

# GEOMETRIA DESCRITIVA

1000 PROBLEMAS RESOLVIDOS



Célio Pinto de Almeida

# GEOMETRIA DESCRITIVA

1000 PROBLEMAS RESOLVIDOS

G. Ermakoff CASA EDITORIAL  
RIO DE JANEIRO | 2022

Geometria Descritiva  
1000 Problemas Resolvidos  
Copyright © 2022 by Célio Pinto de Almeida

*Coordenação editorial:*  
George Ermakoff

*Capa:*  
Miriam Lerner e Michelle Bulhões

*Diagramação:*  
Marcelo Domingues

*Desenhos:*  
Michelle Bulhões

*Digitação:*  
Gilmar Lessa

*Revisão:*  
Luciana Messeder e Patrícia Souza Leal

Imagen da capa:  
Pirâmide hexagonal

Primeira edição  
Tiragem: 1.000 exemplares – Distribuição gratuita

Este livro é especialmente dedicado à Sônia, inspiração de tudo o que tenho feito e responsável por tantos momentos felizes e principal incentivo para o presente trabalho.



# APRESENTAÇÃO

Como complementação para o estudo da Geometria Descritiva apresentado em publicação de 2020, em que a teoria foi detalhadamente desenvolvida, trazemos, agora, ao leitor, farta e ampla coleção de problemas propostos e resolvidos.

Sua estrutura acompanha à daquele trabalho teórico, evoluindo, desde os estudos iniciais que embasam a Descritiva, até alcançar as mais completas combinações de temas conceituais, métricos e de posições, sempre apoiadas em conhecimentos geométricos, logrando, assim, crescente complexidade.

A proposição, com o mesmo encadeamento utilizado na exposição da teoria e, sempre que entendido necessário, inclui citações, teoremas e conclusões constantes de assuntos desenvolvidos nas obras *Geometria Plana*, *Cônicas* e *Geometria Espacial*, deste autor. Nestes casos, são elas referidas, com expressa citação de seus números de ordem nesses trabalhos. E, é claro, em especial, tais indicações são mais volumosas e presentes no que concerne à teoria desenvolvida na obra *Geometria Descritiva*, principal apoio para o presente estudo.

Por isso mesmo, a sequência dos capítulos a que se referem os problemas apresentados acompanha aquela obedecida no livro teórico citado, cabendo, como início de organização estrutural, a introdução, em que vão listados os principais conceitos teóricos e as propriedades geométricas básicas, com suas primeiras aplicações à Geometria de Monge.

Especial atenção é dedicada aos problemas métricos, que estudam a determinação das verdadeiras grandezas e de suas utilizações em questões que envolvem distâncias e ângulos. As distâncias são estudadas entre pontos, retas paralelas, ou reversas, planos paralelos e em combinações entre eles; os ângulos abordados são os existentes entre retas, concorrentes ou reversas, incluindo suas combinações com planos e, em especial, com os planos de projeção.

Concluindo, são estudadas as construções de sólidos, poliedros e corpos redondos, além das determinações de seções planas a eles.



# LISTAGEM DE ASSUNTOS

A listagem abaixo apresenta, em cada capítulo, os principais assuntos, definições e teoremas, ao invés do habitual sumário de títulos, tais as quantidades de conceituações e demonstrações.

<b>Capítulo I – Conceitos e aplicações</b>	
Mediatriz de um segmento de reta .....	11
Plano mediador de um segmento de reta .....	12
Bissetriz de um ângulo .....	13
Bissetor de um diedro .....	15
Bissetores de dois planos secantes .....	16
Bissetores dos ângulos formados por duas retas secantes ...	17
Ângulos de reta com plano .....	19
Ângulos de reta com reta .....	19
Ângulo de plano com plano .....	20
Distâncias .....	21
Razão constante entre duas coordenadas .....	22
Soma, ou diferença, constante de duas coordenadas .....	24
Soma constante das três coordenadas .....	26
Propriedades das somas .....	27
<b>Capítulo II – Ponto, reta e planos bissetores</b>	29
<b>Capítulo III – Plano, pertinências e traços</b>	35
<b>Capítulo IV – Reta de maior declive</b>	49
<b>Capítulo V – Interseções</b>	63
<b>Capítulo VI – Paralelismo</b>	83
<b>Capítulo VII – Ortogonalidade</b>	105
<b>Capítulo VIII – Métodos descritivos – Mudanças dos planos de projeção</b>	129

<b>Capítulo IX – Métodos descritivos – Rotações</b>	.....	155
<b>Capítulo X – Métodos descritivos – Rebatimentos</b>	.....	191
<b>Capítulo XI – Problemas métricos – Distâncias</b>	.....	237
<b>Capítulo XII – Problemas métricos – Ângulos</b>	.....	267
<b>Capítulo XIII – Construção de poliedros</b>	.....	301
<b>Capítulo XIV – Seções planas em poliedros</b>	.....	325
<b>Capítulo XV – Corpos redondos</b>	.....	341

# CAPÍTULO I

## CONCEITOS E APLICAÇÕES

Neste capítulo inicial são reunidos alguns conceitos geométricos fundamentais e suas principais aplicações.

### 1 – Mediatriz de um segmento de reta

Por definição, mediatriz de um segmento de reta é a perpendicular ao segmento, contendo seu ponto médio.

As principais propriedades a destacar são:

1.1 – A mediatriz  $m$  de um segmento  $AB$  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  equidistantes dos extremos  $A$  e  $B$  do segmento (Figura 1).

1.2 – Assim, tal mediatriz  $m$ , salvo o ponto  $M$ , médio de  $AB$ , é o lugar geométrico dos vértices  $P$  de todos os triângulos isósceles  $PAB$ , de bases  $AB$  (Figura 2). E, por isso, a mediatriz é o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam pelos extremos do segmento.

1.3 – A construção da mediatriz  $m$  de um segmento dado  $AB$  se faz pela utilização de duas circunferências iguais, com centros em  $A$  e  $B$  e raio arbitrado. Os pontos  $P$  e  $Q$ , de corte, por equidistarem de  $A$  e de  $B$ , definem a mediatriz  $m$  (Figura 3).

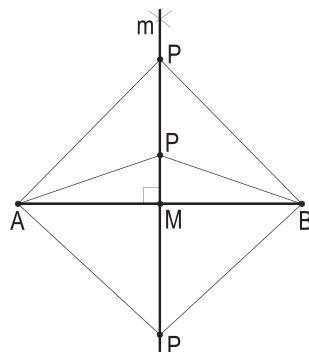


Figura 1

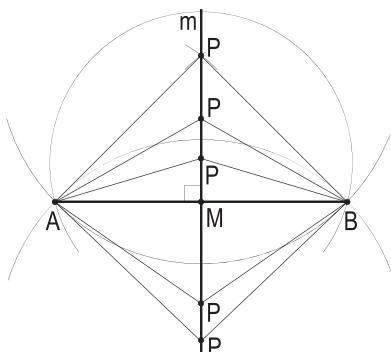


Figura 2

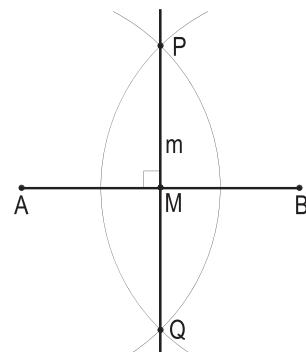


Figura 3

## 2 – Plano mediador de um segmento de reta

Por definição, plano mediador de um segmento de reta é o plano perpendicular ao segmento, contendo seu ponto médio.

As principais propriedades do plano mediador são:

2.1 – O plano mediador ( $\alpha$ ) de um segmento (A)(B) é o lugar geométrico das medianas (m) de (A)(B) (Figura 4) e, por isso, é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento. Assim, o mediador ( $\alpha$ ) de um segmento (A)(B) é o lugar geométrico dos vértices dos triângulos isósceles, de bases (A)(B), excetuado o ponto (M), médio de (A)(B), por não produzir triângulo com (A) e com (B) (Figura 5).

2.2 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes dos vértices de um triângulo é a reta (p) perpendicular ao seu plano e pertencente ao seu circuncentro (O) (Figura 6), por ser (p) a interseção comum aos mediadores dos três lados do triângulo. Isso é o mesmo que afirmar que tal reta (p) é o lugar geométrico dos centros de todas as superfícies esféricas que passam pelos vértices (A), (B) e (C) do triângulo.

2.3 – Dados quatro pontos (A), (B), (C) e (D), não coplanares, existe um, e apenas um, ponto (O) deles equidistante (Figura 7). É o centro da superfície esférica – única, repita-se – que passa por aqueles quatro pontos. Tal ponto (O) é obtido pela interseção da reta (p), pertencente ao circuncentro do triângulo (A)(B)(C) e perpendicular ao seu plano com o plano mediador ( $\alpha$ ) do segmento formado pelo quarto ponto (D) e por um qualquer dos vértices daquele triângulo (Figura 7).

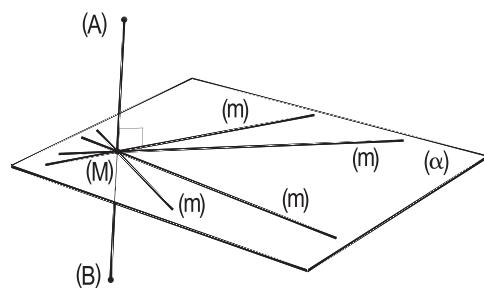


Figura 4

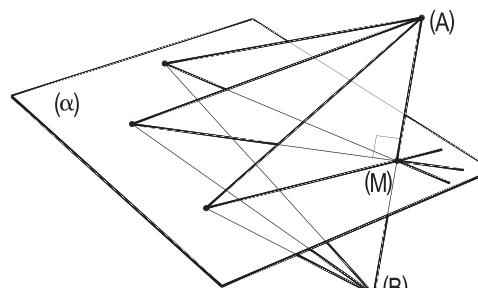


Figura 5

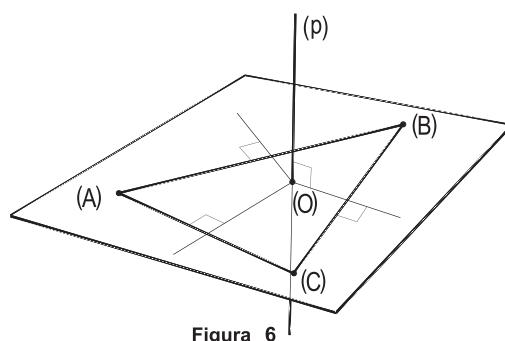


Figura 6

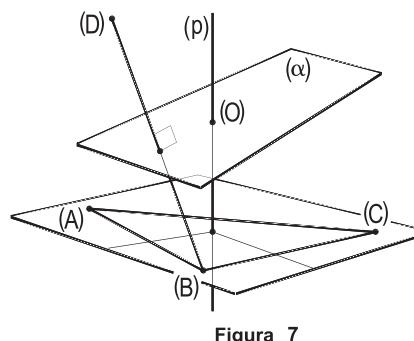


Figura 7

### 3 – Bissetriz de um ângulo

Por definição, bissetriz de um ângulo é a semirreta interior ao ângulo, tendo por origem seu vértice e que o divide em dois ângulos iguais.

Dadas duas retas concorrentes, sabe-se (*Geometria Plana*, números 17 e 12.3) que as bissetrizes dos ângulos formados por elas são, aos pares, colineares, as relativas aos ângulos opostos pelo vértice assim criados e, aos pares, as consecutivas, perpendiculares entre si (Figura 8).

Seguem as propriedades a destacar:

3.1 – A bissetriz de um ângulo é lugar geométrico dos pontos interiores ao ângulo e equidistantes de seus lados (Figura 9).

Isto é o mesmo que dizer que a bissetriz de um ângulo, excetuado seu vértice, é o lugar geométrico dos centros dos círculos tangentes aos dois lados do ângulo (Figura 9).

3.2 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas secantes é constituído pelo par de retas suportes das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas (Figura 10). Assim, as bissetrizes dos ângulos formados por duas retas secantes constituem o lugar geométrico dos centros dos círculos a elas tangentes (Figura 10), excetuado o ponto a elas comum.

3.3 – Para que uma reta  $t$  forme ângulos iguais com duas retas secantes  $r$  e  $s$  basta que ela seja paralela a uma das bissetrizes  $b_1$  ou  $b_2$ , dos ângulos formados pelas secantes, tais os pares de ângulos alternos internos que, então, se criam. São assim as retas  $t_1$  e  $t_2$  da Figura 10, igualmente inclinadas em relação às secantes  $r$  e  $s$ .

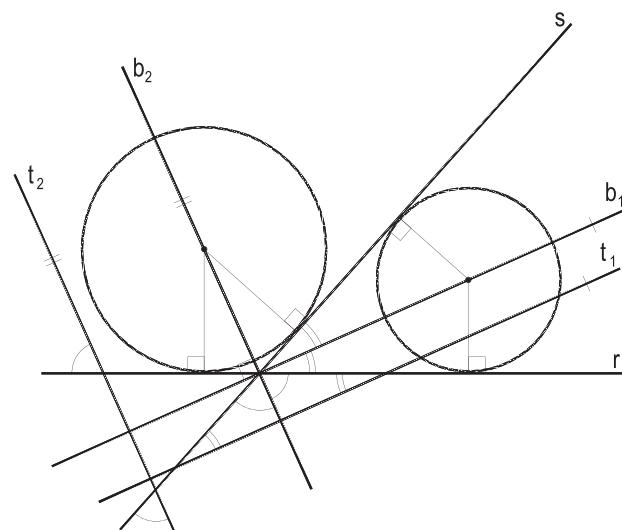
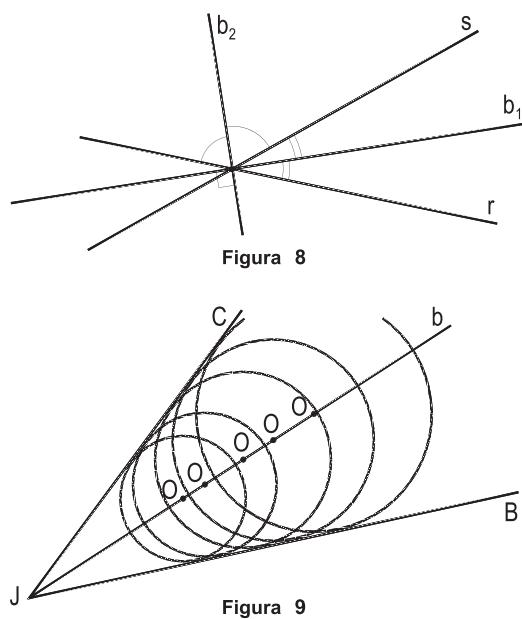


Figura 10

3.4 – Como, nos triângulos isósceles, a bissetriz do ângulo oposto à base é também a mediana dessa base (*Geometria Plana*, número 48.1), resulta um procedimento bastante simples para a construção, em épura, das bissetrizes dos ângulos objetivos formados pelos dois traços de um plano qualquer, mesmo sem que se saiba os valores desses ângulos.

Consiste em aplicar sobre cada um dos dois traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  de um plano qualquer ( $\alpha$ ), a partir de seu ponto comum ( $J$ ), dois segmentos arbitrados, mas iguais, ( $J$ )  $V'$  e ( $J$ )  $H$ , formando, assim, o triângulo isósceles ( $J(V(H))$  e, obtendo o ponto ( $M$ ), médio, de sua base ( $V(H)$ ), construir a mediana ( $J(M)$ , que, então, será a bissetriz do ângulo objetivo formado pelos traços de ( $\alpha$ ) no diedro considerado (Figuras 11, 12 e 13).

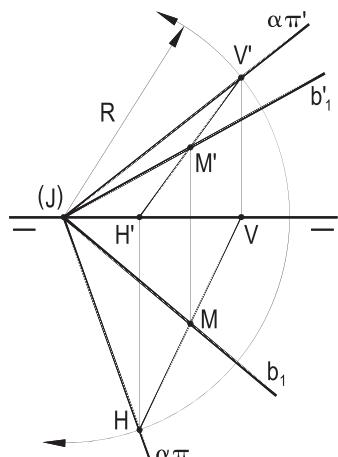


Figura 11

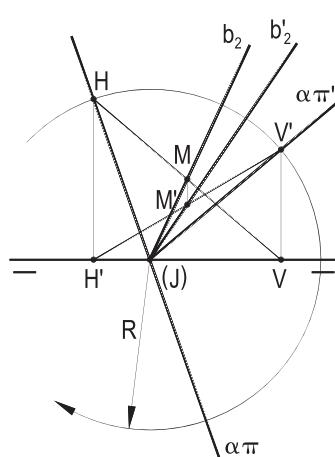


Figura 12

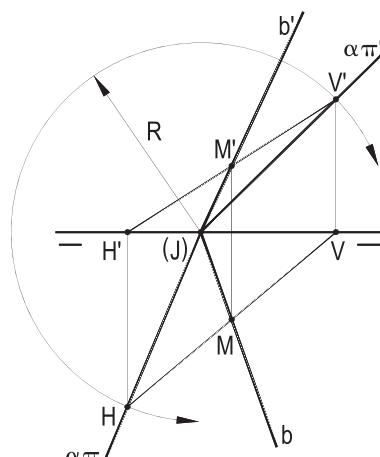


Figura 13

Observe-se que o procedimento se aplica, não apenas aos ângulos formados pelos traços de um plano qualquer, mas também a todo ângulo em que se possa, facilmente, aplicar, sobre seus dois lados, dois segmentos iguais, para aproveitar o triângulo isósceles criado e, então, a mediana, que é a bissetriz ( $b$ ) procurada, como o ângulo das retas ( $h$ ) e ( $f$ ) (Figura 14), o das retas ( $v$ ) e ( $h$ ) (Figura 15) e o das retas ( $A(B)$ ) e ( $h$ ) (Figura 16).

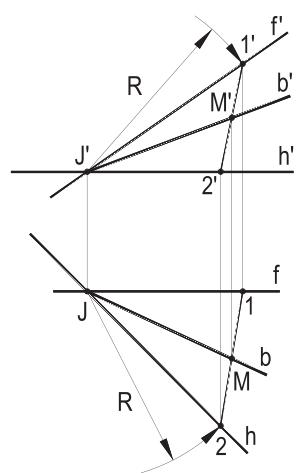


Figura 14

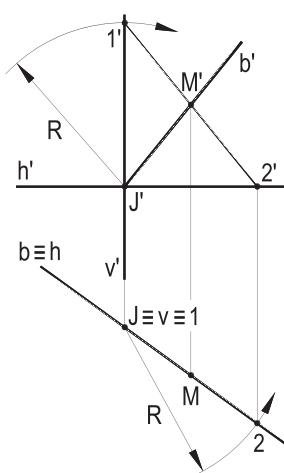


Figura 15

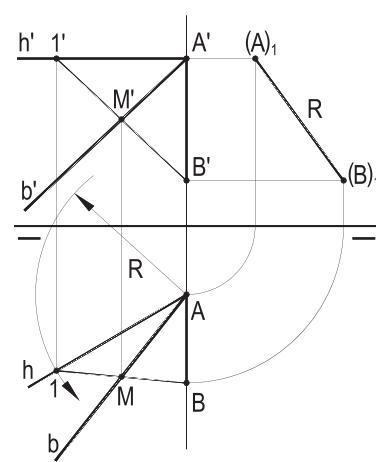


Figura 16

#### 4 – Bissetor de um diedro

Por definição, bissetor de um diedro é o semiplano interior ao diedro, que, tendo por origem a aresta do diedro, forma ângulos iguais com suas duas faces (Figura 17).

Decorre, então, que:

4.1 – O bissetor de um diedro fica perfeitamente definido pela aresta do diedro e pela bissetriz de um de seus ângulos planos (Figura 18).

4.2 – O bissetor de um diedro é o lugar geométrico das bissetrizes de seus ângulos planos, sendo, então, o lugar geométrico dos pontos interiores ao diedro e equidistantes de suas faces (Figura 19) (*Geometria Espacial*, número 55.3).

4.3 – Assim, o bissetor de um diedro, excetuada sua origem, é o lugar geométrico dos centros das esferas interiores ao diedro e tangentes às suas faces.

4.4 – Toda reta pertencente ou paralela ao bissetor de um diedro forma ângulos iguais com as duas faces do diedro (Figura 20).

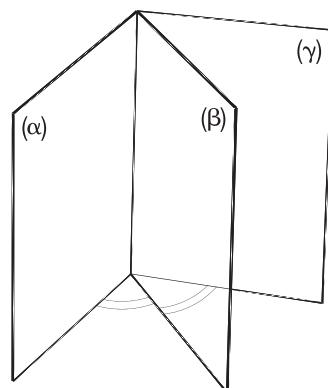


Figura 17

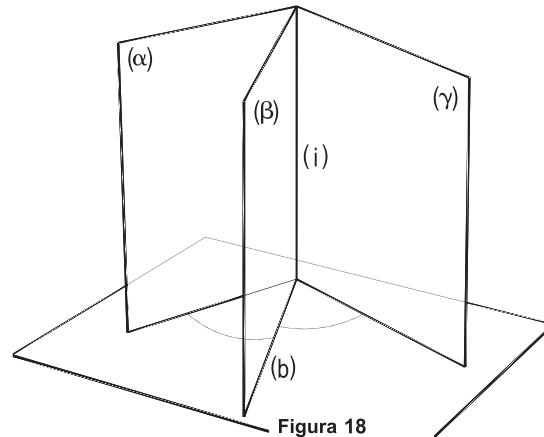


Figura 18

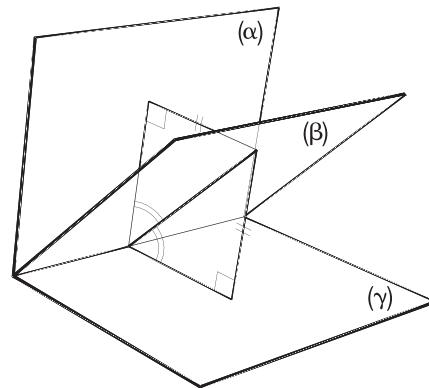


Figura 19

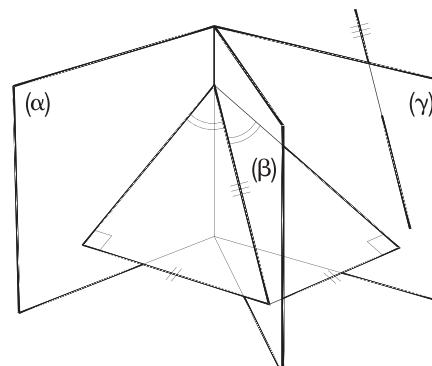


Figura 20

## 5 – Bissetores de dois planos secantes

Por definição, planos bissetores dos ângulos formados por dois planos secantes, ou, simplesmente, bissetores desses dois planos, são os dois planos formados com os bissetores dos quatro diedros definidos pelos planos (Figura 21).

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 54) que os dois bissetores  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  de dois planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  são perpendiculares entre si, ficando perfeitamente definidos pela interseção  $(i)$  dos dois planos e pelas bissetrizes dos ângulos planos de seus diedros, tomados dois a dois (Figura 22).

Propriedades:

5.1 – O par de bissetores  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  de dois planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  constitui o lugar geométrico das bissetrizes dos ângulos planos dos diedros por eles formados (Figura 23).

5.2 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes é constituído por seus dois bissetores (Figura 24).

5.3 – O lugar geométrico dos centros das esferas tangentes a dois planos secantes é o par de planos bissetores dos ângulos formados pelos planos secantes, exceto, naturalmente, sua interseção, por não ensejar tais esferas.

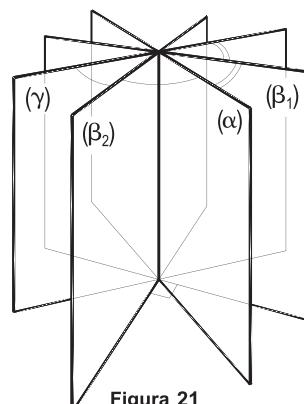


Figura 21

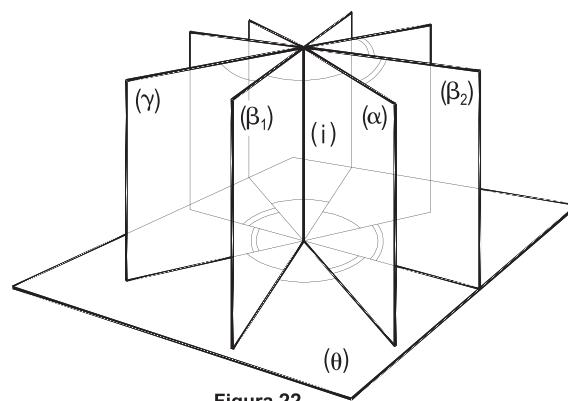


Figura 22

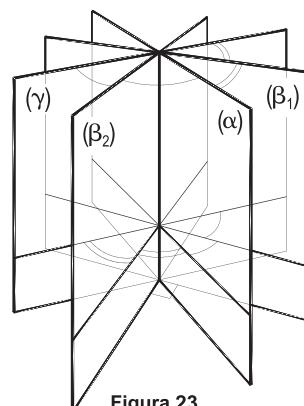


Figura 23

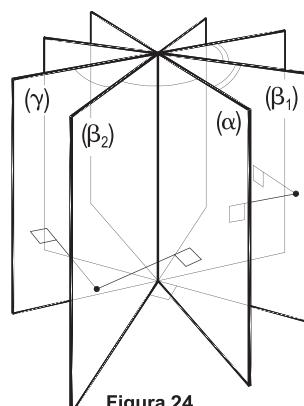


Figura 24

5.4 – É condição para que uma reta ( $r$ ) forme ângulos iguais com dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), que ( $r$ ) pertença ou seja paralela a pelo menos um dos bissetores (Figura 25) dos ângulos formados por esses planos (*Geometria Espacial*, número 58).

Naturalmente, se ela for paralela aos dois planos bissetores dos planos secantes, ela será paralela à interseção desses planos.

5.5 – É condição para que um plano ( $\theta$ ) forme ângulos iguais com dois planos secantes ( $\gamma$ ) e ( $\alpha$ ) que ele seja perpendicular a pelo menos um dos bissetores dos ângulos formados por ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) (*Geometria Espacial*, número 60) (Figura 26).

É claro que, se ( $\theta$ ) for perpendicular aos dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), ele será perpendicular à sua interseção, conservando a propriedade da igualdade de inclinação a ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ).

## 6 – Bissetores dos ângulos formados por duas retas secantes

Por definição, planos bissetores de duas retas concorrentes são os dois planos pertencentes a cada uma das duas bissetrizes dos ângulos formados pelas duas concorrentes e que são perpendiculares ao plano das duas retas.

Assim são os planos ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ), bissetores das duas retas concorrentes ( $r$ ) e ( $s$ ) da Figura 27.

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 62.1) que esses dois planos ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) ficam definidos por cada uma das bissetrizes ( $b_1$ ) e ( $b_2$ ) dos ângulos formados pelas duas concorrentes e pela reta ( $p$ ), perpendicular ao plano das duas retas secantes ( $r$ ) e ( $s$ ), traçada pelo ponto comum a elas (Figura 27).

E também (*Geometria Espacial*, número 62.2), que os planos bissetores dos ângulos formados por duas retas secantes são perpendiculares entre si.

Resulta que os planos ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ), bissetores das retas concorrentes ( $r$ ) e ( $s$ ), acabam sendo os planos bissetores dos diedros formados pela reta ( $p$ ) respectivamente com ( $r$ ) e com ( $s$ ).

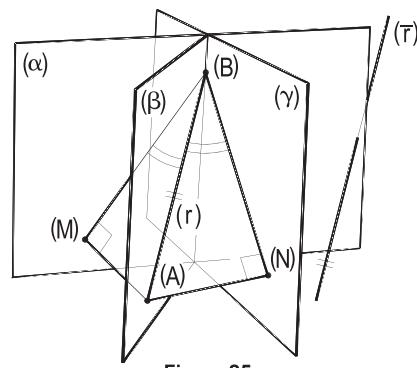


Figura 25

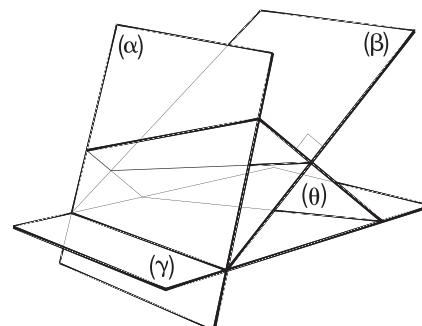


Figura 26

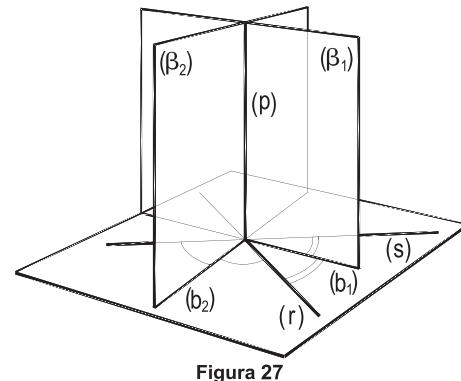


Figura 27

Propriedades:

6.1 – Os planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) de duas retas concorrentes (r) e (s) constituem o lugar geométrico dos pontos (P) delas equidistantes (Figura 28).

6.2 – Todas as retas pertencentes ou paralelas a um dos bissetores de duas retas secantes (r) e (s) formam ângulos iguais com estas (Figura 29).

6.3 – Toda reta que forme ângulos iguais com duas retas reversas (r) e (s) pertence, ou é paralela, a um dos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados por duas concorrentes ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), traçadas por um ponto (A), qualquer, paralelamente a (r) e a (s), respectivamente (Figura 30).

6.4 – Todo plano ( $\alpha$ ) paralelo ou pertencente à bissetriz de um dos ângulos formados por duas retas concorrentes (r) e (s) inclina-se igualmente em relação a (r) e a (s) (*Geometria Espacial*, número 67). Assim é o plano ( $\alpha$ ), paralelo à bissetriz ( $b_1$ ) de um dos ângulos formados por (r) e (s) na Figura 31.

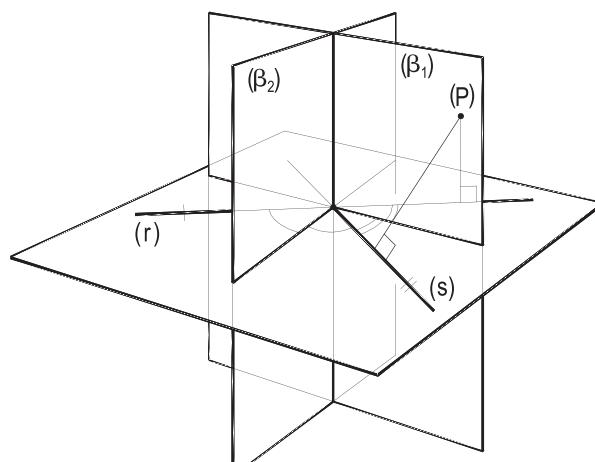


Figura 28

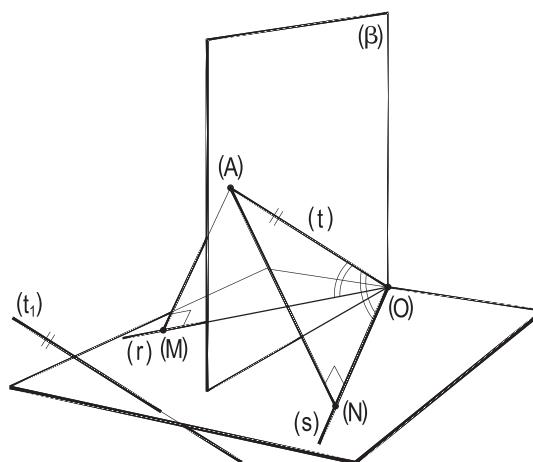


Figura 29

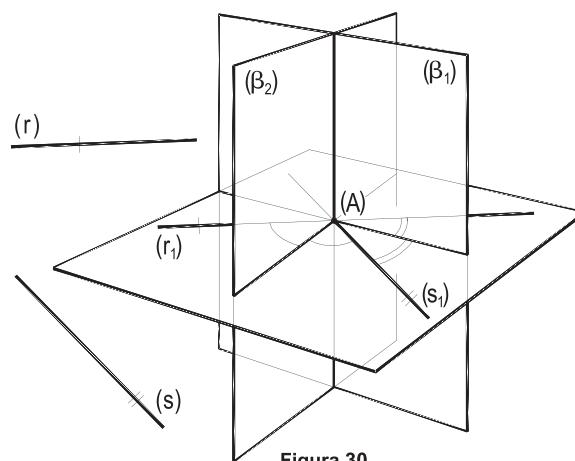


Figura 30

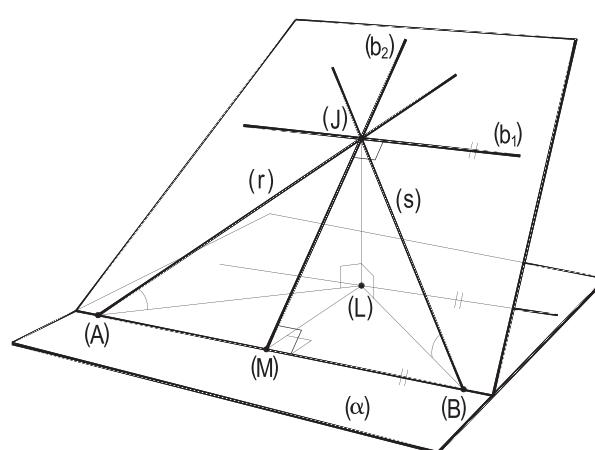


Figura 31

## 7 – Ângulos de reta com plano e com reta

Por definição, ângulo de uma reta com um plano é o ângulo que ela forma com sua projeção ortogonal sobre o plano. Assim são os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que a reta  $(r)$  forma com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ , respectivamente (Figura 32).

7.1 – Observe-se que, considerando um segmento  $(A)(B)$  de  $(r)$ , suas projeções  $AB$  e  $A'B'$  são medidas, cada uma, pela multiplicação do valor  $d$  do próprio segmento  $(A)(B)$  pelo cosseno do ângulo formado com o plano de projeção em questão (Figura 33).

Em épura, os ângulos que uma reta qualquer  $(r)$  forma com cada plano de projeção são obtidos, em verdadeira grandeza, pelas simples construções de triângulos retângulos, a partir das projeções de um segmento  $(A)(B)$ , qualquer, da reta  $(r)$  (Figura 33), utilizadas as diferenças  $\Delta z$  das cotas e  $\Delta y$  dos afastamentos de  $(A)$  e de  $(B)$ . As construções desses triângulos retângulos (Figura 33) entregam, além dos ângulos, a verdadeira grandeza  $d$  do comprimento do segmento  $(A)(B)$ .

7.2 – O lugar geométrico das retas que pertencem a um ponto fixo  $(J)$  e que formam ângulo constante  $\alpha$ , não reto, com um plano  $(\theta)$  é a superfície cônica de revolução de vértice  $(J)$  e eixo  $(s)$ , pertencente a  $(J)$  e perpendicular a  $(\theta)$ , tal que seu semiângulo no vértice valha o complemento de  $\alpha$  (*Geometria Espacial*, número 183.3) (Figura 34).

Isso é o mesmo que afirmar que o lugar geométrico das retas que, passando por um ponto fixo  $(J)$ , formam ângulo constante  $\varphi$ , não reto, com uma reta qualquer  $(r)$  é a superfície cônica de revolução de vértice  $(J)$ , eixo  $(s)$ , paralelo a  $(r)$ , contendo com semiângulo no vértice igual a  $\varphi$  (Figura 34).

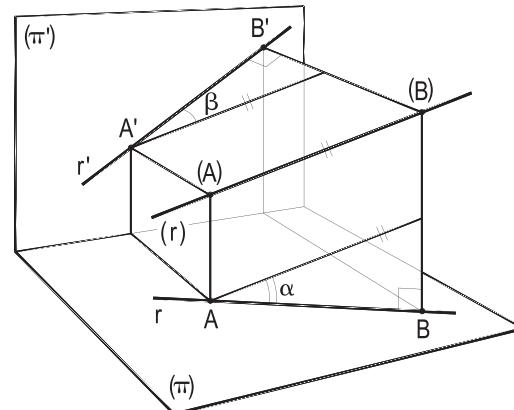


Figura 32

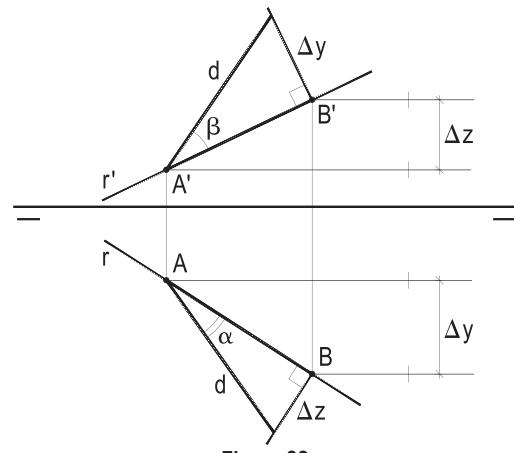


Figura 33

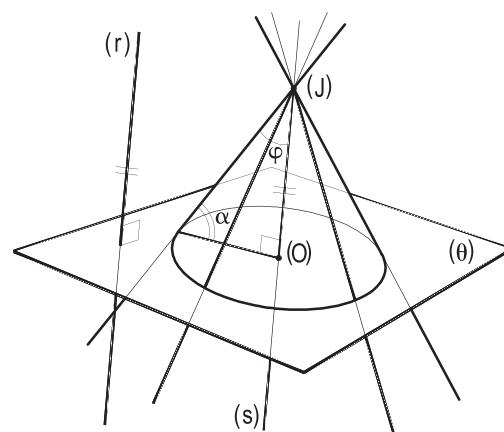


Figura 34

7.3 – O lugar geométrico das retas ( $t$ ) que pertencem a um ponto fixo ( $J$ ) e que formam ângulos iguais com duas retas fixas ( $r$ ) e ( $s$ ), concorrentes ou reversas, é o conjunto dos dois planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados por duas retas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), respectivamente, paralelas a ( $r$ ) e a ( $s$ ) e pertencentes a ( $J$ ) (Figura 35).

7.4 – O lugar geométrico das retas ( $t$ ) que pertencem a um ponto fixo ( $J$ ) e que formam ângulos iguais com dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) é o conjunto dos dois planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados por dois planos ( $\alpha_1$ ) e ( $\gamma_1$ ), pertencentes a ( $J$ ) e respectivamente paralelos a ( $\alpha$ ) e a ( $\gamma$ ) (Figura 36).

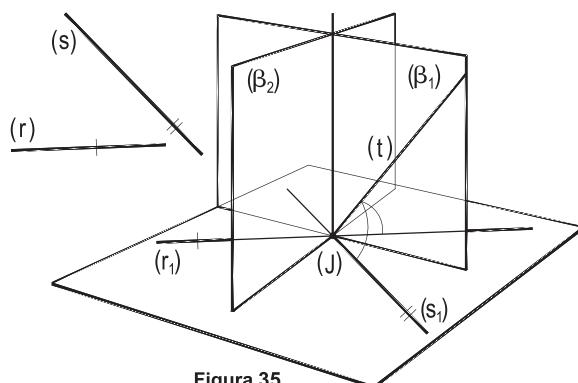


Figura 35

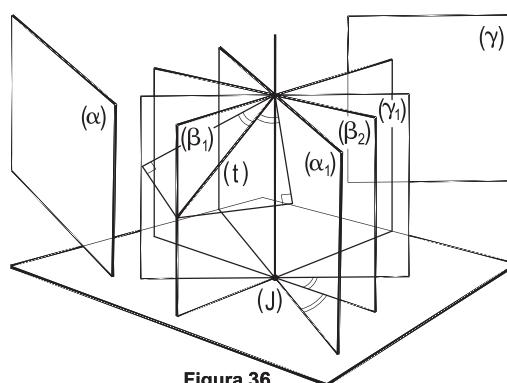


Figura 36

## 8 – Ângulo de plano com plano

Por definição, ângulo de um plano ( $\alpha$ ) com outro plano ( $\gamma$ ) a ele secante é o ângulo plano de um dos diedros agudos que eles formam (Figura 37).

8.1 – Isto é o mesmo que dizer (*Geometria Espacial*, número 51) que o ângulo de dois planos secantes é o ângulo formado por duas retas de maior declive de um em relação ao outro e de sua recíproca, em relação ao primeiro (Figura 37).

8.2 – Todos os planos pertencentes a um ponto fixo ( $J$ ) e que formam um ângulo agudo constante  $\alpha$  com um plano fixo ( $\theta$ ) são tangentes à superfície cônica de revolução de vértice ( $J$ ), eixo perpendicular a ( $\theta$ ), com semiângulo no vértice igual ao complemento de  $\alpha$  (Figura 38).

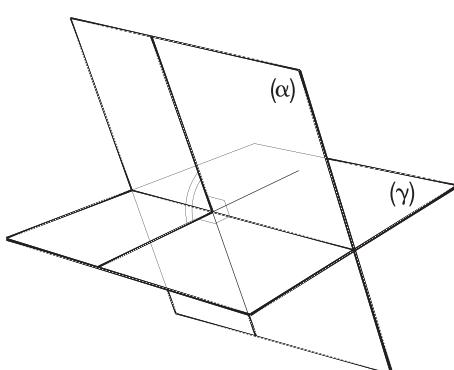


Figura 37

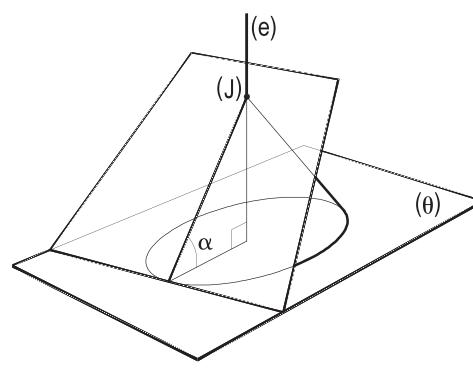


Figura 38

## 9 – Distâncias

Nos itens iniciais, foram abordadas as propriedades de equidistâncias a dois pontos (números 1 e 2), a duas retas secantes (números 3 e 6) e a dois planos secantes (números 4 e 5).

Complementando essas propriedades e tratando, agora, de planos paralelos e de distâncias a um ponto fixo, ou a uma reta fixa, cabe anotar as seguintes propriedades:

9.1 – O lugar geométrico dos pontos distantes um valor constante  $d$  de um plano  $(\alpha)$  é constituído por um par de planos  $(\alpha_1)$  e  $(\alpha_2)$ , paralelos a  $(\alpha)$  e dele distantes esse valor  $d$  (Figura 39).

9.2 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos paralelos  $(\alpha_1)$  e  $(\alpha_2)$  é o plano  $(\alpha)$  paralelo a eles e deles equidistante (Figura 39).

9.3 – O lugar geométrico dos pontos, cujas razões entre as distâncias a dois planos paralelos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  é constante, é um plano  $(\beta)$  a eles paralelo e deles afastado segundo distâncias  $d_1$  e  $d_2$  obedecendo a essa razão (Figura 40).

Tal plano pode se situar entre os dois planos dados, ou no exterior do intervalo que eles formam, conforme tais razões sejam, respectivamente, negativas ou positivas, desde que tomadas por seus valores algébricos.

E, então, mais próximo de  $(\alpha)$ , ou de  $(\gamma)$ , conforme o módulo dessa razão  $d_1 / d_2$  seja menor, ou maior, que um, respectivamente.

É claro que se a razão  $d_1 / d_2$  for igual a  $-1$ , tal plano  $(\beta)$  será o equidistante de  $(\alpha)$  e de  $(\gamma)$ .

9.4 – O lugar geométrico dos pontos distantes um valor constante  $k$  de um ponto fixo  $(O)$  é a superfície esférica de centro  $(O)$  e raio  $k$  (*Geometria Espacial*, número 183.4).

9.5 – O lugar geométrico dos pontos distantes um valor constante  $k$  de uma reta fixa  $(r)$  é a superfície cilíndrica de revolução de eixo  $(r)$  e raio  $k$  (Figura 41).

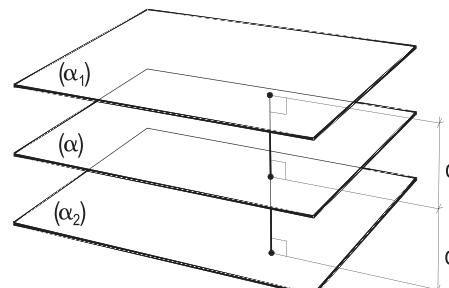


Figura 39

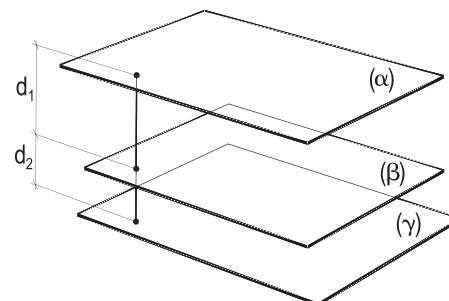


Figura 40

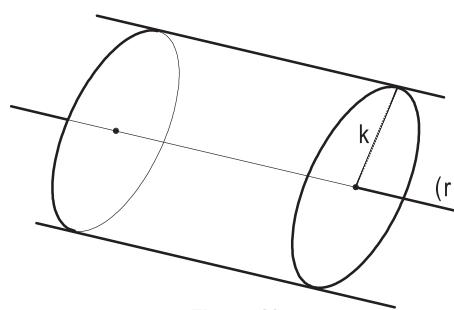


Figura 41

## 10 – Razão constante entre duas coordenadas

### 10.1 – Cota e afastamento

O lugar geométrico dos pontos que mantêm constante a razão entre suas cotas e seus afastamentos é um plano  $(\pi'\pi)-(M)$  (Figura 42).

De fato, observando um corte de perfil, ou uma épura, construídos para pontos  $(M)$ ,  $(N)$ ,  $(P)$ , etc. desse plano, as inúmeras semelhanças de triângulos como  $(J)(M)_1\bar{M}$ ,  $(J)(N)_1\bar{N}$ ,  $(J)(P)_1\bar{P}$ , etc. da Figura 43, ou como  $(J)M'M$  e  $(J)N'N$ ,  $(L)P'P$  e  $(L)N'N$ , etc. da Figura 44, asseguram a constância da razão entre as cotas e os afastamentos de todos esses pontos  $(M)$ ,  $(N)$ ,  $(P)$ , etc.

Cabe notar que tal constante tem valor positivo para os planos  $(\pi'\pi)-(M)$  que atravessam os diedros ímpares (Figuras 42, 43 e 44), tais os sinais iguais das cotas e dos afastamentos de todos os seus pontos e que o valor da constante passa a ser negativo, naturalmente, para planos  $(\pi'\pi)-(M)$  que passam pelos diedros pares (Figuras 45, 46 e 47), onde tais sinais são contrários.

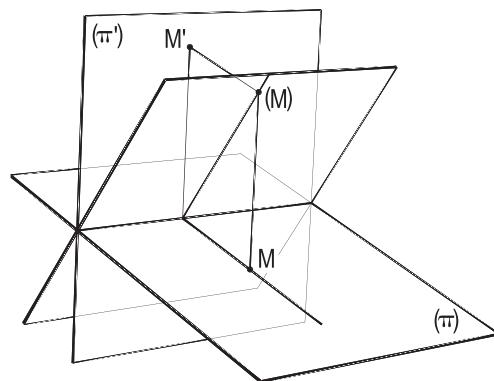


Figura 42

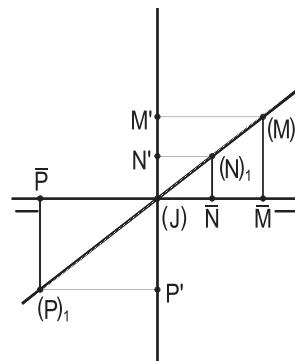


Figura 43

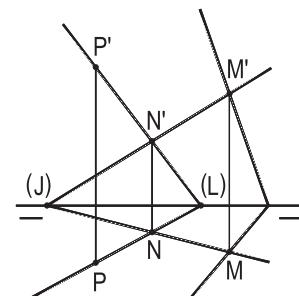


Figura 44

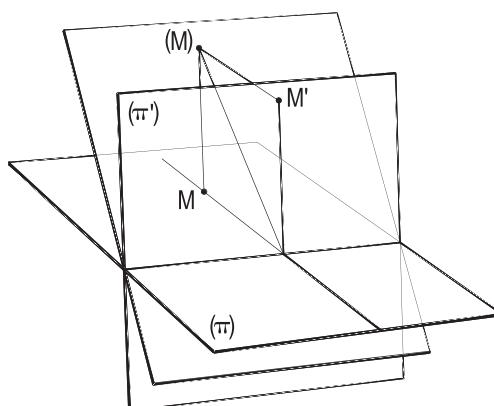


Figura 45

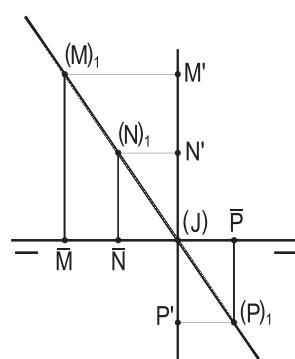


Figura 46

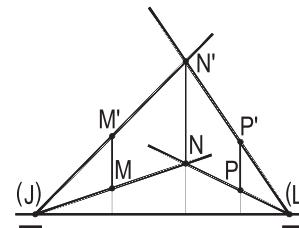


Figura 47

## 10.2 – Abscissa e cota

O lugar geométrico dos pontos que conservam constante a razão entre suas abscissas e suas cotas é um plano de topo que passa pela origem das abscissas, tais as semelhanças dos triângulos retângulos como  $OM\bar{M}$ ,  $ON\bar{N}$ ,  $OP\bar{P}$ , etc., para todos os seus pontos (Figuras 49 e 51).

Tal plano tem traço vertical, no primeiro diedro, voltado para a direita, quando a constante é positiva (Figuras 48 e 49), e para a esquerda (Figuras 50 e 51), quando negativa.

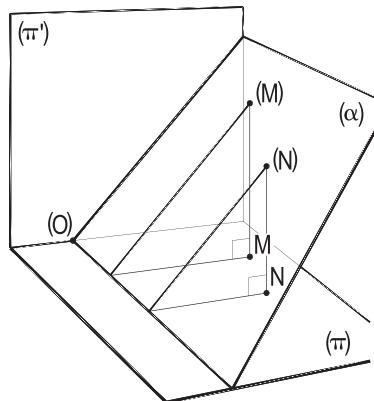


Figura 48

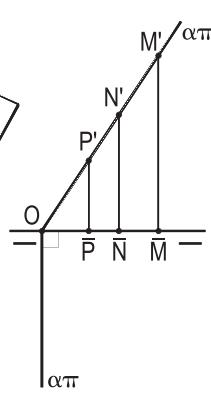


Figura 49

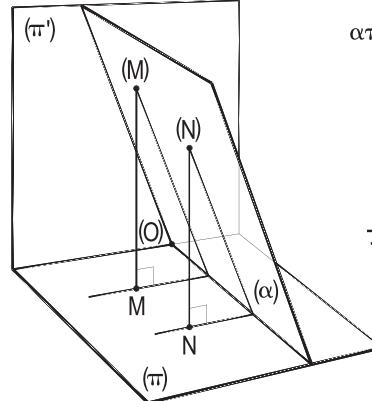


Figura 50

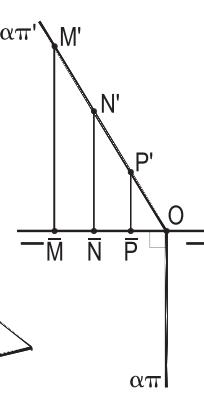


Figura 51

## 10.3 – Abscissa e afastamento

O lugar geométrico dos pontos para os quais é constante a razão entre a abscissa e o afastamento é um plano vertical que contém a origem das abscissas, conforme comprovam os triângulos retângulos como  $OM\bar{M}$ ,  $ON\bar{N}$ ,  $OP\bar{P}$ , etc. (Figuras 53 e 55) para todos os seus pontos.

Tal plano vertical tem seu traço horizontal, no primeiro diedro, voltado para a direita (Figuras 52 e 53), quando a razão constante é positiva, e para a esquerda, quando negativa (Figuras 54 e 55).

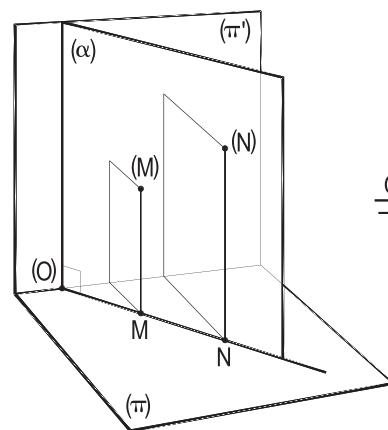


Figura 52

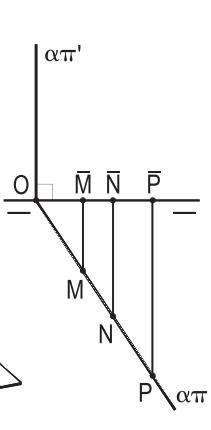


Figura 53

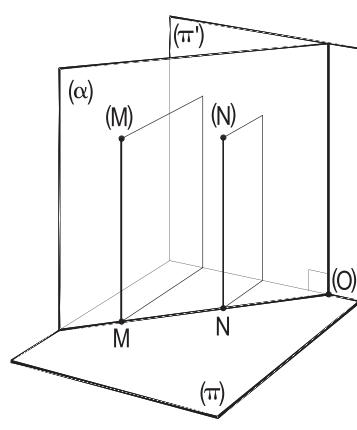


Figura 54

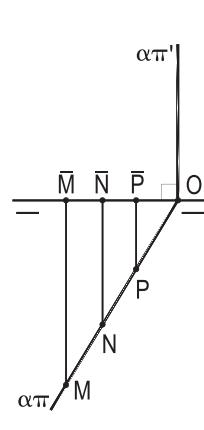


Figura 55

## 11 – Soma, ou diferença, constante de duas coordenadas

### 11.1 – Soma constante entre cota e afastamento

O lugar geométrico dos pontos, para os quais é constante a soma entre cota e afastamento, é um plano paralelo à linha de terra e paralelo a  $(\beta_{24})$ , tal que a cota de seu traço vertical iguale o afastamento de seu traço horizontal, valores que medem aquela constante.

De fato, basta ver (Figura 56) que para todo ponto (M) do plano  $(\alpha)$ , paralelo a  $(\beta_{24})$ , as linhas de chamada de seus pontos entregam:

$$z + y = a + b = k, \text{ valor constante e igual à cota de } \alpha\pi' \text{ e ao afastamento de } \alpha\pi.$$

Observe-se mais que a propriedade permanece válida para pontos de  $(\alpha)$  exteriores ao primeiro diedro, já que tais pontos (P) do segundo diedro têm cotas positivas, maiores que os módulos de seus afastamentos e que seus pontos (Q), do quarto diedro, ao contrário, têm afastamentos positivos maiores que os módulos de suas cotas negativas (Figura 56).

Naturalmente, se a constante k da soma de cotas e afastamentos dos pontos (P) em análise for negativa, o plano  $(\alpha)$ , lugar geométrico em estudo, deverá atravessar o terceiro diedro (e, é claro, também o segundo e o quarto), o que os próprios sinais da cota de  $\alpha\pi'$  e do afastamento de  $\alpha\pi$  confirmam (Figura 57).

### 11.2 – Diferença constante entre cota e afastamento

Com igual raciocínio ao acima desenvolvido e tais os sinais de cotas e afastamentos agora em estudo, conclui-se que o lugar geométrico dos pontos (P), para os quais é constante a diferença entre cota e afastamento, é um plano  $(\alpha)$ , paralelo à linha de terra e paralelo a  $(\beta_{13})$ , para o qual a cota de  $\alpha\pi'$  e o afastamento de  $\alpha\pi$  indicam o valor da diferença constante (Figura 58).

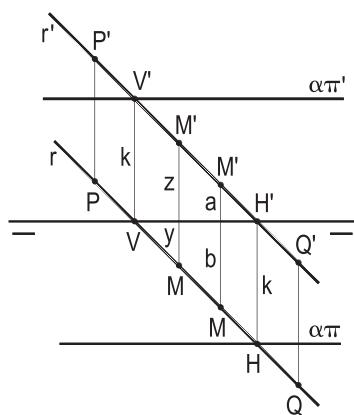


Figura 56

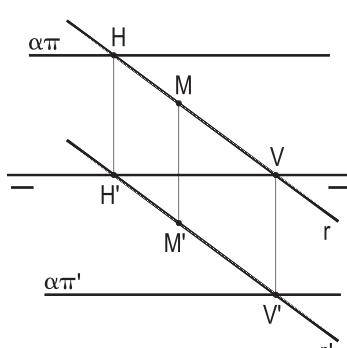


Figura 57

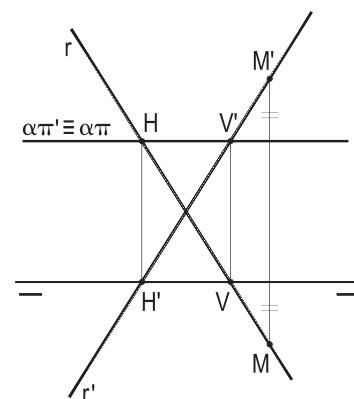


Figura 58

### 11.3 – Soma constante entre abscissa e cota

O lugar geométrico dos pontos (P), para os quais é constante o valor da soma entre suas abscissas e suas cotas, é um plano de topo ( $\alpha$ ), inclinado de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi$ ), cujo traço vertical, no primeiro diedro, se volte para a esquerda (Figuras 59 e 60). A abscissa do traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ) mede o valor da constante, positiva (Figura 59), ou negativa (Figura 60).

### 11.4 – Diferença constante entre abscissa e cota

O lugar geométrico dos pontos (M), para os quais é constante a diferença entre abscissa e cota, é um plano de topo ( $\gamma$ ), inclinado de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi$ ), com traço vertical, no primeiro diedro, voltado para a direita e tal que a abscissa de seu traço com ( $\pi'\pi$ ) indique o valor positivo dessa constante k (Figura 61), ou negativo (Figura 62).

### 11.5 – Soma constante entre abscissa e afastamento

O lugar geométrico dos pontos (P), para os quais é constante a soma entre abscissa e afastamento, é um plano vertical ( $\alpha$ ), inclinado de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi'$ ), com traço horizontal voltado para a esquerda, no primeiro diedro, e cujo traço com ( $\pi'\pi$ ) indique o valor da constante (Figuras 63 e 64).

### 11.6 – Diferença constante entre abscissa e afastamento

O lugar geométrico dos pontos (Q), para os quais é constante a diferença entre abscissa e afastamento, é um plano vertical ( $\gamma$ ), inclinado de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi'$ ), com traço horizontal voltado para a direita, no primeiro diedro, e cujo traço com ( $\pi'\pi$ ) indique o valor da constante (Figuras 65 e 66).

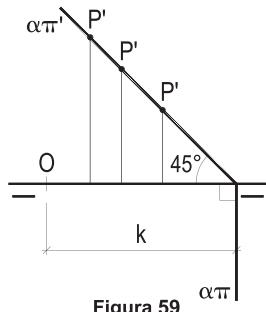


Figura 59

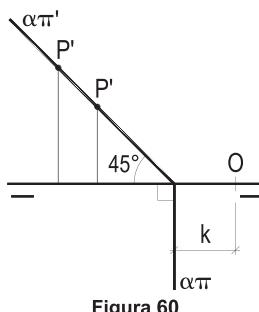


Figura 60

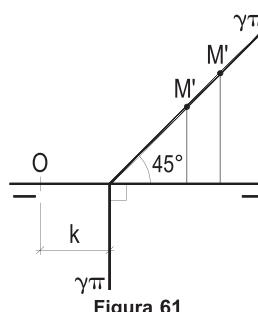


Figura 61

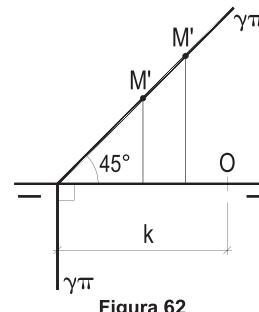


Figura 62

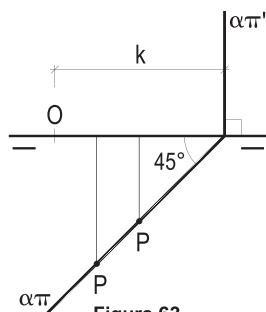


Figura 63

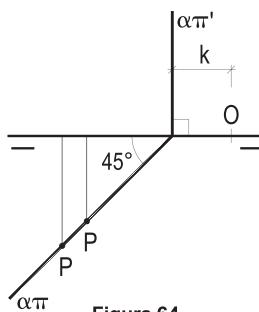


Figura 64

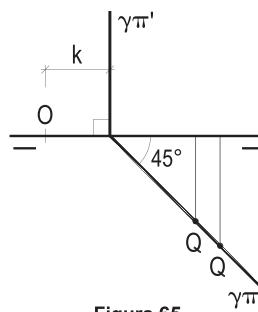


Figura 65

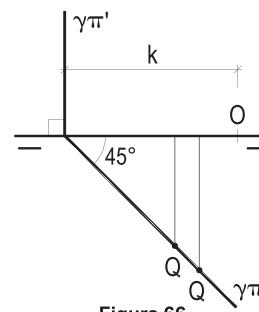


Figura 66

## 12 – Soma constante das três coordenadas

Consideremos, no sistema projetivo, também o plano de perfil de abscissa zero e um plano qualquer ( $\alpha$ ), perpendicular a ( $\beta_{13}$ ), com traços, no primeiro diedro, inclinados de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi'\pi$ ), voltados para a esquerda, e o traço (J) de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ), tendo abscissa k.

Vamos provar que, para todos os pontos de ( $\alpha$ ), é constante e igual a k a soma das três coordenadas.

Para tanto, consideremos dois pontos genéricos (P) e (Q) de ( $\alpha$ ), o primeiro situado no primeiro diedro e o segundo não (Figuras 67 e 68).

Os triângulos retângulos e isósceles O3J, 12P e J2V' (Figura 67) dão:

$$\overline{1P} = \overline{12}, \quad 2V' = 2J \quad \text{e} \quad \overline{03} = \overline{OJ}$$

$$\text{Assim, por soma, } \overline{01} + \overline{12} + \overline{2J} = \overline{01} + \overline{1P} + \overline{2V'} = \overline{OJ}$$

Ou:  $x + y + z = k$ , o que significa que, para um ponto (P), qualquer, de ( $\alpha$ ), no primeiro diedro, a soma das três coordenadas vale a constante k.

Igualmente (Figura 68), os triângulos retângulos e isósceles VQ1 e V'VJ dão:

$$\overline{Q1} = \overline{V1} \quad \therefore y = x - \overline{OV} \quad \text{e} \quad \overline{V'V} = \overline{VJ} \quad \therefore z = k - \overline{OV}$$

$$\text{Então, por diferença: } z - y = k - x \quad \therefore k = x - y + z$$

Como y tem sinal negativo:  $x + y + z = k$ .

E, como (Q) é um ponto genérico de ( $\alpha$ ), fica comprovada a propriedade para pontos de ( $\alpha$ ) exteriores ao primeiro diedro.

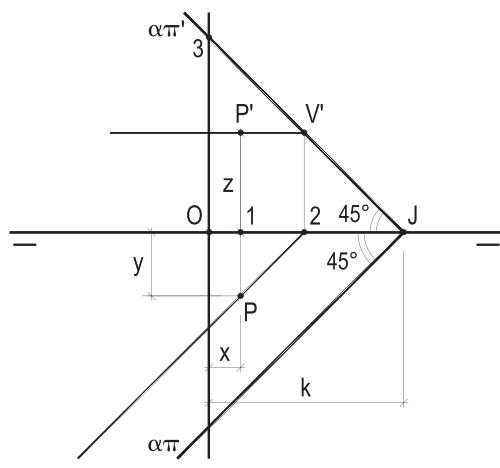


Figura 67

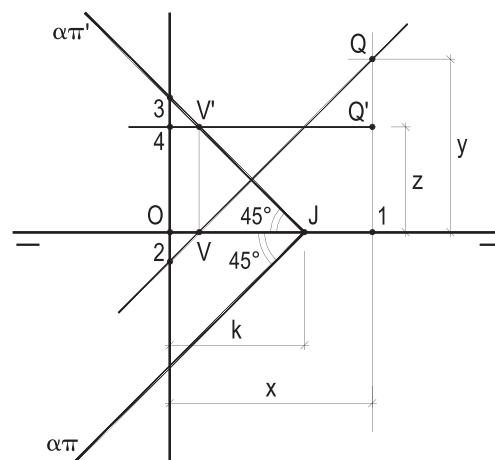


Figura 68

Assim, o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das três coordenadas é constante e igual a  $k$  é o plano ( $\alpha$ ), perpendicular a  $(\beta_{13})$ , com traços inclinados a  $45^\circ$  com  $(\pi'\pi)$  e, em épura, no primeiro diedro, voltados para a esquerda, o traço de  $(\alpha)$  com  $(\pi'\pi)$ , tendo abscissa  $k$  (Figura 69).

É claro que a cota do traço vertical ( $V$ ) de  $(\alpha)$  com  $(\pi'')$  iguala o afastamento do traço horizontal ( $H$ ) de  $(\alpha)$  com  $(\pi'')$ , ambos medindo essa constante  $k$  (Figura 69), até porque, para esses dois pontos, as outras duas coordenadas são nulas.

Naturalmente, a soma constante das três coordenadas sendo positiva, o traço ( $J$ ) de  $(\alpha)$  com  $(\pi'\pi)$  tem abscissa positiva (Figura 69), sendo nula (Figura 70), tal traço ( $J$ ) coincide com a origem das abscissas e resta negativa a abscissa desse traço ( $J$ ), quando a soma das três coordenadas é negativa (Figura 71).

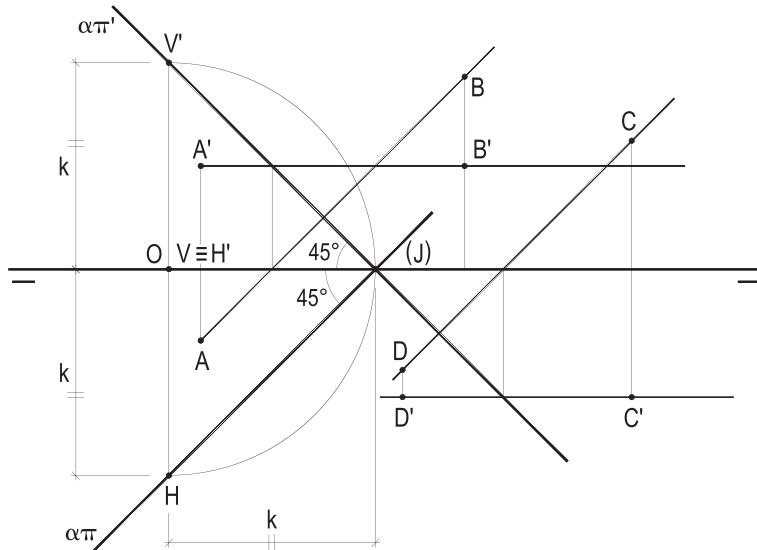


Figura 69

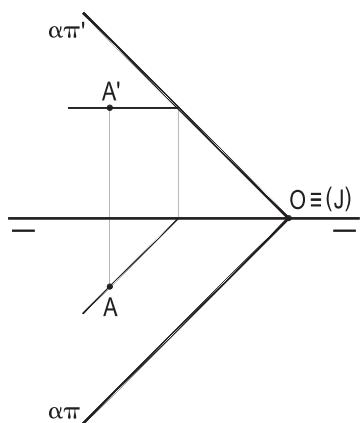


Figura 70

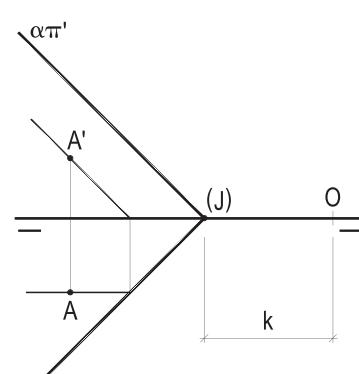


Figura 71

### 13 – Propriedades das somas

Estudemos os lugares geométricos dos pontos, para os quais uma coordenada iguala a soma das outras duas.

Com raciocínio análogo ao desenvolvido no item anterior e trabalhando com triângulos retângulos isósceles, observemos as épuras seguintes (Figuras 72, 73 e 74), de planos perpendiculares a um bissetor, com traços inclinados de  $45^\circ$  em relação a  $(\pi'\pi)$ , e admitamos em todos os casos que a origem das abscissas coincide com o ponto ( $J$ ), traço do plano em estudo com  $(\pi'\pi)$ .

Para um ponto (A), qualquer de ( $\alpha$ ), pode-se anotar:

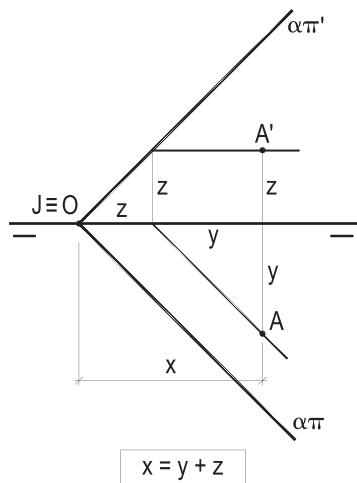


Figura 72

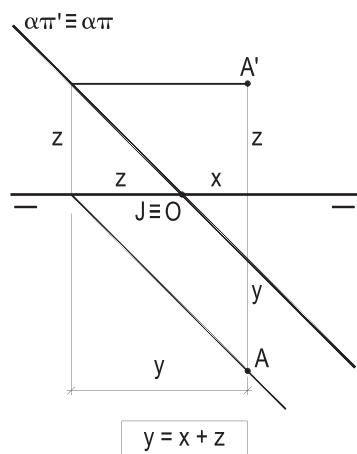


Figura 73

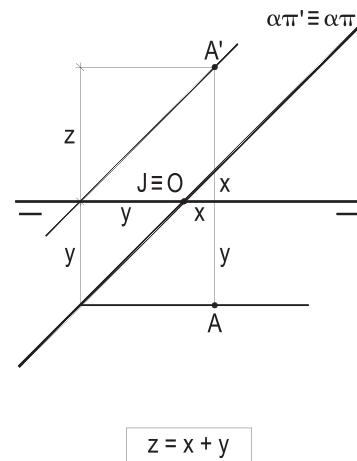


Figura 74

Em todos os casos, uma coordenada iguala a soma das outras duas.

As relações acima instituídas e aquela demonstrada no item 12, precedente (Figuras 67, 68, e 70), podem ser escritas assim:

$$x + y + z = O$$

(Figura 75) (1)

$$x = y + z$$

$$\therefore -x + y + z = O$$

(2)

$$y = x + z$$

$$\therefore x - y + z = O$$

(3)

$$z = x + y$$

$$\therefore x + y - z = O$$

(4)

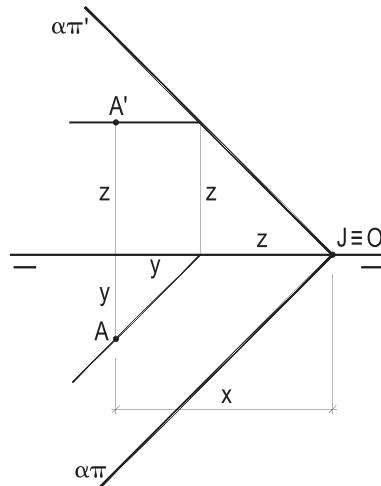


Figura 75

## 14 – Resumo

Considerando tudo acima instituído, para os pontos pertencentes aos planos que tênhem, em épura, traços inclinados de  $45^\circ$ , em relação à linha de terra (perpendiculares a um dos bissetores – *Geometria Descritiva*, número 77), cortando-se na origem das abscissas, pode-se anotar:

$$\pm x \pm y \pm z = O$$

Ou seja, que é nula a soma algébrica de suas três coordenadas, uma delas, apenas, podendo ser negativa.

## CAPÍTULO II

### PONTO, RETA E PLANOS BISSETORES

Neste capítulo vão relacionados problemas relativos ao ponto, às suas coordenadas e às retas e seus traços horizontais, verticais e com os bissetores.

São, ainda, bem simples.

- 15 – Os segmentos de reta (A)(B) e (A)(C), respectivamente horizontal e frontal, formam com ( $\pi'$ ) e com ( $\pi$ ), também respectivamente,  $60^\circ$  e  $30^\circ$ .**

Sabendo que o ponto (A) pertence a ( $\beta_{13}$ ), tendo abscissa nula e cota negativa, pede-se determinar a linha de terra e a diferença entre as abscissas, positivas, informa-se, dos traços vertical (B) de (A)(B) e horizontal (C) de (A)(C), dadas, apenas, as projeções de (A).

Resolução: Construída, com precisão, a mediatrix de A'A, que é o suporte da linha de terra, para completar sua determinação cabe observar sua orientação, obedecendo à imposição do ponto (A) ter cota negativa (Figura 76).

O segmento BC' mede a diferença de abscissas pedida (Figura 76).

- 16 – Construir as projeções do segmento formado pelos traços com ( $\beta_{24}$ ) das retas concorrentes (r) e (s), dadas por suas projeções.**

Resolução: Mesmo com a ausência da linha de terra, são imediatas as obtenções dos traços (P) e (Q) das retas dadas com ( $\beta_{24}$ ) (Geometria Descritiva, número 14), obtendo-se, assim, o segmento pedido (P)(Q) (Figura 77).

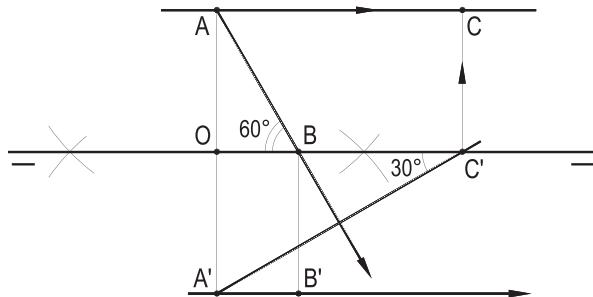


Figura 76

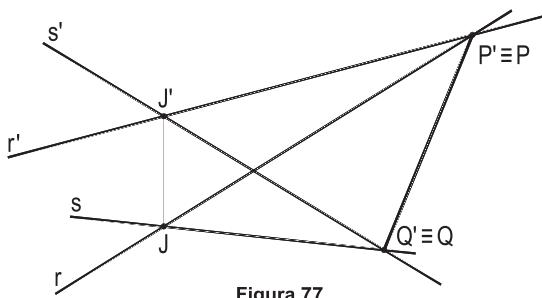


Figura 77

**17 – O triângulo isósceles (A)(B)(C), de base (B)(C), tem os lados (A)(B) e (A)(C), respectivamente vertical e frontal. Sabendo que (A)(C) forma ângulos iguais com os planos horizontais e os de perfil e que o vértice (B) pertence a ( $\beta_{24}$ ), pede-se construir as projeções do triângulo, a partir das projeções, dadas, do vértice (A).**

Resolução: (B) é o traço da vertical (v) com ( $\beta_{24}$ ), de imediata obtenção. Também simples o traçado da frontal (A)(C), com duas soluções, ambas inclinadas de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi$ ) e aos planos de perfil, com o lado (A)(C) igual ao (A)(B), nas projeções verticais, ambas em V.G.

A Figura 78 traz as duas soluções para o triângulo pedido.

**18 – Desenhar as projeções do triângulo formado pelos traços das retas (r), (s) e (t), dadas por suas projeções, com ( $\beta_{13}$ ).**

Resolução: Simples (*Geometria Descritiva*, número 14) as obtenções dos vértices (A), (B) e (C), do triângulo pedido, traços respectivos das retas dadas (r), (s) e (t) com ( $\beta_{13}$ ). Note-se que o traço de (t) com ( $\beta_{13}$ ) se situa na linha de terra (Figura 79).

**19 – A reta frontal (f) concorre com as retas de topo (r) e (s), respectivamente, nos pontos (A) e (B), e com a vertical (v) no ponto (C), que pertence a ( $\beta_{13}$ ).**

Pede-se determinar as projeções desses três pontos, bem como a posição da linha de terra, dadas, apenas, as projeções r, r', s' e v.

Resolução: A projeção vertical f' da frontal (f) fica prontamente definida pelos pontos r' e s' e a horizontal vem conduzida por v, com direção perpendicular à projeção horizontal r.

Imediatas, então, as projeções de (A), (B) e (C), bem como a determinação da linha de terra, mediatriz de C'C, para a qual cabem duas orientações (Figura 80).

