx) = 0 \rightarrow senx = cosx$ (dividindo ambos membros por $cosx$), vem:

$tgx = 1 \ \rightarrow tgx = tg(1)$, o arco cujo tangente equivale a 1 é $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Fórmulas das tangentes: $x = \ \alpha + \pi k \ \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$\left[\frac{2cos^2x + 4cosx + 4}{cosx}\right] = 0$, $2cos^2x + 4cosx + 4 = 0$ e $cosx \ \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$2cos^2x + 4cosx + 4 = 0$ (dividir todos os termos da equação por 2)

$cos^2x + 2cosx + 2 = 0$

fazendo $cosx = t$ onde $t \in [-1;1]$

$t^2 + 2t + 2 = 0$ ($a = 1$; $b = 2$; $c = 2$)

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(2) \rightarrow \Delta = -4 \rightarrow \nexists\, t$

A solução $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, satisfaz a condição, logo a solução da equação é:

$S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \; ; k \in z \right\}$, Línea E)

27) (Exame 2017) Resolver :

$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3$

Resp: $A)$ $\left[\frac{3}{7};1\right[$ $B)$ $\left]-\infty;\ \frac{3}{7}\right]$ $C)$ $\left[\frac{3}{7};1\right[$ $U\ ]3;\ +\infty[$ $D)$ $\left[\frac{3}{7};3\right[$ $E)$ $\left]\frac{2}{7};\ +\infty\right[$

F) $\left]\frac{3}{7},1\right[$ $U\ ]3;\ +\infty[$ $G)\ ]3;\ +\infty[$ $H)\ outro$

Resolução:

Pela propriedade de uma expressão modular temos:

$$|x-2| = \begin{Bmatrix} x-2 \;\; se\; x-2 \geq 0 \\ -(x-2) < 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x-2 \;\; se\;\; x \geq 2 \\ -x+2 \;\; se\; x < 2 \end{Bmatrix}$$

Formando um sistema de inequações para as duas expressões, temos:

I) $\begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-2-1} \geq 3 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-3} - 3 \geq 0 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ \frac{x+9}{x-3} \geq 0 \end{Bmatrix}$

II) $\begin{Bmatrix} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+2-1} \geq 3 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+1} - 3 \geq 0 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x < 2 \\ \frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \end{Bmatrix}$

$\frac{x+9}{x-3} \geq 0$ (inequação racional fraccionária)

$x + 9 = 0 \rightarrow x = -9\ e\ x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$

	$-\infty$	-9		3	$+\infty$
$x+9=0$	$-$	O	$+$	‖	$+$
$x-3 \neq 0$	$-$		$-$	‖	$+$
S	$+$		$-$		$+$

$x \in \left]-\infty;\ -9\right] \cup \left]3;\ +\infty\right[$

$\frac{7x-3}{-x+1} \geq 0$ (inequação racional fraccionária)

$7x - 3 = 0 \;\rightarrow x = \frac{3}{7} \quad e \quad -x + 1 \neq 0 \rightarrow \; x \neq 1$

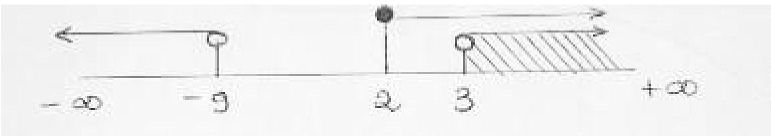
	$-\infty$	$\frac{3}{7}$		1	$+\infty$
$7x - 3 = 0$	$-$	O	$+$	‖	$+$
$-x + 1 \neq 0$	$+$		$+$	‖	$-$
s	$-$		$+$		$-$

$x \in \left[\frac{3}{7}\,;1\right[$

Voltando nos sistemas de inequações I) e II) temos:

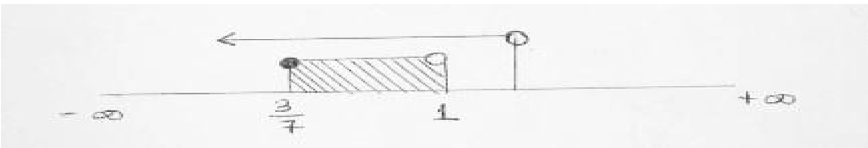
I) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \in \left]-\infty;\ -9\right] \cup \left]3;\ +\infty\right[\end{cases}$ II) $\begin{cases} x < 2 \\ x \in \left[\frac{3}{7}\,;1\right[\end{cases}$

Interceder as duas soluções do sistema I) , temos:



$S_1 = \left]3;\ +\infty\right[$

Interceder as duas soluções do sistema II), temos:



$S_2 = \left[\frac{3}{7}\,;1\right[$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cup S_2$

$S = \left[\frac{3}{7}\,;1\right[\cup \left]3;\ +\infty\right[$, Línea C)

28 (Exame 2017) A área limitada pelas curvas $y = x - x^2\ e\ y = x\sqrt{1-x}$ é

A) 0,5 B) 0,1 C) 1 D) 6 E) 0,45 F) 10 G) 0,75 H) outro

Resolução:

1º) passo : Achar os pontos de intersecção entre as curvas:

$y = y \ \rightarrow x - x^2 = x\sqrt{1-x}$

$x - x^2 - x\sqrt{1-x} = 0 \ \rightarrow x\left(\ 1 - x + \ \sqrt{1-x}\right) = 0$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$x_1 = 0\ e\ \left(\ 1 - x + \ \sqrt{1-x}\right) = 0$

$\left(\ 1 - x + \ \sqrt{1-x}\right) = 0 \ \rightarrow \ \left(\sqrt{1-x}\right) = x - 1 \ \rightarrow$

$(\sqrt{1-x})^2 = \ (x-1)^2 \rightarrow 1 - x = \ x^2 - 2x + 1 \rightarrow \ x^2 - x = 0$

$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \ \rightarrow \ x_2 = 0\ e\ x_3 = 1$

Limites de integração em relação ao eixo ox : $0 \leq x \ \leq 1$

2º) Passo: Traçar o gráfico para visualizar a área a calcular:

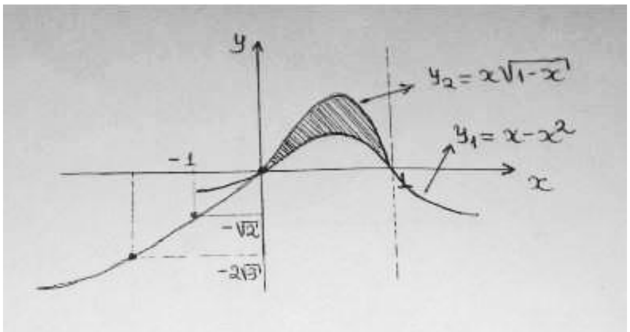
$y = x - x^2\ , ox: y = 0\ ,\ x - x^2 = 0, x = 0\ e\ x = 1$

$y = x - x^2, oy: x = \ 0\ , y = 0$

$y = x\sqrt{1-x} \quad Df\ = \ ]-\infty; 1\ ]$

$ox: y = 0\ ,\ x\sqrt{1-x} = 0\ , x = 0\ e\ x = 1$

$oy: x = 0\ ; y = 0$



3º) Passo : calcular a área:

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)\ dx$

$A = \int_0^1 [x\sqrt{1-x} - (x - x^2)]dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx - \int_0^1 (x - x^2)dx$

$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx$, fazendo: $\sqrt{1-x} = t$,

$1 - x = t^2 \rightarrow x = 1 - t^2, dx = -2t\, dt$

$I_1 = \int_0^1 (1 - t^2)t(-2t)\, dt = \int_0^1 (t^2 - 1)\ 2t^2\, dt = 2\int_0^1 (t^4 - t^2)dt$

$I_1 = 2\left[\int_0^1 t^4\, dt - \int_0^1 t^2 dt\right] = 2\left[\left(\frac{1}{5}t^5\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left(\frac{1}{3}t^3\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right]$

$I_1 = 2\left[\left(\frac{1}{5}(\sqrt{1-x})^5\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left(\frac{1}{3}(\sqrt{1-x})^3\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right]$

$I_1 = 2\left[\frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{1-1}\right)^5 - \left(\sqrt{1-0}\right)^5\right) - \frac{1}{3}((\sqrt{1-1})^3 - (\sqrt{1-0})^3)\right]$

$I_1 = \frac{4}{15}$

$I_2 = \int_0^1 (x - x^2)dx = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left(\frac{x^3}{3}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$I_2 = \left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{6}$

A área finalmente será: $A = I_1 - I_2$

$A = \frac{4}{15} - \frac{1}{6} \rightarrow A = \frac{1}{10} \rightarrow A = 0{,}1\ u^2$, Linea B)

29 (Exame 2017) Simplifica a expressão:

$sen\alpha\ sen^2(\alpha - 270°)(1 + tg^2\alpha) + cos\alpha\ cos^2(\alpha - 270°)(1 + cotg^2\alpha)$

Resp: $A)\ \sqrt{2}\cos(\alpha + 15°)$ $B)\ \sqrt{3}\,sen^2(\alpha + 270°)$ $C)\ \sqrt{3}\,\mathrm{tg}(\alpha + 225°)$

$D)\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\alpha + 45°)$ $E)\ \mathrm{cotg}(\alpha + 75°)$ $F)\ \sqrt{2}\cos(\alpha + 215°)$

$G)\ \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(2\alpha + 85°)$ $H)\ outro$

Resolução:

$sen\ (a-b) = sena\ \times cosb - senb\ \times \cos a$

$sen(\alpha - 270°) = sen\alpha\ cos270° - sen270° \cos\alpha = \cos\alpha$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sena\ senb$

$\cos(\alpha - 270°) = cos\alpha\ cos270° + sen\alpha\ sen\ 270° = \ -sen\ \alpha$

Voltando na expressão inicial :

$$sen\alpha\ cos^2\alpha\left(1+\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}\right) + cos\alpha\ sen^2\alpha\left(1+\frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha}\right)$$

$$sen\alpha\ cos^2\alpha\left(\frac{sen^2\alpha+cos^2\alpha}{cos^2\alpha}\right) + cos\alpha\ sen^2\alpha\left(\frac{sen^2\alpha+cos^2\alpha}{sen^2\alpha}\right)$$

$sen\ \alpha + cos\alpha$

Nota que : $cos\alpha = sen\ \left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$sen\ \alpha + sen\ \left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Nota que: $sen\ a + senb = 2\ sen\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$sen\ \alpha + sen\ \left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 2\ sen\left(\frac{\alpha+\alpha+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\alpha-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$sen\ \alpha + sen\ \left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 2\ sen\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$sen\ \alpha + sen\ \left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cancel{2}\ sen\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)$$

$$sen\ \alpha + sen\ \left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ sen\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4} = 45°$$

$sen\ \alpha + sen\ \left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ sen(\alpha + 45°\ )$, Línea D)

30 (Exame 2017) Resolve a equação: $\frac{x-2}{|x-2|} \leq 4 - x^2$

Resp: $A)\ (-1;\ \infty)$ $B)\ [0; 2[$ $C)\ \left[-\sqrt{5}\ ; 2\right[$ $D)\ \left(-2; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}\ ; \frac{3}{2}\right]$

$E)\ [2; 5[\ \cup (4; \infty)$ $F)\ (4; \infty)$ $G)\ \left]-4; \frac{1}{4}\right]$ $H)\ outro$

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular, temos:

$$|x-2| = \begin{Bmatrix} x-2\ se\ x-2 \geq 0 \\ -(x-2) se\ x-2\ < 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x-2\ se\ x \geq 2 \\ -(x-2) se\ x\ < 2 \end{Bmatrix}$$

A inequação será válida em dois sentidos:

$$I) \begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ \frac{x-2}{x-2} \leq 4 - x^2 \end{Bmatrix} \qquad II) \begin{Bmatrix} x < 2 \\ \frac{x-2}{-(x-2)} \leq 4 - x^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ 1 \leq 4 - x^2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x < 2 \\ -1\ \leq 4 - x^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ x^2\ \leq 3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x < 2 \\ x^2\ \leq 5 \end{Bmatrix}$$

$x^2 \leq 3\ (\ x^2\ = 3, x = \pm\sqrt{3}\ )$

$a\ > 0$	-∞ $\quad -\sqrt{3} \quad \sqrt{3} \quad +\infty$
$x^2 \leq 3$	+ O – O +

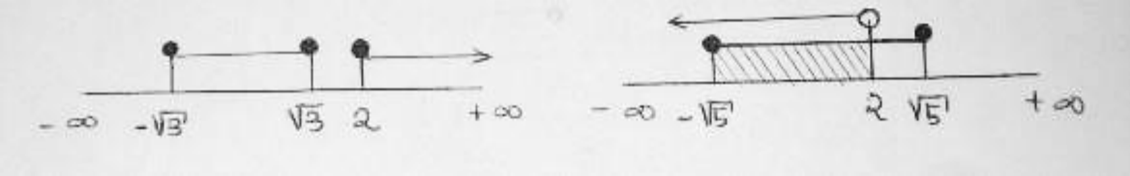
$x\ \in\ [-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$

$x^2 \leq 5\ (\ x^2\ = 5, x = \pm\sqrt{5}\ )$

$a\ > 0$	-∞ $\quad -\sqrt{5} \quad \sqrt{5} \quad +\infty$
$x^2 \leq 3$	+ O – O +

$x \in [-\sqrt{5};\ \sqrt{5}]$

I) $\begin{Bmatrix} [2;+\infty[\\ x \in [-\sqrt{3};\ \sqrt{3}] \end{Bmatrix}$ II) $\begin{Bmatrix}]-\infty; 2\ [\\ x \in [-\sqrt{5};\ \sqrt{5}] \end{Bmatrix}$



$S(I) = \{\emptyset\}$ $S(II) = [-\sqrt{5}; 2\ [$

A solução geral da inequação será: $S = S(I)\ \cup\ S(II)$

$S = [-\sqrt{5}; 2\ [$, Línea C)

31)(Exame 2017) Simplifique a expressão:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) sen^3(\pi - 2\alpha) - \cos(6\alpha - \pi)\, sen^3\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$$

Resp: $A)\ cos^3 4\alpha$ $B)\ sen2\alpha$ $C)\ cos6\alpha$ $D)\ sen^2 3\alpha$ $E)\ sen^3 3\alpha$

$F)\ sen2\alpha\ cos4\alpha$ $G)\ cos^2 2\alpha\ sen\alpha$ $H)\ outro$

Resolução:

Aplicando as fórmulas:

$\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sen\alpha\ sen\beta$

$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\cos 6\alpha + sen\left(\frac{5\pi}{2}\right)\ sen6\alpha = sen6\alpha$

$\cos(6\alpha - \pi) = cos65\alpha\ cos\pi + sen6\alpha\ sen\pi = -cos65\alpha$

$\text{sen}(\alpha - \beta) = sen\alpha\ cos\beta - sen\beta cos\alpha$

$\text{sen}(\pi - 2\alpha) = \text{sen}\,\pi\cos 2\alpha - sen2\alpha\ cos\pi = sen2\alpha$

$sen\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\ \right) = sen\frac{\pi}{2}\ cos2\alpha - sen2\alpha\ cos\frac{\pi}{2} = cos2\alpha$

Voltando na expressão inicial, temos:

$sen6\alpha\, sen^3 2\alpha + \; cos6\alpha\, cos^3 2\alpha$

$(sen6\alpha\, sen2\alpha)sen^2 2\alpha + (cos6\alpha\, cos2\alpha)cos^2 2\alpha\; (*)$

Aplicando as fórmulas:

$sena\; senb = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \rightarrow sen6\alpha\; sen2\alpha = \frac{cos4\alpha - cos8\alpha}{2}$

$cosa\; cosb = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2} \rightarrow cos6\alpha\; cos2\alpha = \frac{cos4\alpha + cos6\alpha}{2}$

Voltando em (*) , temos:

$\left(\frac{cos4\alpha - cos8\alpha}{2}\right) sen^2 2\alpha + \left(\frac{cos4\alpha + cos8\alpha}{2}\right) cos^2 2\alpha$

Multiplicando os termos fora dos parênteses e mantendo o denominador:

$\left(\frac{sen^2 2\alpha\; cos4\alpha - sen^2 2\alpha\; cos8\alpha + cos^2 2\alpha\; cos4\alpha + cos^2 2\alpha\; cos8\alpha}{2}\right)$

$\left[\frac{(sen^2 2\alpha\; cos4\alpha + cos^2 2\alpha cos4\alpha) + (cos^2 2\alpha\; cos8\alpha - sen^2 2\alpha cos8\alpha)}{2}\right]$

$\left[\frac{cos4\alpha(sen^2 2\alpha + cos^2 2\alpha) + cos8(cos^2 2\alpha - sen^2 2\alpha)}{2}\right]$ (**)

Sabe-se que: $cos8\alpha = \; cos^2 4\alpha - \; sen^2 4\alpha$

Voltando em (**), temos: $\left[\frac{cos4\alpha + (cos^2 4\alpha - sen^2 4\alpha\;)cos4\alpha}{2}\right] =$
$\left[\frac{cos4\alpha + cos^3 4\alpha - cos4\alpha sen^2 4\alpha}{2}\right]$

$\left[\frac{(cos4\alpha - cos4\alpha sen^2 4\alpha) + cos^3 4\alpha}{2}\right] = \left[\frac{cos4\alpha(1 - sen^2 4\alpha) + cos^3 4\alpha}{2}\right]$ (***)

$sabe - se\; que: 1 - sen^2 4\alpha = \; cos^2 4\alpha$

Volt5ando em (***) , finalmente temos:

$\left[\frac{cos4\alpha(cos^2 4\alpha) + cos^3 4\alpha}{2}\right] = \left(\frac{cos^3 4\alpha + cos^3 4\alpha}{2}\right) = \left(\frac{\cancel{2}cos^3 4\alpha}{\cancel{2}}\right)$

$= \; cos^3 4\alpha$, Línea A

32) (Exame 2017) $Resolva\ \ inequação$:
$(|x|\ -1)(2x^2+x-1)\ \le 1$

Resp: $A)\ [-1;1]$ $B)\ \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2};1\right]$ $C)\ \left[\frac{1}{4};1\ \right]$ $D)\ (0;1)$ $E)\ [0;1]$

$F)\ \left[-1;\frac{1}{4}\right]$ $G)\ \left[\frac{1}{2};1\right]$ $H)\ outro$

Resolução:

Aplicando a lei do anulamento do produto para encontrar as raízes da inequação:

$(|x|\ -1)=0\ \rightarrow\ |x|=1\ \rightarrow x^2=1 \rightarrow x_{1,2}=\ \pm 1$

$(2x^2+x-1)=0\ (\ a=2; b=1\ ; c=-1)$

$\Delta = b^2-4ac\ \rightarrow \Delta = (1)^2-4(2)(-1)=9\ \rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

$x_{3,4}=\ \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \rightarrow\ x_{3,4}=\ \frac{-1\pm 3}{2(2)}=\ \frac{-1\pm 3}{4}$

$x_3=\frac{1}{2}\ \ e\ x_4=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$(\lvert x\rvert\ -1)=0$		+	O	−	O	−	O	+	
$(2x^2+x-1)$		+	O	−	O	+		+	
S		+		+		−		+	

$S=\ \{-1\}\ \cup\ \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$, Línea B)

33)(Exame 2017) $Resolva\ \ inequação$: $\frac{x+1}{|x-1|}+\frac{1-2x}{x-1}\ge 0$

Resp: $A)\ (-\infty;1) \cup (1;\infty)$ $B)\ [2;\infty[$ $C)\ \left[\frac{1}{2}\ ;1\right[\ \cup (1;\infty)$

$D)\ \left]\frac{1}{2};2\right[$ $E)\ [0;1[$ $\cup\ ]1;2]$ $F)\ ]1;2]$ $G)\ \left[\frac{1}{2};1\right[$ $H)\ outro$

Resolução:

Pela condição da expressão modular, teremos:

$$|x-1| = \begin{Bmatrix} x-1\ se\ x-1\ >0 \\ -(x-1)se\ x-1\ <0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} x-1\ \ se\ x>1 \\ -(x-1)\ se\ x\ <1 \end{Bmatrix}$$

A inequação será válida nas seguintes condições:

I) $\begin{Bmatrix} x>1 \\ \frac{x+1}{x-1}+\frac{1-2x}{x-1}\geq 0 \end{Bmatrix}$ II) $\begin{Bmatrix} x\ <1 \\ -\frac{x-1}{x-1}+\frac{1-2x}{x-1}\geq 0 \end{Bmatrix}$

I) $\begin{Bmatrix} x>1 \\ \frac{-x+2}{x-1}\geq 0 \end{Bmatrix}$ II) $\begin{Bmatrix} x\ <1 \\ \frac{-3x}{x-1}\geq 0 \end{Bmatrix}$

Multiplicando as segundas equações dos dois sistemas por (-1), temos:

$\begin{Bmatrix} x>1 \\ \frac{x-2}{x-1}\leq 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x\ <1 \\ \frac{3x}{x-1}\leq 0 \end{Bmatrix}$

I.2) $\frac{x-2}{x-1}\leq 0$ (inequação racional fraccionária)

$x-2=0\ \to x=2\quad e\qquad x-1\ \neq 0\ \to x\neq 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-1$	$-$	$+$		$+$
$x-2$	$-$	$-$	O	$+$
S	$+$	$-$		$+$

I.2) $x\ \in\ ]1;2\,]$

II.2) $\frac{3x}{x-1}\leq 0$ (inequação racional fraccionária)

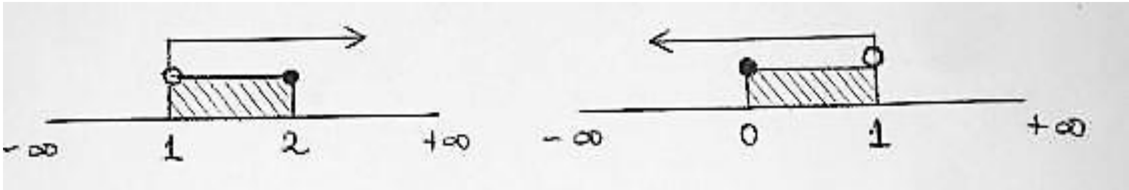
$3x=0\ \to x=0\ e\ \ x-1\ \neq 0\ \to x\neq 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$+$		$+$
$x-2$	$-$	$-$	O	$+$
S	$+$	$-$		$+$

II.2) $x \in [0;1[$

I) $\begin{cases}]1;+\infty[\\ x \in]1;2] \end{cases}$ II) $\begin{cases}]-\infty;1[\\ x \in [0;1[\end{cases}$

Intercedendo as soluções dos dois sistemas:



$S(I) = x \in]1;2]$ $S(II) = x \in [0;1[$

A solução da inequação será: $S = S(I) \cup S(II)$

$S = [0;1[\cup]1;2]$, Línea E)

34) (Exame 2017) Simplifique a expressão:

$$\cot g(270° - 2\alpha) + cotg(210° - 2\alpha) + cotg\,(150° - 2\alpha)$$

Resp: $A)\ cotg2\alpha$ $B)\ 2tg4\alpha$ $C)\ tg^2 3\alpha$ $D)\ tg2\alpha\, cotg2\alpha$

$E)\ cotg6\alpha$ $F)\ cotg4\alpha$ $G)\ 3tg6\alpha$ $H)\ outro$

Resolução:

$$\cot(270° - 2\alpha) + [cotg(210° - 2\alpha) + cotg\,(150° - 2\alpha)]$$

Aplicando a fórmula:

$cotg(a - b) = \frac{cotga\ cotg\ b+1}{cotgb-cotga}$

$\cot g(270° - 2a) = \frac{cotg270°\ cotg\ +1}{cotg2\alpha-cotg270°} = \frac{1}{cotg2\alpha} = \frac{sen2\alpha}{cos2\alpha}$

$cotga + cotgb = \frac{sen(a+b)}{sena\ senb}$

$$[cotg(210° - 2\alpha) + cotg\ (150° - 2\alpha)] = \frac{sen(210°-2\alpha+150°-2\alpha)}{sen(210°-2\alpha)sen(150°-2\alpha)}$$

$$[cotg(210° - 2\alpha) + cotg\ (150° - 2\alpha)] = \frac{sen(360°-4\alpha)}{sen(210°-2\alpha)sen(150°-2\alpha)}\ (*)$$

$$\mathrm{sen}(\alpha - \beta) = sen\alpha\ cos\beta - sen\beta cos\alpha$$

$$sen(360° - 4\alpha) = sen360°\ cos4\alpha - sen4\alpha\ cos360° = -sen4\alpha$$

$$sena\ senb = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$sen(210° - 2\alpha)sen(150° - 2\alpha) = \frac{cos60°-\cos(360°-4\alpha)}{2}$$

Sabe-se que: $\cos(a - b) = \cos a\ cosb + sena\ senb$

$$\cos(360° - 4\alpha) = \cos 360°\ cos4\alpha + sen360°\ sen4\alpha = cos4\alpha$$

Então:

$$sen(210° - 2\alpha)sen(150° - 2\alpha) = \frac{\frac{1}{2} - \cos 4\alpha}{2} = \frac{1-2cos4\alpha}{4}$$

Voltando em (*), temos:

$$[cotg(210° - 2\alpha) + cotg\ (150° - 2\alpha)] = \frac{-sen4\alpha}{\frac{1-2cos4\alpha}{4}} = -\frac{4\ sen4\alpha}{1-2cos4\alpha}$$

Voltando na expressão inicial e achando o denominador comum, teremos:

$$\frac{sen2\alpha}{cos2\alpha} - \frac{4\ sen4\alpha}{1-2cos4\alpha} = \frac{sen2\alpha-2sen2\alpha\ cos4\alpha-4sen4\alpha\ cos2\alpha}{cos2\alpha\ (1-2cos4\alpha\ )}$$

$$\frac{sen2\alpha-2sen2\alpha\ cos4\alpha-2sen4\alpha\ cos2\alpha-2sen4\alpha\ cos2\alpha}{cos2\alpha\ -2cos4\alpha\ cos2\alpha}$$

$$\frac{sen2\alpha-2(sen4\alpha\ cos2\alpha+sen2\alpha\ \ cos4\alpha)-2sen4\alpha\ cos2\alpha}{cos2\alpha\ -2cos4\alpha\ cos2\alpha}\ (**)$$