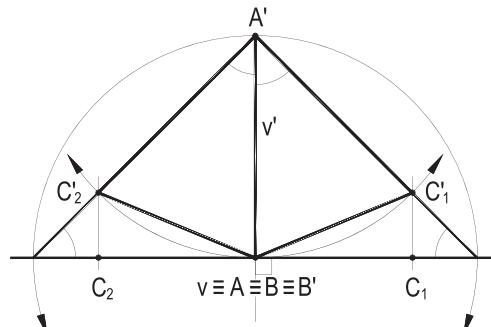


Figura 78

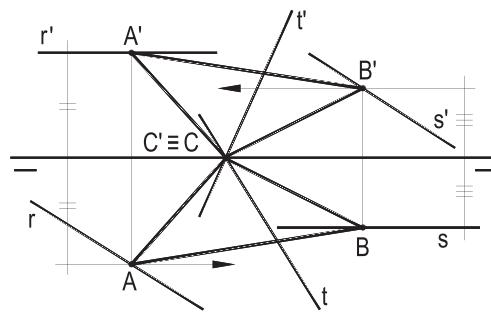


Figura 79

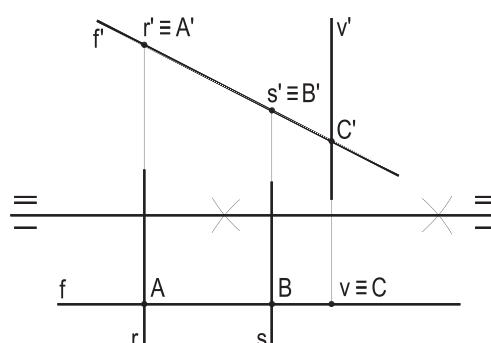


Figura 80

- 20 – As retas paralelas (a), (b) e (c) cortam ( $\pi'$ ) produzindo um triângulo equilátero, não atingido pela linha de terra. Dadas as projeções das retas (a) e (b) e sabendo que o traço da reta (c), com ( $\beta_{24}$ ), tem cota igual à metade da cota do traço vertical da reta (a), pede-se construir as projeções do triângulo equilátero citado e as projeções da reta (c).**

Resolução: Os vértices (A) e (B), traços verticais de (a) e de (b), são imediatos, como também a construção do triângulo equilátero (A)(B)(C), em V.G., em sua projeção vertical (Figura 81).

A partir de C', temos c' e, marcado o traço  $P' \equiv P$ , com cota igual à metade da de (A), vem a projeção horizontal c, da terceira paralela (Figura 81).

- 21 – A reta (a), dada por suas projeções, pertence a ( $\beta_{13}$ ) e concorre com a reta (r), paralela a ( $\beta_{24}$ ). Dada, ainda, a projeção r', pede-se determinar a posição da linha de terra, a projeção horizontal r da reta (r) e as projeções da reta fronto-horizontal (t), situada no terceiro diedro, sabendo que ela encontra as retas (a) e (r) num só ponto.**

Resolução: A bissetriz do ângulo formado por a' e a é a linha de terra procurada (Figura 82), anotando-se que há uma segunda solução, não indicada na Figura 82 (a segunda bissetriz).

Fica, então, simples construir a linha de chamada do ponto J e, com isso, a projeção horizontal r da segunda reta e as duas projeções da fronto-horizontal (t) (Figura 82).

- 22 – Determinar a projeção horizontal da reta (A)(B), paralela à reta (C)(D), dadas as projeções A', A, B', C', C, D' e D.**

Resolução: Com a inexistência da linha de terra, deve-se recorrer às retas concorrentes (r) e (s), formadas, respectivamente, pelos pontos (B) e (C) e pelos pontos (A) e (D) (*Geometria Descritiva*, número 27), para obter, a partir da projeção J, a projeção horizontal do ponto (B) (Figura 83).

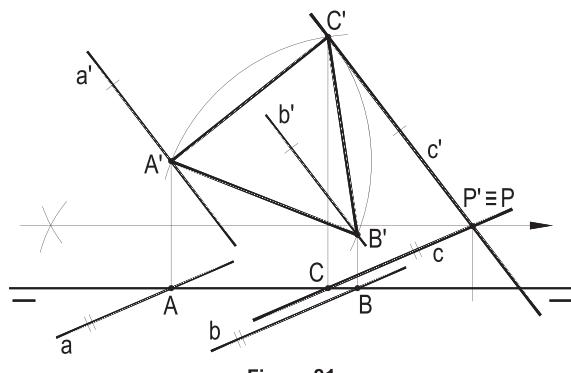


Figura 81

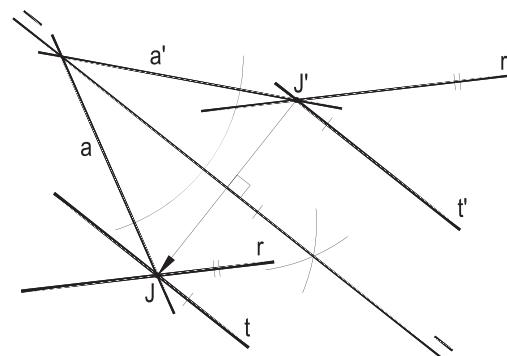


Figura 82

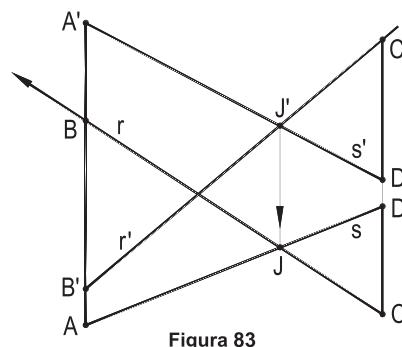


Figura 83

**23 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que o lado (B)(C) pertence a ( $\pi$ ), que os lados (A)(B) e (A)(C) são paralelos a ( $\beta_{24}$ ) e que os vértices (B) e (C) distam do ponto (J), de ( $\pi$ ), um valor igual à abscissa de (J), (B) com abscissa menor que (C), dadas as projeções A', A e J.**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Descritiva*, número 29) que os afastamentos dos pontos (B) e (C) devem ser iguais à soma da cota e do afastamento de (A), o que torna imediatas suas obtenções, pelas interseções da reta  $p$ , paralela a ( $\pi'\pi$ ), com a circunferência de centro J e raio igual à sua abscissa (Figura 84).

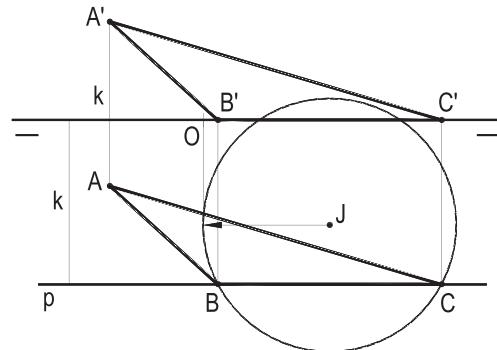


Figura 84

**24 – Dadas as projeções do ponto (A) e da reta (p), de ( $\beta_{24}$ ), pede-se desenhar as projeções da reta (r), pertencente ao ponto (A) e concorrente com a reta (p), sabendo que, em épura, são perpendiculares entre si as projeções de (r).**

Resolução: Se a reta pedida concorre com (p), de ( $\beta_{24}$ ), há de ser num ponto com projeções coincidentes, tal como as de (p).

E, para que sejam perpendiculares, em épura, r e r' devem concorrer num ponto da circunferência de diâmetro AA' (*Geometria Plana*, número 128.2).

O problema oferece, para os dados, duas soluções ( $r_1$ ) e ( $r_2$ ), correspondentes aos dois pontos de corte de  $p' \equiv p$  com aquela circunferência (Figura 85).

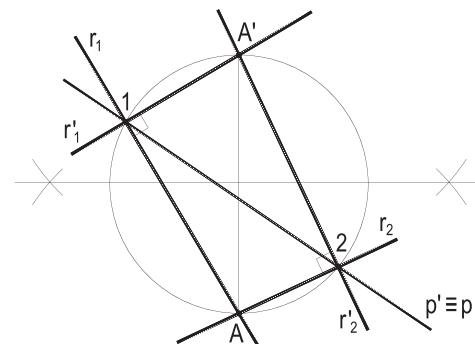


Figura 85

**25 – (H), (P) e (I) são os traços da frontal (f), respectivamente, com ( $\pi$ ), ( $\beta_{24}$ ) e ( $\beta_{13}$ ). Determinar as projeções de (I), a partir das projeções dadas f', H e P', esta pertencendo a f'.**

Resolução: As projeções H e P, esta coincidente com P', definem f e a perpendicular a f, por H, traz H' e a linha de terra, anotada sem orientação, por servirem as duas possíveis. E, então, por simetria de H em relação à linha de terra, obtém-se  $\bar{H}$  e, em seguida, o traço (I) pedido (Figura 86).

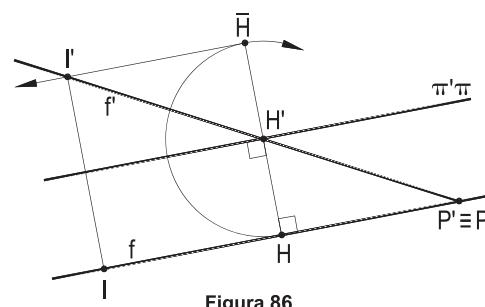


Figura 86

**26 – As retas frontais (a) e (b) inclinam-se de  $60^\circ$ , em relação a ( $\pi$ ), e concorrem com a reta de topo (t), respectivamente, em seu traço (I) com ( $\beta_{13}$ ) e em seu traço (P) com ( $\beta_{24}$ ).**

**Dadas as projeções do traço (I) de (t) com ( $\beta_{13}$ ), pede-se construir as projeções das duas frontais, sabendo que elas não são paralelas entre si.**

Resolução: A reta de topo (t), cuja projeção horizontal t, não representada na Figura 87, confunde-se com a linha de chamada dada I'I, proporciona a direção das projeções horizontais a e b das frontais em estudo, prontamente, assim, construídas (Figura 87).

Porque o ângulo que uma frontal forma com ( $\pi$ ) aparece em V.G. em sua projeção vertical, pode-se construir, com rigor a' e b', inclinados de  $30^\circ$  com aquela linha de chamada e, portanto, obedecendo à inclinação de  $60^\circ$  com ( $\pi$ ). E ambas as direções, em ordens arbitrárias, são aproveitadas, já que é imposto que as duas frontais não sejam paralelas.

**27 – Fixado o traço horizontal (H) de uma reta (r) paralela a ( $\beta_{13}$ ), pede-se construir, em épura, os lugares geométricos das projeções dos traços verticais (V) e dos traços (P), com ( $\beta_{24}$ ), dessas retas (r). Dadas as projeções H' e H.**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Descritiva*, número 29) que, para toda reta qualquer paralela a ( $\beta_{13}$ ), são iguais, em módulo, as cotas de seus traços verticais (V) e os afastamentos de seus traços horizontais (H), mas que seus sinais são contrários. E que seus traços (P) com ( $\beta_{24}$ ) são os pontos médios dos segmentos (V)(H).

Assim, os lugares geométricos procurados são as projeções das fronto-horizontais (v) e (p) (Figura 88), conduzidas pelos pontos (V) e (P), respectivamente traço vertical e traço com ( $\beta_{24}$ ) de uma reta (r), arbitrada, da família em estudo, pois a cota de (V) há de ser constante.

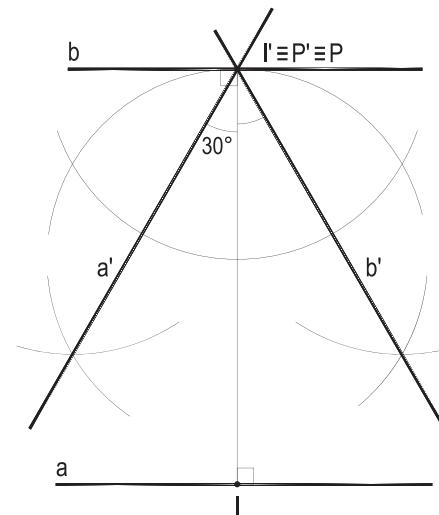


Figura 87

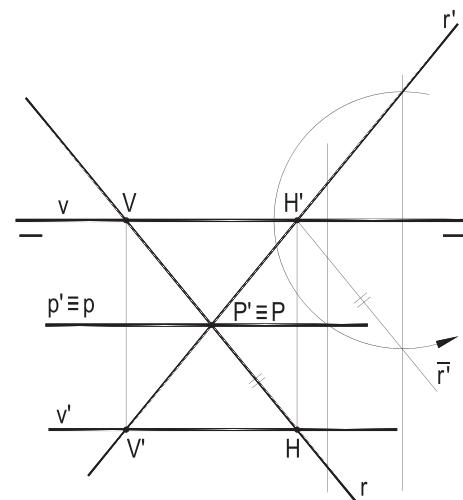


Figura 88

**28 – A reta ( $r$ ), concorrente com as retas de topo ( $a$ ) e ( $b$ ) e com a reta de perfil ( $(A)(B)$ , é paralela a ( $\beta_{13}$ ).**

Dadas as projeções verticais  $a'$  e  $b'$  das retas de topo e as duas projeções da reta ( $(A)(B)$ ), pede-se construir as projeções da reta ( $r$ ), assim como a posição da linha de terra, sabendo que o ponto comum às retas ( $r$ ) e ( $(A)(B)$  é um ponto ( $J$ ), do terceiro diedro, tal que a cota de ( $J$ ) valha o triplo de seu afastamento.

Resolução: A impossibilidade inicial de contar com a linha de terra provoca a construção geométrica que leva  $J'$  a  $\bar{J}$  e  $\bar{J}$  a  $J$ , mantendo a divisão proporcional das duas projeções do segmento ( $(A)(B)$ ).

A obtenção da projeção horizontal da reta ( $r$ ) se faz, então, conforme detalhado no item 29 de *Geometria Descritiva* e, enfim, a divisão do segmento  $J'\bar{J}$  em quatro partes iguais determina a posição da linha de terra (Figura 89), orientada de modo a que o ponto ( $J$ ) pertença ao terceiro diedro.

**29 – Instituir o lugar geométrico dos pontos que tenham suas três coordenadas iguais.**

Resolução: Para que um ponto tenha cota e afastamento iguais deve pertencer a ( $\beta_{13}$ ) e, para que tenha essas duas coordenadas iguais às suas respectivas abscissas, deve pertencer aos planos ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ), bissetores dos diedros formados por ( $\pi''$ ) com ( $\pi$ ) e com ( $\pi'$ ), nas regiões que contam com as igualdades de sinais dessas três coordenadas (Figuras 90 e 91).

Assim, o lugar geométrico pedido é a reta ( $r$ ), comum a esses três planos, com projeções, em épura, formando  $45^\circ$  com  $\pi\pi'$ , pertencentes à origem ( $O$ ) das abscissas.

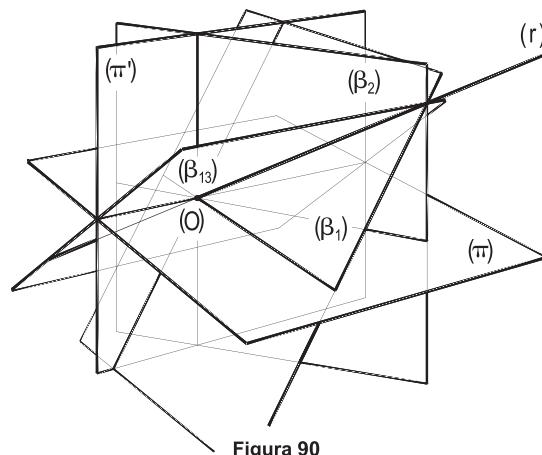


Figura 90

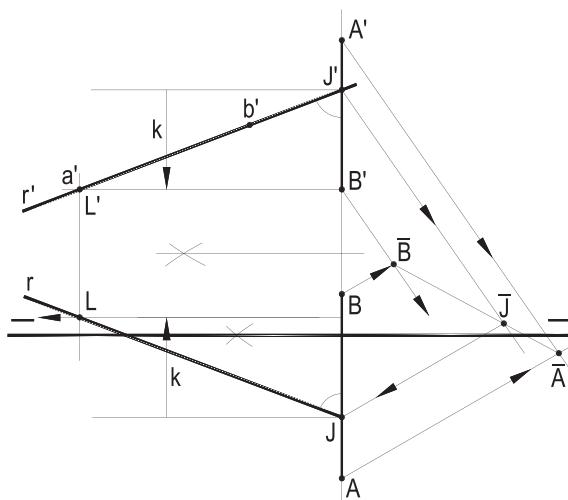


Figura 89

# CAPÍTULO III

## PLANO, PERTINÊNCIAS E TRAÇOS

Aqui são apresentados problemas relacionados às pertinências de pontos e de retas aos planos, bem como às determinações de traços de planos com os planos de projeção e com os planos bissetores.

São algo mais que seis dezenas, a saber:

- 30 – Determinar os traços dos planos de topo ( $\gamma$ ) e ( $\rho$ ), sabendo que os planos são perpendiculares, que ( $\gamma$ ) contém a origem O das abscissas e o ponto (A) e que ( $\rho$ ) pertence à reta (A)(B), dadas as projeções A, B e B' e a origem O das abscissas.**

Resolução: Imediatos os traços horizontais dos dois planos. E os verticais, apresentando em V.G., entre eles, a perpendicularidade dos planos, devem ter seu ponto comum sobre a circunferência de diâmetro, OB', arco capaz de  $90^\circ$ , para OB'.

Finalmente, porque o ponto (A) pertence aos dois planos de topo, sua projeção vertical deve ser o ponto comum aos dois traços verticais procurados.

Há, portanto, duas soluções,  $A'_1$  e  $A'_2$ , só tendo sido completada a primeira, na épura da Figura 92.

- 31 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ), formado pelas retas (a) e (b), dadas por suas projeções.**

Resolução: Apoiando-se uma horizontal (h) nas duas retas dadas e obtendo-se seu traço vertical (V), a utilização do ponto (J), que há de ser o comum aos dois traços de ( $\alpha$ ), e da direção dessa horizontal (h) proporcionam, facilmente, os traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  pedidos (Figura 93).

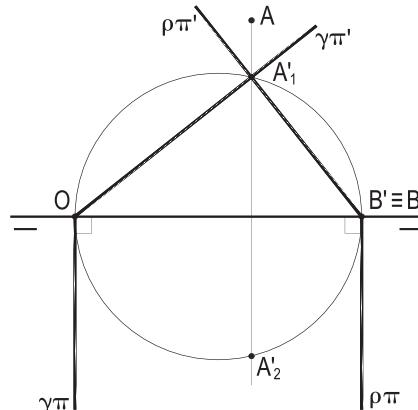


Figura 92

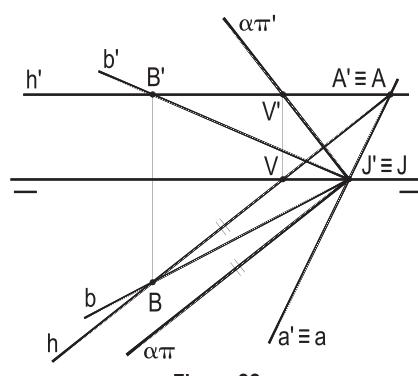


Figura 93

**Marcar o ponto (A) no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, ou pelas projeções de duas retas (a) e (b). Dada, sempre, a projeção A'.**

Resoluções: Utilizada, sempre, uma reta auxiliar (t), contendo o ponto (A).

32

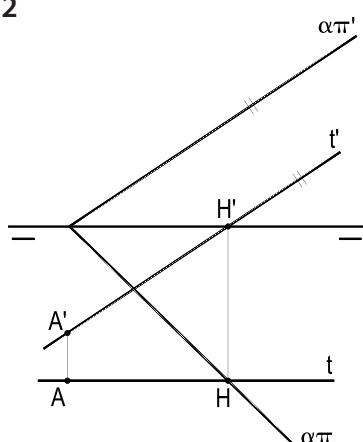


Figura 94

33

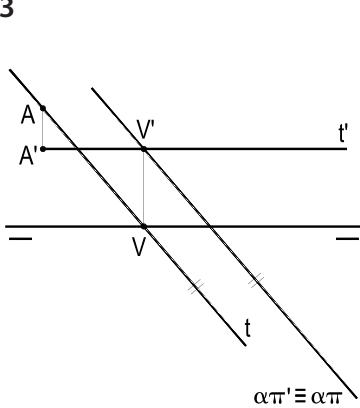


Figura 95

34

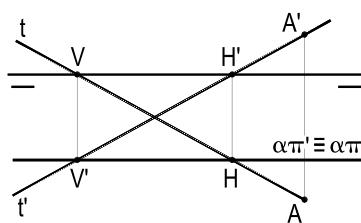


Figura 96

35

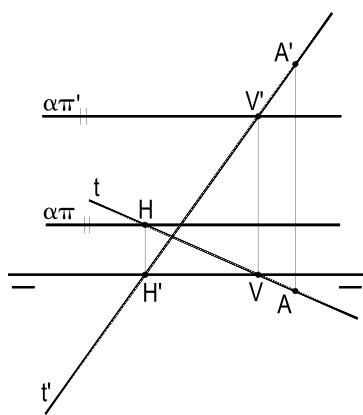


Figura 97

36

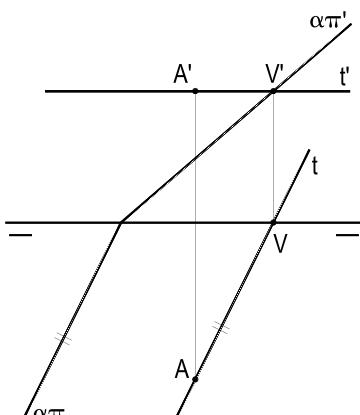


Figura 98

37

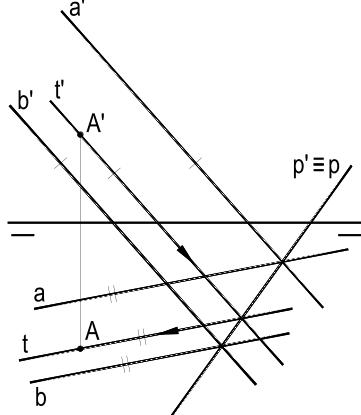


Figura 99

38

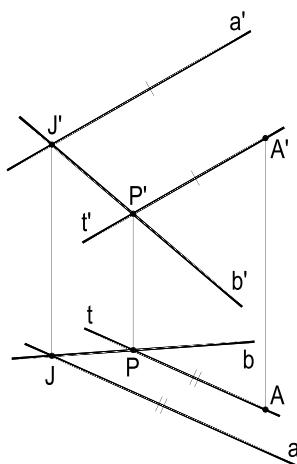


Figura 100

39

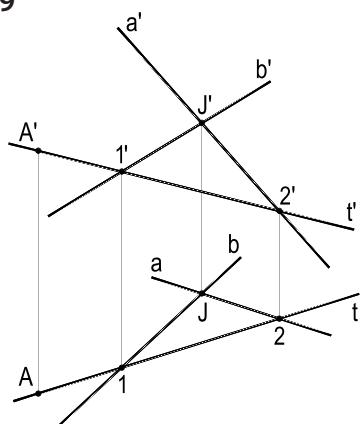


Figura 101

40

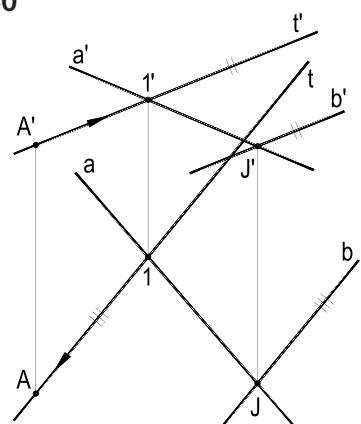


Figura 102

**Marcar a reta ( $r$ ) no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços. Dada, sempre, a projeção  $r'$ .**

Resolução: Utilizados os traços de ( $r$ ), e/ou retas, auxiliares ( $t$ ), de ( $\alpha$ ).

41

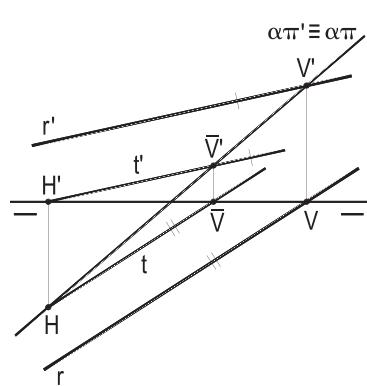


Figura 103

42

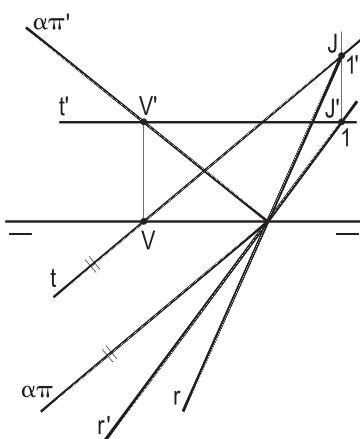


Figura 104

43

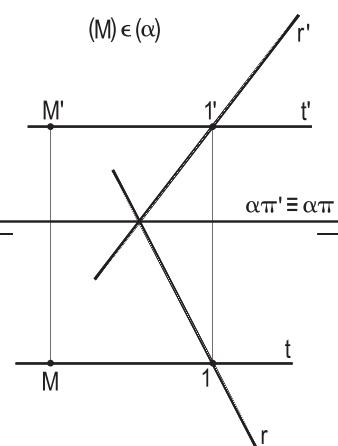


Figura 105

44

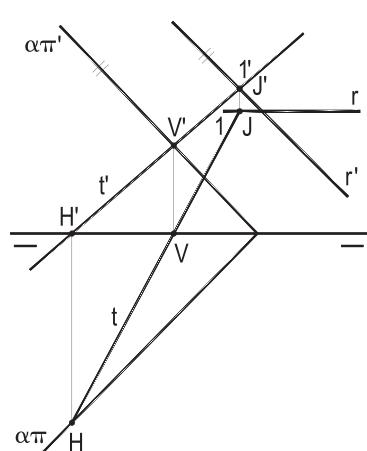


Figura 106

45

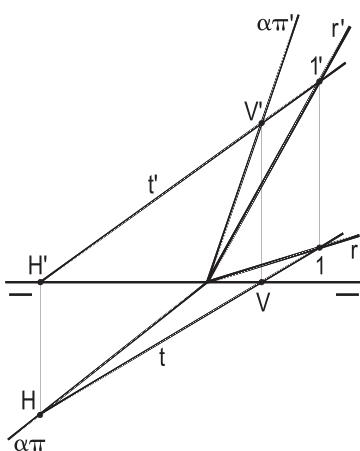


Figura 107

46

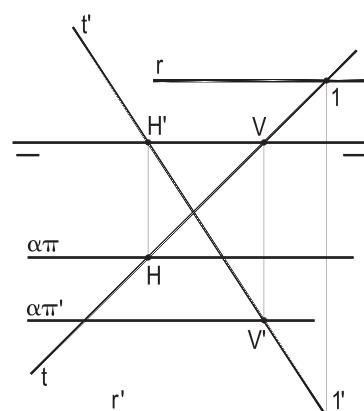


Figura 108

47

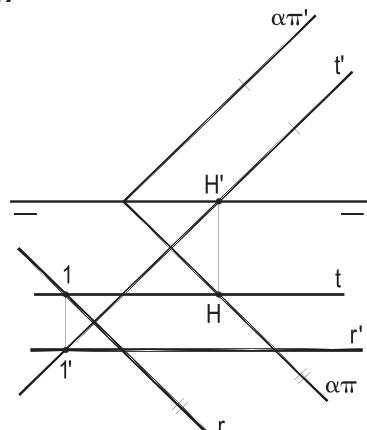


Figura 109

48

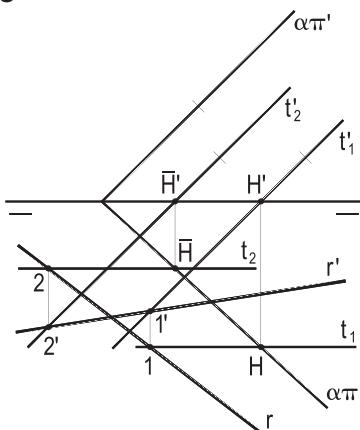


Figura 110

49

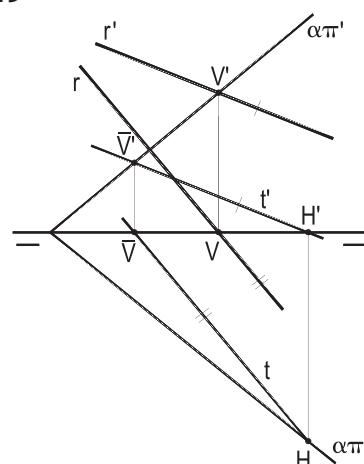


Figura 111

**Marcar a reta ( $r$ ), dada, sempre, por sua projeção vertical  $r'$  no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, ou por duas retas ( $a$ ) e ( $b$ ).**

Resoluções: Utilizada, sempre que necessário, uma reta auxiliar ( $t$ ), de ( $\alpha$ ).

50

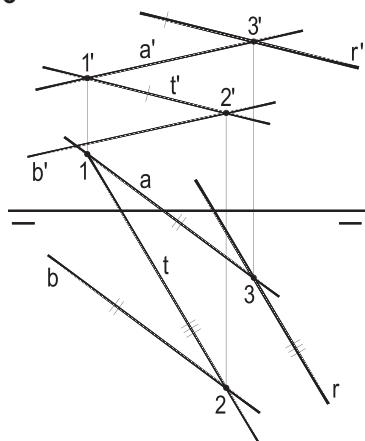


Figura 112

51

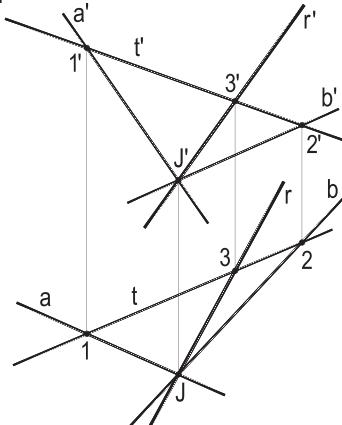


Figura 113

52

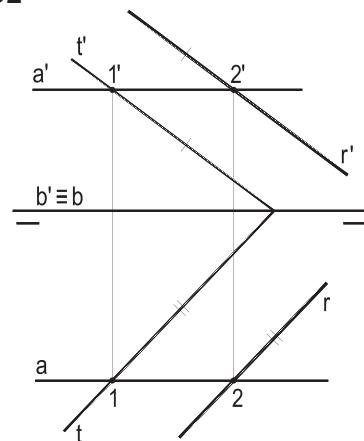


Figura 114

53

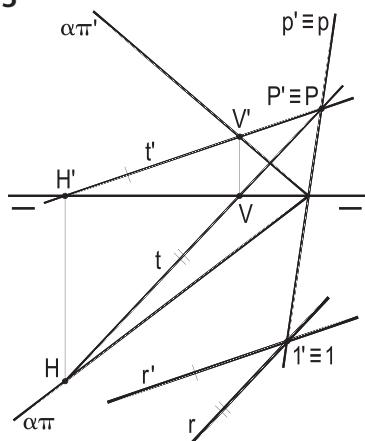


Figura 115

54

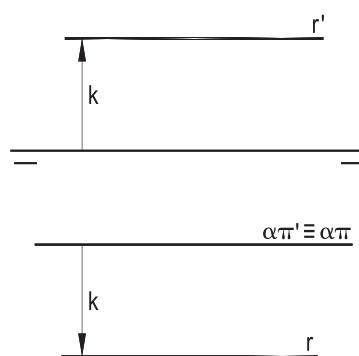


Figura 116

55

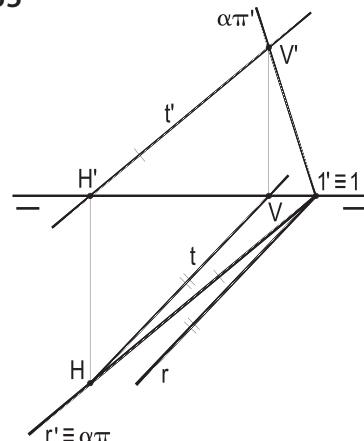


Figura 117

56

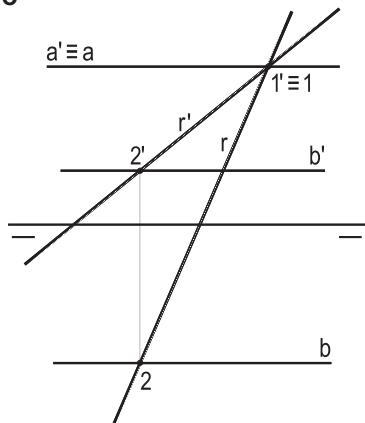


Figura 118

57

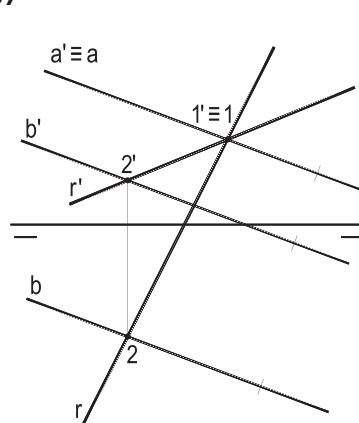


Figura 119

58

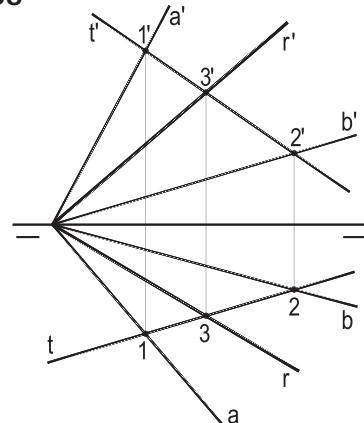


Figura 120

**Marcar a reta ( $r$ ), dada, sempre, por sua projeção vertical  $r'$  no plano ( $\alpha$ ), formado pela reta ( $a$ ) e pelo ponto ( $A$ ), dados por suas projeções.**

Resoluções: Utilizada, sempre que necessário, uma reta auxiliar ( $t$ ), do plano ( $\alpha$ ).

59

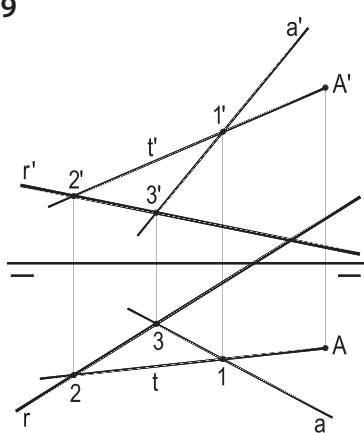


Figura 121

60

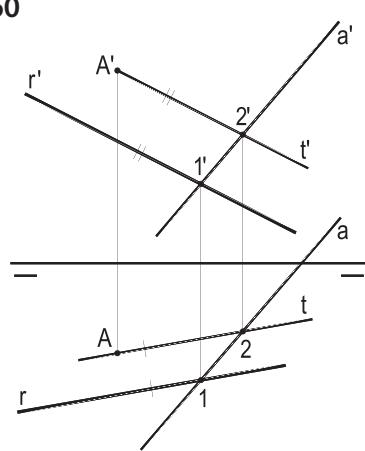


Figura 122

61

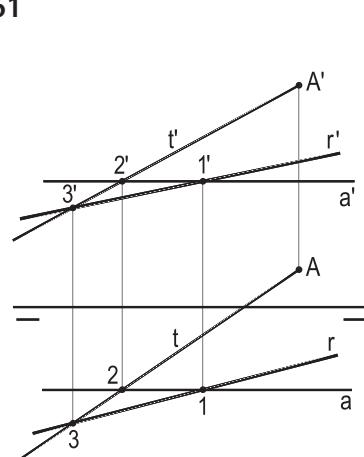


Figura 123

62

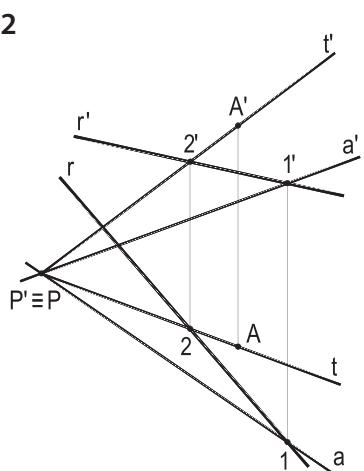


Figura 124

63

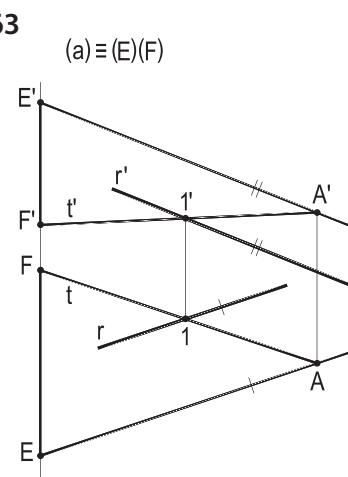


Figura 125

64

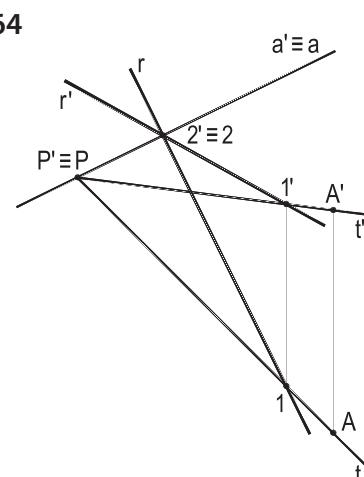


Figura 126

65

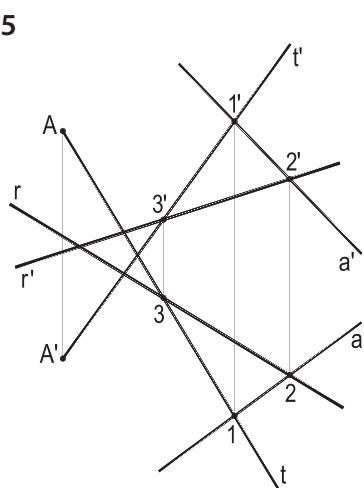


Figura 127

66

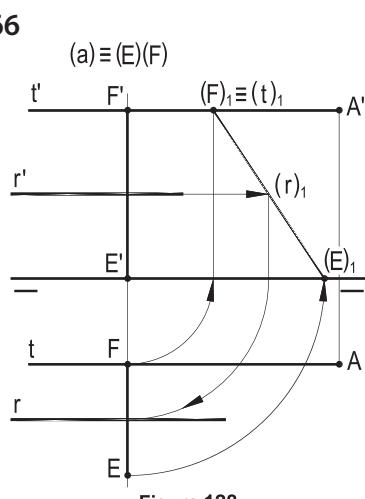


Figura 128

67

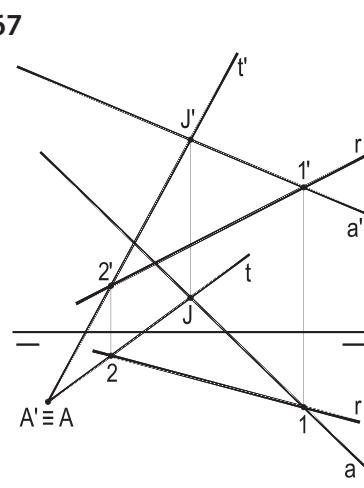


Figura 129

**Em todos os casos seguintes, o plano ( $\alpha$ ) é dado por seu traço vertical  $\alpha\pi'$  e pelas projeções do ponto (A).**

**Pede-se marcar em ( $\alpha$ ) a reta (r), dada por sua projeção vertical.**

Resolução: Sempre que necessário, recorreu-se a uma reta auxiliar (t), do plano ( $\alpha$ ).

**68**

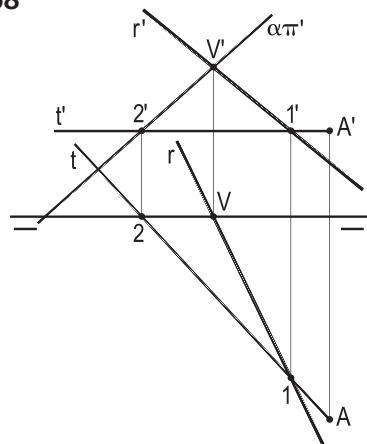


Figura 130

**69**

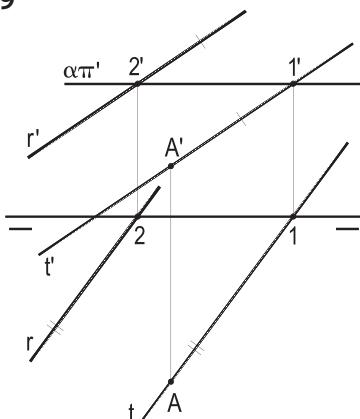


Figura 131

**70**

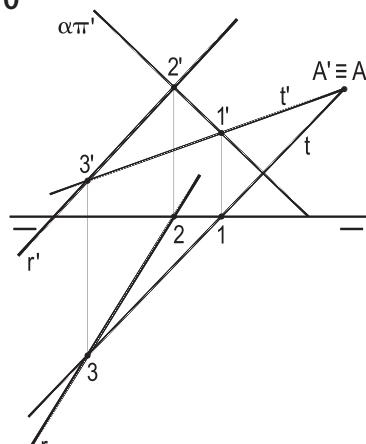


Figura 132

**71**

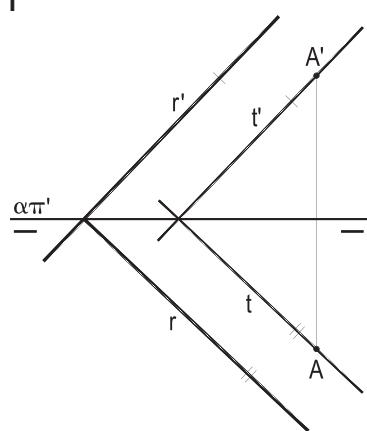


Figura 133

**72**

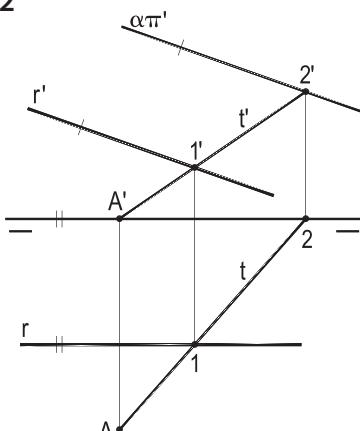


Figura 134

**73**

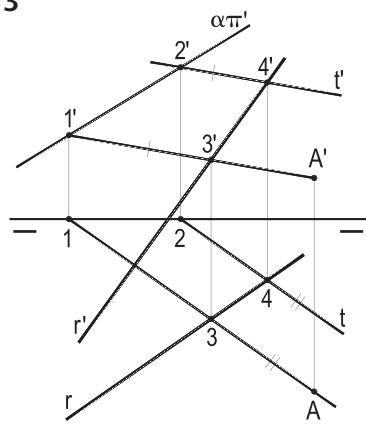


Figura 135

**74**

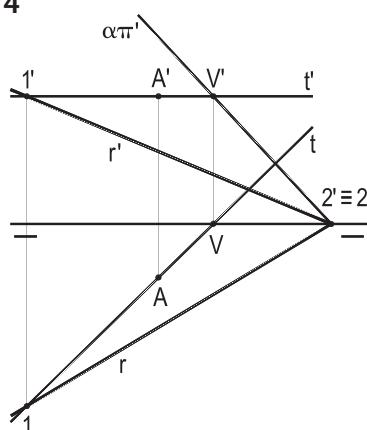


Figura 136

**75**

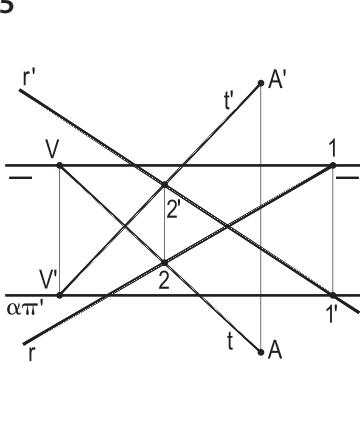


Figura 137

**76**

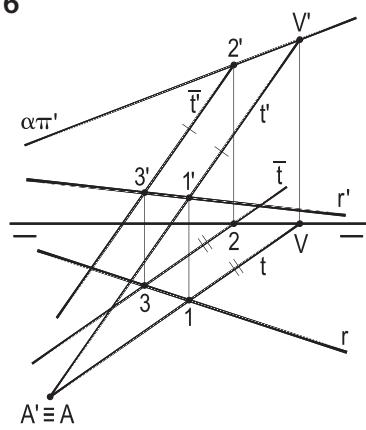


Figura 138

**77 – Dadas as projeções  $J'$ ,  $O'$ ,  $O$  e  $c'$  dos pontos  $(J)$  e  $(O)$  e da circunferência  $(c)$ , de centro  $(O)$ , todos pertencentes ao plano  $(\alpha)$ , pede-se construir as projeções do triângulo equilátero  $(A)(B)(C)$ , de  $(\alpha)$ , sabendo que os segmentos  $(J)(A)$  e  $(J)(B)$  têm comprimentos mínimo e máximo, que  $(A)$  e  $(B)$  pertencem a  $(c)$  e que, em épura, as projeções do triângulo são exteriores uma à outra.**

Resolução: Por apresentar sua projeção  $c'$  em V.G., a circunferência  $(c)$  e, então, também, o triângulo  $(A)(B)(C)$  pertencem a um plano frontal  $(\alpha)$ , de imediata obtenção (Figura 139).

Os pontos  $(A)$  e  $(B)$  são determinados, em projeção vertical, pela união de  $(J)$  ao centro  $(O)$  de  $(c)$  (*Geometria Plana*, número 98), e o triângulo pedido é construído em V.G. na projeção vertical  $A'B'C'$  (Figura 139), com apenas uma solução, para evitar o cruzamento de suas projeções.

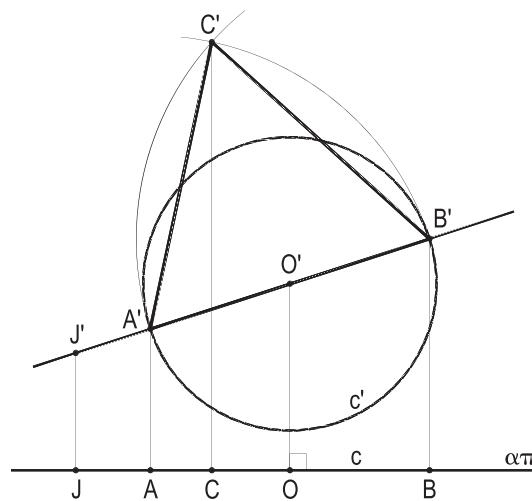


Figura 139

**78 – As distâncias dos pontos dados  $(A)$  e  $(B)$  ao plano de topo  $(\gamma)$ , cujo traço  $\gamma\pi$  é dado, guardam a razão  $2/3$ . Pede-se construir as projeções do triângulo  $(A)(B)(C)$ , sabendo que seu lado  $(B)(C)$  é fronto-horizontal e que  $(C)$  pertence a  $(\gamma)$ .**

Além de  $\gamma\pi$  são dadas as projeções dos vértices  $(A)$  e  $(B)$ .

Resolução: Porque a razão entre as distâncias de  $(A)$  e de  $(B)$  ao plano de topo  $(\gamma)$  repetem-se em V.G. na projeção vertical, sendo  $(J)$  o traço de  $(A)(B)$  em  $(\gamma)$ , a determinação de  $\bar{J}'$ , guardando a razão estabelecida, proporciona  $J'$  em  $A'B'$  e, então, a construção de  $\gamma\pi'$ , pela união de  $J'$  com o traço de  $\gamma\pi$  com  $\pi'\pi$ . A interseção da fronto-horizontal ( $f$ ), pertencente a  $(B)$ , com  $(\gamma)$ , traz o terceiro vértice  $(C)$  do triângulo  $(A)(B)(C)$  pedido (Figura 140).

Há uma segunda solução, não apresentada na Figura 140, para o conjugado harmônico de  $J'$ , em relação a  $A'B'$ , indicada pelo número 2.

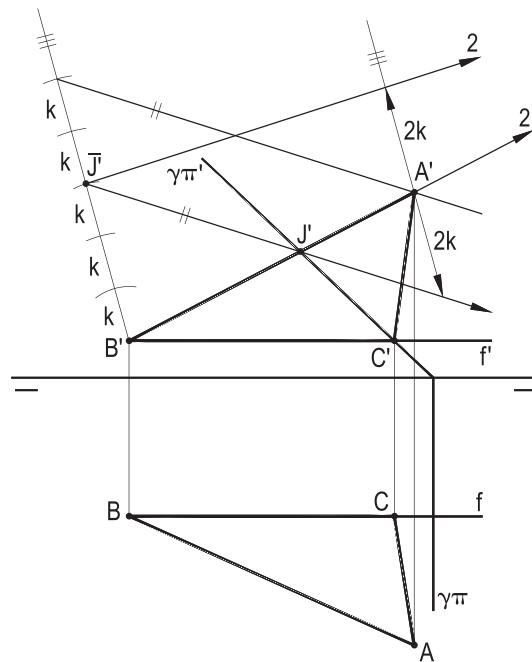


Figura 140

**79 – São dadas as duas projeções das retas reversas ( $r$ ) e ( $t$ ), além da projeção horizontal  $s$  da reta ( $s$ ), paralela a ( $\beta_{13}$ ).**

Pede-se determinar  $s'$  e as projeções do segmento ( $A$ )( $B$ ), paralelo a ( $t$ ) e apoiado por seus extremos em ( $r$ ) e em ( $s$ ), ( $A$ ) com abscissa menor, sabendo que o comprimento de sua projeção vertical  $A'B'$  iguala a abscissa do traço vertical de ( $s$ ).

Resolução: Deve-se, de início, já que a direção de ( $A$ )( $B$ ) é conhecida — é a da reta ( $t$ ), dada —, determinar o comprimento de sua projeção horizontal, o que se consegue aplicando sobre  $t'$  o comprimento  $k'$  da abscissa do traço vertical ( $V$ ) de ( $s$ ), para buscar o valor  $k$  que lhe corresponde na projeção horizontal  $t$  (Figura 141).

Então, por translação, obtém-se o primeiro extremo  $B$  da projeção horizontal do segmento pedido e, em seguida,  $A$  em  $r$ ,  $A'$  em  $r'$ , e, por fim,  $B'$  e  $s'$ , construída por  $B'$ , paralela à simétrica  $\bar{s}$  de  $s$ , em relação a  $\pi'\pi$ , para que ( $s$ ) seja paralela a ( $\beta_{13}$ ).

**80 – Desenhar as projeções do segmento ( $A$ )( $B$ ), sabendo que ( $M$ ) é o seu ponto médio. ( $A$ ) pertence à reta ( $r$ ) e ( $B$ ) à reta ( $s$ ). Dadas as projeções  $r$ ,  $r'$ ,  $s$ ,  $s'$  e  $M$ . Determinar, também, a posição da linha de terra, sendo ( $M$ ) de ( $\beta_{13}$ ), no terceiro diedro.**

Resolução: Por simetria de  $s$  em relação a  $M$ , obtém-se  $\bar{s}$  e  $A$  e, então,  $B$  e as projeções  $A'$  e  $B'$ . E, completada a projeção  $M'$ , a mediatrix de  $MM'$  é a linha de terra, orientada para deixar ( $M$ ) no terceiro diedro, como imposto (Figura 142).

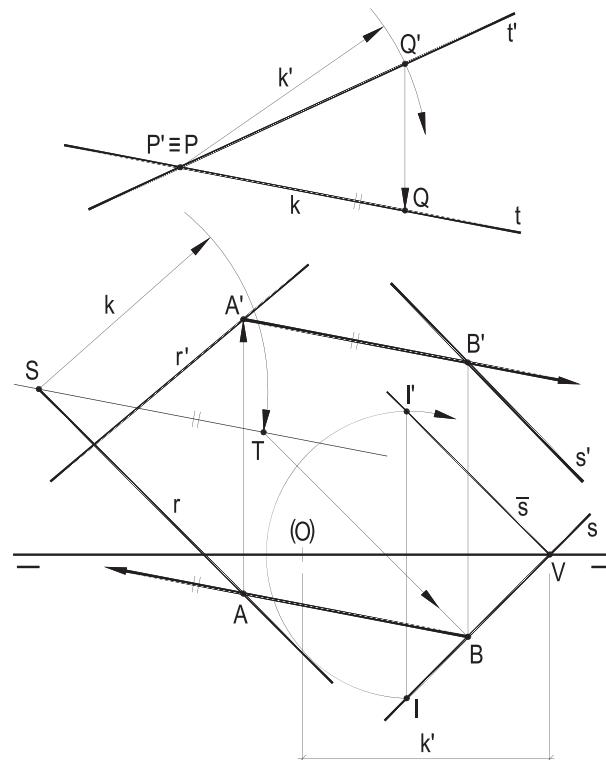


Figura 141

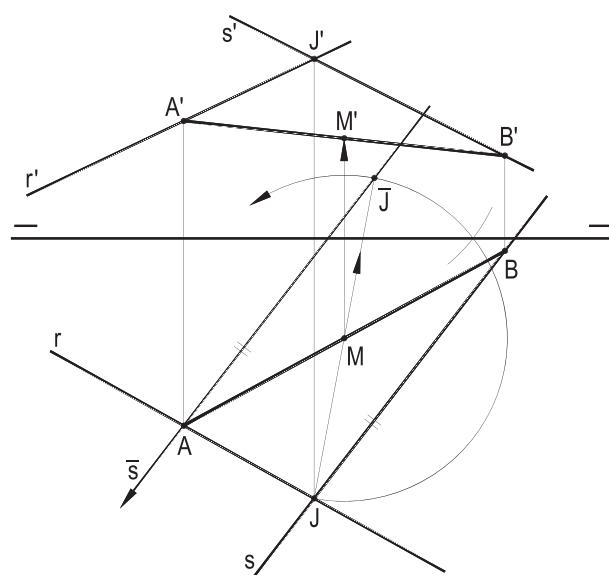


Figura 142

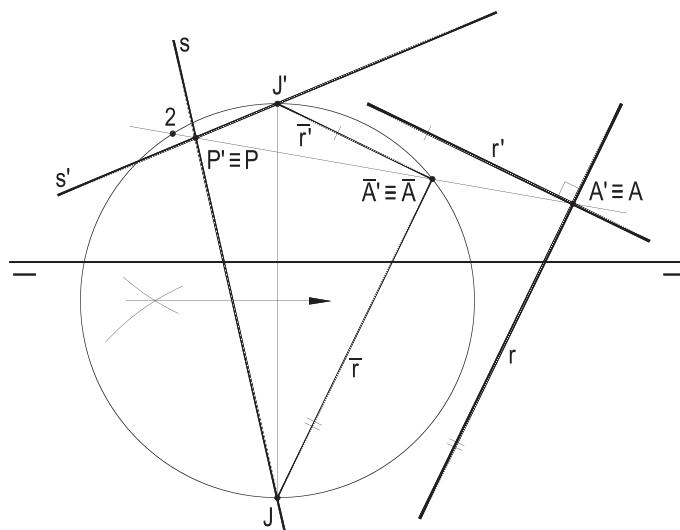
**81 – Desenhar as projeções da reta (r), pertencente ao ponto (A) e concorrente com a reta (s), sabendo que, em épura, as projeções de (r) são perpendiculares entre si.**

**Dadas as projeções  $s'$ ,  $s$  e  $A' \equiv A$ .**

Resolução: Solução simples, por homotetia, a partir do traço ( $P$ ) de ( $s$ ) com ( $\beta_{24}$ ), mediante a escolha de um ponto qualquer ( $J$ ) de ( $s$ ), da construção dos arcos capazes de  $90^\circ$  para  $J' J$  e pela obtenção do homotético ( $\bar{A}$ ) de ( $A$ ).

A reta ( $r$ ), pedida, há de ser (Figura 143) paralela a ( $\bar{r}$ ).

Há uma segunda solução, não completada na Figura 143, para a posição 2 de  $\bar{A}$ .



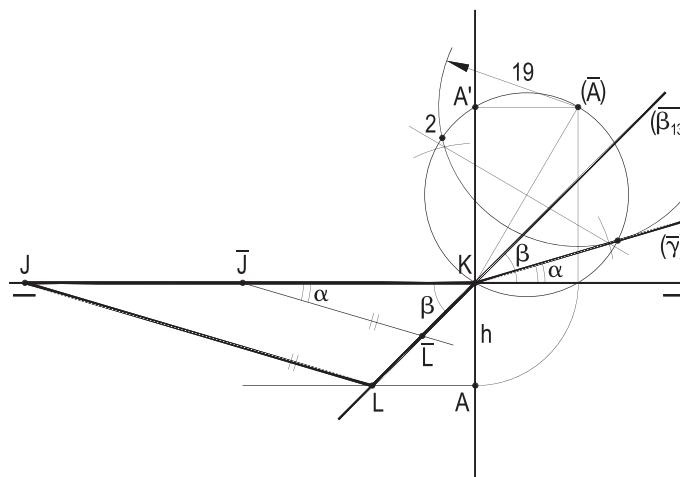
**Figura 143**

**82 – O plano ( $\gamma$ ) pertence à linha de terra e dista 19 mm do ponto (A), dado por suas projeções, atravessando os diedros ímpares.**

Pede-se desenhar a V.G. de um triângulo  $JKL$ , cujos ângulos  $\hat{J}$  e  $\hat{K}$  sejam respectivamente iguais aos ângulos  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  que  $(\gamma)$  forma com  $(\pi)$  e com  $(\beta_{13})$ , e cuja altura, relativa ao vértice  $L$ , iguale o afastamento de  $(A)$ .

Resolução: Com um rebatimento lateral de um plano de perfil, obtém-se o plano ( $\gamma$ ), com apenas uma solução, pois a segunda tangente, correspondente ao segundo ponto de tangência – 2 – levaria ( $\gamma$ ) a passar pelos diedros pares.

Obtidos os ângulos  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , em V.G., é imediata a construção (Figura 144) da V.G. do triângulo JKL, aproveitando o afastamento do ponto (A), igual à altura h do triângulo pedido e os ângulos  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  construídos.



**Figura 144**

**83 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra, sabendo que o triângulo (A)(B)(C), de baricentro (G), pertence a ele, tendo o lado (A)(B) em ( $\pi$ ) e o vértice (C) em ( $\pi'$ ). Dadas as projeções de (G).**

Resolução: A mediana relativa ao lado (A)(B) do triângulo em estudo será dividida pelo baricentro em duas partes, restando a um terço de seu pé (*Geometria Plana*, número 147), o que proporciona (Figura 145) a construção do traço vertical  $\alpha\pi'$ , já que (A)(B) tem cota nula.

Uma reta auxiliar, arbitrada, (V)(G) do plano, dá, por seu traço horizontal (H), o segundo traço  $\alpha\pi$  do plano pedido.

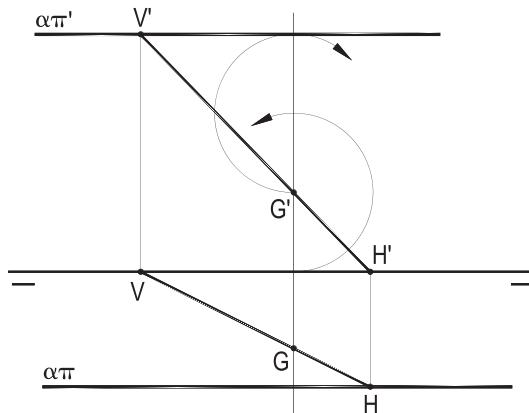


Figura 145

**84 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra, sabendo que a reta fronto-horizontal ( $r$ ), pertencente a ( $\alpha$ ), dada por suas projeções, equidista de seus traços.**

Construir, ainda, as projeções da reta ( $i$ ), traço de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{13}$ ).

Resolução: As simples duplicações da cota e do afastamento de ( $r$ ) proporcionam os dois traços de ( $\alpha$ ) (Figura 146).

E a obtenção do traço ( $i$ ) com ( $\beta_{13}$ ) de uma reta ( $s$ ) qualquer de ( $\alpha$ ) dá as projeções da fronto-horizontal ( $i$ ), traço de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{13}$ ) (Figura 146).

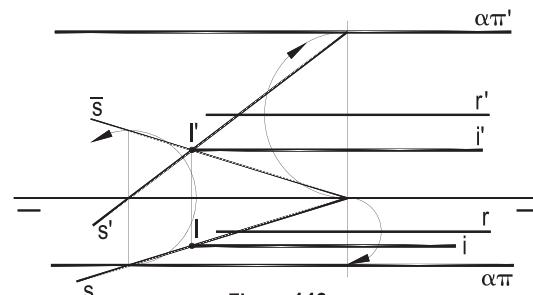


Figura 146

**85 – Os planos ( $\gamma$ ) e ( $\rho$ ), paralelos a ( $\pi'\pi$ ), possuem o mesmo traço vertical, o qual tem cota positiva. Determiná-lo, sabendo que os planos são perpendiculares entre si.**

São dados os traços horizontais  $\gamma\pi$  e  $\rho\pi$ .

Resolução: Com um rebatimento de perfil, obtém-se os pontos  $(A)_1$  e  $(B)_1$  de passagem dos traços de perfil dos dois planos.

O arco capaz de  $90^\circ$  para  $(A)_1(B)_1$  proporciona (Figura 147) o ponto (V), pertencente aos dois traços verticais,  $\gamma\pi'$  e  $\rho\pi'$ , coincidentes pedidos (*Geometria Plana*, número 128.2).

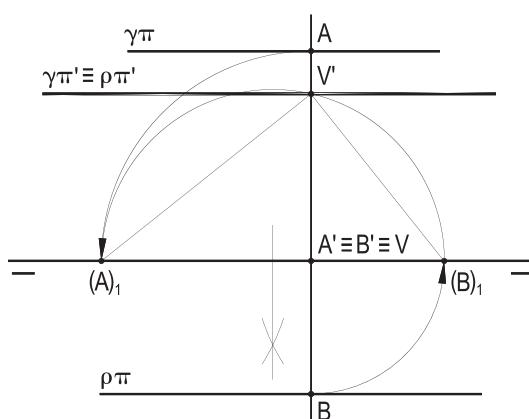


Figura 147

**86 – Os planos verticais ( $\gamma$ ) e ( $\rho$ ) e o plano frontal ( $\lambda$ ) possuem uma única reta ( $r$ ) em comum. Sabendo que o ângulo formado entre os planos ( $\gamma$ ) e ( $\rho$ ) é igual a  $45^\circ$  e sendo dados os traços  $\gamma\pi'$ ,  $\rho\pi'$  e  $\lambda\pi$ , pede-se determinar os traços horizontais  $\gamma\pi$  e  $\rho\pi$ , bem como as projeções da reta ( $r$ ). Observando as duas soluções possíveis, pede-se, ainda, desenhar as projeções do quadrilátero ( $A(B)(C)(D)$ ), que tenha seu lado ( $A(B)$  sobre a primeira solução da reta ( $r$ ), o lado ( $C(D)$ ) sobre a segunda solução, o lado ( $B(C)$  em ( $\pi$ ) e o lado ( $A(D)$  em ( $\beta_{13}$ ), informando a natureza desse quadrilátero.**

Resolução: Para que possuam apenas uma reta ( $r$ ) em comum, uma vertical, naturalmente, devem se cortar num único ponto os três traços horizontais  $\gamma\pi$ ,  $\rho\pi$  e  $\lambda\pi$ . E como a V.G. do ângulo entre os dois planos verticais se faz entre seus traços horizontais, o arco capaz de  $45^\circ$  relativo ao segmento formado pelos traços de ( $\gamma$ ) e de ( $\rho$ ) com ( $\pi'\pi$ ) dá solução às retas ( $r_1$ ) e ( $r_2$ ), intersecções pedidas (Figura 148).

Bem simples a obtenção das projeções do quadrilátero ( $A(B)(C)(D)$ ), um retângulo, por ter dois lados verticais, um em ( $\pi$ ) e outro fronto-horizontal.

**87 – Dois planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), paralelos a ( $\pi'\pi$ ), são tais que, para cada um, vale 3,1 cm a distância entre seus traços. Pede-se construir seus traços, sabendo que ( $\alpha$ ) forma ângulos iguais com ( $\pi$ ) e com ( $\beta_{13}$ ), sem passar pelo terceiro diedro, e que ( $\gamma$ ), que não atravessa o primeiro diedro, dista 1,1 cm da linha de terra.**

Resolução: Com uma vista lateral, constrói-se uma reta  $\bar{r}$  igualmente inclinada em relação a ( $\pi$ ) e a ( $\beta_{13}$ ), sobre a qual se aplica o valor 3,1 cm, para a obtenção de ( $\alpha$ ).

E, com rápida construção geométrica auxiliar, chega-se ao triângulo retângulo de hipotenusa 3,1 cm e altura 1,1 cm, o que dá os catetos  $b$  e  $c$ , distâncias dos traços de ( $\gamma$ ) a ( $\pi'\pi$ ) (Figura 149), dispositos de modo tal que o plano ( $\gamma$ ) não passe pelo primeiro diedro.

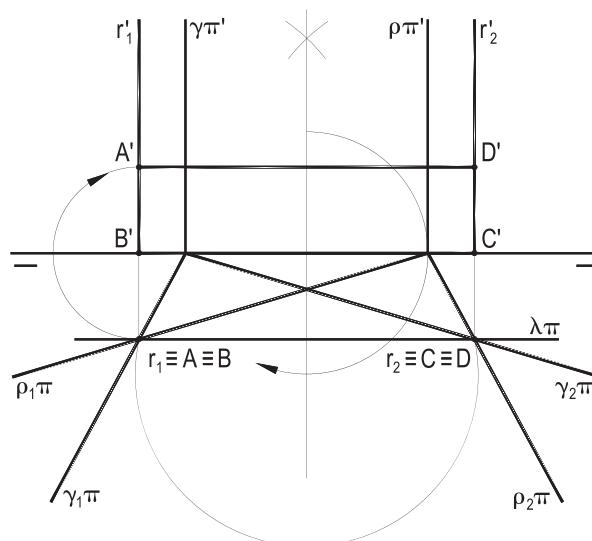


Figura 148

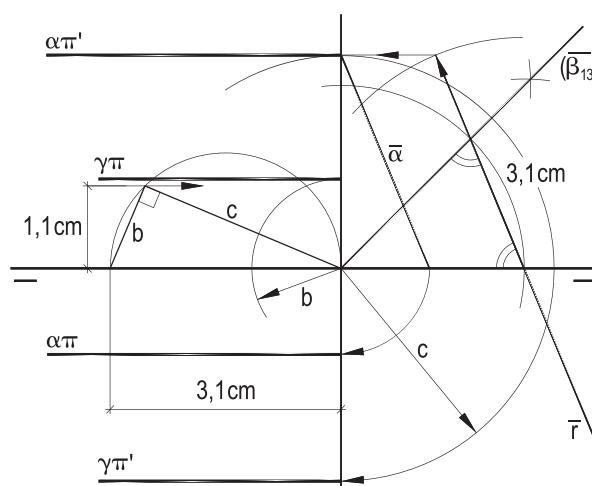


Figura 149

**88 – O triângulo isósceles (A)(B)(C) tem o lado (A)(B) horizontal, dado por suas projeções, o lado (A)(C) frontal e a altura (A)(H), relativa à sua base (B)(C), de perfil.**

Sabendo que o vértice (C) pertence a  $(\beta_{13})$ , no primeiro diedro, pede-se construir as projeções do triângulo e determinar a posição da linha de terra.

Resolução: Por vir em V.G. na projeção vertical, o lado frontal (A)(C) é tal que C' há de pertencer à circunferência de centro A' e raio igual a AB.

Além disso, por ser de perfil a altura relativa ao vértice (A), também mediana, já que o triângulo é isósceles, a abscissa de (C) deve ser simétrica à de (B), em relação à de (A), o que, então, proporciona a projeção C' e, logo, C, completando o triângulo. A mediatrix de C'C é a linha de terra (Figura 150) pedida.

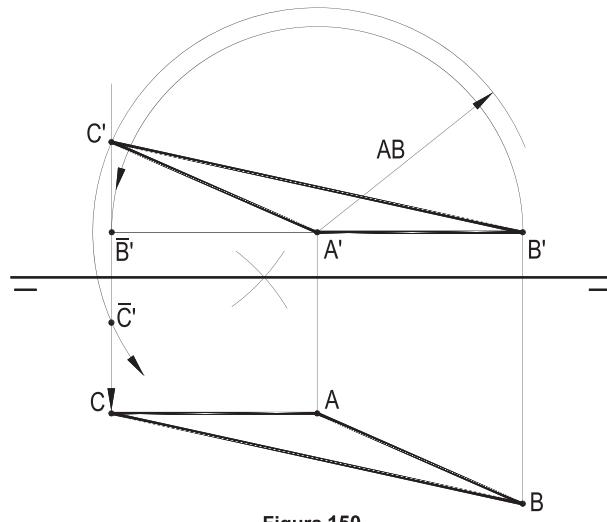


Figura 150

A segunda solução, correspondente à projeção vertical  $\bar{C}'$ , não foi completada na Figura 150.

**89 – Construir os traços dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , paralelos à linha de terra e distantes 14 mm do ponto (A), dado por suas projeções, sabendo que coincidem seus traços verticais, com cota positiva, que o ângulo formado pelos planos é igual a  $45^\circ$  e que  $(\alpha)$  não passa pelo terceiro diedro.**

Resolução: Com uma vista lateral, constrói-se o círculo de centro  $(A)_1$ , raio igual a 14 mm e duas tangentes a ele inclinadas de  $45^\circ$  entre si, obtendo-se o ponto  $\bar{V}$  (Figura 151), que, girado, em torno de  $(A)_1$ , traz  $V'$  e, então,  $\alpha\pi' \equiv \beta\pi'$ .

As tangentes do ponto (V') comum a esses traços àquele círculo entregam os traços horizontais  $\alpha\pi$  e  $\beta\pi$  (Figura 151), escolhidos de modo a atender à imposição do plano  $(\alpha)$  não passar pelo terceiro diedro.

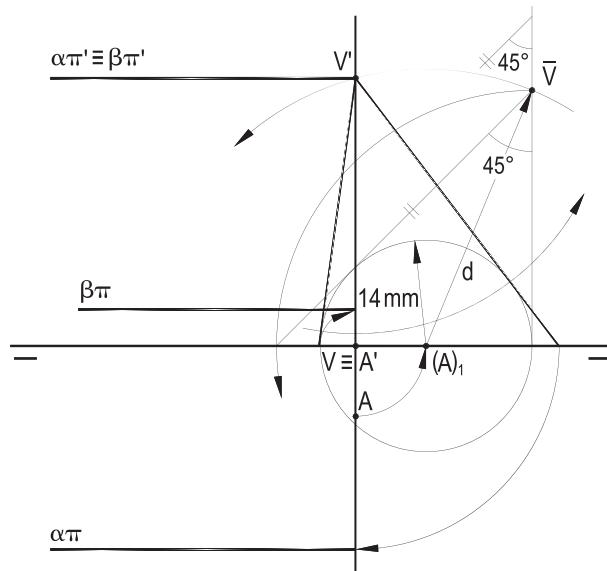


Figura 151

**90 – A reta ( $r$ ), que contém o ponto ( $A$ ), é a interseção dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), simétricos em relação a ( $\beta_{13}$ ). Os planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) formam, entre si,  $60^\circ$ .**

Sabendo que o plano ( $\alpha$ ) não passa pelo segundo diedro, pede-se determinar a projeção horizontal da reta ( $r$ ) e os traços de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ).

**Dadas as projeções  $A'$  e  $r'$ .**

Resolução: A reta ( $r$ ), tendo cota constante, há de ser fronto-horizontal, pertencendo a ( $\beta_{13}$ ), para possibilitar a simetria de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) em relação a esse bissetor.

Uma vista lateral permite, então, construir os planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) (Figura 152).

Diversas simetrias facilitam a conclusão da épura, trazendo os traços de ( $\alpha$ ) e de ( $\gamma$ ) e as projeções horizontais de ( $r$ ) e de ( $A$ ).

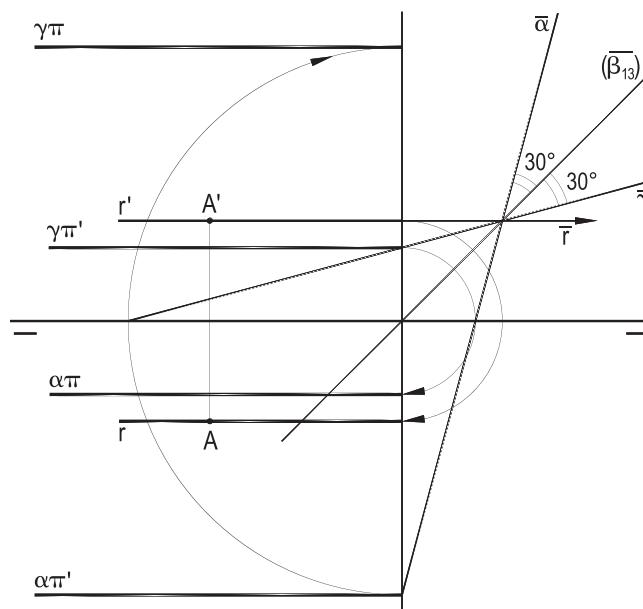


Figura 152

**91 – As projeções verticais das retas frontais ( $r$ ), ( $s$ ) e ( $t$ ) formam um triângulo equilátero  $A'B'C'$ . Sabendo que as retas ( $r$ ) e ( $s$ ) têm o mesmo traço horizontal ( $A$ ) e que a reta ( $t$ ) tem afastamento igual ao dobro do de ( $r$ ), pede-se construir as projeções do triângulo  $(A)(B)(C)$ . São dadas a projeção vertical  $t'$  e a projeção horizontal  $A$ , informado que o lado  $(B)(C)$  pertence a ( $t$ ).**

Resolução: Conhecidos o vértice  $A'$  e o suporte  $t'$  do lado oposto, é imediato construir o triângulo equilátero  $A'B'C'$ , observando que as denominações de ( $B$ ) e de ( $C$ ) podem ser permutadas.

As retas ( $r$ ) e ( $s$ ), tendo o mesmo traço horizontal, têm que ser concorrentes, pertencendo, por isso, a um mesmo plano frontal (Figura 153).

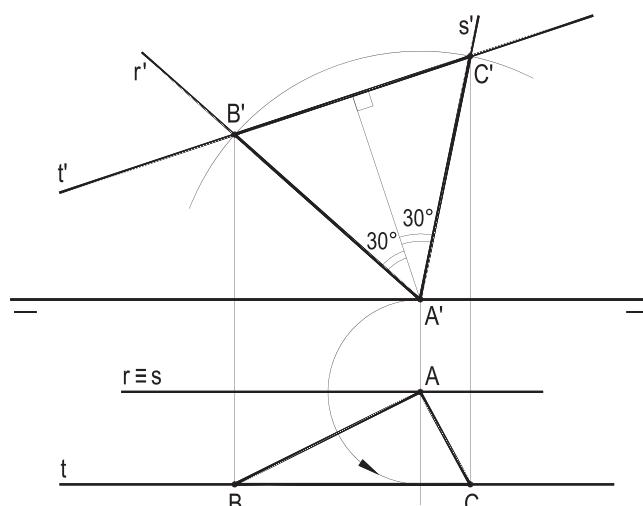


Figura 153

**92 – Os planos de topo ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) formam, entre si,  $60^\circ$  e têm um ponto comum (I) pertencendo, simultaneamente, ao plano frontal ( $\theta$ ) e a ( $\beta_{13}$ ).**

Dados os pontos (A), (B) e (C), respectivamente de ( $\alpha$ ), de ( $\gamma$ ) e de ( $\theta$ ), por suas projeções, pede-se determinar os traços dos três planos em jogo.

Resolução: Como o ângulo dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) vem em V.G. entre seus traços verticais, o arco capaz de  $60^\circ$  para o segmento  $A'B'$  é o lugar geométrico para o ponto  $I'$ , projeção vertical do ponto (I) da interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), o qual, por pertencer ao plano ( $\theta$ ) e a ( $\beta_{13}$ ), tem que ser da fronto-horizontal ( $r$ ), de simples construção (Figura 154). O segundo arco capaz é inútil, para (I) ser de ( $\beta_{13}$ ).

Observe-se que há uma segunda solução ( $\bar{I}'$ ), para o ponto (I) e, portanto, para os planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), não completados na Figura 154.