Sabe-se que :

$$sena\ cosb = \frac{\mathrm{sen}(a-b)+sen(a+b)}{2}$$

$$2sen4\alpha\ cos2\alpha = sen2\alpha + sen6\alpha$$

$$cosa\ cosb = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$

$$2cos4\alpha\ cos2\alpha = cos2\alpha + cos6\alpha$$

$(sen4\alpha\ cos2\alpha + sen2\alpha\ \ cos4\alpha) = sen6\alpha$

Voltando em (**), temos:

$\frac{sen2\alpha - 2sen6\alpha - (sen2\alpha + sen6\alpha)}{cos2\alpha - (cos2\alpha + cos6\alpha)} = \frac{\cancel{sen2\alpha} - 2sen6\alpha - \cancel{sen2\alpha} - sen6\alpha}{\cancel{cos2\alpha} - \cancel{cos2\alpha} - cos6\alpha} =$

$= \cancel{-}\frac{3sen6\alpha}{\cancel{-}cos6\alpha} = 3\ tg6\alpha$, Línea G

35) (Exame 2017) Resolver :

$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3$

Resp:

$A)\ \left[\frac{3}{7};1\right[\quad B)\ \left]-\infty;\ \frac{3}{7}\right]\quad C)\ \left[\frac{3}{7};1\right[\ U\ ]3;\ +\infty[\quad D)\ \left[\frac{3}{7};3\right[\quad E)\ \left]\frac{2}{7};\ +\infty\right[$

F) $\left]\frac{3}{7},1\right[\ U\ ]3;\ +\infty[\quad G)\ ]3;\ +\infty[\quad$ $H)\ outro$

Resolução:

Pela propriedade de uma expressão modular temos:

$|x-2| = \begin{Bmatrix} x-2\ \ se\ x-2\ \geq 0 \\ -(x-2) < 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x-2\ \ se\ \ x\ \ \geq 2 \\ -x+2\ \ se\ x\ \ < 2 \end{Bmatrix}$

Formando um sistema de inequações para as duas expressões, temos:

I) $\begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-2-1} \geq 3 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-3} - 3 \geq 0 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x \geq 2 \\ \frac{x+9}{x-3} \geq 0 \end{Bmatrix}$

II) $\begin{Bmatrix} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+2-1} \geq 3 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+1} - 3 \geq 0 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x < 2 \\ \frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \end{Bmatrix}$

$\frac{x+9}{x-3} \geq 0$ (inequação racional fraccionária)

$x + 9 = 0\ \ \rightarrow x = -9\ e\ \ x - 3\ \neq 0\ \ \rightarrow x\ \ \neq 3$

	$-\infty$ $\quad$ -9 $\quad$ 3 $\quad$ $+\ \infty$
$x + 9 = 0$	$-$ $\quad$ O $\quad$ $+$ $\quad$ $\|$ $\quad$ $+$

$x-3\ \neq 0$	$-$	$-$	$+$
S	$+$	$-$	$+$

$x\ \in\ ]-\infty;\ -9]\ \cup\ ]3;\ +\infty[$

$\frac{7x-3}{-x+1} \geq 0$ (inequação racional fraccionária)

$7x-3=0\ \rightarrow x=\frac{3}{7}\quad e\quad -x+1\neq 0 \rightarrow\ x\neq 1$

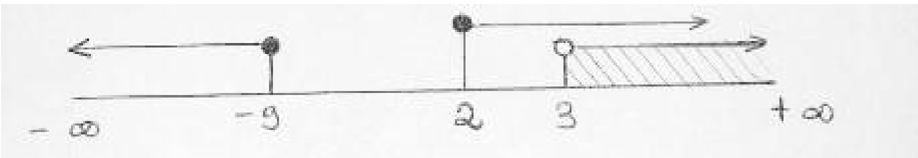
	$-\infty$		$\frac{3}{7}$		1		$+\infty$
$7x-3=0$		$-$	O	$+$	$\|\|$	$+$	
$-x+1\ \neq 0$		$+$		$+$	$\|\|$	$-$	
S		$-$		$+$		$-$	

$x\ \in\ \left[\frac{3}{7}\ ;1\right[$

Voltando nos sistemas de inequações I) e II) temos:

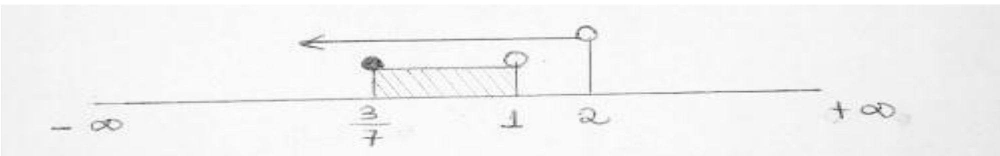
I) $\begin{cases} x\geq 2 \\ x\ \in\ ]-\infty;\ -9]\ \cup\ ]3;\ +\infty[\end{cases}$ II) $\begin{cases} x<2 \\ x\ \in\ \left[\frac{3}{7}\ ;1\right[\end{cases}$

Interceder as duas soluções do sistema I) , temos:



$S_1 =\ ]3;\ +\infty[$

Interceder as duas soluções do sistema II), temos:



$S_2 = \left[\frac{3}{7}\ ;1\right[$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cup S_2$

$S = \left[\frac{3}{7} ; 1\right[\cup \ ]3; +\infty[$, Línea C)

36)(Exame 2016) A área da região limitada pelo gráfico da função $y = \frac{|x|}{1+x^2}$ $, o\ eixo\ ox\ e\ as\ rectas\ x = -2\ e\ x = 1$ é:

$A)\ln 10\, u^2$ $B)\ \frac{ln10}{3}u^2$ $C)\ln\left(\frac{2}{3}\right)u^2$ $D)\ arctg\ 2\, u^2$ $E)\ arctg\ \left(\frac{5}{2}\right)u^2$

$F)\ arctg\ (10)u^2$ $G)outro$

Resolução:

1º) passo: $y = \frac{|x|}{1+x^2} = \begin{Bmatrix} \frac{x}{1+x^2}\ ; se\ x \geq 0 \\ -\frac{x}{1+x^2}\ se\ x < 0 \end{Bmatrix}$

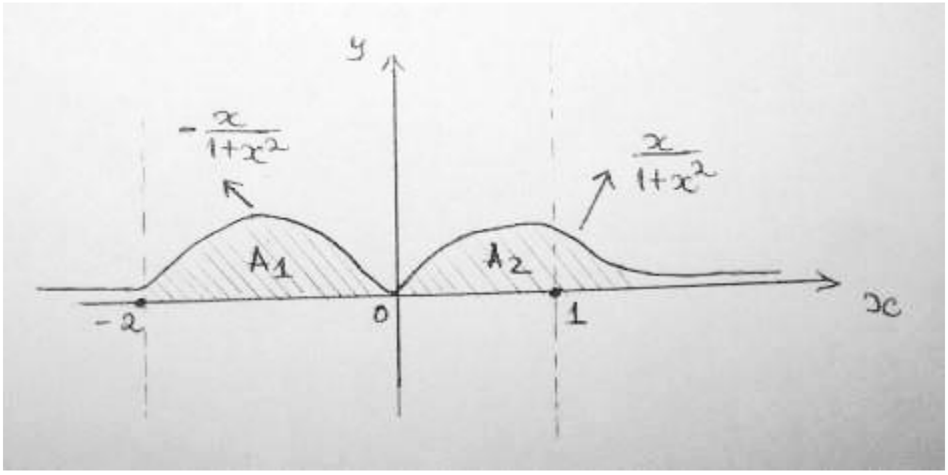
2º) Passo: Achar os interceptos e construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os seus limites de integração:

$y = \frac{x}{1+x^2}, ox{:}\ y = 0\ , x = 0\ ; oy{:}\ x = 0, y = 0\ (f(x) passa\ na\ origem)$

$\forall x \geq 0;\ x \to +\infty\ , y \to 0$

$y = -\frac{x}{1+x^2}, ox{:}\ y = 0\ , x = 0\ ; oy{:}\ x = 0, y = 0\ (f(x) passa\ na\ origem)$

$\forall\ x < 0; x \to\ -\infty\ ; y \to 0$



3º) Passo: calcular a área:

$A = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_{-2}^{0} -\frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\begin{matrix}0\\-2\end{matrix} =$

$A_1 = -\frac{1}{2}[\ln(1+0^2) - \ln(1+(-2)^2)] \rightarrow A_1 = \frac{\ln 5}{2}$

$A_2 = \int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$A_2 = \frac{1}{2}[\ln(1+1^2) - \ln(1+(0)^2)] \rightarrow A_2 = \frac{\ln 2}{2}$

Então a área cera: $A = A_1 + A_2 = \frac{\ln 5}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}(\ln 5 + \ln 2)$

$A = \frac{1}{2}\ln(5 \times 2) \rightarrow A = \frac{1}{2}\ln 10$, Línea H)

37)(Exame 2016) A área limitada pela curva $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$ e as rectas $y = 0$ e $x = 1$ é:

A) $\frac{\pi}{4}$ $B)$ $\frac{3\pi}{4}$ $C)$ $\frac{5\pi}{3}$ $D)$ $\frac{\pi}{6}$ $E)$ π $F)$ 3 $G)$ 6 $H)$ $outro$

Resolução:

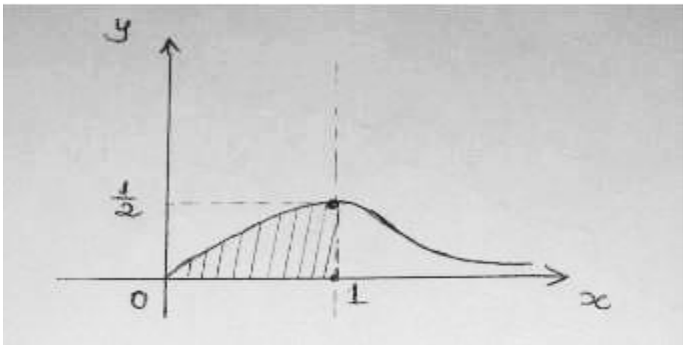
1º) Passo: Achar o domínio, os interceptos e construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os seus limites de integração:

$D_f = [0; +\infty[$

$y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}, ox: y = 0, x = 0; oy: x = 0, y = 0$ $(f(x) passa\ na\ origem)$

$\forall x \geq 0;\ x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$

$se\ x = 1, y = \frac{1}{2}, se\ x = 0, y = 0$



2º) Passo: calcular a área

$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$, $fazendo: x = t^2 \to dx = 2\,t\,dt$

$Trocando\ os\ limites\ de\ integração\ em\ relação\ a\ t$:

$se\ x = 1 \to t = 1, se\ x = 0 \to t = 0$

$A = \int_0^1 \frac{t(2t)dt}{1+(t^2)^3} = 2\int_0^1 \frac{t^2dt}{1+(t^3)^2}$,

$supondo\ novamente\ que: t^3 = y \to 3t^2dt = dy \to t^2dt = \frac{dy}{3}$

$Trocando\ os\ limites\ de\ integração\ em\ relação$:

$se\ t = 1 \to y = 1, se\ t = 0 \to y = 0$

$A = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\left(\frac{dy}{3}\right) = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dy}{1+t^2} = \frac{2}{3}\ artg(y)\ \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$A = \frac{2}{3}\left(arct\,(1) - arctg(0)\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$

$A = \frac{\pi}{6}$, Línea D)

38) (Exame 2016) A solução da inequação $\log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)}\left(\frac{x-1}{2}\right) \geq 0$ é:

Resp: $[3,+\infty[$ $B)\ \left]\frac{1-\sqrt{21}}{2}, 0\right[\ U\ \left]1, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[$ C) $\left]1, \frac{1}{2}\right[\ U\ [2,\ 3\ +\sqrt{3}\ [$

D) $\left]1, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\ U\ [3,+\infty[$ $E)\ [-3,2]\ U\ ]\sqrt{5},\ 6+\sqrt{2}]$

$F)\ ]-\infty, 0[\ U\ ]\sqrt{3},\ 5\ [\ U\ ]8-\sqrt{3}, +\infty[$ G) Outro

Resolução:

$\log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)}\left(\frac{x-1}{2}\right) \geq 0 \to \log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)}\left(\frac{x-1}{2}\right) \geq \log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)} 1$

A inequação tem sentido quando:

$$\text{I)}\left\{\begin{matrix} \frac{x-1}{2} > 0 \\ \left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \\ \left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0(\,base\,) \\ \left(\frac{x-1}{2}\right) \geq 1 \end{matrix}\right\} \quad \text{e} \quad \text{II)}\left\{\begin{matrix} 0 < \left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1 \\ \left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \\ \left(\frac{x-1}{2}\right) > 0 \\ \left(\frac{x-1}{2}\right) \leq 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x > 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \; e \; \left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1 \\ x^2 - x > 0 \\ x > 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Resolução das inequações por parte:

I.2) e II.2 $\quad x^2 - x > 0 \;\rightarrow x(x-1) > 0 \; (\, x_1 = 0 \; e \; x_2 = 1 \,)$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$x^2 - x$	$+$	O	$-$	O	$+$	

I.2) e II.2) $\;\; x \in \;]-\infty; 0[\; \cup \;]1; +\infty[$

II.) $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \; e \; \left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1$

1º) $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \;\rightarrow\; x^2 - x > 0 \;\rightarrow\; x \in \;]-\infty; 0[\; \cup \;]1; +\infty[$

2º) $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1 \;\rightarrow\; x^2 - x - 5 < 0 \; (a = 1; b = -1 \, ; c = -5)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \;\; e \;\; x_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - x$	$+$	O	$-$	O	$+$	

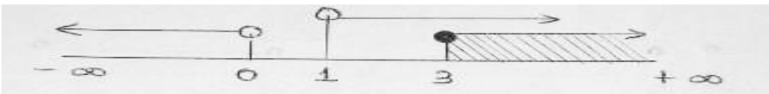
$x \in \left]\frac{1-\sqrt{21}}{2} \, ; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[$, Agora vamos encontrar uma solução única, intercedendo:

$$]-\infty; 0[\; \cup \;]1; +\infty[\; \cap \; \left]\frac{1-\sqrt{21}}{2} \, ; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\; = \; \left]\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0\right[\; \cup \; \left]1; \; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[$$

Colocando nos sistemas de inequações, temos:

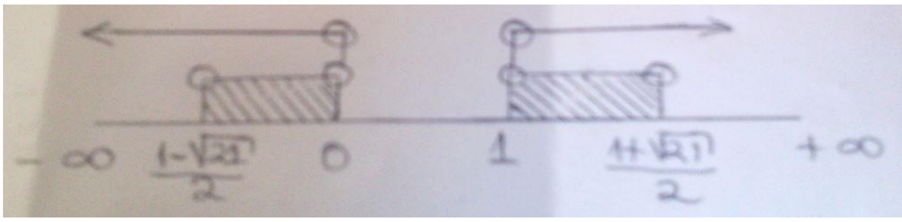
$$\text{I)} \begin{cases}]1; \; +\infty[\\ ]-\infty; 0[\; \cup \;]1; +\infty[\\ [3; \; +\infty[\end{cases} \qquad \begin{cases} \left]\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0\right[\; \cup \; \left]1; \; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\\ ]-\infty; 0[\; \cup \;]1; +\infty[\\ ]1; \; +\infty[\\ ]-\infty, 3] \end{cases}$$

Intercedendo todas as soluções do sistema I) , temos:



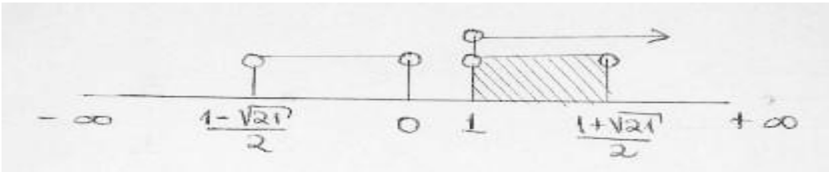
$S_1 = \; [3; \; +\infty[$

Intercedendo a 1º a 2º solução do sistema II) , temos:

$x \in$ 

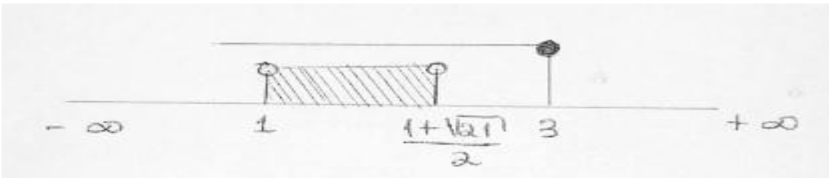
$\left]\frac{1-\sqrt{21}}{2};0\right[\cup \left]1;\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\rightarrow II)\begin{Bmatrix} \left]\frac{1-\sqrt{21}}{2};0\right[\cup \left]1;\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\\ ]1;\ +\infty[\\ ]-\infty,3] \end{Bmatrix}$

Intercedendo no sistema II) : $\left]\frac{1-\sqrt{21}}{2};0\right[\cup \left]1;\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\cap\,]1;\ +\infty[$



$x \in \left]1;\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\rightarrow II)\begin{Bmatrix} \left]1;\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\\ ]-\infty,3] \end{Bmatrix}$,

Intercedendo finalmente as duas últimas soluções do sistema II), temos:



$S_2 = \left]1;\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cup S_2$

$S = \left]1;\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right[\cup\ [3;\ +\infty[$, Línea D)

39) (Exame 2016) Seja $f(x) = \frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$, Calcule $f\,'(0)$

A) $-2\ln 3$ $B)\ -\frac{1}{3}\ln 2$ $C)\ \frac{1}{2}\ln 3$ $D)\ 2\log 3$ $E)\ -3\log 2$ $F)\ 3\ln 2$ $G)\ 1$ $H)\ outro$

Resolução:

Aplicando da derivada do cociente:

$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v-u\,v'}{v^2}$

Derivando a função temos:

$f'(x) = \frac{(2^{2x})'\sqrt{2-2^{2x}} - (2^{2x})(\sqrt{2-2^{2x}})'}{(\sqrt{2-2^{2x}})^2}$ (*)

Sabe-se que:

$se\ y = a^x \rightarrow y' = (x)'\, a^x \ln a$

$se\ y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Voltando em (*), temos:

$$f'(x) = \frac{(2.2^x \ln 2)\sqrt{2-2^{2x}} - (2^{2x})\frac{(2-2^{2x})}{2\left(\sqrt{(2-2^{2x})}\right)}}{(\sqrt{2-2^{2x}})^2} = \frac{\frac{(4.2^x \ln 2)(2-2^{2x}) - 2^{2x}\,(-2.2^{2x}\ln 2)}{2\left(\sqrt{(2-2^{2x})}\right)}}{(\sqrt{2-2^{2x}})^2}$$

$f'(x) = \frac{(4.2^x \ln 2)(2-2^{2x}) + 2.2^{2x}\,(2^{2x}\ln 2)}{2\left(\sqrt{(2-2^{2x})}\right)(\sqrt{2-2^{2x}})^2}$, factorizando $2.2^{2x}\ln 2$, temos:

$f'(x) = \frac{2.2^{2x}\ln 2[2(2-2^{2x}) + 2^{2x}]}{2\,(\sqrt{2-2^{2x}})^3}$, desfazendo o produto e reduzindo os termos semelhantes, fica:

$f'(x) = \frac{2.2^{2x}\ln 2\,(4-2^{2x})}{2\,(\sqrt{2-2^{2x}})^3}$, substituindo o ponto $x = 0$

$$f'(0) = \frac{2.2^{2\times 0}\ln 2\,(3-2^{2\times 0})}{2\,(\sqrt{2-2^{2\times 0}})^3} = \frac{2\ln 2\,(3)}{2} = \frac{(2\times 3)\ln 2}{2} = \frac{6\ln 2}{2}$$

$f'(0) = 3\ln 2$, Línea F)

40) (Exame 2016) Resolva a equação :

$tg(x+1)\,cotg(2x+3) = 0$

Resp:

$x = \frac{\pi k}{2} - 3$ $B) x = \frac{\pi k}{2} + 2$ $C)\ x = 2\pi k + 1$ $D)\ x = 2\pi k - 2$ $E)\ x = \pi k + 1$

$F)\ x = \pi k - 2$ $G) x = 4\pi k - 1$ $H)\ outro$

Resolução:

$tg(x+1)\,cotg(2x+3) = 0 \rightarrow tg(x+1)\frac{1}{tg(2x+3)} = 1 \rightarrow tg(x+1) = tg(2x+3)$

$tg(2x+3) = tg(x+1)$

A equação torna-se mais simples Aplicando o seguinte conceito:

Se $tga = tgb \rightarrow a = b + \pi k$

$tg(x+1) = tg(2x+3) \rightarrow 2x + 3 = x + 1 + \pi k \rightarrow 2x - x = 1 - 3 + \pi k \rightarrow$

$x = -2 + \pi k \rightarrow x = \pi\, k - 2$

CE: condição de existência:

$tg(2x+3) \neq 0 \rightarrow 2x+3 \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow x \neq \frac{\pi k - 3}{2}$

A solução $x = \pi\, k - 2$ satisfaz a condição de existência, logo, a solução da equação é:

$S = \{x = \pi\, k - 2\}$, Línea F)

41) (Exame 2016) Seja $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$, Calcule $f\,'(2)$

A) $-\frac{1}{20}$ $B)$ $\frac{1}{10}$ $C)$ $\frac{2}{3}$ $D)$ $\frac{2}{5}$ $E)$ 1 $F)$ 0 $G)$ $\frac{1}{30}$

Resolução:

Transformando todos os radicais em potência:

$f(x) = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$,

Aplicando a derivada do cociente: $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$, Temos:

$$f'(x) = \frac{\left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}\right]'(x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}\right]\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]'}{\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]^2}$$

Aplicando a derivada da potência no numerador : $se\ y = u^n \rightarrow y' = n\,u^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{5}(x-1)^{-\frac{4}{5}}\right](x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}\right]\left[\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\right]}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Transformando todas as potenciais em radicais, temos:

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{(x-1)^4}}\right]\left[\sqrt[3]{x-1}\right] - \left[\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1}\right]\left[\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)}\right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Substituindo o ponto $x = 2$

$$f'(2) = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{2-1}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{(2-1)^4}}\right]\left[\sqrt[3]{2-1}\right] - \left[\sqrt{2-1} + \sqrt[5]{2-1}\right]\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-1)^2}}\right]}{\sqrt[3]{(2-1)^2}}$$

$$f'(2) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)-(2)\left(\frac{1}{3}\right)}{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{2}{3} = \frac{15+6-20}{30} = \frac{1}{30}$$

$f'(2) = \frac{1}{30}$, Línea G)

42) (Exame 2016) Seja $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}$, calcule $f\,'(1\,)$

A) $\frac{6}{5}$ $B)$ $\frac{7}{6}$ $C)$ $\frac{8}{7}$ $D)$ $\frac{6}{7}$ $E)$ $\frac{5}{6}$ $F)$ 1 $G)$ $\frac{7}{8}$ $H)$ $outro$

Resolução:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}} \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}$$

Para derivar aplicar a fórmula: $se\ y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f'(x) = \frac{\left[x^2-1+(x)^{\frac{1}{3}}\right]'}{2\sqrt{x^2-1+(x)^{\frac{1}{3}}}}$, Aplicando a derivar da potência:

$$y = u^n \rightarrow y' = n\,u^{n-1}$$

$f'(x) = \frac{2x+\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}}{6\sqrt{x^2-1+(x)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{6x+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{x^2-1+(x)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{6x\sqrt[3]{x^2}+1}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}}}$, Substituindo o pontox $= 1$

$f'(1) = \frac{6(1)\sqrt[3]{(1)^2}+1}{6\sqrt[3]{(1)^2}\sqrt{(1)^2-1+\sqrt[3]{1}}} = \frac{7}{6} \rightarrow f'(1) = \frac{7}{6}$, Línea B)

43) (Exame 2016) A área da região compreendida entre a curva $y = 2x^2 - 2x - 1$ e as rectas $x = 1\ e\ x = 10\ e\ o\ eixo\ ox$ é:

Resp: $A)$ $\left(\frac{13\sqrt{2}}{9} - 4\right)u^2$ $B)$ $28u^2$ $C)$ $12\,u^2$ $D)$ $2016\,u^2$ $E)\frac{\sqrt{2}}{6}\,u^2$ $F)$ $57\,u^2$ $\sqrt{2}\,u^2$ $G)$ $outro$

Resolução:

A área da figura será: $A = \int_1^{10}(2x^2 - 2x - 1)\,dx$

$A = 2\int_1^{10} x^2 dx - 2\int_1^{10} x\, dx - \int_1^{10} dx$, Integrando temos:

$A = \frac{2}{3}\,(x^3)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} - 2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} - (x)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} = \frac{2}{3}\,(x^3)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} - (x^2)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} - (x)\begin{matrix}10\\1\end{matrix}$

$A = \frac{2}{3}\,[(10)^3 - (1)^3] - [(10)^2 - (1)^2] - (10 - 1)$

$A = (666 - 99 - 9) \to A = 558\, u^2$, Línea G

44) (Exame 2016) A área da região compreendida entre o eixo OX e o gráfico da função: $f(x) = x\, e^{2x}$ entre $-1 < x < 1$, é:

Resp:

$A)\ \frac{e^4+2e^2}{4e^2}u^2\ \ B)\ \frac{e^4-1}{4e^2}\,u^2\ \ C)\ \frac{e^{-4}+2e^2}{4e^2}\,u^2\ \ D)\ \frac{e^4+2e^2-3}{e^2}\,u^2\ \ E)\ \frac{e^4-e^2-3}{4e^2}\,u^2$