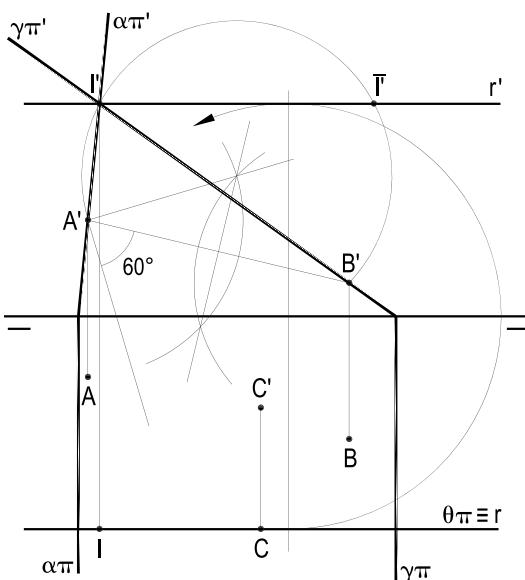


Figura 154

**93 – Do hexágono regular (A)(B)(C)(D)(E)(F) são dadas as projeções do lado horizontal (A)(B), mas não a linha de terra.**

Sabendo que o plano hexágono é projetante em relação a ( $\pi'$ ), que o vértice (E) pertence a ( $\beta_{13}$ ) e que as projeções do hexágono são, em épura, exteriores uma à outra, pede-se desenhar essas projeções e determinar a posição da linha de terra.

Resolução: Pela disposição dos dados, o plano ( $\alpha$ ) do hexágono tem que ser horizontal, o que permite sua construção em V.G. na projeção horizontal, com apenas uma solução, para evitar que suas projeções se penetrem (Figura 155).

A obtenção da linha de terra é simples, por ter que ser a mediatrix do segmento E'E, mas sem orientação definida (Figura 155).

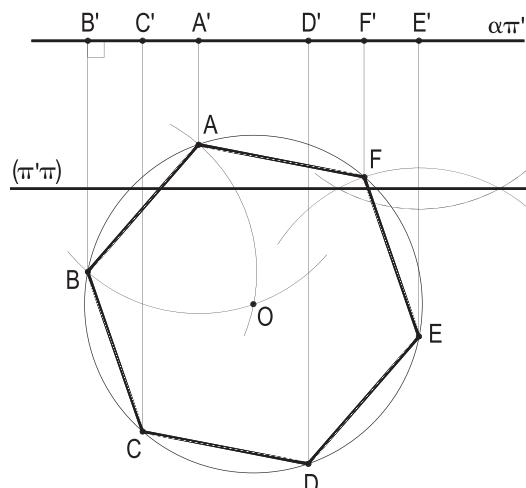


Figura 155

# CAPÍTULO IV

## RETA DE MAIOR DECLIVE

As determinações das retas de maior declive e de maior inclinação de um plano dado e seus problemas inversos são os alvos das questões que integram esta parte.

**94 – O triângulo (A)(B)(C) pertence ao plano ( $\alpha$ ), do qual a reta (E)(F), dada por suas projeções, é de maior declive, estando o lado (A)(B) sobre a reta (r) e o lado (A)(C) sobre a reta (s).**

**Pede-se construir as projeções do triângulo, sabendo que (B)(C) é de perfil e que (A)(C) é igual ao segmento (E)(F), dadas as projeções  $r'$  e  $s'$ , além das de (E)(F).**

Resolução: O plano ( $\alpha$ ), por admitir uma reta de maior declive de perfil, tem que ser paralelo a ( $\pi' \pi$ ). Assim, é simples completar as projeções das retas (r) e (s) com o auxílio da fronto-horizontal (t), por (E).

Como a V.G. k do segmento (E)(F) é de imediata obtenção (*Geometria Descritiva*, número 24.1), assim como sua aplicação sobre a fronto-horizontal (s), tem-se a resolução da questão, que conta com uma segunda solução, não indicada na Figura 156, simétrica da construída, em relação ao vértice (A).

**95 – Determinar as projeções da reta (p), traço do plano ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{24}$ ). ( $\alpha$ ) é definido por sua reta (r), de máxima inclinação, dada por suas projeções.**

Resolução: Imediata a construção de uma frontal (f) de ( $\alpha$ ), conduzida por um ponto (J) qualquer de (r) (Figura 157), por ter que ser tal frontal perpendicular a (r), o ângulo reto entre elas vindo em V.G. na projeção vertical.

Os traços (A) e (B), de (r) e de (f) com ( $\beta_{24}$ ), definem a reta (p), pedida.

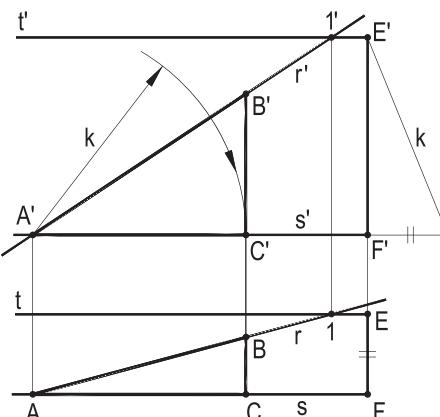


Figura 156

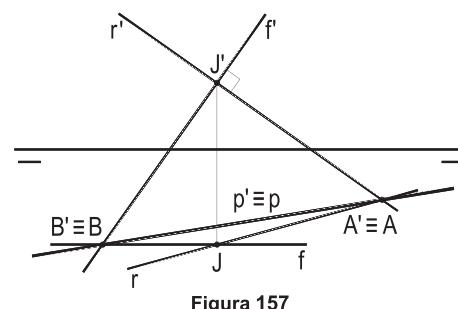


Figura 157

Para cada uma das épuras abaixo, pede-se construir as projeções das retas ( $r$ ), de maior declive, e ( $s$ ), de maior inclinação do plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, ou por duas retas ( $a$ ) e ( $b$ ). Tanto ( $r$ ) quanto ( $s$ ) devem passar pelo ponto ( $A$ ), dado por sua projeção vertical  $A'$ , ou horizontal  $A$  (Figura 163)

Resoluções: Quando necessário, foram utilizadas retas auxiliares de ( $\alpha$ ).

96

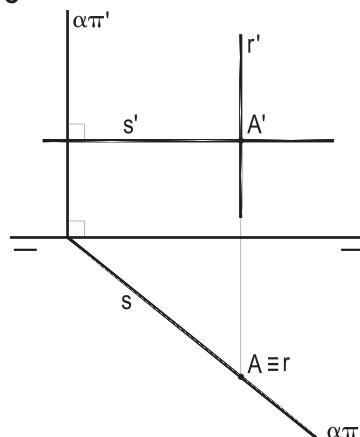


Figura 158

97

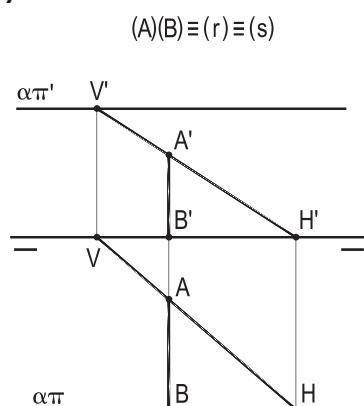


Figura 159

98

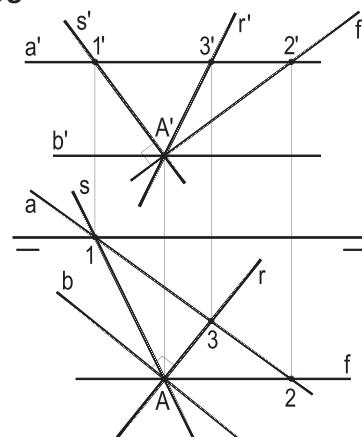


Figura 160

99

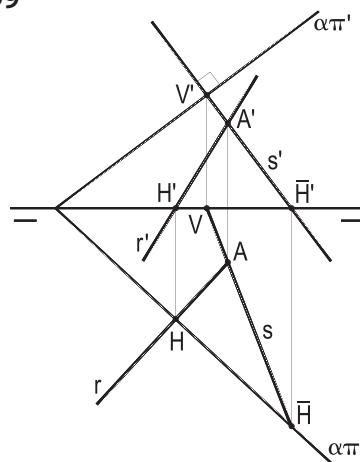


Figura 161

100

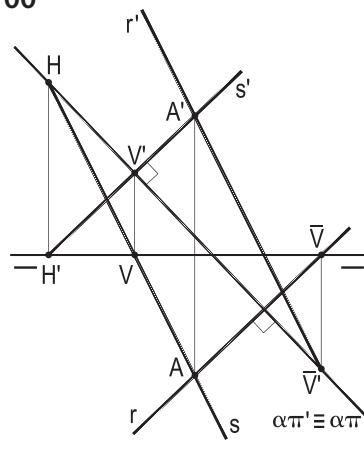


Figura 162

101

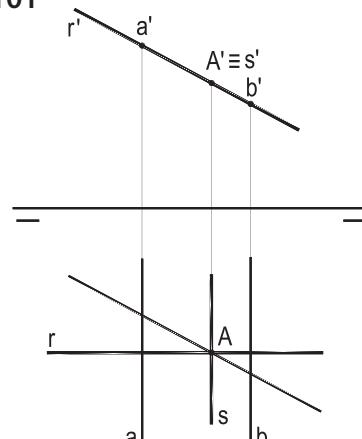


Figura 163

102

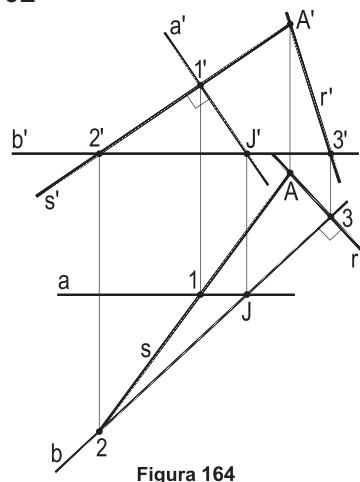


Figura 164

103

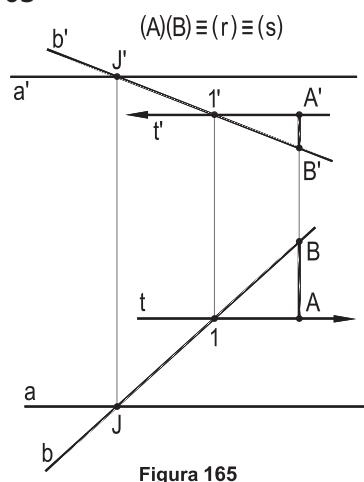


Figura 165

104

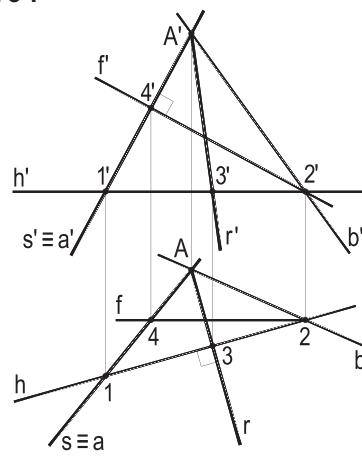


Figura 166

Em todos os casos abaixo, a reta ( $r$ ) dada por suas duas projeções, ou pelas projeções de dois pontos seus ( $E$  e  $F$ ), é de maior declive de um plano ( $\alpha$ ), que se pede determinar, por seus traços, ou por duas de suas retas ( $a$ ) e ( $b$ ), que não a dada.

Resoluções: Quando necessário, foi utilizada uma reta auxiliar de ( $\alpha$ ).

105

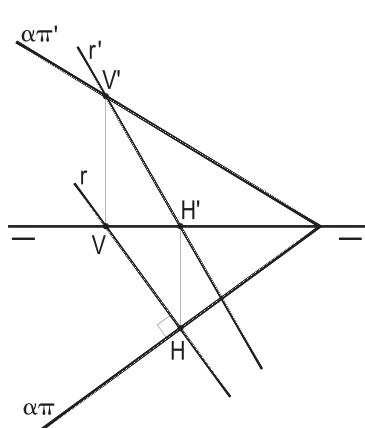


Figura 167

106

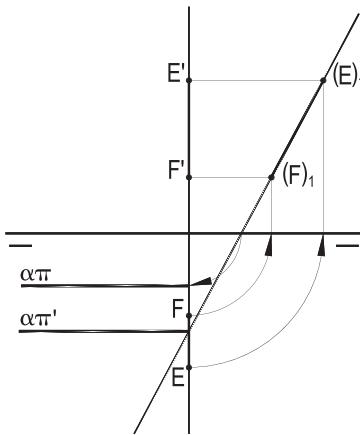


Figura 168

107

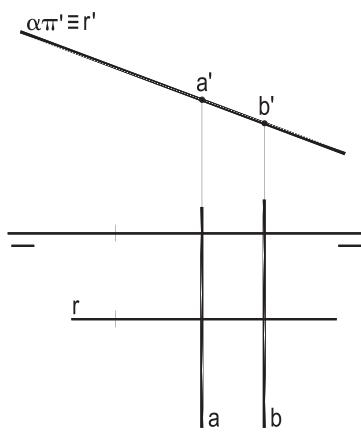


Figura 169

108

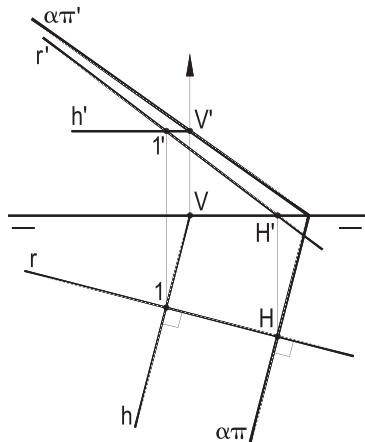


Figura 170

109

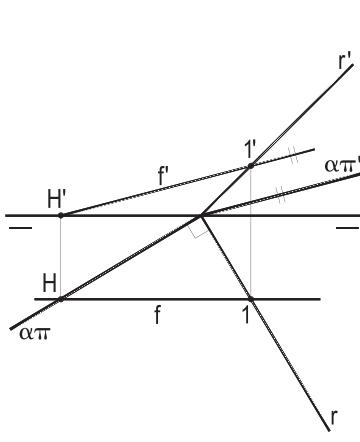


Figura 171

110

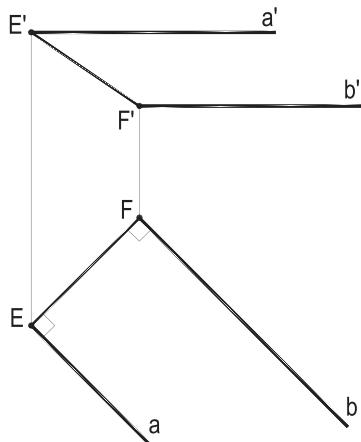


Figura 172

111

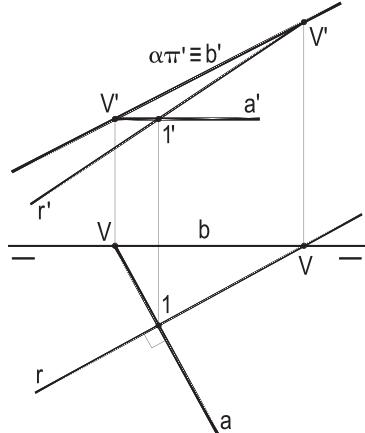


Figura 173

112

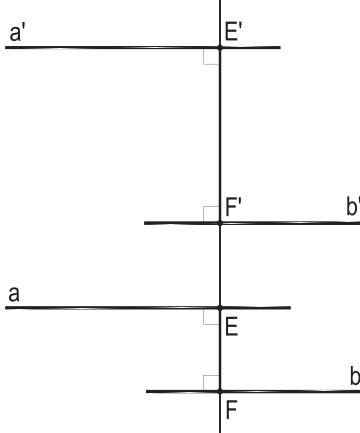


Figura 174

113

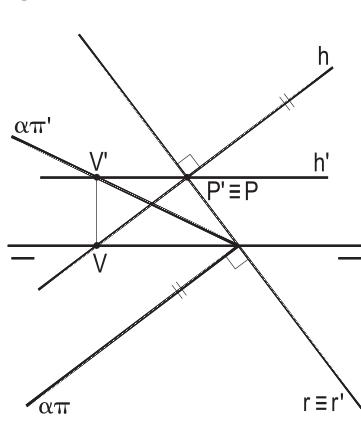
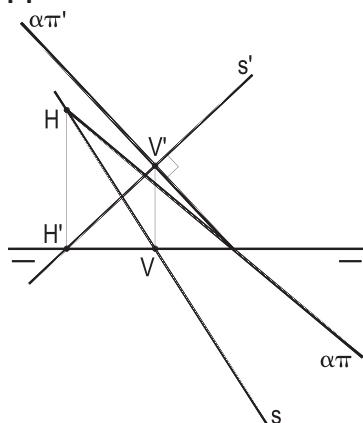


Figura 175

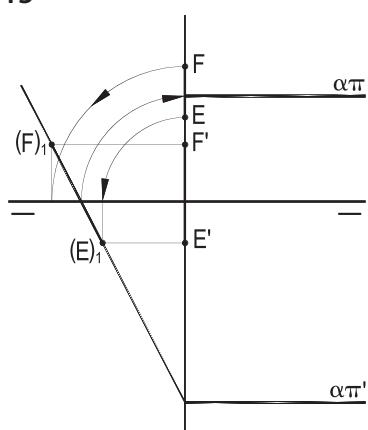
A reta ( $s$ ), dada por suas projeções, ou por dois de seus pontos ( $E$ ) e ( $F$ ), é de maior inclinação de um plano ( $\alpha\pi$ ), que se pede definir, seja por seus traços, seja por duas de suas retas ( $a$ ) e ( $b$ ), que não a dada, para cada um dos casos seguintes.

Resoluções: Quando necessário, foi utilizada uma reta auxiliar de ( $\alpha\pi$ ).

114



115



116

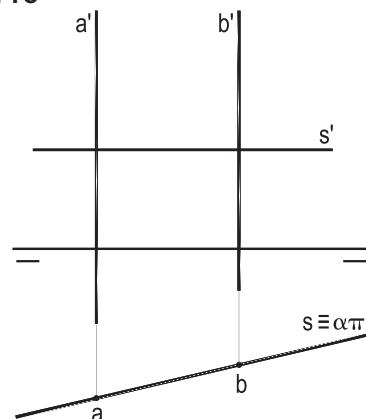
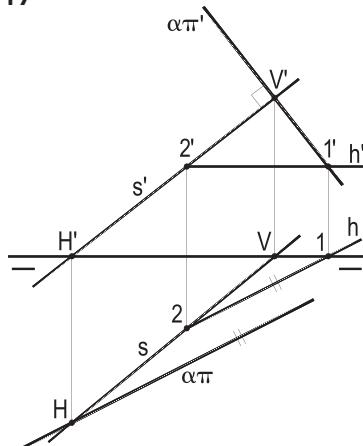


Figura 176

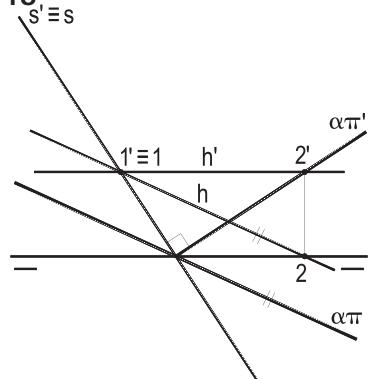
Figura 177

Figura 178

117



118



119

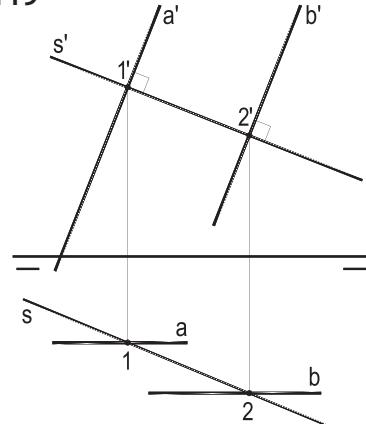
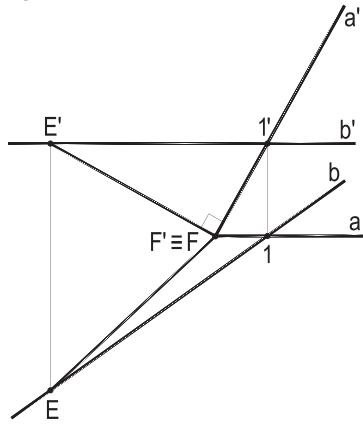


Figura 179

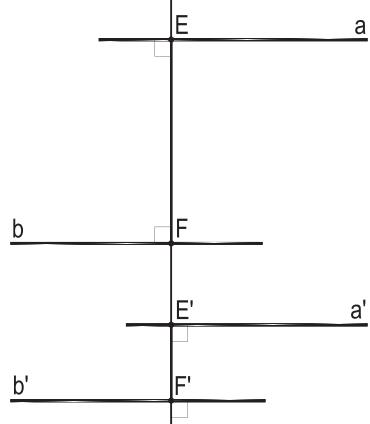
Figura 180

Figura 181

120



121



122

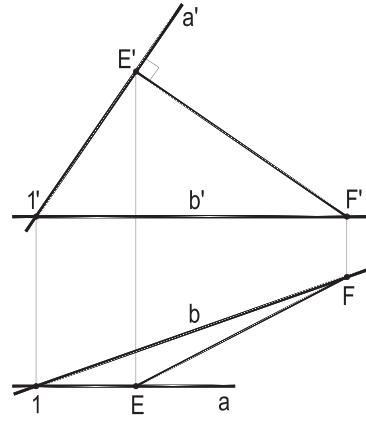


Figura 182

Figura 183

Figura 184

**123 – O segmento dado ( $E(F)$ ) pertence a uma reta ( $r$ ), de máximo declive do plano ( $\alpha$ ).**

Pede-se construir as projeções da mediatrix ( $m$ ) do segmento, também, como ele, pertencente ao plano ( $\alpha$ ). Discutir, conforme a natureza de ( $r$ ).

Resolução: Sendo qualquer a reta ( $r$ ) de maior declive que contém o segmento ( $E(F)$ ), a mediatrix ( $m$ ) há de ser, para pertencer a ( $\alpha$ ), a horizontal que passa por seu ponto médio ( $M$ ) e que lhe é perpendicular (Figuras 185 e 186). Fosse ( $r$ ) de maior inclinação, sua mediatrix ( $m$ ) seria uma frontal (Figuras 187 e 188).

Quando a reta ( $r$ ), suporte do segmento ( $E(F)$ ), é de perfil, porque o plano que ela define é paralelo, ou pertencente a ( $\pi'\pi$ ), a mediatrix ( $m$ ) de ( $E(F)$ ) tem que ser fronto-horizontais (Figuras 189 e 190).

E quando ( $E(F)$ , de maior declive, é frontal, o plano ( $\alpha$ ) é de topo e, então, sua mediatrix ( $m$ ) é de topo (Figuras 191 e 192). Fosse ( $E(F)$ ) horizontal e de maior inclinação, analogamente, ( $\alpha$ ) e ( $m$ ) seriam verticais.

É claro que não podem ser de maior declive retas horizontais, fronto-horizontais e de topo, por serem paralelas a ( $\pi$ ), assim como não podem ser de maior inclinação as retas frontais, fronto-horizontais e verticais.

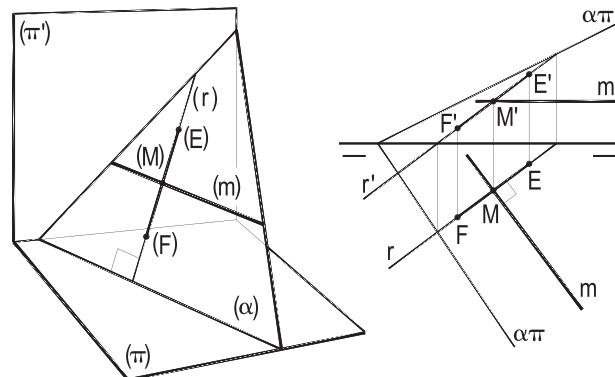


Figura 185

Figura 186

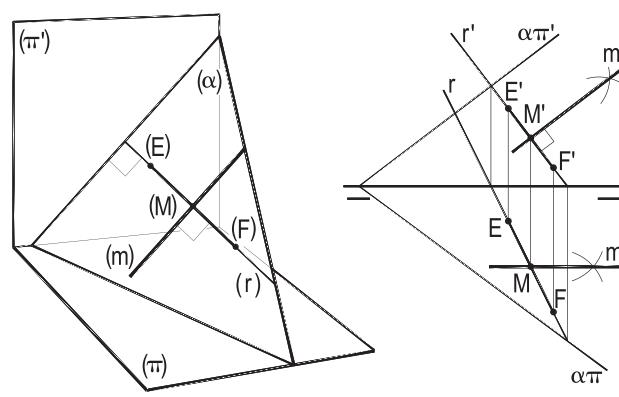


Figura 187

Figura 188

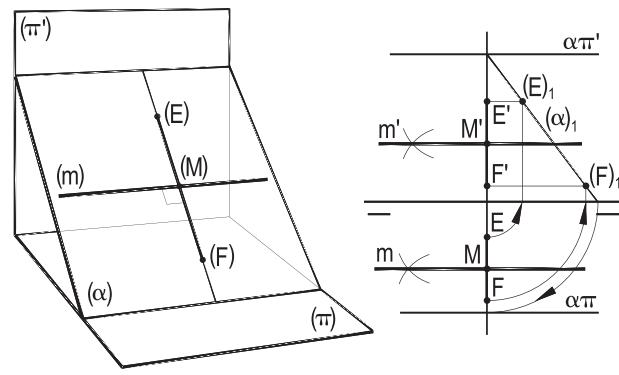


Figura 189

Figura 190

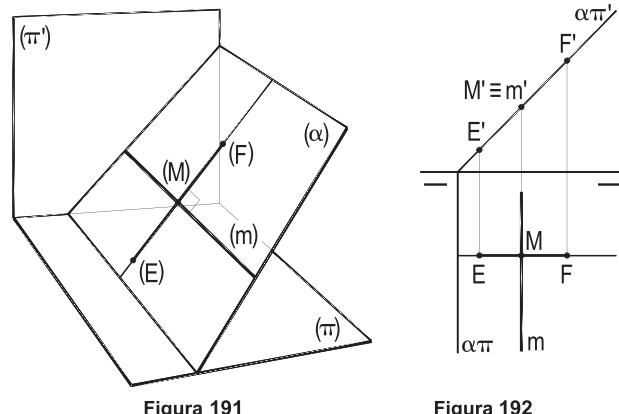


Figura 191

Figura 192

**124 – Dadas as projeções dos pontos (A) e (B), pede-se construir as projeções do retângulo (A)(B)(C)(D) situado no plano ( $\alpha$ ), definido pela reta (A)(B) de maior declive, sabendo que seu vértice (D) pertence a ( $\beta_{24}$ ).**

Resolução: Os lados (A)(D) e (B)(C) do retângulo pedido, por serem perpendiculares a (A)(B), têm que ser horizontais, de imediata construção (Figura 193). A obtenção do vértice (D), traço da horizontal (A)(D) com ( $\beta_{24}$ ), proporciona, por paralelas, completar as projeções de (A)(B)(C)(D).

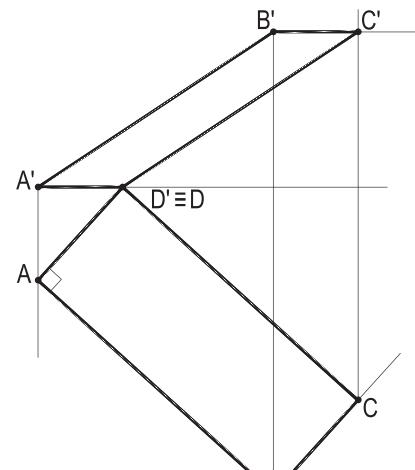


Figura 193

**125 – Desenhar as projeções do triângulo retângulo (A)(B)(C), sabendo que seu cateto (A)(B) é de maior inclinação de seu plano e que sua hipotenusa (B)(C) tem seu extremo (C) no plano ( $\gamma$ ). Dados A', A, B', B,  $\gamma\pi'$  e  $\gamma\pi$ .**

Resolução: O segundo cateto (A)(C) há de ser frontal, perpendicular ao dado (A)(B), e o terceiro vértice (C) será a interseção dessa frontal (f) (Figura 194) com o plano dado ( $\gamma$ ).

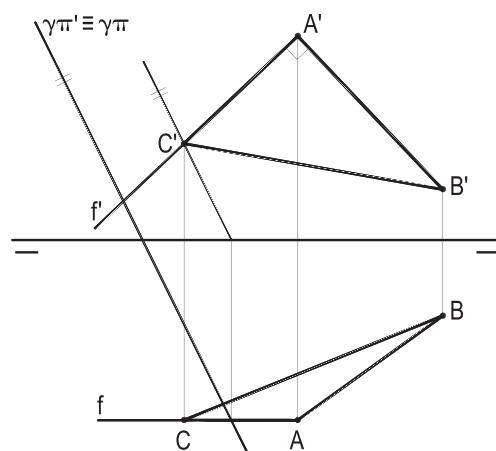


Figura 194

**126 – Dadas as projeções do segmento (B)(C), de máximo declive do plano ( $\alpha$ ), pede-se construir as projeções do triângulo isósceles (A)(B)(C), de ( $\alpha$ ), sabendo que (B)(C) é a sua base e que seu baricentro (G) pertence a ( $\beta_{13}$ ).**

Resolução: A altura, e também mediana, de (A)(B)(C) é a horizontal perpendicular à base (B)(C), traçada por seu ponto médio (M) (Figura 195).

Obtido o baricentro (G), traço dessa horizontal com ( $\beta_{13}$ ), basta triplicar o segmento (M)(G), para obter o vértice (A) (Geometria Plana, número 147), e, então, completar as projeções do triângulo.

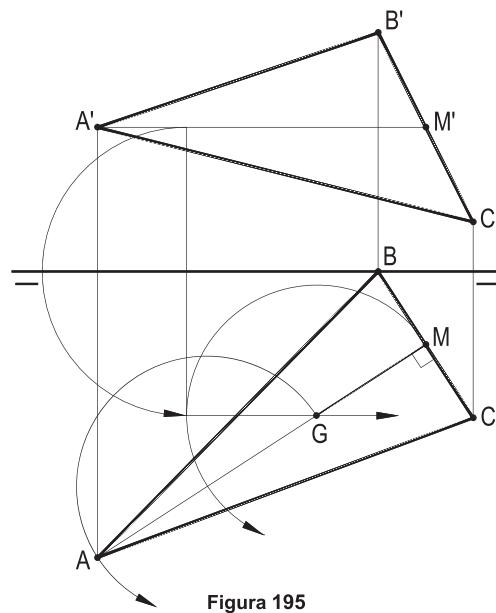


Figura 195

127 – Construir as projeções do losango (A)(B)(C)(D), sabendo que a diagonal (A)(C) é de maior inclinação de seu plano e que o lado (A)(B) é horizontal.

São dadas as projeções dos vértices (A) e (C).

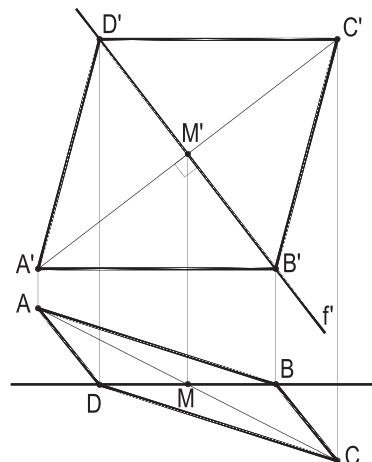
Resolução: Como as diagonais dos losangos são perpendiculares e cortam-se mutuamente ao meio, conduzindo-se pelo ponto (M), médio de (A)(C), a frontal (f) a ele perpendicular, fica bem simples obter o vértice (B), na horizontal traçada por (A), e completar, com paralelas, as projeções pedidas (Figura 196).

128 – Sendo  $(r)$  uma reta de maior declive do plano  $(\alpha)$ , pede-se construir a projeção horizontal de  $r$  e o traço horizontal de  $(\alpha)$ . Dados  $r'$  e  $\alpha\pi'$ .

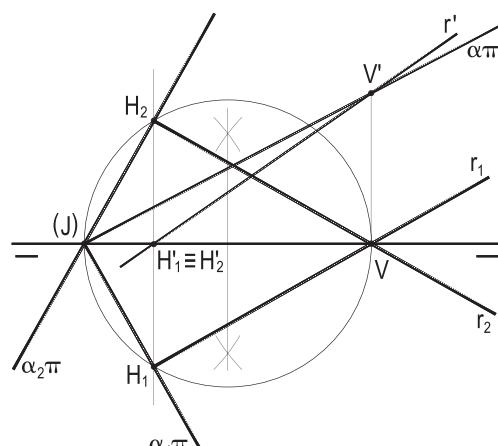
Resolução: Por terem que ser, em épura, perpendiculares a projeção horizontal da reta ( $r$ ) e o traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano ( $\alpha$ ), a construção do arco capaz de  $90^\circ$  para o segmento ( $J)V$  proporciona a obtenção da projeção horizontal do ponto ( $H$ ), traço horizontal de ( $r$ ), na linha de chamada de  $H'$ , notando-se, para as posições dadas, a produção de duas soluções  $H_1$  e  $H_2$  (Figura 197) e, então, de  $r_1$ , de  $r_2$ , de  $\alpha_1\pi$  e de  $\alpha_2\pi$ .

**129** – Construir as projeções do trapézio retângulo (A)(B)(C)(D), sabendo que (A)(B), de maior inclinação do plano do trapézio, é o lado perpendicular às bases. (C)(D) pertence ao plano das retas (a) e (b). Dados: A', A, B', B, a', a, b' e b.

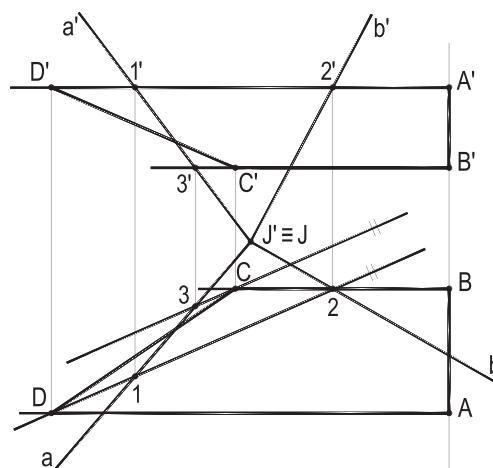
Resolução: Por ser de perfil (A)(B), o plano do trapézio é paralelo a ( $\pi'\pi$ ) e, por isso, as fronto-horizontais traçadas por (A) e por (B) hão de seccionar o plano das retas (a) e (b), produzindo os vértices (C) e (D), Figura 198.



**Figura 196**



**Figura 197**



**Figura 198**

**130 – O triângulo (A)(B)(C), do plano ( $\alpha$ ), é retângulo em (A).**

Dadas as projeções dos pontos (B), (C) e (J) e sabendo que a reta (A)(C) é de maior declive de ( $\alpha$ ) e que a reta (J)(A) é paralela a ( $\beta_{24}$ ), pede-se construir as projeções do triângulo (A)(B)(C) e as projeções do triângulo que (J) forma com as duas posições possíveis para o vértice (A).

Feito isso, sabendo que esse ponto (A) pertence a ( $\beta_{13}$ ), no primeiro diedro, determine a posição da linha de terra e construa os traços do plano ( $\gamma$ ), que (J) forma com os dois pontos que servem de solução ao vértice (A).

Resolução: Para que sejam perpendiculares as projeções horizontais de (A)(C), de maior declive, e de (A)(B), horizontal, A deve pertencer ao arco capaz de  $90^\circ$  para o segmento BC. E para que seja paralela a ( $\beta_{24}$ ), a reta (J)(A) deve ter, para todos os seus pontos, a mesma soma de cota e afastamento (*Geometria Descritiva*, número 29). Assim, o traçado da reta auxiliar t proporciona as duas soluções  $A_1$  e  $A_2$  (Figura 199).

O plano ( $\gamma$ ), formado por (J), ( $A_1$ ) e ( $A_2$ ), é, então, paralelo a ( $\pi'\pi$ ) e, mais, paralelo a ( $\beta_{24}$ ) (*Geometria Descritiva*, número 68.1), o que dá pronta solução à construção da linha de terra e de seus traços (Figura 199).

**131 – Dadas as projeções do ponto (A) e da reta (r), à qual pertence o ponto (B), sabendo que a reta (A)(B) é de maior declive e de maior inclinação do plano ( $\alpha$ ), pede-se determinar a posição da linha de terra e construir os traços de ( $\alpha$ ). O traço vertical da reta (A)(B) pertence à reta (s), cuja projeção vertical s' é dada.**

Resolução: Para ser simultaneamente de maior declive e de maior inclinação, (A)(B) tem que ser de perfil e ( $\alpha$ ) paralelo a ( $\pi'\pi$ ) (Figura 200).

Com as paralelas auxiliares, obtém-se a linha de terra e os traços de ( $\alpha$ ).

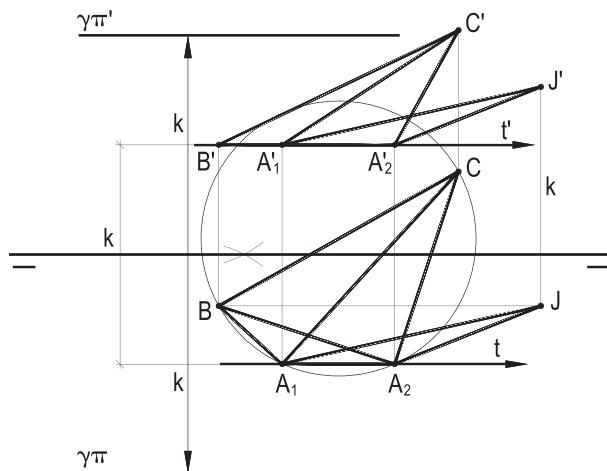


Figura 199

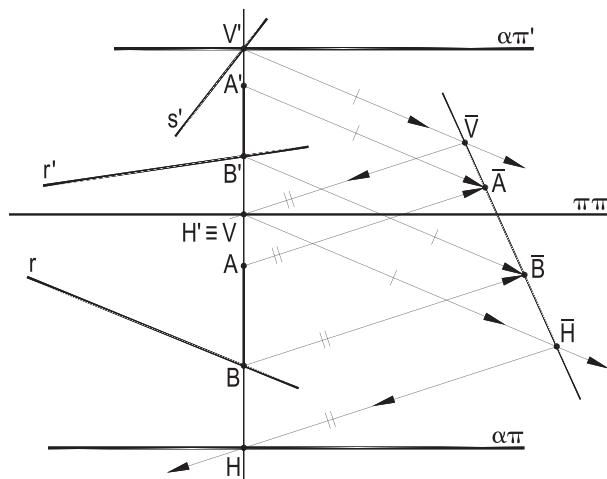


Figura 200

**132**– Construir as projeções do losango (A)(B)(C)(D), cujos ângulos internos ( $\widehat{A}$ ) e ( $\widehat{C}$ ) valem  $60^\circ$ , sabendo que a diagonal (B)(D), dada por suas projeções, é uma reta de maior inclinação do plano do losango.

Resolução: Sendo (B)(D), de perfil, uma reta de maior inclinação, o plano do losango é paralelo à linha de terra e, por isso, a diagonal (A)(C) tem que ser fronto-horizontal.

Obtida a V.G.  $\overline{BD}$  da diagonal (B)(D) (*Geometria Descritiva*, número 24.1), uma breve construção geométrica auxiliar proporciona a V.G.  $\overline{ABD}$  da metade do losango, trazendo, por sua altura  $D/2$ , o valor da semidiagonal (A)(C) e as projeções dos dois últimos vértices, cuja ordem foi arbitrada (Figura 201).

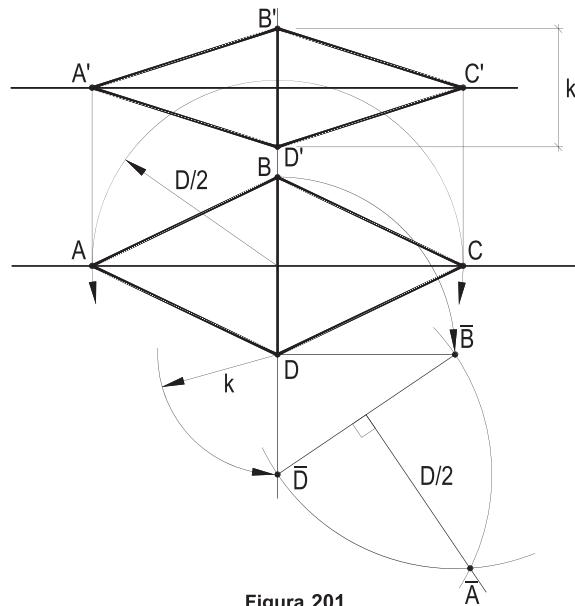
133 – (A)(C) e (R)(T) são, respectivamente, retas de maior declive dos planos dos triângulos (A)(B)(C) e (R)(S)(T), retângulos em (A) e em (T), apoiados por seus vértices (A) e (T) numa reta vertical.

Desenhe as projeções dos dois triângulos, a partir das dadas B', B, C', C, R', R, S' e S.

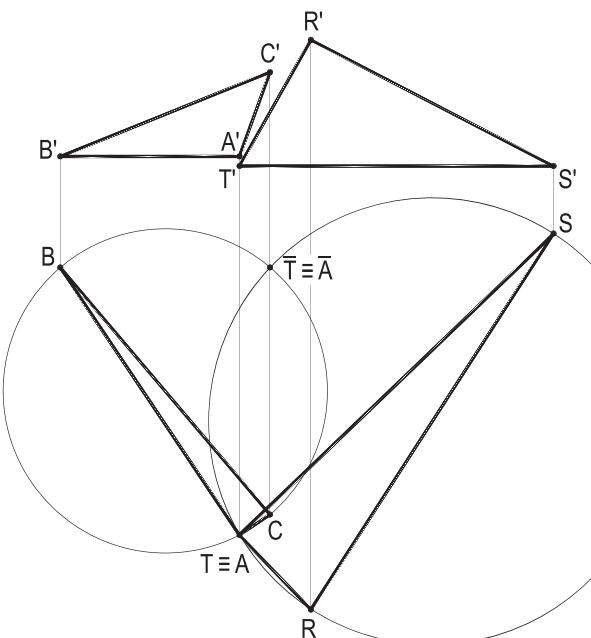
Resolução: As projeções horizontais dos dois triângulos, por serem também triângulos retângulos, em A e em T, deverão se inscrever nas semicircunferências de diâmetros BC e RS.

E, já que (A) e (T) pertencem a uma reta vertical, têm que coincidir suas projeções horizontais que, então, hão de ser cada um dos pontos de corte daquelas semicircunferências.

Há, por isso (Figura 202), duas soluções, das quais a segunda, correspondente aos pontos  $\bar{A} \equiv \bar{T}$ , foi apenas indicada, mas não completada.



**Figura 201**



**Figura 202**

**134 – Determinar as projeções do retângulo (A)(B)(C)(D) pertencente a um plano ( $\alpha$ ), do qual o lado (A)(B) é de maior declive, sabendo que o vértice (B) pertence a ( $\pi'$ ), com abscissa negativa.**

São dadas as projeções dos vértices (A) e (C).

Resolução: Sendo (A)(B) de maior declive, o lado (B)(C), a ele perpendicular, há de ser horizontal, o que proporciona, com o arco capaz de  $90^\circ$  para a projeção horizontal AC, a posição de B e, por paralelas, a complementação do retângulo (Figura 203).

**135 – Construir as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), sabendo que (A)(B), de maior declive de seu plano, dado pelas projeções A', A e B', forma  $30^\circ$  com ( $\pi$ ). O quadrado situa-se inteiramente num diedro, com abscissa não superior a de (A).**

Resolução: Sendo (A)(B) de maior declive e de perfil, o plano do quadrado há de ser paralelo à linha de terra e, por isso, um rebatimento lateral permite obter a V.G. a de seu lado (A)(B), o que proporciona, com as fronto-horizontais, por (A) e por (B), completar as projeções do quadrado (Figura 204).

**136 – Desenhar as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), cujo lado frontal (A)(B) é de maior declive de seu plano. (A), (B) e (C) pertencem, respectivamente, a ( $\pi$ ), à reta (r) e a ( $\pi'$ ), (B) no primeiro diedro. Determine, também, a projeção vertical de (r), paralela a ( $\beta_{13}$ ). Dadas as projeções A e r.**

Resolução: A frontal (A)(B), de maior declive, obriga o plano do quadrado ser de topo. E, se (C)  $\in$  ( $\pi'$ ), (B)(C) sendo de topo, o afastamento de (B), conhecido, mede o lado do quadrado, cuja construção é, então, imediata. Enfim,  $r'$  se obtém pelo uso da diferença  $k$  entre cotas e entre afastamentos de dois pontos quaisquer de (r) (Figura 205).

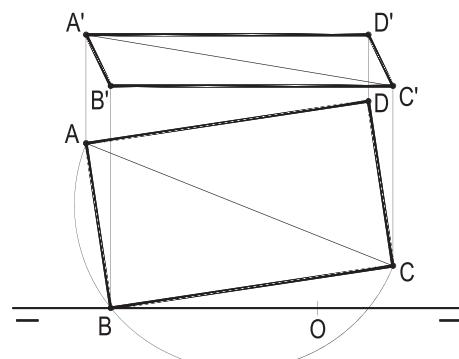


Figura 203

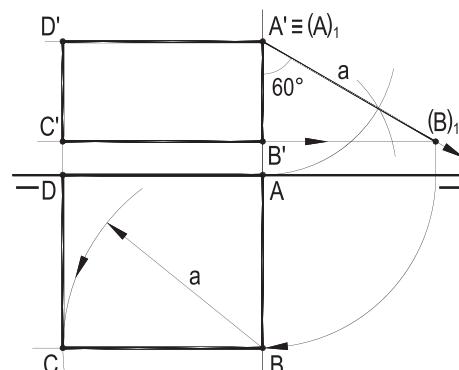


Figura 204

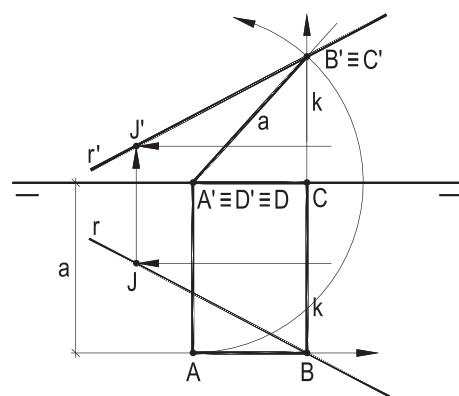


Figura 205

**137 – Construir as projeções do triângulo isósceles (A)(B)(C), pertencente a um plano, do qual a base (B)(C) é de maior inclinação, sabendo que (A) pertence a ( $\beta_{24}$ ) e que o lado (A)(C) é de perfil, dadas as projeções A', B' e B.**

Resolução: Se (B)(C) é de maior inclinação, a altura (A)(M) tem que ser frontal e o ângulo reto em (M) virá em V.G. na projeção vertical. Se (A)(C) é de perfil, a abscissa de (M) há de ser igual à média aritmética entre as de (B) e de (A) (Figura 206), o que proporciona obter M' na circunferência de diâmetro A'B' e, a partir de M', C' e C (Figura 207). Há uma segunda solução para M', apenas indicada pelo ponto  $\bar{M}'$ .

E como essa altura é também mediana, sendo (A)(C) de perfil, a abscissa de (M) há de ser igual à média aritmética entre as de (B) e de (A) (Figura 206), o que proporciona obter M' na circunferência de diâmetro A'B' e, a partir de M', C' e C (Figura 207). Há uma segunda solução para M', apenas indicada pelo ponto  $\bar{M}'$ .

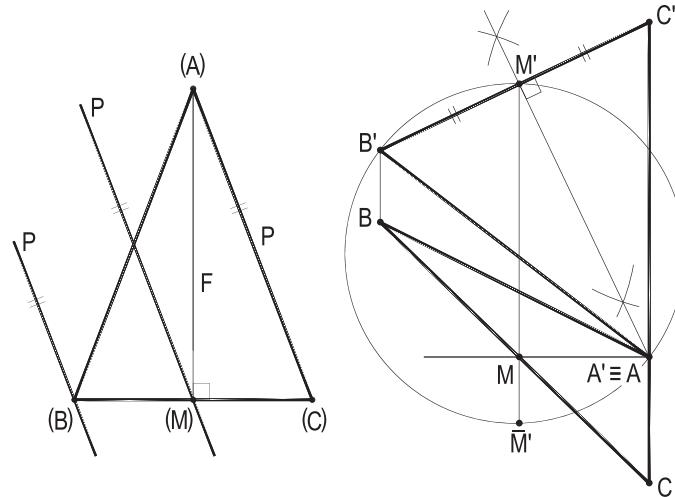


Figura 206

Figura 207

**138 – Construir as projeções do hexágono regular (A)(B)(C)(D)(E)(F), conhecendo as projeções de sua diagonal (A)(C), que é de maior inclinação de seu plano.**

Resolução: A diagonal (A)(C) de perfil implica em que o plano do hexágono seja paralelo à linha de terra e que, assim, seus lados (C)(D) e (A)(F) e sua diagonal (B)(E) sejam fronto-horizontais.

Uma simples construção geométrica (Figura 208) proporciona a V.G. do lado  $a$  do hexágono, a partir da obtenção da V.G.  $\bar{ABC}$  do triângulo equilátero (A)(B)(C), inscrito no mesmo círculo do hexágono.

Há uma segunda solução, correspondendo à colocação do centro (O) do hexágono à direita de (A)(C), não incluída na Figura 208.

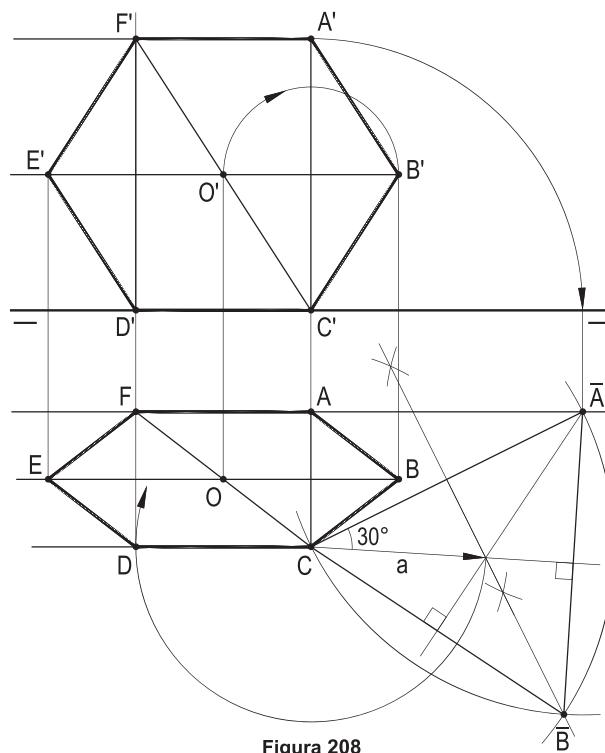


Figura 208

**139 – Duas retas ( $r$ ) e ( $s$ ), pertencentes a um plano de topo, formam com a reta ( $a$ ), respectivamente, os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ). Sendo dadas as duas projeções da reta ( $a$ ) e do ponto ( $J$ ), comum às três retas, bem como a projeção vertical da reta ( $r$ ), pede-se completar as projeções de ( $r$ ) e de ( $s$ ), sabendo que elas são retas de maior declive respectivamente dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ).**

Resolução: Por pertencerem a um mesmo plano de topo, as retas ( $r$ ) e ( $s$ ) têm projeções verticais coincidentes. E por serem de maior declive dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), ( $r$ ) e ( $s$ ) devem ter suas projeções horizontais perpendiculares a horizontais desses planos. Assim, conduzidas, por um ponto ( $E$ ), qualquer, de ( $a$ ), as horizontais ( $h_1$ ) e ( $h_2$ ), cada uma de um dos planos, hão de ser, respectivamente, perpendiculares a  $r$  e a  $s$ , que, então, são conseguidas com a utilização da circunferência de diâmetro  $EJ$  (Figura 209), na projeção horizontal.

Observe-se que ( $r$ ) e ( $s$ ) podem, naturalmente, ser permutadas.

**140 – Construir as projeções da reta ( $r$ ), corrente, no ponto ( $A$ ), com a reta ( $s$ ), sabendo que ( $r$ ) é de máxima inclinação desse plano, além de ser paralela ao bissetor par. Dados  $s'$ ,  $s$ ,  $A'$  e  $A$ .**

Resolução: Para aproveitar o ângulo reto, em projeção vertical, entre ( $r$ ), de maior inclinação e uma frontal ( $f$ ) de seu plano, traçada por um ponto ( $J$ ), qualquer de ( $s$ ), utilizemos o valor  $k$  do segmento  $A'A$ , para obter os pontos (1) e (2) que asseguram as projeções paralelas das retas ( $r_1$ ) e ( $r_2$ ) (Figura 210), e por isso (*Geometria Descritiva*, número 29), paralelas a ( $\beta_{24}$ ), dando, assim, duas soluções, para as posições dadas, das retas pedidas.

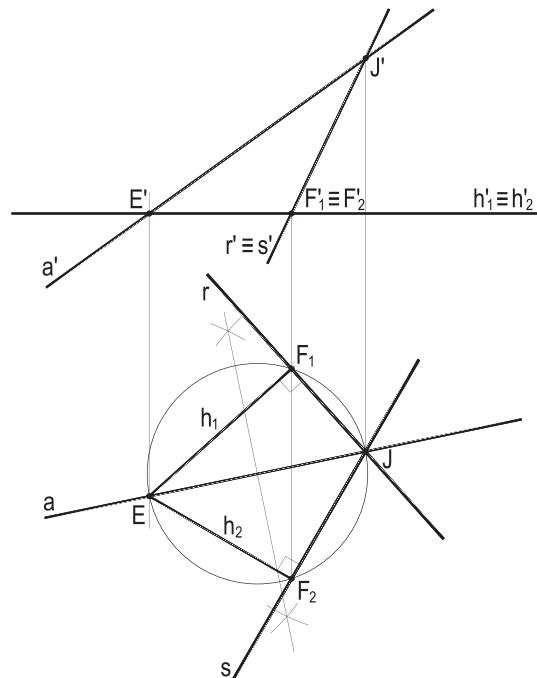


Figura 209

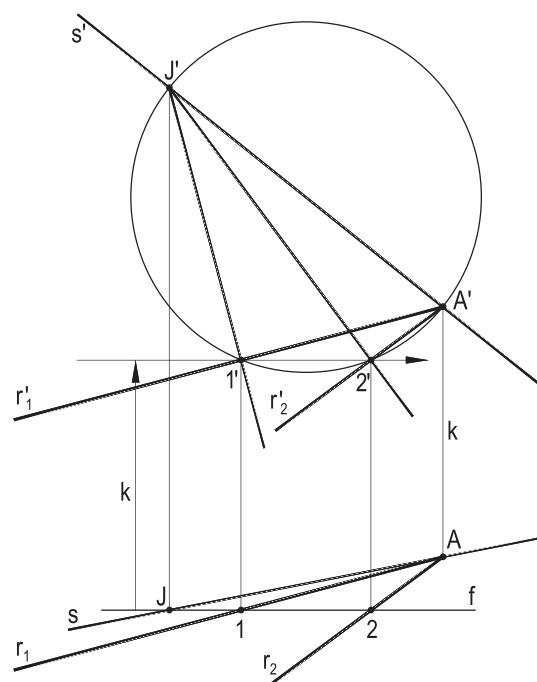


Figura 210

**141 – Um círculo de diâmetro (A)(B), (A) em ( $\pi'$ ) e (B) em ( $\pi$ ), pertence ao plano ( $\alpha$ ), tangenciando seu traço horizontal  $\alpha\pi$  em (B).**

Sendo  $p'$  a projeção vertical da reta (p), interseção de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{24}$ ), e sabendo que a reta (B)(K), não pertencente a ( $\alpha$ ), é de perfil, pede-se determinar os traços de ( $\alpha$ ) e as projeções de (A)(B). São dadas as projeções  $p'$ , A e K'.

Resolução: Por terem que ser perpendiculares o diâmetro (A)(B) e a tangente (t) ao círculo, em (B) (Geometria Plana, número 114), já que (A)(B) é de maior declive de ( $\alpha$ ), (t) tem que ser uma horizontal de ( $\alpha$ ) e, por conter (B), de cota nula, (t) há de ser o próprio traço horizontal  $\alpha\pi$ . E como se conhece o traço (J) de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ) e a abscissa de (B) – a mesma que a do ponto (K) –, a construção da circunferência de diâmetro (J)A e a linha de chamada de (K) definem a posição de B, com duas opções,  $B_1$  e  $B_2$ , e, em consequência, as projeções de (A)(B) e os traços de ( $\alpha$ ).

Só foi completada uma solução na Figura 212.

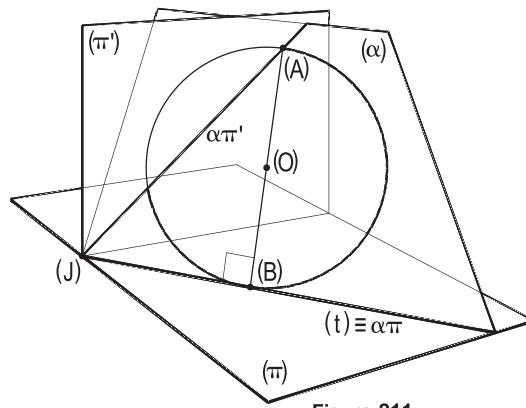


Figura 211

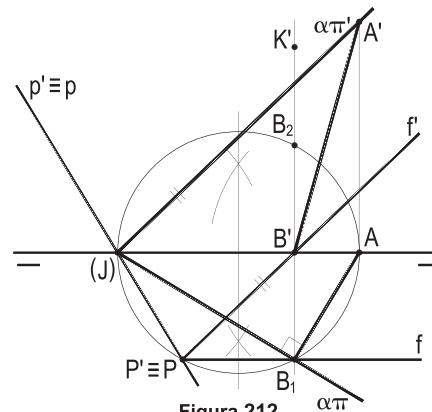


Figura 212

**142 – As retas (t) e (n) são, respectivamente, a tangente e a normal a uma curva convexa (c) do plano ( $\alpha$ ), sendo (T) o ponto de tangência. Sabendo que (n) é de maior inclinação de ( $\alpha$ ), que (T) tem cota máxima e que (t) e (n) passam respectivamente pelos pontos (M) e (N), pede-se desenhar as projeções de (t) e (n) e os traços de ( $\alpha$ ).**

**São dadas as projeções dos pontos (M) e (N).**

Resolução: Sendo a normal (n) de maior inclinação de ( $\alpha$ ), (t), sendo perpendicular a (n), em (T), há de ser frontal. E (T) é de imediata obtenção, por ter cota máxima.

Com isso (Figura 213) são simples as construções de (t) e (n), bem como os traços de ( $\alpha$ ), aproveitando os traços horizontais de (t) e de (n), o traço vertical de (M)(N) e a frontal (t).

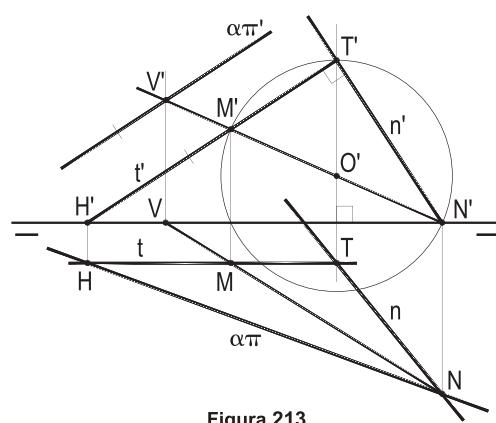


Figura 213

**143 – (I) e (E) são pés das bissetrizes interna e externa do vértice (A) do triângulo (A)(B)(C).**

Sabendo que (A)(I) é de maior declive do plano do triângulo e que esse plano seciona o das retas (r) e (s) segundo uma horizontal, pede-se determinar as projeções do ponto (A).

São dadas as projeções de (I), (E), (r) e (s).

Resolução: Sabe-se (*Geometria Plana*, número 12.3) que as bissetrizes interna e externa relativas a um vértice de um triângulo são perpendiculares.

Assim, sendo (A)(I) de maior declive, (A)(E) tem que ser horizontal e paralela às horizontais do plano das retas (r) e (s) (Figura 214), como a reta (h).

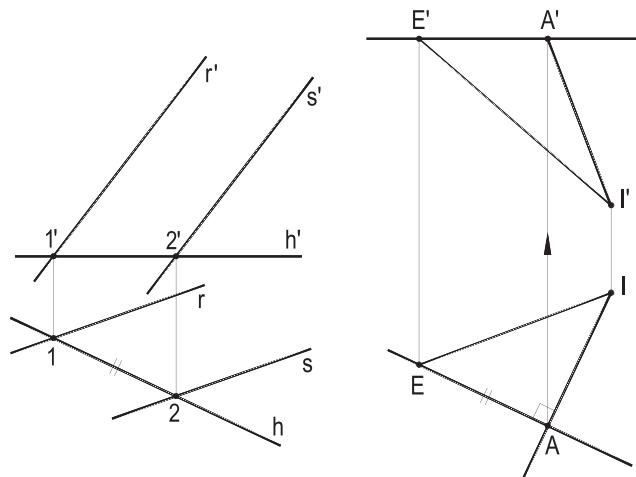


Figura 214

**144 – Duas circunferências de centros ( $O_1$ ) e ( $O_2$ ), pertencentes ao plano ( $\alpha$ ), são ortogonais.**

Sendo (A) um dos pontos comuns a elas, pede-se construir os traços de ( $\alpha$ ), sabendo que a reta ( $O_1$ )(A) é de máximo declive desse plano e que o ponto (A) pertence ao plano das retas (a) e (b).

São dadas as projeções dos pontos ( $O_1$ ) e ( $O_2$ ) e das retas (a) e (b).

Resolução: Por serem ortogonais em (A) os raios ( $O_1$ )(A) e ( $O_2$ )(A) das duas circunferências têm que ser perpendiculares (*Geometria Plana*, número 122.2).

E, já que ( $O_1$ )(A) é de maior declive de ( $\alpha$ ), ( $O_2$ )(A) há de ser horizontal.

A solução é simplificada, porque (a) e (b) definem um plano vertical (Figura 215), havendo, então, uma segunda solução ( $\bar{A}$ ), para o ponto (A), não completada na épura.

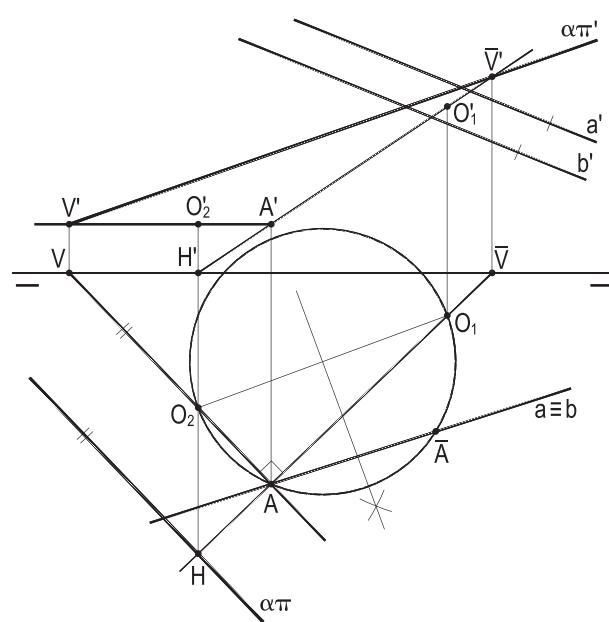


Figura 215

# CAPÍTULO V

## INTERSEÇÕES

Com várias dezenas de problemas propostos e resolvidos, este capítulo dedica-se às interseções de retas com planos e entre planos.

- 145 – Desenhar as projeções do trapézio (A)(B)(C)(D), cujas bases (A)(B) e (C)(D) são paralelas à reta (r), traçadas pelos pontos (P) e (Q) de ( $\pi'\pi$ ), todos dados por suas projeções, sabendo que os lados (A)(D) e (B)(C) pertencem, respectivamente, aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), dados por seus traços.**

Resolução: As retas ( $r_1$ ) e ( $r_2$ ), paralelas a (r) e conduzidas pelos pontos (P) e (Q), cortam ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), produzindo os vértices do trapézio pedido (Figura 216). (A) e (D) são obtidos com auxílio das retas ( $s_1$ ) e ( $s_2$ ) de ( $\alpha$ ), e (B) e (C) são imediatos, por ser ( $\beta$ ) projetante.

- 146 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que o lado (A)(B) está sobre a reta (r), (A) em ( $\alpha$ ) e (B) em ( $\beta$ ), e que (C) equidista de (A) e de (B), pertencendo aos dois bissetores. Dados  $r'$ , r,  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$ ,  $\beta\pi'$  e  $\beta\pi$ .**

Resolução: O plano auxiliar ( $\theta$ ) proporciona os traços (A) e (B) de (r) com os planos dados. E, por ser (A)(B) fronto-horizontal, (C) é de imediata obtenção, na linha de terra (Figura 217), com abscissa igual à média aritmética das de (A) e (B).

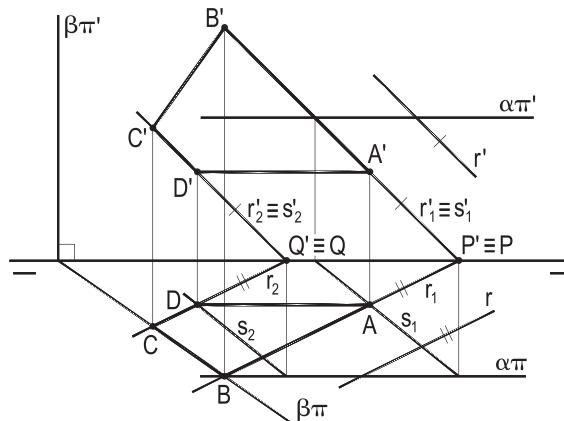


Figura 216

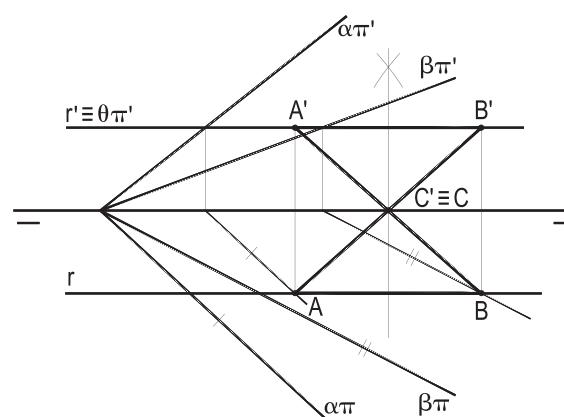


Figura 217

Em cada um dos exemplos abaixo, pede-se determinar as projeções do ponto ( $J$ ), interseção da reta dada ( $t$ ) com o plano ( $\alpha$ ), dado por sua reta ( $r$ ), de maior declive, ou por sua reta ( $A$ )( $B$ ), de maior inclinação.

Dadas as projeções das retas em questão.

Resoluções: Sempre utilizada uma reta, de ( $\alpha$ ), perpendicular à dada, para compor o plano ( $\alpha$ ).

147

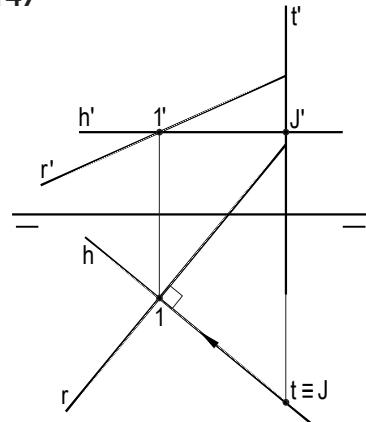


Figura 218

148

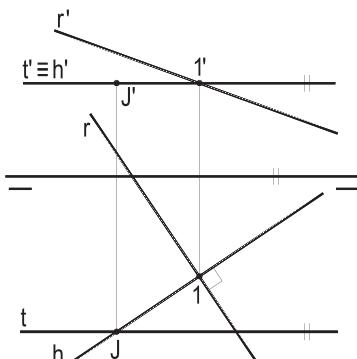


Figura 219

149

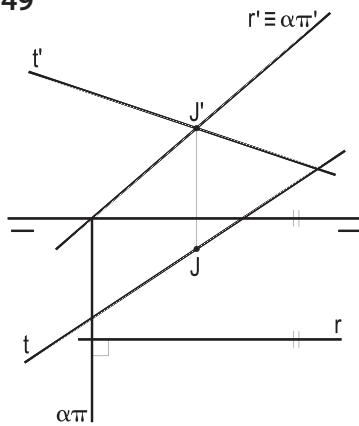


Figura 220

150

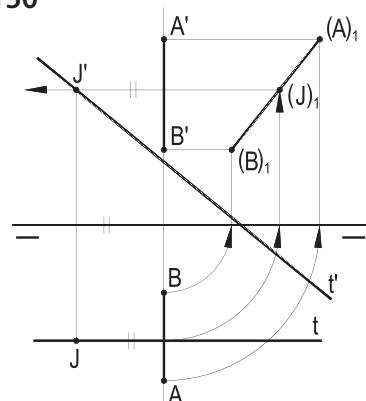


Figura 221

151

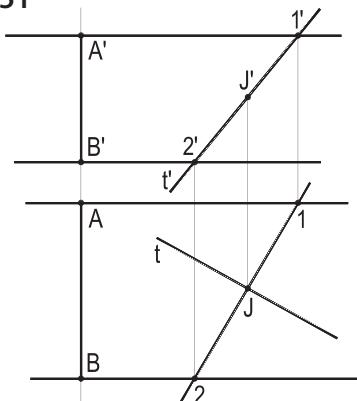


Figura 222

152

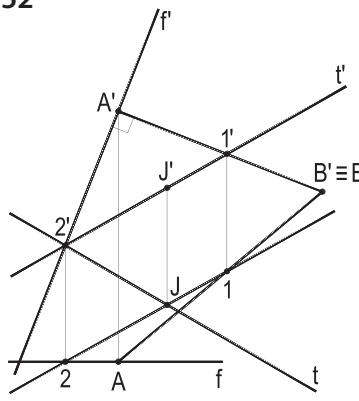


Figura 223

153

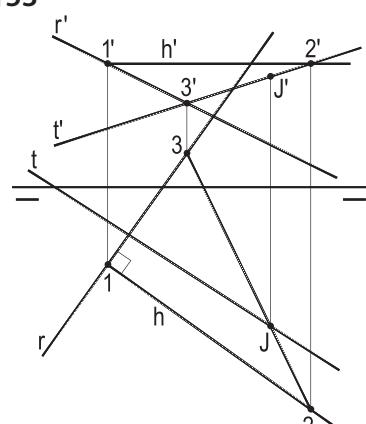


Figura 224

154

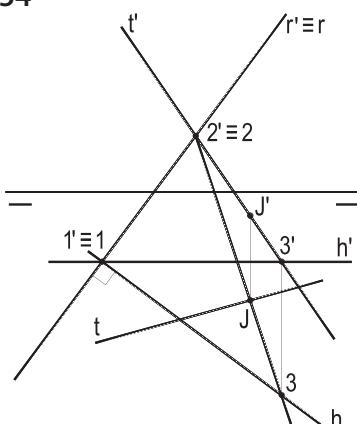


Figura 225

155

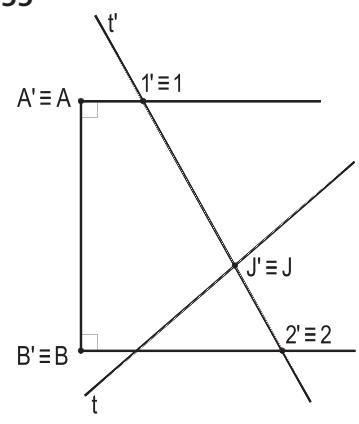


Figura 226

Em cada uma das épuras abaixo, pede-se determinar as projeções do ponto (J), interseção da reta (r), dada por suas projeções, com o plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, ou pelas projeções de duas retas suas (a) e (b).

Resoluções: Utilizada, sempre, uma reta (s), de ( $\alpha$ ), num plano projetante com (r).

Quando necessário, uma segunda reta ( $\bar{s}$ ) de ( $\alpha$ ) foi construída (Figuras 229, 230 e 235).

156

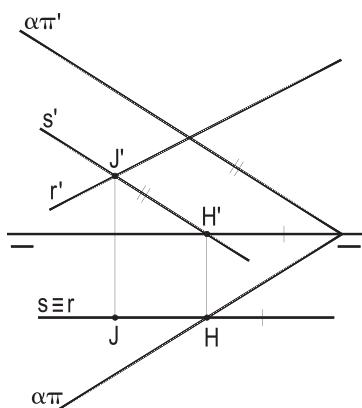


Figura 227

157

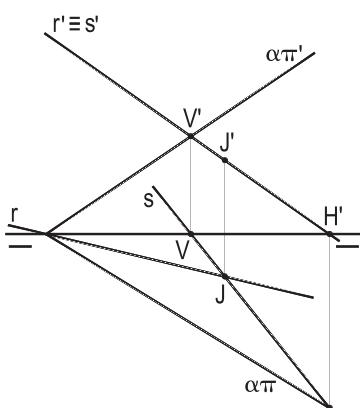


Figura 228

158

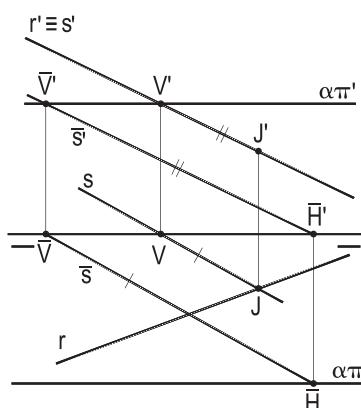


Figura 229

159

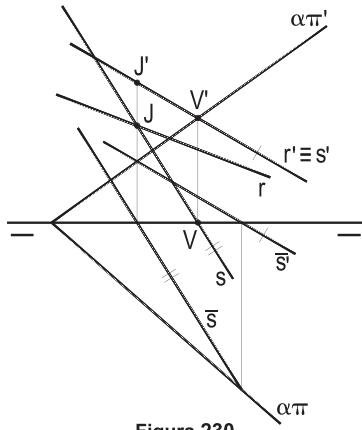


Figura 230

160

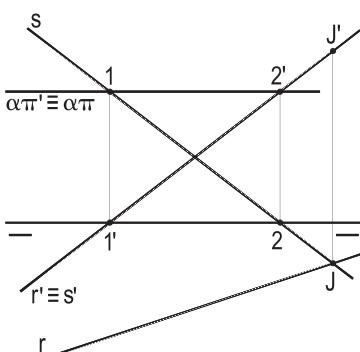


Figura 231

161

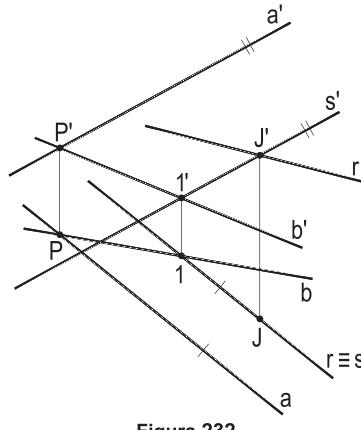


Figura 232

162

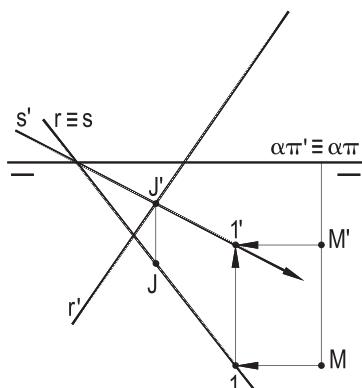


Figura 233

163

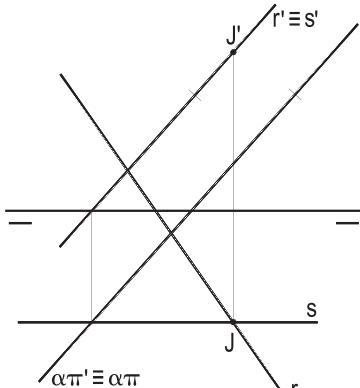


Figura 234

164

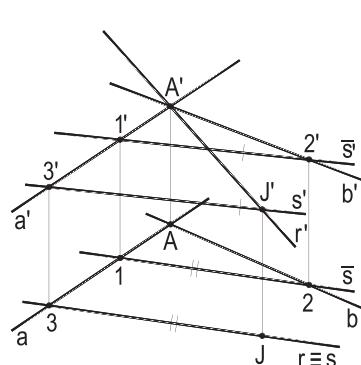


Figura 235

Em cada uma das épuras abaixo, pede-se determinar as projeções do ponto (J), interseção das retas (r), ou (A)(B), com o plano definido pelas retas (a) e (b). São dadas as projeções dos pontos (A) e (B) e das retas (a), (b) e (r).