$F)\ \frac{e^4+2e^2-3}{4e^2}\,u^2\ \ G)\ outro$

Resolução:

A área da região será: $A = \int_{-1}^{1} xe^{2x}dx$, Sabe-se que: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

$A = \int_{-1}^{1} xe^{2x}dx = 2\int_0^1 xe^{2x}dx$, Integrando por parte:

$A = 2\left[(u\, v)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \int_0^1 v\, du\right]$

$u = x \to du = dx\, ; v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\, e^{2x}$

$A = 2\left[\left(\frac{1}{2}x\, e^{2x}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\, dx\right] = 2\left[\frac{1}{2}\,\{x\, e^{2x}\}\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \frac{1}{4}\,(e^{2x})\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right]$,

Substituindo os limites de integração vem:

$A = 2\left[\frac{1}{2}\left\{1\times\ e^{2(1)} - (0\times e^{2(0)}\right\} - \frac{1}{4}\left\{\left(e^{2(1)}\right) - \left(e^{2(0)}\right)\right\}\right]$

$A = 2\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4}\right) \to A = \left(\frac{e^2+1}{2}\right)\, u^2$, Línea G)

45)(Exame 2015) Simplifique a expressão: $\frac{sen(2a)+sen\,(5a)-sen(3a)}{\cos(a)+1-2sen^2(2a)}$

Resolução: $\frac{sen(2a)+[sen\,(5a)-sen(3a)]}{\cos(a)+1-2sen^2(2a)}$

Nota que:

$sen(2a) = 2\, sena\cos a$

$sen^2 2a = \frac{1}{2}(1 - cos4a) \to 1 - 2sen^2 2a = cos4a$

$sen\,(5a) - sen(3a) = 2sen\left(\frac{5a-3a}{2}\right)\cos\left(\frac{5a+3a}{2}\right) = 2\, sena\cos 4a$

Voltando na expressão inicial:

$$\frac{2\, sena \cos a + 2\, sena \cos 4a}{\cos(a) + cos4a} = \frac{2\, sena(\, cosa + cos4a)}{[\cos(a) + cos4a]} = 2sena$$

46) (Exame 2015): Resolver a inequação: $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$

Resp: $A)\ x\ \in\ ]-\infty; 1{,}5]$ $B)\ x \in\ [1{,}5\,; 2[$ $C)\ x \in\ ]2;\ +\infty[$
$D)\ x\ \in\ ]-\infty; 1{,}5]\ \cup\ ]2;\ +\infty[$ $E)\ x \in\ ]-\infty; 2[$ $F)\ x \in\ [1{,}5\,; +\infty[$
$G) x\ \in]2; 3\ [$ $H)\ outro$

Resolução:

Pela definição do módulo:

$$|x-3| = \begin{Bmatrix} x-3\ se\ x-3\ \geq 0 \\ -(x-3) se\ x-3\ < 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x-3\ \ se\ x \geq 3 \\ -(x-3)\ se\ x\ < 3 \end{Bmatrix}$$

I) $\begin{Bmatrix} x \geq 3 \\ \frac{x-3}{x^2-5x+6} \geq 2 \end{Bmatrix}$ II) $\begin{Bmatrix} x\ < 3 \\ \frac{-x+3}{x^2-5x+6} \geq 2 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x \geq 3 \\ \frac{x-3}{x^2-5x+6} - 2 \geq 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x\ < 3 \\ \frac{-x+3}{x^2-5x+6} - 2 \geq 0 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x \geq 3 \\ \frac{x-3-2x^2+10x-12}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x\ < 3 \\ \frac{-x+3-2x^2+10x-12}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x \geq 3 \\ \frac{-2x^2+11x-15}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x\ < 3 \\ \frac{-2x^2+9x-9}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{Bmatrix}$

Multiplicando as segundas equações dos dois sistemas de inequações por (-1), as desigualdades invertem-se fica:

$\begin{Bmatrix} x \geq 3 \\ \frac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6} \leq 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x\ < 3 \\ \frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{Bmatrix}$

I.2)

$\frac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6} \leq 0$ (Inequação racional fraccionária)

$2x^2 - 11x + 15 = 0$ Pelo método de Vieth: $x = \frac{5}{2}$ $e\ x = 3$

$x^2 - 5x + 6 \neq 0$ Pelo método de Vieth: $x = 2\ e\ x = 3$

x	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-11x+15$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	
x^2-5x+6		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
S		$+$		$-$		$+$		$+$	

I.2) $x \in \left]2;\ \frac{5}{2}\right]$

II.2) $\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6} \geq 0$ (inequação racional fraccionária)

$2x^2 - 9x + 9 = 0$ Pelo método de Vieth $x = \frac{3}{2}$ $e\ x = 3$

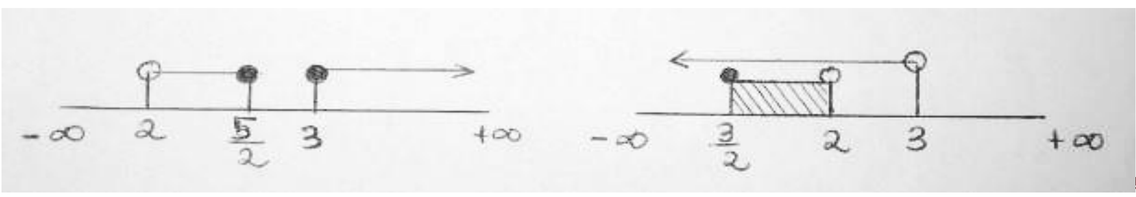
$x^2 - 5x + 6 \neq 0$ Pelo método de Vieth: $x = 2\ e\ x = 3$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x^2-11x+15$		$+$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	
x^2-5x+6		$+$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
S		$+$		$-$		$+$		$+$	

II.2) $x \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right[$

I) $\begin{cases} [3;\ +\infty[\\ x \in \left]2;\ \frac{5}{2}\right] \end{cases}$ II) $\begin{cases}]-\infty; 3[\\ x \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right[\end{cases}$

Achando a intersecção das soluções de cada sistema:



$S(I) = \emptyset$ $\qquad S(II) = \left[\frac{3}{2}\,;2\right[$

A solução do sistema será: $S = S(I) \cup S(II)$

$S = \left[\frac{3}{2}\,;2\right[$ ou $S =$ [1,5 ; 2 [, Línea B)

47) (Exame 2015) Achar a equação da circunferência que passa pela origem e tem o centro em ponto $(6;-8)$

Resp: $A)\ x^2 + y^2 = 36$ $\quad B)\ (x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$

$C)\ x^2 + y^2 = 64$ $\quad D)\ (x-6)^2 + (y+8)^2 = 10$

$E)\ (x-8)^2 + (y+6)^2 = 4$ $\quad F)\ (x+8)^2 + (y-6)^2 = 4$

$G)\ x^2 + y^2 = 4$ $\quad H)\ outro$

Resolução:

A equação de uma circunferência é:

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

O centro é ponto $P(\,6;\,-8),\ \ \alpha = 6\ e\ \beta = -8$

$(x-6)^2 + (y+8)^2 = R^2$

Quando passa pela origem temos: $A(0;0)$

Vamos determinar o raio da circunferência:

$R = d_{AP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

$R == \sqrt{(6-0)^2 + (-8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$

A equação da circunferência será:

$(x-6)^2 + (y+8)^2 = (10)^2 \ \rightarrow\ (x-6)^2 + (y+8)^2 = 100\,, linea\ B)$

48) (Exame 2015) Calcular a área da figura limitada pelas linhas:

$y = x^4\,; y = x$

Resp: $A)\frac{1}{5}$ $\quad B)\frac{2}{5}$ $\quad C)\frac{1}{2}$ $\quad D)\frac{3}{5}$ $\quad E)\frac{7}{10}$ $\quad F)\frac{4}{5}$ $\quad G)\frac{3}{10}$ $\quad H)\ outro$

Resolução:

1º) Passo: Achar a intersecção entre as linhas:

$y = y \;\rightarrow\; x^4 = x = 0 \;\rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

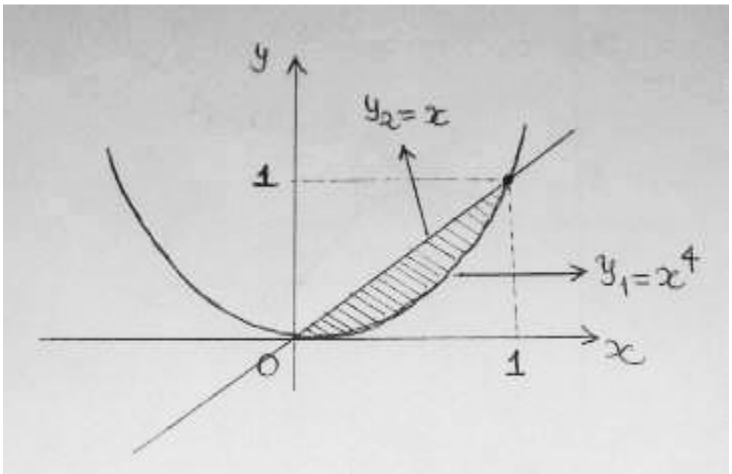
$x(x^3 - 1) = 0$, pelo anulamento do produto, temos:

$x = 0 \quad e \quad x^3 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \;\rightarrow x = 1$

2º) Passo: construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os limites de integração:

$y = x^4$ (função par), $ox: y = 0\,; x = 0\,,\; oy: x = 0\; e\; y = 0$

$y = x$ (função ímpar), $ox: y = 0\,; x = 0\;\;, oy: x = 0\,; y = 0$



3º) Passo: calcular a área

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

$A = \int_0^1 (x - x^4)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 x^4dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left(\frac{x^5}{5}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$A = \left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1^5}{5}\right) - \left(\frac{0^5}{5}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \rightarrow A = \frac{3}{10}$, Línea G)

49) (Exame 2015) Resolva a equação:

$\frac{cot2x}{cotx} + \frac{cotx}{cotg2x} + 2 = 0$

Resp: $A)\; x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} \quad B)\; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad C)\; x = \pm\, \frac{\pi}{3} + \pi k$

$D)\; x = \frac{\pi}{6} + \pi k \quad E)\; x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad F)\; x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

$G)\; x = \; x = (-1)^k \frac{\pi}{3}\; \pi k \quad H)\; outro$

Resolução:

$\frac{cot2x}{cotx} + \frac{cotx}{cotg2x} + 2 = 0$, Achando o denominador comum :

$\frac{cotg^2 2x + cotg^2 x + 2cotg2x\, cotgx}{cotg2x\, cotgx} = 0 \rightarrow \frac{cotg^2 2x + 2cotg2x\, cotgx + cotg^2 x}{cotg2x\, cotgx} = 0$

Obs.: $cotg^2 2x + 2cotg2x\, cotgx + cotg^2 x = (cotg2x + cotgx)^2$

$\frac{(cotg2x + cotgx)^2}{cotg2x\, cotgx} = 0$ (equação racional fraccionária)

$(cotg2x + cotgx)^2 = 0$ e $cotg2x\, cotgx \neq 0$

$(cotg2x + cotgx)^2 = 0 \rightarrow cotg2x + cotgx = 0\ (*)$

Sabe-se que: $cotg2x = \frac{cotg^2 x - 1}{2cotgx}$

Substituindo em (*), temos:

$\frac{cotg^2 x - 1}{2cotgx} + cotgx = 0$, achando o denominador comum , fica:

$\frac{3cotg^2 x - 1}{2\, cotgx} = 0$

$3cotg^2 x - 1 = 0 \rightarrow cotgx = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$cotgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow cotgx = cotg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \alpha = \frac{\pi}{3}$

$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k$

$cotgx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow cotgx = cotg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow cotgx = -cotg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \alpha = -\frac{\pi}{3}$

$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

Condição de existência:

$cotgx \neq 0 \rightarrow x \neq \pi k$

$cotg2x \neq 0 \rightarrow 2x \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}$

As soluções $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$ e $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ satisfazem a condição de existência, logo a solução da equação é:

$S = \left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \right\}$, Línea C

50) (Exame 2015) Resolva a equação:

$cotgx - tgx = \frac{cosx - senx}{0{,}5\ sen2x}$

Resp: $A)\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $\quad B)\ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $\quad C)\ (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$

$D)\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\quad E)\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\quad F)\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$G)\ x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ $\quad H)\ outro$

Resolução:

$\frac{cosx}{senx} - \frac{senx}{cosx} = \frac{cosx - senx}{\frac{1}{2}sen2x} \to \frac{(cosx - senx)(cosx + senx)}{senx\ cosx} - \frac{2(cosx - senx)}{sen2x} = 0$

OBs: $2senx\ cosx = sen2x\ \to senx\ cosx = \frac{sen2x}{2}$

$\frac{(cosx - senx)(cosx + senx)}{\frac{sen2x}{2}} - \frac{2(cosx - senx)}{sen2x} = 0$

$\frac{2(cosx - senx)(cosx + senx)}{sen2x} - \frac{2(cosx - senx)}{sen2x} = 0$, factorizando $2(cosx - senx)$

$2(cosx - senx)\left(\frac{cosx + senx - 1}{sen2x}\right) = 0$

Anulando os produtos temos:

$2(cosx - senx) = 0\ , cosx + senx - 1 = 0\ , sen2x\ \neq 0$

$2(cosx - senx) = 0 \to senx = cosx\ (dividir\ por\ cosx) \to tgx = 1$

$tgx = 1\ \to tgx = tg(1), \alpha = \frac{\pi}{4}$

$x = \alpha + \pi k\ \to x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$cosx + senx - 1 = 0\ \to cosx + senx = 1$,Elevar ambos membos $(\ )^2$

$1 + 2sen2x = 1\ \to sen2x = 0 \to sen2x = sen(0), \alpha = 0°$

$2x = \pi k\ \to x = \frac{\pi k}{2}$

$sen2x \neq 0 \rightarrow 2x \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}$

A solução $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ satisfaz e a solução $x = \frac{\pi k}{2}$ não satisfaz, logo a solução da equação é: $S = \left\{x = \frac{\pi}{4} + \pi k\ ,\ k \in z\right\}$, Línea F)

51) (Exame 2015) calcular a área da figura limitada pelas linhas $y = \frac{1}{x^2}\ ; y = 0 : x = 0{,}5\ e\ x = 2{,}5$

Resp: $A)$ 1,5 $B)$ 1,6 $C)$ 1,4 $D)$ 1,8 $E)$ 2,0 $F)$ 1,9 $G)$ 1,7 $H)\ outro$

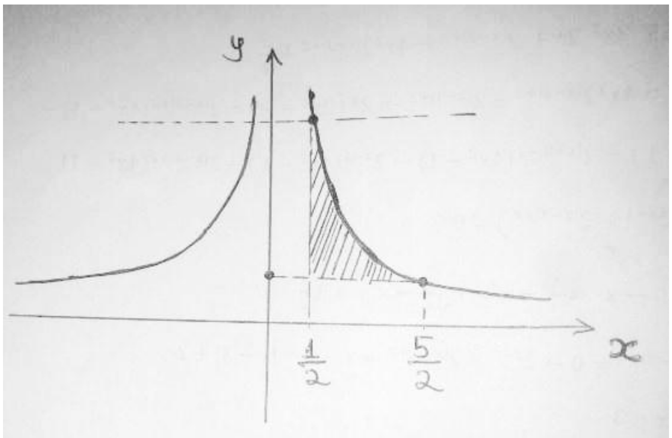
Resolução:

1º) construir o gráfico para visualiza a área a calcular e os limites de integração:

$y = \frac{1}{x^2}$ (Função par) , $x = 0{,}5 \rightarrow x = \frac{1}{2}\ e\ x = 2{,}5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

Quando $x \rightarrow +\infty\ , y \rightarrow 0$

$se\ x = 0{,}5\ , y = 4\ \ ; se\ x = 2{,}5\ , y = \frac{4}{25}$



2º) Passo: calcular a área:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} x^{-2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} = -\left(\frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = -\left(\frac{2}{5} - 2\right)$$

$A = -\left(-\frac{8}{5}\right) \rightarrow A = 1{,}6$ Línea B)

52) (Exame 2015) Encontre a função $F(x)$ cujo gráfico passa pelo ponto $M(3;-2)$ e $F'(x) = 4x^2 + 9x^{-2}$

Resp: $A)\ x+1 \quad B)\ \frac{4x}{3} + x + 10 \quad C)\ \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \quad D)\ 4x^3 - \frac{9}{x^3}$

$E)\ \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{x} - 35 \quad F)\ \frac{x^{-1}}{2} + x^{-2} - 3 \quad G)\ 3x + x^2 + 2 \quad H)\ outro$

Resolução :

Vamos encontrar a primitiva de $F'(x)$ aplicando integral indefinida:

$F(x) = I = \int F'(x)\, dx$

$I = \int (4x^2 + 9x^{-2})\text{dx} = \int 4x^2 dx + \int 9x^{-2} dx = 4\int x^2 dx + 9\int x^{-2} dx$

$I = \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{x} + c \ \rightarrow F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{x} + c$

Vamos achar a constante c :

Como o gráfico de $F(x)$ passa pelo ponto $M(3;-2)$, então:

$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{x} + c \rightarrow$

$-2 = \frac{4}{3}(3)^3 - \frac{9}{3} + c \rightarrow -2 = 33 + c \ \rightarrow c = -35$

Então a função $F(x)$ procurada será:

$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{x} - 35$, Línea E)

53) (Exame 2015) Simplificar a expressão:

$36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}$

Resp: $A)\ 0 \quad B)\ 1 \quad C)\ 25 \quad D) -1 \quad E)\ 49 \quad F)\ 4 \quad G)\ 24 \quad H)\ outro$

Resolução:

$36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36} \rightarrow (6^2)^{\log_6 5} + 10.10^{-\log 2} - 3^{\log_{(3^2)}(36)} \rightarrow$

$6^{2\log_6 5} + 10.10^{\log(2^{-1})} - 3^{\frac{1}{2}\log_3 36} \rightarrow 6^{\log_6(5^2)} + 10.10^{\log\left(\frac{1}{2}\right)} - 3^{\log_3\left(36^{\frac{1}{2}}\right)} \rightarrow$

$6^{\log_6 25} + 10.10^{\log\left(\frac{1}{2}\right)} - 3^{\log_3(\sqrt{36})} \rightarrow 6^{\log_6 25} + 10.10^{\log\left(\frac{1}{2}\right)} - 3^{\log_3(6)}$ (*)

Nota que: $6^{\log_6 25} = 25 \ ; \ 10^{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \ ; \ 3^{\log_3(6)} = 6$, substituindo em (*):

$25 + 10\left(\frac{1}{2}\right) - 6 \rightarrow 25 + 5 - 6 \rightarrow 25 - 10 = 24$, Línea G)

54) (Exame 2015) Resolva a inequação: $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$

Resp: $A)\ (0{:}\,10)$ $B)\ [-1; 0[$ $C)\ ]-1; 1]$ $D)\ [2{,}5\,; 7{,}5]$ $E)\ (0; 1)$

$F)\ (-1{,}5\,; 2)$ $G)\ (-\infty; 0) \cup [1; 2]$

Resolução:

$5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}} \rightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 + 5 < 5.5^{\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}$,Fazendo: $5^{\sqrt{x}} = t$, temos:

Condição de existência: $x \geq 0 \rightarrow S_1 = [0; +\infty[$

$t^2 + 5 < 5t + t \rightarrow t^2 + 5 < 6t \rightarrow t^2 - 6t + 5 < 0$ (inequação do 2º grau)

$(a = 1; b = -6\,; c = 5)$

Aplicando a fórmula resolvente, temos:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = \frac{6+4}{2} \rightarrow t_1 = 5 \quad ; \quad t_2 = \frac{6-4}{2} \rightarrow t_2 = 1$$

t	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$t^2 - 6t + 5 < 0$		+	O	−	O	+	

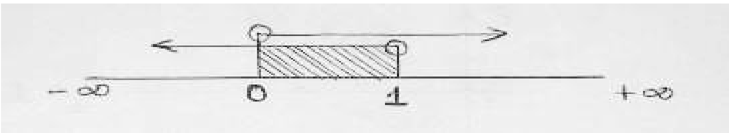
$t \in [1; 5\,]$ ou $1 < t < 5$ $ou\ ainda$ $t > 1$ e $t < 5$

Voltando na suposição:

$$\begin{cases} t > 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} > 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} > 5^0 \rightarrow \sqrt{x} > 0 \rightarrow (\sqrt{x})^2 > 0^2 \rightarrow x > 0 \rightarrow x \in\,]0; \infty[\\ t < 5 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} < 5^1 \rightarrow \sqrt{x} < 1 \rightarrow (\sqrt{x})^2 < (1)^2 \rightarrow x < 1 \rightarrow x \in\,]-\infty;\ 1[\end{cases}$$

A solução do sistema de inequação é: $S_2 = x \in\,]0; \infty[\ \cap\ x \in\,]-\infty;\ 1[\ =\ ]0; 1[$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cap S_2$



$S = (0; 1)$, Línea E)

55) (Exame 2015) A equação $x^2 - 2x + c = 0$ tem raízes $x_1\ e\ x_2$ que gozam à condição $7x_2 - 4x_1 = 47$. Determine o valor de c.

Resp: $A)\ 20$ $B) - 15$ $C)\ 0$ $D)\ 1$ $E)\ 10$ $F) - 1$ $G) - 5$ $H)\ outro$

Resolução:

$7x_2 - 4x_1 = 47$ (*)

Pela fórmula de composição de uma equação quadrática:

$x^2 - sx + p = 0$ onde $s = x_1 + x_2$ $e\ p = x_1 \times x_2$, na equação dada: $x^2 - 2x + c = 0$

$s = 2\ e\ p = c$

$s = x_1 + x_2 = 2 \rightarrow x_1 + x_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2 - x_2$ (**)

$p = x_1 \times x_2 \rightarrow x_1 \times x_2 = c$ (***)

Substituindo a equação (**) em (*) temos:

$7x_2 - 4x_1 = 47 \rightarrow 7x_2 - 4(2 - x_2) = 47 \rightarrow 7x_2 - 8 + 4x_2 = 47 \rightarrow$

$11x_2 = 47 + 8 \rightarrow 11x_2 = 55 \rightarrow x_2 = \frac{55}{11} \rightarrow x_2 = 5$

Substituindo $x_2 = 5$ na equação (**) para encontrar x_1 temos:

$x_1 = 2 - x_2 \rightarrow x_1 = 2 - 5 \rightarrow x_1 = -3$

Pela equação (***) sabe-se que: $x_1 \times x_2 = c$

$(-3) \times (5) = c \rightarrow c = -15$, Línea B)

56) (Exame 2015) para qual valor de x a função: $y = \sqrt[4]{10 + x} - \sqrt{2 - x}$ seja positiva:

Resp: $A)\ (-1; 1)$ $B)\ [0; 2]$ $C)\ [-5; 0[$ $D)\ (-2; 3)$ $E)\ ]-1; 2]$ $F)\ -5$ $G)\ 4$ $H)\ outro$

Resolução:

Condição de existência:

$10 + x \geq 0 \rightarrow x \geq -10 \rightarrow x \in [-10; +\infty[$

$2 - x \geq 0$ (multiplicando pela constante -1);

$x - 2 \leq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow x \in]-\infty; 2]$

A solução verdadeira da condição de existência é:

$S_1 = x \in [-10; +\infty[\cap x \in]-\infty; 2] \rightarrow S_1 = [-10; 2]$

O valor de x na função será positivo se:

$\sqrt[4]{10 + x} > \sqrt{2 - x}$ (inequação irracional)

Elevando ambos os membros da desigualdade a quarta: $(\quad)^4$, temos:

$(\sqrt[4]{10 + x})^4 > (\sqrt{2 - x})^2 \rightarrow 10 + x > (2 - x)^2 \rightarrow 10 + x > 4 - 4x + x^2 \rightarrow$

$10 + x > 4 - 4x + x^2 \rightarrow x^2 - 5x - 6 < 0$, pelo método de vieth, temos:

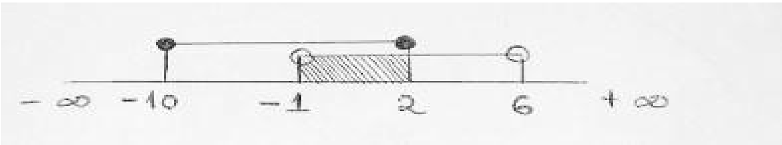
$x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1) < 0 \ \rightarrow (x_1 = 6 \ e \ x_2 = -1)$

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$x^2 - 5x - 6 \ < 0 \ (a > 0)$		$+$	O	$-$	O	$+$	

A solução da inequação do 2º grau é: $s_2 = \ ]-1; 6[$

O valor de x na função para que seja positiva, é encontrado, fazendo:

$S = \ S_1 \ \cap \ S_2$



$S = \ ]-1; 2]$, Línea E)

57) (Exame 2015) calcule a área limitada pelas linhas $y = 2x - x^2; y = \frac{3}{4}$

Resp: $A)\frac{1}{3} \ \ B)\frac{1}{6} \ \ C)\frac{5}{6} \ \ D)\frac{1}{2} \ \ E)\ 1 \ \ F)\frac{2}{3} \ \ G)\frac{7}{6} \ \ G)\ outro$

Resolução:

1º) Achar a intersecção entre as linhas fazendo: $y = y$

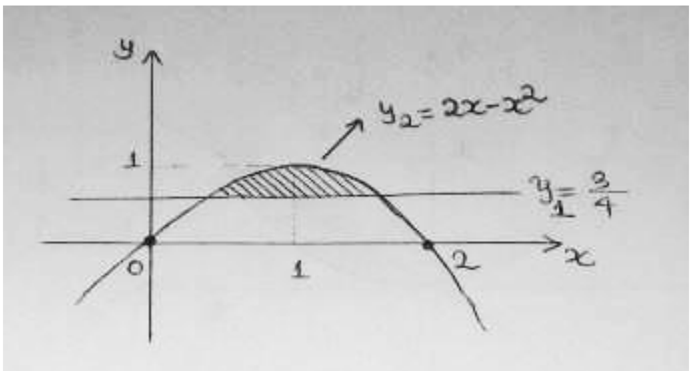
$2x - x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow 8x - 4x^2 - 3 = 0$, Multiplicando pela constante (-1), temos.