Resoluções: Sempre que necessário, foi utilizada uma reta auxiliar (s), em plano projetante com (r). Nos problemas 168 e 170, operou-se com ( $\beta_{24}$ ).

**165**

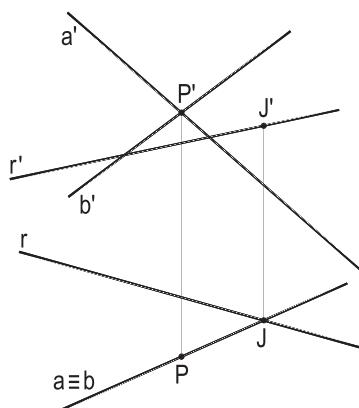


Figura 236

**166**

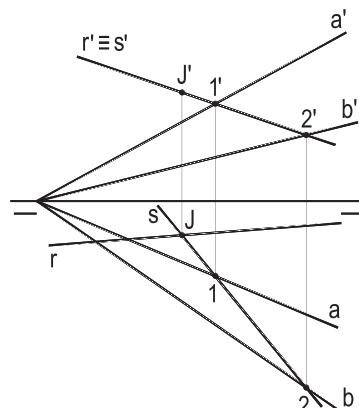


Figura 237

**167**

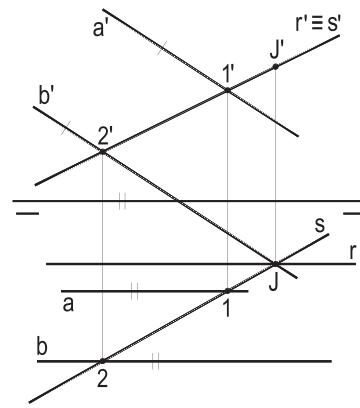


Figura 238

**168**

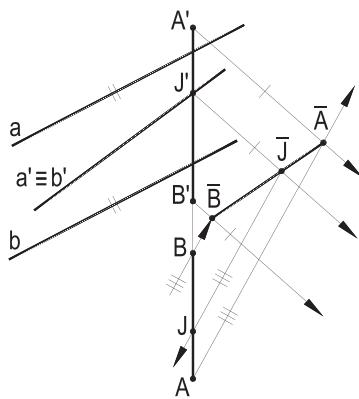


Figura 239

**169**

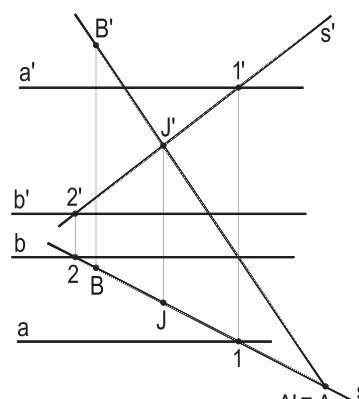


Figura 240

**170**

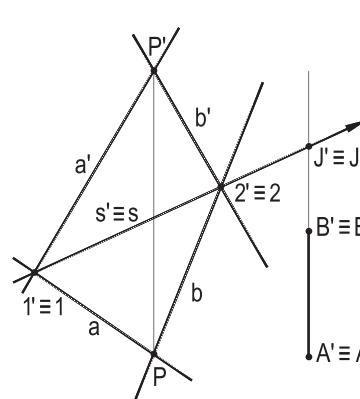


Figura 241

**171**

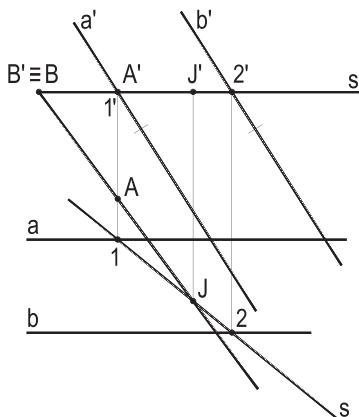


Figura 242

**172**

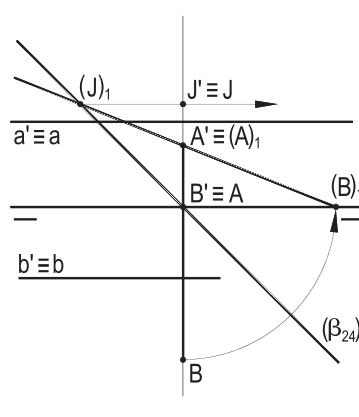


Figura 243

**173**

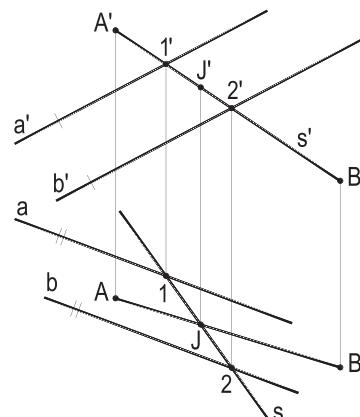


Figura 244

**174 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C) resultante das interseções das fronto-horizontais (a), (b) e (c), respectivamente, com o plano ( $\alpha$ ), sabendo que (A) pertence a ( $\pi$ ) e (B) a ( $\pi'$ ). São dados as projeções a, b', c' e c e os traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: Os vértices (A) e (B) são de imediatas obtenções, por suas particularidades, com suas projeções A e B' respectivamente em  $\alpha\pi$  e  $\alpha\pi'$ .

(C) vem com a determinação do traço da terceira fronto-horizontal (c) com ( $\alpha$ ) (Figura 245).

**175 – A reta (r), dada por suas projeções, corta o plano ( $\alpha$ ) e o bissector par num mesmo ponto. Dado o traço horizontal  $\alpha\pi$ , pede-se determinar o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano ( $\alpha$ ).**

Resolução: Pelos dados, o traço (P) de (r) com ( $\beta_{24}$ ) pertence ao plano ( $\alpha$ ). Assim, obtido (P), sua união com um ponto (H) qualquer de  $\alpha\pi$  cria uma reta do plano ( $\alpha$ ). E, então,  $\alpha\pi'$ , procurado, há de passar pelo traço vertical de (P)(H) (Figura 246).

**176 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), do plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo que (A) pertence à linha de terra, (B) a ( $\pi$ ), (C) a ( $\pi'$ ) e que o ponto (M), médio de (B)(C), à reta (r), dada por suas projeções.**

Resolução: Pela utilização da auxiliar (s), de mesmo plano vertical que (r), vem o traço (M) de (r) em ( $\alpha$ ).

Com a duplicação do afastamento de (M), obtém-se o vértice (B) e, então, o triângulo (A)(B)(C), já que (A) tem que ser o traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ) (Figura 247).

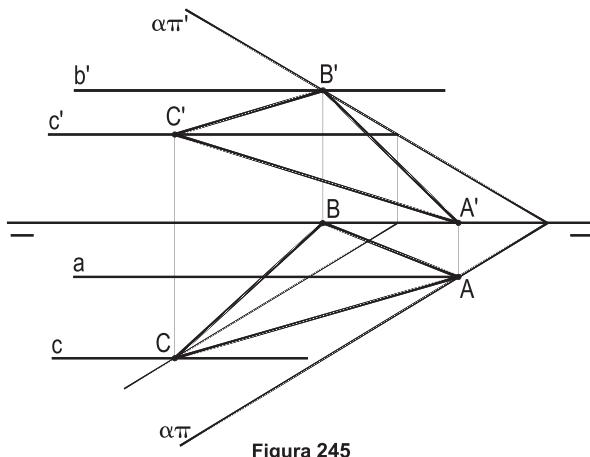


Figura 245

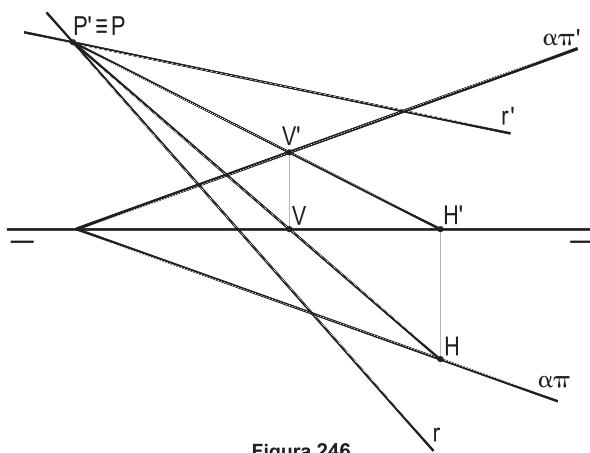
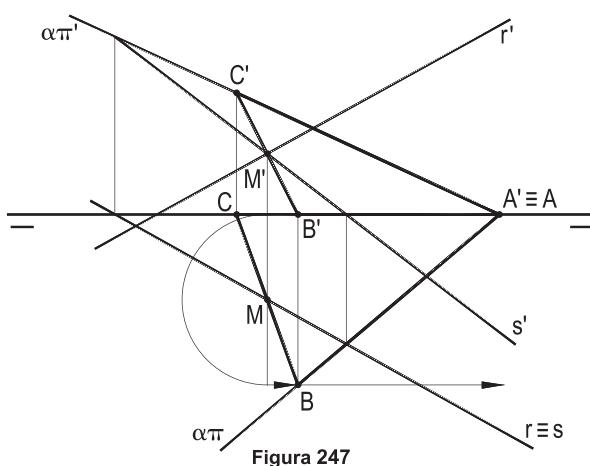


Figura 246



**177 – Determinar as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que a reta (r), dada por suas projeções, serve de suporte à mediana relativa ao lado (B)(C), que se apoia pelos vértices (B) e (C), respectivamente nas retas (b) e (c), também dadas por suas projeções. O vértice (A) é o traço de (r) no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços.**

Resolução: (A) é obtido com o auxílio de uma reta (s) de ( $\alpha$ ) e o ponto (M), médio de (B)(C), pela simples interseção de (r) com o plano de (b) e (c), projetante que é (Figura 248).

E, em projeção horizontal, por simetria de b, em relação a M, a reta  $\bar{b}$  proporciona a projeção C, do vértice (C) do triângulo, que entrega B, por sua união a M, resolvendo a questão.

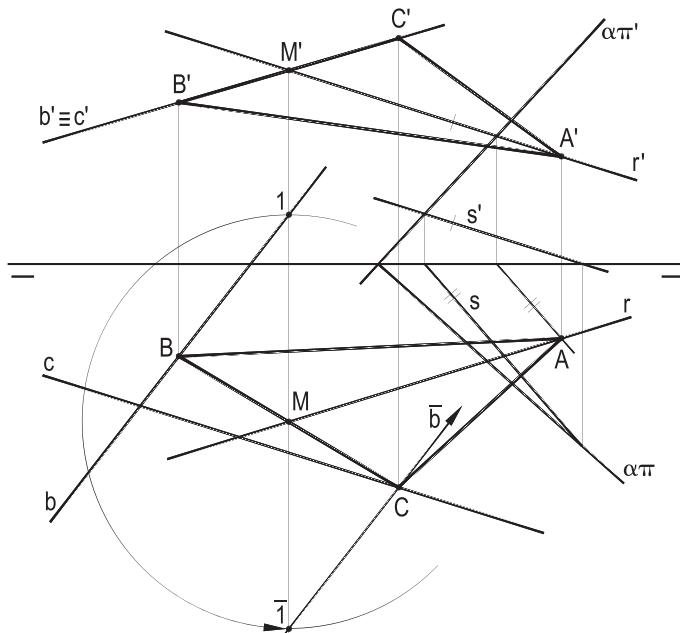


Figura 248

**178 – As retas (i) e (p), do plano de topo ( $\alpha$ ), pertencem, respectivamente, a ( $\beta_{13}$ ) e ( $\beta_{24}$ ).**

Pede-se construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), cujos vértices são, respectivamente, as intersecções de (i), (p) e (r) com o plano ( $\gamma$ ). São dados os traços de ( $\alpha$ ) e de ( $\gamma$ ) e as projeções de (r).

Resolução: Por ser ( $\alpha$ ) projetante, são imediatas suas intersecções (i) e (p), com os bissetores.

E, conhecendo (i) e (p), ficam simples as obtenções de (A) e (B), com a reta auxiliar (t).

(C) é obtido com a frontal (f) de ( $\gamma$ ) (Figura 249).

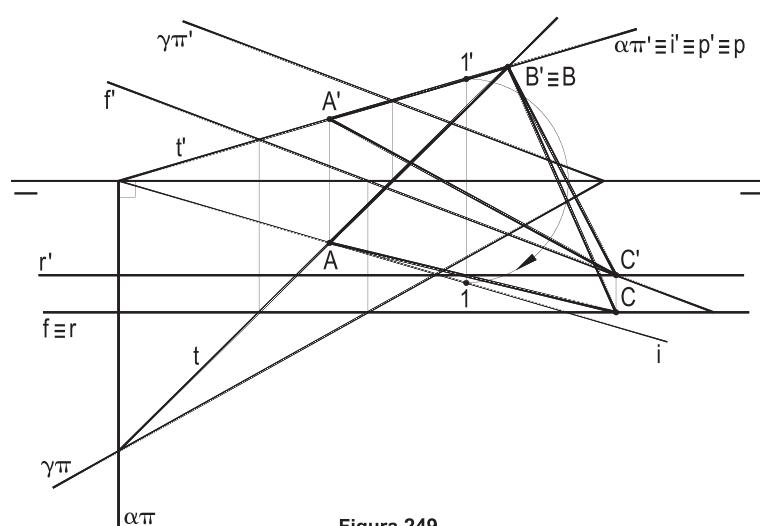
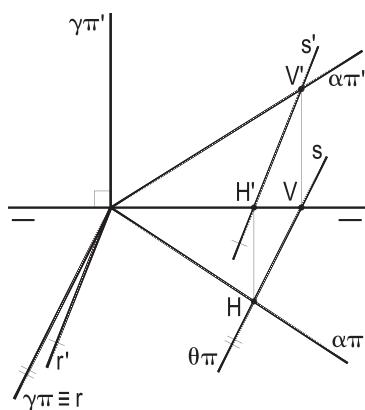


Figura 249

Em cada uma das épuras abaixo, são dados, por seus traços, os planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), cuja interseção ( $r$ ) é pedida.

Resoluções: Nos casos em que os cortes dos traços de mesmo nome são inacessíveis, lança-se mão de um plano auxiliar ( $\theta$ ).

179



**Figura 250**

180

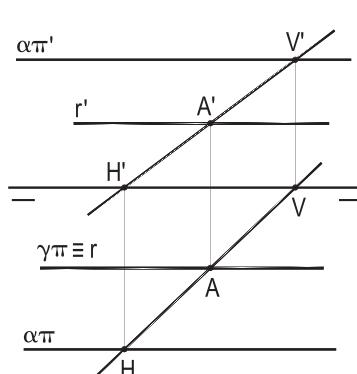
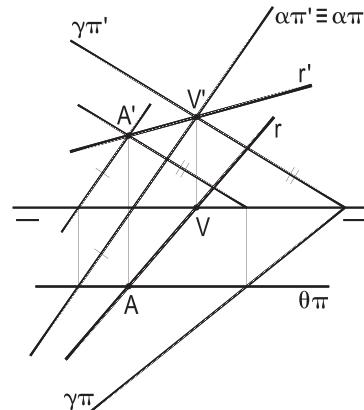


Figura 251

181



**Figura 252**

182

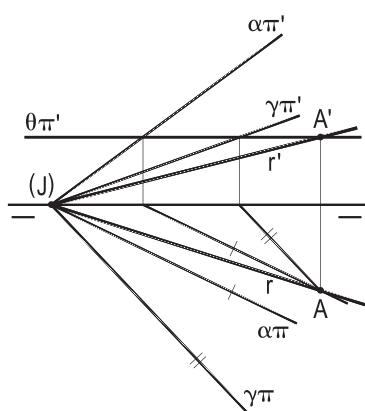


Figura 253

183

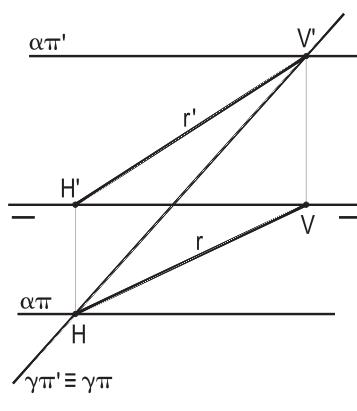


Figura 254

184

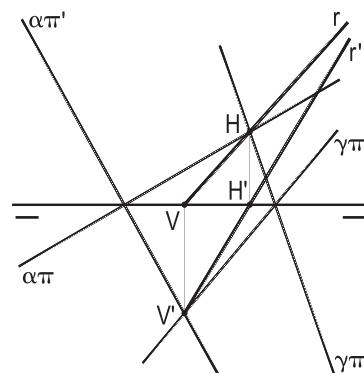
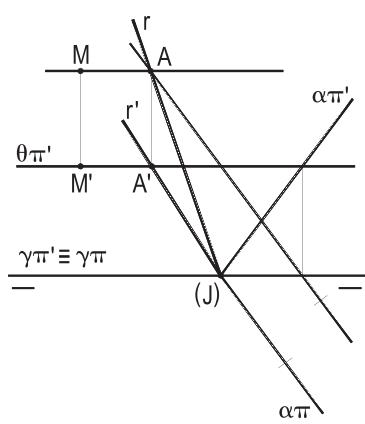


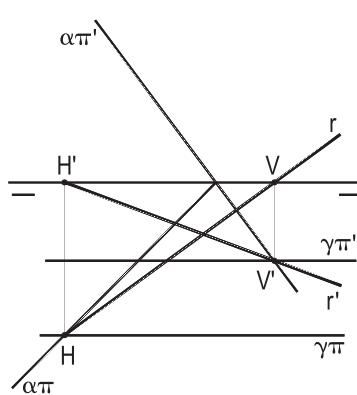
Figura 255

185



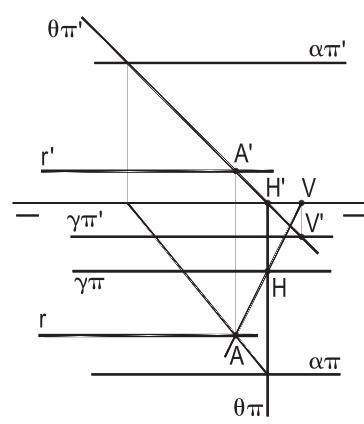
**Figura 256**

186



**Figura 257**

187



**Figura 258**

**Determinar as projeções da reta ( $r$ ), interseção do plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, com o plano definido pelas retas (a) e (b), dadas por suas projeções.**

**Resolução:** Sempre que necessário, foram utilizados planos projetantes auxiliares, para obtenção de pontos de ( $r$ ).

**188**

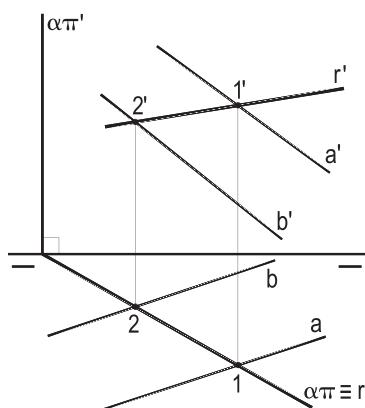


Figura 259

**189**

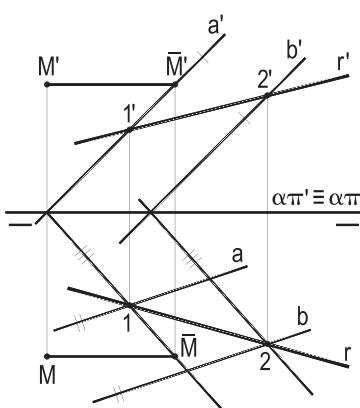


Figura 260

**190**

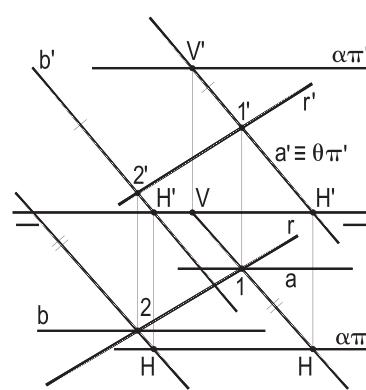


Figura 261

**191**

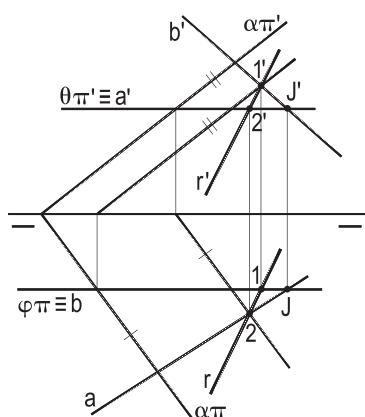


Figura 262

**192**

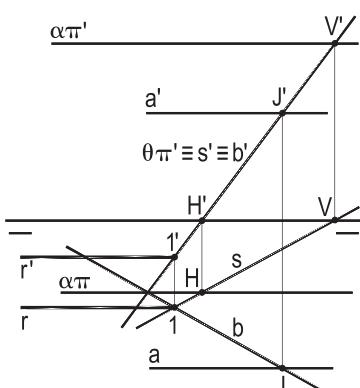


Figura 263

**193**

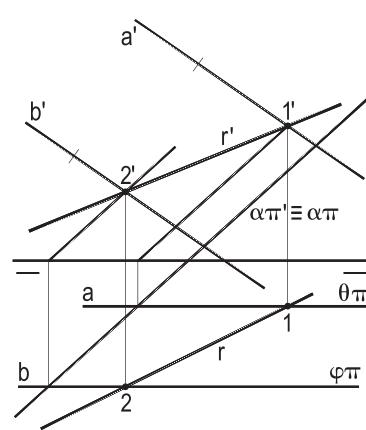


Figura 264

**194**

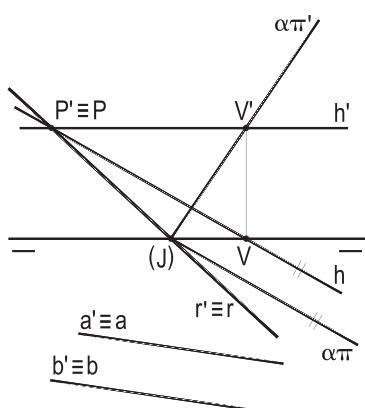


Figura 265

**195**

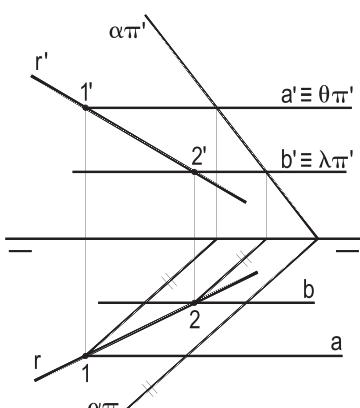


Figura 266

**196**

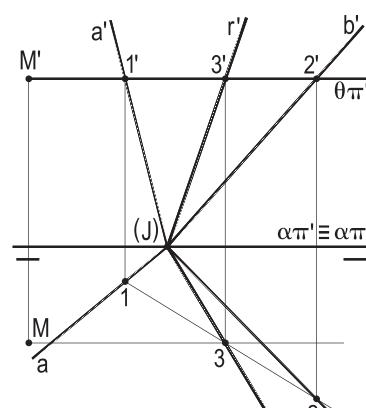


Figura 267

Em cada uma das épuras abaixo, os planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) são dados por suas retas, (a) e (b) para ( $\alpha$ ) e (c) e (d) para ( $\gamma$ ). Pede-se as projeções de sua interseção (r).

Resolução: Sempre que necessário, são utilizados planos auxiliares, produzindo interseções com os dados, de modo a obter pontos de (r).

197

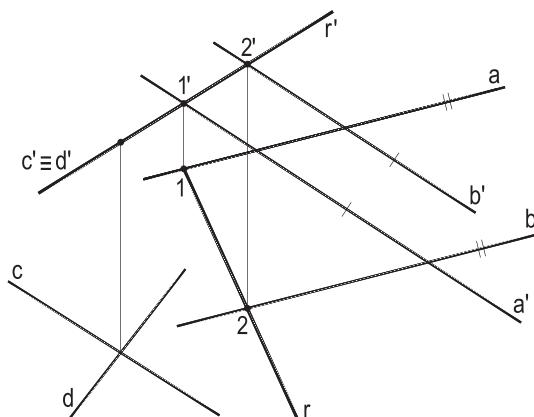


Figura 268

198

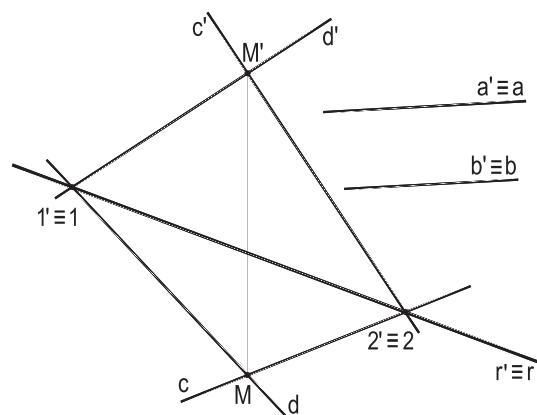


Figura 269

199

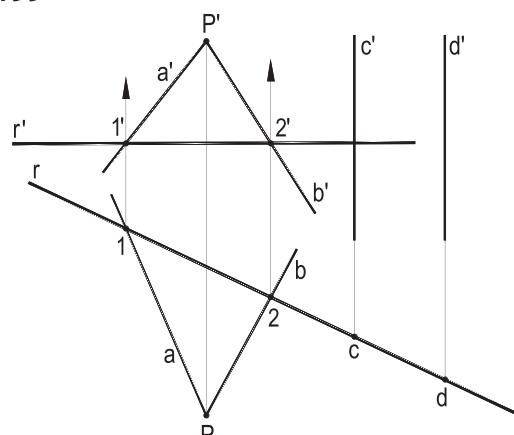


Figura 270

200

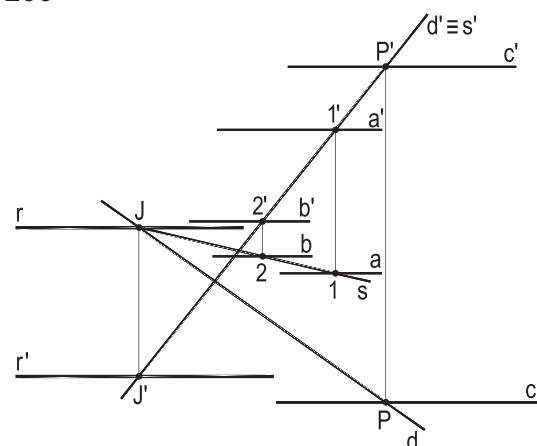


Figura 271

201

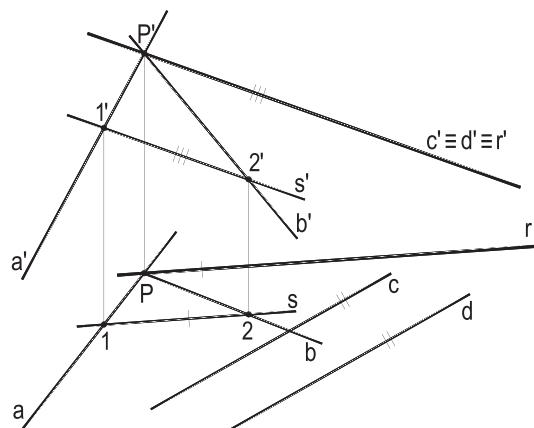


Figura 272

202

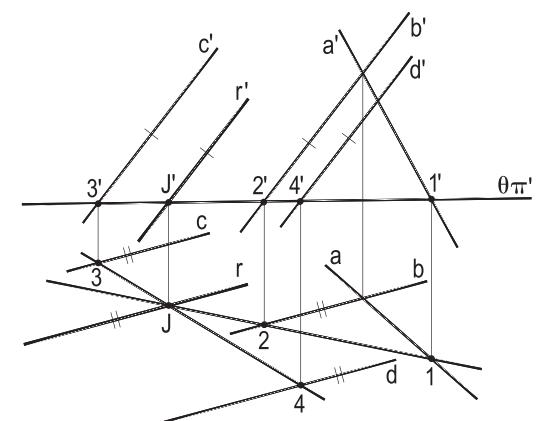


Figura 273

**Em cada uma das épuras seguintes, dados três planos ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), todos por seus traços, pede-se determinar as projeções do ponto (P) comum aos três planos.**

Resoluções:

- 203** – Inicialmente, constrói-se a interseção ( $r$ ) dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), para, em seguida, buscar o traço de ( $r$ ) no terceiro plano ( $\gamma$ ), no caso, pertencente à linha de terra, o que se consegue com o auxílio da reta ( $s$ ), do mesmo plano de topo que ( $r$ ), apoiada numa fronto-horizontal de ( $\gamma$ ) (Figura 274).

(P) é o ponto comum aos três planos.

- 204** – Situação mais simples, por ser ( $\gamma$ ) projetante, o que proporciona pronta obtenção de seu traço (P) com a reta ( $r$ ), interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) (Figura 275).

É claro que teria sido equivalente buscar a interseção de outro par de planos e seu corte com o terceiro plano.

- 205** – Aqui, aproveitando que ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) são paralelos a ( $\pi'\pi$ ), um reabatimento lateral proporciona sua interseção ( $r$ ), uma fronto-horizontal (Figura 276), cujo traço com ( $\gamma$ ), o ponto (P) procurado, é de pronta obtenção, aproveitando sua cota conhecida.

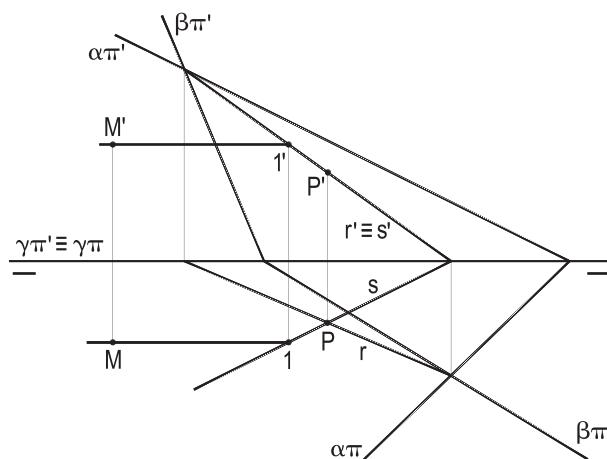


Figura 274

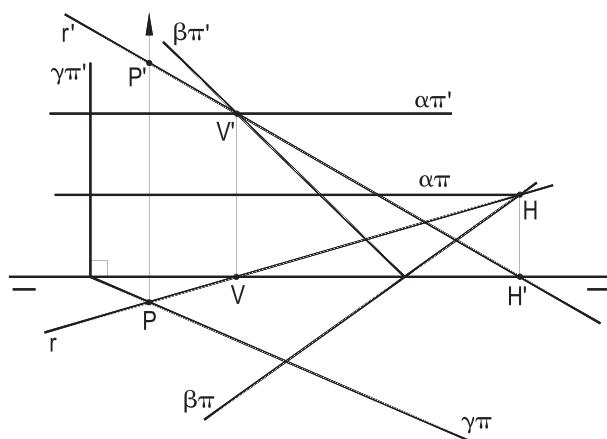


Figura 275

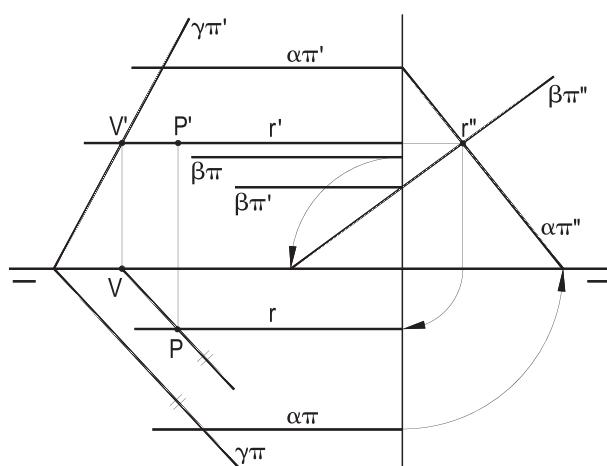


Figura 276

Em cada uma das épuras abaixo, pede-se obter as projeções do ponto (P) comum aos três planos ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), os dois primeiros dados por seus traços e o terceiro por um par de retas (a) e (b), dadas por suas projeções.

Resoluções:

- 206** – Obtida a interseção (r) de ( $\alpha$ ) com ( $\beta$ ), pela utilização de um plano horizontal auxiliar ( $\theta$ ), seu traço no plano ( $\gamma$ ) das correntes (a) e (b) se faz com a ajuda do plano de topo ( $\varphi$ ) que contém (r).

(P) é o ponto pedido (Figura 277).

- 207** – Por terem seus traços verticais paralelos, os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) cortam-se segundo a frontal (r) a eles paralela (*Geometria Descritiva*, número 59).

E o traço de (r) no plano ( $\gamma$ ), das paralelas (a) e (b), se faz com o auxílio do plano de topo ( $\theta$ ) pertencente a (r), resultando no ponto (P) procurado (Figura 278).

- 208** – Por serem inacessíveis, no espaço destinado à questão, os pontos comuns aos traços de mesmo nome dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), foi necessário utilizar dois planos auxiliares ( $\theta$ ) e ( $\varphi$ ), ambos horizontais, para obter a interseção (r) de ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) (Figura 279).

A determinação do ponto (P) foi simplificada por ser projetante o plano ( $\gamma$ ), das paralelas (a) e (b).

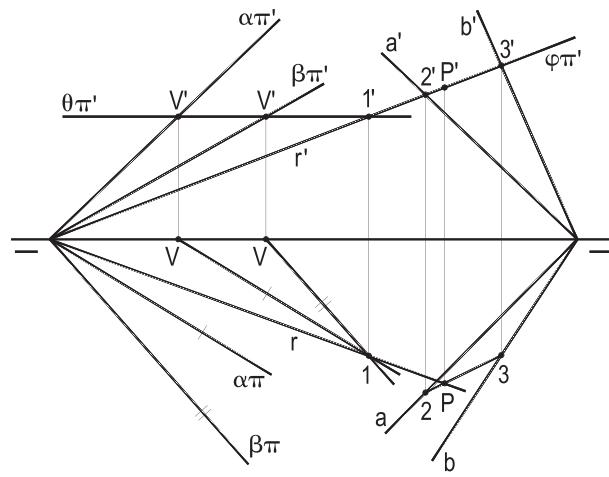


Figura 277

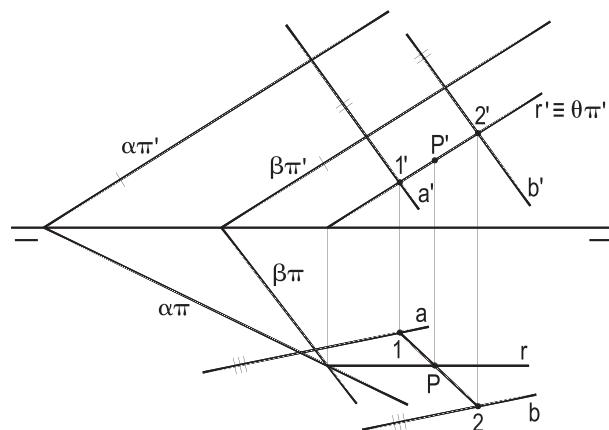


Figura 278

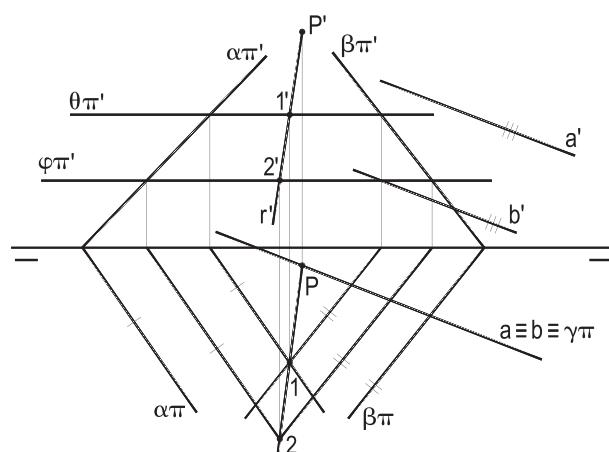


Figura 279

Para as épuras abaixo, pede-se determinar as projeções do ponto (P) comum aos planos ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), todos dados pelas projeções de duas de suas retas, respectivamente (a) e (b), (c) e (d), e (e) e (f).

Resoluções: Em ambas as situações, determinou-se inicialmente a interseção (r) dos planos ( $\alpha$ ), das retas (a) e (b), com ( $\beta$ ) de (c) e (d) para, em seguida, obter o traço (P) de (r) com o terceiro plano ( $\gamma$ ), das retas (e) e (f) (Figuras 280 e 281).

Observe-se que no segundo exemplo (número 210), a épura foi simplificada pelo fato de os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) contarem com uma direção comum, a das retas (a), (b) e (d), o que faz sua interseção (r) ser a elas paralela (*Geometria Descritiva*, número 59) (Figura 281).

**209**

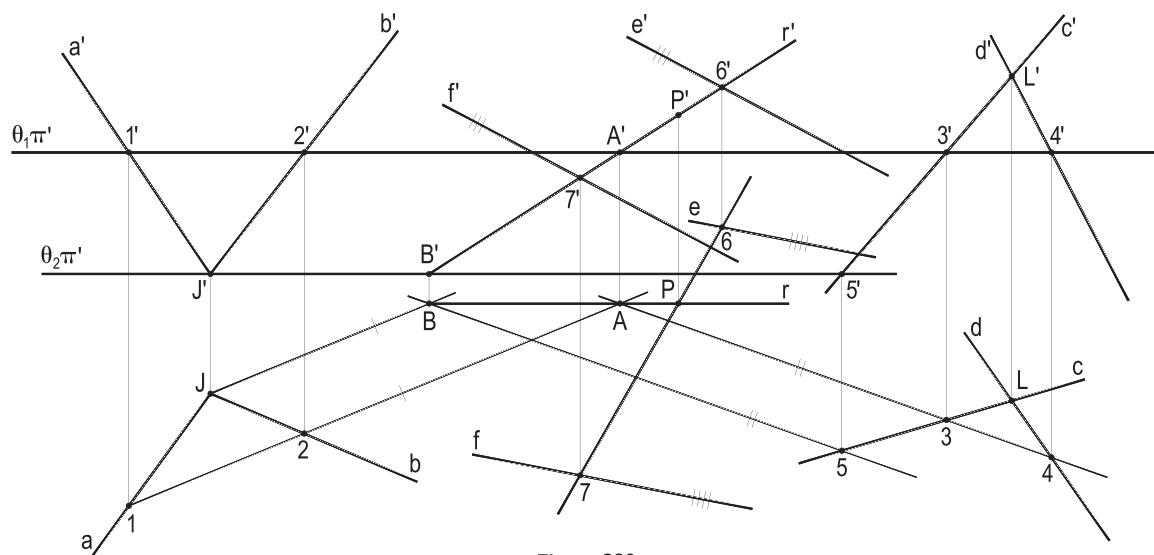


Figura 280

**210**

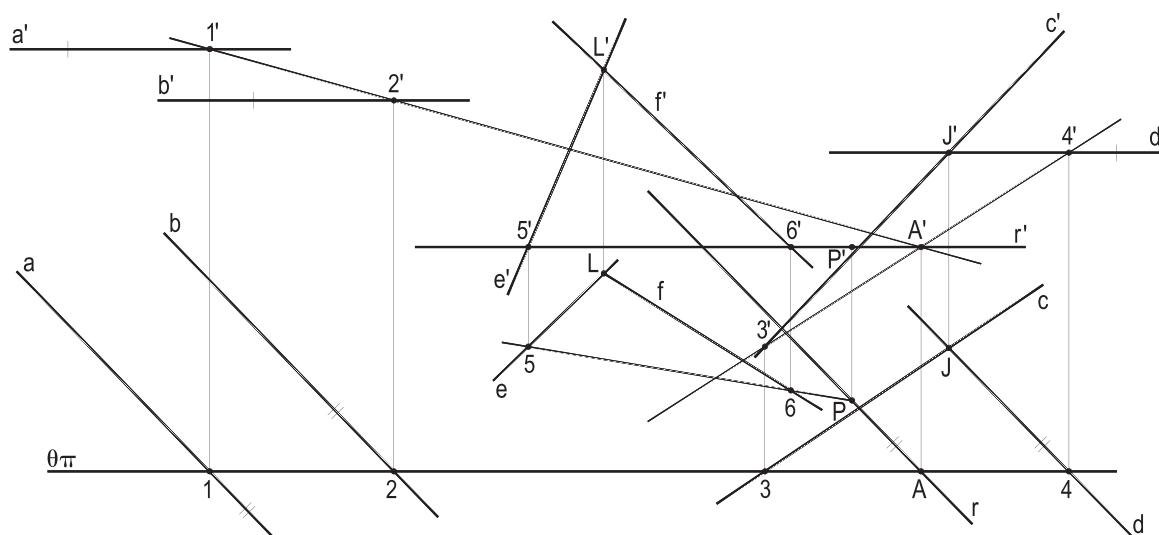
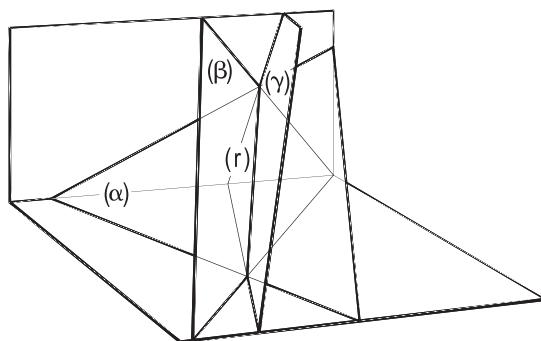


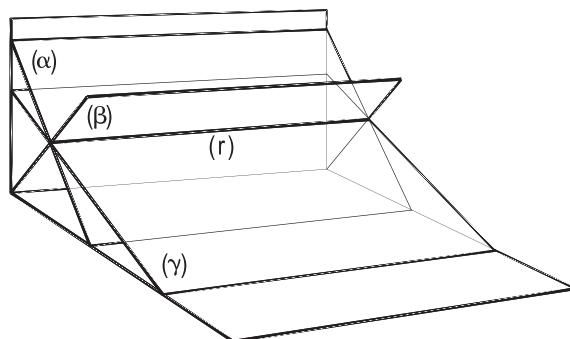
Figura 281

Cabe observar que, em posições especiais, três planos secantes podem, ao invés de ter apenas um ponto comum, como nos exemplos antes relacionados, contar com uma reta ( $r$ ) comum aos três (Figuras 282 e 283), ou, por serem todos três paralelos a uma determinada reta, seccionarem-se aos pares, segundo retas com essa direção (Figuras 284 e 285).

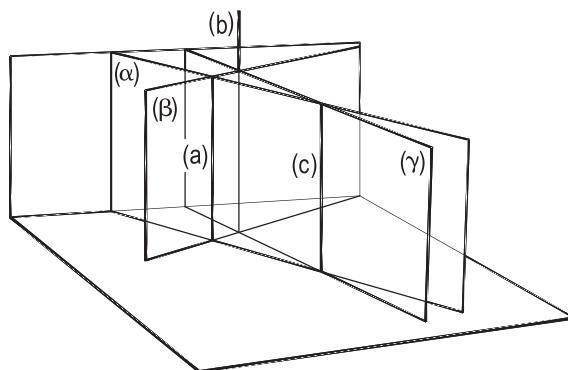
**211**



**212**



**213**



**214**

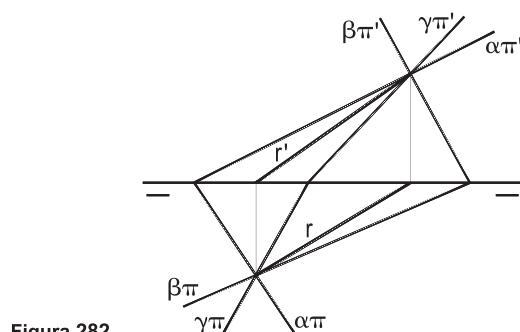
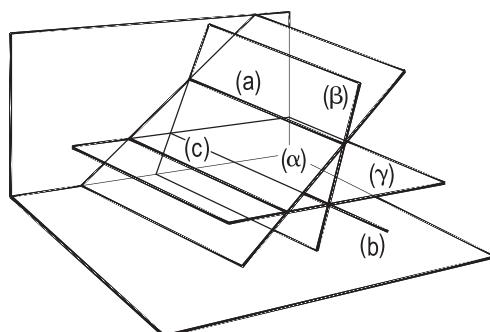


Figura 282

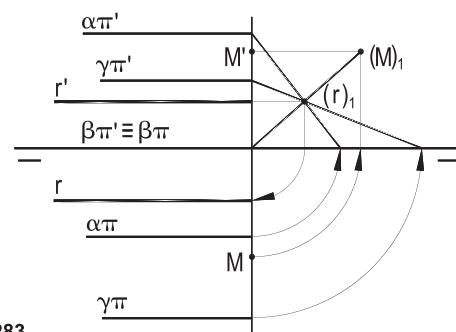


Figura 283

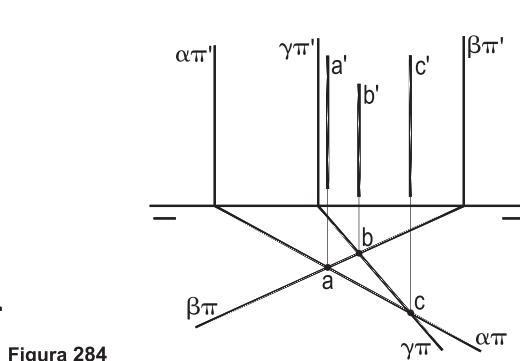


Figura 284

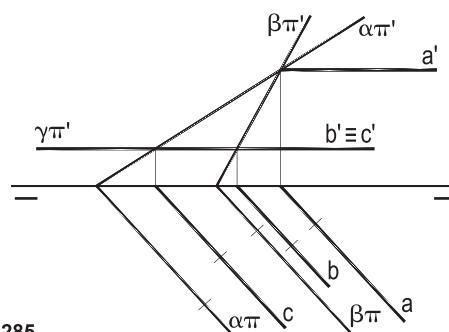


Figura 285

**215 – Os planos  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  e  $(\gamma)$  cortam-se segundo uma única reta  $(r)$ . Sendo dados os traços verticais dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , sabendo que o plano  $(\gamma)$  passa pelo ponto  $(J)$ , dado por suas projeções, e que os ângulos formados pelos traços horizontais de  $(\alpha)$  e de  $(\beta)$  e pelos traços horizontais de  $(\beta)$  e de  $(\gamma)$  são, respectivamente, iguais a  $45^\circ$  e a  $90^\circ$ , pede-se determinar as projeções da reta  $(r)$  e os traços não dados dos três planos.**

Resolução: Para que os três planos admitam apenas uma reta em comum é preciso que seus traços de mesmo nome se cortem em pontos únicos.

Assim,  $\gamma\pi'$  é imediato, pela união de  $(J)$  a  $V'$  (Figura 286). E, para atender aos ângulos estabelecidos, o ponto  $H$ , comum aos três traços horizontais, há de ser o de interseção dos arcos capazes de  $45^\circ$  e de  $90^\circ$ , para os segmentos  $LK$  e  $JK$ , respectivamente.

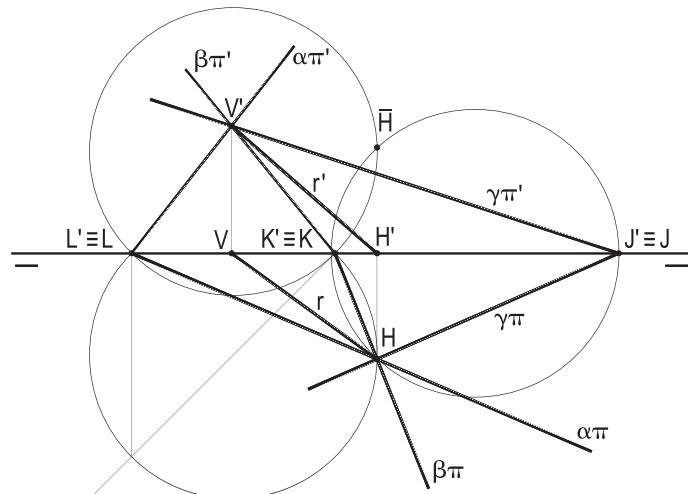


Figura 286

Há uma segunda solução não completada, correspondente ao traço horizontal  $\bar{H}$ , indicado.

**216 – Dados, por seus traços, os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , pede-se determinar os traços do plano  $(\gamma)$ , que corta  $(\beta)$  segundo uma horizontal e  $(\alpha)$  segundo uma reta de  $(\beta_{13})$ .**

Resolução: Se o plano pedido  $(\gamma)$  corta  $(\alpha)$  segundo uma reta  $(i)$ , de  $(\beta_{13})$ , iniciamos construindo tal reta (Figura 287), com auxílio com uma fronto-horizontal arbitrária  $(f)$  com projeções simétricas em relação a  $(\pi'\pi)$ .

E, para cortar  $(\beta)$  segundo uma horizontal,  $(\gamma)$  deve ter retas horizontais paralelas a  $(\beta\pi)$ . Aproveitando, então, a horizontal  $(h)$ , por  $(I)$ , com tal direção, forma-se o plano  $(\gamma)$ , cujo traço vertical  $\gamma\pi'$  é conduzido pelo traço vertical  $V'$  de  $(h)$  (Figura 287).

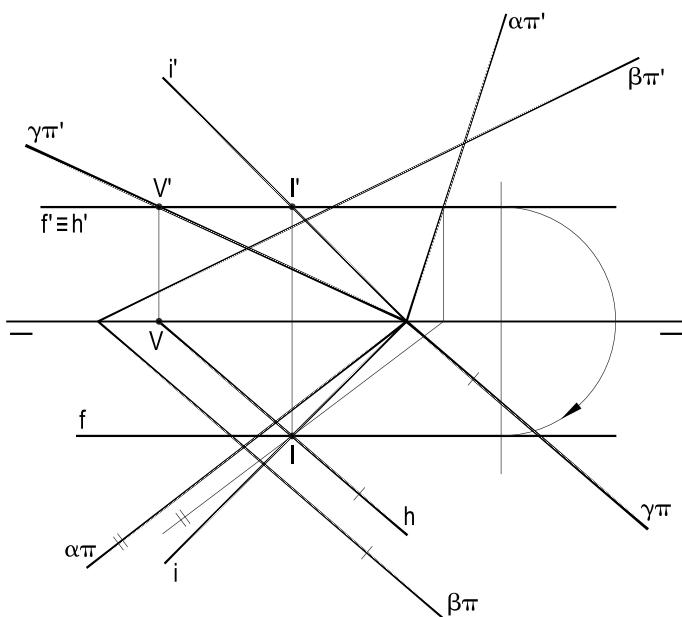


Figura 287

217 – Determinar as projeções da reta ( $r$ ) e os traços do plano ( $\beta$ ), sabendo que:

- a. ( $\beta$ ) tem em comum com o plano vertical de projeção a reta (h);
  - b. (r) está no terceiro diedro;
  - c. (r) dista 57 mm da linha de terra;
  - d. (r) é a interseção do plano ( $\alpha$ ) com ( $\beta$ ).

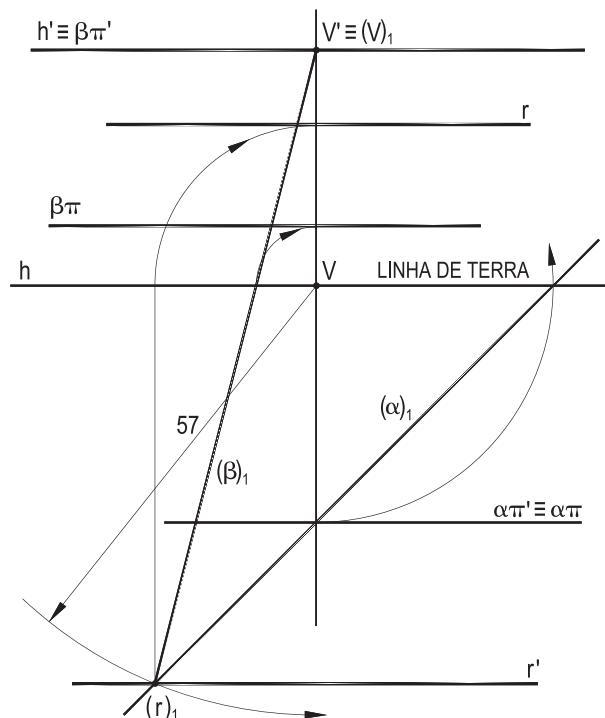
Dados:  $h'$ ,  $h$ ,  $\alpha\pi' \equiv \alpha\pi$  e a linha de terra.

ENE – Escola Nacional de Engenharia – 1964.

Resolução: Pelos próprios dados, por ter afastamento nulo, a reta dada ( $h$ ) é o traço vertical  $\beta\pi'$  do plano ( $\beta$ ).

Porque a reta procurada ( $r$ ), a interseção dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), deve ser fronto-horizontal, com um rebatimento lateral, que ofereça a vista ( $\alpha$ )<sub>1</sub> do plano ( $\alpha$ ), pode-se marcar ( $r$ )<sub>1</sub> (Figura 288), distando 57 mm de ( $\pi'\pi$ ) e situada no terceiro diedro e, por sua união ao ponto (V)<sub>1</sub>, obter a vista lateral ( $\beta$ )<sub>1</sub> do plano ( $\beta$ ).

Os alçados de  $(\beta)_1$  e de  $(r)_1$  entregam o traço horizontal  $\beta\pi$  e as duas projeções da reta  $(r)$  (Figura 288).

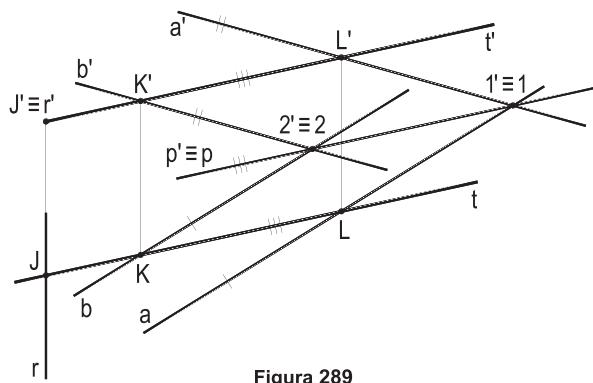


**Figura 288**

**218 – Construir as projeções da reta (t), paralela ao bissetor par, sabendo que (t) concorre com as retas (a), (b) e (r), dadas por suas projeções.**

Resolução: Por serem paralelas, as retas (a) e (b) são coplanares e, assim, a reta (t) procurada, também coplanar com (a) e com (b), há de ser paralela à interseção (p) de seu plano com  $(\beta_{24})$ , facilmente obtida (Figura 289).

E, para concorrer com (r),  $t'$  deve passar por  $r'$ , o que soluciona a questão.



**Figura 289**

**219 – A reta ( $r$ ), dada por suas projeções, é a interseção de dois planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), cujos traços de mesmo nome são perpendiculares. Pede-se que sejam construídos tais traços.**

Resolução: Admitindo resolvido o problema, observemos os triângulos retângulos  $12V'$  e  $12H$  (Figura 290). Porque suas medianas  $OV'$  e  $OH$ , relativas à hipotenusa comum 12, devem ser iguais à metade dessa hipotenusa (*Geometria Plana*, número 128.3), conclui-se que os pontos  $V'$ ,  $H$ , 1 e 2 devem todos pertencer à circunferência de diâmetro 12, cujo centro  $O$ , equidistando dos pontos conhecido  $V'$  e  $H$ , deve estar sobre a linha de terra.

Determinados os traços  $V'$  e  $H$  da reta dada e construída a mediatrix  $m$  do segmento  $V'H$ , obtém-se, na linha de terra, o ponto  $O$ , centro da circunferência de raio  $OV' = OH$ , que, traçada, traz os pontos 1 e 2 que resolvem a questão (Figura 291).

**220 – Determinar os traços horizontais dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), sabendo que o ponto (A) pertence à bissetriz do ângulo objetivo formado, no primeiro diedro, pelos traços de ( $\alpha$ ) e que a interseção dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) é uma horizontal. Dados  $\alpha\pi'$ ,  $\beta\pi'$  e  $A'$ .**

Resolução: Sabe-se (número 3.4) que a bissetriz ( $b$ ) é a mediana do triângulo isósceles ( $JVH$ ) construído sobre os traços do plano (Figura 292). Assim, aproveitando a projeção vertical  $A'$  do ponto (A), de ( $b$ ), por simetria da linha de terra, em relação a  $A'$ , obtém-se  $V'$  (Figura 293) e, então,  $H'$  e  $H$ , o que proporciona o traço  $\alpha\pi$ . Enfim, o traço  $\beta\pi$  é paralelo a  $\alpha\pi$ .

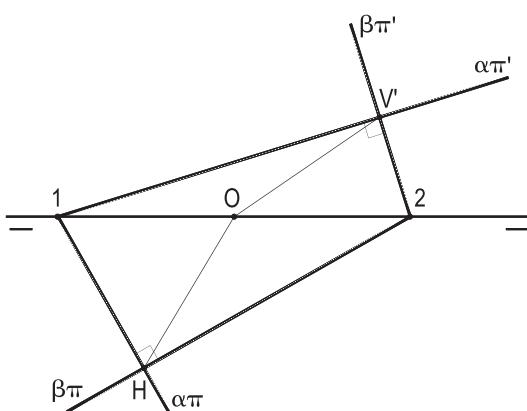


Figura 290

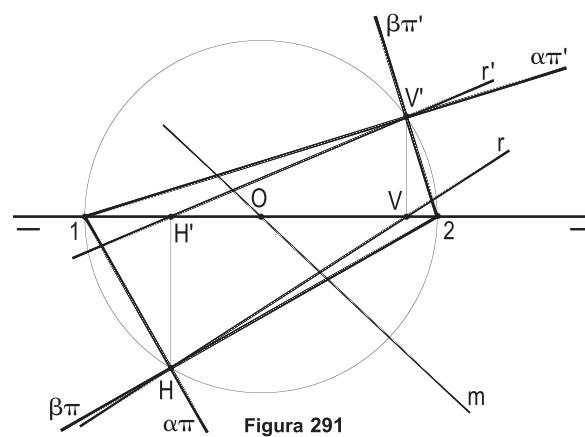


Figura 291

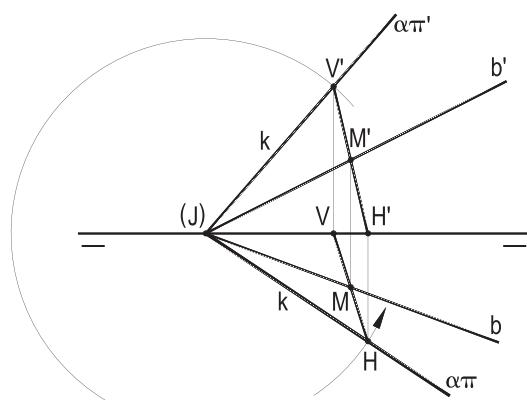


Figura 292

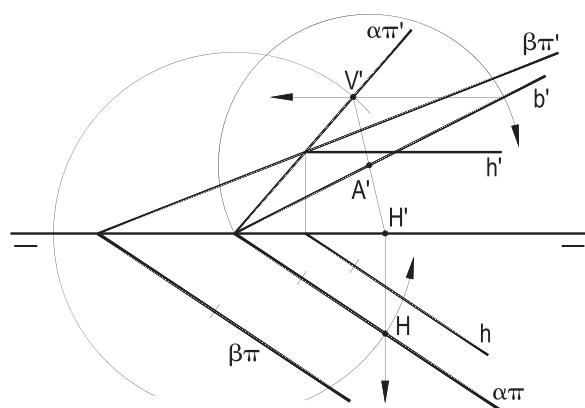


Figura 293

**221 – Determinar o traço horizontal do plano ( $\alpha$ ), sabendo que, em épura, as projeções da reta ( $\alpha\beta$ ) formam entre si um ângulo igual a  $30^\circ$ , dados  $\alpha\pi'$ ,  $\beta\pi'$  e  $\beta\pi$ .**

Resolução: Conhecido um ponto comum – (V) – da interseção ( $\alpha\beta$ ), para que suas projeções venham a formar, em épura,  $30^\circ$ , entre elas, seu ponto comum – naturalmente, seu traço (P) com ( $\beta_{24}$ ) – deve pertencer a um dos arcos capazes de  $30^\circ$ , para o segmento V'V.

Assim, construída a interseção (p) de ( $\beta$ ) com ( $\beta_{24}$ ), à qual há de pertencer esse ponto (P), buscando seus cortes com tais arcos capazes (Figura 294), obtém-se a reta ( $r$ )  $\equiv$  ( $\alpha\beta$ ) e, apoiando-se nela e em  $\alpha\pi'$  uma horizontal ( $h_2$ ), vem o traço horizontal  $\alpha\pi$ .

Há uma segunda solução, indicada pelo ponto 2 na Figura 294, mas não completada. O segundo arco capaz, para a direita de V'V, é inútil, por não cortar  $p' \equiv p$ .

**222 – Os planos ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) cortam-se segundo uma mesma reta ( $r$ ).**

**Dados os traços  $\beta\pi'$ ,  $\beta\pi$ ,  $\gamma\pi'$ ,  $\gamma\pi$  e  $\varphi\pi' \equiv \varphi\pi$  e sabendo que o ponto (M) médio do segmento (V)(H) formado pelos traços de ( $\varphi\pi''$ ) com ( $\beta_{24}$ ) pertence a ( $\alpha$ ), pede-se determinar os traços do plano ( $\alpha$ ) e as projeções da reta ( $r$ ).**

Resolução: Pelos dados, a reta ( $r$ ) é uma horizontal, paralela a  $\beta\pi$  e a  $\gamma\pi$  (Figura 295), de imediata obtenção.

Simples também a determinação do ponto (M), médio da interseção (V)(H) de ( $\varphi$ ) com ( $\pi''$ ) e com ( $\beta_{24}$ ) (Geometria Descritiva, número 76).

E a união de (M) ao traço (P) de ( $r$ ) com ( $\beta_{24}$ ) traz o traço (J) de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ), o que resolve o problema, já que ( $\alpha$ ) contém ( $r$ ) (Figura 295).

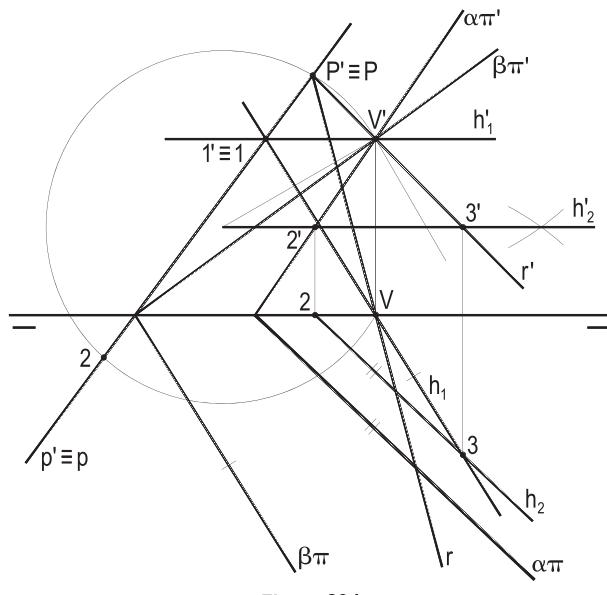


Figura 294

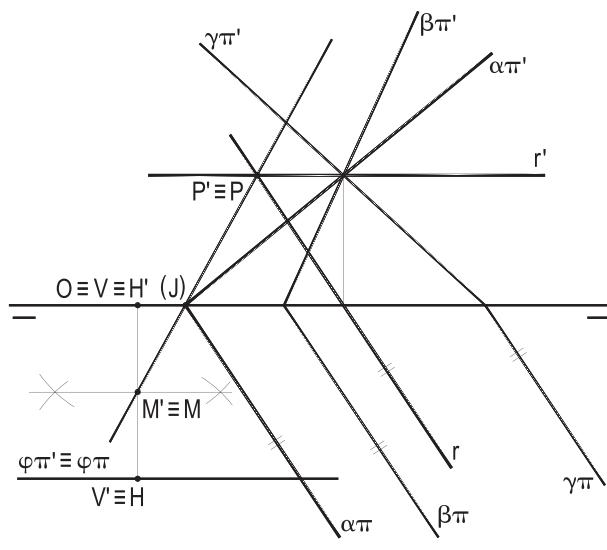


Figura 295

**223 – Determinar os traços horizontais dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), sabendo que a reta ( $r$ ) é a sua interseção e que a projeção horizontal  $r$  dessa reta é a bisetriz do ângulo formado por  $\alpha\pi$  e  $\beta\pi$ . Dados  $\alpha\pi'$ ,  $\beta\pi'$  e  $r'$ .**

Resolução: Sendo  $HV$  a bisetriz do ângulo  $J\hat{H}L$  (Figura 296),  $V$  há de ser o conjugado harmônico, do pé da bisetriz externa (*Geometria Plana*, número 166) desse ângulo com  $(\pi'\pi)$ , o que proporcionará a solução. De fato, obtido o conjugado harmônico  $\bar{V}$  de  $V$  (Figura 297), a circunferência de diâmetro  $V\bar{V}$  é o lugar para o traço  $H$ , obtido a partir da linha de chamada de  $H$  (Figura 297), visto serem perpendiculares essas duas bisetizes (*Geometria Plana*, número 12.3).

A segunda solução, para  $\bar{H}$ , não foi completada, em épura.

**224 – ( $r$ ) é a interseção dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ). Determinar os traços desses planos, sabendo que o ângulo formado por  $\alpha\pi'$  e  $\beta\pi'$  é igual a  $45^\circ$  e que a distância entre  $\alpha\pi$  e  $\beta\pi$  vale 13 mm. Dadas as duas projeções de reta ( $r$ ).**

Resolução: O triângulo  $(J)V'(L)$  (Figura 298) pode ser obtido a partir do triângulo retângulo auxiliar  $(J)(L)P$ , de fácil construção, por se conhecer a direção e o valor de um cateto, igual a 13 mm. Arbitrado um ponto  $(L)$  de  $(\pi'\pi)$ , constrói-se o triângulo retângulo  $(L)P(J)$ , aproveitando a direção de  $r$  e a medida 13 mm e, com o arco capaz de  $45^\circ$  para  $(J)(L)$ , determina-se  $(V)$  em  $r'$  (Figura 299) e, então, basta conduzir pelo traço vertical  $V'$  da reta dada ( $r$ ), com as direções de  $(J)(V)$  e de  $(L)(V)$ , os traços verticais dos planos pedidos (Figura 299). Há uma segunda solução para  $(\bar{V})$ .

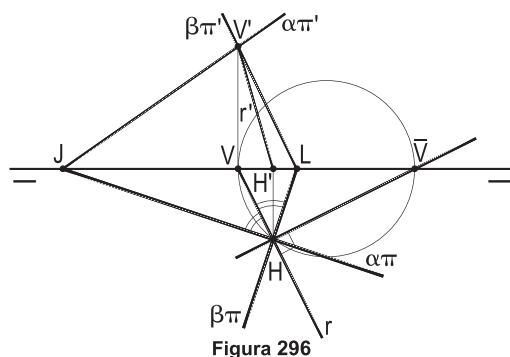


Figura 296

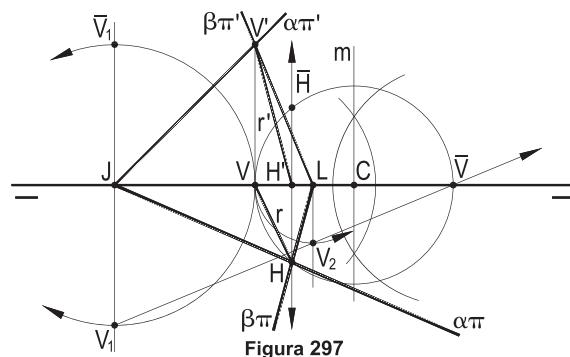


Figura 297

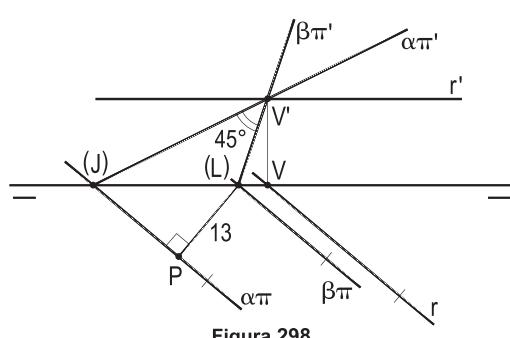


Figura 298

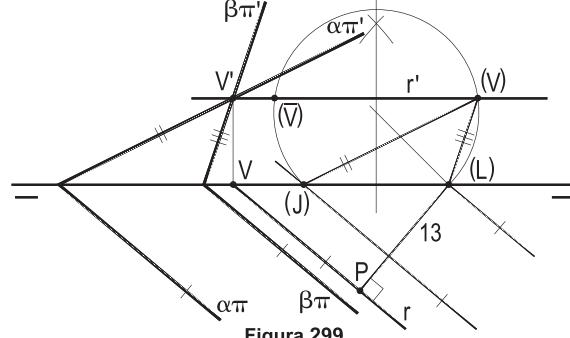


Figura 299

**225 – As retas (r), (s), (t) e (u) são suportes das arestas de um ângulo poliédrico de vértice (J) e cortam o plano ( $\alpha$ ) produzindo um paralelogramo (A)(B)(C)(D), (A) em (r), (B) em (s), (C) em (t) e (D) em (u).**

Dados as projeções  $r'$ ,  $s'$ ,  $t'$ ,  $r$ ,  $t$  e os traços de ( $\alpha$ ), pede-se determinar as projeções do paralelogramo, sabendo ser romboide a projeção ABCD.

Resolução: Por ser projetante o plano ( $\alpha$ ), são imediatas as obtenções das projeções  $A'$ ,  $A$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $C$  (Figura 300).

E, para que seja um losango a projeção horizontal ABCD, a mediatrix de AC servirá de suporte à diagonal BD.

Assim, obtido B (na linha de chamada de  $B'$ ), D vem por simetria em relação ao centro O do losango (Figura 300).

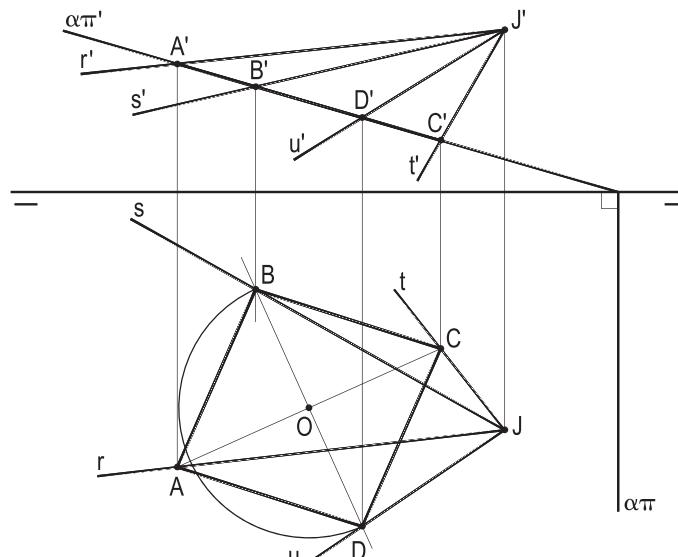


Figura 300

**226 – Dadas as projeções  $a'$ ,  $a$ ,  $b'$ ,  $b$ ,  $r'$  e  $r$  das retas concorrentes (a) e (b) e da reta (r) seccante ao plano de (a) e (b), pede-se determinar a posição da linha de terra, sabendo que o ponto (I), interseção desse plano com (r), pertence a ( $\beta_{13}$ ).**

Resolução: Sendo  $J'$  o ponto comum a  $a'$  e  $b'$  e  $J$  o comum a  $a$  e  $b$ , a linha de chama da  $J'J$  dá direção à épura (Figura 301), visto que a linha de terra procurada há de lhe ser perpendicular.

E, utilizando uma reta auxiliar ( $s$ ), do plano das retas (a) e (b), com  $s' \equiv r'$ , fica imediato obter o traço (I) de (r) com o plano.

A mediatrix de  $I'I$  é, então, a linha de terra pedida (Figura 301), cuja orientação, no entanto, não pode ser determinada, sendo, por isso, indicada como  $\pi'\pi$ .

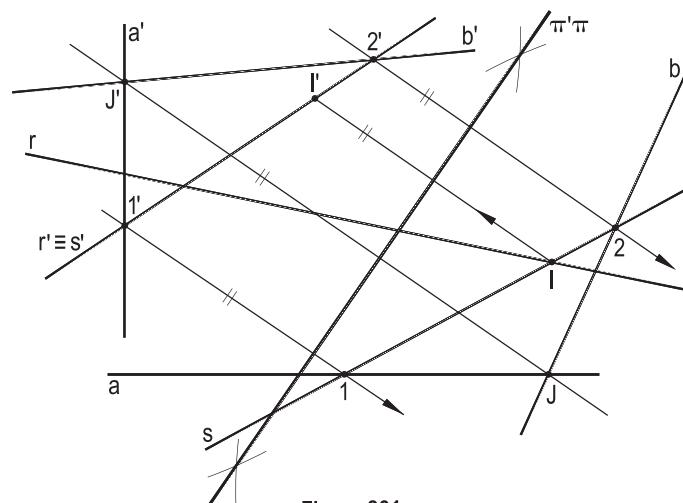


Figura 301

**227 – Determinar as projeções do ponto (J), pertencente aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), dados por seus traços, sabendo que (J), do primeiro diedro, equidista dos traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: (J) deve pertencer à bissetriz do ângulo objetivo dos traços de ( $\alpha$ ), no primeiro diedro.

Assim, construída essa bissetriz (b) (Figura 302), tal como detalhado no número 3.4, basta determinar seu traço (J) com o plano ( $\gamma$ ), para resolver o problema.

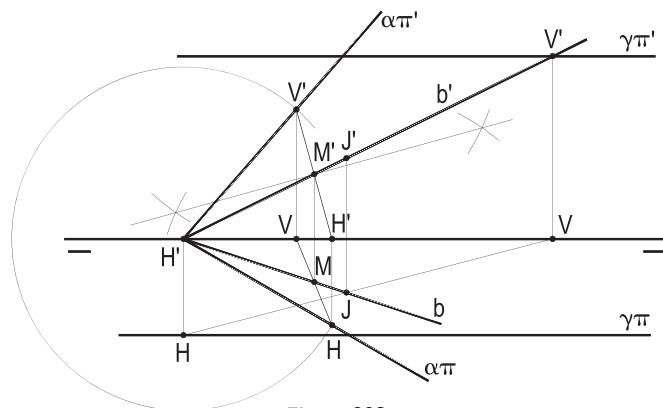


Figura 302

**228 – O triângulo (A)(B)(C) tem seus lados (A)(B) e (A)(C) sobre as retas (r), (s) e (B)(C) em ( $\beta_{24}$ ), com a mediana relativa a (B)(C) de perfil.**

Sendo (G) o baricentro desse triângulo, (G)(L) e (G)(K) duas retas tais que, em épura, o quadrilátero G'L'GK seja um quadrado, com (L) e (K) pertencendo a ( $\beta_{24}$ ), pede-se construir as projeções dos triângulos (A)(B)(C) e (G)(L)(K).

São dadas as projeções A', A, r', r e s.

Resolução: (B) é o traço de (r) com ( $\beta_{24}$ ) e, por ser de perfil a mediana (A)(M), a abscissa de (C) há de ser a simétrica da de (B), em relação à de (A), o que proporciona (C), a projeção C no cruzamento de s com a linha de chamada p (Figura 303).

Marcadas, nas duas projeções, o baricentro (G), com o auxílio da mediana (C)(N), fica simples a construção das projeções do triângulo (G)(L)(K), com (L) e (K) na fronto-horizontal de ( $\beta_{24}$ ), mediatrix de G'G, arbitrada a ordem de abscissas para (L) e (K).