$4x^2 - 8x + 3 = 0 \ \rightarrow (2x-1)(2x-3) = 0 \rightarrow \left(x_1 = \frac{1}{2} \ \ e \ x_2 = \frac{3}{2}\right)$

2º) Construir o gráfico:

$y = 2x - x^2, ox{:}\ y = 0 \ , x = 0 \ e \ x = \frac{1}{2} \ ; oy{:}\ x = 0 \ e \ y = 0$

$y = \frac{3}{4}(Recta \ horizontal)$



3º) Calcular a área:

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[2x - x^2 - \left(\frac{3}{4}\right)\right] dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (8x - 4x^2 - 3)dx$

$A = \frac{1}{4} \left[8 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x\, dx - 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 dx - 3 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx\right]$, Integrando, temos: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$A = \frac{1}{4} \left[8.\frac{1}{2} (x^2)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - 4\,.\frac{1}{3} (x)^3\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - 3\,(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\right] =$

$A = \frac{1}{4} \left[4\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} - \frac{4}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} - 3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[8 - \frac{13}{3} - 3\right]$

$A = \frac{2}{3}$, Línea F)

58) (Exame 2014) Resolve a equação:

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1$$

Resp: $A)\ x_1 = \frac{1}{3}\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2}\ \ ,x_3 = 2 + \sqrt{3}\ ,\ x_4 = 2 - \sqrt{3}$

$B)\ x_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_2 = -\frac{1}{3}\ \ ,x_3 = 2 + \sqrt{3}\ ,\ x_4 = 2 - \sqrt{3}$

$C)\ x_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2}\ \ ,x_3 = 3 + \sqrt{2}\ ,\ x_4 = 3 - \sqrt{2}$

$D)\ x_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2}\ \ ,x_3 = 2 + \sqrt{3}\ ,\ x_4 = 2 - \sqrt{3}$

$E)\ x_1 = \frac{1}{3}\ ,\ x_2 = -\frac{1}{3}\ \ ,x_3 = 3 + 2\ ,\ x_4 = 3 - \sqrt{2}$

$F)\ x_1 = \frac{1}{3}\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2}\ \ ,x_3 = 3 + \sqrt{2}\ ,\ x_4 = 3 - \sqrt{2}$

$G)\ x_1 = 2 + \sqrt{3},\ x_2 = 2 - \sqrt{3}\ \ ,x_3 = 3 + \sqrt{2}\ ,\ x_4 = 3 - \sqrt{2}$

Res.: $p(x) = 4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1$ (Teorema do resto)

$$p(1/2) = 4(1/2)^4 - 16(1/2)^3 + 3(1/2)^2 + 4(1/2) - 1$$

$$p(1/2) = 0\,, isto\ quer\ dizer\ x_1 = 1/2\ \text{é}\ uma\ das\ raizes\ do\ polinómio$$

$x - 1/2 = 0 \rightarrow D(x) = x - 1/2$(Método dos coeficientes indeterminados)

$$p(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

$$gr\big(Q(x)\big) = gr\big(P(x)\big) - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = (x - {}^1/_2)(\,ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = ax^4 + x^3\left(b - \frac{a}{2}\right) + x^2\left(c - \frac{b}{2}\right) + x\left(d - \frac{c}{2}\right) - \frac{d}{2}$$

$$a = 4, \qquad b - \frac{a}{2} = -16 \to b = -14, \qquad c - \frac{b}{2} = 3 \to c = -4, \qquad d - \frac{c}{2} = 4 \to d = 2$$

$$gr\big(R(x)\big) = gr\big(D(x)\big) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Substituindo os coeficientes encontrados no Q(x) temos:

$(x - {}^1/_2)(4x^3 - 14x^2 - 4x + 2) = 0\,, \quad x_1 = {}^1/_2 \; e \; 4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = 0$

$$p(x)_1 = 4x^3 - 14x^2 - 4x + 2$$

$$p(-{}^1/_2)_1 = 4(-{}^1/_2)^3 - 14(-{}^1/_2)^2 - 4(-{}^1/_2) + 2$$

$$p(-{}^1/_2)_1 = 0, isto\ quer\ dizer\ x_2 = -{}^1/_2 \text{ é } uma\ das\ raizes\ do\ polinómio$$

$$x + {}^1/_2 = 0 \to D(x)_1 = x + {}^1/_2$$

$$p(x)_1 = D(x)_1.Q(x)_1 + R(x)_1$$

$$gr(Q(x)_1) = 3 - 1 = 2, \;\; gr(R(x)_1) = 1 - 1 = 0$$

$$4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = \big(x + {}^1/_2\big)(a_1x^2 + b_1x + c_1)$$

$$4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = ax^3 + x^2\left(b_1 + \frac{a_1}{2}\right) + x\left(c_1 + \frac{b_1}{2}\right) + \frac{c_1}{2}$$

$$a_1 = 4\,, \qquad b_1 + \frac{a}{2} = -14 \to b_1 = -16, \qquad c_1 + \frac{b_1}{2} = -4 \to c_1 = 4$$

Substituindo os coeficientes encontrados no $Q(x)_1\,, temos$:

$p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 16x + 4) = 0$, $x_2 = -{}^{1}/_{2}$ e $4x^2 - 16x + 4 = 0$

$$4x^2 - 16x + 4 = 0, \qquad \Delta = 192, \qquad x_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{192}}{8} = \frac{16 \pm 16\sqrt{3}}{8}$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{3} \; e \; x_4 = 2 - \sqrt{3}$$

$$S: \left(\frac{1}{2}\,; -\frac{1}{2}\,;\, 2 + \sqrt{3}\,;\, 2 - \sqrt{3}\right)$$

59)(Exame 2014) Resolva a equação:

$sen2x + 2cotgx = 3$

Resp: $A)\ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $B)\ x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ $C)\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$D) x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ $E)\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $F)\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ $G)\ x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$H)\ outro$

Resolução:

$2senx\ cosx + 2cotgx = 3$

Sabe-se que: $senx = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$, $cosx = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$, $cotgx = \frac{1}{tgx}$

$2\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} \times \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} + \frac{2}{tgx} = 3 \to \frac{2tgx}{1+tg^2x} + \frac{2}{tgx} = 3$

$\frac{2tg^2x+2+2tg^2x}{tgx+tg^3x} = 3 \to \frac{4tg^2x+2}{tgx+tg^3x} = 3 \to 4tg^2x + 2 = 3tgx + 3tg^3x$

$3tg^3x - 4tg^2x + 3tgx - 2 = 0$, $fazendo: tgx = t$

$3t^3 - 4t^2 + 3t - 2 = 0$

Decompondo e factorizando os termos:

$3t^3 - 3t^2 - t^2 + 2t + t - 2 = 0$

$(3t^3 - 3t^2) + (-t^2 + t) + (2t - 2) = 0$

$3t^2(t-1) - t(t-1) + 2(t-1) = 0$

$(t-1)(3t^2 - t + 2) = 0$, Aplicando o anulamento do produto:

$(t-1)=0\ e\ (3t^2-t+2)=0$

$(t-1)=0\ \rightarrow\ t_1=1$

$3t^2-t+2=0\ (\ \Delta< 0, \nexists\ t\ )$

Voltando na suposição:

$tgx=t\ \rightarrow tgx=1 \rightarrow tgx=tg\ (1)\ ,\alpha=\ \frac{\pi}{4}$

$x=\ \alpha+\ \pi k\ \ \rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k$

Condição de existência:

$tgx\ \neq 0\ \rightarrow x\neq\ \pi\ k$

A solução $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ Satisfaz a condição de existência, o logo:

$S=\ \left\{x=\frac{\pi}{4}+\pi k\right\}$, Línea F

60) (Exame 2014) A recta que passa pelo ponto $P(1;5;2)$ e é paralela ao vector $\vec{v}=(4;3;7)$, tem como equação paramétrica:

$A)\ x-3=2t; y-5=t\ e\ z-1=7t$ $B)\ x-2=2t\ ; y-3=t\ e\ z-7=7t$

$C)\ x-1=4t\ ; y-5=3t\ e\ z-2=7t$ $D)\ x-8=5t; y-15=3t\ e\ z-11=17t$

$E)\ x-7=5t\ ; y-1=3t\ e\ z-18=17t$ $F)\ x-4=5t\ ; y-6=3t\ e\ z-8=17t$

$G)\ x-8=11t\ ; y-15=7t\ \ e\ z-11=3t$ $H)\ outro$

Resolução:

A equação paramétrica de uma recta que passa pelo ponto $P\ (x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1\ )$ e é paralela ao vector $\vec{v}=(a; b\ ; c)$ tem como equação paramétrica:

$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \\ z=z_1+ct \end{cases}$ em que no ponto $P(1;5;2)$, $x_1=1$; $y_1=5\ e\ z_1=2$

E no vector $\vec{v}=(4;3;7), a=4\ ; b=3\ e\ c=7$, Substituindo temos:

$$\begin{Bmatrix} x = 1 + 4t \\ y = 5 + 3t \\ z = 2 + 7t \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x - 1 = 4t \\ y - 5 = 3t \\ z - 2 = 7t \end{Bmatrix} \;;$$

$x - 1 = 4t; y - 5 = 3t\ e\ z - 2 = 7t\ , Linea\ C$

61) (Exame 2014) Calcular a área da figura limitada pelas linhas

$y = x^3\ ; y = 1\,; x = 2$

Resp: $A)$ 2,25 $B)$ 2 $C)$ 2,75 $D)$ 2,35 $E)$ 2,5 $F)$ 2,65 $G)$ 3 $H)$ $outro$

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as líneas:

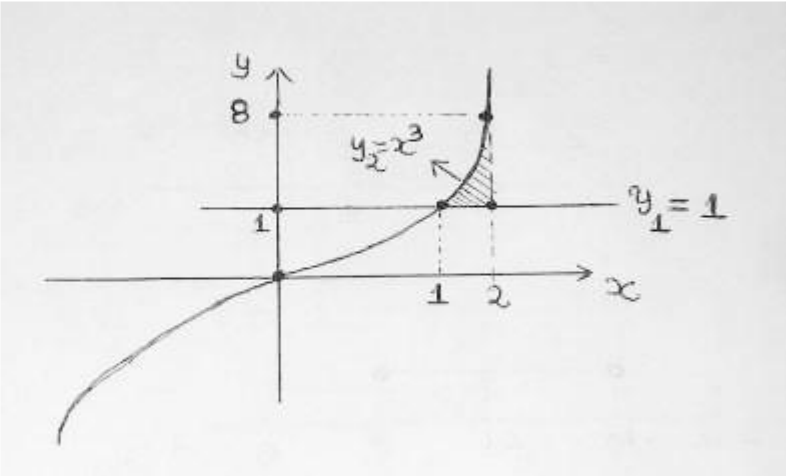
$y = y \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1\,, se\ x = 1\,, y = 1$

$se\ x = 2 \rightarrow y = (2)^3 \rightarrow y = 8$

2º) Passo: construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os limites de integração:

$y = x^3(\ parábola\ cúbica)$

$y = 1(recta\ horizontal), x = 2\ (recta\ vertical)$



3º) Passo calcular a área:

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

$A = \int_1^2 (x^3 - 1)dx = \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)_1^2 - (x)_1^2$

$A = \frac{1}{4}[(2)^4 - (1)^4] - (2-1) = \frac{15}{4} - 1 = \frac{11}{4} \rightarrow A = 2{,}75 \ \ line\ C)$

62) (Exame 2013) simplifique a expressão:

$$\sqrt{(\sqrt{a}\ +2)^2 - 8\sqrt{a}}\ + \sqrt{(\sqrt{a}\ -2)^2 + 8\sqrt{a}}\quad ,\ 0 \leq a\ \leq 4$$

Resolução:

Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$\sqrt{a + 4\sqrt{a} + 4 - 8\sqrt{a}}\ + \sqrt{a - 4\sqrt{a} + 4 + 8\sqrt{a}}$

$\sqrt{a - 4\sqrt{a} + 4}\ + \sqrt{a + 4\sqrt{a} + 4}$

$\sqrt{(\sqrt{a}\,)^2 - 2(2\sqrt{a}) + 2^2}\ + \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 + 2(2\sqrt{a}\,) + 2^2}$

Nota que: $x^2 \pm 2\,xy\ + y^2 =\ (x \pm y)^2$

$\sqrt{\left(\sqrt{a} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{a} + 2\right)^2}$

Pela condição: $0 \leq a\ \leq 4$; $\left|\sqrt{a} - 2\right| = \left(2 - \sqrt{a}\,\right)$

$\sqrt{\left(2 - \sqrt{a}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{a} + 2\right)^2}$

$2 - \sqrt{a} + \sqrt{a} + 2 = 4$

63) (Exame 2013) Resolva a equação: $3^{log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$

Resp: $A)\ x_1 = 9\ \ B)\ x_2 = \frac{1}{9}\ \ C)\ x_1 = 9\,;\ x_2 = \frac{1}{9}\ \ D)\ x_1 = \frac{1}{3}\ ;\ x_2 = 9$

$E)\ x_1 = 3\,;\ x_2 = \frac{1}{9}\ \ F)\ x_1 = \frac{1}{3}\ \ G)\ x_1 = 0\quad H)\ outro$

Resolução:

$3^{log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162 \rightarrow\ 3^{(\log_3 x)^2} + x^{\log_3 x} = 162$

Fazendo: $\log_3 x = t\ \rightarrow x = 3^t$

Condição de existência: $(x\ > 0\ e\ 0\ < x\ \neq 1)$

$3^{t^2} + (3^t)^t = 162\ \rightarrow\ 3^{t^2} + 3^{t^2} = 162 \rightarrow 2.3^{t^2} = 162 \rightarrow 3^{t^2} = \frac{162}{2} \rightarrow 3^{t^2} = 81$

$3^{t^2} = 3^4 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = \pm\sqrt{4}\ \rightarrow t = \pm 2\ \rightarrow\ t_1 = 2\ e\ t_2 = -2$

Voltando na suposição:

$$\left\{\begin{array}{c} \log_3 x = 2 \rightarrow \ x_1 = 3^2 \rightarrow x_1 = 9 \\ \log_3 x = -2 \rightarrow \ x_2 = 3^{-2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{3^2} \rightarrow \ x_2 = \frac{1}{9} \end{array}\right\}$$

A solução $x_1 = 9$ e $x_2 = \frac{1}{9}$ satisfazem a condição logo:

$S = \left\{x_1 = 9\,;\ \ x_2 = \frac{1}{9}\right\}$, Línea C)

64) (Exame 2013) Simplifique a expressão:

$\sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5} \qquad se -4 \leq a \leq -3$

Resp: $A)\ 1 \quad B)\ 2\sqrt{a+4} \quad C)\ \sqrt{a+4} \quad D)\ 4 \quad E)\ 2 + \sqrt{a+4} \quad F)\ 1 - \sqrt{a+4} \quad G)\ 2 \quad H)\ outro$

Resolução:

Fazendo: $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5}$, elevando ao quandrado, temos:

$$A^2 = \left(\sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5}\right)^2$$

$$A^2 = a + 2\sqrt{a+4} + 5 + 2\sqrt{\left(a + 2\sqrt{a+4} + 5\right)\left(a - 2\sqrt{a+4} + 5\right)} + a - 2\sqrt{a+4} + 5$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a+4} + 5a + 2a\sqrt{a+4} - 4(a+4) + 10\sqrt{a+4} + 5a - 10\sqrt{a+5} + 25}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 10a - 4(a+4) + 25}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 10a - 4a + 25 - 16} = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 6a + 9}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 6a + 9}$$

Nota: $a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$ (quadrado da soma)

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{(a+3)^2} \quad (*)$$

Pela condição: $-4 \leq a \leq -3$; $\sqrt{(a+3)^2} = -(a+3)$, substituindo em (*) , temos:

$A^2 = 2a + 10 - 2(a+3) = 2a + 10 - 2a - 6 = 4 \rightarrow A^2 = 4 \rightarrow A = \sqrt{4} \rightarrow$

$A = 2$, Línea G

65) (Exame 2013) Resolva a equação:

$\sqrt{senx}\,(4 - 5cosx - 2sen^2x) = 0$

Resp: $A)\ x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k\ ;\ \ x_2 = \pi k\ \ B)\ x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\ \ C)\ x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k\ ;\ x_2 = \pi k$

$D)\ x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k\ \ E)\ x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k\ ;\ \ x_2 = 2\pi k\ \ \ F)\ \ x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k\ \ \ G)\ x_1 =$
$\pi k\ \ H)\ outro$

Resolução:

Condição de existência:

$senx\ \geq 0\ \rightarrow 0° + 2\pi k\ \leq x\ \ \leq\ \pi + 2\pi k\ \rightarrow 2\pi k\ \leq x\ \leq\ \pi + 2\pi k$

$\sqrt{senx}\,(4 - 5cosx - 2sen^2x\,) = 0$, aplicando a lei do anulamento do produto:

$\sqrt{senx} = 0\ \rightarrow\ \left(\sqrt{senx}\right)^2 = (0)^2 \rightarrow senx = 0\ (\ \alpha = 0°)$

$,caso\ particular\ de\ equações\ do\ tipo\ senx\ \ , x = \alpha + \pi k\ \ \rightarrow x_2 = \pi k$

$(4 - 5cosx - 2sen^2x\,) = 0 \rightarrow 4 - 5\ cosx - 2(1 - cos^2x) = 0\ \rightarrow$

$4 - 5cosx - 2 + 2cos^2x = 0\ \ \rightarrow 2cos^2x - 5cosx + 2 = 0$

Fazendo: $cosx = t\ , t\ \in\ [-1;1]$

$2t^2 - 5t + 2 = 0\ (equação\ do\ 2º;\ \ \ a = 2\ ; b = -5\ ; c = 2\ )$

$t = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(2)}}{2(2)} = \frac{5\pm3}{4}$

$t_1 = \frac{5-3}{4} \rightarrow\ t_1 = \frac{1}{2}\ (satisfaz);\ \ \ t_2 = \frac{5+3}{4} \rightarrow t_2 = 2(não\ satisfaz)$

A única raiz que pertence no intervalo de $[-1;1]$ é $t_1 = \frac{1}{2}$

Voltando na suposição:

$cosx =\ t_2\ \ \rightarrow cosx = \frac{1}{2}\ \rightarrow cosx = \cos\left(\frac{1}{2}\right)\ \rightarrow \left(\ \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}\ \right)$

Formula dos cossenos: $x =\ \pm\alpha + 2\pi k$

$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\ \ ou - \frac{\pi}{3} + 2\pi k\ \ \ \cup\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

A solução $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ não satisfaz a condição de existência, logo a solução verdadeira da equação é: $S =\ \left\{x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k\ ;\ \ x_2 = \pi k\right\}$, Línea C)

66)(Exame 2012) Simplifique a expressão:

$$\left(a^{1/3}+b+\frac{4b^2-a^{2/3}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{a^{1/3}}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right)$$

Resp: $A)\ \sqrt[3]{a^2}-b^2\ \ B)\ b(\sqrt[3]{a^2}-b^2)\ \ C)\ b(b+\sqrt[3]{a})\ \ D)\ \sqrt[3]{a^2}+b^2$

$E)\ \sqrt[3]{a}\,(b-\sqrt[3]{a})$ F) $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a}+b}$ $\quad G)\ \frac{\sqrt[3]{a}-b}{b} \quad H)\ outro$

Resolução:

$$\left(\sqrt[3]{a}+b+\frac{4b^2-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left[\frac{\sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{a}-b)(\sqrt[3]{a}+b)}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right]$$

$$\left[\frac{(\sqrt[3]{a}-b)(\sqrt[3]{a}+b)+4b^2-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}-b}\right]:\left[\frac{\sqrt[3]{a}-2(\sqrt[3]{a}-b)+\sqrt[3]{a}+b}{(\sqrt[3]{a}-b)(\sqrt[3]{a}+b)}\right]=$$

$$\left[\frac{\sqrt[3]{a^2}-b\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{a}-b^2+4b^2-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}-b}\right]\left[\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{a}+2b+\sqrt[3]{a}+b}{(\sqrt[3]{a}-b)(\sqrt[3]{a}+b)}\right]=$$

$$\left[\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a}-b}\right]:\left[\frac{3b}{(\sqrt[3]{a}-b)(\sqrt[3]{a}+b)}\right]=$$

$$\left[\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a}-b}\right]\times\left[\frac{(\sqrt[3]{a}-b)(\sqrt[3]{a}+b)}{3b}\right]=b(\sqrt[3]{a}+b)$$

67) (Exame 2010/2012) Ache a solução da equação:

$$x^2.2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2.2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$$

Resp: $A)\ x_1=\frac{1}{2}\cup\ x_2\ \in[3;\ +\infty[\ \ B)\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\ ;\ x_3=3$

$C)\ x_1=\frac{1}{2}\ ;\ x_2=3\ \ D)\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\cup x_2\in[3;4]$

$E)\ x_1=-\frac{1}{2}\cup x_2\in[-3;3]\ \ F)\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\cup x_2\in[3;+\infty]$

$G)\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\quad H)\ outro$

Resolução:

$$2x^2.2^x+\ 2^{|x-3|+2}=4x^22^{|x-3|+2}+\frac{2^x}{2}$$

$$2x^2.2^x - \frac{2^x}{2} = 4x^2 2^{|x-3|+2} - 2^{|x-3|+2} \rightarrow \ 2^x\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right) = 2^{|x-3|+2}(4x^2 - 1) \rightarrow$$

$\rightarrow \frac{2^x}{2}(4x^2 - 1\ ) = 2^{|x-3|+2}(4x^2 - 1) \rightarrow 2^{x-1}(4x^2 - 1\ ) - 2^{|x-3|+2}(4x^2 - 1)$

$(4x^2 - 1)\left(2^{x-1} - 2^{|x-3|+2}\right) = 0$

$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

$2^{x-1} - 2^{|x-3|+2} = 0 \rightarrow 2^{x-1} = 2^{|x-3|+2} \rightarrow x - 1 = |x - 3| + 2$

$|x - 3| = x - 3$

$$condição\ de\ existência\ da\ expressão\ modular:$$

$$|x - 3| = (x - 3\ se\ x - 3 \geq 0, x - 3\ se\ x \geq 3)\ e\ (-x + 3\ se\ x - 3 < 0, -x + 3\ se\ x < 3\ )$$

1°) $x - 3 = x - 3$, é $válida\ a\ desigualdade\ x \geq 3, (x \geq 3$ é $uma\ das\ soluções)$

2°) $x - 3 = -x + 3 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x_3 = 3(pela\ CE\ \ 3 < 3\ não\ satisfaz)$

$S{:}\left\{\pm\frac{1}{2};\ \cup\ x \in\ [3;\ +\infty[\right\}$, Línea F)

68) (Exame 2011/ 2012) Determine a equação da circunferência com o centro sobre ox e que passa pelos pontos $A(3; 2)\ e\ B(\ -1; 6\ )$

Resp: $A)\ (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 32\ \ B)\ x^2 + (y + 2)^2 = 40$

$C)\ (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 52\ \ \ D)\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$

$E)\ (x + 3)^2 + y^2 = 40\ \ \ \ F)\ (x - 3)^2 + y^2 = 4$

$G)\ x^2 + (y - 6)^2 = 25\ \ \ \ H)\ outro$

Resolução:

Equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \rightarrow \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4}$

Centro : C= $\left(-\frac{D}{2} \; ; \; -\frac{E}{2} \right)$

Como o centro está sobre o eixo ox, uma das suas coordenadas do centro é nula, ou seja: $E = 0$

C= $\left(-\frac{D}{2} \; ; \; 0 \right)$

$A(3;2) \rightarrow \; 3^2 + 2^2 + 3D + 0 \times 2 = 0 \rightarrow 13 + 3D + F = 0 \; (I)$

$B(\,-1;6\,) \rightarrow (-1)^2 + 6^2 - D + 0 \times 6 = 0 \rightarrow 37 - D + F = 0 \; (II)$

Formando um sistema de duas equações a duas incógnitas com as equações (I) e (II), vem:

$\begin{cases} 13 + 3D + \cancel{F} = 0 \\ 37 - D + \cancel{F} = 0 \end{cases}, mutiplicando \; a \; 1º \; por \; (-1)$

$\begin{cases} -13 - 3D - F = 0 \\ 37 - D + F = 0 \end{cases}$, Resolvendo pelo método de redução temos:

$24 - 4D = 0 \rightarrow D = \frac{24}{4} \rightarrow D = 6$

II) $\quad 37 - 6 + F = 0 \rightarrow F = -31$

A equação da circunferência será:

$\left(x + \frac{6}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{0}{2}\right)^2 = \frac{(6)^2+(0)^2-4(-31)}{4}$

$(x+3)^2 + y^2 = 40$, Línea E)

69) (Exame 2012) Determinar a distância do ponto $P(1\,;2\,)$ à $recta \;\; y = -2x - 1$

Resp: $A)\; 3\sqrt{2} \quad B)\; 2\sqrt{3} \quad C)\; \sqrt{5} \quad D)\; \sqrt{6} \quad E)\; 2{,}5 \quad F)\; 3 \quad G)\; 2 \quad H)\; outro$

Resolução:

$P\;(1;2), x_0 = 1 \; e \; y_0 = 2$

A distância de um ponto à uma recta é determinada pela expressão:

$d_{P,r} = \frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

na recta $y = -2x - 1 \rightarrow 2x + y + 1 = 0$ ($a = 2; b = 1$ e $c = 1$)

$d_{P,r} = \frac{2(1)+1(2)+1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow d_{P,r} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} \rightarrow d_{P,r} = \sqrt{5}$, Línea C)

70) (Exame 2012) Resolva a equação:

$\log_{25} x = 0{,}25^{\log 2}.0{,}4^{\log 2} - 81^{0{,}5\ \log_9 7} + 5^{\log_{25} 49}$

Resp: $A)\ x = 25$ $B)\ x = 2$ $C)\ x = 5$ $D)\ x = 7$ $E)\ x = 9$ $F)\ x = \frac{1}{5}$ $G)\ x = 1$ $H)\ outro$

Resolução:

Condição de existência: $(x > 0)$

$\log_{25} x = (0{,}25 \times 0{,}4)^{\log 2} - (3^4)^{\frac{1}{2}\log_{(3^2)} 7} + 5^{\log_{(5^2)}(7^2)}$

$\log_{25} x = (0{,}1)^{\log 2} - (3^4)^{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\log_3 7} + 5^{(2)\left(\frac{1}{2}\right)\log_5 7}$

$\log_{25} x = (10^{-1})^{\log 2} - (3^4)^{\left(\frac{1}{4}\right)\log_3 7} + 5^{\log_5 7}$

$\log_{25} x = 10^{\log(2^{-1})} - 3^{\log_3 7} + 5^{\log_5 7}$

$\log_{25} x = 2^{-1} - 7 + 7 \rightarrow \log_{25} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 25^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \sqrt{25} \rightarrow x = 5$

$S = \{x = 5\}$, Línea C

71)(Exame 2008/ 2012) Resolva a equação:

$$8cos^4x - 8cos^2x - cosx + 1 = 0$$

Resp: $A)\ x = \frac{\pi k}{2} \cup x = \frac{2\pi k}{3}$ $B)\ \frac{\pi k}{3}$ $C)\ x = \frac{\pi k}{6} \cup x = \frac{2\pi k}{5}$

$D)\ x = \frac{\pi k}{3} \cup x = \frac{\pi k}{5}$ $E)\ x = \frac{\pi k}{6}$ $F)\ x = \frac{3\pi k}{5}$ $G)\ x = \frac{2\pi k}{5} \cup x = \frac{2\pi k}{3}$

$H)\ outro$

Resolução:

$8cos^4x - 8cos^2x - cosx + 1 = 0\ ,fazendo\ cosx = t\ ,onde\ t \in [-1; 1]$

$8t^4 - 8t^2 - t + 1 = 0 \ \rightarrow 8t^2(t^2 - 1) - (t - 1) = 0$

$8t^2(t - 1)(t + 1) - (t - 1) = 0 \ \rightarrow (t - 1)(8t^3 + 8t^2 - 1) = 0$

$t - 1 = 0 \rightarrow t_1 = 1 \ \ e\ 8t^3 + 8t^2 - 1 = 0$

$8t^3 + 8t^2 - 1 = 0$

Considerando que: $P(t) = 8t^3 + 8t^2 - 1$ onde $p(t)$ é um polinómio

$p\left(-\frac{1}{2}\right) = \ 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \ -1 + 2 - 1 = 0$

$t_2 = \ -\frac{1}{2}\ anula\ o\ polinómio, logo\ é\ uma\ das\ raizes\ da\ equação$

Resolvendo pelo método de chaves onde $P(t) = 8t^3 + 8t^2 - 1$

$D(t) = x + \frac{1}{2}$ Obtemos:

$p(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)(8t^2 + 4t - 2)$, anulando os produtos, temos:

$t_2 = -\frac{1}{2} \ \ e\ \ 8t^2 + 4t - 2 = 0$

$8t^2 + 4t - 2 = 0$, Dividindo todos os termos da equação por dois vem:

$4t^2 + 2t - 1 = 0\ (a = 4\,, b = 2\,, c = -1)$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{5}\,)}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$t_3 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \ \ \ e\ t_4 = \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{4}$

A solução da equação do 4º é:

$S = \left\{t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}\ ,\ t_3 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \ \ \ e\ t_4 = \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{4}\right\}$

Voltando na suposição:

$cosx = 1 \ \rightarrow cosx = \cos(1) \ \rightarrow x_1 = 2\pi k$

$cosx = -\frac{1}{2} \rightarrow cosx = \cos\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow cosx \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$

Fórmula geral dos cossenos: $x = \pm\alpha + 2\pi k \rightarrow x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$cosx = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \rightarrow cosx = \cos\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) \rightarrow x_3 = \text{arcos}\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) + 2\pi k$

$cosx = \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{4} \rightarrow cosx = cos\left[\frac{-(\sqrt{5} + 1)}{4}\right] \ \rightarrow x_4 = arcos\left[\frac{-(\sqrt{5} + 1)}{4}\right] + 2\pi k$

A solução da inequação é:

$S = \left\{x_1 = 2\pi k \cup\ x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \cup\ x_3 = \text{arcos}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) + 2\pi k\ \cup x_4 = arcos\left[\frac{-(\sqrt{5}+1)}{4}\right] + 2\pi k\ \right\}$, Línea H)

72)(Exame 2011) Compor a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(2;0)\ e\ B(5;0)$ e toca o eixo oy.

Resp: $A)\ (x-3)^2 + \left(y-\sqrt{8}\right)^2 = 9\ \ B)\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{10}\right)^2 = 8$

$C)\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y\pm\sqrt{10}\right)^2 = \frac{49}{4}\ \ \ D)\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{10}\right)^2 = 12$

$E)\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8\ \ \ F)\ (x-3)^2 + \left(y\pm\sqrt{8}\right)^2 = 11$

$G)\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 12\ \ \ H)\ outro$

Resolução:

A equação de uma circunferência é:

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

$A(2;0) \to (2-\alpha)^2 + (0-\beta)^2 = R^2$,

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$4 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = R^2$ (*)

$B(5;0) \to (5-\alpha)^2 + (0-\beta)^2 = R^2$

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$25 - 10\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = R^2$ (**)

Igualando as equações (*) e (**) , vem:

$4 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 25 - 10\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \to 6\alpha = 21 \to \alpha = \frac{7}{2}$

Quando toca o eixo oy uma das coordenadas do centro é nula: $(0;\ \beta)$

$(0;\ \beta) \to (0-\alpha)^2 + (\beta-\beta)^2 = R^2 \to\ \alpha^2 = R^2 \to\ R^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$R^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \to\ R^2 = \frac{49}{4}$

$4-4\alpha+\alpha^2+\beta^2 = R^2$ (*) , $R^2 = \frac{49}{4}$ e $\alpha = \frac{7}{2}$

$4-4\left(\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{7}{2}\right)^2+\beta^2 = \frac{49}{4} \rightarrow \beta^2 = 10 \rightarrow \beta = \pm\sqrt{10}$

Então, a equação da circunferência será:

$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 = \frac{49}{4}$, Línea C)

73) (Exame 2011) Compor a equação da circunferência que passa pelo ponto $A(2;1)$ toca o eixo de coordenadas.

Resp: $A)$ $(x-3)^2+(y-1)^2 = 1$ ou $(x+1)^2+(y-5)^2 = 25$

$B)$ $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ ou $(x-5)^2+(y-5)^2 = 25$

$C)$ $(x+2)^2+(y-1)^2 = 16$ ou $(x+2)^2+(y-2)^2 = 1$

$D)$ $(x-2)^2+(y+1)^2 = 4$ ou $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$

$E)$ $(x-4)^2+(y+1)^2 = 8$ $F)$ $(x+1)^2+(y-1)^2 = 9$

$G)$ $(x-3)^2+(y+1)^2 = 5$ $H)$ $outro$

Resolução:

A equação de uma circunferência é:

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$

$A(2;1) \rightarrow (2-\alpha)^2+(1-\beta)^2 = R^2$,

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$4-4\alpha+\alpha^2+1-2\beta+\beta^2 = R^2$

$\alpha^2+\beta^2-4\alpha-2\beta+5 = R^2$ (*)

I) Quando toca o eixo de coordenadas:

I.1) Quando toca o eixo OX: $(\alpha\,;0)$

$(\alpha\,;0) \rightarrow (\alpha-\alpha)^2+(0-\beta)^2 = R^2 \rightarrow \beta^2 = R^2$ $(**)$

I.2) Quando toca o eixo OY: $(0;\ \beta)$

$(0\,;\beta) \rightarrow (0-\alpha)^2+(\beta-\beta)^2 = R^2 \rightarrow \alpha^2 = R^2$ $(***)$

Igualando as equações (**) e (***), vem:

$\alpha^2 = \beta^2 = R^2 \rightarrow\ |\alpha| = |\beta| = |R|$

Pela equação (*), temos:

$\alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha + 5 = \alpha^2 \ \rightarrow$

$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \rightarrow (\alpha - 5)(\alpha - 1) = 0$

Pela lei do anulamento do produto:

$(\alpha - 5) = 0 \ \rightarrow \alpha_1 = 5, \quad (\alpha - 1) = 0 \ \rightarrow\ \alpha_2 = 1$

$\alpha_1 = 5 \rightarrow\ \beta_1 = 5\ e\ R_1 = 5$, A equação da circunferência será:

$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = \ {R_1}^2 \ \rightarrow\ (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = \ 25$

$\alpha_2 = 1 \rightarrow\ \beta_2 = 1\ e\ R_2 = 1$, A equação da circunferência será:

$(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 = \ {R_2}^2 \ \rightarrow\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \ 1$

A equação da circunferência pedida será:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \ 1$ ou $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = \ 25$, Línea B)

74) Compor a equação da esfera que passa pelo ponto $A(\,1;\ -1; 4)$ e toca os planos de coordenadas

Resp: $A)\ (x - 3)^2\ + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$

$B)\ (x + 2)^2\ + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 11$

$C)\ (x - 2)^2\ + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 6$

D) $(x + 3)^2\ + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$

E) $(x - 1)^2\ + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 8$

F) $(x + 1)^2\ + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 9$

G) $(x - 3)^2\ + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

$H)\ outro$

Resolução:

A equação de uma esfera é dada pela fórmula:

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \ R^2$

$A(\,1;\ -1; 4) \rightarrow\ (1 - \alpha)^2 + (-1 - \beta)^2 + (4 - \gamma)^2 = \ R^2$

Desenvolvendo os quadrados da soma, fica:

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha + 2\beta - 8\gamma + 18 = R^2$ (*)

I) Quando toca o plano coordenado oxy: $(\alpha ; \beta ; 0)$

$(\alpha ; \beta ; 0) \rightarrow (\alpha - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 + (0 - \gamma)^2 = R^2 \rightarrow \gamma^2 = R^2$

I) Quando toca o plano coordenado oyz: $(0 ; \beta ; \gamma)$

II) $(0 ; \beta ; \gamma) \rightarrow (0 - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 + (\gamma - \gamma)^2 R^2 \rightarrow \alpha^2 = R^2$

III) Quando toca o plano coordenado oxz: $(\alpha ; 0 ; \gamma)$

$(\alpha ; 0 ; \gamma) \rightarrow (\alpha - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 + (\gamma - \gamma)^2 = R^2 \rightarrow \beta^2 = R^2$

Igualando as equações obtidas em I) II) e III) , vem:

$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = R^2 \rightarrow |\alpha| = |\beta| = |\gamma| = R$

$\alpha = -\beta = \gamma = R$

Pela equação (*), temos:

$\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha - 8\alpha + 18 = \alpha^2 \rightarrow 2\alpha^2 - 12\alpha + 18 = 0$

Dividindo toda a equação por dois (2) , vem:

$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \rightarrow (\alpha - 3)^2 = 0 \rightarrow \alpha = 3$

$se\ \alpha = 3 \rightarrow \beta = -3 , \gamma = 3 , R = 3$

A equação da esfera pedida será:

$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$, Línea A)

75) (Exame 2011) Simplifique a expressão trigonométrica:

$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) tg\ (\pi + \alpha)$

Resp: $A) - 1\quad B)\ \frac{1}{2}\quad C)\ \frac{1}{sen\alpha}\quad D)\ 1\quad E) - sen\alpha\quad F)\ outro$

Resolução:

Sabe-se que:

$tg\ a\ tg\ b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)}$, Então:

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) tg\ (\pi + \alpha) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \pi - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \pi + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \pi - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \pi + \alpha\right)}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)tg\,(\,\pi+\alpha\,)=\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}=-\frac{\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)tg\,(\,\pi+\alpha\,)=-1$, Línea A)

76) (Exame 2011) Resolver a equação:

$i\,z^2+5\,z-6\,i=0$

Resp: $A)\ z_1=3i\,;\ z_2=-2i$ $\quad B)\ z_1=3i\,;\ z_2=2i$ $\quad C)\ z_1=-3i\,;\ z_2=2i$

$D)\ z_1=-3i\,;\ z_2=-2i$ $\quad E)\ z_1=3\,;\ z_2=2i$ $\quad F)\ z_1=3i\,;\ z_2=2$

$G)\ z_1=3\,;\ z_2=-2i$ $\quad H)\ outro$

Resolução:

$i\,z^2+5\,z-6\,i=0$ (Equação complexa do 2º grau)

Aplicando a fórmula resolvente: $a=i\,;b=5\ e\ c=-6i$

$\Delta=b^2-4\,ac\ \rightarrow\ \Delta=(5)^2-4(i)(-6i)\rightarrow\Delta=25+24\,i^2$

No conjunto dos números completos $i^2=-1$

$\Delta=25+24\,(-1)\ \rightarrow\ \Delta=25-24\ \rightarrow\ \Delta=1$

$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \rightarrow\ z=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2\,i}=\frac{-5\pm1}{2i}$

$z_2=\frac{-5+1}{2i}=-\frac{4}{2i}=-\frac{2}{i}=\frac{(-1)2}{i}\rightarrow z_2=\frac{2i^2}{i}\ \rightarrow z_2=2i$

$z_1=\frac{-5-1}{2i}=-\frac{6}{2i}=-\frac{3}{i}=\frac{(-1)3}{i}\rightarrow z_1=\frac{3\,i^2}{i}\ \rightarrow z_1=3i$

A solução da equação é : $S=\{z_1=3i;\ z_2=2i\ \}$, Línea B)

77) (Exame 2011) Calcular: $\int_{-1}^{15}\frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$

Resp: $A)\ 16\ \ B)\ 10\ \ C)\ 9\ \ D)\ 15\ \ E)\ 8\ \ F)\ 12\ \ G)\ 5\ \ H)\ outro$

Resolução:

Racionalizando o denominar da integral:

$$\text{I}=\int_{-1}^{15}\frac{\left[\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}\right]dx}{\left[\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}\right)\right]}=\int_{-1}^{15}\frac{\left[\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}\right]dx}{\left[\left(\sqrt{x+10}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2\right]}$$

$$\text{I}=\int_{-1}^{15}\frac{(\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1})}{x+10-x-1}=\int_{-1}^{15}\frac{(\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1})}{9}$$

I= $\frac{1}{9}\left[\int_{-1}^{15}\sqrt{x+10}\,dx+\int_{-1}^{15}\sqrt{x+1}\,dx\right]$

I= $\frac{1}{9}\left[\int_{-1}^{15}(x+10)^{\frac{1}{2}}\,dx+\int_{-1}^{15}(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx\right]$, Integrando:

I= $\frac{1}{9}\left[\left(\frac{(x+10)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\begin{matrix}15\\-1\end{matrix}+\left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\begin{matrix}15\\-1\end{matrix}\right]=\frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}\left((x+10)^{\frac{3}{2}}\right)\begin{matrix}15\\-1\end{matrix}+\frac{2}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\begin{matrix}15\\-1\end{matrix}\right]$

I= $\frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+10)^3}\right)_{-1}^{15}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}\right)_{-1}^{15}\right]$

I= $\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{(15+10)^3}-\sqrt{(-1+10)^3}\right)+\left(\sqrt{(15+1)^3}-\sqrt{(-1+1)^3}\right)\right]$

I= $\frac{2}{27}\,(125-27+64-0)=\frac{2}{27}\,(162)$

I= 12 , Línea F)

78)(Exame 2011/ 2010) Resolva a inequação:

$2cosx(cosx-\sqrt{8}\,tgx\,)<5$

Resp: $A)\ \left]2\pi n-\frac{\pi}{4};2\pi n+\frac{\pi}{4}\right[$

$B)\ \left]2\pi n-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}+2\pi n\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right[$

$C)\left]\pi n-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}+\pi n\right[$

$D)\ \left]-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right[$

$E)\ \left]\pi n-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}+\pi n\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right[$

$F)\ \left]\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{16};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right[$ $G)\ \left]\pi n+\frac{\pi}{6};\pi n+\frac{\pi}{2}\right[$ $H)\ outro$

Resolução:

$2cosx\left(cosx-\sqrt{8}\,tgx\,\right)<5$

$2cosx(cosx-\sqrt{8}\,\frac{senx}{cosx}\,)<5\ \rightarrow 2cosx\left(\frac{cos^2x-\sqrt{8}\,senx}{cosx}\right)<5$

$2(cos^2x-\sqrt{8}\,senx\ <5$ CE: $cosx\neq 0\rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

Nota que: $cos^2x=1-sen^2x$

$2(1-sen^2x-\sqrt{8}\,senx\ <5\rightarrow 2-2sen^2x-2\sqrt{8}\,senx-3<0$

Multiplicando todos os termos da inequação por (-1), vem:

$2sen^2x + 2\sqrt{8}\, senx + 3 > 0$, fazendo $senx = t$, $t \in [-1; 1]$

$2t^2 + 2\sqrt{8}\, t + 3 > 0$ (inequação do 2º grau, $a = 2; b = 2\sqrt{8}\,; c = 3$)

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(2\sqrt{8}) \pm \sqrt{(2\sqrt{8})^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{-2\sqrt{8} \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{-4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

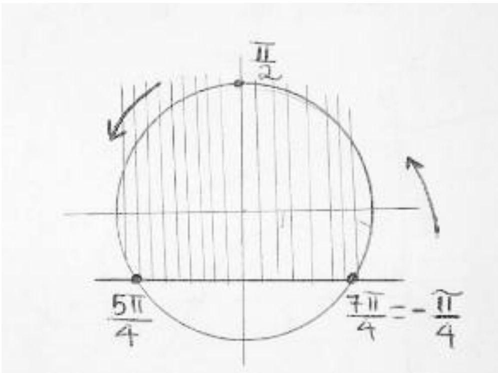
$$t_1 = \frac{-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{4} \to t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ t_2 = \frac{-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{4} \to t_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

t	$-\infty$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$2t^2 + 2\sqrt{8}\, t + 3 > 0$	+	O	−	O	+

$t \in \left]-\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right[$ $\quad ou\ \ t < -\frac{3\sqrt{2}}{2}\ \ e\ t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}\ não\ pertence\ a\ [-1; 1]\ e\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1]\right]$

Voltando na suposição:



$senx = t \ \to senx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to$

$senx = sen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to$

$senx = -sen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, de acordo o ciclo

Trigonométrico, a solução da inequação é:

$S = \left]-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\,; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right[$, Línea D)

79) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$\sqrt{3}\,(cosx)^{-2} < 4\, tgx$

Resp: $A)\ \left]\frac{\pi}{6} + \pi n\,; \frac{\pi}{3} + \pi n\right[$ $\quad B)\ \left]\frac{\pi}{6} + 2\pi n\,; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right[$ $\quad C)\ \left]\frac{\pi}{6} + 2\pi n\,; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right[$

D) $\left]\frac{\pi}{3} + \pi n\,; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$ $\quad E)\ \left]\frac{\pi}{6} + \pi n\,; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$ $\quad F)\ \left]\frac{\pi}{3} + 2\pi n\,; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right[$

G) $\left]\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}\right[$ $\quad H)\ outro$

Resolução:

$\sqrt{3}\ \frac{1}{cos^2x} < 4tgx$

Nota que: $\frac{1}{cos^2x} = tg^2x + 1$, Assim teremos:

$\sqrt{3}\ (tg^2x + 1\ ) < 4tgx \ \rightarrow \ \sqrt{3}\ tg^2x + \sqrt{3}\ < 4\ tgx$, Agrupando;

$\sqrt{3}\ tg^2x - 4tgx + \sqrt{3}\ < 0\ ; supondo\ que\ tgx = t$

$\sqrt{3}\ t^2 - 4t + \sqrt{3}\ < 0$; usando a fórmula resolvente, temos:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(\sqrt{3})(\sqrt{3})}}{2(\sqrt{3}\,)} = \frac{4 \pm 2}{2\sqrt{3}}$$

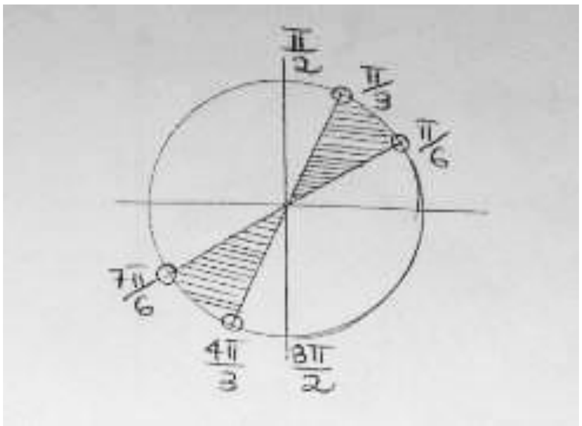
$t_1 = \sqrt{3}\ ;\ t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

t	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\sqrt{3}\ t^2 - 4t + \sqrt{3}\ < 0$		+	O	−	O	+	

$t \ \in \ \left]\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ \sqrt{3}\right[\quad ou \quad t > \frac{\sqrt{3}}{3} \quad e\ t\ < \sqrt{3}$

Voltando na suposição :

$$\begin{Bmatrix} tgx \ > \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow tgx \ > tg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \ \alpha = \frac{\pi}{6} \\ tgx \ < \sqrt{3} \ \rightarrow tgx \ < tg(\sqrt{3}\,) \rightarrow \ \alpha = \ \frac{\pi}{3} \end{Bmatrix}$$



De acordo o trigométrico a solução da inequação é a área de intersecção sombreada no Iº quadrante ou seja:

$S = x \ \in \ \left]\frac{\pi}{6} + \pi k \, ; \frac{\pi}{3} + \pi k\right[$, Línea A)

80) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$2 + tg\ 2x + cotg\ 2x\ < 0$

Resp: $A)\ \left]\frac{\pi}{2}(4n-1); 2\pi n\right[\quad B)\ \left]\frac{\pi}{4}(2n-1); \frac{\pi n}{2}\right[$

$C)\ \left]\frac{\pi}{8}(4n-1); \frac{\pi n}{2}\right[\qquad D)\ \left]\frac{\pi}{4}(2n-1); \frac{\pi}{6}\ (3n-1)\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{6}(3n-1); \frac{\pi n}{2}\right[$

$E)\ \left]\frac{\pi}{3}(3n-1); \frac{\pi}{4}\ (4n-1)\right[\cup\ \left]\frac{\pi}{4}(2n-1); \pi n\right[$

$F)\ \left]\frac{\pi}{3}(3n-1); \pi n\right[\quad G)\ \left]\frac{\pi}{4}(2n-1); \frac{\pi}{8}\ (4n-1)\right[\cup\ \left]\frac{\pi}{8}(4n-1); \frac{\pi n}{2}\right[$

$H)\ outro$

Resolução:

$2 + tg\ 2x + \frac{1}{tg\ 2x} < 0 \rightarrow \frac{tg^2\ 2x + 2\ tgx + 1}{tg\ 2x}\ < 0\ , fazendo\ tg2x = t$

$\frac{t^2+2t+1}{t}\ < 0\ \ \rightarrow \frac{(t+1)^2}{t}\ < 0$ (Inequação racional fraccionária)

$t + 1 = 0\ \ \rightarrow t = -1\ e\ \ \ t\ \neq 0$

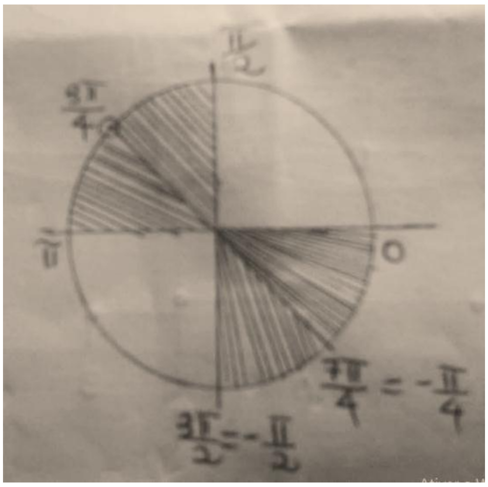
t	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$t+1$	+	O	−	‖	+	
t	+		−		+	

$t\ \in\ [-1; 0]\ ou\ \ t\ >\ -1\ e\ t\ < 0$

Voltando na suposição:

$$\begin{cases} tgx\ 2x\ > -1\ \ \rightarrow tgx > tg(-1) \rightarrow tgx >\ -tg\ (1) \rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} \\ tgx\ < 0\ \rightarrow tgx\ < tg(0) \rightarrow \alpha = 0° \end{cases}$$

Obs.: $tgx\ < 0$ (os valores da tangente que são menores que zero encontram-se no IIº quadrante e no IVº quando. Isto quer dizer que a intersecção da desigualdade $tgx\ < 0$ e $tgx\ 2x\ > -1$, pode ocorrer somente no IIº e no IVº Q



Conforme o ciclo trigonométrico, teremos:

$$\begin{Bmatrix} -\frac{\pi}{2} + \pi k\ < 2x < -\ \frac{\pi}{4} + \pi k \\ -\frac{\pi}{4} + \pi k\ < 2x < 0 + \pi k \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}\ < x < -\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ -\frac{\pi}{4} + \pi k\ < x < \frac{\pi k}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\pi}{4}(2k-1) < x < \frac{\pi}{8}(4k-1) \\ \frac{\pi}{8}(4k-1) < x < \frac{\pi k}{2} \end{Bmatrix}$$, A solução da inequação será:

$$S = \left]\frac{\pi}{4}(2k-1);\ \frac{\pi}{8}(4k-1)\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}(4k-1);\ \frac{\pi k}{2}\right[\ se\ k = n$$

$$S = \left]\frac{\pi}{4}(2n-1);\ \frac{\pi}{8}(4n-1)\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}(4n-1);\ \frac{\pi n}{2}\right[$$, Línea G)

81) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$sen4x + cos4x\ cotg2x\ > 1$

Resp: $A)\ \left]2\pi n - \frac{\pi}{2}\ ; 2\pi n\right[\quad B)\ \left]\pi n;\ \pi n + \frac{\pi}{4}\right[\quad C)\ \left]2\pi n + \frac{\pi}{2}\ ; 2\pi n\right[$

$D)\ \left]\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8}\ ; \frac{\pi n}{2}\right[\quad E)\ \left]\pi n - \frac{\pi}{4}\ ; \pi n\right[\quad F)\ \left]\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{8} + n\pi\right[$

$G)\ \left]\pi n; \pi n + \frac{\pi}{2}\ ; \right[\quad H)\ outro$

Resolução:

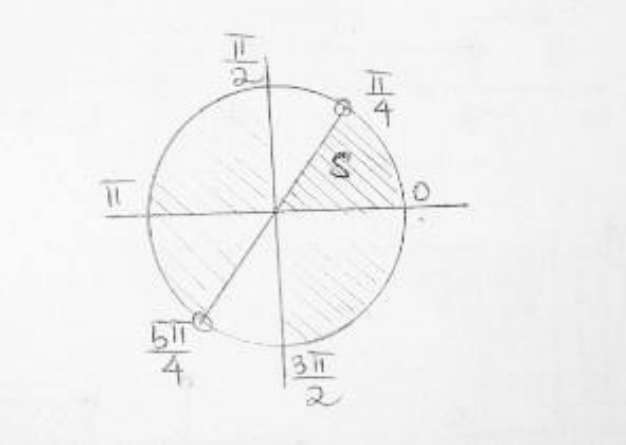
$sen4x + cos4x\ \frac{cos2x}{sen2x} > 1 \rightarrow \frac{sen4x\ sen2x + cos4x\ cos2x}{sen2x} > 1$ (*)

Nota que: $\cos(4x - 2x) = cos2x = sen4x\ sen2x + cos4x\ cos2x$

Voltando em (*) , temos:

$\frac{cos2x}{sen2x} > 1 \rightarrow cotg\ 2x > 1 \rightarrow \frac{1}{tg2x} > 1$, Multiplicar por $(tg2x)$

$tg\ 2x < 1\ (\ tgx < tg(1) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4})$



Conforme o ciclo trigonométrico:

$0 + k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + k\pi$

A solução da inequação é:

$S = \left]\frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + k\pi\right[\ se\ n = k,\ S = \left]\frac{n\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + n\pi\right[$, Línea F)

82) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$(cosx - senx)\sqrt{3x - x^2} \geq 0$

Resp: $A)\ \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\ B)\ \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \{3\}\ C)\ \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \{3\}\ D)\ \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

$E)\ \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[\ F)\ \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; 3\right]\ G)\ [0; 3]\ H)\ outro$

Resolução:

$\begin{Bmatrix} cosx - senx \geq 0 \\ 3x - x^2 \geq 0 \end{Bmatrix}$; sabe-se que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx$

$cosx - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$; (*)

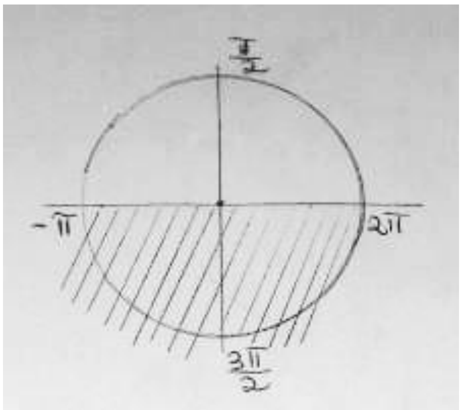
sabe-se que: $\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$cosx - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\, sen\frac{\pi}{4}\, sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Voltando em (*):

$-2\, sen\frac{\pi}{4}\, sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ (Multiplicar todos os termos por -1) , vem:

$2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\, sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \rightarrow\ sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$



Conforme o ciclo

Trigonométrico, temos:

$-\pi + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 0 + 2k\pi$

$-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$S_1 = x\ \in\ -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

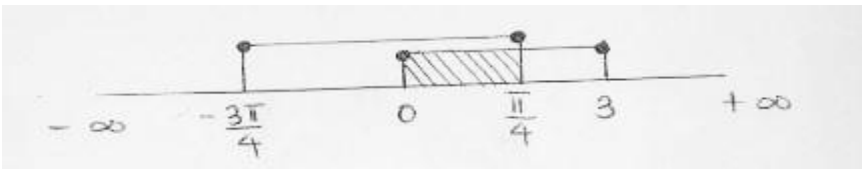
$3x - x^2 \geq 0$, multiplicar por –1 e factorizar x, temos:

$x^2 - 3x\ \leq 0 \rightarrow x(x - 3x) \leq 0$ ($x_1 = 0\ e\ x_2 = 3$)

t	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$x^2 - 3x\ \leq 0$	+	O	−	O	+

$S_2 = x\ \in\ [0; 3\,]$

A solução da inequação é: $S = S_1\ \cap\ S_2$



$S = \left[0;\, \frac{\pi}{4}\right] \cup \{3\}$; Línea C

83) (Exame 2011) Resolver a equação: $i\,z^2\ - z\ + 2i\ = 0$

$Resp$: $A)\ z_1 = 2\,;\ z_2 = -i\quad B)\ z_1 = 2i\,;\ z_2 = -i\quad C)\ z_1 = 2i\,;\ z_2 = i$

$D)\ z_1 = -2i\,;\ z_2 = -i$ E) $z_1 = 2\,;\ z_2 = i\quad F)\ z_1 = 2i\,;\ z_2 = 1\quad G)\,)\ z_1 = -2i\,;\ z_2 = i\quad H)\ outro$

Resolução:

$i\,z^2 - z + 2i = 0$ (equação complexa do 2º grau; $a = i$; $b = -1$; $c = 2i$)

Aplicando a fórmula resolvente, temos:

$z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(i)(2i)}}{2i} = \frac{1\pm\sqrt{1-8i^2}}{2i}$, sabe-se que: $i^2 = -1$

$z = \frac{1\pm\sqrt{1-8(-1)}}{2i} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2i} = \frac{1\pm3}{2i}$

$z_1 = \frac{1+3}{2i} = \frac{4}{2i} = \frac{2}{i} = \left(\frac{2}{i}\right)\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{2i}{i^2} = \frac{2i}{(-1)} \to z_1 = -2i$

$z_2 = \frac{1-3}{2i} = -\frac{2}{2i} = (-1)\frac{1}{i} = (\cancel{i}^2)\left(\frac{1}{\cancel{i}}\right) \to z_2 = i$

A solução da equação é: $S = \{z_1 = -2i$ e $z_2 = i\}$, Línea G)

84) (Exame 2011) Calcular $\int_0^{\pi}(cosx)^4dx$

Resp: $A)\ \frac{5\pi}{9}$ $B)\ \frac{3\pi}{8}$ $C)\ \frac{2\pi}{7}$ $D)\ \frac{5\pi}{8}$ $E)\ \frac{4\pi}{9}$ $F)\ \frac{\pi}{2}$ $G)\ \frac{3\pi}{7}$ $H)\ outro$

Resolução:

I=$\int_0^{\pi}(cosx)^4dx = \int_0^{\pi}(cos^2 x)\,(cos^2x)\,dx$

Sabe-se que: $cos^2x = \frac{1}{2}\,(1 + cos2x)$

I= $\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\,(1 + cos2x)\ \ (\frac{1}{2}\,(1 + cos2x)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1 + 2\,cos2x + cos^2 2x)dx$

I= $\frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi}dx + 2\int_0^{\pi}cos2x\,dx + \int_0^{\pi}cos^2 2x\,dx\right]$

Sabe-se que: $cos^2 2x = \frac{1}{2}\,(1 + cos4x)$

I= $\frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi}dx + 2\int_0^{\pi}cos2x\,dx + \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\,(1 + cos4x)\,dx\right]$

I= $\frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi}dx + 2\int_0^{\pi}cos2x\,dx + \frac{1}{2}\,(\int_0^{\pi}dx + \int_0^{\pi}cos4x\,dx\right]$

Integrando todas as expressões temos:

I= $\frac{1}{4}\left[(x)_0^{\pi} + 2\left(\frac{1}{2}\right)(sen2x)_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left\{(x)_0^{\pi} + \frac{1}{4}\,(cos4x)_0^{\pi}\right\}\right]$

I=$\frac{1}{4}\left[(\pi - 0) + (sen2\pi - sen0) + \frac{1}{2}\left\{(\pi - 0) + \frac{1}{4}\,(cos4\pi - cos0)\right\}\right]$

I= $\frac{1}{4}\ \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{8} \to I = \frac{3\pi}{8}$, Línea B)

85) (Exame 2011) Resolva a inequação logarítmica:

$\log_{\frac{1}{8}}(3-x) < \log_{1/8} 5$

Resp: $A)\ x \in\ ]0;2[\quad B)\ x \in]-\infty,-2[\quad C)\ x \in\ ]2;0[\quad D)\ não\ tem\ soluções$

$E)\ ]-2;\ +\infty[\quad F)\ outro$

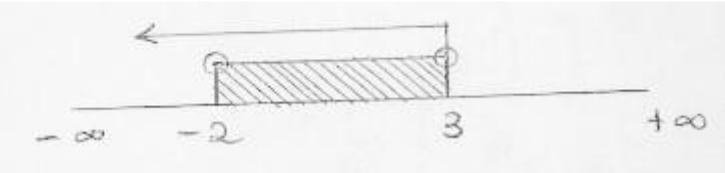
Resolução:

Condição de existência: $3\ -x >\ 0\ \rightarrow x\ < 3\ \rightarrow\ S_1 = x \in]-\infty;3[$

$\log_{\frac{1}{8}}(3-x) < \log_{\frac{1}{8}} 5$, Simplificando as bases temos:

$3 - x\ < 5\ \rightarrow x\ > -5+3 \rightarrow x > -2\ \rightarrow S_2 = x\ \in]-2;\ +\infty[$

A solução da inequação logarítmica é: $S =\ S_1 \cap\ S_2$



$S =]-2;3[$, Línea F)

86) (Exame 2011) Resolva a equação algébrica:

$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = 4$

Resp: $A)\ x = 6\ \cup x = 4\ \ B)\ não\ tem\ soluções\ \ C)\ x = 2\ \ D)\ x = 4$

$E)\ x = 6\ \cup x = 14\quad F)\ outro$

Resolução:

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5})^2 = (4)^2 \rightarrow x - 3 + 2\sqrt{(x-3)(x+5)} + x + 5 = 16\ \rightarrow$

$2\sqrt{x^2+2x-15} + 2x + 2 = 16$, dividindo todos os termos da equação por (2)

$\sqrt{x^2+2x-15} + x + 1 = 8\ \rightarrow\ \sqrt{x^2+2x-15} = 7 - x$, elevando mais ao quadrado:

$(\sqrt{x^2+2x-15}\,)^2 = (7-x)^2 \rightarrow\ x^2 + 2x - 15 = 49 - 14x + x^2$

$2x + 14x = 49 + 15 \rightarrow 16x = 64\ \rightarrow x = \frac{64}{16}\ \rightarrow x = 4$

Verificação: $x = 4$

$\sqrt{4-3} + \sqrt{4+5} = 4$

$\sqrt{1} + \sqrt{9} = 4$

$1 + 3 = 4$

$4 = 4$

A solução da equação é: $S =\ \{x = 4\}$,   Línea D

87) (Exame 2011) Os três pontos $A(2;1); B(3;\ -1);\ C(-4;\ 0\ )$ são vértices do trapézio isóceles ABCD. Achar as coordenadas do ponto D se $AB\ \parallel CD$

Resp: $A)(1{,}5\ \ ; 5{,}5)$ B) $(\ -1{,}5\ ;\ -5{,}5\ )$ $C)\ (-1{,}2\ ;\ -5{,}4\ )$ $D)\ (-1{,}4\ ;\ -5{,}2\ )$

$E)\ (1{,}5\ ;\ -5{,}5\ )$ $F)\ (\ -1{,}1\ ;\ -5{,}6\ )$ $G)\ \ (-1{,}8\ ;\ -5{,}2\ )$ $H)\ outro$

Resolução.

É fácil notar a partir da figura que:

$d_{AC} = d_{BD}$ e os declives das rectas

Que passa pontos $AB\ e\ CD$

Serão iguais ou seja: $m_{AB} = m_{CD}$

$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_A)^2}\ e\ d_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$

Se $d_{AC} = d_{BD}$, teremos:

$\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$, Elevando ao quadrado temos:

$(-4-2)^2 + (0-1)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$

$37 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 \rightarrow\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 27 = 0$ (I)

A equação da recta que passa pelos Pontos: $A(2;1); B(3;\ -1)$ é:

$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} \rightarrow \frac{x-2}{2-3} = \frac{y-1}{1-(-1)} \rightarrow 2x - 4 = -y + 3\ \rightarrow 2x + y - 5\ (r_1)$

O declive da recta r_1 é: $m_{AB} = -\frac{2}{1}\ \rightarrow m_{AB} = -2$

A equação da recta que passa pelos pontos: $C(-4;\ 0\ )e\ \ D$ é:

$y - y_1 = m_{BC}(x - x_1) \rightarrow y - 0 = m_{BC}(x+4)$

$y = m_{BC}(x+4)\ (r_2)$

Como $r_1\ \parallel\ r_2\ \ \rightarrow m_{BC} = -2$

$y = -2(x+4) \rightarrow y = -2x - 8$ (II) , substituindo (II) em (I) , temos:

$x^2 + (-2x-8)^2 - 6x + 2(-2x-8) - 27 = 0$

$x^2 + 4x^2 + 32x + 64 - 6x - 4x - 16 - 27 = 0 \rightarrow\ 5x^2 + 22x + 21 = 0$

Pelo método de Vieth: $5x^2 + 22x + 21 = (5x+7)(x+3) = 0$

$(5x+7)(x+3) = 0 \rightarrow 5x + 7 = 0\ e\ x + 3 = 0$

$5x + 7 = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{5}\ \rightarrow x_1 = -1{,}4\ ; x + 3 = 0\ \ \rightarrow x_2 = -3$

Para $x_1 = -1{,}4\ \ \rightarrow y = -2(-1{,}4) - 8\ \ \rightarrow\ y_1 = -5{,}2$ $\qquad P_1(\ -1{,}4\ ;\ -5{,}2\ )$

Para $x_2 = -3\ \ \rightarrow y = -2(-3) - 8 \rightarrow y_2 = -2$ $\qquad P_2(-3\ ;\ -2)$

As coordenadas do ponto D são: $(\ -1{,}4\ ;\ -5{,}2\ )$, Línea D

88)(Exame 2011) Calcular: $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{9+16x}}$

Resp: $A)\frac{11}{96}$ $B)\frac{13}{96}$ $C)\frac{15}{92}$ $E)\frac{11}{95}$ $F)\frac{13}{95}$ $G)\frac{13}{92}$ $H)\ outro$

Resolução:

$I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{9+16x}}$

Fazendo:

$\sqrt{9+16x} = t \rightarrow 9+16x = t^2 \rightarrow x = \frac{t^2-9}{16}$ (*)

Derivando ambos membros da igualdade (*), temos:

$(x)'dx = \left(\frac{t^2-9}{16}\right)'dt \rightarrow dx = \frac{2tdt}{16} \rightarrow dx = \frac{tdt}{8}$,

Mudando os limites de integração temos em função da nova variável $: \sqrt{9+16x} = t$

$se\ x = 1 \rightarrow t = \sqrt{9+16(1)} \rightarrow t = 5$

$se\ x = 0 \rightarrow t = \sqrt{9+16(0)} \rightarrow t = 3$

Novos limites de integração: $3 \leq t \leq 5$

Substituindo devidamente na integral, temos:

$I = \int_3^5 (\frac{t^2-9}{16})\ \frac{tdt}{8t} = \left(\frac{1}{16} . \frac{1}{8}\right) \int_3^5 (t^2-9)dt = \frac{1}{128}\left[\int_3^5 t^2dt - 9\int_3^5 dt\right]$

Integrando pela fórmula da potência: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$I = \frac{1}{128}\left[\frac{1}{3}(t^3)\frac{5}{3} - 9(t)\frac{5}{3}\right] = \frac{1}{128}\left[\frac{1}{3}(\{5^3\}-\{3^3\}) - 9(5-3)\right]$

$I = \frac{1}{128}\left[\frac{1}{3}(125-27) - 18\right] = \frac{1}{128}\left(\frac{44}{3}\right) = \frac{44}{384} : \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{11}{96}$

$I = \frac{11}{96}$, Línea A

89)(Exame 2011) Calcular: $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$

Resp: $A)\frac{1}{9}$ $B)\frac{3}{8}$ $C)\frac{5}{8}$ $D)\frac{1}{8}$ $E)\frac{2}{9}$ $F)\frac{4}{9}$ $G)\frac{1}{2}$ $H)\ outro$

Resolução:

$I = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$

Fazendo: $x + 1 = t \ \rightarrow x = t - 1$, derivando ambos os membros:

$(x)'dx = (t-1)'dt \ \rightarrow dx = dt$

Trocando os limites de integração em função da nova variável, temos:

$x + 1 = t$

$se\ x = 1 \ \rightarrow t = 1 + 1 \ \rightarrow t = 2$

$se\ x = 0 \ \rightarrow t = 0 + 1 \ \rightarrow t = 1$

Novos limites de integração: $1 \ \leq t \ \leq 2$

Substituindo devidamente na integral, temos:

$I = \int_1^2 \frac{(t-1)dt}{t^3} = \int_1^2 \frac{tdt}{t^3} - \int_1^2 \frac{dt}{t^3} \rightarrow I = \int_1^2 \frac{dt}{t^2} - \int_1^2 t^{-3}\, dt$

$I = \int_1^2 t^{-2}dt - \int_1^2 t^{-3}\, dt$, integrnado com a fórmula: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$I = -(t^{-1})_1^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)(t^{-2})_1^2 = -\left(\frac{1}{t}\right)\begin{matrix}2\\1\end{matrix} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}\right)\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$

$I = -\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left\{\left(\frac{1}{(2^2)}\right) - \left(\frac{1}{(1^2)}\right)\right\}\right] = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right)$

$I = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \ \rightarrow I = \frac{1}{8}$, Línea D)

90) (Exame 2010) Simplifica a expressão:

$$\left(\frac{7}{b^{1/6} + 7} + \frac{b^{1/3} + 34}{b^{1/3} - 49} - \frac{7}{b^{1/6} + 7}\right)\left(\frac{b^{1/3} - 14b^{1/6} + 49}{\left(b^{1/6} + 8\right)(b^{1/6} - 8)}\right)$$

Resp: $A)\ b^{1/6} - 7 \quad B)\ \frac{b^{1/6}+7}{b^{1/6}-7} \quad C)\ \frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7} \quad D)\ 0 \quad E) 1 \quad F)\ outro$

Resolução:

Transformando todas as expressões com expoentes fraccionários em radicais, vem:

$\left(\frac{7}{\sqrt[6]{b}+7} + \frac{\sqrt[3]{b}+34}{\sqrt[3]{b}-49} - \frac{7}{\sqrt[6]{b}}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{b}-14\sqrt[6]{b}+49}{\left(\sqrt[6]{b}+8\right)\left(\sqrt[6]{b}-8\right)}\right)$, achando um mínimo múltiplo comum para todos os radicais (neste 6 é o denominador comum para todos os radicais), vem:

$$\left(\frac{7}{\sqrt[6]{b}+7}+\frac{\sqrt[6]{b^2}+34}{\sqrt[6]{b^2}-49}-\frac{7}{\sqrt[6]{b}+7}\right)\left(\frac{\sqrt[6]{b^2}-14(\sqrt[6]{b})+49}{\left(\sqrt[6]{b}+8\right)\left(\sqrt[6]{b}-8\right)}\right)$$, Fazendo: $\sqrt[6]{b}=t$

$$\left(\frac{7}{t+7}+\frac{t^2+34}{t^2-49}-\frac{7}{t-7}\right)\left(\frac{t^2-14t+49}{(t+8)(t-8)}\right)=\left[\frac{7(t-7)+t^2+34-7(t+7)}{t^2-49}\right]\left[\frac{(t-7)^2}{(t+8)(t-8)}\right]$$

$$=\left[\frac{7t-49+t^2+34-7t-49}{t^2-49}\right]\left[\frac{(t-7)^2}{(t+8)(t-8)}\right]=\left[\frac{\cancel{t^2-64}}{\cancel{t^2-49}}\right]\left[\frac{\cancel{(t-7)^2}}{\cancel{(t+8)(t-8)}}\right]=\left[\frac{t-7}{t+7}\right]$$, Voltando, temos:

$=\left(\frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7}\right)$ .Resposta: $\left(\frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7}\right)$, Línea C)

91)(Exame 2010) Simplifica a expressão:

$$\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\left[\frac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}\right]$$

Resp: $A)\,\frac{m^2}{n}$ $\quad B)\,mn\quad C)\,2mn^2\quad D)\,\frac{m}{n^2}\quad E)\,\frac{1}{2}\,m^2n$

$F)-2mn\quad G)\,\frac{n}{m}\quad H)\,outro$

Resolução:

$$\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\left[\frac{\left(\sqrt[3]{m^4}+n^2\sqrt[3]{m}\right)-(n^3+mn)}{\frac{m+n^2}{n}-\left(\frac{n^4+mn^2}{m}\right)}\right]$$

$$=\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\left[\frac{\sqrt[3]{m}(m+n^2)-n(n^2+nm)}{m^3+mn^2-n^5-mn^3}\right](mn)$$

$$=\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\left[\frac{(m+n^2)(\sqrt[3]{m}-n)}{m(m+n^2)-n^3(n^2+m)}\right](mn)$$

$$=\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\left[\frac{(m+n^2)(\sqrt[3]{m}-n)}{(m+n^2)(m-n^3)}\right](mn)$$

$$=\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\left[\frac{(\sqrt[3]{m}-n)}{(m-n^3)}\right](mn)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\left[\frac{(\sqrt[3]{m}-n)}{\left(\sqrt[3]{m^3}-n^3\right)}\right](mn)$$

$$=\cancel{\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)}\left[\frac{\cancel{(\sqrt[3]{m}-n)}}{\cancel{(\sqrt[3]{m}-n)}\cancel{\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)}}\right](mn)=mn$$

Resposta: mn , Línea B

92) (Exame 2010) Ache a solução da equação:

$$3^x.8^{x/_{x+2}}=6$$

Resp: $A)\ x_1=1\ ;\ x_2=2\log_3 2\quad B)\ x_1=1\quad C)\ x_1=1\ ;\ x_2=2\log_3 6\quad ;\ D)\ x_1=-2\log_3 2\quad E)\ x_1=1\ ;\ x_2=-2\log_3 2$

$F)\ x_1=0\ ;\ x_2=2\log_3 6\quad G)\ x_1=1\ ;\ x_2=-2\log_3 6\quad H)\ outro$

Resolução:

$$3^x.(2^3)^{x/_{x+2}}=3.2\rightarrow 3^x.2^{3x/_{x+2}}=3.2\rightarrow\frac{3^x}{3}=\frac{2}{2^{3x/_{x+2}}}$$

$$3^{x-1}=2^{1-3x/_{x+2}}\rightarrow 3^{x-1}=2^{2-2x/_{x+2}}$$

$Aplicando\ logaritmo\ natural\ em\ ambos\ membros\ da\ igualdade\ (ln\ ), fica:$

$$\ln 3^{x-1}=\ln 2^{2-2x/_{x+2}}\rightarrow(x-1)\ln 3=\frac{(2-2x)}{x+2}\ln 2$$

$$(x-1)\ln 3=\frac{-2(x-1)ln2}{x+2}\rightarrow(x-1)\ln 3+\frac{2(x-1)}{x+2}\ln 2=0$$

$$(x-1)\left[\ln 3+\frac{2\ln 2}{x+2}\right]=0\ \rightarrow x-1=0\ e\ \left[\ln 3+\frac{2\ln 2}{x+2}\right]=0$$

$$x-1=0\ \rightarrow x_1=1$$

$$\left[\ln 3+\frac{2\ln 2}{x+2}\right]=0$$

$$\rightarrow x\ln 3+2\ln 3+2ln2=0\rightarrow x\ln 3+\ln 3^2+\ln 2^2=0\rightarrow$$

$$\rightarrow x\ln 3+\ln 9+\ln 4=0\rightarrow x\ln 3+\ln 36=0\rightarrow x\ln 4=-\ln 36$$

$$x\ln 3=-\ln 36\rightarrow x=-\frac{\ln 36}{\ln 3}\rightarrow x=-\log_3 36\rightarrow x=-(\log_3 6^2)$$

$$x=-2(\log_3 3.2)\ \rightarrow x=-2(\log_3 3+\log_3 2)\ \rightarrow x_2=-2(1+\log_3 2)$$

$$x_2=-2(\log_3 3+\log_3 2)=-2\log_3(3.2)$$

$$x_2=-2\log_3 6$$

$S: (1;\ -2\log_3 6)$, Línea G

93) (Exame 2010) Resolva a equação:

$$\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$$

Resp: $A)\ x_1 = 1\,; x_2 = 4\,;\ x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad B)\ x_1 = 1\,; x_2 = 4$

$C)\ x_1 = 4\,; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad D)\ x_1 = 1\,; x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$E)\ x_1 = 1\,; x_2 = 4\,;\ x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad F)\ x_1 = 4\,; x_2 = \sqrt{2}\,;$

$G)\ x_1 = 1\,; x_2 = \sqrt{2}\,;\ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad H)\ outro$

Resolução:

$condição\ de\ existência: (x > 0\ e\ 0 < x \neq 1)$

$$2\log_{\frac{x}{2}}(x) - 14.3\ \log_{16x} x + 40\log_{4x} x^{\frac{1}{2}} = 0$$
$$2\log_{\frac{x}{2}}(x) - 42\log_{16x} x + \frac{40}{2}\log_{4x} x = 0$$
$$2\log_{\frac{x}{2}}(x) - 42\log_{16x} x + 20\log_{4x} x = 0$$

$Fazendo\ a\ mudança\ de\ base\ em\ todos\ os\ termos\ da\ equação, vem:$

$\frac{2}{\log_x\frac{x}{2}} - \frac{42}{\log_x 16x} + \frac{20}{\log_x 4x} = 0 \rightarrow$

$$\frac{2}{(\log_x x - \log_x 2)} - \frac{42}{(\log_x 16 + \log_x x)} + \frac{20}{\log_x 4 + \log_x x)} = 0/:2 \rightarrow$$

$\frac{1}{(1-\log_x 2)} - \frac{21}{(\log_x 2^4+1)} + \frac{10}{(\log_x 2^2+1)} = 0 \rightarrow$

$\frac{1}{(1-\log_x 2)} - \frac{21}{(4\log_x 2+1)} + \frac{10}{(2\log_x 2+1)} = 0$

$Fazendo\ mudança\ de\ base\ outra\ vez, vem:$

$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log_2 x}\right)} - \frac{21}{\left(\frac{4}{\log_2 x}+1\right)} + \frac{10}{(\frac{2}{\log_2 x}+1)} = 0 \rightarrow$

$\frac{\log_2 x}{(\log_2 x-1)} - \frac{21\log_2 x}{(4+\log_2 x)} + \frac{10\log_2 x}{(2+\log_2 x)} = 0,$

$fazendo: \log_2 x = t, vem:$

$$\frac{t}{(t-1)} - \frac{21t}{(4+t)} + \frac{10t}{(2+t)} = 0 \to t\left(\frac{1}{t-1} - \frac{21}{t+4} + \frac{10}{2+t}\right) = 0 \to$$

Aplicando a lei do anulamento do produto temos: $t = 0$ e

$$\left(\frac{1}{t-1} - \frac{21}{t+4} + \frac{10}{2+t}\right) = 0 \to \left(\frac{t+4-21t+21}{(t-1)(t+4)} + \frac{10}{2+t}\right) = 0 \to$$

$$\left(\frac{25-20t}{t^2+3t-4} + \frac{10}{2+t}\right) = 0 \to \left[\frac{(25-20t)(2+t)+10t^2+30t-40}{(t^2-3t-4)(2+t)}\right] \to$$

$\left[\frac{50+25t-40t-20t^2+10t^2+30t-40}{(t^2-3t-4)(2+t)}\right] = 0 \to \left[\frac{-10t^2+15t+10}{(t^2-3t-4)(2+t)}\right] = 0/\times(-1) \to$

$\left[\frac{2t^2-3t-2}{(t^2-3t-4)(2+t)}\right] = 0 \to$

$2t^2-3t-2 = 0 \; e \; (t^2-3t-4)(2+t) \neq 0$

$$\left[\begin{array}{c}(t^2-3t-4)(2+t) \neq 0 \to \\ (t+4)(t-1)(2+t) \neq 0 \to t \neq -4\,; t \neq 1 \; e \; t \neq -2\end{array}\right]$$

$2t^2-3t-2 = 0 \to \Delta = (-3)^2 - 4(2) \to \Delta = 25,$

$t_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{25}}{4} \to t_1 = -\frac{1}{2} \; e \;\; t_2 = 2$

$os \; valores \; de \; t \; sao: -\frac{1}{2}\,, 0 \; e \; 2$

$\log_2 x = -\frac{1}{2} \to x = 2^{-\frac{1}{2}} \to x = \frac{1}{\sqrt{2}} \to x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \to x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\log_2 x = 0 \to x = 2^0 \to x_2 = 1$

$\log_2 x = 2 \to x = 2^2 \to x_3 = 4 \quad S: \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\,; 4\right\}$, Línea C)

94) (Exame 2010) Escrever uma equação reduzida da recta perpendicular à recta da equação $y = -3x + 7$ passando pelo ponto $(0\,;2)$

Resp: $A)\ y = \frac{1}{3}\ x + 2\ B)\ y = -\frac{1}{3}\ x + 2\ C)\ y = 3x + 2\ D)\ y = 3x - 2$

$E)\ y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\quad F)\ y = x + 2\quad G)\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\quad H)\ outro$

Resolução:

A equação de uma recta que passa por um ponto é dada pela expressão:

$y - y_0 = m(x - x_0\,), em\ que\ x_0 = 0\ e\ y_0 = 2\ ;\ y - 2 = m(x - 0) \rightarrow y - 2 = mx$

Onde m é $o\ declive\ ou\ coeficiente\ angular$

Para que as rectas sejam perpendiculares é necessário que: $m_1.m_2 = -1$, em que m_1 é o declive da recta procurada e m_2 é declive da recta dada.

$m_2 = -\frac{a}{b}\ , pela\ equação: y = -3x + 7 \rightarrow y + 3x - 7 = 0,$

Na recta: $a = 3\,, b = 1$

$m_2 = -\frac{3}{1} \rightarrow m_2 = -3\,;\ m_1.m_2 = -1 \rightarrow m_1(-3) = -1 \rightarrow m_1 = \frac{1}{3}$

$y - 2 = mx \rightarrow y - 2 = \frac{1}{3}x \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 2$ é $a\ equação\ procurada$, Línea A)

95) (Exame 2010) Determinar uma equação de uma circunferência de centro $(3\,;\ -2)$ tangente a recta $y = -\frac{1}{2}x + 3.\ R$

Resp: $A)(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9\quad B)\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{25}$

$C)\ (x + 3)^2 - (y - 2)^2 = \frac{36}{25}\quad D)\ (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

$E)\ (x - 3)^2 - (y + 2)^2 = \frac{49}{25}\quad F)\ (y + 2)^2 - (x - 3)^2 = \frac{36}{5}$

$G)\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{5}\qquad H)\ outro$

Resolução:

C: $(3;\ -2)$ A equação da circunferência é expressa pela equação:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\ em\ que\ o\ centro$ é $C: (x_0; y_0)\ \ e\ \ R$ é $o\ raio.$

Como C: $(3;\ -2) \rightarrow x_0 = 3\ e\ y_0 = -2\ ;\ teremos:$

$(x-3)^2+(y+2)^2=R^2$

Vamos determinar o raio da circunferência:

Como a circunferência é tangente a recta, a distância do centro à recta corresponde ao raio da circunferência. Vamos determinar a distância de um ponto (neste caso o ponto é o centro C: $(3;\ -2)$) a uma recta:

$R=d_{P,r}=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$y=-\frac{1}{2}x+3 \rightarrow 2y=-x+6 \rightarrow x+2y-6=0\ (\ a=1\ ,b=2\ e\ c=-6\ ), então$:

$d_{P,r}=\frac{1(3)+2(-2)-6}{\sqrt{1^2+2^2}}=-\frac{7}{\sqrt{5}} \rightarrow R=\ -\frac{7}{\sqrt{5}}$, a equação da circunferência será:

$(x-3)^2+(y+2)^2=(-\frac{7}{\sqrt{5}})^{\ 2}$

$(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{49}{5}$ $é\ a\ equação\ procurada$, Línea G)

96) $(Exame\ \ 2010)$ Resolva a inequação:

$(senx-cosx)\sqrt{5x-4-x^2}\geq 0$

Resp: $A)\ \left[1;\ \frac{5\pi}{4}\right]\ \cup\ \{4\}\ \ B)\ \left[1;\ \frac{5\pi}{4}\right[\ \cup\{4\}\ \ \ C)\ [1;4]\ \ D)\ \left[\frac{\pi}{4};1\right]$

$E)\ \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right[\ \ \ F)\ \left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]\ \cup\ [3;4]\ \ \ G)\ \left[\frac{5\pi}{4};\ 4\right]\ \ \ H)outro$

Resolução:

$\begin{cases} senx-cosx\geq 0 \\ 5x-4-x^2\geq 0 \end{cases}$; sabe-se que senx $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cosx$

$senx-$ senx $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ \geq 0$; (*)

sabe-se que: $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$senx-$ sen $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\ -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\ sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Voltando em (*):

$-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\ sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$ (Multiplicar todos os termos por -1) , vem:

$2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\; sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 0 \rightarrow\; sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 0$

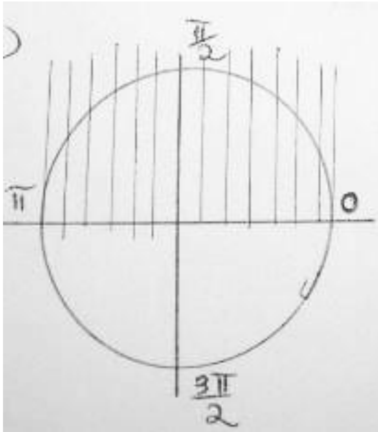
Conforme o ciclo

Trigonométrico, temos:

$\pi + 2k\pi \le x + \frac{\pi}{4} \;\le 0 + 2k\pi$

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$S_1 = x\; \in\; \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$



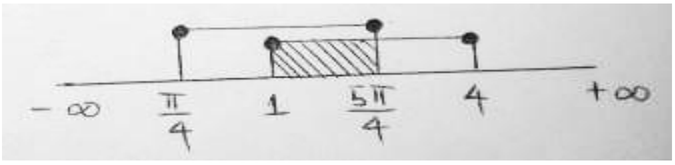
$5x - 4 - x^2 \ge 0$, multiplicar por –1 e factorizar x, temos:

$x^2 - 5x + 4\;\; \le 0 \rightarrow\; (\, x_1 = 1\; e\; x_2 = 4\,)$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4\;\; \le 0$		+	O	−	O	+	

$S_2 = x\; \in\; [1; 4\,]$

A solução da inequação é: $S = S_1\; \cap\; S_2$



$S = \left[1;\, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \{4\}$; Línea A)

97) (Exame 2010) Resolva a equação :

$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$

Resp: $A)\; x_1 = 2\;;\; x_2 = 1 - \sqrt{33}\;; x_3 = -8\;\; B)\; x_1 = 2\;;\; x_2 = 1 \pm \sqrt{33}$

$C)\; x_1 = 2\;;\; x_2 = 1 - \sqrt{3}\;\; D)\; x_1 = 2\;;\; x_2 = -8$

$E)\; x_1 = 2\;;\; x_2 = 1 + \sqrt{33}\;; x_3 = -8\; F)\; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{33}\;;\; x_2 = -8$

$G)\; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{33}\quad H)\; outro$

Resolução:

$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$

Condição de existência:

$(4-x>0 \to x<4 \ e \ x+6>0 \ \to x> \ -6 \,, \ (x+2)^2 \to \ x \ \in R\ )$

$2\times\left(\frac{3}{2}\right)\log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$, dividir todos os termos por (3):

$\log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6) \to$

$\log_{\frac{1}{4}}(x+2) - \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{1/4}(4-x)(x+6)$

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{(x+2)}{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{4}}(4x+24-x^2-6x) \to \ \log_{\frac{1}{4}}4(x+2) = \log_{\frac{1}{4}}(-x^2-2x+24)$

$4(x+2) = (-x^2-2x+24) \to 4x+8 = -x^2-2x+24$

$x^2+6x-24+8=0 \to \ x^2+6x-16=0\ (\ equação\ do\ 2º, a=1; b=6\,; c=-16)$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x = \frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-6\pm10}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+10}{2} \to \ x_1 = 2\,; \quad x_2 = \frac{-6-10}{2} \to x_2 = -8$$

Como $x_1 = 2$ é a única solução que satisfaz a condição de existência, temos:

$S = \ \{x_1 = 2\}$, Línea H)

98) (Exame 2010) Resolva a inequação:

$sen2x + 1 \ > 2cosx + senx$

Resp: $A)\ \left]\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right[\quad B)\ \left]\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right[$

$C)\ \left]-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+\pi k\right[\quad D)\ \left]-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right[$

$E)\ \left]\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+\pi k\right[\quad F)\ \left]-\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi k\right[$

$G)\ \left]\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right[\quad H)\ outro$

Resolução:

$sen2x + 1 \ > 2cosx + senx \to 2senx\ cosx + 1 \ > 2cosx + senx$

$2senx\ cosx + 1 - 2cosx - senx \ > 0 \ \to (2senx\ cosx - 2cosx) + (1 - senx) > 0$

$2cosx\ (senx-1)-(senx-1)>0\ \rightarrow (senx-1)(2cosx-1)>0$

A inequação é válida nas seguintes condições:

I) $\begin{Bmatrix} senx-1\ >0 \\ 2cosx-1>0 \end{Bmatrix}$ II) $\begin{Bmatrix} senx-1\ <0 \\ 2cosx-1<0 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} senx\ >0\ \rightarrow S=\ \{\emptyset\} \\ cosx>\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} senx\ <1\rightarrow x\ \in R-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\} \\ cosx<\frac{1}{2}\ \rightarrow cosx<\cos\left(\frac{1}{2}\right)\ \rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{3} \end{Bmatrix}$

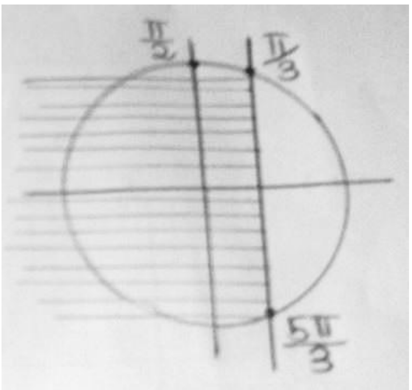
O sistema I) não tem solução, pois não há intersecção das desigualdades

No sistema II) temos:

Conforme o ciclo trigonométrico

Ao lado a solução da inequação

Trigonométrica será:



$\left]\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right[$, Línea G)

99) (Exame 2010) Simplificar a expressão:

$$\frac{\left(a^2b\sqrt{b}-6a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{4}}+12\ ab\sqrt[3]{a}-8ab^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{\frac{3}{4}}+4a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b}}$$

Resp: $A)\frac{1}{2}\ \ B)-2\ \ C)\ 1{,}5\ \ D)-0{,}5\ \ E)\ 1\ \ F)\ 2\ \ G)-1\ \ \ H)\ outro$

Resolução:

Transformando todas as potenciais em radicais, temos:

$$\frac{\left(a^2b\sqrt{b}-6\sqrt[3]{a^5}\sqrt[4]{b^5}+12\,ab\sqrt[3]{a}-8a\sqrt[4]{b^3}\right)^{\frac{2}{3}}}{ab\sqrt[3]{a}-4a\sqrt[4]{b^3}+4\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}},$$

Achando um mmc para todos os radicais: (neste caso 12)

$$\frac{\left(\sqrt[12]{a^{24}}\,\sqrt[12]{b^{12}}\sqrt[12]{b^6}-6\sqrt[12]{a^{20}}\,\sqrt[12]{b^{15}}+12\,\sqrt[12]{a^{12}}\,\sqrt[12]{b^{12}}\sqrt[12]{a^4}-8\sqrt[12]{a^{12}}\sqrt[12]{b^9}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[12]{a^{12}}\,\sqrt[12]{b^{12}}\sqrt[12]{a^4}-4\sqrt[12]{a^{12}}\sqrt[12]{b^9}+4\sqrt[12]{a^8}\,\sqrt[12]{b^6}}$$

$$\frac{\left(\sqrt[12]{a^{24}}\,\sqrt[12]{b^{18}}-6\sqrt[12]{a^{20}}\,\sqrt[12]{b^{15}}+12\,\sqrt[12]{a^{16}}\,\sqrt[12]{b^{12}}-8\sqrt[12]{a^{12}}\sqrt[12]{b^9}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[12]{a^{16}}\,\sqrt[12]{b^{12}}-4\sqrt[12]{a^{12}}\sqrt[12]{b^9}+4\sqrt[12]{a^8}\,\sqrt[12]{b^6}}$$

Supondo que: $\sqrt[12]{a}=x\quad e\quad \sqrt[12]{b}=y$

$$\frac{(x^{24}y^{12}-6x^{20}y^{15}+12\,x^{16}\,y^{12}-8x^{12}y^9)^{\frac{2}{3}}}{x^{16}\,y^{12}-4x^{12}y^9+4x^8\,y^6}$$

Factorizando $x^{12}y^9$ no numerador e x^8y^6 no denominador, temos:

$$\frac{[x^{12}y^9(x^{12}y^3-6x^8y^6+12x^4y^3-8)]^{\frac{2}{3}}}{x^8y^6(x^8y^6-4x^4y^3+4)}\qquad (*)$$

Nota que:

$(a-b)^3=\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ e

$(xy-2)^3=x^{12}y^3-6x^8y^6+12x^4y^3-8$ e

$x^8y^6-4x^4y^3+4=(xy-2)^2$

Voltando em (*):

$\frac{[x^{12}y^9(xy-2)^3]^{\frac{2}{3}}}{x^8y^6(xy-2)^2}$, Separando os expoentes do numerador temos:

$$\frac{(x^{12})^{\frac{2}{3}}.(y^9)^{\frac{2}{3}}.(xy-2)^{3\frac{2}{3}}}{x^8y^6(xy-2)^2}=\frac{\cancel{x^8y^6(xy-2)^2}}{\cancel{x^8y^6(xy-2)^2}}=1$$, Línea E)

100) (Exame 2009) -Simplifique a expressão:

$$\frac{1-(\log_a b)^3}{(\log_a b+\log_b a\ \ +1)\left(\log_a\frac{a}{b}\right)}$$

Resp: $A)\ \log_b a\quad B)\ \log_b a+1\quad C)\ \sqrt{\log_a b}\quad D)\ 2\log_b a$

$E)\ 1-\log_a b\quad F)\ log_a^2\, b\quad G)\ \log_a b\quad H)\ outro$

Resolução:

$obs: A\ expressão\ do\ numerador\ é\ uma\ diferença\ de\ cubos$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$= \frac{(1-\log_a b)[1+\log_a b+(\log_a b)^2]}{\left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+1\right)(\log_a a-\log_a b)} \rightarrow$$

$$= \frac{(1-\log_a b)[1+\log_a b+(\log_a b)^2]}{\frac{[1+\log_a b+(\log_a b)^2](1-\log_a b)}{\log_a b}}$$, Simplificando vem:

$= \log_a b$, Línea G

101) (Exame 2009) Resolve a inequação: $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

Resp: $A)\ ]0;+\infty[\quad B)\ [-12;-3]\ \cup\ ]0;+\infty[$

$C)[-12;-3]\ \cup\ [4;+\infty[\quad D)\ [4;+\infty[\quad E)\ [-12;4]$

$F)\ [-12;0[\ \cup\ [4;+\infty[\quad G)\ ]0;4[\ \cup\ ]4;+\infty[\quad H)\ outro$

Resolução:

$Condição\ de\ existência\ CE$: $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$x^2 - x - 12 \geq 0$ ($inequaçãodo\ 2º\ grau$)

Aplicando Vieth para achar as raízes da inequação:

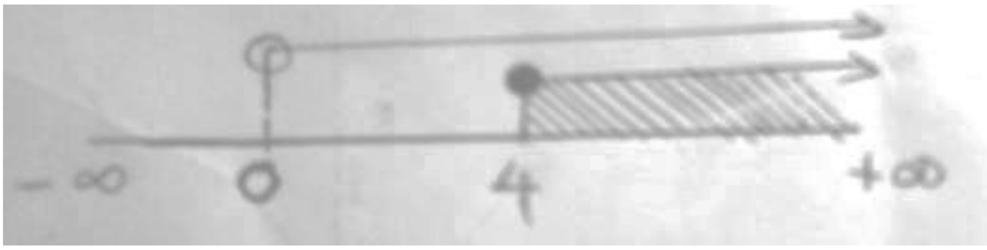
$x^2 - x - 12 = 0, x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) = 0$

$(x-4)(x+3) = 0$, $x - 4 = 0\ e\ x + 3 = 0 \rightarrow (\ x_1 = 4\ e\ x_2 = -3)$

$a > 0$	-∞ -3 4 $+\infty$
$x^2 - x - 12 \geq 0$	+ O − O +

$x \epsilon\ ]-\infty;\ -3]\ \cup [4;\ +\infty[$
$x > 0\ \rightarrow x \epsilon\ ]0;\ +\infty[$

O conjunto verdadeiro da C.E é a intersecção dos dois intervalos numéricos



$S_1 = [4; +\infty[$

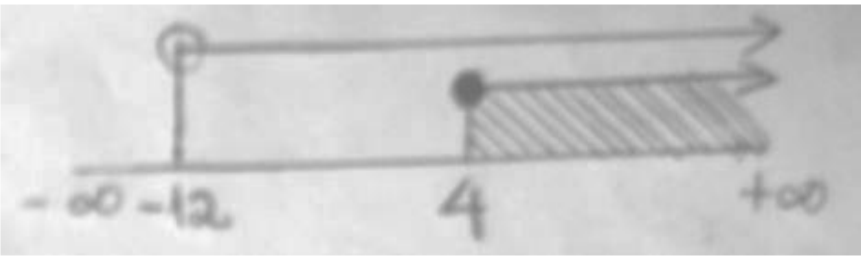
Resolvendo a inequação: $(\quad)^2$

$(\sqrt{x^2 - x - 12})^2 < (x)^2 \rightarrow x^2 - x - 12 < x^2$

$x^2 - x - 12 < x^2 \rightarrow x > -12$

$x > -12 \rightarrow x \epsilon]-12; +\infty[$; $S_2 =]-12; +\infty[$

A solução verdade da inequação será: $S = S_1 \cap S_2$



$S = [4; +\infty[$, Línea D

102) (Exame 2009) Resolva a equação:

$1 + sen^3x + cos^3x = \frac{3}{2}\ sen2x$ $R: x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$

Resolução:

Sabe-se que: $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ $(*)$

Ou $a^3 + b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$ (**)

$sen^3x + cos^3x = (senx + cosx)^3 - 3senxcosx(senx + cosx)$

Sabe-se que: $sen2x = 2senx\ cosx$

Voltando na expressão inicial:

$1 + (senx + cosx)^3 - 3senxcosx(senx + cosx) = \frac{3}{2}\ (\ 2senx\ cosx\ )$

$[1^3 + (senx + cosx)^3] - 3senxcosx(senx + cosx) = 3senx\ cosx$

Aplicando a fórmula (**) para a expressão: $[1^3 + (senx + cosx)^3]$, vem:

$(1 + senx + cosx)[1^2 - (senx + cosx) + (senx + cosx)^2] -$

$-3senxcosx(senx + cosx) - 3senx\ cosx = 0$

Factorizando a expressão $3senx\,cosx\ \ no\ \ 2º\ \ e\ \ no\ \ 3º\ \ produto$:

$(1+senx+cosx)[1^2-(senx+cosx)+(senx+cosx)^2]\rightarrow\rightarrow$

$-3senx\,cosx\,(senx+cosx+1)=0$

Factorizando a expressão : $(1+senx+cosx)$

$(1+senx+cosx)[1-senx-cosx+sen^2x+2senx\,cosx+cos^2x-3senx\,cosx\,]=0$

$(1+senx+cosx)(1-senx-cosx+1+sen2x-3senx\,cosx)=0$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

1º) $(1+senx+cosx)=0\ e$

$2º)\ (1-senx-cosx+1+sen2x-3senx\,cosx)=0$

1º) $(1+senx+cosx)=0\rightarrow senx+cosx=-1$

Obs.: $cosx=sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$senx+sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Sabe-se que: $sena+senb=2\,sen\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$senx+sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Voltando na expressão inicial:

$\sqrt{2}\,sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\ \rightarrow sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\ \rightarrow$

$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \rightarrow\ sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=sen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\,sen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \ ;\ \alpha=\ -\frac{\pi}{4}$

Como $\alpha<0$, a expressão geral para os senos é:

$x=\ \pi k+(-1)^{k+1}\,\alpha$

$x+\frac{\pi}{4}=\pi k+(-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{4}\ \rightarrow x=\ -\frac{\pi}{4}+\pi k+(-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{4}$

$2º)\ (1-senx-cosx+1+sen2x-3senx\,cosx)=0$

$2-senx-cosx+sen2x-3senx\,cosx=0\ /(multiplica\ por\ 2)$

$4 - 2senx - 2cosx + 2sen2x - 3\ sen2x = 0\ \rightarrow$

$4 - sen2x = 2(senx + cosx)$, elevar ambos membros ao quadrado:

$(4 - sen2x)^2 = (2(senx + cosx))^2$

$16 - 8sen2x + sen^2 2x = 4(sen^2x + 2senx\ cosx + cos^2x)$

$16 - 8sen2x + sen^2 2x = 4(1 + sen2x)$

$16 - 8sen2x + sen^2 2x = 1 + 4\ sen2x$

$sen^2 2x + 4\ sen2x + 12 = 0$, Fazendo $sen2x = t, t\ \in [-1;1]$

$t^2 + 4t + 12 = 0\ , \Delta = (4)^2 - 4(1)(12) = -32 \rightarrow\ \Delta < 0 \nexists\ t_1\ e\ t_2$

$S = \left\{x = -\frac{\pi}{4} + \pi k + (-1)^{k+1}\ \frac{\pi}{4}\ \right\}$

103) (Exame -2009) Simplifique a expressão:

$(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} a)\log_b a - 1$

Resolução:

Obs.: $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$

$\left(\frac{1}{\log_b a} + \log_b a + 2\right)\left(\log_a b - \frac{1}{\log_b ab}\right)\log_b a - 1$

Achando o denominador comum no 1º produto e $\log_y xy = \log_y x + \log_y y$

$\frac{[(\log_b a)^2 + 2\log_b a + 1]}{\log_b a}\left[\log_a b - \frac{1}{\log_b a + \log_b b}\right]\log_b a - 1$

Obs.: $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \quad e \quad \log_b b = 1$