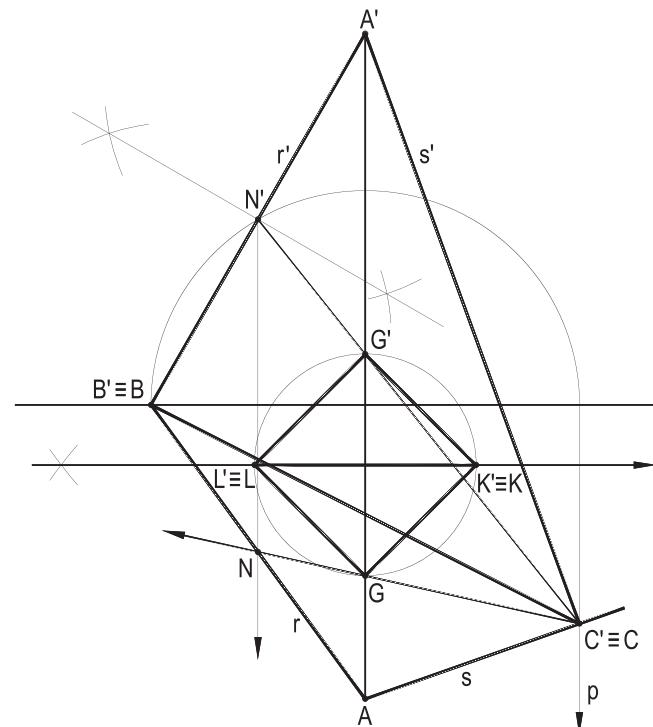


Figura 303

# CAPÍTULO VI

## PARALELISMO

Os problemas escolhidos para esta parte versam sobre planos paralelos, retas paralelas a planos e retas reversas. São cerca de oito dezenas.

**229 – Construir as projeções do segmento (A)(B), de 16 mm de comprimento e paralelo aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), sabendo que seus extremos (A) e (B) pertencem, respectivamente, aos planos ( $\theta$ ) e ( $\phi$ ), (A) com cota igual a 8 mm e abscissa menor que a de (B). São dados os traços dos quatro planos.**

Resolução: Os traços verticais paralelos de ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) asseguram que sua interseção seja uma frontal, sobre a qual é simples marcar a V.G. do comprimento de 16 mm (Figura 304).

E, por serem verticais os planos ( $\theta$ ) e ( $\phi$ ), é imediato aplicar, entre seus traços horizontais, o segmento k, que corresponde, na frontal procurada, àquela V.G.

**230 – Desenhar as projeções da reta (r), concorrente com as retas (a) e (b) e paralela aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), este definido por duas retas paralelas (m) e (n). São dadas as projeções das quatro retas e os traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: Para ser paralela aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), (r) deverá ser paralela à sua interseção, ou a uma paralela a ela, como a reta (s), acessível no espaço entregue, aproveitando ser ( $\beta$ ) um plano de topo (Figura 305).

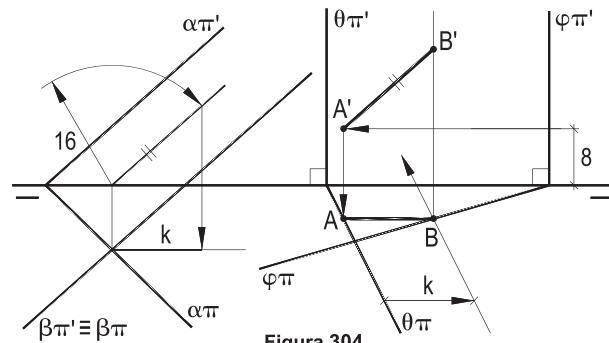


Figura 304

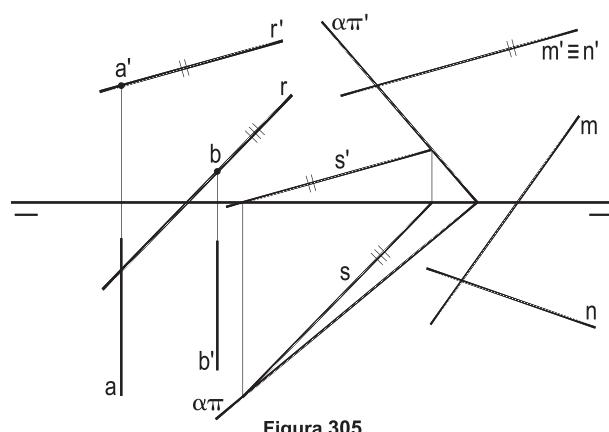


Figura 305

Em cada uma das épuras abaixo, pede-se construir as projeções da reta ( $r$ ) pertencente ao ponto ( $A$ ) e paralela ao plano ( $\alpha$ ), atendendo à condição estabelecida para cada caso. São dadas sempre as projeções do ponto ( $A$ ) e os traços do plano ( $\alpha$ ).

Resolução: Sempre que necessário, foi utilizada uma reta auxiliar ( $s$ ), de ( $\alpha$ ).

231 – ( $r$ ) é paralela a ( $\pi'$ )

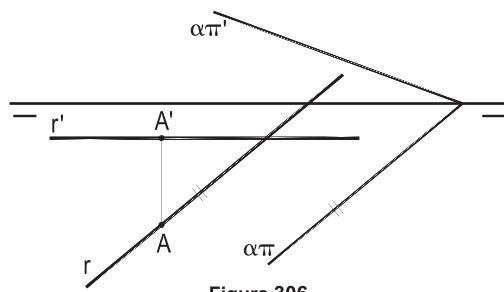


Figura 306

232 – ( $r$ ) é paralela a ( $\pi'$ )

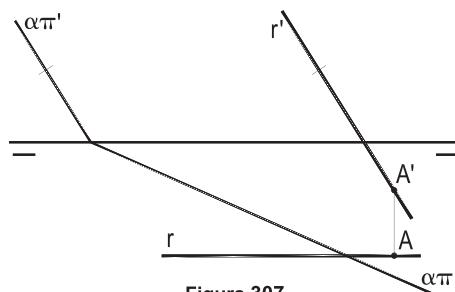


Figura 307

233 – ( $r$ ) é paralela a ( $\beta_{24}$ )

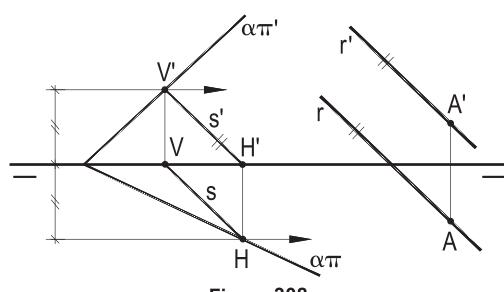


Figura 308

234 – ( $r$ ) é paralela a ( $\beta_{13}$ )

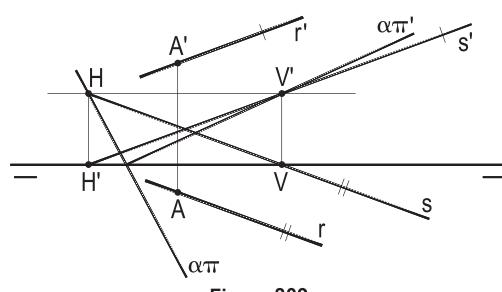


Figura 309

235 – ( $r$ ) concorre com ( $\pi'\pi$ )

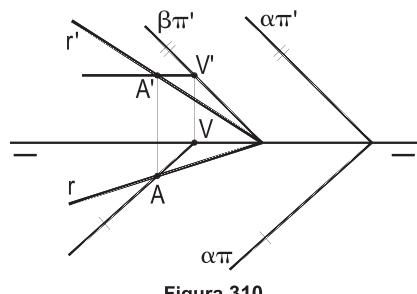


Figura 310

236 – ( $r$ ) é de perfil

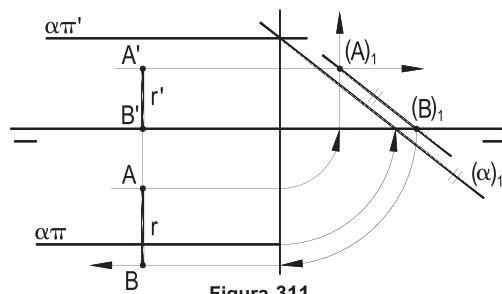


Figura 311

237 – ( $r$ ) concorre com ( $a$ )

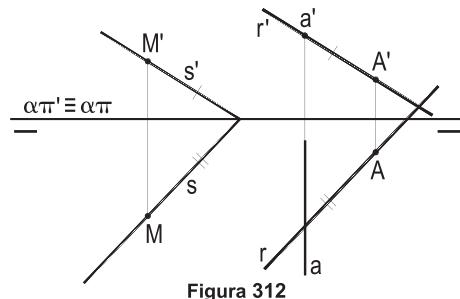


Figura 312

238 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ )

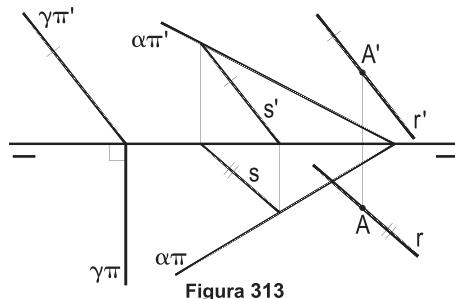


Figura 313

**239 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ )**

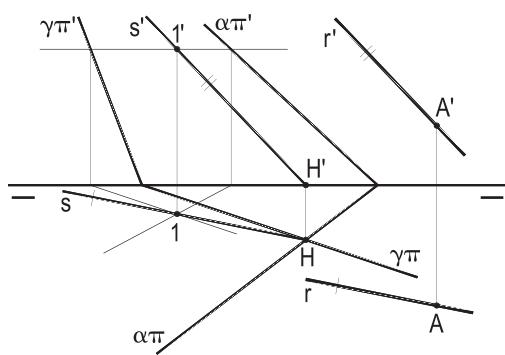


Figura 314

**240 – ( $r$ ) concorre com a reta ( $a$ ), dada**

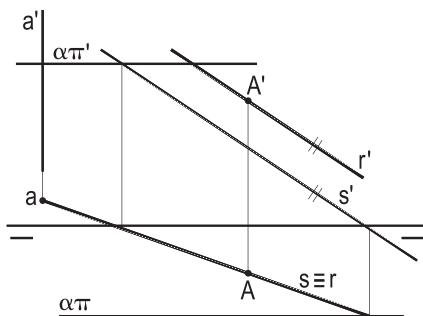


Figura 315

**241 – ( $r$ )  $\epsilon$  ( $\gamma$ ), dado  $\gamma\pi$**

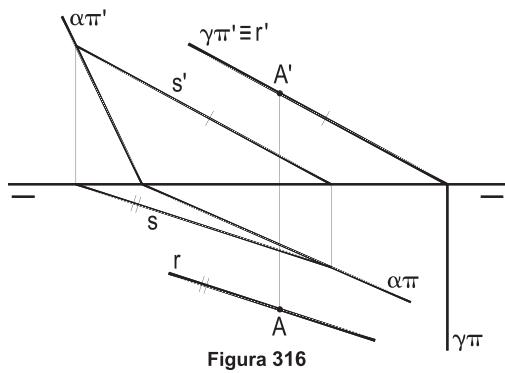


Figura 316

**242 – ( $r$ ) é de perfil  $\equiv$  (AB)**

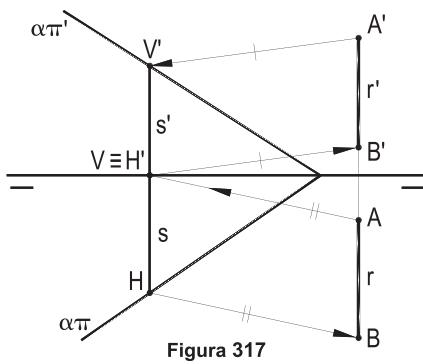


Figura 317

**243 – ( $r$ ) é paralela a ( $\pi'\pi$ )–(M)**

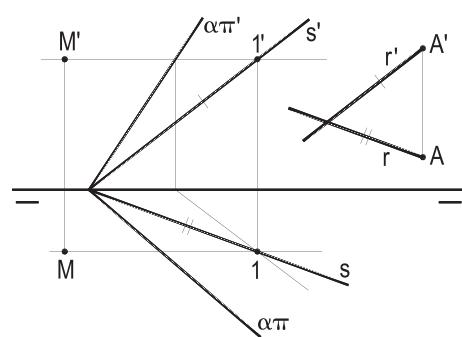


Figura 318

**244 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ ), perpendicular a ( $\beta_{24}$ ). Dado  $\gamma\pi'$**

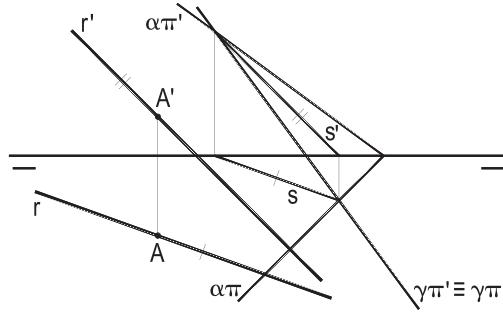


Figura 319

**245 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ ), dado**

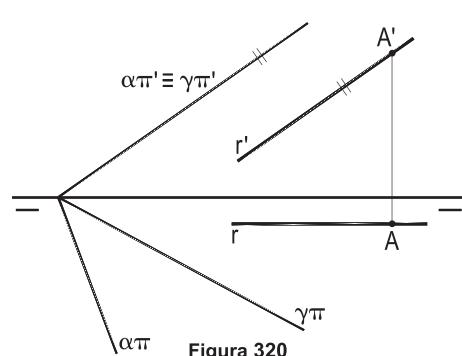


Figura 320

**246 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ ). Dados  $\gamma\pi$  e  $\gamma\pi'$**

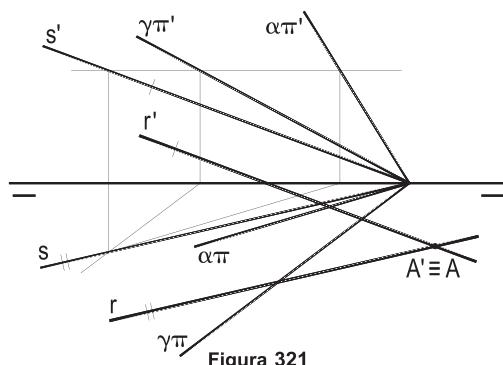
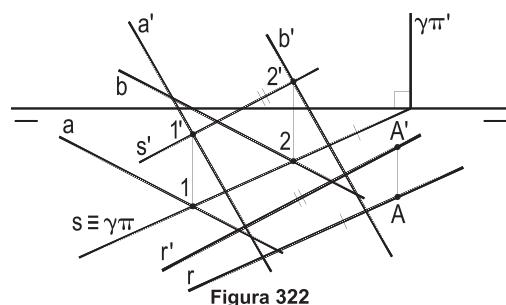


Figura 321

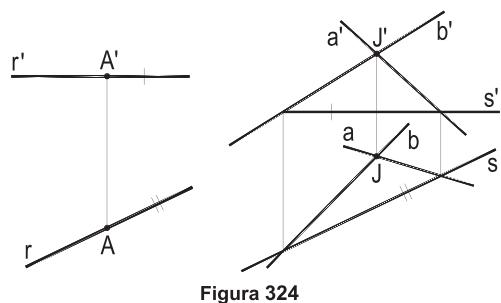
Para cada épura abaixo, construir as projeções da reta ( $r$ ) pertencente ao ponto (A) e paralela ao plano ( $\alpha$ ) das retas (a) e (b), obedecendo à condição imposta, dadas as projeções de (A), (a) e (b).

Resoluções: Sempre que preciso, lançou-se mão de uma reta ( $s$ ), auxiliar, de ( $\alpha$ ).

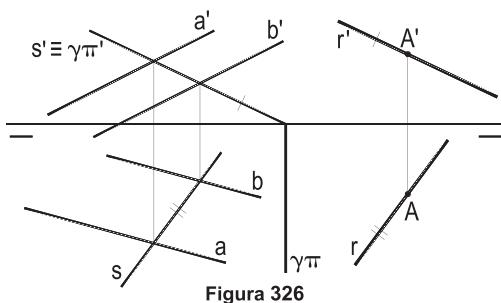
**247 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ ), dado**



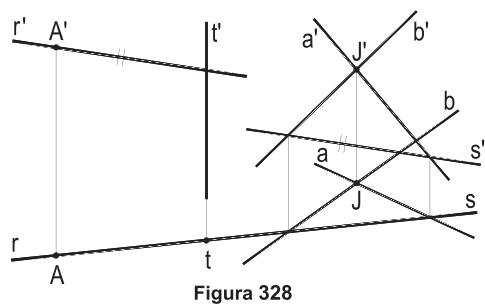
**249 – ( $r$ ) é paralela a ( $\pi$ )**



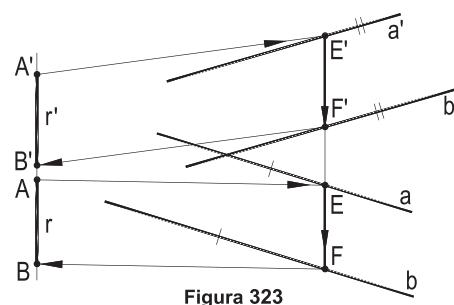
**251 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ ), dado**



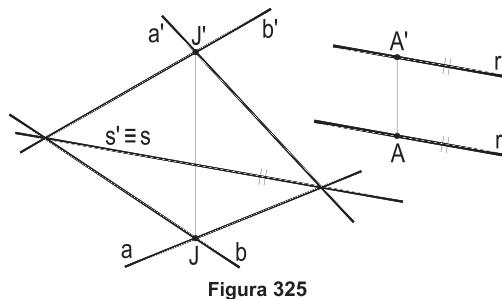
**253 – ( $r$ ) concorre com ( $t$ )**



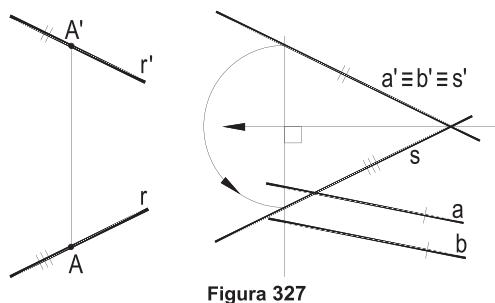
**248 – ( $r$ ) é de perfil**



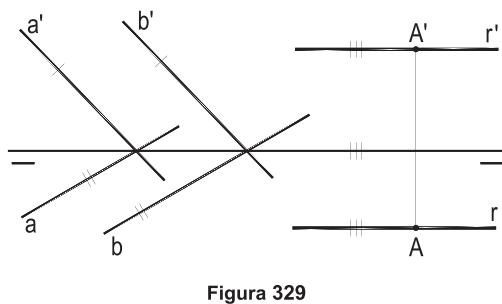
**250 – ( $r$ ) é paralela a ( $\beta_{24}$ )**



**252 – ( $r$ ) é paralela a ( $\beta_{13}$ )**



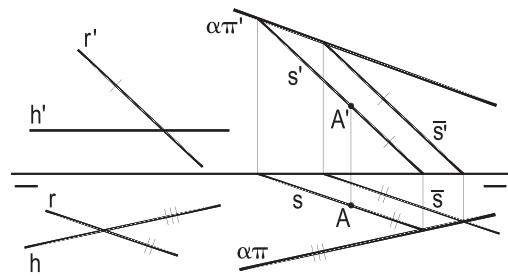
**254 – ( $r$ ) é paralela a ( $\pi'$ )**



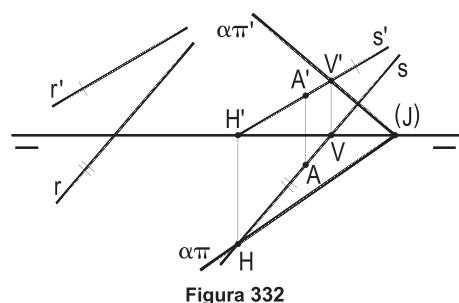
Em cada uma das épuras seguintes, são dadas as projeções de um ponto ( $A$ ) e de uma reta ( $r$ ). Pede-se determinar, por seus traços, o plano ( $\alpha$ ), pertencente a ( $A$ ) e paralelo a ( $r$ ), atendendo à condição imposta.

Resoluções: Utilizadas uma ou duas retas ( $s$ ), auxiliares, de ( $\alpha$ ), salvo na Figura 337, que apresenta duas soluções.

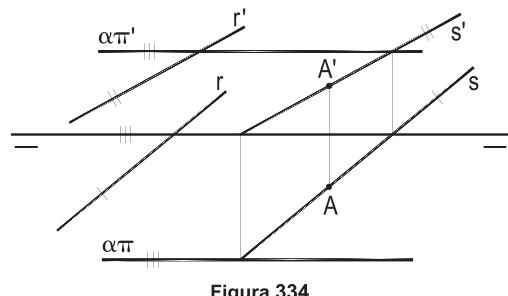
**255 – ( $\alpha$ ) é paralelo a ( $h$ ), dado**



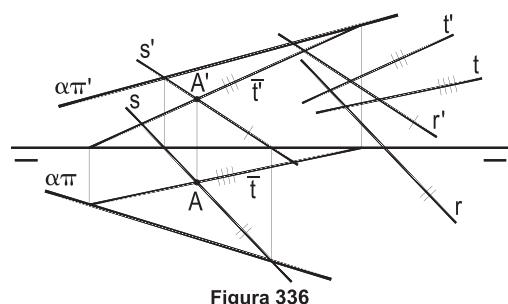
**257 – ( $\alpha$ ) pertence a ( $J$ ), dado**



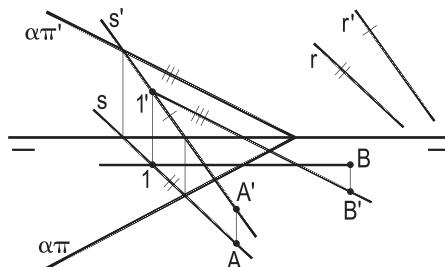
**259 – ( $\alpha$ ) é paralelo a ( $\pi'\pi$ )**



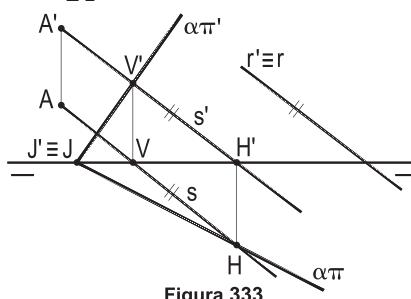
**261 – ( $\alpha$ ) é paralelo a ( $t$ )**



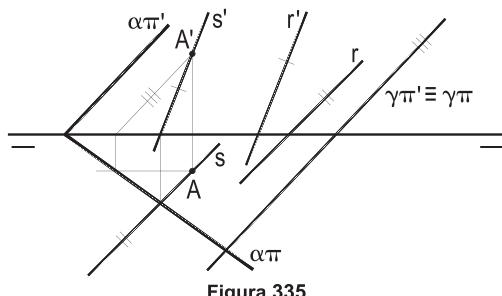
**256 – ( $\alpha$ )  $\in$  ( $B$ ), dado**



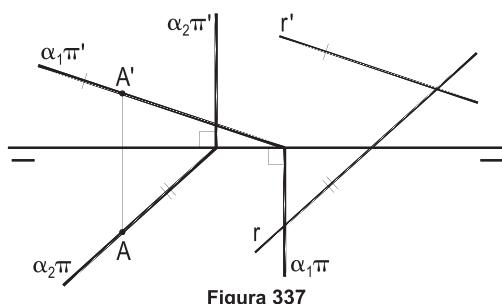
**258 –  $r \in (\beta_{24})$ ; ( $\alpha$ )  $\in$  ( $J$ ), dado**



**260 – ( $\alpha$ ) corta ( $\gamma$ ) segundo uma frontal.  
Dado ( $\gamma$ )**



**262 – ( $\alpha$ ) é projetante**



Para cada uma das épuras abaixo, pede-se construir o plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto (A) e paralelo à reta (r), atendendo às condições impostas. O plano ( $\alpha$ ) deve ser apresentado por duas retas (a) e (b). (A) e (r) são dadas por suas projeções.

Resoluções: Além de (a), paralela a (r), a reta (b) atende a cada condição imposta.

263 – ( $\alpha$ )  $\in$  (J), dado

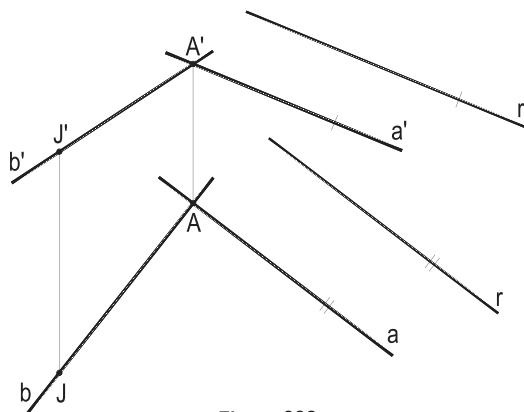


Figura 338

264 – ( $\alpha$ ) é paralelo a ( $\pi'\pi$ )

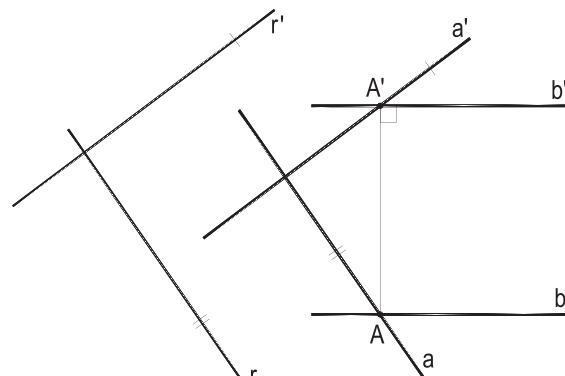


Figura 339

265 – As retas de maior declive de ( $\alpha$ ) são 266 – ( $\alpha$ ) é equidistante dos pontos (P) e (Q), dados

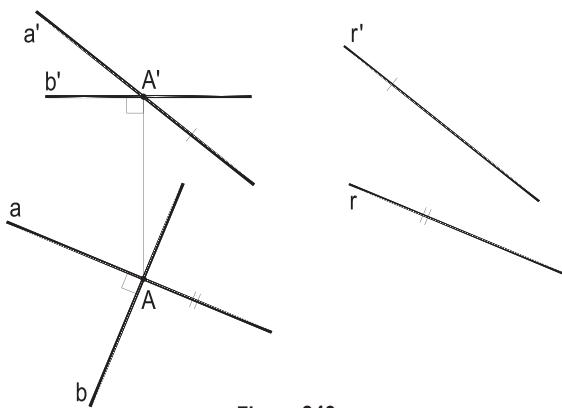


Figura 340

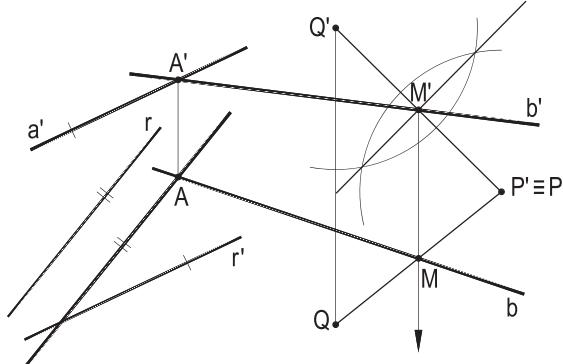


Figura 341

267 – ( $\alpha$ ) corta ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), dados, segundo 268 – ( $\alpha$ ) não tem traço com a reta (t) retas paralelas

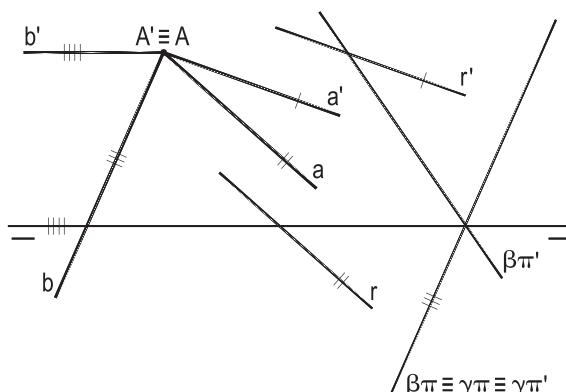


Figura 342

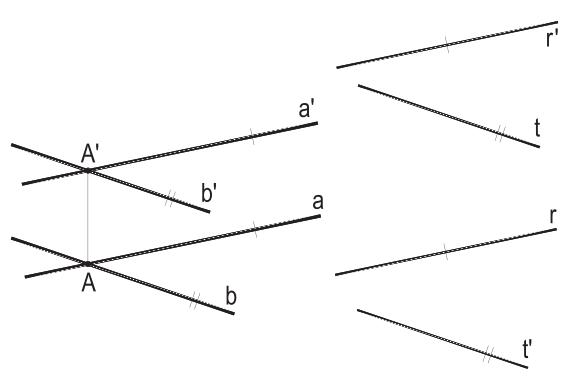


Figura 343

Para cada uma das épuras abaixo, pede-se construir os traços do plano ( $\theta$ ), paralelo ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, ou pelas projeções de suas retas (a) e (b), sabendo que ( $\theta$ ) contém o ponto (J), definido por condições estabelecidas caso a caso.

Resoluções: Determinado o ponto (J), a construção de ( $\theta$ ) se faz, sempre, com o auxílio de uma reta (t) pertencente a (J) e paralela a ( $\alpha$ ).

**269 – (J)  $\in (\pi''\beta_{13})$  e dista 20 mm de ( $\pi'\pi$ ), 270 – (J)  $\equiv (r\beta_{24})$  no primeiro diedro**

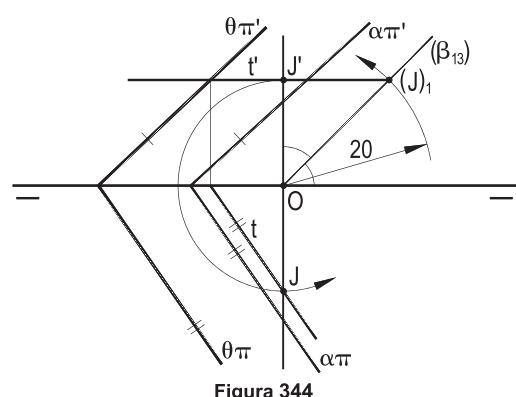


Figura 344

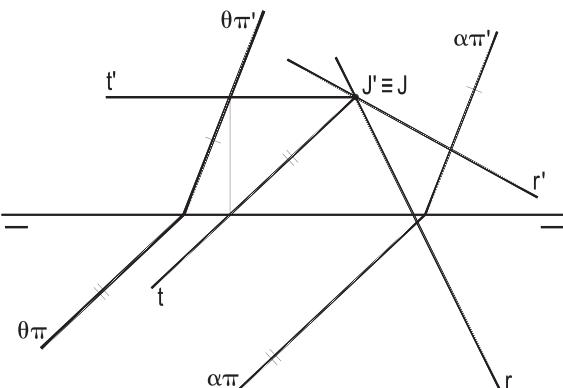


Figura 345

**271 – (J)  $\equiv (\phi\rho\lambda)$**

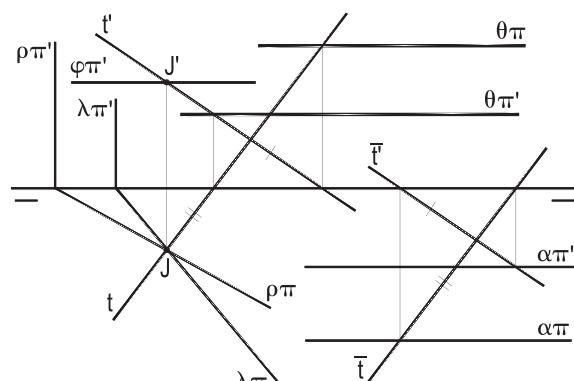


Figura 346

**272 – Dados J', J**

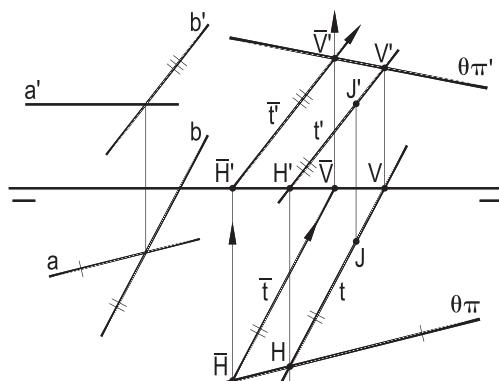


Figura 347

**273 – (J)  $\equiv (\gamma\pi''\beta_{13})$**

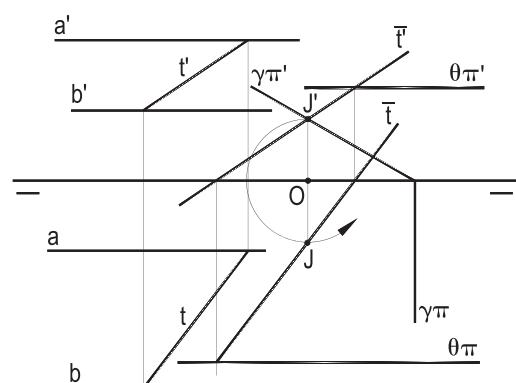


Figura 348

**274 – Dados J', J**

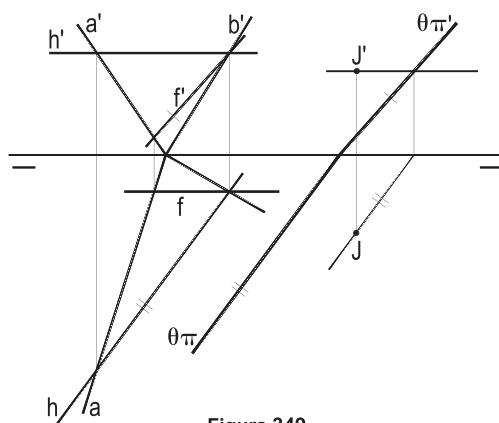


Figura 349

**Em todos os casos abaixo, são dadas as projeções da reta ( $r$ ) e do ponto ( $A$ ). Pe-de-se determinar os traços do plano ( $\alpha$ ) equidistante de ( $r$ ) e de ( $A$ ) e atendendo a cada condição imposta.**

**Resoluções:** O plano ( $\alpha$ ) procurado, para equidistar de ( $A$ ) e de ( $r$ ), deve conter o ponto ( $M$ ), médio de um segmento formado por ( $A$ ) e por um ponto ( $B$ ), qualquer, de ( $r$ ) (*Geometria Espacial*, número 20.3), além de ter que ser paralelo a ( $r$ ). Assim, a reta ( $t$ ), traçada por ( $M$ ), paralela a ( $r$ ), e cada condição dada resolvem os problemas. Duas soluções para o número 280.

**275 – ( $\alpha$ ) // ( $\pi'\pi$ )**

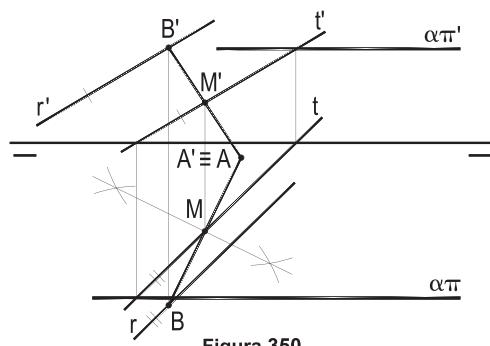


Figura 350

**276 – ( $\alpha$ ) ε (N), dado**

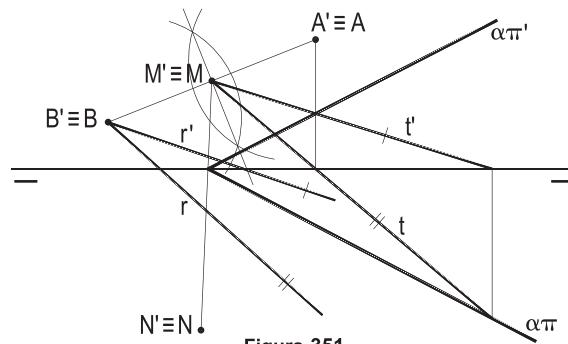


Figura 351

**277 – ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\beta_{24}$ )**

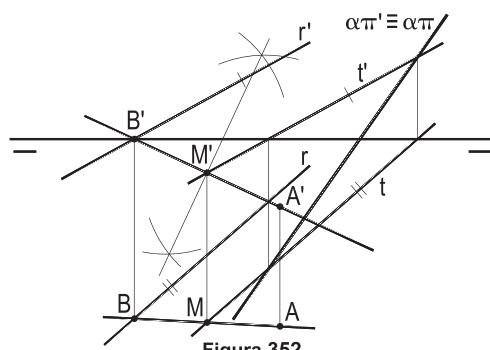


Figura 352

**278 – ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\beta_{13}$ )**

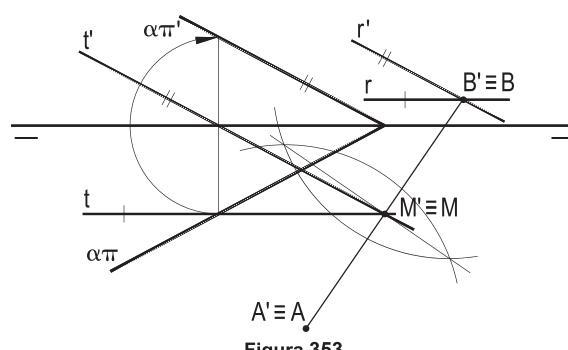


Figura 353

**279 – ( $\alpha$ ) // (s), dada**

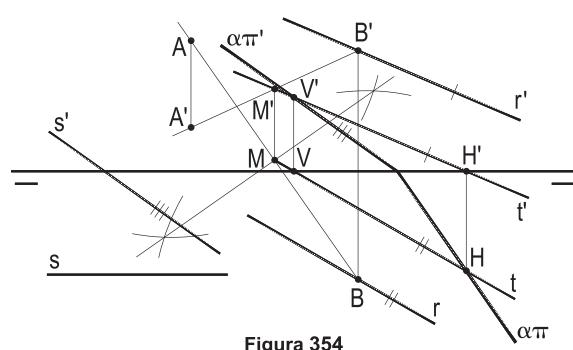


Figura 354

**280 – ( $\alpha$ ) é projetante**

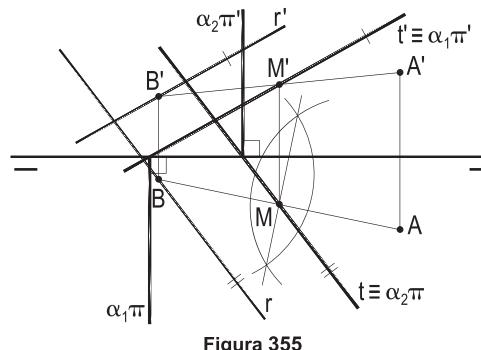
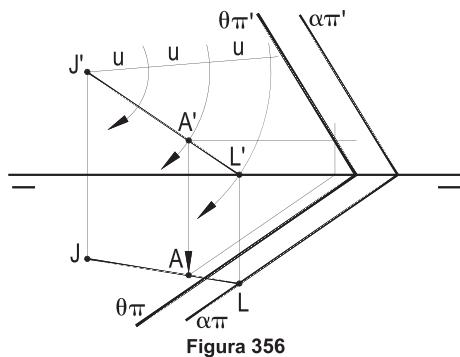


Figura 355

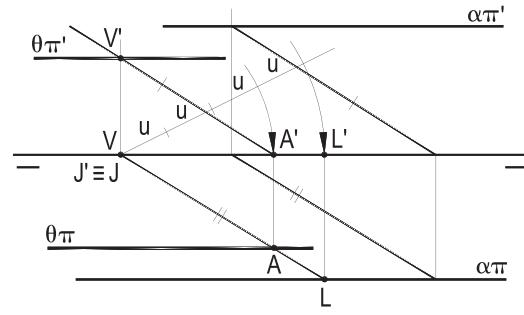
Em todos os casos abaixo, sendo dados um plano ( $\alpha$ ), por seus traços, ou pelas projeções de duas retas suas, (a) e (b), e o ponto (J), por suas projeções, pede-se construir o plano ( $\theta$ ), por seus traços, ou por duas retas (r) e (s), sabendo que ele se situa entre ( $\alpha$ ) e (J), distando  $d_1$  de ( $\alpha$ ) e  $d_2$  de (J), segundo a razão  $k = d_1 / d_2$ , dada, caso a caso.

Resoluções: Apoiado um segmento (J)(L), (L) em ( $\alpha$ ), e determinado o ponto (A) desse segmento em obediência ao valor k, dado em cada caso, o plano ( $\theta$ ) pedido conterá (A) e será paralelo a ( $\alpha$ ).

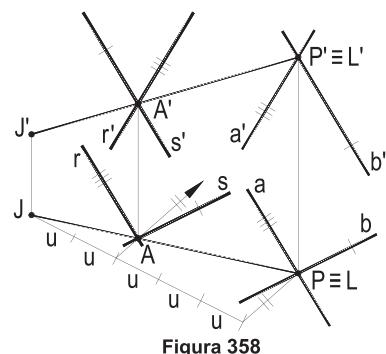
**281 –  $k = 1/2$**



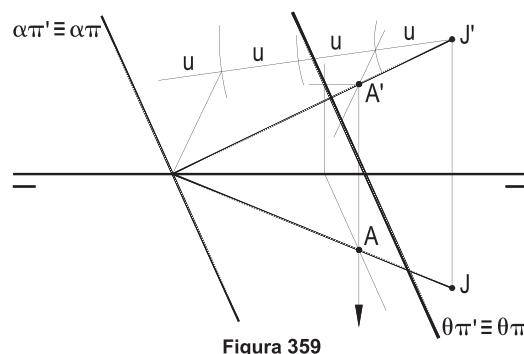
**282 –  $k = 1/3$**



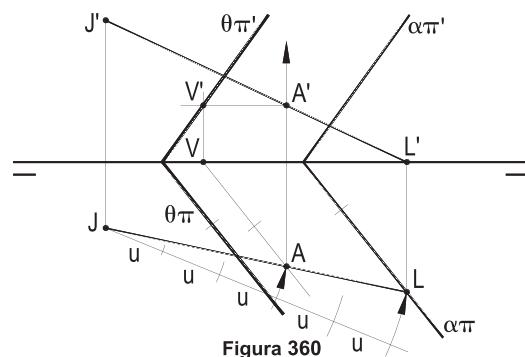
**283 –  $k = 3/2$**



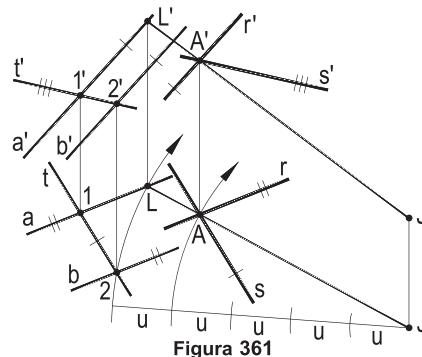
**284 –  $k = 3$**



**285 –  $k = 2/3$**



**286 –  $k = 1/4$**



**287 – Dados um ponto (A), por suas projeções, e um plano ( $\alpha$ ), por seus traços, construa as projeções do segmento (A)(B), paralelo a ( $\alpha$ ), sabendo que (B) pertence a ( $\pi$ ) e que o comprimento de (A)(B) iguala a soma da cota e do afastamento de (A).**

**Em seguida, determine as projeções da altura (A)(H) e do baricentro (G) do triângulo que (A) forma com as duas soluções possíveis para o ponto (B).**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 27) que o lugar geométrico dos pontos (B), de ( $\pi$ ), que distam um valor constante de um ponto (A), exterior, é a circunferência com centro na projeção horizontal de (A), base do cone de revolução, com geratriz igual àquela constante.

Essa é a construção utilizada (Figura 362), para conseguir, em V.G., a circunferência à qual pertencerá o ponto (B), procurado. Em verdade, sua projeção horizontal, B.

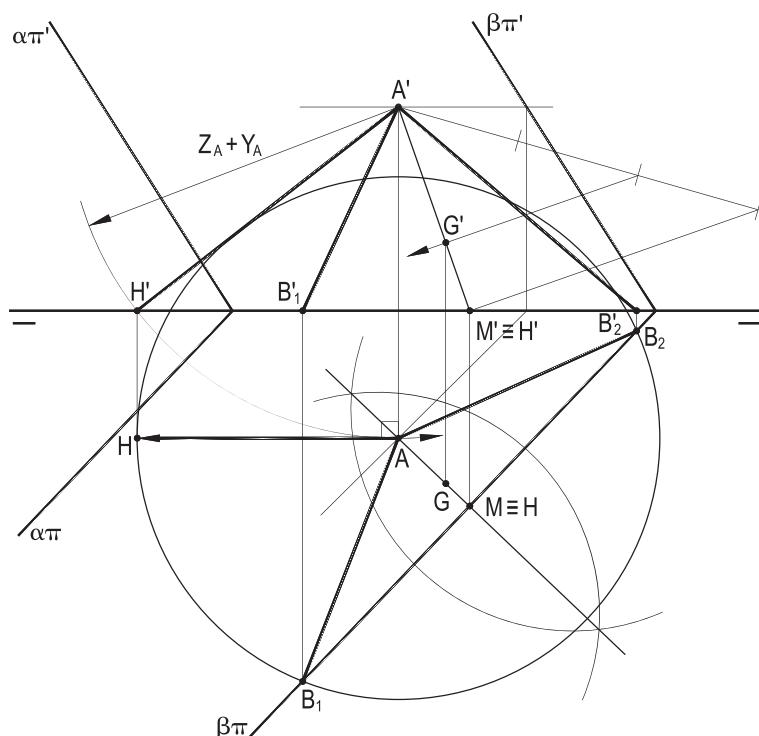


Figura 362

E como (A)(B), para ser paralelo a ( $\alpha$ ), tem que pertencer a um plano que, passando por (A), seja paralelo a ( $\alpha$ ) (*Geometria Descritiva*, número 62), basta conduzir por (A) o plano ( $\beta$ ), paralelo a ( $\alpha$ ), e determinar as interseções  $B_1$  e  $B_2$  da circunferência antes construída com o traço horizontal  $\beta\pi$ , deste plano (Figura 362).

As retas (A)( $B_1$ ) e (A)( $B_2$ ) são as soluções da primeira parte do problema.

Para a construção da altura (A)(H), observe-se que o triângulo que (A) forma com as duas soluções para o ponto (B) é isósceles, com base ( $B_1$ )( $B_2$ ), já que (A)( $B_1$ ) e (A)( $B_2$ ) são geratrizes do mesmo cone de revolução, e, por isso, a altura (A)(H) é também a mediana relativa à base ( $B_1$ )( $B_2$ ).

Assim, obtido o ponto (M), médio de ( $B_1$ )( $B_2$ ), que, afinal, é o pé da altura, fica imediato construir suas projeções, assim como as do baricentro (G), pela divisão dessa mediana (A)(M) em três partes iguais (Figura 362).

**288 – Construir as projeções da reta ( $r$ ), pertencente ao ponto ( $J$ ) e paralela ao plano  $(\pi'\pi)-(M)$ , sabendo que, em épura, são perpendiculares entre si as projeções de ( $r$ ).**

**Dadas as projeções  $J, J'$ ,  $M$  e  $M'$ .**

Resolução: Numa vista lateral, define-se o plano  $(\alpha)$ , pertencente a ( $J$ ) e paralelo ao  $(\pi'\pi)-(M)$  dado (Figura 363).

Alçada a interseção ( $p$ ) de  $(\alpha)$  com  $(\beta_{24})$  e construído o arco capaz de  $90^\circ$  para o segmento  $J'J$ , por interseção, obtém-se o ponto ( $P$ ), que define, com ( $J$ ), a reta ( $r$ ) pedida (Figura 363).

Há uma segunda solução ( $\bar{r}$ ).

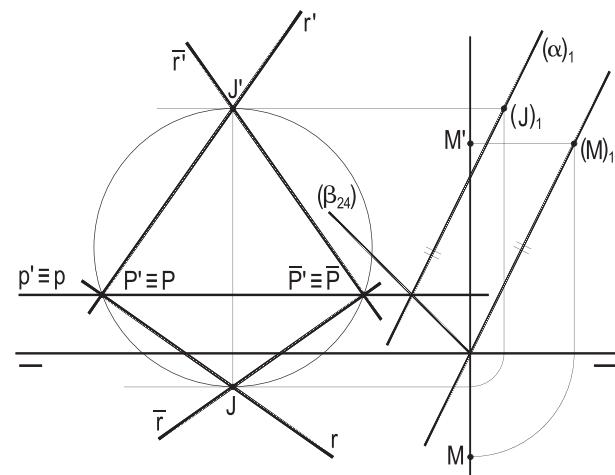


Figura 363

**289 – A reta ( $t$ ) passa pelo ponto ( $A$ ), do primeiro diedro, é paralela aos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  e concorre com os dois bissetores num mesmo ponto ( $B$ ).**

**Dadas as projeções das retas concorrentes ( $r$ ) e ( $s$ ), que definem o plano  $(\alpha)$ , e as fronto-horizontais ( $a$ ) e ( $b$ ), do plano  $(\beta)$ , além das projeções do ponto ( $A$ ), pede-se construir as projeções do ponto ( $B$ ) e da reta ( $t$ ) e determinar a posição da linha de terra.**

Resolução: Para ser paralela aos dois planos dados, a reta ( $t$ ) deve ser paralela à sua interseção, o que se consegue com auxílio dos planos horizontais conduzidos por ( $a$ ) e por ( $b$ ), que proporcionam, respectivamente, os pontos ( $K$ ) e ( $L$ ), que, então, definem a interseção ( $\alpha\beta$ ) (Figura 364).

A reta ( $t$ ) procurada, para concorrer com os dois bissetores num mesmo ponto ( $B$ ), necessariamente concorre com a linha de terra nesse ponto ( $B$ ).

Assim, construída ( $t$ ), por ( $A$ ), paralela a ( $KL$ ) e definido seu traço ( $B$ ) com os dois bissetores (Figura 364), determina-se, por esse ponto ( $B$ ), a linha de terra, orientada de modo a deixar ( $A$ ) no primeiro diedro.

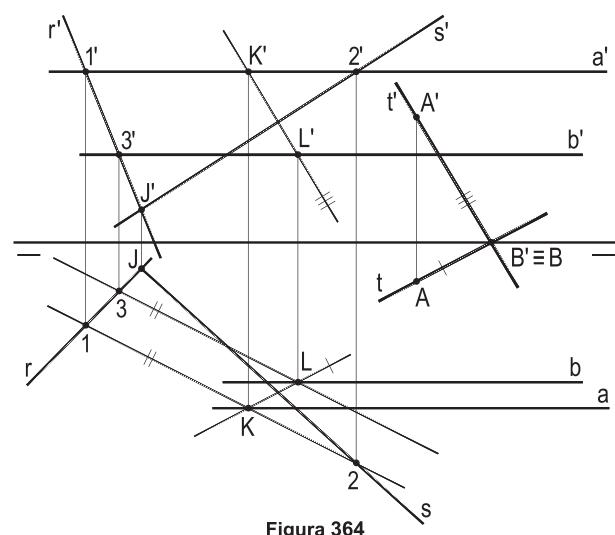


Figura 364

**290 – Dados o plano ( $\alpha$ ), por seus traços, o ponto (A) e as retas (r) e (s), exteriores, todos por suas projeções, pede-se apoiar, em (r), a reta (a) e, em (s), a reta (b), ambas passando pelo ponto (A) e ambas paralelas a ( $\alpha$ ). Em seguida, construir as projeções do quadrilátero (C)(D)(E)(F), que tenha os lados (C)(D) em (a), (E)(F) em (b), (D)(E) em ( $\pi$ ), e os vértices (C) e (F) respectivamente em (r) e em (s).**

Resolução: Para serem paralelas a ( $\alpha$ ), passando, ambas, por (A), as retas (a) e (b) devem pertencer ao plano ( $\beta$ ), que contém (A), sendo paralelo a ( $\alpha$ ).

Construído ( $\beta$ ) e obtidas suas interseções (C) e (F) com (r) e com (s), respectivamente, ficam definidas as retas (a) e (b) (Figura 365).

E seus traços horizontais (D) e (E) completam o quadrilátero (C)(D)(E)(F) pedido.

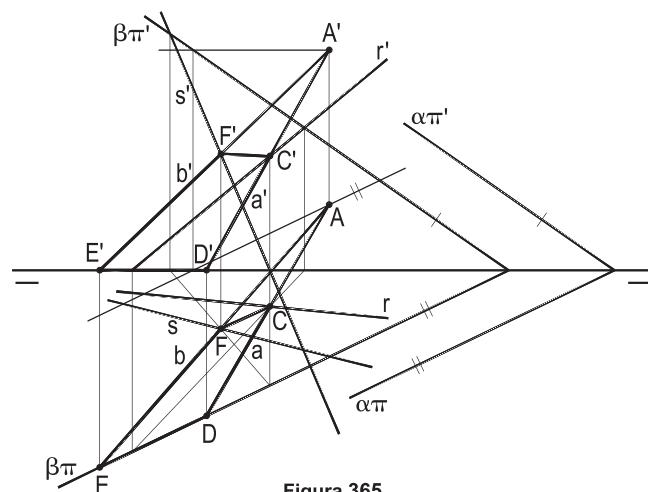


Figura 365

**291 – Dadas, por suas projeções, as reversas (r) e (s) e o ponto (A) exterior a elas, pede-se construir o plano ( $\alpha$ ) pertencente a (r) e paralelo a (s) e, em seguida, determinar a posição da linha de terra, os traços de ( $\alpha$ ) e as projeções do triângulo (A)(H)(V), sendo (H) e (V) os traços horizontal e vertical de (r), sabendo que a diferença entre as abscissas de (H) e (V) é igual a dois terços da distância, em épura, entre as projeções de (A).**

Resolução: A construção do plano ( $\alpha$ ) é imediata, pelo traçado de uma paralela ( $s_1$ ) a (s), por um ponto (J) qualquer de (r) (Geometria Descritiva, número 65).

Para localizar a linha de terra, basta utilizar a translação de um segmento KL, igual a  $2/3$  de  $A'A$ , obtendo-se  $H'$ , com  $\bar{r}$  paralela a  $r$ . E, em seguida, ( $\pi'\pi$ ) e, com os traços (H) e (V) de (r) e um traço ( $\bar{V}'$ ) de ( $s_1$ ), os traços de ( $\alpha$ ).

Há uma segunda solução, com  $\bar{r}$  à direita de  $r$ , não apresentada na Figura 366.

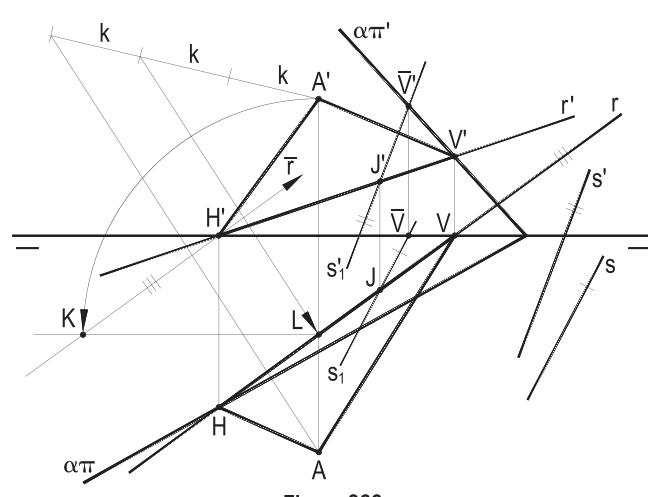


Figura 366

**292 – Dadas, por suas projeções, as retas reversas (A)(B) e (C)(D), pede-se construir o plano ( $\alpha$ ) delas equidistante e, sabendo que é de perfil a reta formada pelos pontos (A) e ( $\alpha\pi'\pi$ ), determinar a posição da linha de terra, de modo a deixar o ponto (A) no primeiro diedro e, então, construir os traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: A construção do plano ( $\alpha$ ) equidistante das reversas dadas é bem simples, pela determinação do ponto (M), médio do segmento (B)(D) apoiado nelas, e pelo envio, por (M), das retas (r) e (s), paralelas às reversas dadas.

Para obter a linha de terra, determina-se a reta (p), interseção de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{24}$ ), pela união dos traços de duas de suas retas, (r) e a horizontal (h) (Figura 367), com esse bissetor, buscando o ponto (P) dessa interseção que tenha a mesma abscissa que (A).

E, determinada a posição da linha de terra, fica imediata a construção dos traços de ( $\alpha$ ), a partir do ponto (P), com a direção da horizontal (h) e a utilização do traço vertical (V) dessa mesma horizontal (Figura 367).

**293 – Construir os traços do plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto (J), paralelo à reta (r) e equidistante dos pontos exteriores (A) e (B).**

Dadas as projeções dos pontos (J), (A) e (B) e da reta (r).

Resolução: Para ser paralelo a (r), ( $\alpha$ ) deve conter uma paralela (s) a essa reta, conduzida pelo ponto (J).

E, para equidistar dos pontos (A) e (B), ( $\alpha$ ) deve passar pelo ponto (M), médio do segmento (A)(B). Assim, a horizontal (M)(N) apoiada em (s) e os traços da reta (s) proporcionam (Figura 368) os traços do plano ( $\alpha$ ).

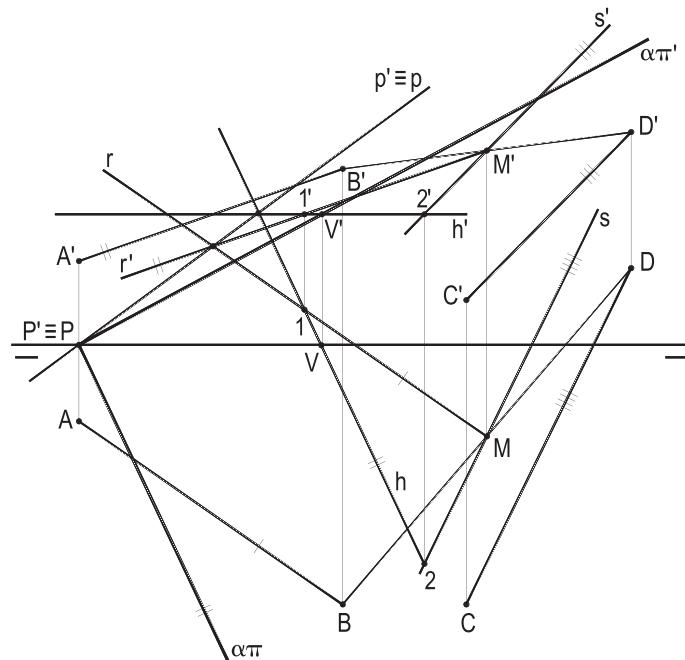


Figura 367

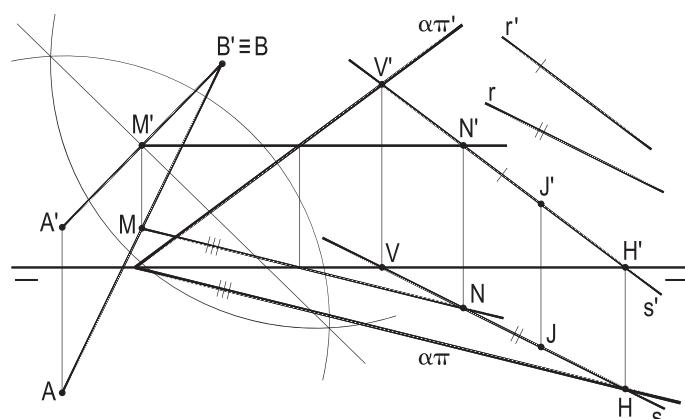


Figura 368

**294** – Construir o plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto (A) e paralelo à reta (r), sabendo que, em épura, são perpendiculares os traços verticais de ( $\alpha$ ) e do plano ( $\gamma$ ), das retas (a) e (b).

São dadas as projeções do ponto (A) e das retas (r), (a) e (b).

Resolução: Conduz-se, por (A), a reta (s), paralela a (r), que há de pertencer a ( $\alpha$ ) e, pela inexistência da linha de terra e pela impossibilidade de obtê-la, utiliza-se uma frontal (f) do plano ( $\gamma$ ), das paralelas (a) e (b), para construir, por (A), a frontal (t), com direção ortogonal à de (f), que assegura a perpendicularidade dos traços verticais de ( $\alpha$ ) e de ( $\gamma$ ), imposta. Assim, ( $\alpha$ ) fica definido pelas concorrentes (s) e (t) (Figura 369).

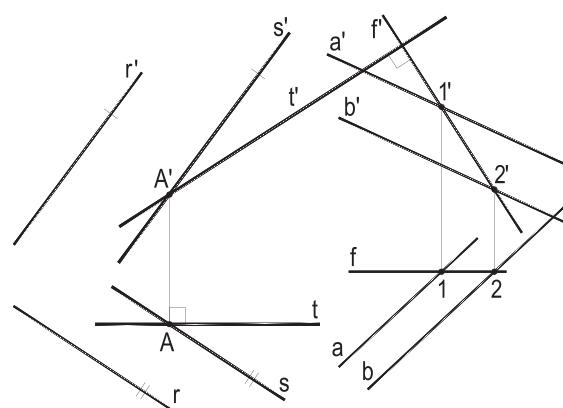


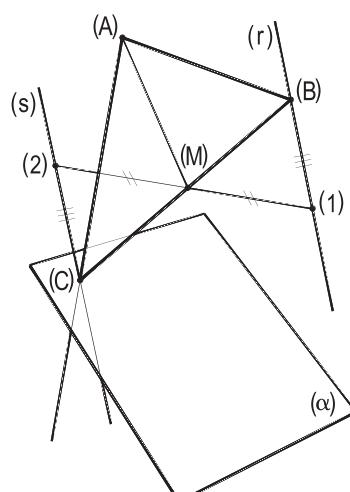
Figura 369

**295 – Desenhar as projeções do triângulo (A)(B)(C), conhecendo sua mediana (A)(M), sabendo que os vértices (B) e (C) pertencem, respectivamente, à reta ( $r$ ) e ao plano ( $\alpha$ ).**

**São dadas as projeções dos pontos (A) e (M) e da reta (r), além dos tracos do plano ( $\alpha$ ).**

Resolução: Por ser  $(M)$  o ponto médio do lado  $(B)(C)$ ,  $(C)$  tem que pertencer à reta  $(s)$ , simétrica de  $(r)$ , em relação a  $(M)$  (Figura 370).

Assim, pela utilização de um ponto (1), qualquer de (r) e de seu simétrico (2), em relação a (M), traça-se, por (2), a reta (s), paralela a (r), em busca de seu traço com ( $\alpha$ ), que será o vértice (C) do triângulo (Figuras 370 e 371). A união de (C) a (M) produz (B), em (r), e, com isso, pode-se completar as projeções do triângulo (A)(B)(C) pedido.



**Figura 370**

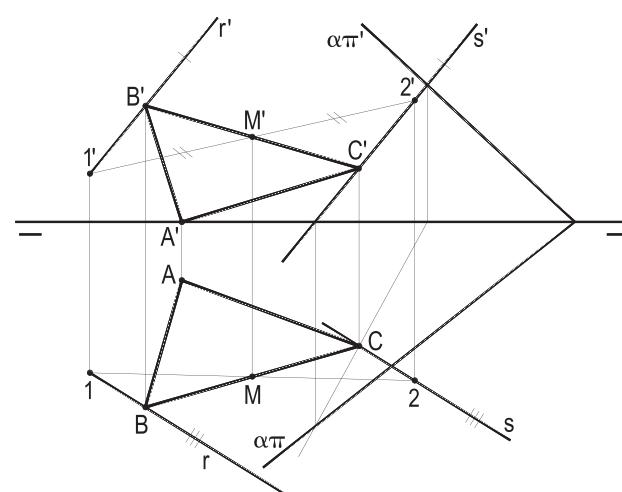


Figura 371

**296 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), cujo baricentro pertence ao plano ( $\alpha$ ) e cujo lado (B)(C) pertence à reta ( $r$ ), (B) em ( $\pi$ ).**

São dadas as projeções do ponto (A) e da reta ( $r$ ), além dos traços de ( $\alpha$ ).

Resolução: Como o baricentro do triângulo pedido deve ficar sobre a mediana (A)(M), a dois terços de seu vértice (*Geometria Plana*, número 147), deve-se construir a reta ( $s$ ), do plano formado por (A) e ( $r$ ) e situada a dois terços da distância entre esses dois elementos, o que se consegue apoando um segmento qualquer (A)(1) em ( $r$ ), tomando seu ponto terço (2), mais próximo de ( $r$ ), e conduzindo, pelo ponto (2), a reta ( $s$ ), paralela a ( $r$ ), que corta ( $\alpha$ ), produzindo o baricentro (G) do triângulo (Figura 372).

A união de (A) a (G) cria a mediana (A)(M) e, porque (B) tem que ser o traço horizontal de ( $r$ ), obtém-se (C) por simetria de (B) em relação a (M).

**297 – Dados por suas projeções, quatro pontos (A), (B), (C) e (D), não coplanares, pede-se construir um feixe de quatro planos paralelos com distâncias iguais entre os pares consecutivos, o primeiro plano pertencendo a (A), o segundo a (B), o terceiro a (C) e o quarto a (D).**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 19) que qualquer transversal a um feixe de planos equidistantes fica por eles dividida em partes iguais.

Por isso, basta criar com os dois pontos extremos dados (A) e (D) (Figura 373) um segmento de reta, dividi-lo em três partes iguais e conduzir, por (B), por (C) e pelos dois pontos de divisão (1) e (2), pares de retas com as direções de (B)(1) e de (C)(2), para compor os quatro planos do feixe (Figura 374).

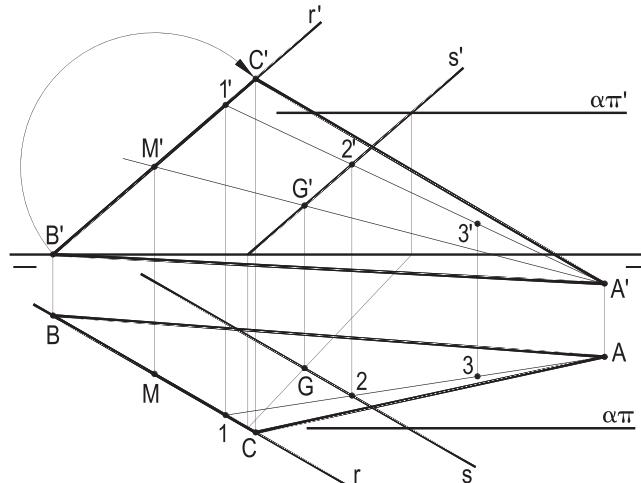


Figura 372

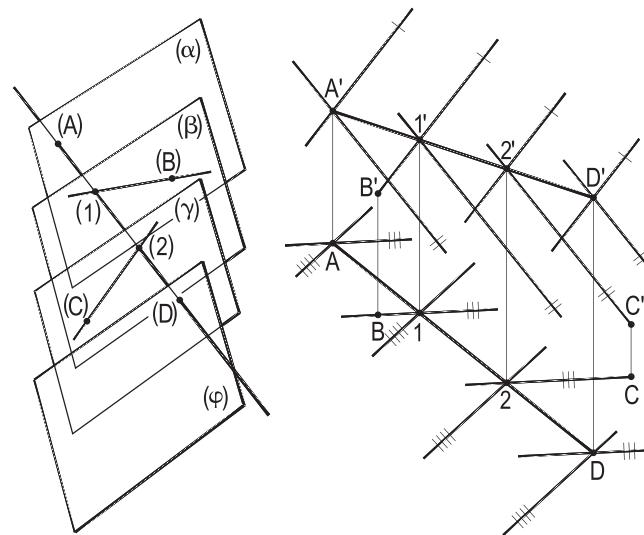


Figura 373

Figura 374

**298 – Construir as projeções da reta (r), paralela à reta (t) e concorrente com as retas de perfil reversas, (A)(B) e (C)(D). Dadas as projeções das retas (t), (A)(B) e (C)(D).**

Resolução: Observemos que, se projetarmos as duas reversas (A)(B) e (C)(D) sobre um plano ( $\gamma$ ) qualquer, segundo a direção (t), as projeções das duas reversas hão de se cortar no ponto  $\bar{r}$  de cruzamento das projeções daquelas duas reversas (Figura 375).

Para a resolução do problema, em épura, buscando a simplicidade, as projeções de (A)(B) e de (C)(D), segundo a direção (t), foram feitas sobre o bissetor par (Figura 376). A reta pedida (r) é a paralela a (t), traçada por ( $\bar{r}$ ).

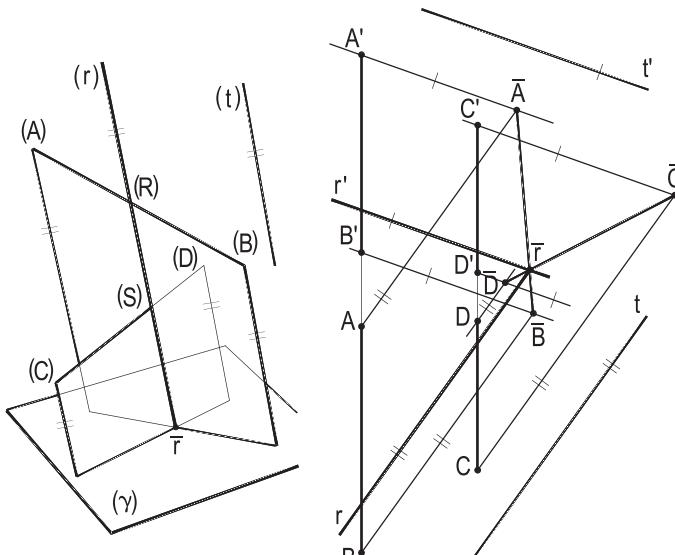


Figura 375

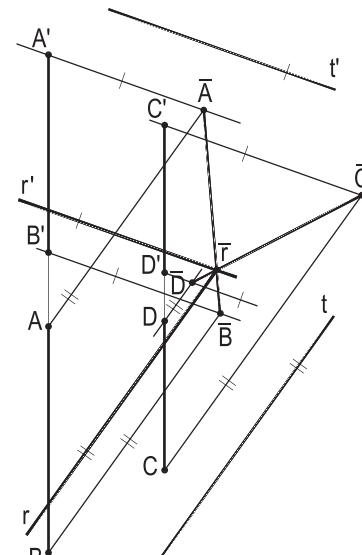


Figura 376

**299 – Determinar as projeções da reta de perfil concorrente com as horizontais (r), (s) e (t), reversas duas a duas. Dadas as projeções das três horizontais.**

Resolução: Aproveitando a particularidade do paralelismo das projeções verticais das três retas horizontais dadas e sabendo que a divisão proporcional de um segmento se repete em suas duas projeções, conclui-se que a reta de perfil procurada há de ver repetida, em suas duas projeções, a divisão que o ponto interno (B) ao segmento (A)(C), procurado, proporciona nele. Assim, basta apoiar em  $t'$  e  $r'$  e em  $t$  e  $r$  dois segmentos  $\overline{1'2'}$  e  $\overline{78}$ , iguais a um valor  $k$ , arbitrado, medir a parcela  $1'3' = \bar{k}$  e repeti-la em  $79$  na projeção horizontal sobre o segmento  $\overline{78}$ . A paralela  $\bar{t}$  a  $t$  repete a proporção que o ponto  $9$  provocou em  $\overline{78}$  e, então, fornece a projeção  $B$  e, em consequência, as duas projeções da reta de perfil (A)(C) pedida (Figura 377).

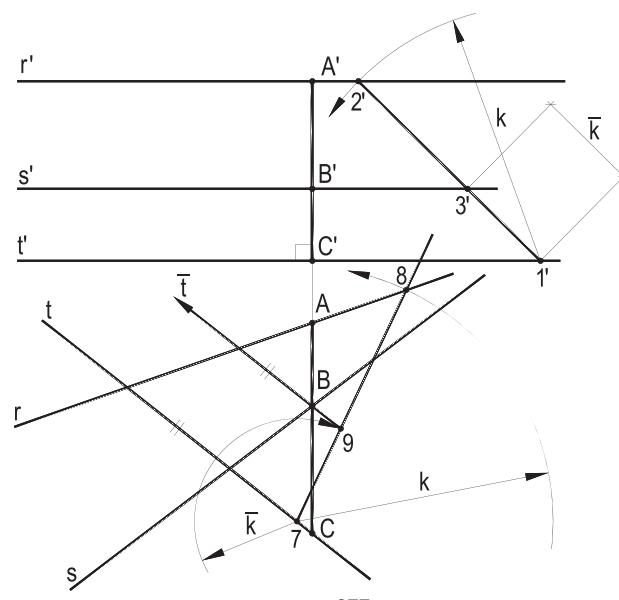


Figura 377

**300 – Dadas três retas ( $r$ ), ( $s$ ) e ( $t$ ), reversas, duas a duas, por suas projeções, pede-se apoiar em ( $r$ ) e em ( $s$ ) uma reta paralela a ( $t$ ).**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Descritiva*, número 62) que o lugar geométrico das retas que se apoiam na reta ( $r$ ) e que são paralelas à reta ( $t$ ) é o plano pertencente a ( $r$ ) e paralelo a ( $t$ ), formado por ( $r$ ) e uma paralela ( $t_1$ ) a ( $t$ ), traçada por um ponto ( $J$ ), qualquer de ( $r$ ).

Assim, construído esse plano, basta obter sua interseção ( $A$ ) com a reta ( $s$ ) e conduzir, por ( $A$ ), a reta ( $a$ ) (*Figura 378*), paralela a ( $t$ ), apoiando-se, pelo ponto ( $B$ ), em ( $r$ ).

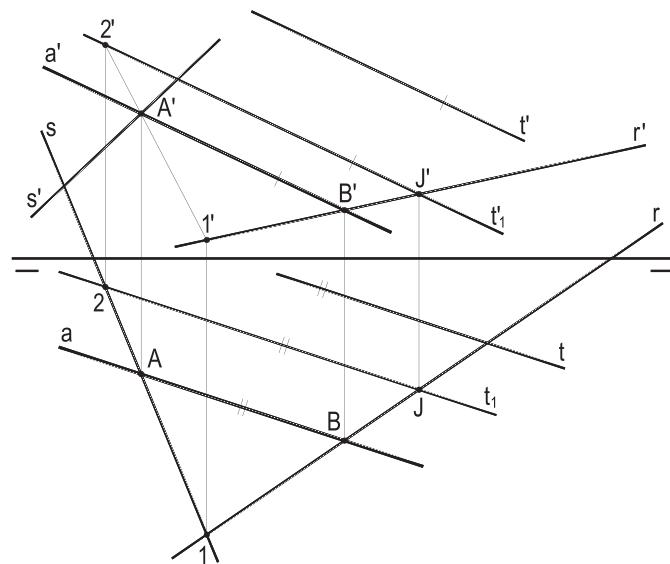


Figura 378

**301 – Definir o plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto ( $A$ ) e paralelo à reta ( $r$ ), sabendo que, em épura, seus traços são colineares, e o plano ( $\gamma$ ), pertencente ao ponto ( $P$ ), também paralelo a ( $r$ ), de modo tal que, em épura, seus traços sejam simétricos em relação à linha de terra, dadas as projeções dos pontos ( $A$ ) e ( $P$ ) e da reta ( $r$ ).**

Resolução: Para serem paralelos a ( $r$ ), os dois planos pedidos devem pertencer a retas a ela paralelas (*Geometria Descritiva*, número 62).

E para terem, em épura, traços coincidentes, ou simétricos em relação à linha de terra, ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) devem ser perpendiculares, respectivamente, a ( $\beta_{24}$ ) ou a ( $\beta_{13}$ ) (*Geometria Descritiva*, número 77). E, para tanto, devem possuir, respectivamente, uma reta ( $(A)(B)$ ), perpendicular a ( $\beta_{24}$ ), e outra ( $(P)(Q)$ ), perpendicular a ( $\beta_{13}$ ) (*Geometria Descritiva*, número 76).

Por isso, os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) ficam definidos (*Figura 379*) pelas retas ( $s$ ) e ( $(A)(B)$ ) e pelas retas ( $t$ ) e ( $(P)(Q)$ ), respectivamente.

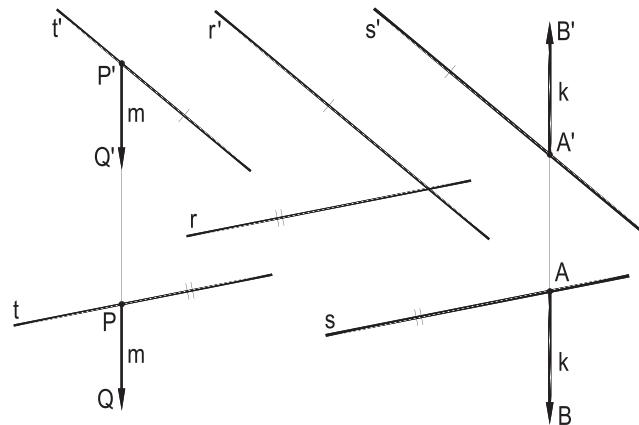


Figura 379

**302 – Determinar os traços dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , respectivamente pertencentes às retas dadas (a) e (b), sabendo que a interseção de  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  é paralela aos planos dados  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ .**

**Dados as projeções de (a) e (b) e os traços de  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ .**

Resolução: Para ser paralela aos dois planos dados  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , a interseção dos planos procurados tem que ser paralela à própria interseção de  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , que, por terem os traços horizontais paralelos, tem que ser (*Geometria Descritiva*, número 59) uma horizontal, com essa mesma direção.

Assim, os planos pedidos devem possuir horizontais paralelos aos traços  $\gamma\pi$  e  $\varphi\pi$ , o que permite construir facilmente os traços de  $(\alpha)$  (Figura 380).

O traço vertical  $\beta\pi'$  foi obtido com o auxílio da frontal (1)(2).

**303 – Construir as projeções das retas (r) e (s), paralelas entre si e respectivamente pertencentes aos pontos dados (A) e (B), dados por suas projeções, sabendo que os traços dessas retas com o plano  $(\alpha)$ , dado por seus traços, formam um segmento paralelo e igual ao segmento (M)(N), de  $(\alpha)$ , dado por sua projeção horizontal.**

Resolução: Para poder seccionar  $(\alpha)$  provocando um segmento paralelo e igual a (M)(N), o plano formado pelas paralelas pedidas deve possuir retas com a direção de (M)(N).

Assim, marcados (M) e (N) em  $(\alpha)$ , constrói-se, por (A), o segmento (A)(J) igual e paralelo a (M)(N), produzindo, com isso, a reta (s), formada pelo ponto dado (B) e por este (J), que vem a ser uma das retas procuradas (Figura 381), a reta (s). A segunda reta (r) é, naturalmente, a paralela a (s), conduzida por (A).

Confirmando a construção, foram determinados os traços  $(\bar{A})$  e  $(\bar{B})$  das paralelas com  $(\alpha)$ .

Observe-se que há uma segunda solução, não incluída na épura da Figura 381, correspondendo à construção do segmento (A)(J) no sentido oposto ao aqui utilizado.

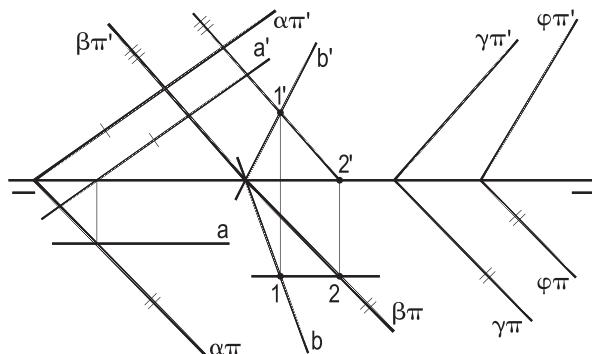


Figura 380

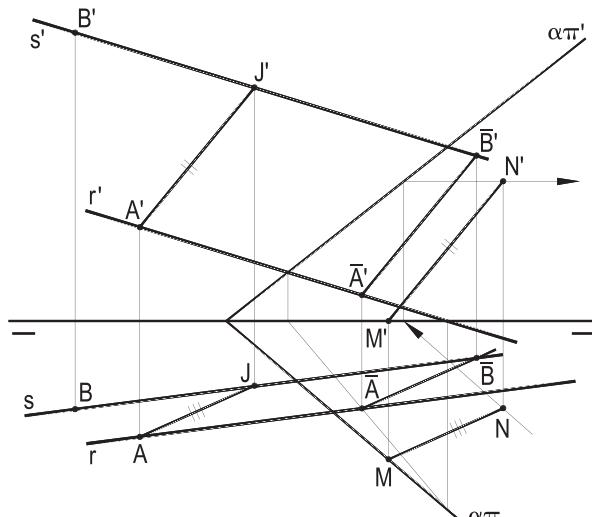


Figura 381

**304 – Construir as projeções do segmento (A)(B) paralelo aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), dados por seus traços, apoiado por seus extremos (A) e (B) respectivamente nos planos ( $\theta$ ) e ( $\varphi$ ), também dados por seus traços, de modo tal que sua projeção horizontal AB seja igual à abscissa do ponto ( $\gamma\pi'\pi$ ), (B) pertencendo a ( $\beta_{13}$ ).**

Resolução: A coincidência dos traços de nomes contrários dos planos dados ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) implica em que eles sejam simétricos em relação a ( $\beta_{24}$ ) e que, então, sua interseção pertença a esse bissector. Assim se consegue ter as projeções dessa reta ( $p$ ), interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), à qual deve ser paralelo o segmento (A)(B) pedido. E como os planos ( $\theta$ ) e ( $\varphi$ ) são projetantes em relação a ( $\pi$ ), a construção de (A)(B) se faz pela obtenção de sua projeção horizontal, igual ao segmento  $k$ , que mede a abscissa do traço de ( $\varphi$ ) com a linha de terra, mediante uma simples translação, tal como indicado na Figura 382.

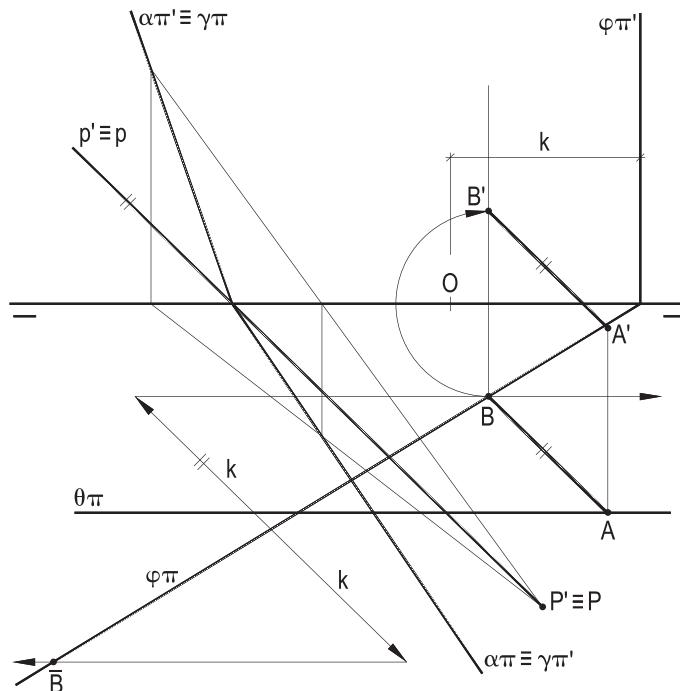


Figura 382

Há uma segunda solução, não completada na Figura 382, indicada pela posição  $\bar{B}$ .

**305 – Construir os traços do plano ( $\alpha$ ) pertencente à reta (r), dada, sabendo que ele corta o plano ( $\gamma$ ), dado, segundo uma reta de perfil.**

Resolução: Para cortar ( $\gamma$ ) segundo uma reta de perfil, ( $\alpha$ ) deve conter retas de perfil paralelas às de ( $\gamma$ ), ficando, então, definido por (r) e por uma paralela ( $H(V)$ ) a uma reta de perfil arbitrária de ( $\gamma$ ), como (A)(B), conduzida pelo traço horizontal ( $H$ ) da reta dada (r) (Figura 383).

O traço vertical de (r) completa a resolução.

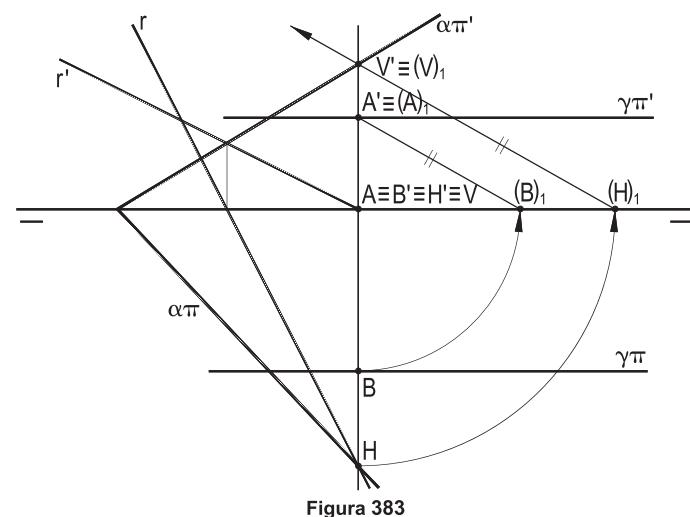


Figura 383

**306 – Determinar as projeções da reta (r), concorrente com as retas (a), (b) e (c), dadas por suas projeções, sabendo que o traço horizontal de (r) está situado o mais próximo possível do ponto (J), dado por suas projeções.**

Resolução: Naturalmente, a reta procurada ( $r$ ), concorrendo com as paralelas ( $a$ ) e ( $b$ ), tem que pertencer ao plano ( $\alpha$ ), por elas formado.

Assim, um primeiro ponto de ( $r$ ) é o traço ( $P$ ), de ( $c$ ) com ( $\alpha$ ) (Figura 384). E o segundo, ( $H$ ), traço horizontal de ( $r$ ), além de pertencer a  $\alpha\pi$ , para atender ao imposto, há de ser o pé da perpendicular do ponto ( $J$ ) a esse traço horizontal  $\alpha\pi$ , para ter valor mínimo.

**307 – Desenhar as projeções da reta (r) concorrente com a reta (s) e paralela à reta (t), sabendo que seu traço horizontal dista do ponto (J) um valor igual à distância de ( $J$ ) a ( $\pi'\pi$ ).**

**São dadas as projeções de (s), (t) e (J).**

Resolução: A reta pedida ( $r$ ) há de pertencer ao plano ( $\alpha$ ) formado por ( $s$ ) e por uma reta ( $t_1$ ), com ela concorrente, e paralela à dada ( $t$ ).

O traço horizontal ( $H$ ) da reta ( $r$ ) será um ponto da circunferência base do cone de revolução de vértice ( $J$ ), assente em ( $\pi$ ), com geratriz iguais à distância ( $J_1(L)$  de ( $J$ ) a ( $\pi'\pi$ ), que se obtém numa vista lateral. O triângulo ( $J_1(L)\bar{J}$  dá o raio  $R$  dessa base.

Há, então, duas soluções ( $H_1$ ) e ( $H_2$ ) para tal traço e, em consequência, duas soluções ( $r_1$ ) e ( $r_2$ ) para a reta pedida ( $r$ ) (Figura 385).

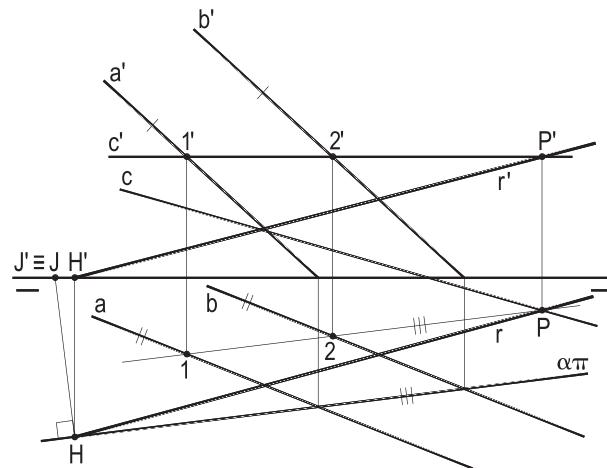


Figura 384

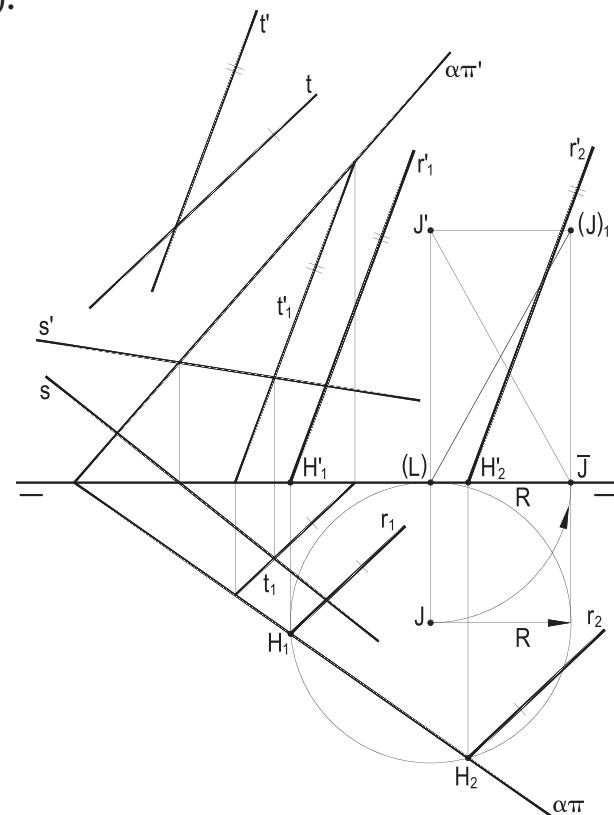


Figura 385

**308 – Dadas as retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ) por suas projeções, pede-se construir as projeções do segmento horizontal de 18 mm de comprimento, apoiado por seus extremos naquelas retas.**

Resolução: Os segmentos horizontais de 18 mm de comprimento, que se apoiam por um extremo em ( $r$ ), têm, para lugar geométrico do segundo extremo, a superfície cilíndrica de eixo ( $r$ ) e diretrizes circulares horizontais de 18 mm de raio. Assim, o que se procura é obter os traços da segunda reta ( $s$ ) com tal superfície (Figura 386), o que se consegue, de modo simples, pela construção do plano ( $\alpha$ ), pertencente a ( $s$ ), com uma paralela ( $\bar{r}$ ) a ( $r$ ), conduzida por um ponto ( $J$ ), qualquer de ( $s$ ) (Figura 386).

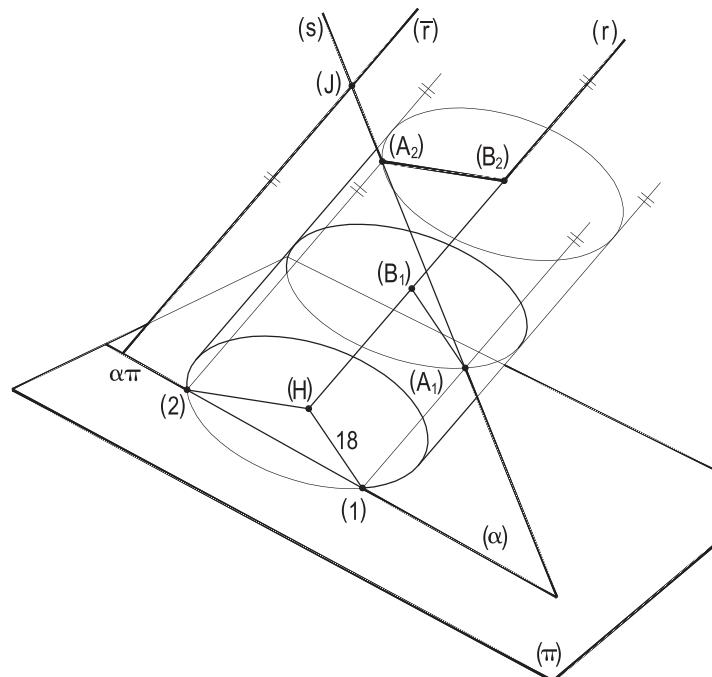


Figura 386

O traço horizontal  $\alpha\pi$  corta a circunferência de centro no eixo ( $r$ ), raio igual a 18 mm e situada em ( $\pi$ ) nos pontos (1) e (2), pelos quais são traçadas as paralelas a ( $r$ ), geratrizes, portanto, da superfície cilíndrica, que cortam a reta ( $s$ ) nos pontos ( $A_1$ ) e ( $A_2$ ), extremos das duas soluções que o problema, para as posições dadas, oferece. As obtenções dos segundos extremos ( $B_1$ ) e ( $B_2$ ), em ( $r$ ), são, então, imediatas, restando observar que, em projeção horizontal, os segmentos horizontais soluções são respectivamente paralelos a cada um dos dois raios  $H_1$  e  $H_2$  da circunferência horizontal inicial (Figuras 386 e 387).

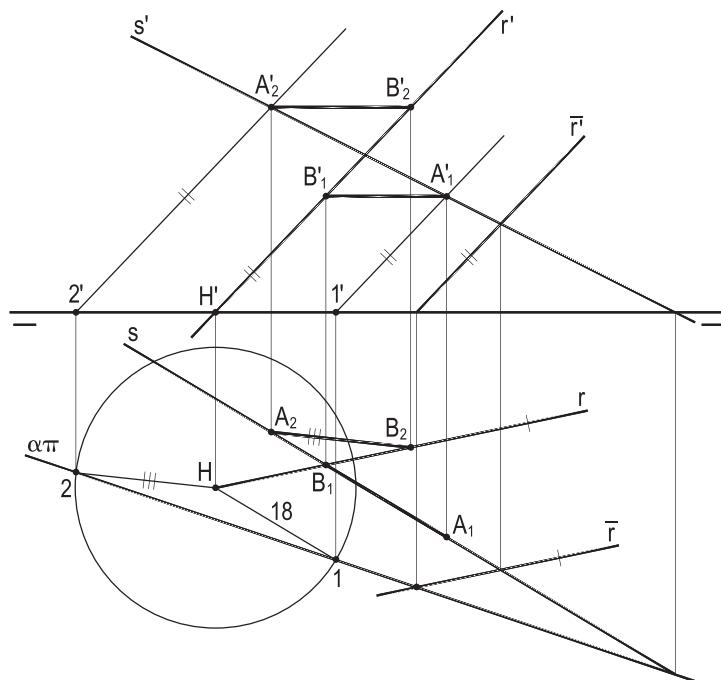


Figura 387

**309 – Apoiar nas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas por suas projeções, o menor segmento horizontal possível.**

Resolução: Esta é uma variação do problema anterior, quando, ao invés de se fornecer o valor do segmento horizontal pedido, impõe-se que ele tenha valor mínimo.

Isso há de implicar em que o traço  $\alpha\pi$  do plano construído seja tangente à superfície cilíndrica de eixo ( $r$ ) (Figura 388), o que acarretará que o segmento horizontal mínimo ( $A$ )( $B$ ) venha a ser paralelo ao raio ( $H$ )( $T$ ) do círculo seção da superfície com ( $\pi$ ) perpendicular ao traço ( $\alpha\pi$ ) do plano construído por ( $s$ ) e paralelo a ( $r$ ) (Figuras 388 e 389).

Cabe observar que o problema anterior (número 308) poderia ser impossível, caso o valor estipulado para o segmento horizontal procurado fosse inferior ao mínimo aqui construído, pois, então, o traço  $\alpha\pi$  restaria exterior à seção que ( $\pi$ ) provoca na superfície cilíndrica utilizada.

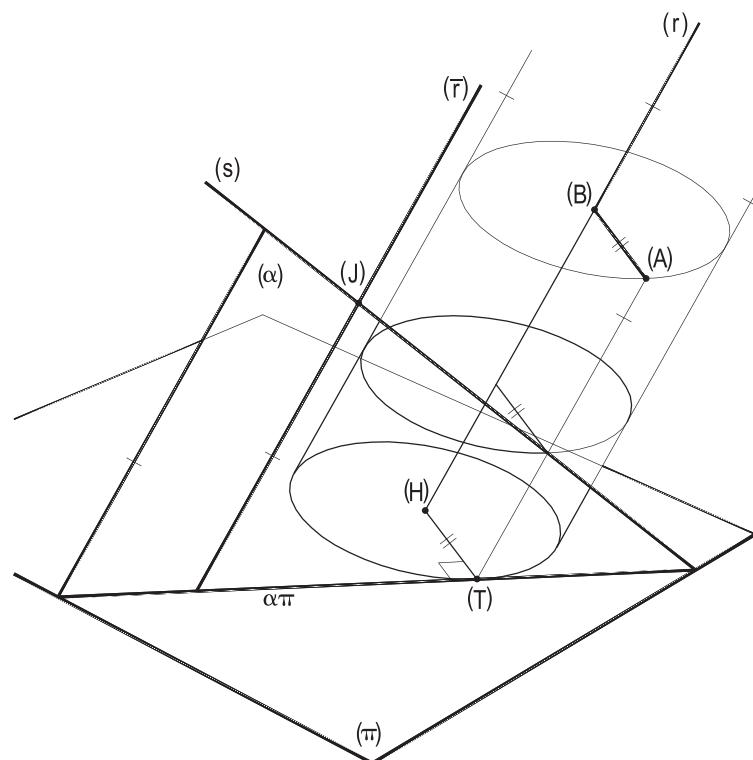


Figura 388

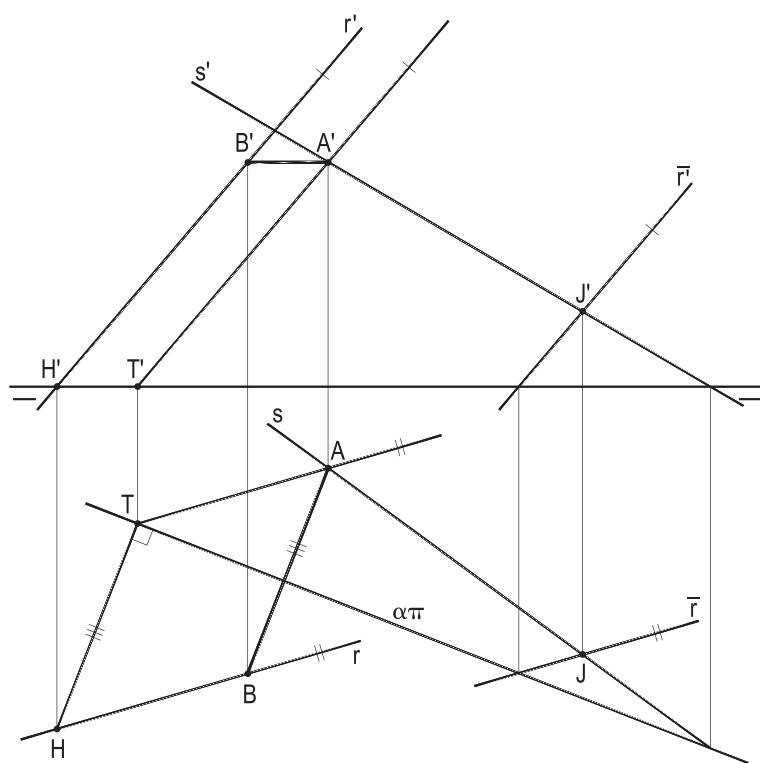


Figura 389

# CAPÍTULO VII

## ORTOGONALIDADE

Neste capítulo estão reunidos problemas referentes a retas perpendiculares, ou ortogonais, a retas e planos perpendiculares e a planos perpendiculares entre si.

Todos, naturalmente, apoiados nos conceitos e nas propriedades desenvolvidas nos estudos teóricos.

**310 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que (A)(B) é perpendicular à reta (r), suporte do lado (B)(C), (C) em ( $\beta_{24}$ ).**

**Dadas as projeções de (A) e de (r).**

Resolução: Todas as retas que passam por (A) e que têm direções ortogonais à da reta (r) pertencem ao plano ( $\alpha$ ), conduzido por (A) e perpendicular a (r) (*Geometria Descritiva*, número 73).

Inclui-se nesse conjunto a reta (A)(B), perpendicular a (r), suporte do primeiro lado do triângulo pedido.

Como não foi fornecida a posição da linha de terra e já que não há como determiná-la, não é possível trabalhar com os traços do plano ( $\alpha$ ).

Deve-se, então, construir, por suas principais (h) e (f), esse plano ( $\alpha$ ), que contém (A) e que é perpendicular a (r), e obter sua interseção (B) com (r), o que se consegue com o auxílio do plano de topo pertencente a (r) e que proporciona, em ( $\alpha$ ), a reta (1)(2) (Figura 390).

O vértice (C) é de imediata obtenção, por ser o traço da reta dada (r) com o bissetor par.

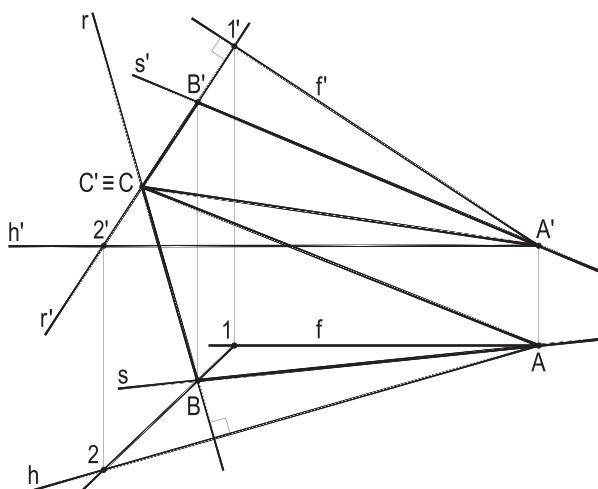


Figura 390

Em cada uma das épuras abaixo, pede-se construir as projeções da reta ( $r$ ), pertencente ao ponto ( $A$ ) e ortogonal à reta ( $a$ ), atendendo a cada uma das condições impostas. São dados, sempre por suas projeções, o ponto ( $A$ ) e a reta ( $a$ ).

Resoluções: Conduz-se, por ( $A$ ), o plano ( $\alpha$ ), perpendicular à reta ( $a$ ), ao qual há de pertencer a reta ( $r$ ), atendendo-se a cada condição estabelecida.

**311 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ ), dado**

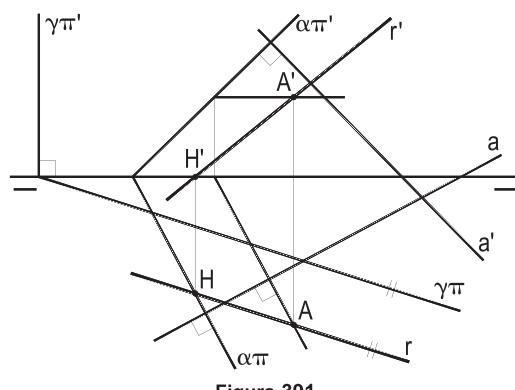


Figura 391

**312 – ( $r$ ) é paralela a ( $\beta_{13}$ )**

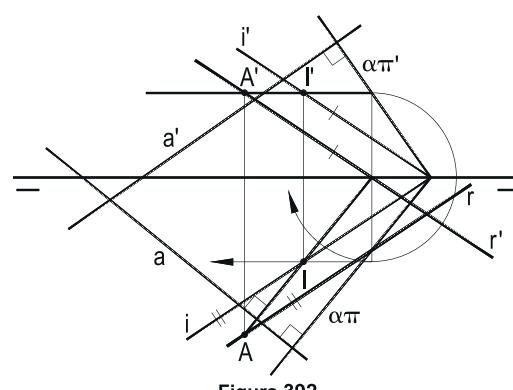


Figura 392

**313 – ( $r$ ) concorre com ( $\pi'\pi$ )**

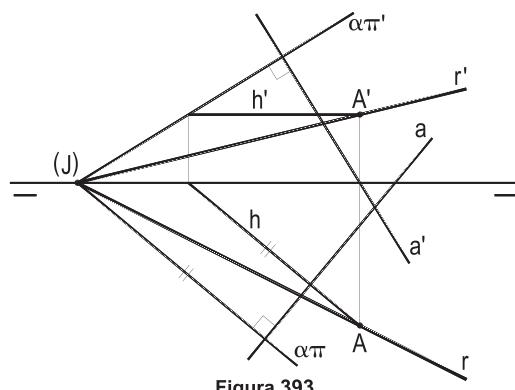


Figura 393

**314 – ( $r$ ) é paralela a ( $\beta_{24}$ )**

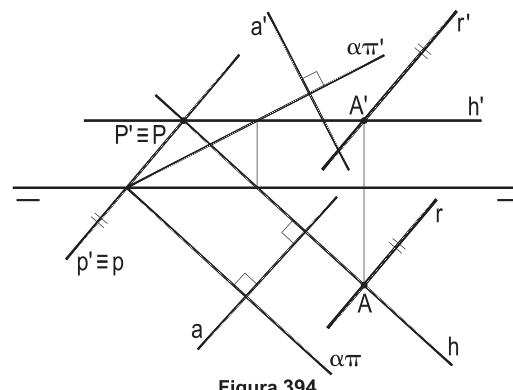


Figura 394

**315 – ( $r$ ) é de perfil**

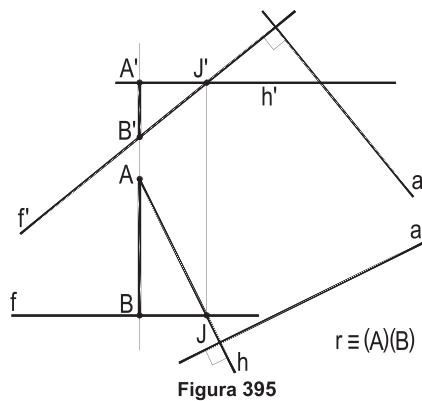


Figura 395

**316 – ( $r$ ) concorre com ( $b$ ), dada**

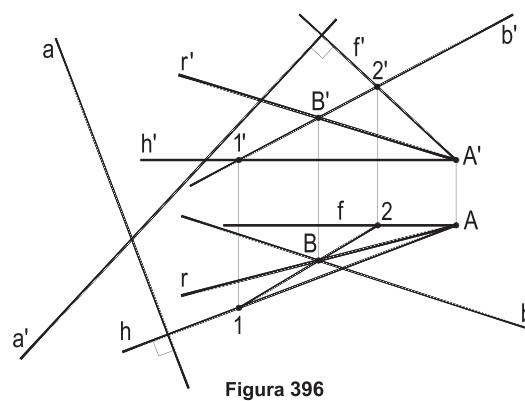


Figura 396

Para cada um dos casos abaixo, pede-se determinar as projeções da reta ( $r$ ), pertencente ao ponto ( $A$ ) e ortogonal à reta ( $a$ ), atendendo a cada uma das condições estipuladas. São dadas, sempre, as projeções do ponto ( $A$ ) e da reta ( $a$ ).

Resoluções: Como no conjunto anterior, determina-se o plano ( $\alpha$ ), por ( $A$ ), perpendicular a ( $a$ ), quando possível pelos traços e, quando não, por suas principais ( $h$ ) e ( $f$ ), para, então, atender às condições impostas.

**317 – ( $r$ ) concorre com ( $t$ ), dada**

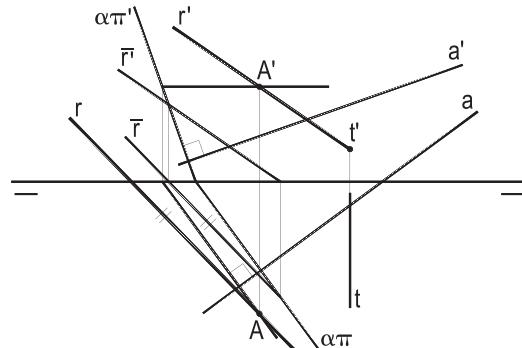


Figura 397

**318 – ( $r$ ) é paralela a ( $\gamma$ ), dado.  $(a) \equiv (E)(F)$**

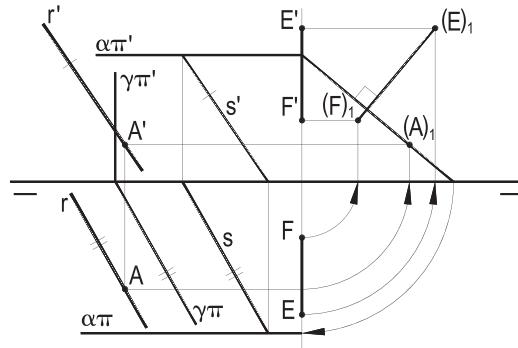


Figura 398

**319 – ( $r$ ) é paralela ao plano das retas ( $m$ )**

e ( $n$ ), dadas

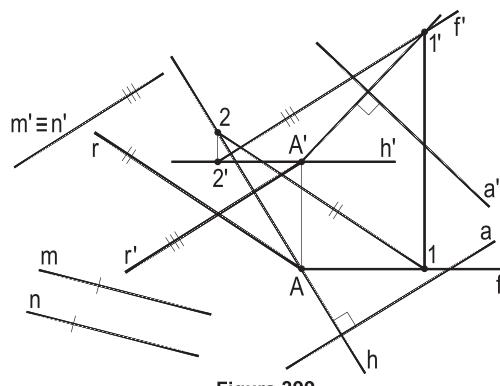


Figura 399

**320 – ( $r$ ) concorre com ( $m$ ), dada**

e ( $n$ ), dadas

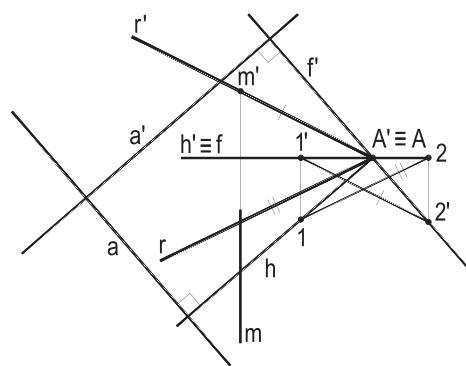


Figura 400

**321 – ( $r$ ) é paralela a ( $\beta_{24}$ )**

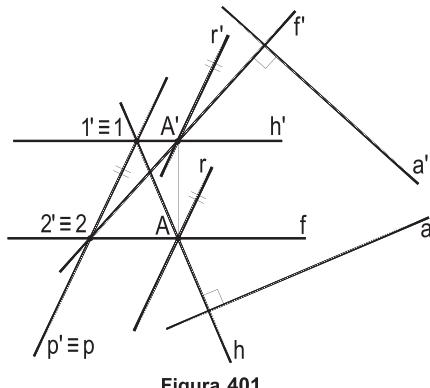


Figura 401

**322 – ( $r$ ) é ortogonal a ( $t$ ), dada**

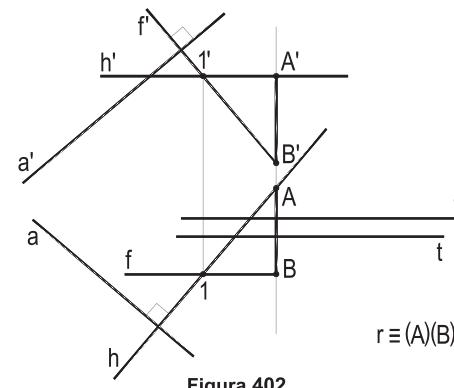


Figura 402

Para cada uma das épuras abaixo, pede-se construir o plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto (A) e perpendicular ao plano ( $\gamma$ ), em obediência a cada condição imposta.

São dados, por suas projeções, o ponto (A), e o plano ( $\gamma$ ), por seus traços.

Resoluções: ( $\alpha$ ) deve conter (r), por (A), perpendicular a ( $\gamma$ ).

**323 – ( $\alpha$ ) é projetante**

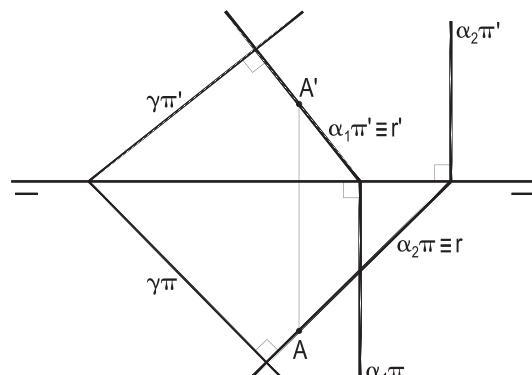


Figura 403

**324 – ( $\alpha$ ) ε (J), dado**

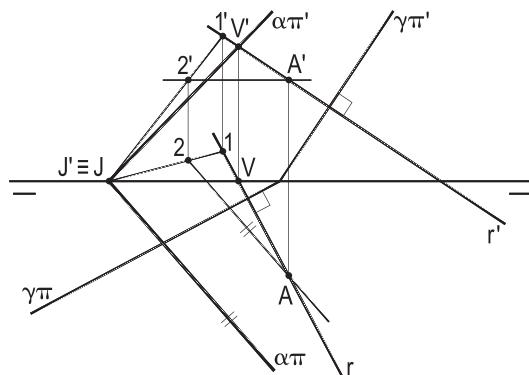


Figura 404

**325 – ( $\alpha$ ) é paralelo a ( $t$ ), dada**

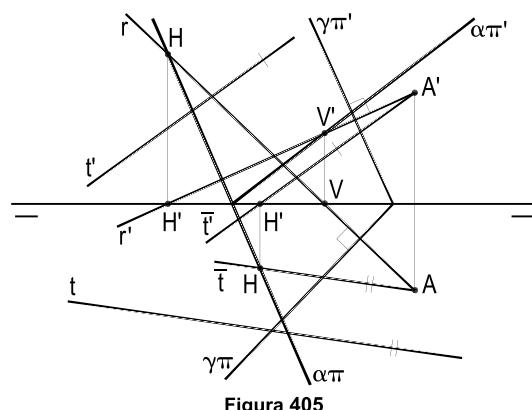


Figura 405

**326 – ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\beta_{24}$ )**

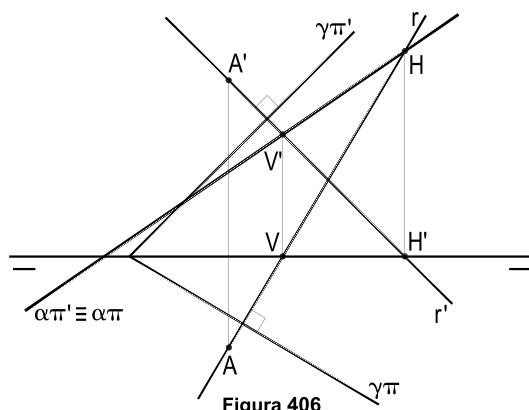


Figura 406

**327 – ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\beta_{13}$ )**

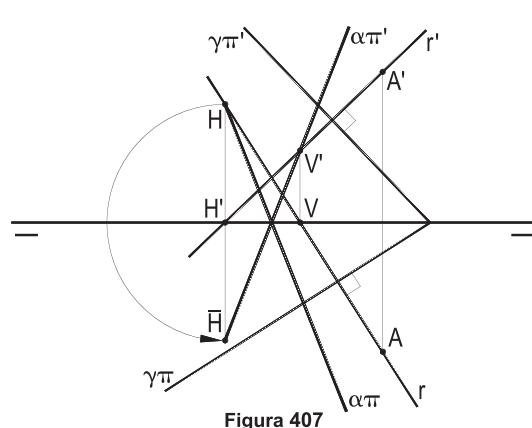


Figura 407

**328 – ( $\alpha$ ) corta ( $\gamma$ ) e ( $\phi$ ), segundo retas paralelas**

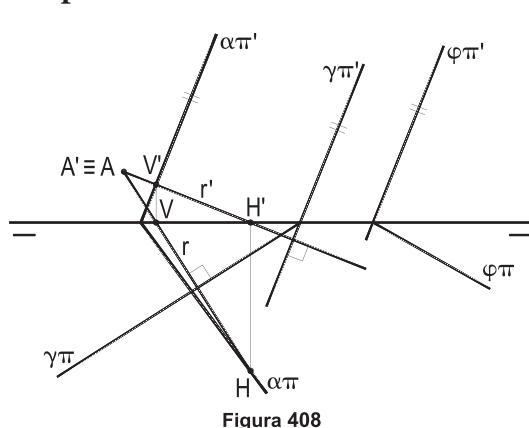


Figura 408

Para cada um dos casos abaixo, pede-se obter o plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto (A), perpendicular ao plano ( $\gamma$ ) e obediente às condições impostas, sendo dados, sempre as projeções do ponto (A) e, ou os traços do plano ( $\gamma$ ), ou as projeções de suas retas (m) e (n).

O plano ( $\alpha$ ), pedido, pode ser apresentado por seus traços ou pelas projeções de duas retas suas.

Resoluções: O plano ( $\alpha$ ) deve conter a reta (p), perpendicular, por (A), ao plano dado ( $\gamma$ ), além de atender às condições impostas.

329 – ( $\alpha$ ) é paralelo a ( $\pi'\pi$ )

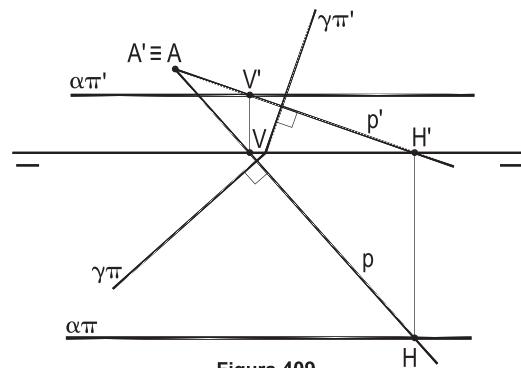


Figura 409

330 – ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\beta_{13}$ )

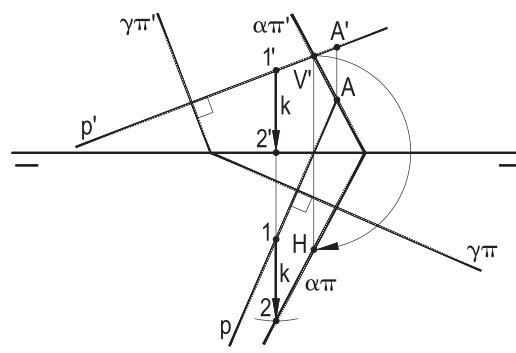


Figura 410

331 – ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\beta_{24}$ )

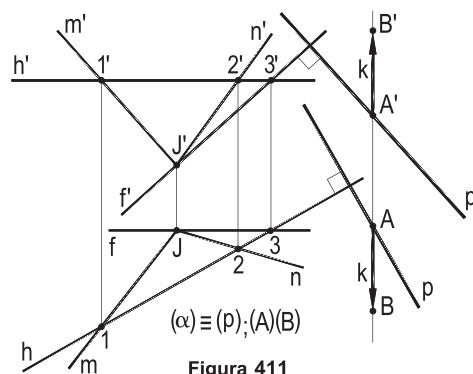


Figura 411

332 – ( $\alpha$ ) é paralelo a (w), dada

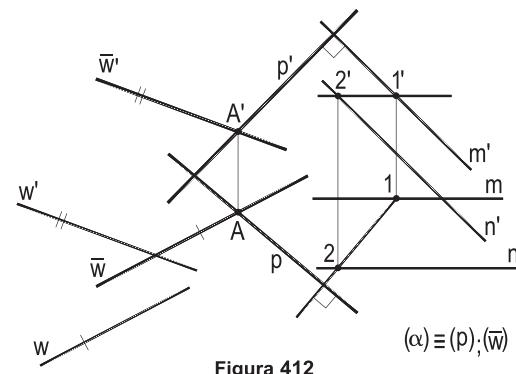


Figura 412

333 – ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\theta$ ), dado

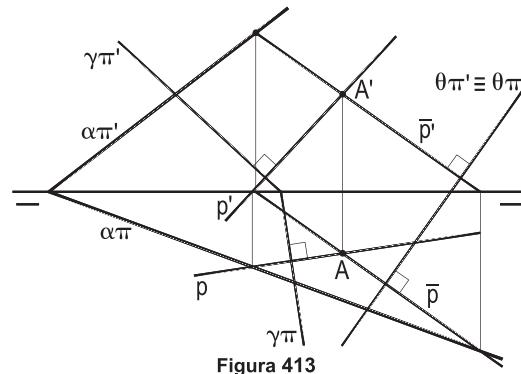


Figura 413

334 – ( $\alpha\gamma$ ) é horizontal

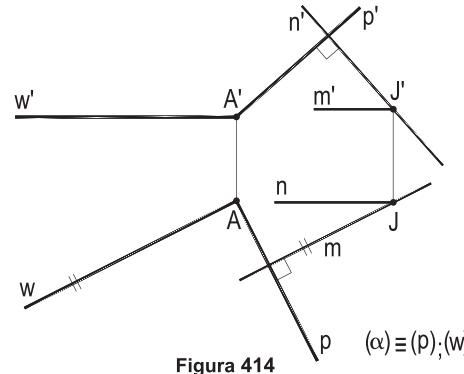


Figura 414

Para cada um dos casos seguintes, são dados, por suas projeções, o ponto (A) e as retas (a) e (b). Pede-se construir, por duas retas (r) e (s), o plano ( $\alpha$ ) pertencente a (A), perpendicular ao plano formado por (a) e (b), atendendo a cada uma das condições estabelecidas.

Resoluções: Em todos os casos, ( $\alpha$ ) contém a reta (r), por (A), perpendicular ao plano formado por (a) e (b), obedecendo a cada uma das condições impostas.

**335 – ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\theta$ ), de topo, dado**

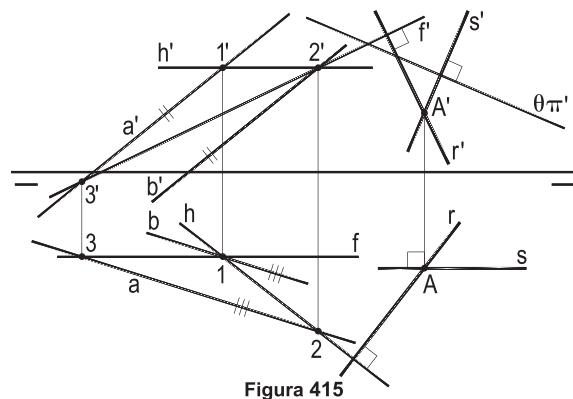


Figura 415

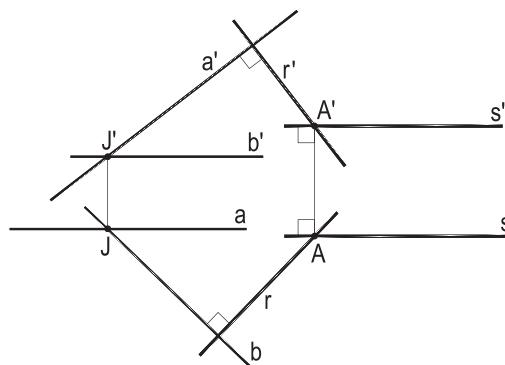


Figura 416

**337 – ( $\alpha$ ) pertence a (J), dado**

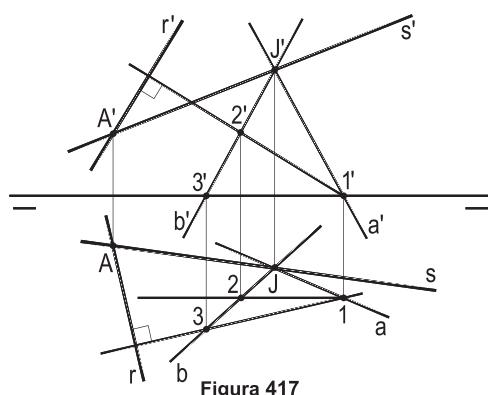


Figura 417

**338 – ( $\alpha$ ) equidista de (P) e (Q)**

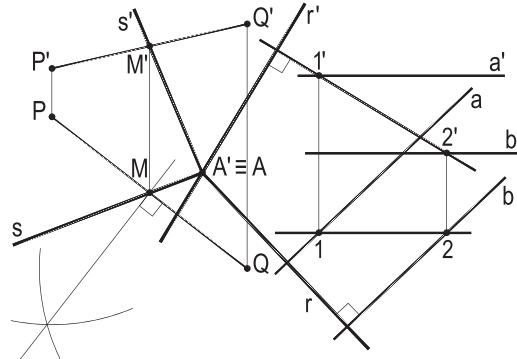


Figura 418

**339 – ( $\alpha$ ) é paralelo à reta (w)**

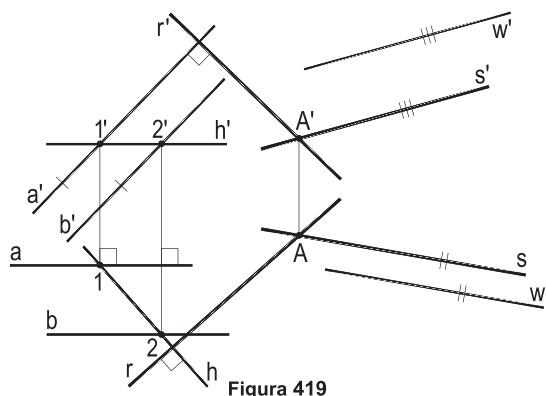


Figura 419

**340 – ( $\alpha$ ) é paralelo a (P)(Q), dado**

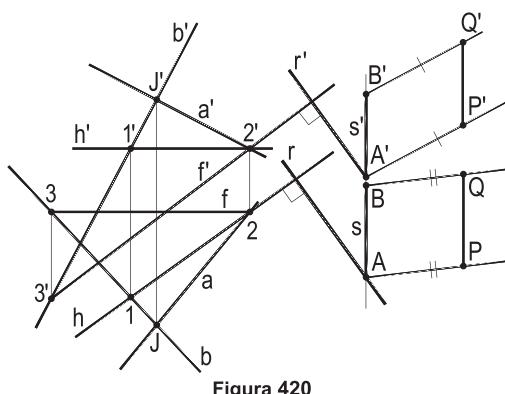


Figura 420

**341 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto (A) e perpendicular ao plano ( $\gamma$ ), sabendo que a reta ( $\alpha\gamma$ ) concorre com ( $\pi'\pi$ ), dados as projeções de (A) e os traços de ( $\gamma$ ).**

Resolução: A perpendicular ( $r$ ) a ( $\gamma$ ), traçada por (A), há de pertencer ao plano ( $\alpha$ ).

E, para que a interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) concorra com a linha de terra, ( $\alpha$ ) tem que conter o ponto (J), traço de ( $\gamma$ ) com ( $\pi'\pi$ ), o que, com os traços (V) e (H) de ( $r$ ), soluciona o problema (Figura 421).

**342 – Construir as projeções da reta ( $r$ ) concorrente com as retas (a) e (b) e ortogonal às retas (c) e (d), todas dadas por suas projeções.**

Resolução: Tão particulares são as quatro retas dadas, que é imediata a construção da reta ( $r$ ) pedida. De fato, suas projeções  $r$  e  $r'$  devem passar, respectivamente, por a e b', projeções da vertical (a) e da reta de topo (b).

E devem ser respectivamente perpendiculares às projeções c e d', da horizontal (c) e da frontal (d) (Figura 422).

**343 – Desenhar as projeções do losango (A)(B)(C)(D), sabendo que o vértice (A) pertence à reta ( $r$ ). Dadas as projeções dos pontos (B) e (D) e da reta ( $r$ ).**

Resolução: Porque a diagonal procurada (A)(C) há de pertencer ao plano mediador da diagonal dada (B)(D), é pela construção do plano mediador dessa diagonal, o que se faz com as principais (h) e (f) (Figura 423), que se resolve o problema.

Como A' coincide com r', marcado o ponto (A) no plano de (h) e (f), obtém-se sua projeção horizontal e, com paralelas, completa-se o losango (Figura 423).

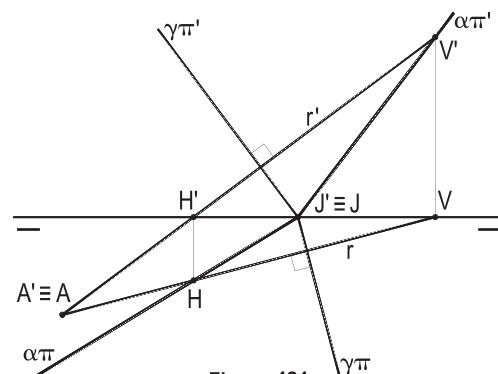


Figura 421

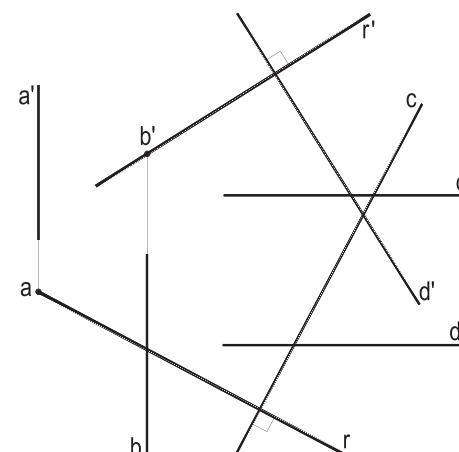


Figura 422

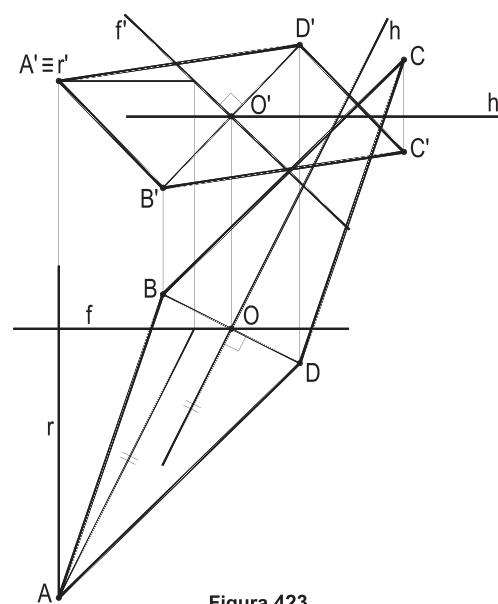


Figura 423

**344 – Dados, por suas projeções, a reta (a) e o ponto (J), e, por seus traços, o plano ( $\alpha$ ), pede-se determinar as projeções da reta (r), pertencente a (J), ortogonal a (a) e paralela a ( $\alpha$ ).**

Resolução: A reta procurada tem que pertencer ao plano ( $\beta$ ), traçado por (J) e paralelo a ( $\alpha$ ) (*Geometria Descritiva*, número 62), assim como ao plano ( $\gamma$ ) que, contendo (J), é perpendicular à reta (a) (*Geometria Descritiva*, número 73), sendo, portanto, a interseção desses planos ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ). Na Figura 424, a reta pedida (r) foi definida pelo ponto dado (J) e por (V), comum aos traços verticais dos dois planos.

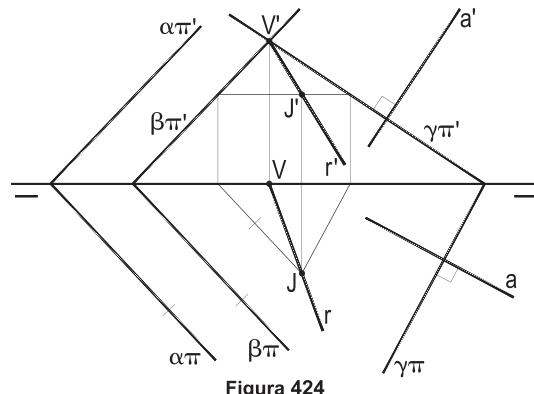


Figura 424

**345 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que o lado (A)(B), ortogonal à linha de terra, pertence ao plano ( $\alpha$ ), (B) em ( $\pi$ ), e que o lado (A)(C) é perpendicular ao plano ( $\gamma$ ), (C) em ( $\gamma$ ). Dados os traços de ( $\alpha$ ) e de ( $\gamma$ ) e a projeção vertical de (A).**

Resolução: Sendo ortogonal à linha de terra, (A)(B) deve ser de perfil, sendo, então, facilmente marcado em ( $\alpha$ ) (Figura 425). E, como ( $\gamma$ ) é um plano de topo, o lado (A)(C) tem que ser frontal, sendo o vértice (C) seu traço com ( $\gamma$ ).

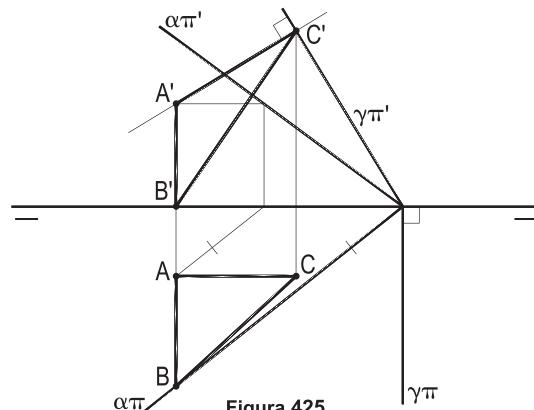


Figura 425

**346 – Determinar os traços do plano ( $\gamma$ ), simultaneamente perpendicular aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), dados por seus traços, sabendo que o ponto de ( $\gamma$ ) que tem cota e afastamento nulos tem, também, abscissa nula.**

Resolução: Para ser perpendicular aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), o plano ( $\gamma$ ) pedido tem que ser perpendicular à interseção (r) desses dois planos, o que se constrói pelo uso de um plano de topo auxiliar ( $\theta$ ) (Figura 426). E o plano ( $\gamma$ ), solução, tem que conter a origem O das abscissas, para ter nulas suas três coordenadas.

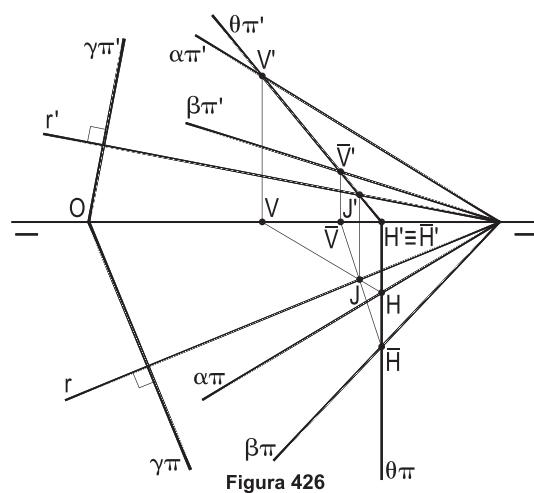


Figura 426

**347 – Dados, por suas projeções, os pontos (A), (B), (C), (D), (J) e (K), pede-se construir as retas (r) e (s), respectivamente pertencentes aos pontos (J) e (K), sabendo que as duas são ortogonais, tanto à reta (A)(B) quanto à reta (C)(D).**

Resolução: As duas retas pedidas, para serem ortogonais às duas dadas (A)(B) e (C)(D), devem ser paralelas a dois planos como ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), perpendiculares a cada uma delas (*Geometria Descritiva*, número 73) e, por isso, paralelas à interseção desses planos.

Assim, construídos os traços de dois planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), perpendiculares a cada uma das retas dadas, obtém-se sua interseção (i), para conduzir, pelos pontos dados (J) e (K), as retas (r) e (s) pedidas (Figura 427).

**348 – A reta (r) é a interseção dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), respectivamente perpendiculares a ( $\beta_{13}$ ) e a ( $\beta_{24}$ ).**

Pede-se construir os traços desses dois planos, sabendo que (r) é também a interseção dos planos ( $\theta$ ) e ( $\varphi$ ), dados, um pelas retas (a) e (b) e o outro pelas fronto-horizontais (c) e (d).

Resolução: A interseção (P)(Q) dos planos dados ( $\theta$ ) e ( $\varphi$ ) é obtida com o auxílio dos planos horizontais de (c) e de (d).

E, construída esta reta, é imediata a obtenção dos traços dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) pedidos, a partir dos traços (V) e (H) de (P)(Q), por serem, em épura,  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  simétricos em relação à linha de terra e  $\beta\pi'$  e  $\beta\pi$  coincidentes (*Geometria Descritiva*, número 77), como apresentado na Figura 428.

$\bar{V}'$  e  $\bar{H}$  são os simétricos de  $V'$  e de  $H$  em relação a ( $\pi'\pi$ ), enquanto  $V'$  e  $H$  definem  $\beta\pi' \equiv \beta\pi$ .

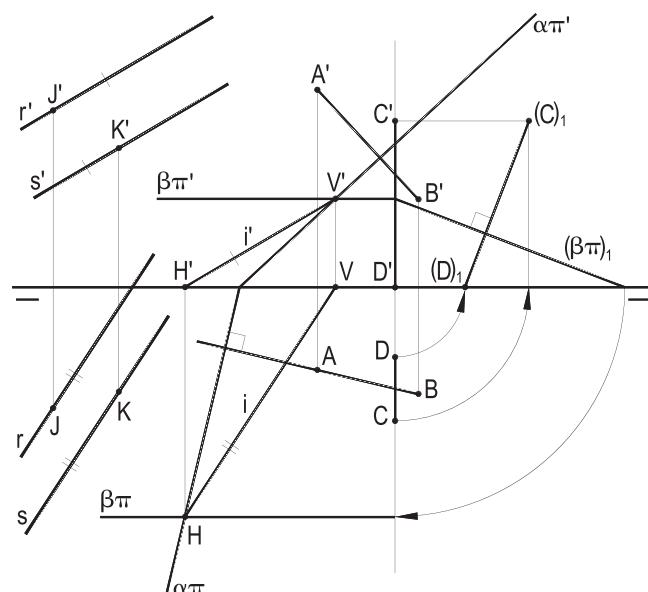


Figura 427

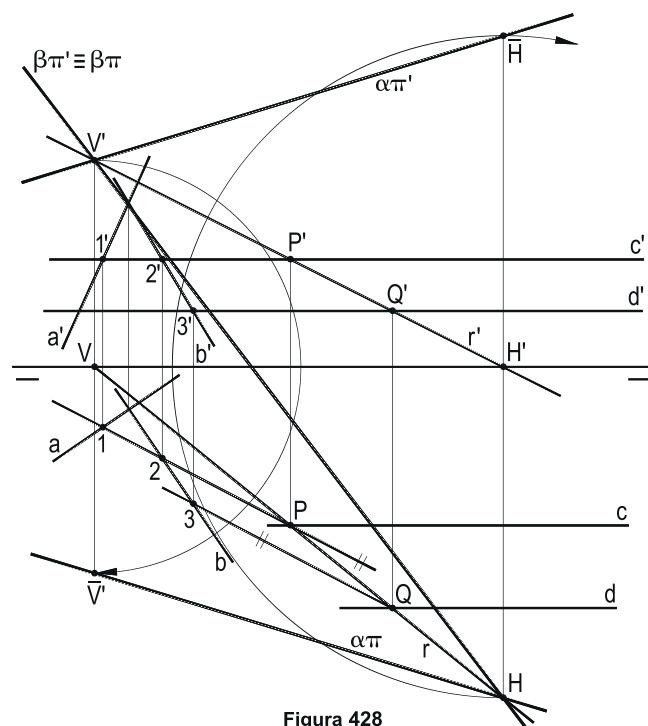


Figura 428

**349 – Construir os traços dos planos  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  e  $(\phi)$ , todos pertencentes ao ponto  $(A)$  e perpendiculares ao plano  $(\theta)$ , sabendo que os dois primeiros são projetantes, respectivamente em relação a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$ , que  $(\gamma)$  é paralelo à linha de terra e que  $(\phi)$  passa pelo ponto  $(J)$ . São dados as projeções dos pontos  $(A)$  e  $(J)$  e os traços de  $(\theta)$ .**

Resolução: Todos os planos pedidos devem conter a reta  $(r)$ , conduzida por  $(A)$  e perpendicular a  $(\theta)$  (*Geometria Descritiva*, número 74).

$(\alpha)$  e  $(\beta)$ , projetantes que são, têm traçados imediatos, assim como  $(\gamma)$ , este utilizando os traços  $(V)$  e  $(H)$  de  $(r)$ .

Para a construção dos traços de  $(\phi)$ , por pertencer ao ponto  $(J)$ , foi utilizada a reta  $(A)$   $(J)$  desse plano, com auxílio de seu traço vertical  $(\bar{V})$  (Figura 429).

**350 – Construir as projeções do retângulo  $(A)(B)(C)(D)$ , sabendo que o lado  $(A)(B)$  é paralelo a  $(\beta_{13})$ , que sua projeção vertical é um losango e que  $(C)$  pertence a  $(\pi')$ , com cota menor que a de  $(B)$ , dadas as projeções  $A'$ ,  $A$  e  $B$ .**

Resolução: A projeção vertical  $B'$  é facilmente obtida, por ser  $(A)(B)$  paralelo ao bissetor ímpar.

E como  $(B)(C)$ , para ser perpendicular ao lado  $(A)(B)$ , deve pertencer ao plano  $(\alpha)$ , conduzido por  $(B)$  e perpendicular a  $(A)(B)$ , constrói-se  $(\alpha)$ , obtendo-se  $C'$ , tal que  $B'C' = B'A'$ ,  $C'$  em  $\alpha\pi'$  (Figura 430).

As duas projeções são, então, completadas com paralelas.

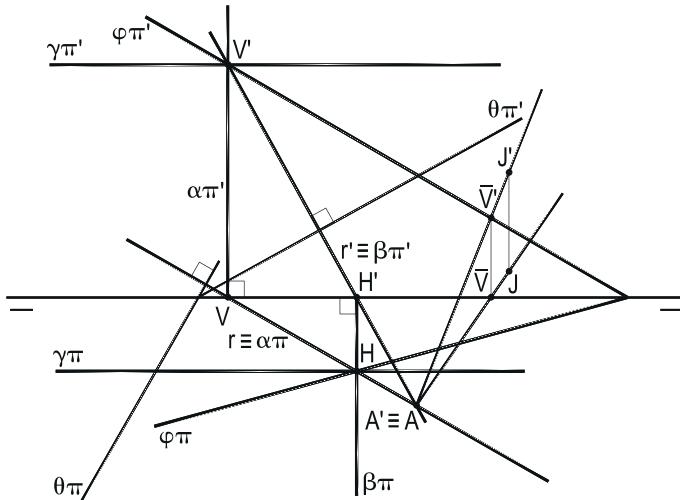


Figura 429

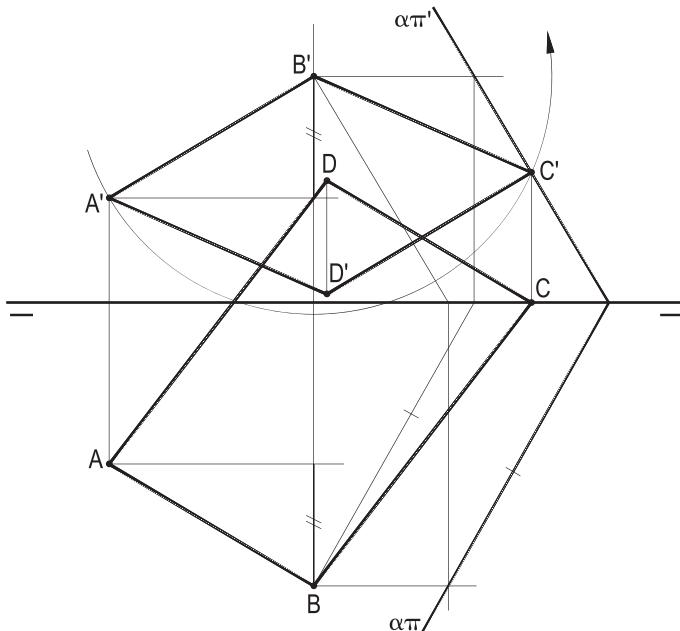


Figura 430

**351 – Construir as projeções do triângulo isósceles (A)(B)(C), sabendo que a mediana (A)(M), relativa à base (B)(C), é paralela ao plano ( $\alpha$ ), perpendicular a ( $\beta_{24}$ ), e que o vértice (A) pertence a ( $\pi$ ).**

São dados as duas projeções da base (B)(C) e o traço horizontal  $\alpha\pi$ , do plano ( $\alpha$ ).

Resolução: Por ser  $(\alpha)$  perpendicular a  $(\beta_{24})$ , os traços de  $(\alpha)$ , em épura, são coincidentes (*Geometria Descritiva*, número 77).

E a mediana  $(A)(M)$ , por ser, também, a mediatrix da base  $(B)(C)$ , tem que pertencer ao plano  $(\gamma)$ , mediador de  $(B)(C)$ , construído com o auxílio de uma horizontal.

(A)(M) será, então, paralela à interseção (V)(H) de  $(\gamma)$  e  $(\alpha)$ , (A) com cota nula (Figura 431).

**352 – Determinar os traços dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , pertencentes ao ponto (A), dado por suas projeções, sabendo que são, ambos, perpendiculares ao plano  $(\gamma)$ , dado por seus traços, e que as retas  $(\alpha\gamma)$  e  $(\beta\gamma)$  são, respectivamente, horizontal e frontal.**

Resolução: Os dois planos pedidos, para serem perpendiculares a ( $\gamma$ ), devem conter a reta (V)(H), traçada por (A) perpendicularmente a ( $\gamma$ ).

E, para que a interseção de  $(\alpha)$  com  $(\gamma)$  possa ser horizontal, basta que  $\alpha\pi$  e  $\gamma\pi$  sejam paralelos (Figura 432), o que proporciona os dois traços de  $(\alpha)$ .

Da mesma forma, para que  $(\beta\gamma)$  seja frontal, basta que  $\beta\pi'$  seja paralelo a  $\gamma\pi'$ .

Por ser inacessível o traço de  $(\beta)$  com  $(\pi'\pi)$ , foi preciso (Figura 432) recorrer a um segundo ponto ( $\bar{V}$ ) de  $\beta\pi'$ , para, ligando-o a ( $A$ ), obter um novo ponto ( $\bar{H}$ ), de  $\beta\pi$ .

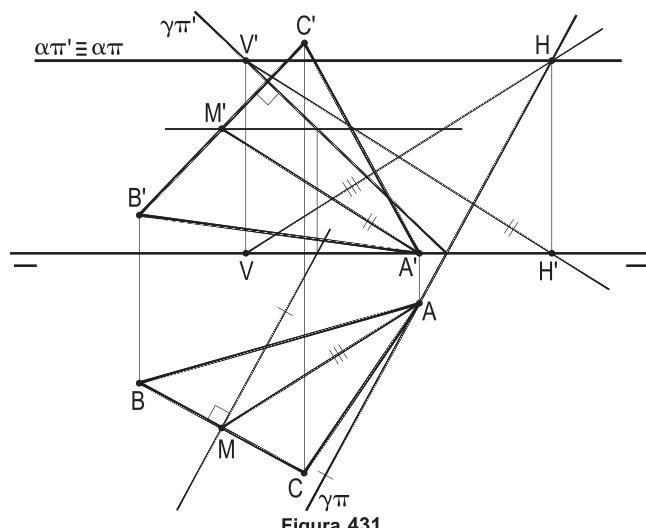


Figura 431

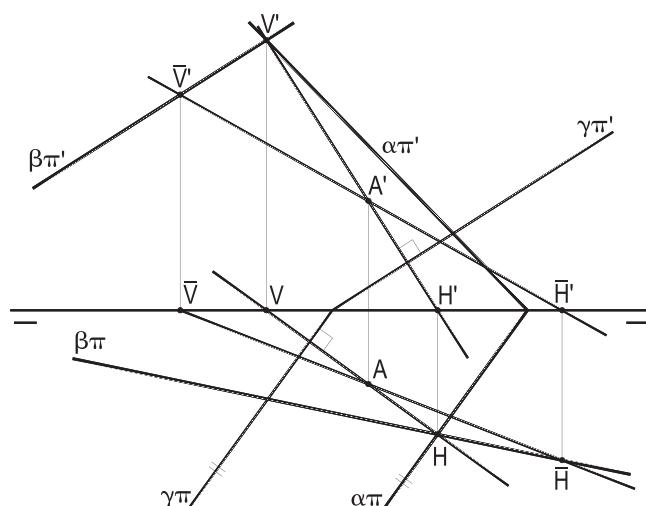


Figura 432

**353 – Os planos  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  e  $(\gamma)$  são perpendiculares ao bissetor par e paralelos entre si, estando  $(\beta)$  entre  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , tal que sua distância a  $(\alpha)$  vale a metade de sua distância a  $(\gamma)$ .**

**Construir os traços de  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  e  $(\gamma)$ , sabendo que esses planos pertencem, respectivamente, aos pontos  $(A)$ ,  $(B)$  e  $(C)$ , todos dados por suas projeções.**

Resolução: Cada plano deve possuir segmentos de retas perpendiculares a  $(\beta)_{24}$ , que, sabe-se, devem ser de perfil, com projeções de comprimentos iguais e sentidos contrários (*Geometria Descritiva*, números 76 e 77).

Assim, fica imediato construir as projeções dos segmentos  $(A)(1)$ ,  $(B)(2)$  e  $(C)(3)$ , com essas propriedades, e tais que os pontos  $(1)$ ,  $(2)$  e  $(3)$ , pertencendo a um dos planos de projeção, venham a ser pontos dos traços de cada plano procurado (Figura 433).

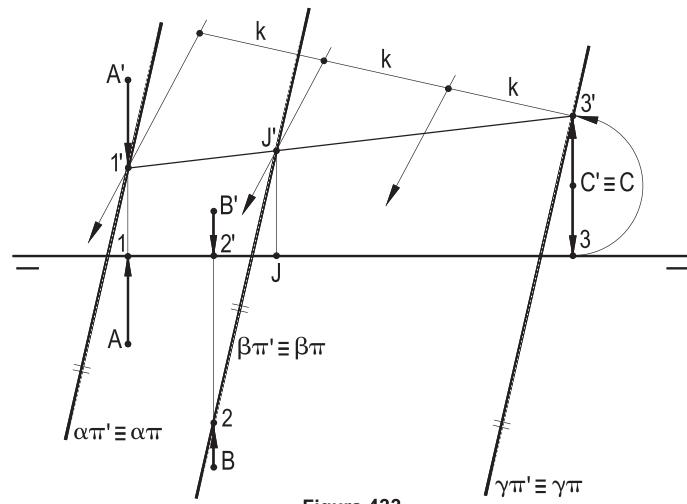


Figura 433

Para assegurar a proporção das distâncias estipulada, basta dividir o segmento  $1'3'$  em três partes iguais (Figura 433) e, pelo ponto terço  $J'$  mais próximo de  $1'$ , conduzir os traços coincidentes de  $(\beta)$ .  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$  são, então, os paralelos a este, pelos pontos  $(1)$  e  $(3)$ .

**354 – Desenhar as projeções do segmento  $(A)(B)$  ortogonal à reta  $(r)$ , sabendo que  $(A)$  pertence a  $(\pi')$  e  $(B)$  a  $(\pi)$ , conhecendo as projeções de  $(r)$  e do ponto  $(M)$ , médio de  $(A)(B)$ .**

Resolução: Constrói-se, por  $(M)$ , o plano  $(\alpha)$  perpendicular a  $(r)$ , ao qual há de pertencer o segmento  $(A)(B)$ .

Porque as projeções horizontais  $A$  e  $B$  devem pertencer, respectivamente, a  $\pi'\pi$  e a  $\alpha\pi$ , a construção, na projeção horizontal, da simétrica  $t$  de  $\alpha\pi$  em relação a  $M$  proporciona  $A$ , em seguida,  $A'$  e, por último, as projeções pedidas de  $(A)(B)$  (Figura 434).

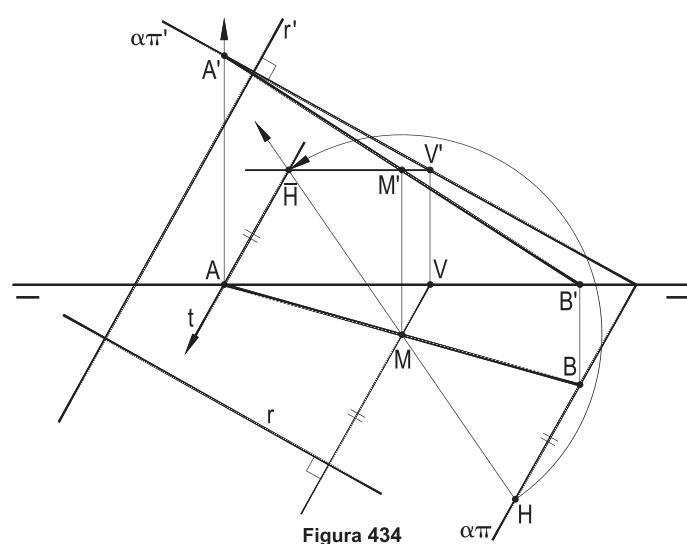


Figura 434

**355 – Obter as projeções do triângulo (A)(B)(C) e do ponto (J), vértice de um triedro, cujas arestas passam pelos pontos (A), (B) e (C), sabendo que o triângulo (J)(B)(C), equilátero, é de perfil, no primeiro diedro, e que a aresta (J)(A) é ortogonal às retas (E)(F) e (P)(Q), dadas por suas projeções. São, ainda, dadas as projeções de (B) e de (C) e informada a abscissa nula de (A).**

Resolução: Construída, numa vista lateral, a V.G. do triângulo (J)(B)(C), por ser ortogonal às duas retas de perfil (E)(F) e (P)(Q), (J)(A), tendo que ser perpendicular aos planos de suas direções, há de ser fronto-horizontal, o que dá as projeções de (A) e do triângulo (A)(B)(C) (Figura 435).