$\frac{(\log_b a + 1)^2}{\log_b a}\left(\log_a b - \frac{1}{\log_b a + 1}\right)\log_b a - 1$

$\frac{(\log_b a + 1)^2}{\log_b a}\ \frac{(\log_a b . \log_b a + \log_a b - 1)\log_b a - 1}{(\log_b a + 1)}$

$(\log_b a\ +\ 1)\ \left(\frac{\log_b a}{\log_b a} + \log_a b - 1\right) - 1$

$(\log_b a\ +\ 1)(1 + \log_a b - 1) - 1$

$(\log_b a\ +\ 1)(\log_a b) - 1$

$\log_a b \times \log_b a + \log_a b - 1$

$\frac{\log_b a}{\log_b a} + \log_a b - 1$

$1 + \log_a b - 1$

$= \log_a b$

104) (Exame 2009) Resolva a equação:

$3tg^2x + 4tgx + 4\ cotgx + 3\ cotg^2x + 2 = 0$

Resp: $A)\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ \ B)\ )\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k\ \ \ C)\ )\ \frac{\pi}{4} + \pi\ k\ \ D)\ \pm)\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$E)\ \pm\ \frac{\pi}{4} + \pi k\ \ \ F)\ ) - \frac{\pi}{4} + \pi k\ \ \ G)\ \pm\frac{3\pi}{4} + \pi k\ \ \ H)\ outro$

Resolução:

$3tg^2x + 4tgx + 4\left(\frac{1}{tgx}\right) + 3\ \frac{1}{tg^2x} + 2 = 0$

$\frac{3tg^4x+4tg^3x+4tgx+3+2tg^2x}{tg^2x} = 0\ \rightarrow\ \frac{3tg^4+4tg^3x+2tg^2x+4tgx+3}{tg^2x} = 0$

Fazendo: $tgx = t$

$\frac{3t^4+4t^3+2t^2+4t+3}{t^2} = 0$ (equação racional fraccionária)

$3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 =\ 0\ e\ \ t^2 \neq 0 \rightarrow t\ \neq 0$

$3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 =\ 0$ (equação racional)

Considerando que $P(t) = 3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 =\ 0$,se $t = -1$

$P(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 + 2(-1)^2 + 4(-1) + 3 =\ 0$

$t = -1$ é uma das raízes da equação racional

Dividindo pelo método de chave , onde :

$P(t) = 3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3\ \ e\ D(t) = t + 1$ Obtemos:

O quociente $Q(t) =\ 3t^3 + t^2 + t + 1$ e o resto $R(t) = 0$ então:

$P(t) = D(t)Q(t) + R(t) = (t + 1)(\ 3t^3 + t^2 + t + 1) = 0$

Pelo anulamento do produto

$t + 1 = 0\ \rightarrow t = -1$

$3t^3 + t^2 + t + 1 = 0$ (A Equação não tem raízes reais)

Voltando na suposição:

$tgx = t \rightarrow tgx = tg(-1) \rightarrow tgx = -tg(1), \alpha = -\frac{\pi}{4}$

$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$; CE: $tgx \neq 0 \rightarrow x \neq \pi k$

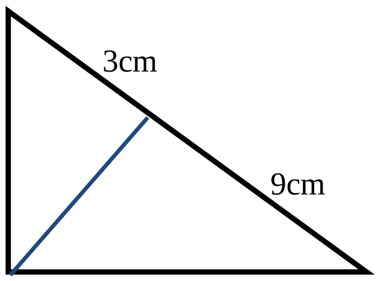
A solução da equação é: $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}$, Línea F)

105) (Exame 2009) No triângulo rectangular a altura traçada de um vértice do ângulo recto divide a hipotenusa em segmentos 3 cm e 9 cm. Então os catetos do triângulo são:

Resp: $A)\ 6cm\ e\ 9cm\ \ B)\ 9cm\ e\ 6\sqrt{3}\ cm\ \ C)\ 3\sqrt{3}\ cm\ e\ 6\ cm\ \ D)\ 3\sqrt{3}\ cm\ e\ 9cm$

$E)\ 9cm\ e\ 12\ cm\ \ F)\ 6cm\ e\ 6\sqrt{3}\ cm$

Resolução:



$a = m + n \rightarrow a = 3 + 9 \rightarrow a = 12\ cm$

$c^2 = m\,a \rightarrow c^2 = 3 \times 12 \rightarrow c^2 = 36$

$c^2 = 36 \rightarrow c = \sqrt{36} \rightarrow c = 6\ cm$

$b^2 = n\,a \rightarrow b^2 = 9 \times 12 \rightarrow b^2 = 36 \times 3$

$b^2 = 36 \times 3 \rightarrow b = \sqrt{36} \times \sqrt{3}$

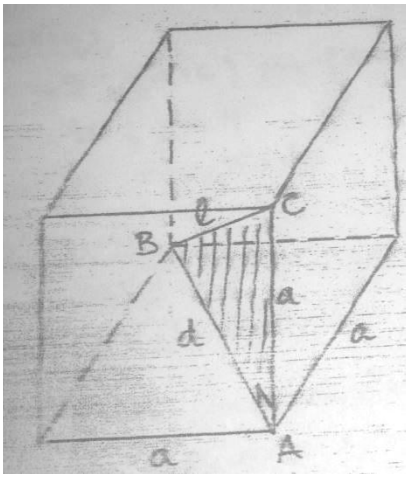
$b = 6\sqrt{3}\ cm$

Os catetos dos triângulos são: $6\ cm\ e\ 6\sqrt{3}\ cm$, Línea F)

106) (Exame 2009) A diagonal de um cubo é l. Então o volume do cubo é:

Resp: $A)\frac{l^3}{3}\ \ B)\ \frac{l^3\sqrt{2}}{3}\ \ C)\ \frac{l^3\sqrt{3}}{9}\ \ D)\ \frac{l^3\sqrt{3}}{3}\ \ E)\ \frac{l^3\sqrt{2}}{9}\ \ F)\ \frac{l^3}{9}$

Resolução:



Fórmula do volume do cubo: $V = a^3$(*)

Onde a é o cateto

No triângulo rectângulo ABC,

Vem:

$l^2 = a^2 + d^2$ (1)

E a diagonal do quadrado da

Base é:

$d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d^2 = 2a^2$ (2)

Substituindo (2) em (1), vem:

$l^2 = a^2 + 2a^2 \rightarrow 3a^2 = l^3 \rightarrow$

$a^2 = \frac{l^2}{3} \rightarrow a = \frac{l}{\sqrt{3}} \rightarrow a = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

Substituindo em (*),vem:

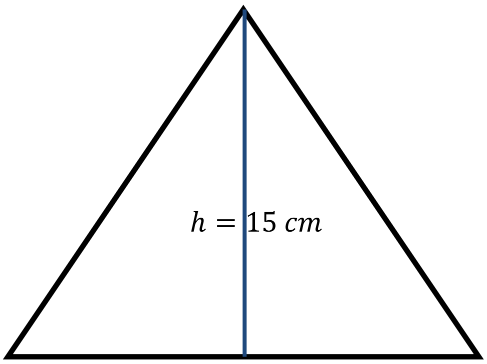
$V = \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{l^3\sqrt{3^3}}{27} = \frac{3l^3\sqrt{3}}{27} \rightarrow V = \frac{l^3\sqrt{3}}{9}$, Línea C)

107) (Exame 2009) o perímetro de um triângulo isósceles é igual à 90 cm e a sua altura é igual à 15 cm. Ache a área desse triângulo

Resp: $A)\ 200\ cm^2\quad B)\ 30\sqrt{2}\ cm^2\quad C)\ 420\ cm^2\quad D)\ 300\ cm^2\quad E)\ 45\sqrt{3}\ cm^2$

$F)\ outro$

Resolução:



$P = 90\ cm\ ; h = 15\ cm\ ; a = b$

Conforme a figura; vem: $c = 2m$

$\rightarrow m = \frac{c}{2}$

$P = a + b + c \rightarrow P = 2a + c \rightarrow 2a + c = 90$ (1)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ATC, vem: $a^2 = m^2 + h^2$ e $m = \frac{c}{2}$

$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (15)^2 \rightarrow a^2 = \frac{c^2}{4} + (15)^2 \rightarrow 4a^2 = c^2 + 4 \times 225 \rightarrow$

$\rightarrow 4a^2 = c^2 + 900$ (2)

Formando um sistema de equações , com as equações (1) e (2) , vem:

$$\begin{cases} 2a + c = 90 \rightarrow c = 90 - 2a\ (*) \\ 4a^2 = c^2 + 900\ (**) \end{cases}$$

Substituindo (*) em (**) , vem:

$4a^2 = (90 - 2a)^2 + 900 \rightarrow 4a^2 = 8100 - 360a + 4a^2 + 900$

$360\ a = 9000 \rightarrow a = \frac{9000}{360} \rightarrow a = 25$

$a = 25\ e\ c = 90 - 2a \rightarrow c = 90 - 2(25) \rightarrow c = 90 - 25 \rightarrow c = 40$

A área do triângulo é: $A = \frac{1}{2}\ c\ h$

$A = \frac{1}{2}\ c\ h = \frac{1}{2}(40 \times 15) \rightarrow A = 300\ cm^2$, Línea D

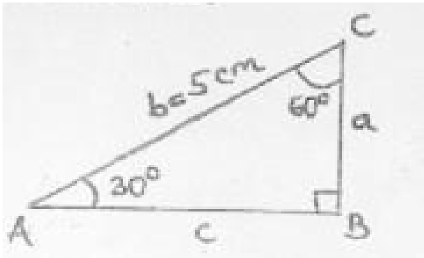
108) (Exame 2009) No triângulo um lado é igual à 5 cm e dois ângulos adjacentes desse lado são respectivamente 30° e 60°. Então dois outros lados desse triângulo são:

Resp: $A)\ 3\ cm\ e\ 4\ cm$ $B)\ 2{,}5\ cm\ e\ 2{,}5\sqrt{2}\ cm$ $C)\ 2{,}5\ cm\ e\ 2{,}5\sqrt{3}\ cm$

$D)\ 7\ cm\ e\ 2{,}5\sqrt{2}\ cm$ $E)\ 2{,}5\ cm\ e\ \sqrt{11}\ cm$ $F)\ 4\ cm\ e\ \sqrt{41}\ cm$

Resolução:

O triângulo é rectângulo em B



$\hat{A} + \hat{B} = 90°$

$sen30° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{a}{5} \rightarrow a = 5\ sen30°$

$a = 5\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow a = 2{,}5\ cm$

$sen60° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{c}{5} \rightarrow c = 5\ sen60°$

$a = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow a = 2{,}5\sqrt{3}cm$

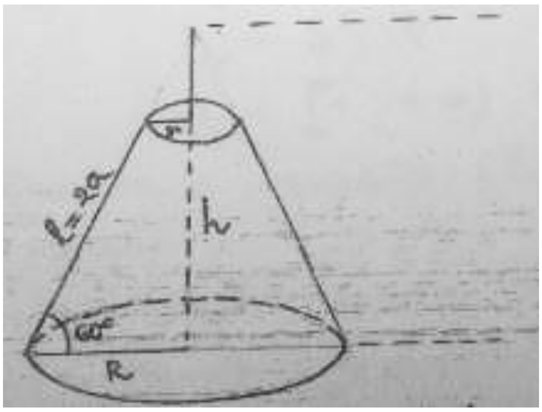
A solução é: $\{2{,}5\ cm\ ;\ 2{,}5\sqrt{3}cm\ \}$, Línea C)

109) (Exame 2009) A geratriz de um cone truncado é igual à $2a$ e tem inclinação 60° em relação a maior base do cone. O raio de uma base desse cone é duas vezes maior do que o raio da outra base. Então os raios das bases são:

Resp: $A)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ a\ e\ \sqrt{3}\ \ a$ $B)\frac{1}{2}\ a\ e\ a$ $C)\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ a\ e\ a$ $D)\ a\ e\ 2a$

$E)\ \sqrt{3}\ a\ e\ 2\sqrt{3}\ a$ $F)\ a\ e\ 3a$

Resolução:



Conforme a figura ao lado, temos:

$R = 2\,r$

$cos60° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{R}{2a}$

$R = 2a\cos 60° \rightarrow R = 2a\left(\frac{1}{2}\right)$

$R = a$

$R = a\ e\ R = 2\,r\ \rightarrow r = \frac{R}{2} \rightarrow r = \frac{a}{2}$

Então, os raios das bases desses cones são:

$S = \left\{r = \frac{1}{2}\ a\ ; R = a\right\}$, Línea B)

110) (Exame 2009) Resolver a inequação:

$x + 1 > \sqrt{x+3}$

Resp: $A)\ [-1;\ +\infty[\ \ B)\ [1;+\infty[\ \ C)\ [-3;2]\ \cup\ [1;+\infty[\ \ D)\ [-3;+\infty[$

$E)\ ]1;+\infty[\ \ F)\ [-3;-2[\ \cup\ [1;+\infty[\ \ G)\ ]-1;1[\cup]1;\infty[\ \ H)\ outro$

Resolução:

$\sqrt{x+3} < x + 1$

Condição de existência:

$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \to x \geq -3 \to x \in [-3;\ +\infty[\\ x + 1 > 0 \to x > -1 \to x \in\ ]1;+\infty[\end{cases}$

O conjunto verdadeiro da condição de existência é: $S_1 =\ ]1;\ +\infty[$

Resolvendo a inequação: elevando ambos membros da igualdade ao quadrado

$(\sqrt{x+3})^2 < (x+1)^2 \to x + 3 < x^2 + 2x + 1 \to x^2 + x - 2 > 0$

Achando os zeros: $x^2 + x - 2 > 0\ (a = 1; b = 1; c = -2)$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x = \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-1\pm3}{2}$

$x_1 = 1\ e\ x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2 > 0$		+	O	$-$	O	+	

$s_2 = x \in\ ]-\infty;-2[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$

A solução da inequação é: $S = S_1 \cap S_2$

$S =\ ]1;\ +\infty[$, Línea E)

111) (Exame 2009) Resolver a equação:

$(cosx - senx)\left(2\ tgx + \frac{1}{cosx}\right) + 2 = 0$

Resp: $A)\ \frac{\pi}{3} + \pi k\ \ B)\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\ \ C)\ (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k\ \ D)\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

E) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k\ \ F)\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\ \ G)\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi k\ \ H)\ outro$

Resolução:

$(cosx - senx)\left(2\frac{senx}{cosx} + \frac{1}{cosx}\right) + 2 = 0$

Multiplicando todos os termos, vem:

$\frac{2senx\ cosx+cosx-2\ sen^2x-senx+2cosx}{cosx} = 0$

$2senx\ cosx + 3cosx - 2\ sen^2x - senx = 0\ e$

$cosx\ \neq 0\ \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

Sabe-se que: $sen^2x = 1 -\ cos^2x$

$2senx\ cosx + 3cosx - 2\ (1 - cos^2x) - senx = 0$

$2\ sex\ cosx + 3cosx - 2 + 2cos^2x - senx = 0$

$(2senx\ cosx - senx) + (2cos^2x + 3cosx - 2) = 0$

$senx(2cosx - 1) + (2cos^2x + 3cosx - 2) = 0$

Nota que: $(2cos^2x + 3cosx - 2) = (2cosx - 1)(cosx + 2)$

$senx(2cosx - 1) + (2cosx - 1)(cosx + 2) = 0$

Factorizando: $(2cosx - 1)$

$(2cosx - 1)(senx + cosx + 2) = 0$

Aplicando a lei do anulamento do produto, temos:

$(2cosx - 1) = 0\ e\ (senx + cosx + 2) = 0$

$(2cosx - 1) = 0 \rightarrow cosx = \frac{1}{2}\ \rightarrow cosx = \cos\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Fórmula geral dos cossenos: $x = \pm\alpha + 2k\pi$

$x =\ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$(senx + cosx + 2) = 0\ \rightarrow senx =\ -(2 + cosx)$, elevando ao quadrado

$sen^2x = 4 + 4cosx +\ cos^2x$

$1 - cos^2x = 4 + 4\ cosx + cos^2x\ \ \rightarrow 2cos^2x + 4cosx + 3 = 0$

Fazendo: $cosx = t\ \rightarrow 2\ t^2 + 4t + 3 = 0\ (a = 2; b = 4; c = 3)$

$\Delta = b^2 - 4ac =\ (4)^2 - 4(2)(3) \rightarrow \Delta = -8\ < 0\ \nexists\ t$

$x =\ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ satisfaz a condição de existência $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, logo

A solução da equação é:

$S =\ \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$, Línea B)

112) (Exame 2009) Simplificar a expressão:

$$a^{\frac{2}{\log_b a}+1}.\ b\ \ - 2\,a^{\log_a b\,+1}.\,b^{\log_b a\,+1} + a.\,b^{\frac{2}{\log_a b}+1}$$

A) $ab(a+b)$ $B)\ \frac{a-b}{ab}$ $C)\ \frac{ab}{a+b}$ $D)\ ab\,(a-b)$ $E)\ \frac{(a-b)^2}{ab}$ $F)\ ab\,(a-b)^2$

G) $(a-b)^2$ $H)\ outro$

Resolução:

$$a.\,a^{\frac{2}{\log_b a}}.\ b\ \ - (2\,a.\,a^{\log_a b})(\,b.\,b^{\log_b a}) + a.\,b.\,b^{\frac{2}{\log_a b}}$$

Mudanças de base: $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$ e $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$

$$a.\,a^{2(\log_a b)}\ b\ \ - (2\,a.\,a^{\log_a b})(\,b.\,b^{\log_b a}) + a.\,b.\,b^{2(\log_b a)}$$

Sabe-se que: $a^{\log_a b} = b\ \ e\ b^{\log_b a} = a\ e\ n\log_y x = \log_y x^n$

$$a.\,a^{(\log_a b^2)}\ b\ \ - (2\,a.\,b)(\,b.\,a) + a.\,b.\,b^{(\log_b a^2)}$$

Nota que: $a^{(\log_a b^2)} = b^2\ \ \ e\ \ b^{(\log_b a^2)} = a^2$

$$a\,b^2b - 2\,a^2b^2 + aba^2 = ab^3 - 2a^2b^2 + a^3b$$

$(ab^3 - a^2b^2) + (a^3b - a^2b^2)$, factorizando:

$$ab^2(b-a) + a^2b(a-b) = -ab^2(a-b) + a^2b(a-b)$$

Factorizando a expressão: $(a-b)$, temos:

$(a-b)(a^2b - ab^2)$, factorizando ab no segundo produto, temos:

$ab(a-b)(a-b) = ab(a-b)^2$, Línea F)

113) (Exame 2009) Simplifique a expressão:

$$\frac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49} 25}} + 2^{log_2{}^{log_2{}^{log_2{}^{a^{2\log_a 4}}}}}\right).4^{-\frac{2}{\log_3 4}} - a^2}{1-a}$$

Resp: $A)\ a-1$ $B)\ a$ $C)\ a^2$ $D)\ 2a$ $E)\ \sqrt{a}$ $F)\ 1-a$ $G)\ a+1$ $H)\ outro$

Resolução:

$$\frac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{(7^2)} 25}}+2^{log_2^{log_2^{log_2^{a^{\log_a 4^2}}}}}\right).4^{-2\log_4 3}-a^2}{1-a}=$$

$$\frac{\left(25^{\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)\log_7 25}}+2^{log_2^{log_2^{log_2^{a^{\log_a 4^2}}}}}\right).4^{\log_4 3^{-2}}-a^2}{1-a}$$

$$\frac{\left(25^{\frac{1}{\log_7 25}}+2^{log_2^{log_2^{log_2^{4^2}}}}\right).3^{-2}-a^2}{1-a}=\frac{\left(25^{\log_{25} 7}+2^{log_2^{log_2^{log_2^{(2)^4}}}}\right).3^{-2}-a^2}{1-a}$$

$$\frac{\left(7+2^{log_2^{log_2^{4}}}\right).3^{-2}-a^2}{1-a}=\frac{\left(7+2^{log_2^{log_2^{2^2}}}\right).3^{-2}-a^2}{1-a}=\frac{\left(7+2^{log_2^{2}}\right).3^{-2}-a^2}{1-a}$$

$$\frac{(7+2^1).3^{-2}-a^2}{1-a}=\frac{(9).3^{-2}-a^2}{1-a}=\frac{(3^2).3^{-2}-a^2}{1-a}=\frac{1-a^2}{1-a}=\frac{(1-a)(1+a)}{1-a}=1+a\ ,$$

Línea G

114) (Exame 2009) Resolva a equação:

$sen^2x+\frac{1}{4}\ sen^2 3x=senx\ sen^2 3x$

Resp: $A)\ 2\pi k\ ;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k\quad B)\ 2\pi k\ ;\ \frac{\pi}{6}+\pi k\quad C)\ \pi k\ ;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$

$D)\ \pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k\quad E)\ 2\pi k\ ;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\quad F)\ \pi k\ ;\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$

$G)\ )\ \pi k\ ;\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\quad H)\ outro$

Resolução:

$sen^2x+\frac{1}{4}\ sen^2 3x=senx\ sen^2 3x\rightarrow$

$4sen^2x+sen^2 3x=4senx\ sen^2 3x$

$4sen^2x=sen^2 3x-4senx\ sen^2 3x\rightarrow 4sen^2x=sen^2 3x(4senx-1)$

Sabe-se que: $sen^2 3x=3senx-4\ sen^3x$

$4sen^2x=(3senx-4\ sen^3x)^2(4senx-1)$,

Factorizando $senx$ na segunda expressão:

$4sen^2x = sen^2x(3-4sen^2x)^2(4senx-1)$,

$4sen^2x - sen^2x(3-4sen^2x)^2(4senx-1) = 0$

$sen^2x[4-(9-24sen^2x+16sen^4x)(4senx-1)] = 0$

$sen^2x\,[4-(36senx-9-96sen^3x+24sen^2x+64sen^5x-16sen^4x)] = 0$

$sen^2x(4-36senx+9+96sen^3x-24sen^2x-64sen^5x+16sen^4x)$

$sen^2x(-64sen^5x+16sen^4x+96sen^3x+24sen^2x+36senx+13) = 0$

Multiplicar o segundo produto por (-1) temos:

$sen^2x(64sen^5x-16sen^4x-96sen^3x+24sen^2x+36senx-13) = 0$

Fazendo: $senx = t$

$t^2(64t^5-16t^4-96t^3+24t^2+36t-13) = 0$, Anulando os produtos temos:

$t^2 = 0 \;\rightarrow t_1 = 0\;(raiz\ dupla)$

$64t^5-16t^4-96t^3+24t^2+36t-13 = 0$

Considerando que: $p(t) = 64t^5-16t^4-96t^3+24t^2+36t-13$ é um polinómio

$p\left(\frac{1}{2}\right) = 64\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 96\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 36\left(\frac{1}{2}\right) - 13$

$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2-1-12+6+18-13 \rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $t = \frac{1}{2}$ é uma das raízes da equação do 5º grau.

Dividindo pelo método de chave, onde:

$p(t) = 64t^5-16t^4-96t^3+24t^2+36t-13\ e\ D(t) = t-\frac{1}{2}$, Obtemos:

$Q(t) = 64t^4+16t^3-88t^2-20t+26,\ R(t) = 0,\ p(t) = D(t).\,Q(t)+R(t)$

$p(t) = \left(t-\frac{1}{2}\right)(64t^4+16t^3-88t^2-20t+26) = 0$

Anulando o produto:

$t-\frac{1}{2} = 0 \;\rightarrow t_2 = \frac{1}{2}$

$64t^4+16t^3-88t^2-20t+26 = 0$ (A equação não tem raízes reais)

Voltando na suposição:

$$\begin{cases} senx = t_1 \rightarrow senx = 0 \rightarrow senx = sen(0) \rightarrow (\alpha = 0), x = \pi k \\ senx = t_2 \rightarrow senx = \frac{1}{2} \rightarrow senx = sen\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{6}, \alpha > 0\right); x = (-1)^k\alpha + \pi k \end{cases}$$

$\begin{cases} x_1 = \pi k \\ x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \end{cases}$ A solução da equação é:

$S = \left\{\pi k\ ;\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\right\}$, Línea F)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

MANUAL DE RESOLUÇÃO DOS TESTES DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO - FACULDADE DE ENGENHARIA – EXAMES DE ADMISSÃO, ED. 2008 Á 2019.

ENDEREÇO:

- **ACADEMIA 1:** LUANDA, MUNICIPIO DE CACUACO, NA PARAGEM DO BALUMUCA, QUASE AO PEDONAL (PONTE), JUNTO A ESTRADA PRINCIPAL DE CACUACO.

- **ACADEMIA 2:** BENGO, BAIRRO BANGUILA, SECTOR 2 AO LARGO DA IGREJA UNIVERSAL, CASA N.º 15-B

FB.: ***Academia Clínica do Saber***

Whatsapp: ***938-979-070 // 940-553-898***

Correio electrónico: ***academia.clinicadosaber@gmail.com***

PEDRO RAFAEL AFONSO

- **LICENCIADO:** EM GEOFÍSICA NA UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO, ANO 2012 – 2017.

- **PROFESSOR E ORIENTADOR:** PROFESSOR DE FÍSICA E MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO.
  ORIENTADOR NO CENTRO DE PREPARATÓRIO ACADEMIA CLÍNICA DO SABER

Whatsapp: ***938-979-070***

Correio electrónico: ***delarafapedro@gmail.com***

ALEXANDRE JOÃO EMANUEL

- **UNIVERSITÁRIO:** NO INSTITUTO SUPERIOR POLITECNICO INTERCONTINENTAL DE LUANDA, ANO 2019.

- **PROFESSOR E ORIENTADOR:** PROFESSOR DE FUNDAMENTOS DE PROGRAMAÇÃO E PROGRAMAÇÃO I. ORIENTADOR NO CENTRO DE PREPARATÓRIO ACADEMIA CLÍNICA DO SABER

Whatsapp: ***940-553-898***

Correio electrónico: ***alegria.alexandre2014@gmail.com***