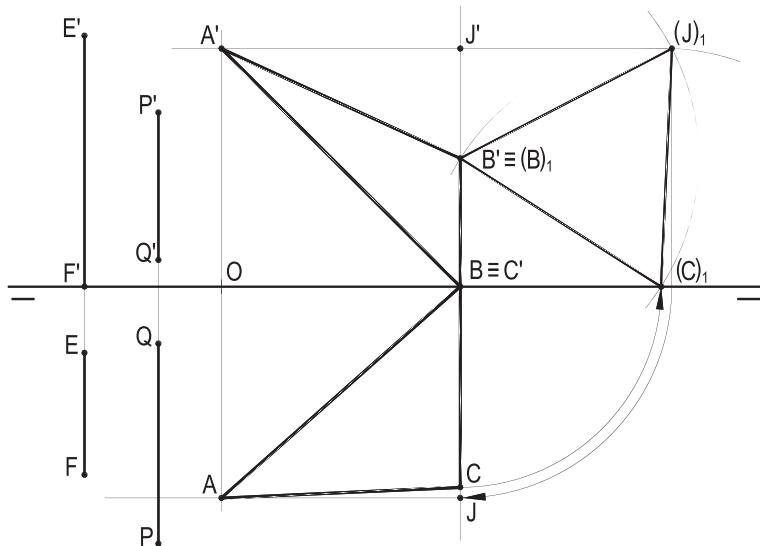


Figura 435

**356 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), cujos lados são ortogonais à reta (r), sabendo que o lado (B)(C) pertence a  $(\beta_{24})$  e que, em épura, os triângulos A'BA e A'CA são retângulos, em B e em C, respectivamente, (B) com a menor abscissa.**

São dadas as projeções do vértice (A) e da reta (r).

Resolução: Naturalmente, o triângulo deve pertencer ao plano  $(\beta)$ , conduzido por (A) e perpendicular à reta (r), o lado (B)(C) ficando sobre a interseção (p) de  $(\beta)$  com  $(\beta_{24})$ . Os vértices B  $\equiv$  B' e C  $\equiv$  C' são obtidos com os arcos capazes de  $90^\circ$  para A'A, pelas interseções com as projeções coincidentes de (p) desses arcos capazes (Figura 436).

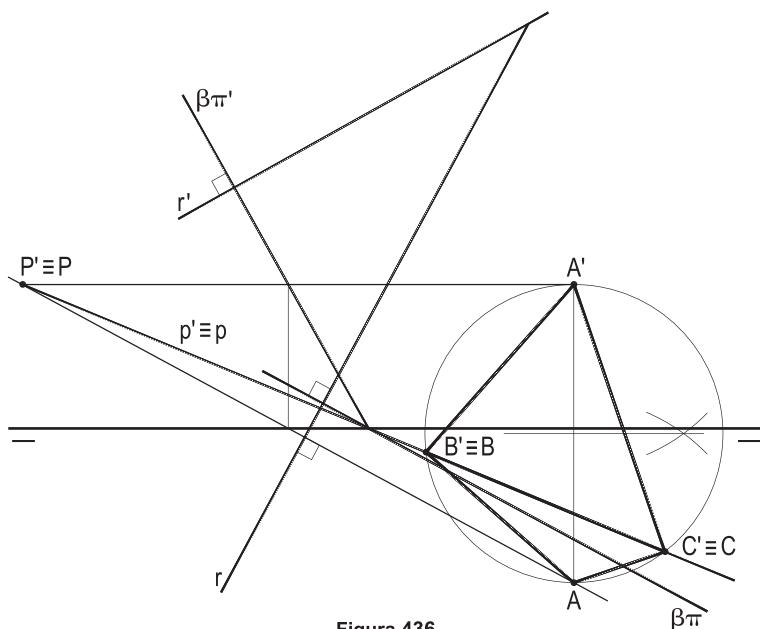


Figura 436

**357 – Construir as projeções do triângulo isósceles (A)(B)(C), cuja base (B)(C) tem as projeções dadas, sabendo que seu baricentro pertence à reta (r), dada por suas projeções. E, sabendo que (A)  $\in (\beta_{13})$ , determine a posição de ( $\pi'\pi$ ).**

Resolução: Por ser isósceles o triângulo (A)(B)(C), a mediana (A)(M), relativa à base, também mediatrix dessa base, há de pertencer ao plano mediador de (B)(C), que se constrói com a frontal (f) e com a horizontal (h), perpendiculares a essa base.

O baricentro (G) é, então, o traço da reta (r) com esse mediador e, enfim, o vértice (A) se obtém, sobre a mediana relativa à base, construindo  $G'A' = 2 \cdot M'G'$  (Figura 437).

Para atender à pertinência do vértice (A) a ( $\beta_{13}$ ), a linha de terra é a mediatrix de A'A (Figura 437), podendo ter dupla orientação.

**358 – Desenhar as projeções dos retângulos iguais (A)(B)(C)(D) e (A)(B)(R)(S), sabendo que (C) pertence a ( $\pi'\pi$ ) e que (B)(R) é horizontal, (R) com abscissa menor que a de (B).**

**Dadas as projeções de (A)(B).**

Resolução: Os lados (B)(C) e (B)(R), perpendiculares ao lado (A)(B), hão de pertencer ao plano ( $\alpha$ ), por (A) e perpendicular a (A)(B).

(C) é imediato, em ( $\pi'\pi$ ), e, com a V.G. a de (B)(C) (*Geometria Descritiva*, número 24.2), marca-se (R), completando a épura com paralelas (Figura 438).

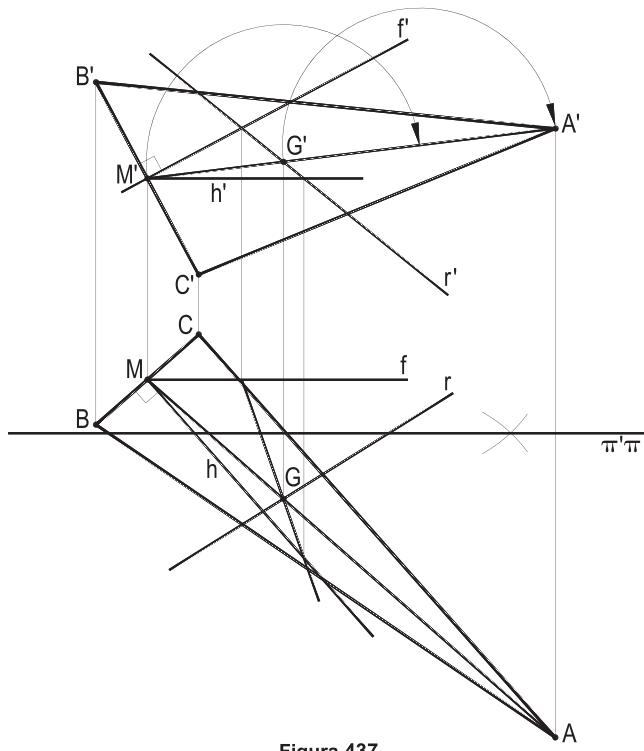


Figura 437

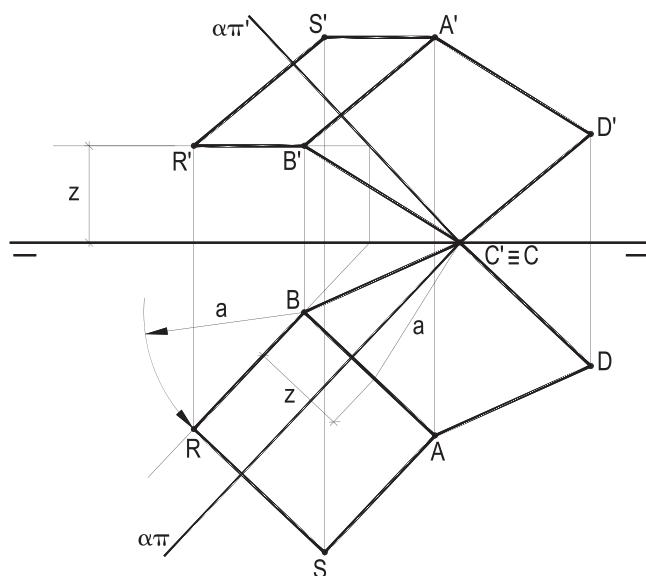
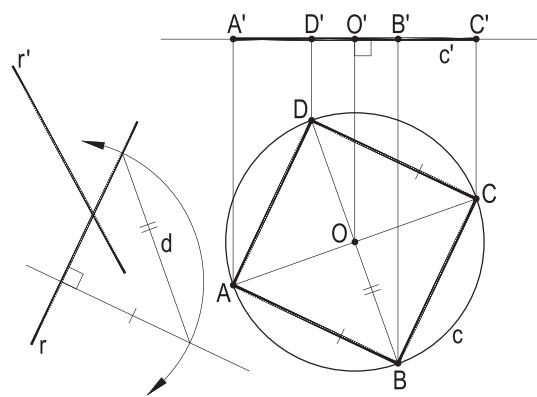


Figura 438

**359** – A circunferência dada  $c$ , de centro  $O$ , é a projeção horizontal da circunferência ( $c$ ), de centro ( $O$ ), que circunscreve um quadrado, que tem seus lados ( $A$ ) $(B)$  e ( $C$ ) $(D)$  ortogonais à reta ( $r$ ), dada por suas projeções.

**Construir as projeções do quadrado, dadas as projeções c, O e O'.**

Resolução: Por apresentar em V.G. sua projeção horizontal, a circunferência (c) pertence a um plano horizontal e, para que o quadrado (A)(B)(C)(D) nela inscrito, naturalmente também horizontal, possa ter lados ortogonais à reta (r), tem que tê-los, em projeção horizontal, perpendiculares a r. A inscrição do quadrado ABCD se fez com o auxílio da direção d de sua diagonal BD (Figura 439), arbitrada a ordem dos vértices.



**Figura 439**

**360** – Dadas as retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$ , sabendo que  $(r)$  é de maior declive do plano  $(\alpha)$  em relação ao plano  $(\gamma)$  e que  $(s)$  é, reciprocamente, de maior declive de  $(\gamma)$  em relação a  $(\alpha)$ , pede-se construir esses dois planos.

Resolução: Porque (*Geometria Descritiva*, número 55) tanto (r) quanto (s) devem ser perpendiculares à interseção (i) dos planos procurados ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), basta traçar (i), perpendicular ao plano de (r) e (s), pelo ponto (J) a elas comum, pois (i) define, com (r) e com (s), cada um dos dois planos pedidos (Figura 440).

**361 – Mesmo problema, para a situação especial em que (r) e (s) são, respectivamente, horizontal e frontal.**

Resolução: Idêntica, simplificada por se conhecer as principais do plano formado pelas retas de maior declive (Figura 441).

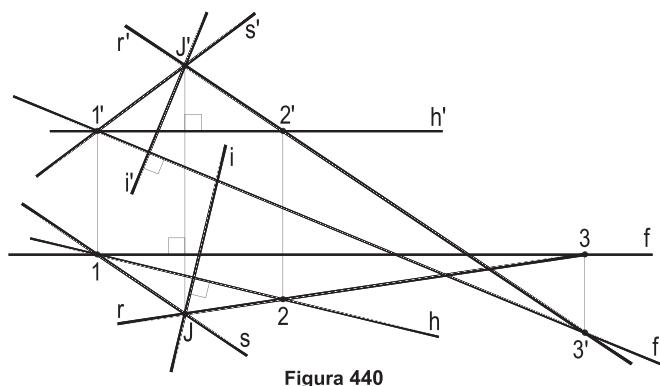
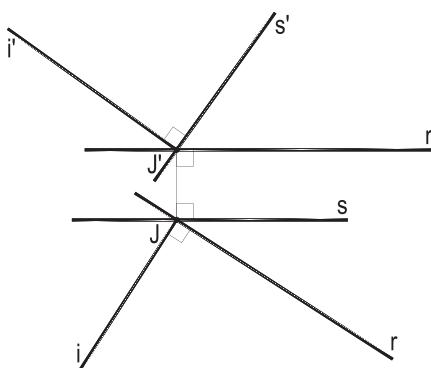


Figura 440



**Figura 441**

**362 – Desenhar as projeções do triângulo (A)(B)(C), do primeiro diedro, sabendo que os lados (A)(B) e (A)(C) são respectivamente paralelo e perpendicular ao plano ( $\beta$ ). Sabe-se, ainda, que (A)(B) é frontal, com comprimento igual à diferença entre as abscissas dos pontos ( $\alpha\pi'\pi$ ) e ( $\beta\pi'\pi$ ), apoiando-se, por seus extremos (A) e (B), na reta (r) e em ( $\alpha$ ), (A) com cota menor que a de (B). O vértice (C) pertence a ( $\pi''$ ). São dados os traços de ( $\alpha$ ) e de ( $\beta$ ) e as projeções de (r).**

Resolução: Apoiada a frontal (E)(F) em (r), paralela a  $\beta\pi'$ , com comprimento k, igual à diferença entre as abscissas dos traços de ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) com ( $\pi'\pi$ ), o traço com ( $\alpha$ ) da reta (s), conduzida por (F) e paralela a (r), é o vértice (B), que proporciona a frontal (A)(B) e, na perpendicular (p), por (A) a ( $\beta$ ), obtém-se (C), com abscissa nula (Figura 442).

**363 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que (B) e (C) pertencem respectivamente às retas (r) e (s) e que (B)(C) é perpendicular a ( $\beta_{24}$ ), dadas as projeções de (A), de (r) e de (s).**

Resolução: O lado (B)(C) deve pertencer ao plano que, contendo (r), seja perpendicular a ( $\beta_{24}$ ), o que se consegue apoiando em (r) uma perpendicular (E)(F) a ( $\beta_{24}$ ) e traçando, por (F), ( $\bar{r}$ ) paralela a (r) (Figura 443).

Assim, (C) será a interseção da reta (s) com esse plano, o que resolve o problema, já que (B)(C) é de perfil e (A) é dado.

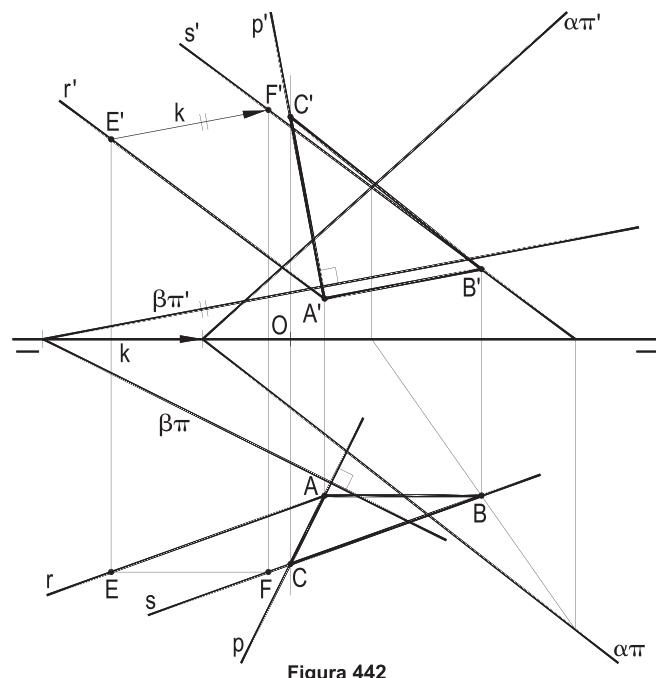


Figura 442

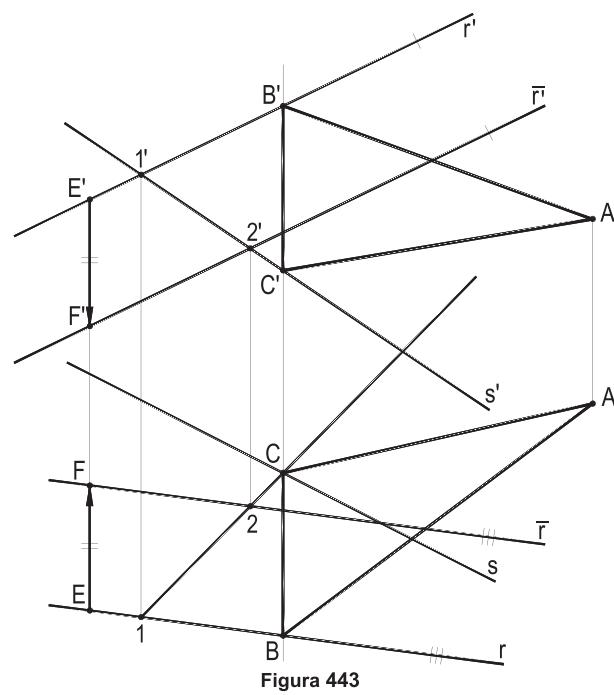


Figura 443

**364 – Determinar os traços do plano que contém (a) e é perpendicular ao plano de (r) e (s). Dados a', a, r', r, s' e s. (Escola Nacional de Engenharia – ENE – 1965).**

Resolução: Observe-se que as retas (r) e (s) dadas são, respectivamente, horizontal e frontal.

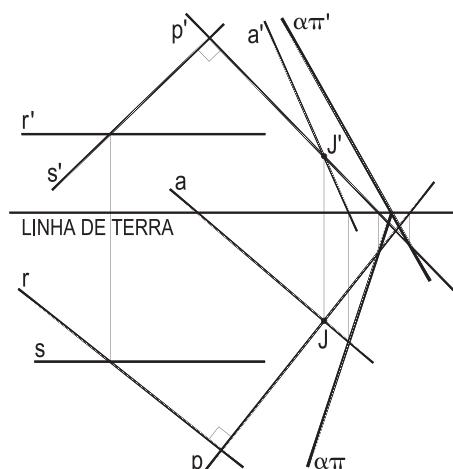
O plano ( $\alpha$ ) pedido deve conter uma perpendicular ao plano das principais ( $r$ ) e ( $s$ ) (*Geometria Descritiva*, número 74). Assim, basta, por um ponto ( $J$ ) qualquer de ( $\alpha$ ), traçar a reta ( $p$ ) perpendicular a esse plano e, com traços de ( $\alpha$ ) e de ( $p$ ), obter os traços do plano procurado (Figura 444).

**365 – Determinar o traço horizontal do plano ( $\alpha$ ), conhecendo seu traço vertical  $\alpha\pi'$  e a projeção vertical  $b'$  da bissetriz do ângulo objetivo formado pelos traços do plano.**

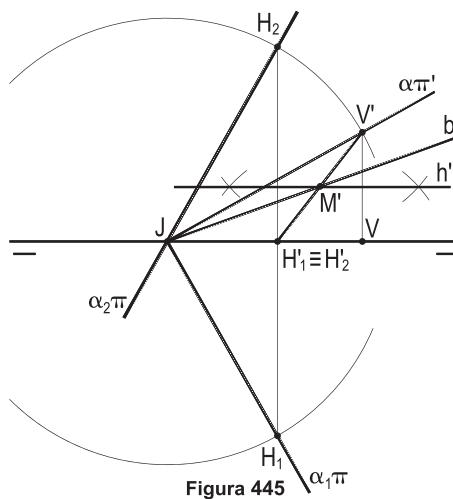
Resolução: Como detalhado no item 2 da Introdução, sabe-se que b' deve passar por M', projeção vertical do ponto médio de um segmento (V)(H) do plano, formado com traços vertical e horizontal a uma mesma distância do traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ). Por isso, arbitrado V', M' há de estar em h', com cota igual à metade da de (V) e, naturalmente, sobre b'. Obtido H', há duas soluções possíveis para (H), na circunferência (J, JV')(Figura 445).

**366 – Determinar as projeções do ponto (P) pertencente ao plano ( $\alpha$ ) e equidistante dos pontos (A), (B) e (C). Dados os traços de ( $\alpha$ ) e as projeções dos três pontos.**

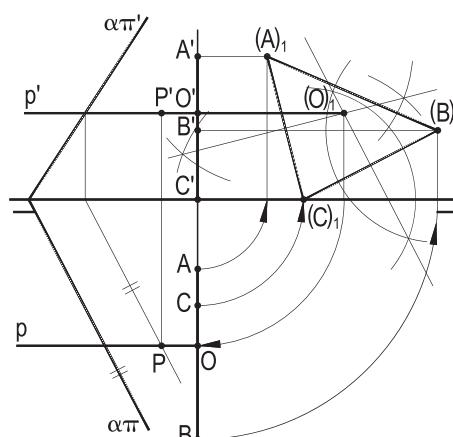
**Resolução:** Sabe-se que o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos vértices do triângulo  $(A)(B)(C)$  é a reta  $(p)$ , pertencente ao seu circuncentro  $(O)$  e perpendicular ao seu plano. Assim, o ponto  $(P)$  procurado (Figura 446) é a interseção de  $(p)$  com  $(\alpha)$ .



**Figura 444**



**Figura 445**



**Figura 446**

**367 – Dados os pontos (A) e (B), por suas projeções, e o plano ( $\alpha$ ), por seus traços, pede-se construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), apoiado por seu vértice (C) em ( $\alpha$ ), de modo tal que seja mínimo o perímetro do triângulo.**

Resolução: Porque, do triângulo (A)(B)(C), em estudo, o lado (A)(B) é dado, a busca de seu perímetro mínimo resume-se em determinar a menor soma possível para os outros dois lados (A)(C) e (B)(C).

Consideremos, então, o ponto ( $\bar{B}$ ), simétrico de (B) em relação ao plano ( $\alpha$ ), e a interseção (C) da reta (A)( $\bar{B}$ ) com ( $\alpha$ ).

Vamos demonstrar que é esse ponto (C) o que proporciona o menor perímetro possível ao triângulo em estudo.

Para tanto, tomemos um ponto (J) qualquer de ( $\alpha$ ) e provemos que a soma dos segmentos (J)(A) e (J)(B) é maior que a soma de (A)(C) com (C)(B). Como, pela própria construção, o plano ( $\alpha$ ) restou sendo o mediador do segmento (B)( $\bar{B}$ ), pode-se anotar (Figura 447):

$$(J)(A) + (J)(B) = (J)(A) + (J)(\bar{B}) \quad (1)$$

$$(C)(A) + (C)(B) = (C)(A) + (C)(\bar{B}) = (A)(\bar{B}) \quad (2)$$

Sendo (J) exterior ao segmento (A)( $\bar{B}$ ), as relações (1) e (2) garantem que:

$$(J)(A) + (J)(\bar{B}) > (A)(\bar{B})$$

$$\text{ou} \quad (J)(A) + (J)(B) > (C)(A) + (C)(B)$$

Fica, assim, demonstrado que o triângulo (A)(B)(C) de perímetro mínimo é o obtido com o ponto (C), traço da reta ( $\bar{B}$ )(A), formada com o vértice (A) e o simétrico ( $\bar{B}$ ) do vértice (B) em relação a ( $\alpha$ ) com esse plano ( $\alpha$ ) (Figura 447).

A construção em épura (Figura 448) reproduz a espacial, com o traçado da perpendicular por (B) a ( $\alpha$ ), a obtenção de seu simétrico ( $\bar{B}$ ), em relação a esse plano, e a determinação do ponto (C), interseção da reta ( $\bar{B}$ )(A) com ( $\alpha$ ).

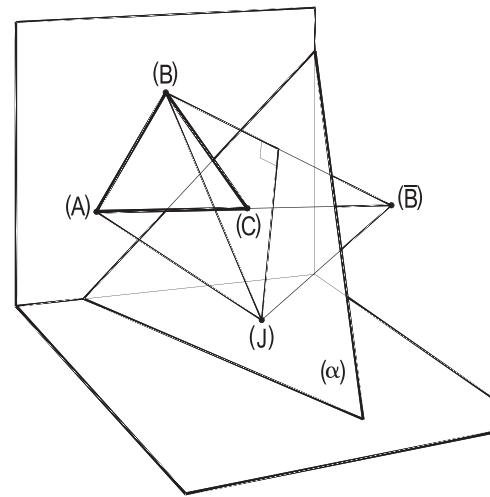


Figura 447

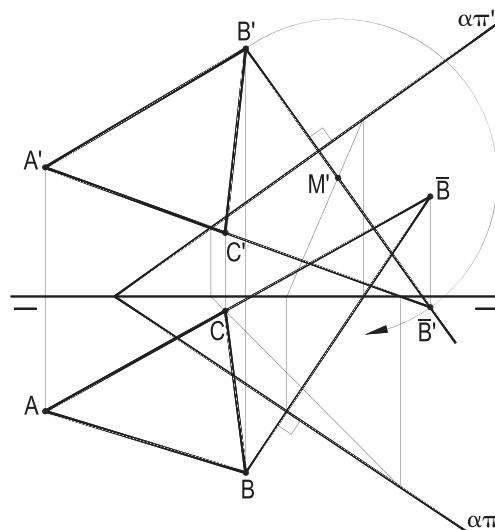


Figura 448

**368 – Dados, em épura, os traços coincidentes  $\alpha\pi' \equiv \alpha\pi$  de um plano ( $\alpha$ ) perpendicular a ( $\beta_{24}$ ) e as projeções coincidentes  $p' \equiv p$  de sua interseção com ( $\beta_{24}$ ), pede-se determinar a posição da linha de terra.**

Resolução: Para analisar a questão, admitamos resolvido o problema (Figura 449) com a construção da reta  $p' \equiv p$  pela união do traço  $J$  de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ) com o traço ( $P$ ) de uma horizontal ( $h$ ), qualquer, de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{24}$ ), e observemos que o triângulo  $V'JV$  é retângulo em  $V$  e que  $P' \equiv P$  é o ponto médio do cateto  $V'V$ , o que proporciona, escolhido um ponto qualquer  $V'$  de  $\alpha\pi' \equiv \alpha\pi$ , construir o círculo de diâmetro  $JV'$  e a reta  $\bar{p}$ , homotética de  $p' \equiv p$ , a partir de  $V'$  na razão 2, para obter seus pontos de corte 1 e 2 (Figura 450), de passagem da linha de terra pedida, com arbitrio de suas orientações, em ambas as possibilidades.

Da própria construção, fica claro que, conforme os dados, o problema pode ter duas, uma ou nenhuma solução, função das posições relativas de  $\bar{p}$  e do círculo de diâmetro  $JV'$ ; visto que a reta auxiliar  $\bar{p}$  pode vir a ser tangente a esse círculo (Figura 451) ou ficar exterior a ele (Figura 452).

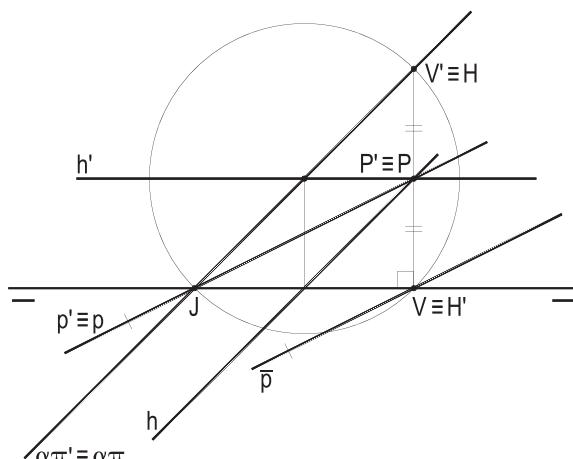


Figura 449

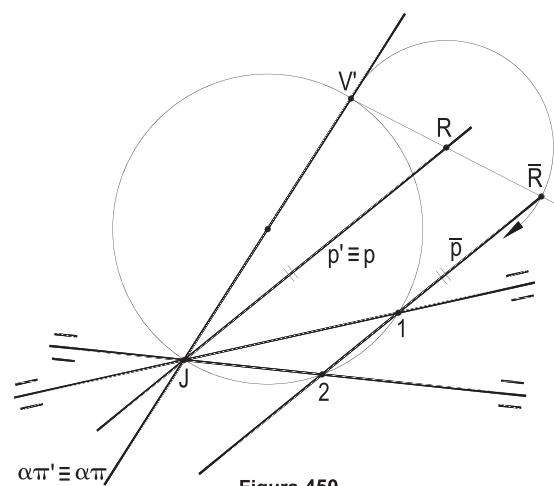


Figura 450

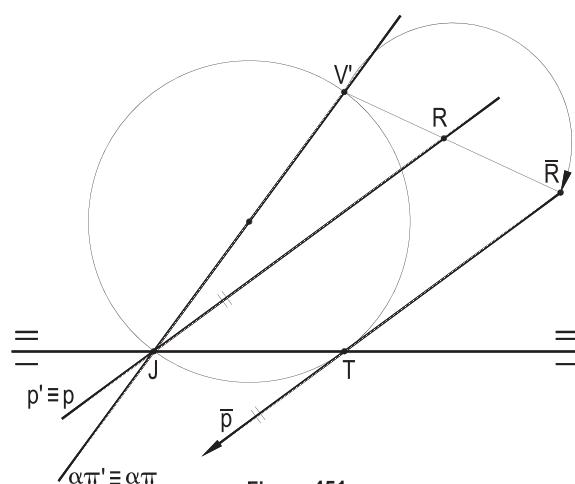


Figura 451

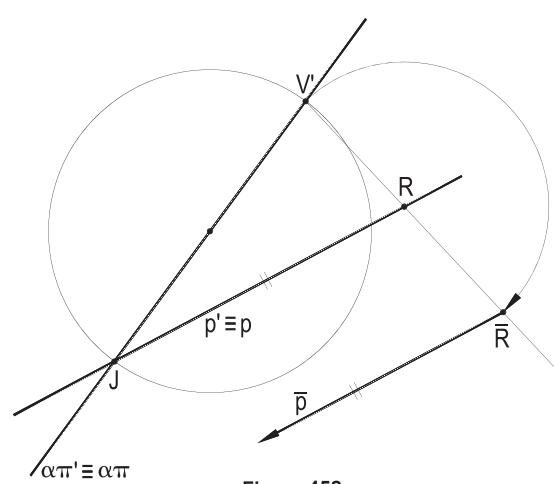


Figura 452

**369 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ), a partir das projeções dadas da bissetriz (b) do ângulo objetivo formado, nos diedros ímpares, pelos traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: Tal como analisado no item 3.4 da Introdução, consideremos o triângulo isósceles  $(J)(V)(H)$  do plano  $(\alpha)$ , cujos lados iguais  $(J)(V)$  e  $(J)(H)$  pertençam a cada um dos traços de  $(\alpha)$ , assim como o ponto  $(M)$ , médio de sua base  $(V)(H)$  (Figura 453).

Assim, a mediana  $(J)(M)$  será também a altura relativa à base  $(V)(H)$  do triângulo  $(J)(V)(H)$  em estudo, com os lados iguais sobre os traços de  $(\alpha)$ .

Assim, se considerarmos um segundo plano  $(\gamma)$ , pertencente ao segmento  $(V)(H)$  e perpendicular a  $(J)(M)$ ,  $(V)(H)$  há de ser, no primeiro diedro, a interseção dos dois planos e, naturalmente, de fácil obtenção, por terem sido dadas as projeções da bissetriz  $(b)$ , suporte da reta  $(J)(M)$ .

E, então, a determinação do segmento  $(V)(H)$ , de  $(\gamma)$ , apoiado por seus traços  $(V)$  e  $(H)$  nos traços de mesmo nome de  $(\gamma)$ , sendo  $(M)$  seu ponto médio, resolverá a questão proposta, pois  $(V)$  e  $(H)$  serão pontos de passagem dos traços do plano procurado  $(\alpha)$ .

Tal construção é bem simples: por um ponto  $(M)$  arbitrado de  $(b)$ , conduz-se o plano  $(\gamma)$ , perpendicular a  $(b)$  e, duplicando a cota de  $(M)$ , obtém-se  $V'$  (Figura 454) e, então,  $H'$  e  $H$  e, utilizando o ponto  $J' \equiv J$ , os traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  do plano  $(\alpha)$  procurado.

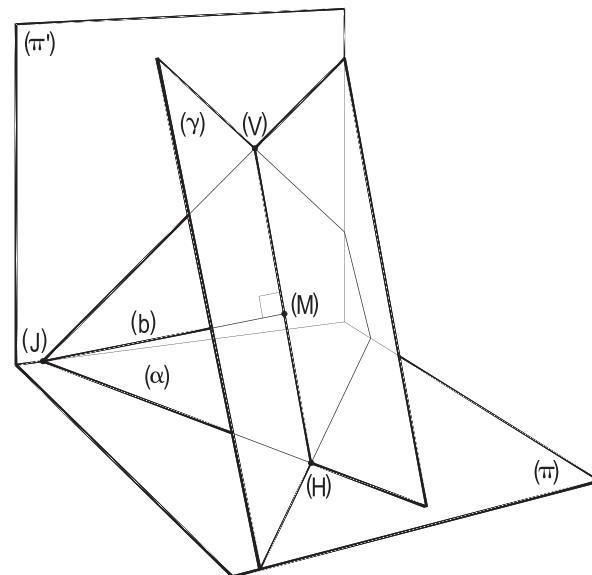


Figura 453

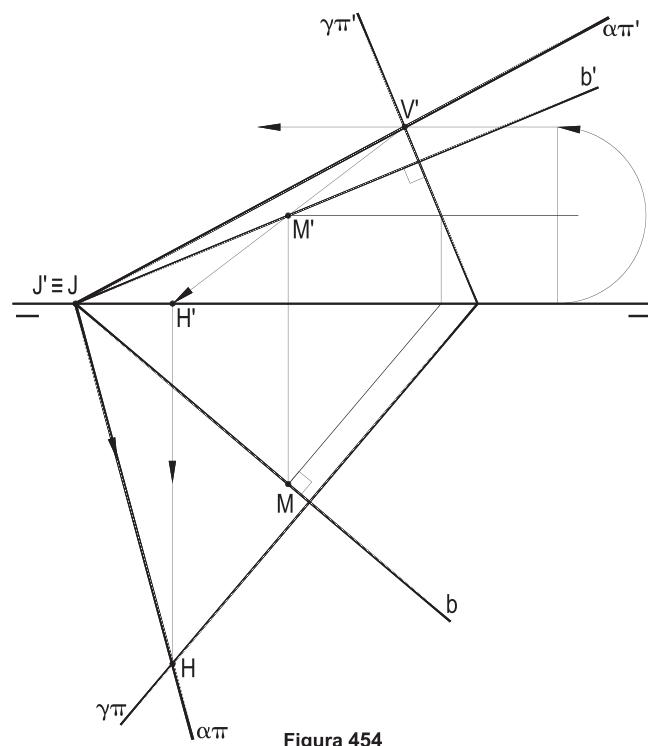


Figura 454

**370 – Construir as projeções do triedro trirretângulo de vértice (J), que é seccionado pelo plano de perfil de abscissa nula, produzindo o triângulo (A)(B)(C), dado por suas projeções, sabendo que o vértice (J) do triedro tem abscissa negativa.**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 76) que a projeção ortogonal do vértice de um triedro trirretângulo sobre um plano genérico que corte suas três arestas coincide com o ortocentro do triângulo seção produzido pelo plano no triedro.

No caso em estudo, o plano secante é ( $\pi''$ ), o que obriga ser fronto-horizontal a projetante do vértice (J) do triedro sobre o plano secante (Figura 455), proporcionando, com uma simples vista lateral, a obtenção do ortocentro (H) do triângulo seção (A)(B)(C), dado (Figura 456).

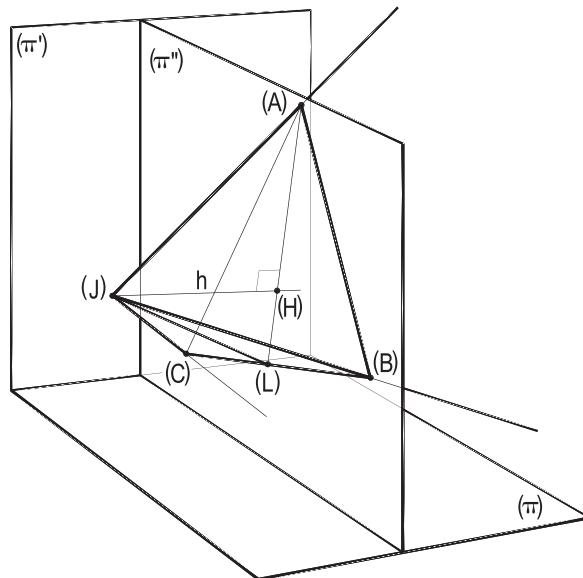


Figura 455

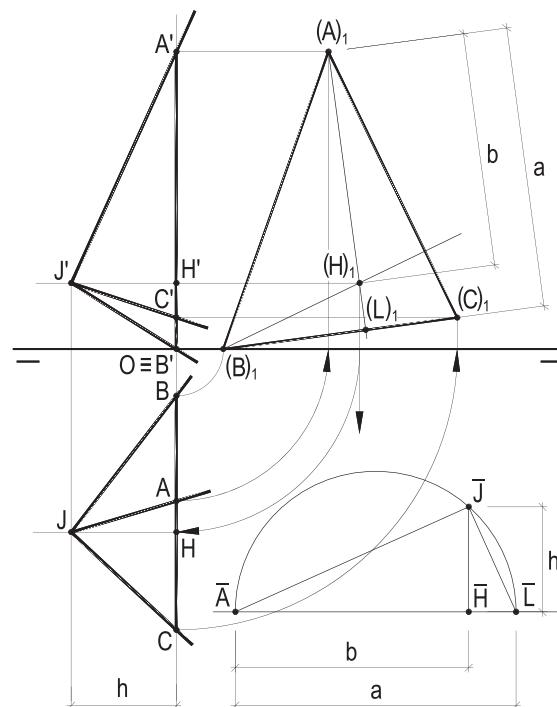


Figura 456

A determinação da distância  $h$  do vértice (J) do triedro ao plano secante ( $\pi''$ ) se faz mediante uma construção geométrica, ao lado da épura, que reproduz o triângulo (J)(L)(A) (Figura 455), retângulo em (J), já que a reta (J)(A) é perpendicular ao plano da face (J)(B)(C), aproveitando as verdadeiras grandezas de uma altura (A)(L) da seção e da posição do ortocentro (H), pelo valor do segmento (A)(H). Assim é (Figura 456) a obtenção dessa distância  $h$ , altura do triângulo retângulo  $\bar{J}\bar{A}\bar{L}$ , relativa à sua hipotenusa  $\bar{A}\bar{L}$ , que mede a diferença entre as abscissas de (A)(B)(C) e de (J), havendo apenas uma solução, imposta pela obrigação da abscissa negativa para o vértice (J) do triedro.

**371 – Os pontos (A), (B) e (C) pertencem, cada um, a cada uma das arestas de um triedro trirretângulo, de vértice (J), e faces transparentes.**

**Sabendo que o vértice (C) pertence a ( $\pi'$ ), pede-se construir as projeções do triângulo e do triângulo (A)(B)(C).**

**São dados J', J, A', B' e B.**

Resolução: Como a face (J)(A)(C) tem que pertencer ao plano conduzido por (J) e perpendicular a (J)(B), inicia-se construindo os traços desse plano ( $\alpha$ ), para marcar (A) nele (Figura 457).

Em seguida, definido que está o plano da face (J)(A)(B), para construir a última aresta, basta traçar, por (J), a perpendicular (p) a essa face, com as ajudas da horizontal (h) e da frontal (f) (Figura 457). O vértice (C) do triângulo seção é de imediata obtenção, por ser o traço vertical dessa perpendicular.

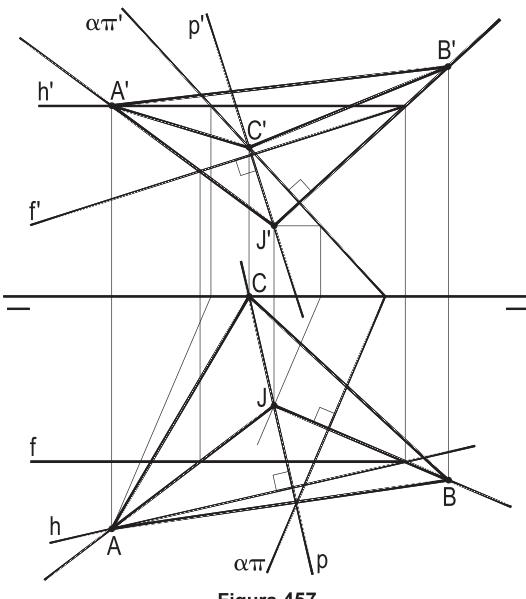


Figura 457

**372 – Determinar as projeções do retângulo (A)(B)(C)(D), sabendo que os vértices (C) e (D) pertencem, respectivamente, a ( $\pi'$ ) e a ( $\pi''$ ).**

**São dadas as projeções do lado (A)(B) e a origem O das abscissas.**

Resolução: O lado (B)(C) tem que pertencer ao plano perpendicular ao lado (A)(B), conduzido pelo vértice (B).

Assim, construído esse plano ( $\gamma$ ), porque os vértices (C) e (D) devem pertencer a ( $\pi'$ ) e a ( $\pi''$ ), suas projeções verticais C' e D' hão de estar, respectivamente, sobre  $\gamma\pi'$  e sobre a linha de chamada traçada pela origem O das abscissas.

Com isso, como C'D' tem que ser paralelo e igual a A'B', a solução do problema se faz por duas translações consecutivas de A'B' para as posições  $\bar{A}'\bar{B}'$  e, enfim, D'C' (Figura 458), o que permite concluir as projeções do retângulo (A)(B)(C)(D), com o traçado de paralelas.

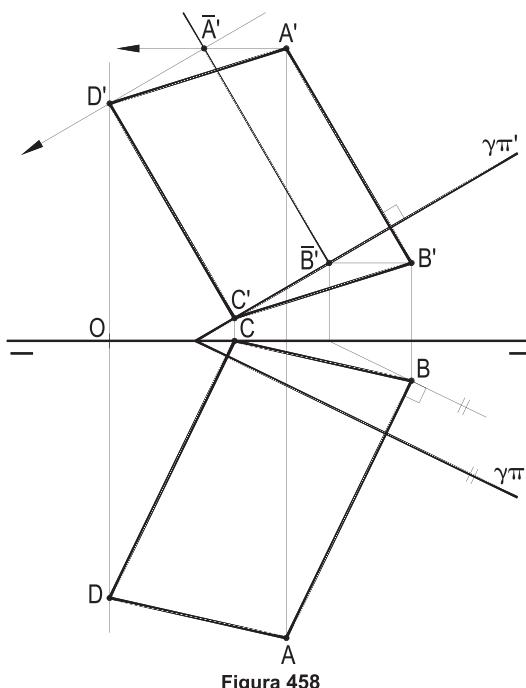


Figura 458

**373 – Dados um plano ( $\alpha$ ), por seus traços, e um ponto (J), por suas projeções, pede-se desenhar as projeções do quadrilátero convexo (A)(B)(C)(D), de ( $\alpha$ ), que tenha seus lados (A)(B) em ( $\pi$ ) e (C)(D) em ( $\pi'$ ), sabendo que todos os seus vértices distam de (J) um valor igual à abscissa deste ponto, sendo (A) o vértice de maior abscissa.**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 27) que os pontos de um plano que distam um valor conhecido de um ponto (J) exterior é a circunferência desse plano, base do cone de revolução de vértice (J) e geratrizes iguais àquele valor.

Assim, determinados os raios  $R_1$  e  $R_2$  das bases dos dois cones de revolução de vértice (J), apoiados em ( $\pi$ ) e em ( $\pi'$ ), com geratrizes iguais à abscissa  $k$  de (J), essas circunferências cortam os traços de ( $\alpha$ ), produzindo os vértices do quadrilátero procurado (Figuras 459 e 460).

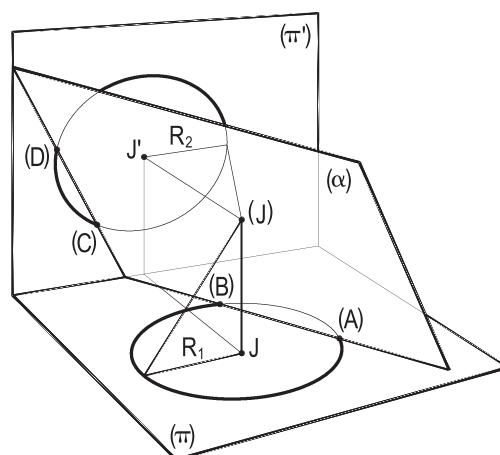


Figura 459

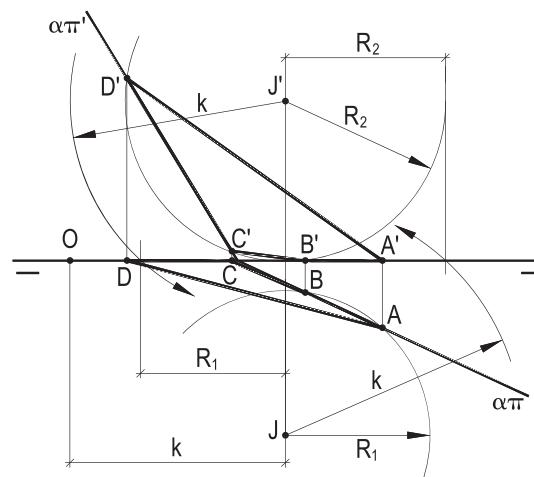


Figura 460

Observe-se que o problema restaria impossível, caso a abscissa  $k$  de (J) e a posição desse ponto em relação a ( $\alpha$ ) fossem tais que, pelo menos, uma das circunferências utilizadas não cortasse qualquer dos traços de ( $\alpha$ ) (Figura 461), ou mesmo tangenciasse um deles (Figura 462).

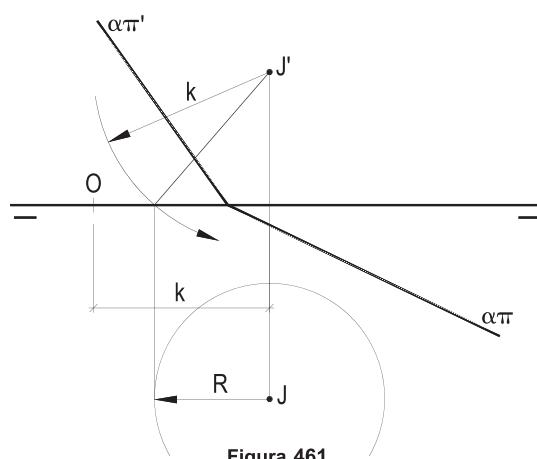


Figura 461

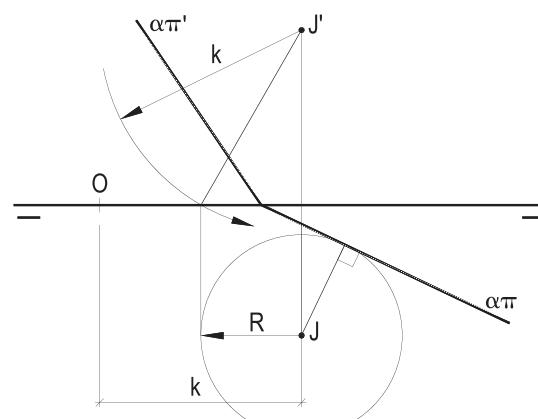


Figura 462

**374 – A reta (r) se apoia na circunferência de círculo (c), pertencente a um plano horizontal, e é ortogonal às retas reversas (a) e (b). Dadas as projeções do ponto (O), centro da circunferência (c), e das retas (a) e (b), pede-se construir as projeções da reta (r), cujo traço horizontal equidista dos pontos (E) e (F), também dados por suas projeções, sabendo que (c) tangencia ( $\pi'$ ).**

Resolução: De início, como o traço horizontal (H) da reta procurada (r) tem que equidistar dos pontos (E) e (F), ele deve pertencer ao traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano ( $\alpha$ ), mediador do segmento (E)(F) (número 2).

A reta (r) tem direção conhecida (p), pois, para ser ortogonal às retas reversas (a) e (b), ela deve ser perpendicular ao plano formado por duas paralelas ( $\bar{a}$ ) e ( $\bar{b}$ ) àquelas reversas, conduzidas por um ponto (J) qualquer. E, por isso, ao se apoiar na circunferência (c), com a direção dessa perpendicular (p), a reta (r) gera uma superfície cilíndrica de diretriz (c), que, então, cortará ( $\pi$ ), segundo uma outra circunferência ( $c_1$ ) igual à primeira, fruto, em verdade, de translação dessa primeira até ( $\pi$ ) (Figura 463).

Os pontos de corte ( $H_1$ ) e ( $H_2$ ) de  $\alpha\pi$  com ( $c_1$ ) são, então, os traços horizontais das retas ( $r_1$ ) e ( $r_2$ ) que resolvem a questão (Figura 463), traçadas com a direção (p).

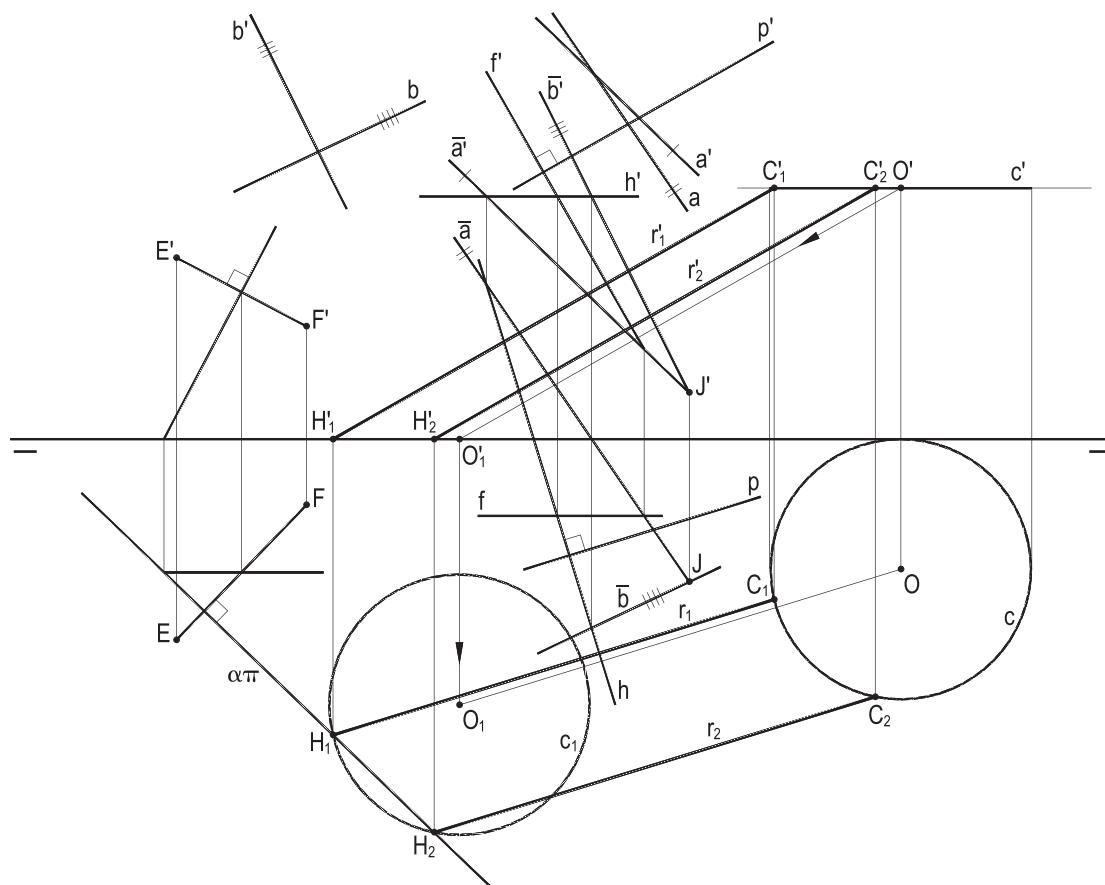


Figura 463

# CAPÍTULO VIII

## MÉTODOS DESCRIPTIVOS MUDANÇAS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO

Iniciam-se, neste capítulo, os problemas referentes às utilizações dos métodos descritivos, com as mudanças dos planos de projeções. Algo mais que sete dezenas de exemplos vão listados a seguir.

**375 – Dado o paralelogramo (A)(B)(C)(D), por suas projeções, pede-se determinar sua nova projeção vertical, após a mudança de ( $\pi'$ ), que faça com que seu lado (A)(B) venha a ser frontal, o vértice (A) pertencendo ao bissetor ímpar do novo sistema projetivo.**

Resolução: Para que o lado (A)(B), no novo sistema projetivo, passe a ser frontal, a nova linha de terra há de ser paralela à projeção horizontal AB.

E, para que (A) venha a, após a mudança, pertencer a ( $\beta_{13}$ ), seu novo afastamento tem que igualar sua cota a, que permanece constante nessa mudança (Figura 464).

Traçada a segunda linha de terra, a nova projeção vertical  $A'_1B'_1C'_1D'_1$  do paralelogramo constrói-se facilmente pelo transporte das cotas de seus vértices e/ou pelo paralelismo de seus lados.

Observe-se que há uma segunda solução, não incluída na Figura 464, para uma posição da nova linha de terra simétrica da que foi utilizada, em relação à projeção horizontal AB.

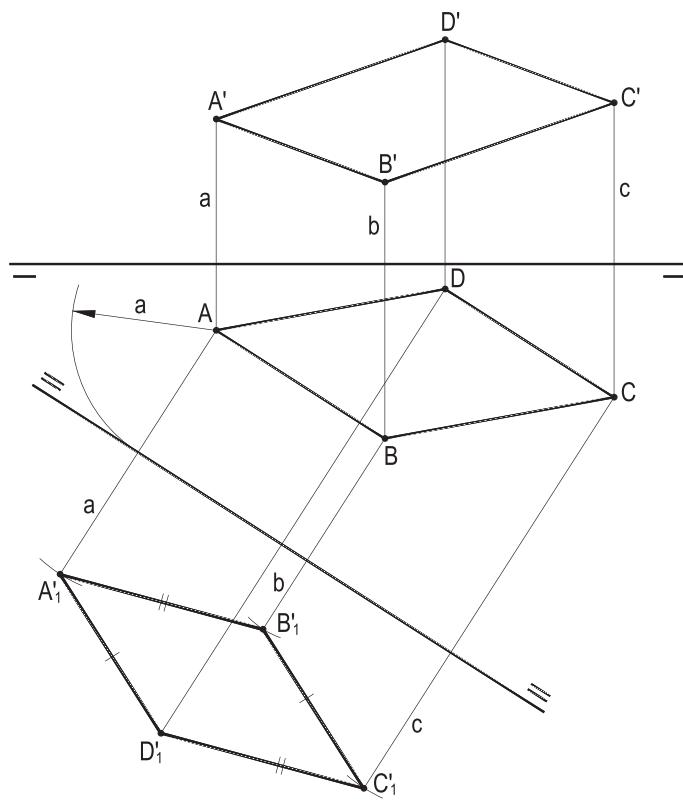


Figura 464

Para cada uma das épuras abaixo, determinar a V.G. da distância D entre o ponto (A), dado por suas projeções, e o ponto (B), dado pelas condições descritas em cada caso.

Resoluções: Em todos os casos, uma mudança, transformando (A)(B) em horizontal ou frontal, dá solução ao pedido.

376 – (B)  $\epsilon (\pi)$ . Dado B

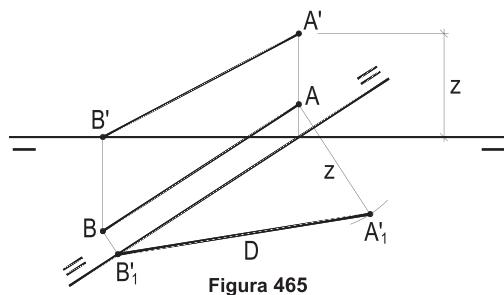


Figura 465

377 – (B)  $\epsilon (\gamma)$ . Dado B'

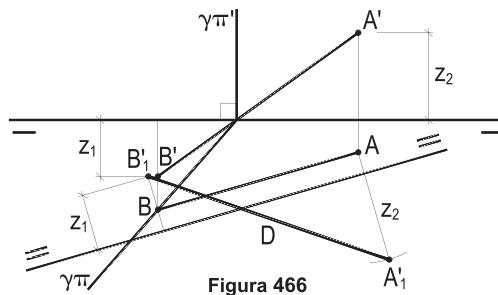


Figura 466

378 – (B)  $\epsilon (\beta_{24})$ . Dado B'

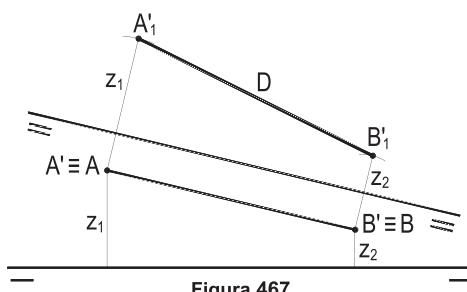


Figura 467

379 – (B)  $\equiv (O)$

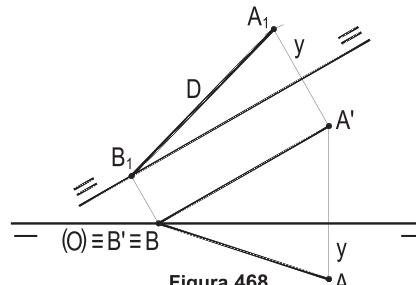


Figura 468

380 – (A)(B) é perpendicular a ( $\alpha$ ), (B)  $\epsilon (\pi'')$  381 – (A)(B) é de perfil. (B)  $\epsilon (\pi'\pi)$

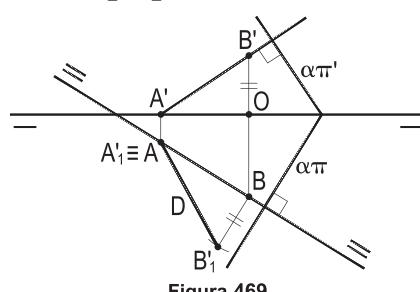


Figura 469

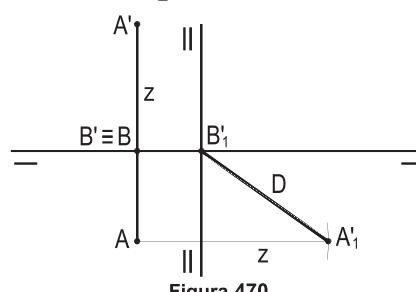


Figura 470

382 – (B)  $\equiv (\alpha\beta\beta_{13})$ . Dados ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ )

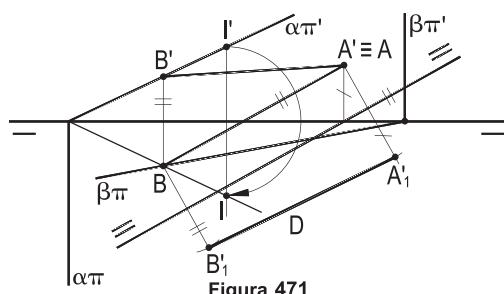


Figura 471

383 – (B)  $\equiv (\gamma\rho\lambda)$ . Dados ( $\gamma$ ), ( $\rho$ ) e ( $\lambda$ )

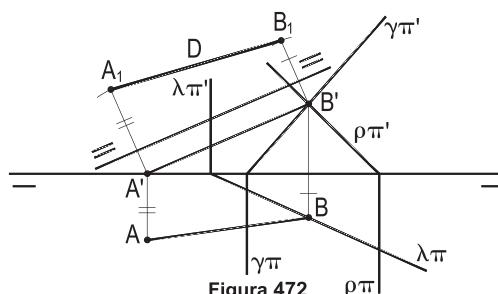


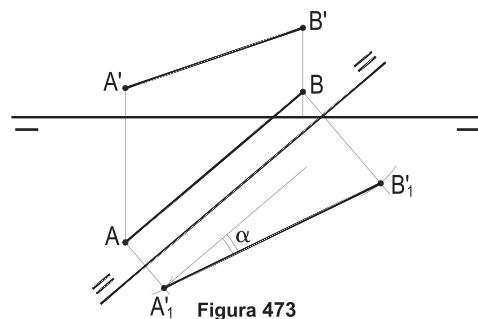
Figura 472

São dadas, por suas projeções, as retas (A)(B) e (E)(F).

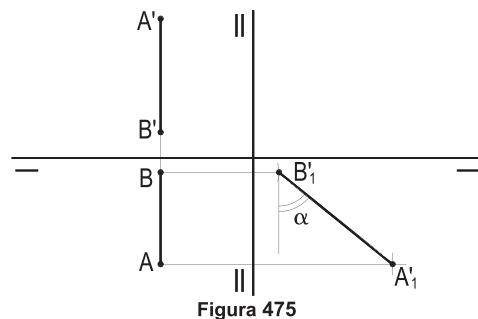
Pede-se, para cada um dos casos abaixo, determinar as verdadeiras grandezas do ângulo  $\alpha$  que a reta (A)(B) forma com ( $\pi$ ) e do ângulo  $\beta$  que a reta (E)(F) forma com ( $\pi'$ ).

Resoluções: A V.G. do ângulo  $\alpha$  se obtém com uma mudança de ( $\pi'$ ), que torne (A)(B) frontal; para  $\beta$ , a mudança deve ser de ( $\pi$ ), fazendo (E)(F) tomar a posição horizontal.

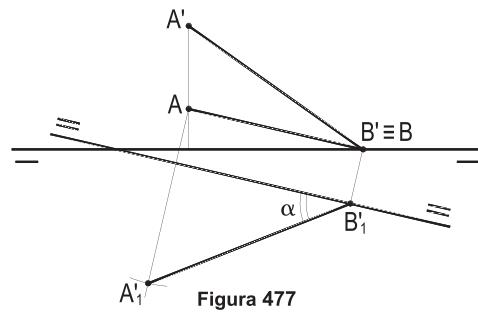
384



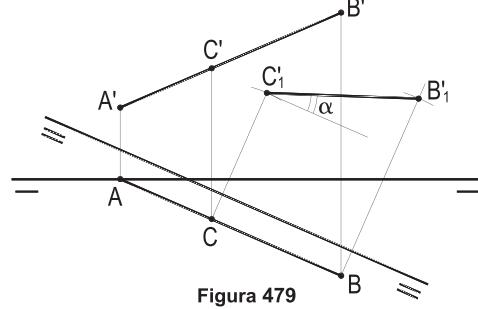
386



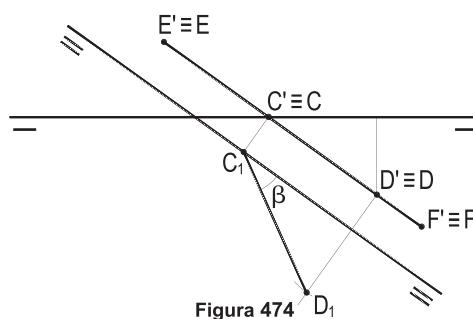
388



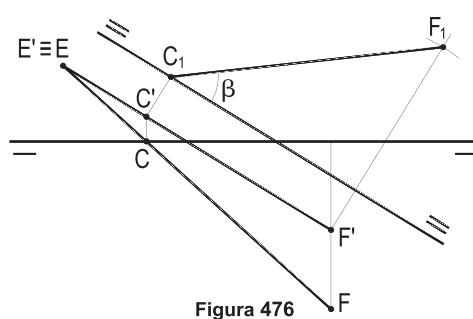
390



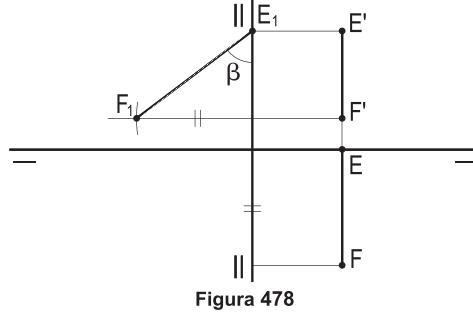
385



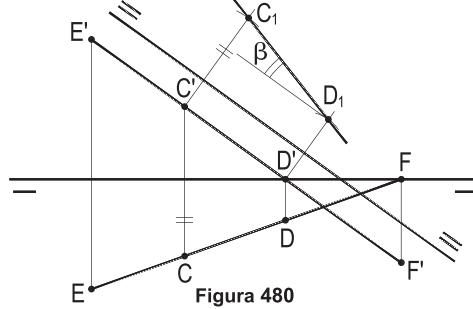
387



389



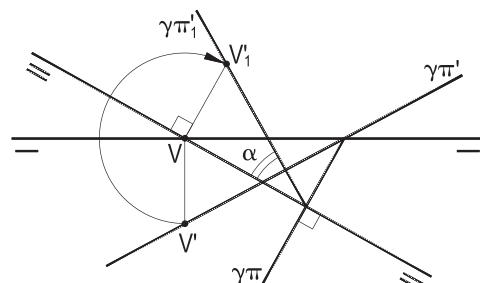
391



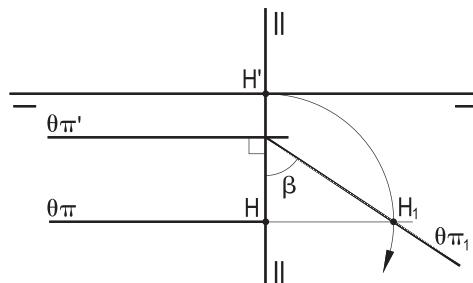
Em cada uma das épuras abaixo, são dados o plano ( $\gamma$ ), por seus traços ou pelas projeções de duas retas (a) e (b), ou o plano ( $\theta$ ), por seus traços ou pelas projeções de duas retas (r) e (s). Pede-se determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que, respectivamente, ( $\gamma$ ) forma com ( $\pi$ ) e ( $\theta$ ) com ( $\pi'$ ).

Resoluções: Uma mudança, que torne ( $\gamma$ ) de topo, proporciona a V.G. de  $\alpha$ . E outra, que leve ( $\theta$ ) à posição vertical, a V.G. de  $\beta$ .

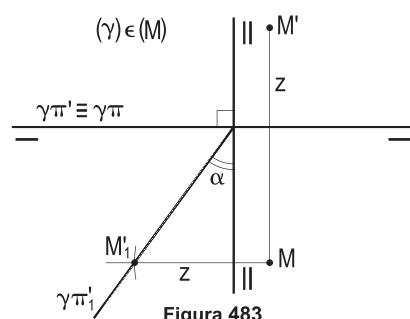
392



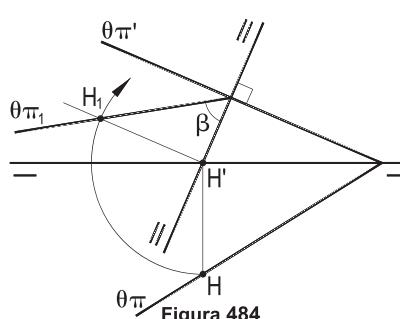
393



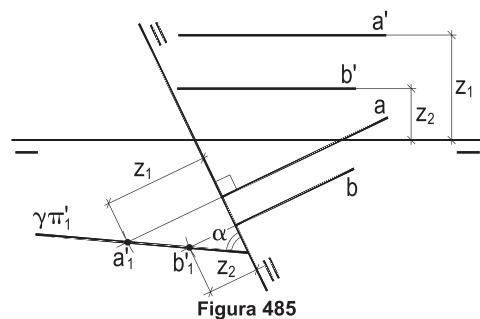
394



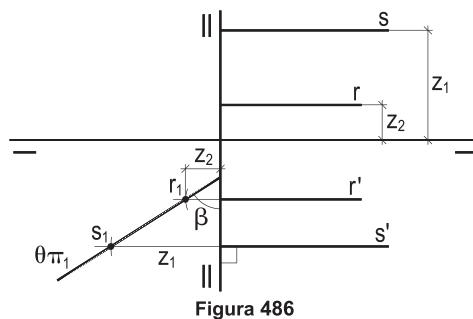
395



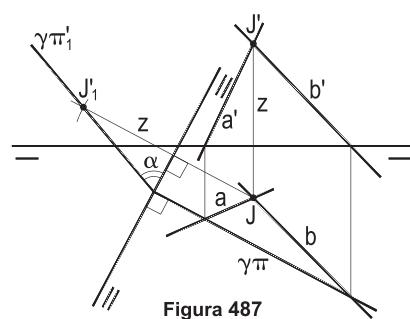
396



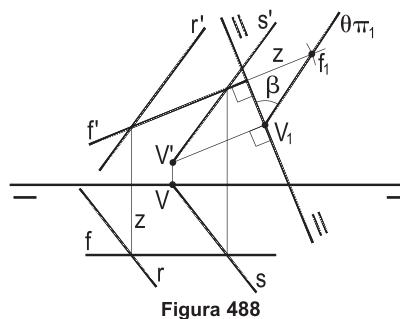
397



398



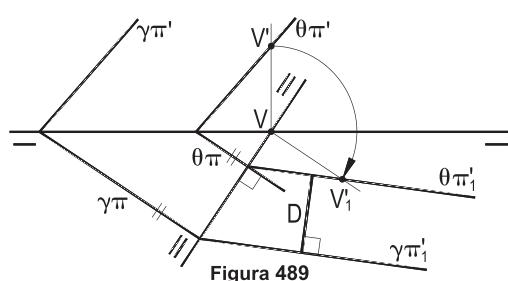
399



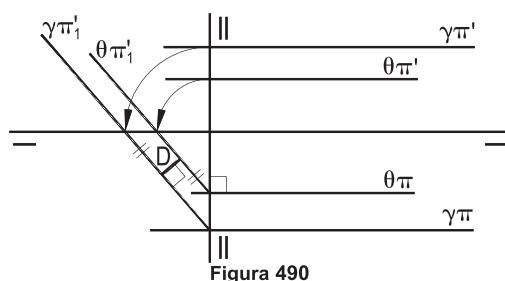
Para as épuras abaixo, determinar a V.G. da distância  $D$  entre os planos paralelos  $(\gamma)$  e  $(\theta)$ , dados por seus traços, ou um por seus traços e o outro pelas projeções de duas retas suas (a) e (b).

Resoluções: Uma mudança que faça os dois planos virem a ser de topo, ou verticais, resolve a questão.

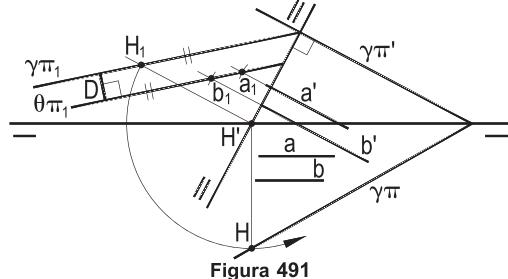
400



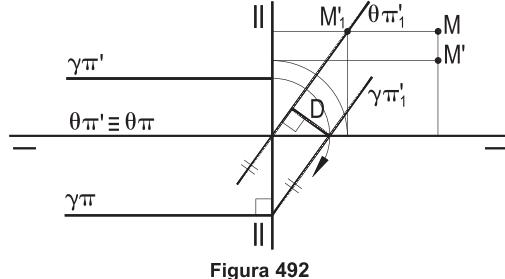
401



402



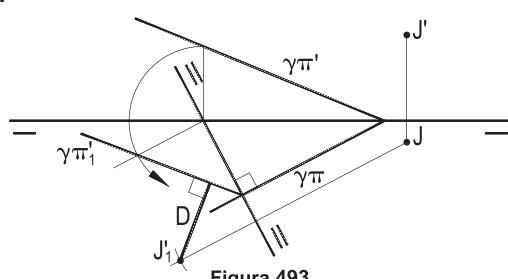
403



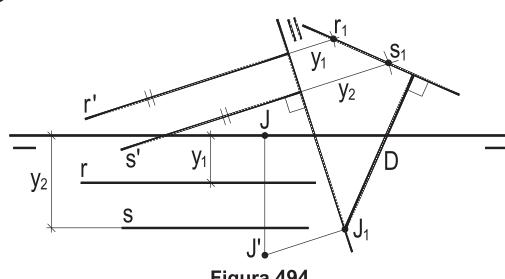
Para os casos abaixo, determine a V.G. da distância  $D$  do ponto ( $J$ ), dado por suas projeções, ao plano  $(\gamma)$ , dado por seus traços ou pelas projeções de duas de suas retas ( $r$ ) e ( $s$ ).

Resoluções: Uma mudança que torne  $(\gamma)$  projetante resolve o problema.

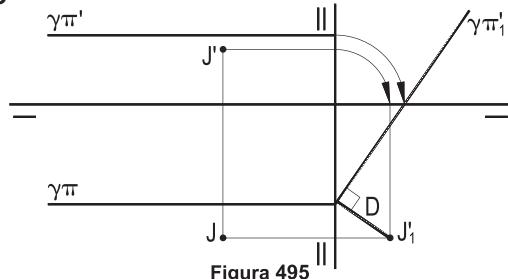
404



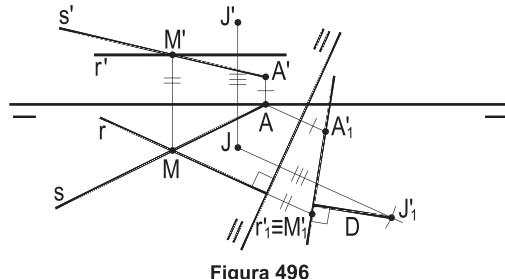
405



406



407



**408 – Do losango (A)(B)(C)(D) são dadas as projeções do lado (A)(B) e da semirreta (Bx), à qual pertence o lado (B)(C).**

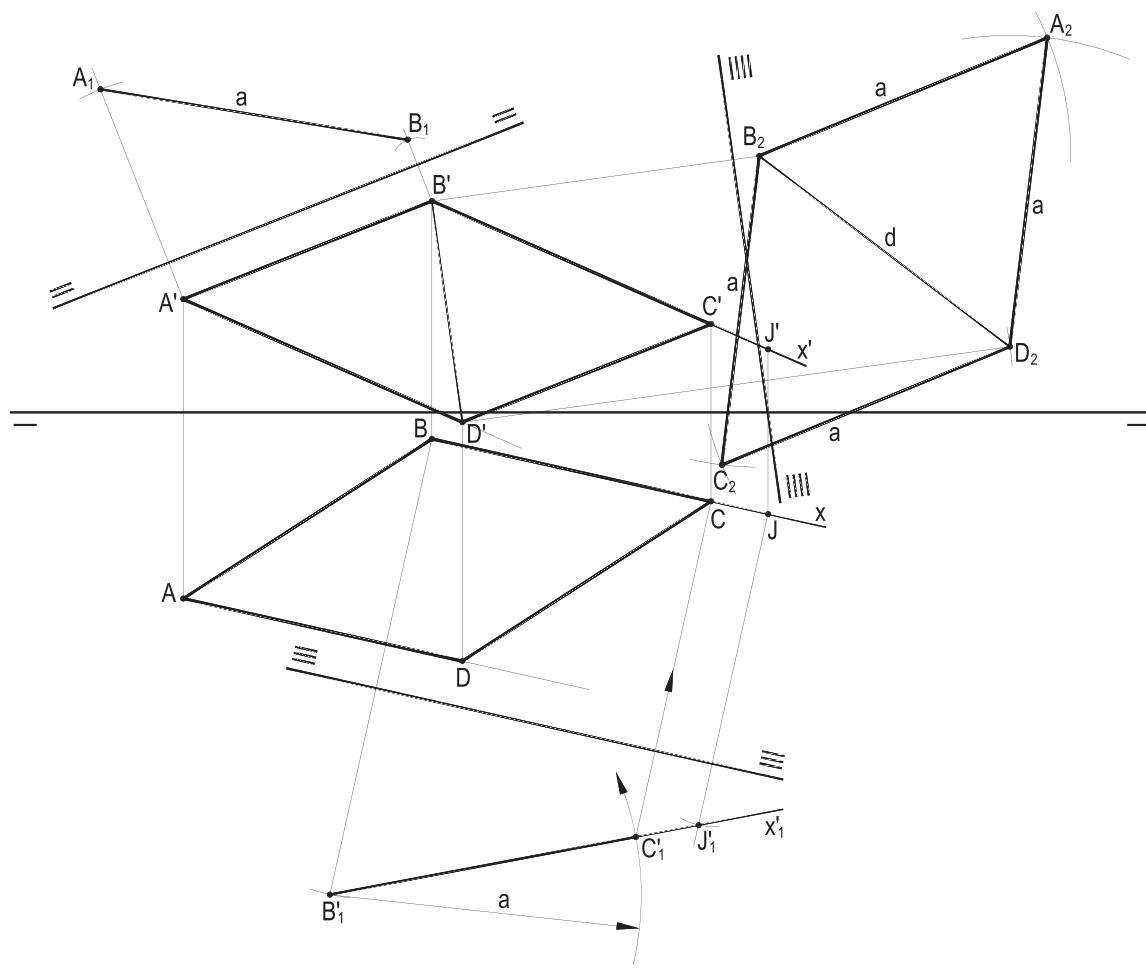
Pede-se completar as projeções do losango e construir sua V.G.

Resolução: Inicialmente, com uma mudança de ( $\pi$ ), que torne o lado (A)(B) horizontal, consegue-se a V.G. a dos lados do losango.

E, com nova mudança, agora de ( $\pi'$ ), leva-se a semirreta (Bx) à posição frontal, podendo-se, então, aplicar aquela V.G. a, obtendo-se, nesse novo sistema projetivo, o vértice (C) do losango, por sua projeção C'1.

Retornado esse vértice ao sistema original, com paralelas, completa-se o losango (A)(B)(C)(D) (Figura 497).

E, com uma terceira mudança, determina-se a V.G. d da diagonal (B)(D), com o que fica simples construir a V.G. A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub> do losango (Figura 497).



**Figura 497**

**409** – Determinar os traços da reta ( $r$ ), que passa pelo ponto ( $A$ ) e forma  $30^\circ$  com ( $\pi$ ), sem atravessar o segundo diedro. Dados  $A'$  e  $r$ .

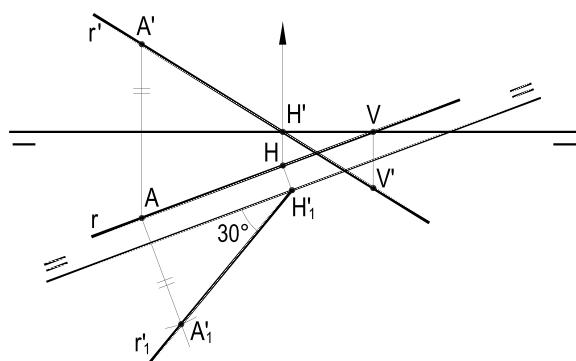
Resolução: Com uma mudança de  $(\pi')$ , que torne  $(r)$  frontal, marca-se a V.G. de seu ângulo com  $(\pi)$ , obtendo-se  $r'_1$  (Figura 498), que, retornada, dá  $r'$ .

**410** – Da reta qualquer ( $r$ ) são dadas a projeção vertical  $r'$  e a projeção horizontal  $V$  de seu traço vertical ( $V$ ). Pede-se obter a projeção horizontal de ( $r$ ), bem como as projeções de seu traço horizontal ( $H$ ), sabendo que ( $r$ ) forma  $45^\circ$  com ( $\pi'$ ), não atravessando o quarto diedro.

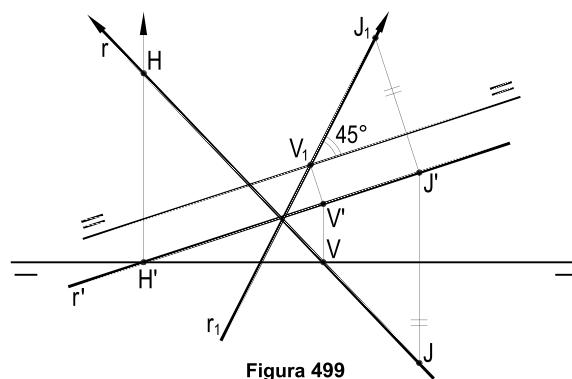
Resolução: Com uma mudança de  $(\pi)$ , que torne  $(r)$  horizontal, marca-se a V.G. de seu ângulo com  $(\pi')$  (Figura 499), retornando um ponto arbitrado  $(J)$  de  $(r)$ .

**411** – Com uma só mudança, faça com que o paralelogramo (A)(B)(C)(D), dado por suas projeções, passe a ter por projeção horizontal um segmento de reta.

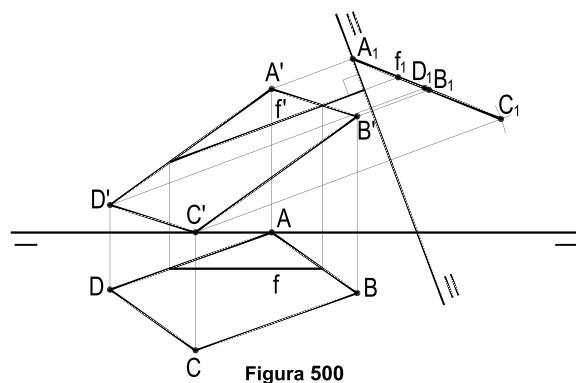
Resolução: O pedido será atendido quando o plano do triângulo, no novo sistema projetivo, for projetante em relação a  $(\pi)$ . É, pois, com uma mudança de  $(\pi)$ , que torne uma frontal ( $f$ ) do plano do triângulo uma reta vertical (Figura 500), que se dá solução ao problema. Naturalmente, há uma infinidade de novas linhas de terra que resolvem a questão. Todas as que têm a direção perpendicular às frontais do plano do triângulo dado (Figura 501).



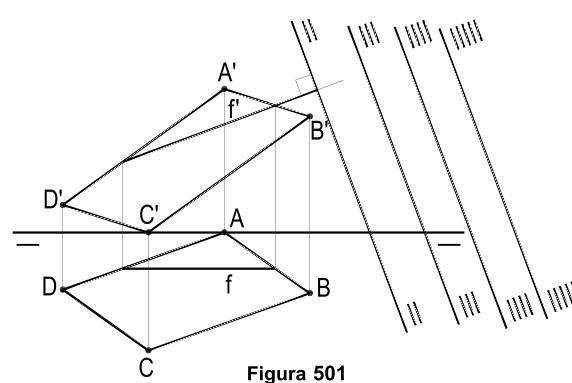
**Figura 498**



**Figura 499**



**Figura 500**



**Figura 501**

**412 – Por meio de uma única mudança de ( $\pi'$ ), faça a reta (r), dada por suas projeções, pertencer a um plano que, no novo sistema projetivo, contenha a linha de terra e forme  $30^\circ$  com ( $\pi$ ).**

Resolução: Para que pertença a um plano ( $\pi'\pi$ )-(M), no novo sistema, a reta (r), qualquer, deverá concorrer com a nova linha de terra. Por isso, aproveitamos seu traço horizontal H, para, por ele, conduzir a nova linha de terra, pois, então, o ponto (H) passará a ter cota e afastamento nulos.

Arbitrado um segundo ponto (J) de (r), uma vista lateral informa qual afastamento y deve corresponder à sua cota z, para atender à pertinência a um plano ( $\gamma$ ), ( $\pi'\pi$ )-(M), inclinado de  $30^\circ$  com ( $\pi$ ). A nova linha de terra será, então, tangente à circunferência de centro J e raio y, proporcionando duas posições para J' (Figura 502). Observe-se que há duas novas soluções, para a outra tangente, relativa ao ponto de contato indicado pelo número 2.

**413 – Dado, por suas projeções, o segmento (A)(B), com uma única mudança de ( $\pi'$ ), faça com que, no novo sistema projetivo, ele venha a ser de perfil, tendo seu ponto médio (M) no bissetor ímpar desse novo sistema.**

Resolução: A nova linha de terra tem que ser, naturalmente, perpendicular à projeção AB para assegurar que (A)(B) venha a ficar de perfil e a uma distância de M igual à cota original de (M).

Há duas soluções (Figura 503), para as projeções verticais  $A'_1B'_1$  e  $A'_2B'_2$ .

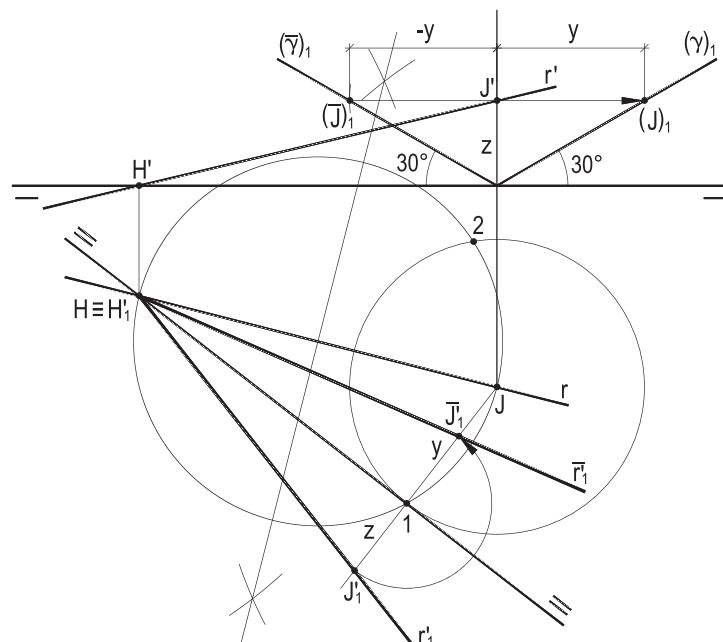


Figura 502

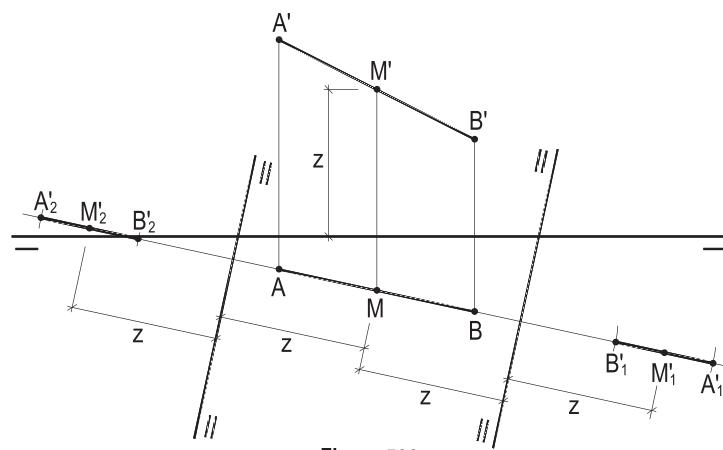


Figura 503

**414 – Dados, por seus traços, os planos ( $\alpha$ ), ( $\gamma$ ) e ( $\varphi$ ), pede-se determinar seus novos traços horizontais, após mudanças de ( $\pi$ ), para cada caso, atendendo às novas linhas de terra dadas (Figuras 504, 505 e 506).**

Resolução: Com a utilização de um ponto ( $H$ ) comum às duas linhas de terra, obtém-se rapidamente os novos traços horizontais (Figuras 504 e 505), o que fica ainda mais simples para o plano ( $\varphi$ ), de topo, por manter-se de topo, após a mudança (Figura 506).

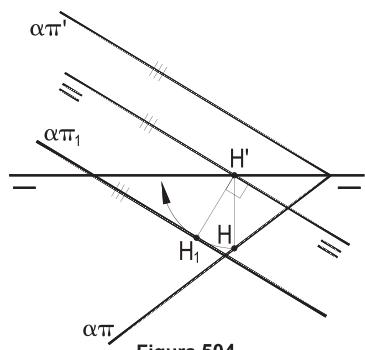


Figura 504

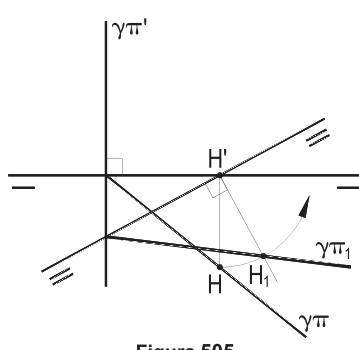


Figura 505

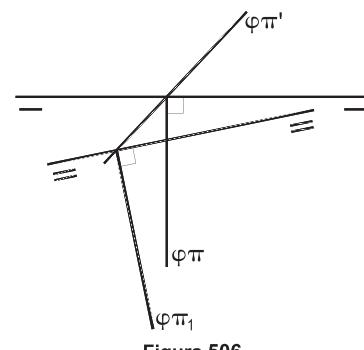


Figura 506

**415 – Dado um plano ( $\alpha$ ) por seus traços, pede-se efetuar uma mudança de ( $\pi'$ ), para a nova linha de terra dada, construindo seu traço vertical  $\alpha\pi'_1$ , no novo sistema projetivo.**

Resolução: Tal a posição particular da nova linha de terra, convém utilizar, como auxílio, um ponto ( $A$ ) de ( $\alpha$ ), cuja projeção horizontal  $A$  pertença à nova ( $\pi'\pi$ ), o que levará  $A'_1$  a pertencer ao novo traço vertical  $\alpha\pi'_1$ , dado seu afastamento nulo (Figura 507).

Pode-se, também, utilizar uma linha de terra auxiliar, paralela à imposta, e proceder à mudança usual, para encontrar a direção  $d$  do novo traço vertical de ( $\alpha$ ) (Figura 508).

**416 – Submeta o plano ( $\alpha$ ), dado, a mudanças sucessivas que, no sistema final, o leve a ser um plano frontal.**

Resolução: Uma primeira mudança de ( $\pi$ ), que torne ( $\alpha$ ) vertical, perpendicular, assim, a ( $\pi$ ), o prepara para nova mudança, agora de ( $\pi'$ ), que o leva à posição frontal pedida (Figura 509).

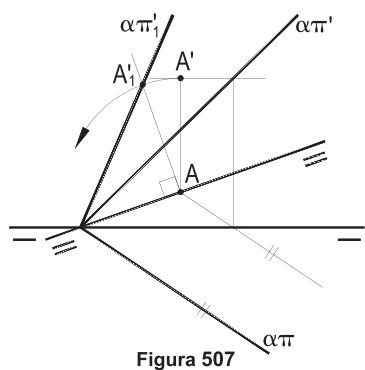


Figura 507

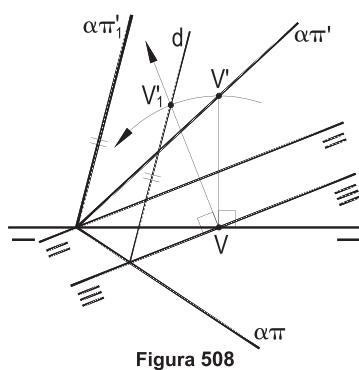


Figura 508

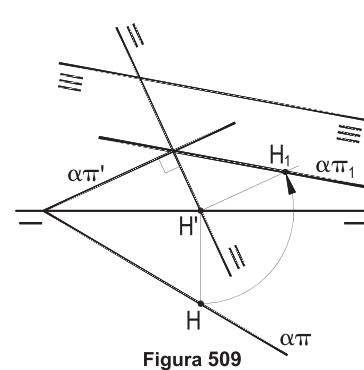


Figura 509

**417 – Dados dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), por seus traços, pede-se, com uma única mudança, fazer com que dois de seus traços, de mesmo nome, venham a coincidir.**

Resolução: Para que dois planos secantes tenham seus traços verticais coincidentes, é preciso que esse traço comum seja a própria interseção dos dois planos dados. Sendo comuns os pontos de corte dos traços de mesmo nome de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), a resolução é simples (Figuras 511 e 512) e, quando não é acessível o ponto (V) comum aos traços verticais (Figura 513), utiliza-se um outro ponto (J) da interseção para completar a épura, o que se repete (Figura 514) com o auxílio de um segundo ponto (L) dessa interseção, no caso de também não ser acessível o ponto comum aos traços horizontais dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ). Assim, para fazer coincidir os novos traços verticais  $\alpha\pi'_1$  e  $\gamma\pi'_1$  de dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), com uma só mudança, que, naturalmente, há de ser de ( $\pi'$ ), basta que a nova linha de terra coincida com a projeção horizontal  $r$  da interseção dos dois planos dados. Sendo comuns os pontos de corte dos traços de mesmo nome de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), a resolução é simples (Figuras 511 e 512) e, quando não é acessível o ponto (V) comum aos traços verticais (Figura 513), utiliza-se um outro ponto (J) da interseção para completar a épura, o que se repete (Figura 514) com o auxílio de um segundo ponto (L) dessa interseção, no caso de também não ser acessível o ponto comum aos traços horizontais dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ).

Por fim é equivalente a questão de, com uma só mudança, fazer coincidir os novos traços horizontais dos dois planos dados, com uma mudança de ( $\pi$ ), tal que a nova linha de terra fique coincidente com a projeção vertical  $r'$  da interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) (Figura 515).

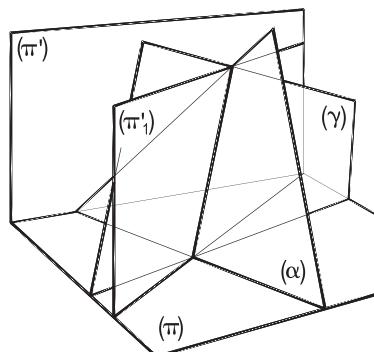


Figura 510

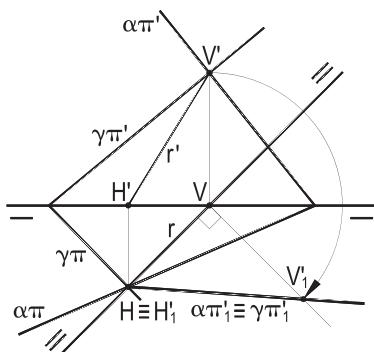


Figura 511

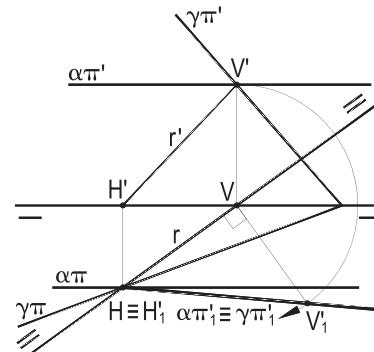


Figura 512

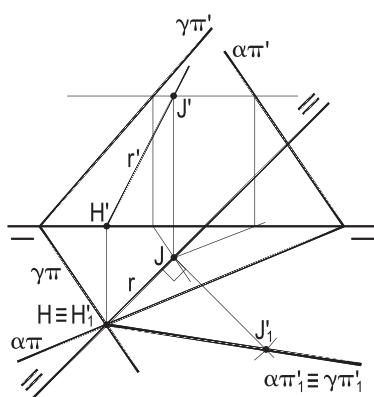


Figura 513

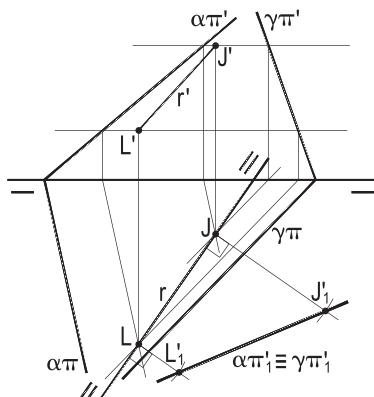


Figura 514

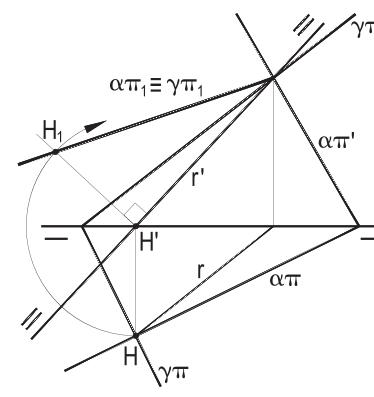


Figura 515

**418 – Nos casos abaixo, dados por seus traços os planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), pede-se que, com uma única mudança de ( $\pi'$ ), seus traços verticais venham a ser paralelos.**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Descritiva*, número 59) que, para que dois planos secantes, um, pelo menos, qualquer, tenham traços verticais paralelos, sua interseção deve ser uma reta frontal. Assim, a mudança que resolve o problema é a que faz a interseção (V)(H) dos dois planos dados vir a ser frontal (Figuras 516 e 517).

Observe-se que o problema oferece uma infinidade de soluções, já que fixa é a direção da nova linha de terra, contando, assim, com todas as paralelas a VH como possíveis novas linhas de terra (Figura 517).

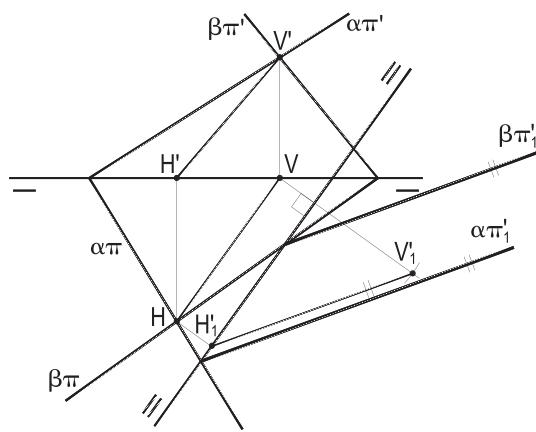


Figura 516

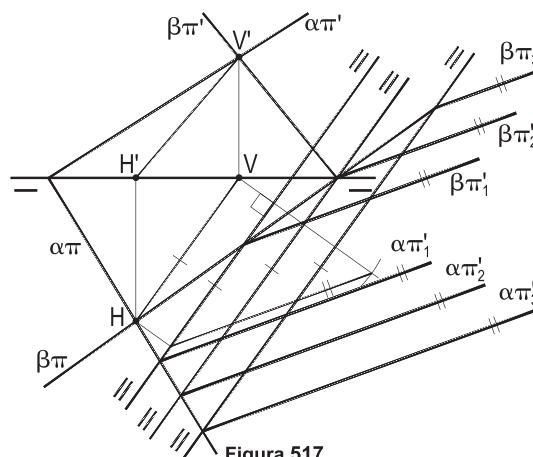


Figura 517

**419 – Dados, por seus traços, os planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), pede-se, com uma só mudança de ( $\pi$ ), fazer com que seus traços horizontais venham a ser paralelos.**

Resolução: Semelhante ao problema anterior. Agora, a interseção (V)(H) dos planos dados deve vir a ser horizontal (Figuras 518 e 519).

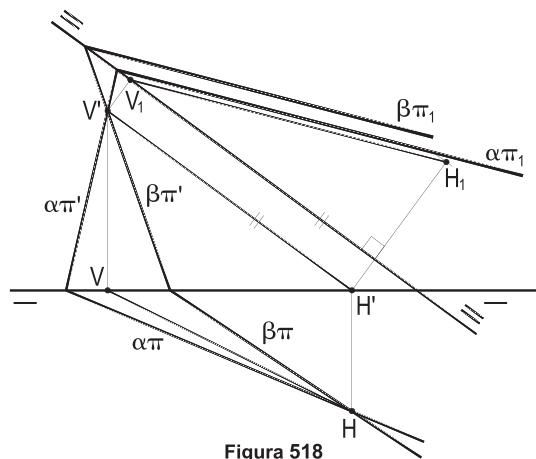


Figura 518

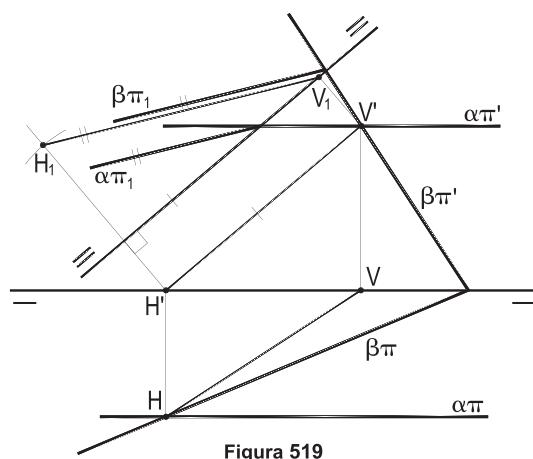


Figura 519

**420 – Desenhar as projeções do segmento vertical (A)(B), sabendo que seus extremos distam do plano ( $\alpha$ ) um valor igual à abscissa do segmento, (A) no primeiro diedro. São dados os traços de ( $\alpha$ ), a projeção horizontal do ponto (A) e a origem (O) das abscissas.**

Resolução: Sendo (A)(B) vertical, seus extremos devem pertencer, cada um, a cada plano paralelo a ( $\alpha$ ) e dele distantes um valor  $k$ , igual à abscissa de (A).

Assim construídos esses planos ( $\alpha_1$ ) e ( $\alpha_2$ ), com uma mudança que torne ( $\alpha$ ) de topo, basta marcar em cada um deles os pontos (A) e (B), cujas projeções horizontais, coincidentes, são conhecidas (Figura 520).

(A) foi escolhido em ( $\alpha_1$ ), para se situar no primeiro diedro.

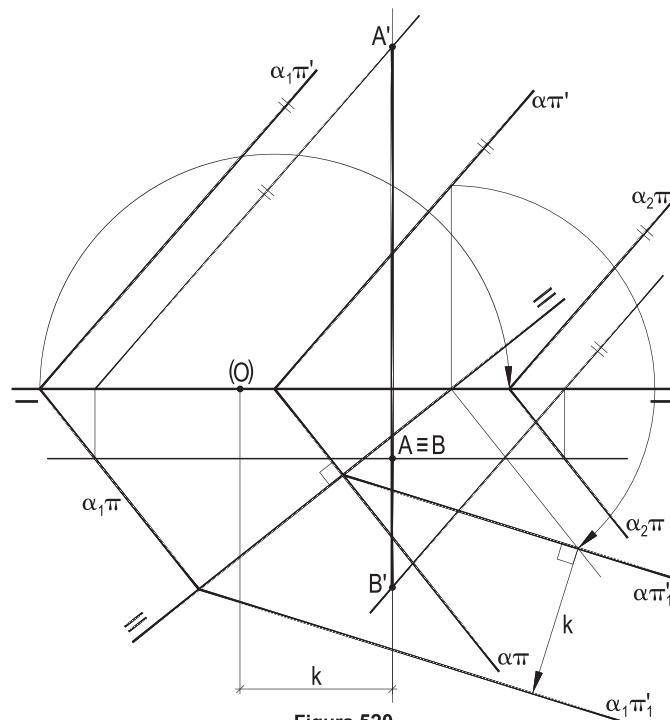


Figura 520

**421 – Com uma só mudança, torne paralelas as projeções horizontais das reversas (r) e (s), dadas por suas projeções.**

Resolução: Para simplificar, consideremos uma das retas dadas e uma paralela à outra, coplanar com a primeira.

Assim, conduzindo, por um ponto (J) de (r), uma paralela (t) à reta (s), basta, mediante uma mudança de ( $\pi$ ), tornar o plano dessas duas retas vertical, para serem coincidentes suas novas projeções horizontais  $r'_1$  e  $t'_1$ , o que se consegue apoiando uma frontal (f) nelas e fazendo-a vertical (Figura 521). Assim, ficarão paralelas as novas projeções horizontais  $r'_1$  e  $s'_1$  das retas dadas.

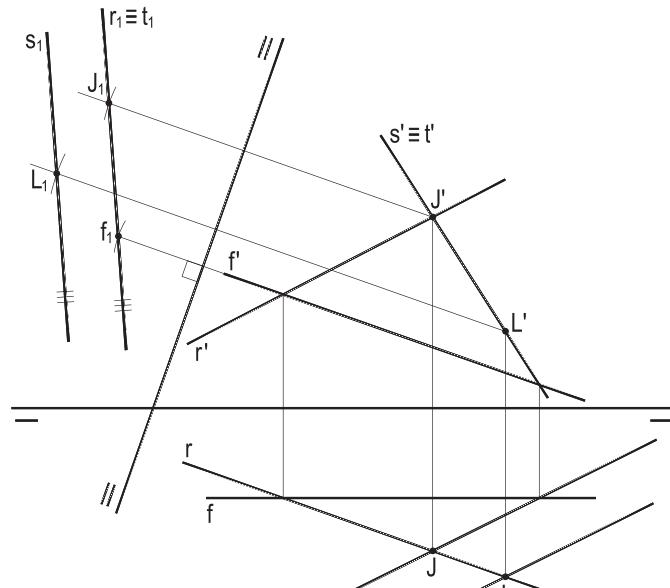


Figura 521

**422 – Dada, por suas projeções, a reta ( $r$ ), pede-se, com uma única mudança de ( $\pi'$ ), fazê-la vir a pertencer ao bissetor ímpar do novo sistema projetivo.**

Resolução: Como, nas mudanças de ( $\pi'$ ), as cotas dos pontos permanecem constantes, convém, se acessível, aproveitar o traço horizontal ( $H$ ) da reta dada ( $r$ ), que, após a mudança, manterá sua cota nula e, para vir a pertencer ao bissetor, tendo que ter também afastamento nulo, terá que pertencer à nova linha de terra.

Para definir, então, a posição dessa linha de terra, deve-se arbitrar um outro ponto ( $J$ ) de ( $r$ ) e, para garantir que, após a mudança, ele venha a ter cota e afastamentos iguais, basta construir o círculo de centro  $J$  e raio igual à cota de ( $J$ ), traçar, da projeção horizontal  $H$  do traço horizontal de ( $r$ ), a tangente a tal círculo e completar a projeção vertical nova  $J'_1$  do ponto ( $J$ ), para obter  $r'_1$ , conforme o pedido (Figura 522), contando o problema, para as projeções dadas de ( $r$ ), duas soluções  $r'_1$  e  $\bar{r}'_1$ , correspondentes às duas tangentes possíveis de traçar do ponto  $H$ .

Observe-se que tal construção se aplica não apenas a retas quaisquer, como exemplificado, mas também a outras retas oblíquas a ( $\pi$ ), que tenham traço horizontal, como, por exemplo, a de perfil ( $J(H)$ ) (Figura 523), ou como a frontal ( $f$ ) (Figura 524). Em ambos os casos, aproveitou-se o traço horizontal ( $H$ ) da reta em estudo.

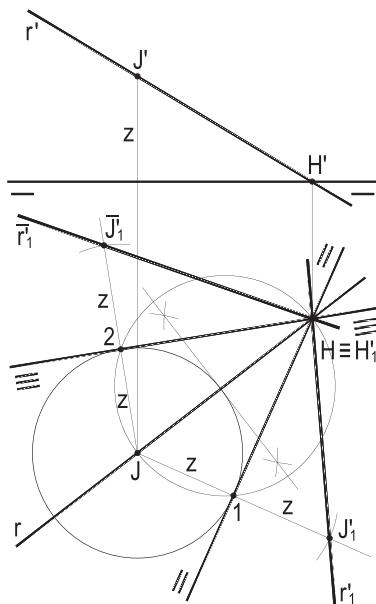


Figura 522

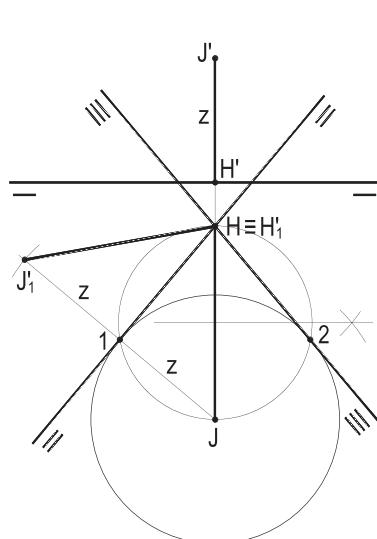


Figura 523

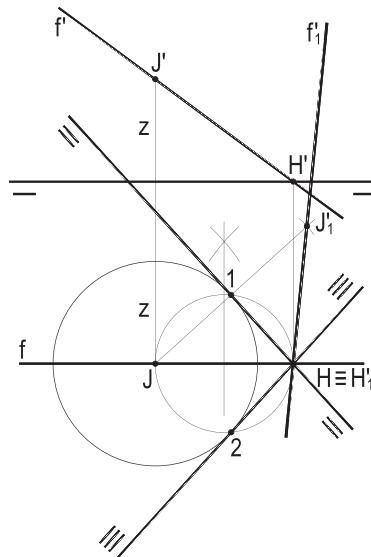


Figura 524

Nas épuras das Figuras 523 e 524, a segunda solução não foi completada, ficando indicada apenas pelo segundo ponto de tangência e pela posição da segunda linha de terra, que resolve o problema.

O problema pode, em condições diversas, apresentar apenas uma solução ou nenhuma, conforme, respectivamente, a projeção horizontal  $H$  do traço horizontal da reta em estudo venha a pertencer à circunferência de centro  $J$  e raio  $z$ , igual à cota de  $(J)$  (Figura 525), permitindo apenas uma tangente e obrigando, por isso, que, no novo sistema projetivo, a reta original, agora em  $(\beta_{13})$ , venha ser de perfil. A impossibilidade acontece sempre que o traço horizontal da reta dada fica no interior da circunferência de centro  $J$  e raio  $z$  igual à cota de  $(J)$ , o que não permite enviar dele tangente a tal circunferência (Figura 526).

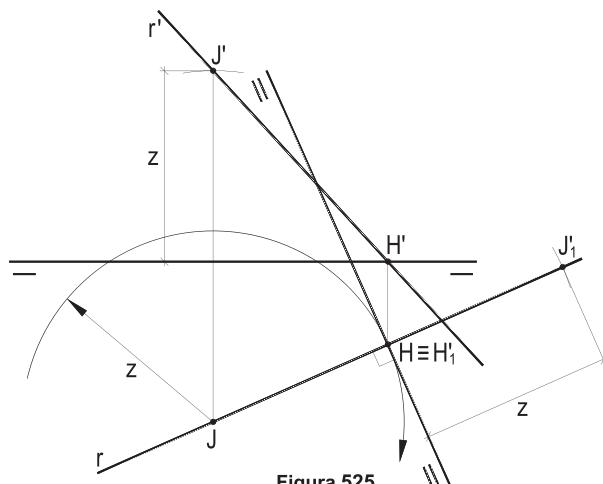


Figura 525

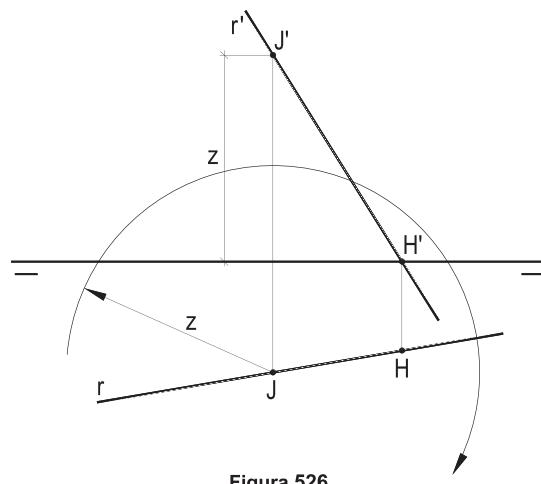


Figura 526

Para casos mais particulares, em que a reta dada é horizontal, fronto-horizontal ou de topo, a resolução fica muito mais simples, porque as cotas constantes de seus pontos obrigam suas igualdades com seus novos afastamentos, o que implica em que a reta solução deva ser uma fronto-horizontal (Figuras 527, 528 e 529).

E, enfim, é impossível o problema para retas verticais, que, após qualquer mudança de  $(\pi')$ , continuariam perpendiculares a  $(\pi)$ , incapazes, por isso, de pertencer a qualquer bissetor.

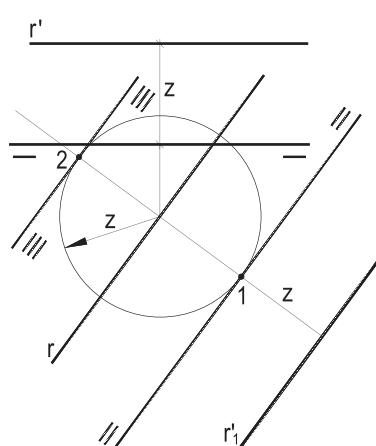


Figura 527

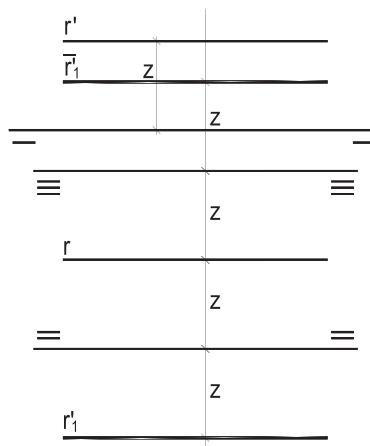


Figura 528

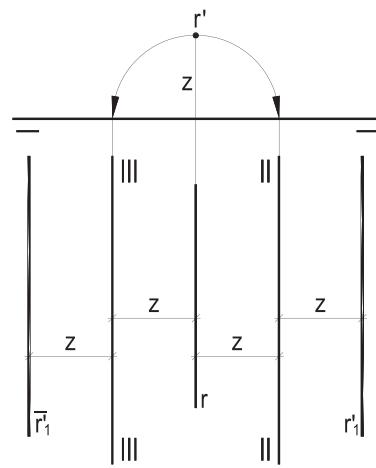


Figura 529

Cabe, ainda, examinar a situação em que a reta ( $r$ ), qualquer, dada, deixa de ter seu traço horizontal acessível, o que, à primeira vista, compromete o processo de resolução do problema como aqui estudado. Vejamos, então, como ultrapassar essa dificuldade.

Consideremos uma reta qualquer ( $r$ ) que não tenha seu traço horizontal acessível e, já que, nas mudanças de ( $\pi'$ ), as cotas dos pontos permanecem constantes, arbitrando-se dois pontos ( $J$ ) e ( $L$ ) de ( $r$ ), as tangentes exteriores comuns às circunferências de centros  $J$  e  $L$  e raios iguais às cotas desses pontos produzem as duas soluções que, no novo sistema projetivo, levam ( $r$ ) a pertencer a ( $\beta_{13}$ ) (Figura 530).

Outro caminho é utilizar uma reta ( $s$ ) paralela a ( $r$ ), com traço horizontal acessível, e proceder como antes detalhado, obtendo as direções  $tg_1$  e  $tg_2$  das duas novas linhas de terra procuradas (Figura 531). Com isso, a utilização de um único ponto ( $J$ ), genérico de ( $r$ ), resolve a questão.

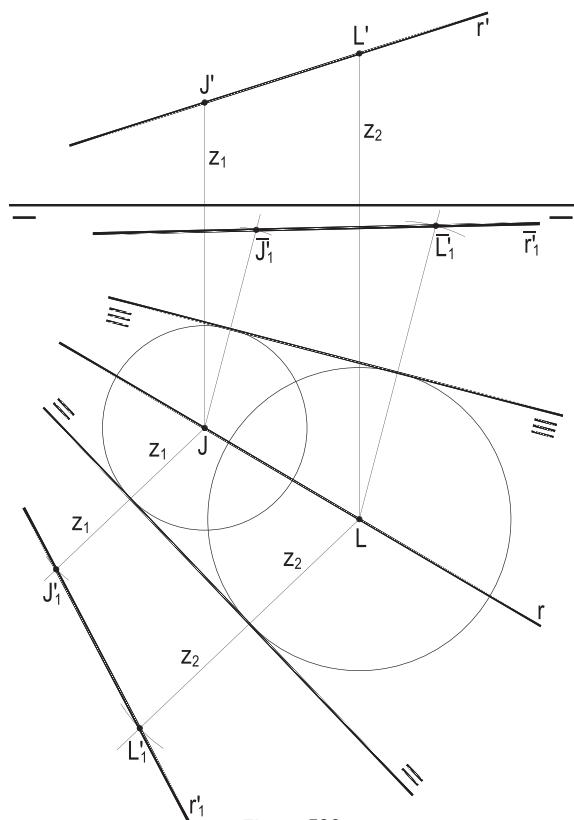


Figura 530

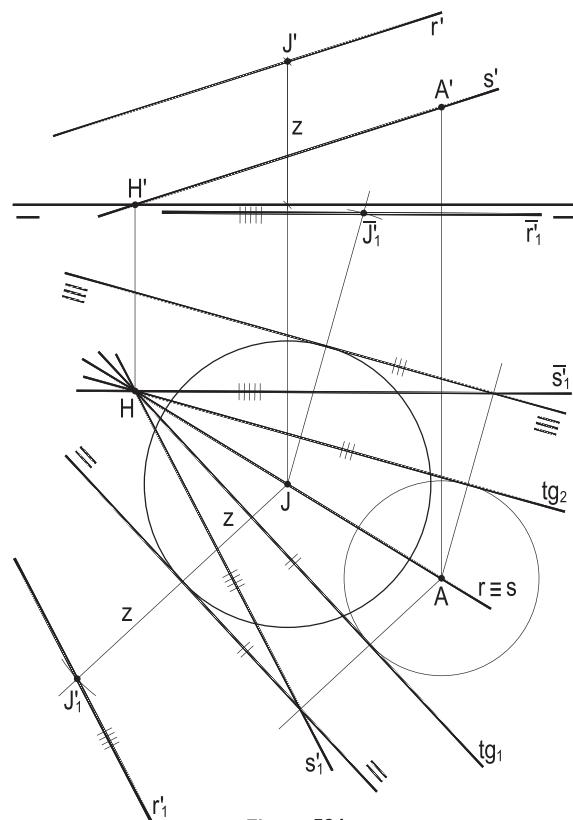


Figura 531

**423 – Dada, por suas projeções, uma reta ( $r$ ), pede-se, com uma única mudança de ( $\pi$ ), fazê-la vir a pertencer ao bissetor ímpar do novo sistema projetivo.**

Resolução: Semelhante à do problema anterior (número 422), em todas as suas variações, utilizando-se, como ponto chave, o traço vertical de ( $r$ ), já que, no caso, são os afastamentos dos pontos que permanecem constantes.

**424 – Dada uma reta ( $r$ ), por suas projeções, com uma única mudança, faça com que ela venha a pertencer ao bissetor par do novo sistema projetivo.**

Resolução: O problema é semelhante aos dois anteriores, apenas fazendo-se inverter a orientação da nova linha de terra, para operar com cotas e afastamentos simétricos, seja para mudança de ( $\pi'$ ) (Figura 532), seja para de ( $\pi$ ) (Figura 533).

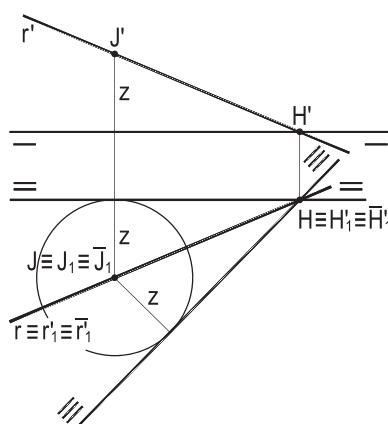


Figura 532

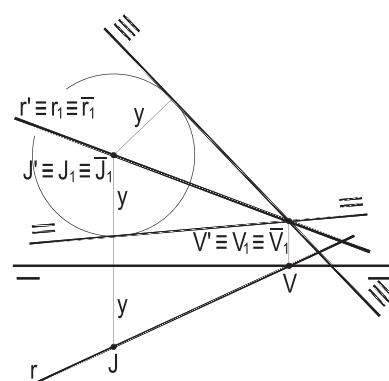


Figura 533

Nos dois casos em estudo, o problema oferece duas soluções para a nova linha de terra, embora seja uma só a posição das novas projeções, coincidentes, de ( $r$ ).

**425 – Dada, por suas projeções, a reta ( $r$ ), pede-se efetuar uma mudança de ( $\pi'$ ) de modo que, no novo sistema projetivo, ( $r$ ) venha a ficar paralela a um dos bissetores do novo sistema projetivo. Em ambos os casos, a nova linha de terra deve passar pelo ponto dado X.**

Resolução: Como nos problemas anteriores, a nova linha de terra há de ter a direção da tangente comum às circunferências com centros nas projeções horizontais A e B de dois pontos quaisquer das retas dadas e raios iguais às suas cotas respectivas, sendo, então, conduzidas as soluções para as novas linha de terra, paralelamente a tais tangentes comuns, pelo ponto X dado (Figura 534) para ( $r$ ) passar a ser paralela a ( $\beta_{13}$ ) e (Figura 535) para vir a ser paralela a ( $\beta_{24}$ ).

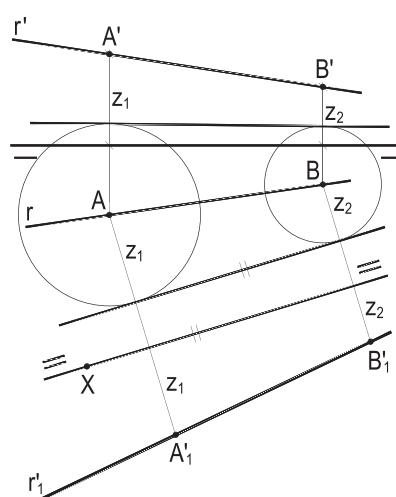


Figura 534

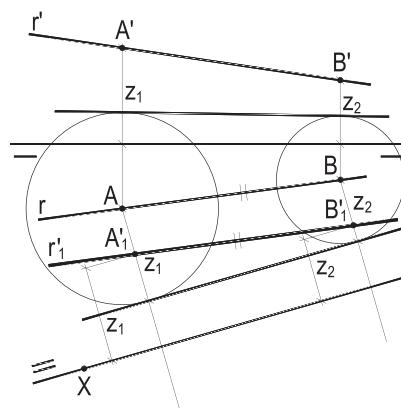


Figura 535

Observe-se que há uma segunda solução, para cada caso, não incluída nas épuras 534 e 535, correspondentes às segundas tangentes comuns às duas circunferências utilizadas.

**426 – Com uma única mudança, faça com que o plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, venha a ficar perpendicular a um dos bissetores do novo sistema projetivo.**

Resolução: Arbitrado um ponto  $V$  para ser o comum às duas linhas de terra, original e nova, a circunferência de centro  $V$  e raio igual à cota de  $(V)$  produz, por corte com  $\alpha\pi'$ , nessa mudança de  $(\pi')$ , os pontos  $V'_1$  para a solução de perpendicular a  $(\beta_{24})$  (Figura 536) e  $\bar{V}'_1$ , seu simétrico em relação a  $V$ , para a solução perpendicular a  $(\beta_{13})$  (Figura 537), com uma segunda solução, indicada pelo número 2.

Observe-se que, em verdade, todas as linhas de terra paralelas à assim determinada resolvem o problema, tais as homotetias de polo  $(J)$  (Figura 538).

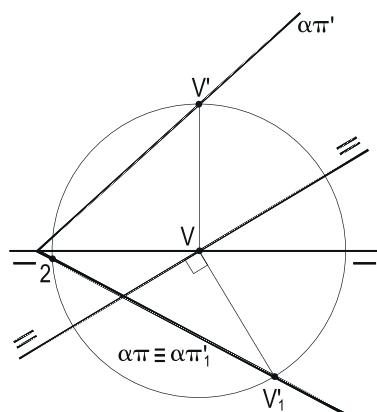


Figura 536

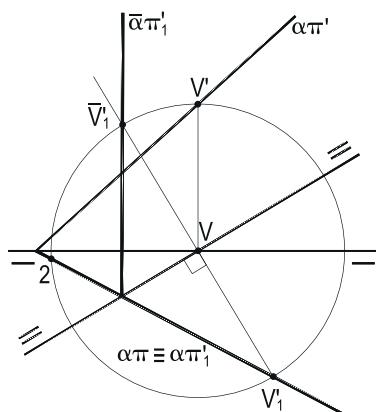


Figura 537

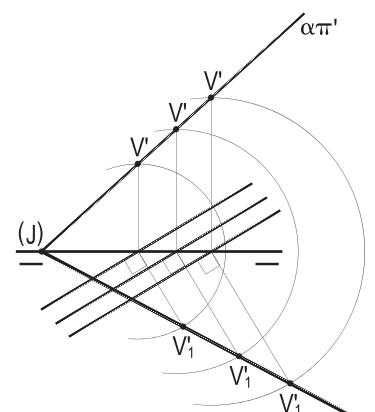


Figura 538

Naturalmente, a resolução se aplica para planos que não os quaisquer, como indica a Figura 539, para um plano ( $\alpha$ ), dado, paralelo à linha de terra. E que, conforme as inclinações dos traços do plano dado ( $\alpha$ ), em relação à linha de terra original, o problema pode oferecer apenas uma solução (Figura 540), quando, então, os planos soluções  $(\alpha_1)$  e  $(\bar{\alpha}_1)$  têm que ser paralelos à nova linha de terra, ou vir a ser impossível (Figura 541), quando a circunferência de centro  $V$  e raio igual à cota de  $(V)$  resta exterior ao traço original  $\alpha\pi$ .

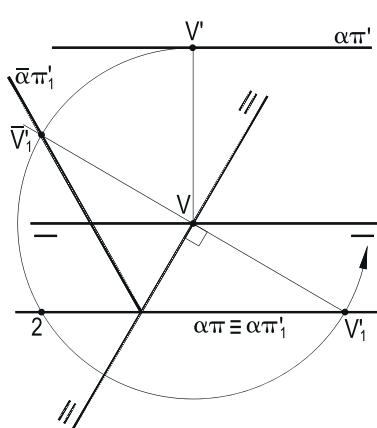


Figura 539

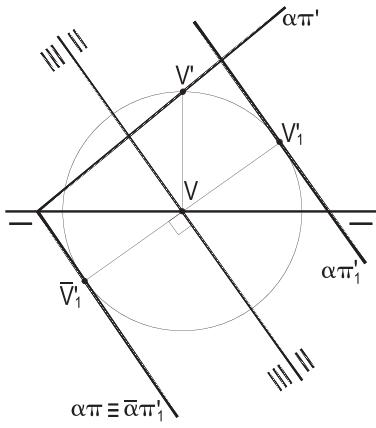


Figura 540

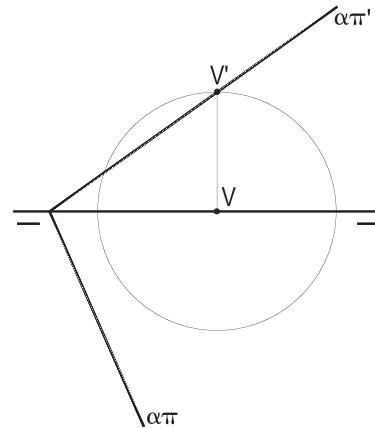


Figura 541

**427** – Nos casos abaixo, são dados os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , sempre com um par de traços de mesmo nome paralelos.

Pede-se determinar a verdadeira grandeza do ângulo  $\gamma$ , formado pelos dois planos.

Em alguns casos,  $(\beta)$  é dado pelas projeções de duas retas  $(a)$  e  $(b)$ .

Resolução: Por terem um par de traços de mesmo nome paralelos, uma simples mudança faz com que os dois planos dados sejam transformados em projetantes, em relação a  $(\pi)$ , ou a  $(\pi')$ , apresentando, por isso, em V.G., o ângulo  $\gamma$  pedido.

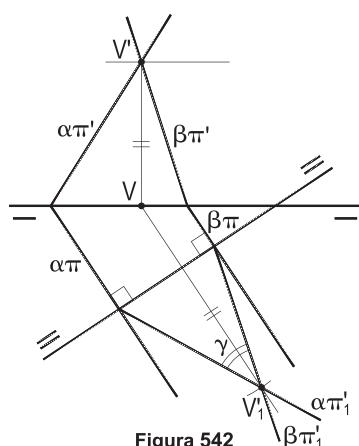


Figura 542

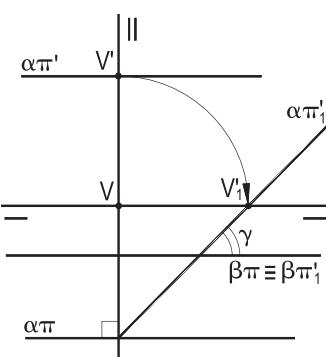


Figura 543

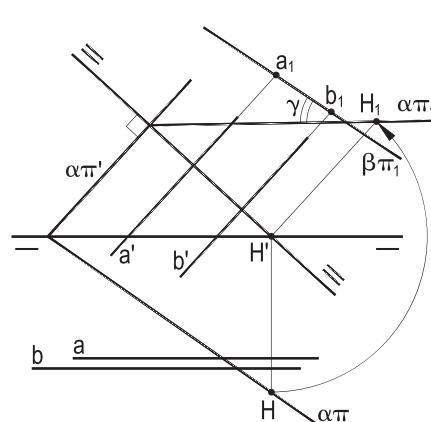


Figura 544

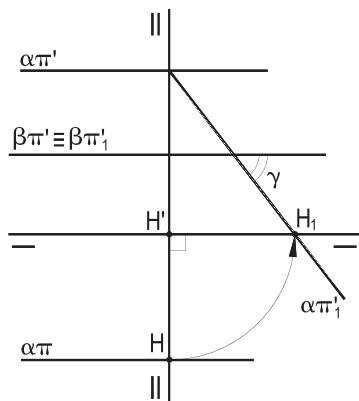


Figura 545

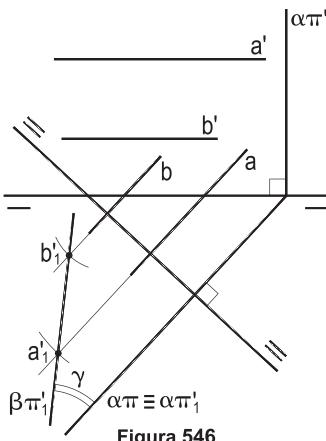


Figura 546

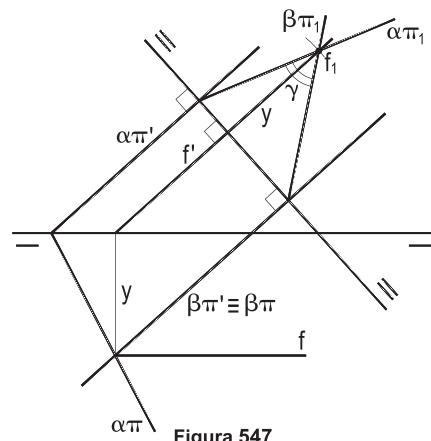


Figura 547

**428** – Determinar a verdadeira grandeza do menor ângulo  $\gamma$  formado pelos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , o primeiro, dado por seus traços, o segundo, ou por seus traços ou pelas projeções das retas  $(a)$  e  $(b)$ .

Resolução: Como os traços de mesmo nome dos dois planos dados são oblíquos, será preciso efetuar duas mudanças consecutivas, a primeira que os leve a ter um par de traços de mesmo nome paralelos e a segunda que os faça projetantes em relação, ambos, a  $(\pi)$  (Figura 548) ou a  $(\pi')$  (Figura 549).

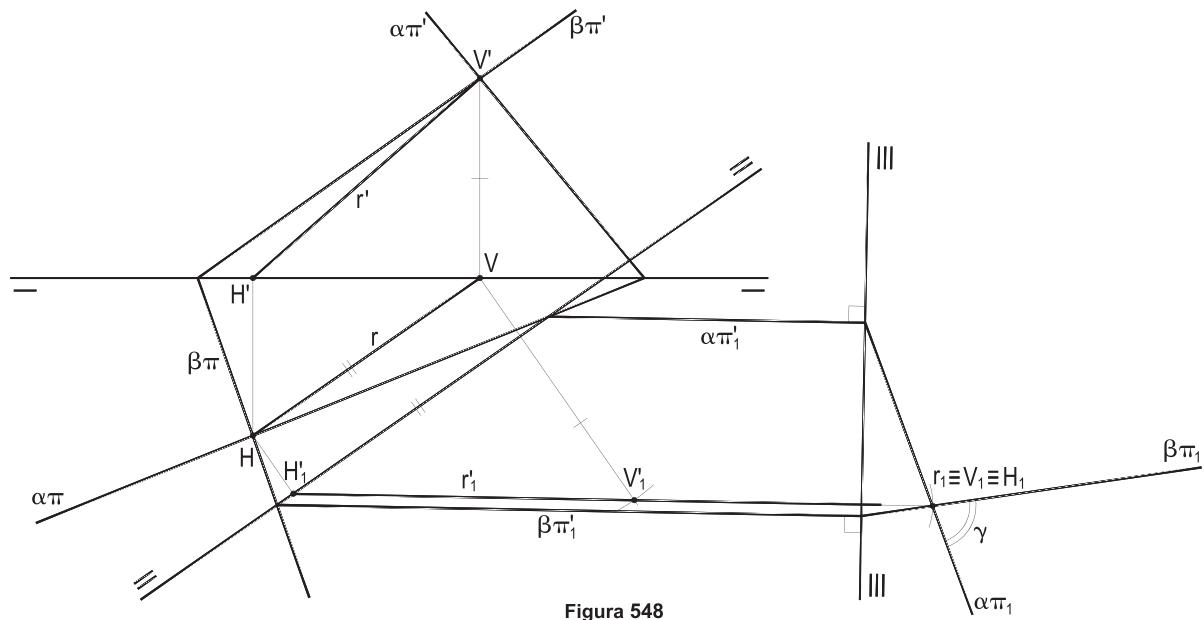


Figura 548

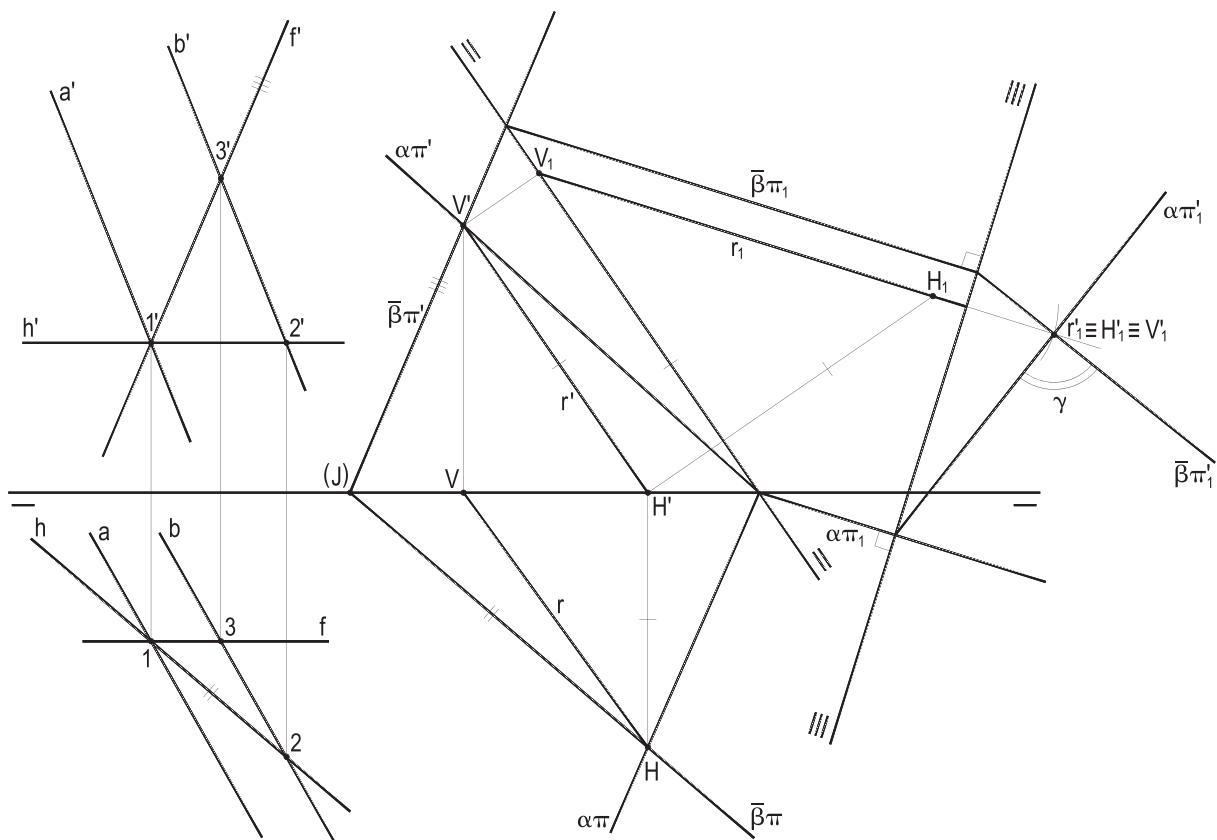


Figura 549

Observe-se que, na épura da Figura 549, buscando maior simplicidade, ao invés do plano ( $\beta$ ), dado pelas retas (a) e (b), trabalhou-se com um plano ( $\bar{\beta}$ ), paralelo a ( $\beta$ ), com traços conduzidos por um ponto (J), qualquer, da linha de terra e com as direções das principais (h) e (f), apoiadas em (a) e (b).

**429 – Determine os traços do plano ( $\beta$ ), bissetor do menor ângulo formado pelos planos ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ), dados por seus traços, para cada um dos casos abaixo.**

Resolução:

A obtenção da V.G. do ângulo formado pelos planos dados possibilita a determinação dos traços do bissetor procurado, visto que, no novo sistema projetivo, os planos dados passam a ser ambos projetantes em relação a ( $\pi'$ ) (Figuras 550 e 551).

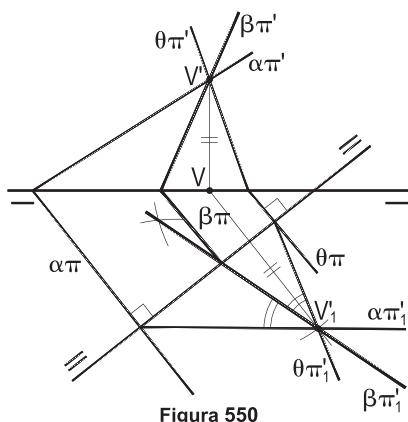


Figura 550

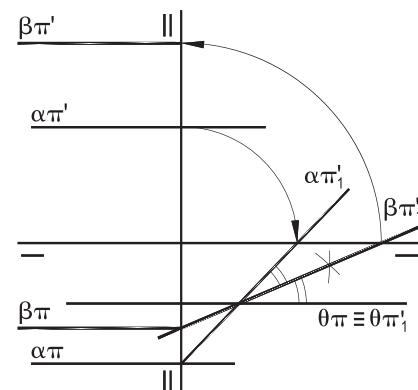


Figura 551

**430 – Construir os traços dos dois bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados pelos planos ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ), dados por seus traços.**

Resolução: Como os traços de mesmo nome dos dois planos dados são oblíquos entre si, são necessárias duas mudanças que possibilitem tornar os dois planos verticais, tal como detalhado no problema 428, anterior, ou, o que seria equivalente, de topo.

Obtidos em V.G. os ângulos desses dois planos, é imediato construir os traços dos planos ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ), bissetores procurados e, em seguida, retornar seus traços ao ambiente original (Figura 552).

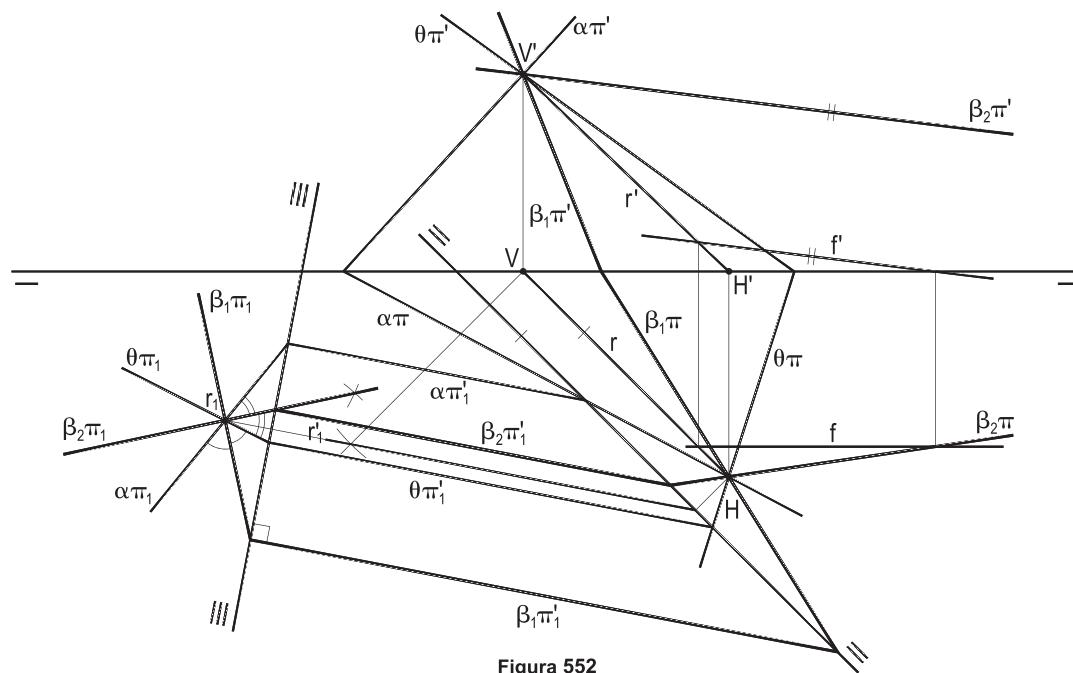


Figura 552

**431 – Os planos  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  e  $(\gamma)$  cortam-se segundo uma mesma reta horizontal, de cota igual à abscissa de seu traço vertical.**

**Dados os traços de  $(\alpha)$  e a origem ( $O$ ) das abscissas, pede-se construir os traços dos planos  $(\beta)$  e  $(\gamma)$ , sabendo que ambos formam  $30^\circ$  com  $(\alpha)$  e que, em épura,  $(\gamma)$  tem traços de sentido inverso.**

Resolução: Simples obter as projeções da horizontal ( $h$ ), comum aos três planos, pelo traçado da reta, por ( $O$ ), inclinada de  $45^\circ$  com  $\pi'\pi$ , que, por corte com  $\alpha\pi'$ , traz  $V'$ , tal que  $(O)V = VV'$  (Figura 553).

Por se cortarem segundo uma horizontal, os três planos em jogo devem ter traços horizontais paralelos, o que permite, com uma mudança de  $(\pi')$ , levá-los a serem de topo, quando os ângulos de  $30^\circ$  que  $(\beta)$  e  $(\gamma)$  formam com  $(\alpha)$  vêm em V.G. entre os novos traços verticais dos três planos (Figura 553).

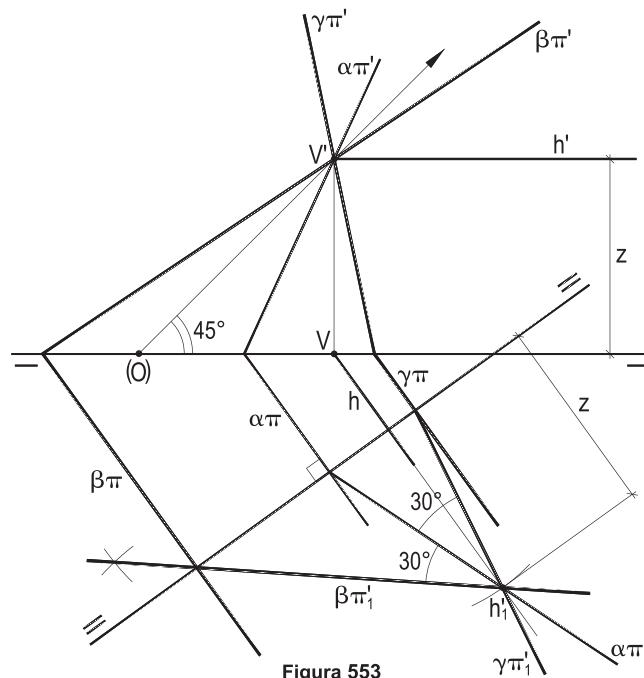


Figura 553

**432 – Construir os traços do plano  $(\beta)$ , bissetor do menor ângulo formado pelos planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , dados por seus traços.**

Resolução: Os traços horizontais coincidentes dos planos dados ensejam a mudança de  $(\pi')$  que os torna de topo, trazendo a V.G. dos ângulos por eles formados.

A utilização de uma horizontal ( $A(B)$ ) apoiada nos dois planos facilita a mudança, assim como, com o ponto ( $V$ ), a ela pertencente, efetuar o retorno do bissetor  $(\beta)$  pedido ao sistema original (Figura 554).

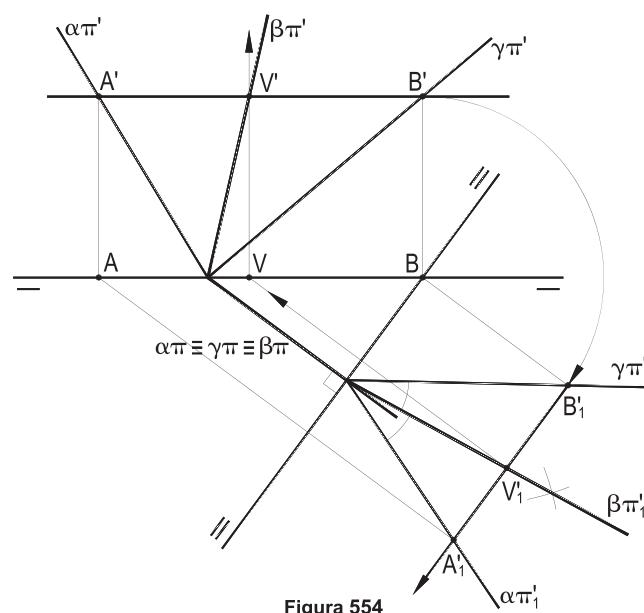


Figura 554

**433 – Após duas mudanças sucessivas, faça com que a nova projeção horizontal do quadrilátero reverso (A)(B)(C)(D) venha a ser um paralelogramo.**

Resolução: Sabe-se que é condição suficiente para que um quadrilátero seja um paralelogramo que suas diagonais cortem-se mutuamente ao meio. Assim, para que a nova projeção horizontal do quadrilátero dado venha a ser um paralelogramo, basta garantir que coincidam as novas projeções horizontais  $M_1$  e  $N_1$  dos pontos médios (M) e (N) de suas diagonais (A)(C) e (B)(D), ou seja, que a reta (M)(N) venha a ser vertical, o que foi realizado (Figura 555), transformando-a, inicialmente, em frontal.

Observe-se que apenas as direções das novas linhas de terra são definidas, cabendo translações múltiplas das novas projeções de (A)(B)(C)(D).

**434 – Dados o ponto (A), sua projeção A e o plano ( $\alpha$ ), por seus traços, pede-se desenhar as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), do primeiro diedro, sabendo que seu lado (B)(C) é horizontal, medindo 22 mm, tendo cota igual a 8 mm, que seus lados distam 22 mm do plano ( $\alpha$ ) e que a abscissa de (B) é a menor possível.**

Resolução: Para distar 22 mm de ( $\alpha$ ), o quadrado tem que pertencer a um plano ( $\beta$ ), distante 22 mm de ( $\alpha$ ), o que se consegue, mediante uma mudança de ( $\pi'$ ), que o torne de topo. E como o ângulo reto em (B) projeta-se em V.G. em ( $\pi$ ) (*Geometria Descritiva*, número 71), é imediata a construção da projeção horizontal ABCD pela utilização da V.G. do lado horizontal (B)(C) (Figura 556).

A projeção vertical, então, é de simples obtenção.

O segundo plano paralelo a ( $\alpha$ ) e dele distante 22 mm é inútil, tal a abscissa de (B).

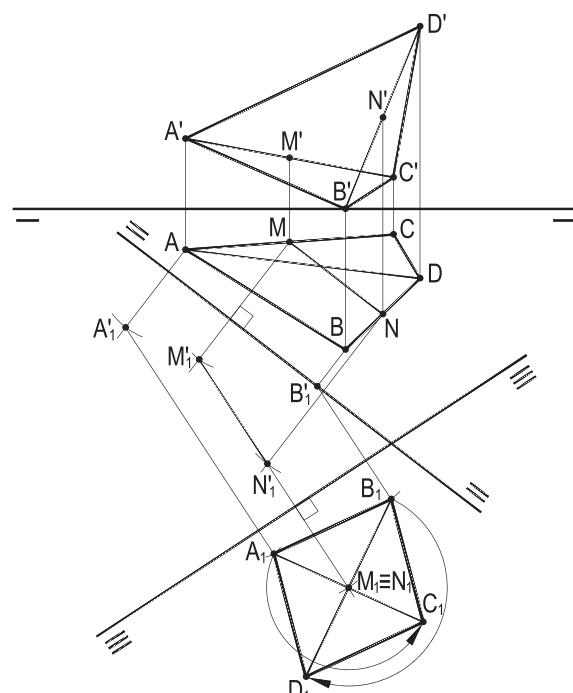


Figura 555

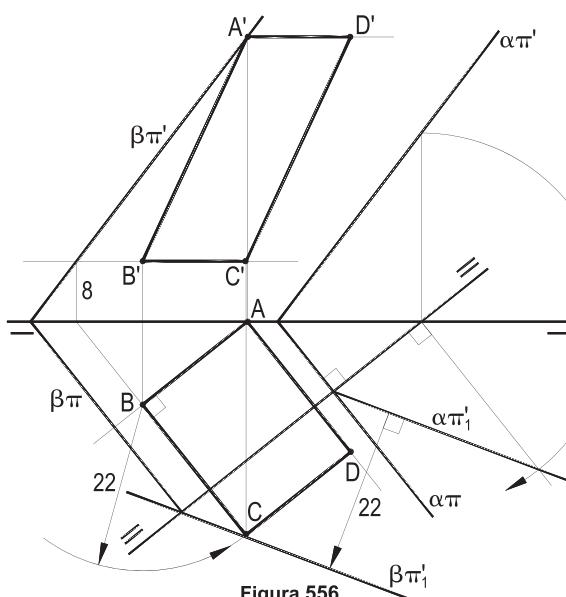


Figura 556

Para todos os casos abaixo, em que o plano ( $\alpha$ ) é dado por seus traços ou pelas projeções de duas retas (a) e (b), pede-se determinar os traços dos planos ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ), distantes 10 mm de ( $\alpha$ ).

Resoluções: A utilização de uma mudança, que torne ( $\alpha$ ) projetante, proporciona a construção dos planos pedidos. Quando possível, foi utilizada a simetria do primeiro plano obtido, em relação a ( $\alpha$ ).

435

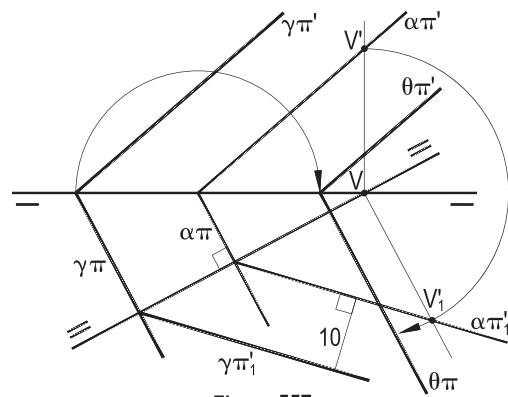


Figura 557

436

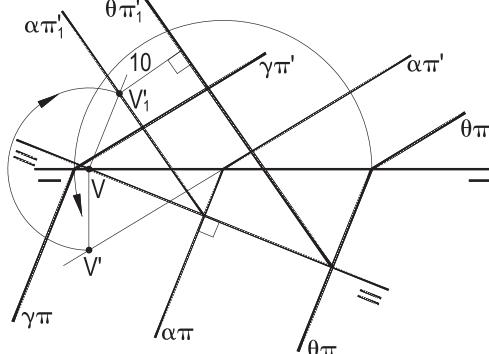


Figura 558

437

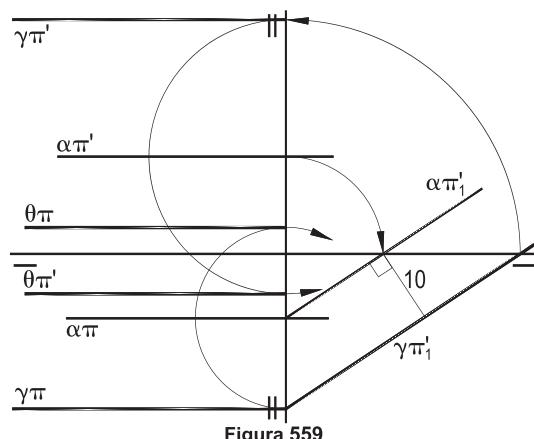


Figura 559

438

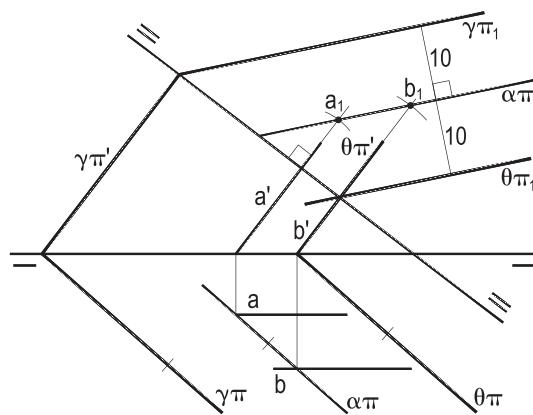


Figura 560

439

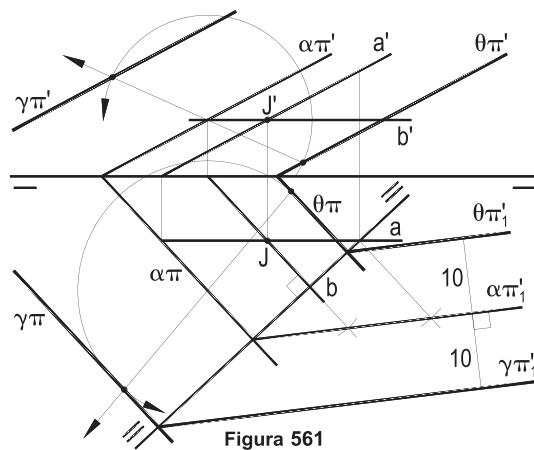


Figura 561

440

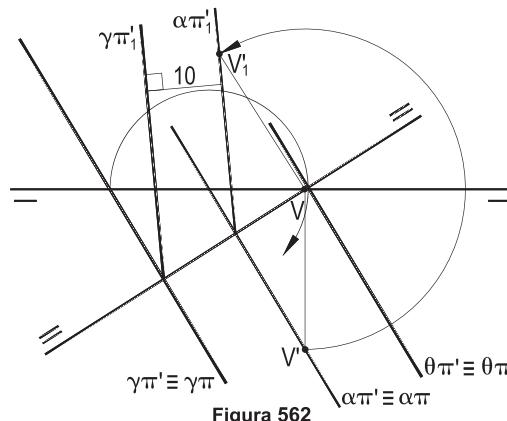


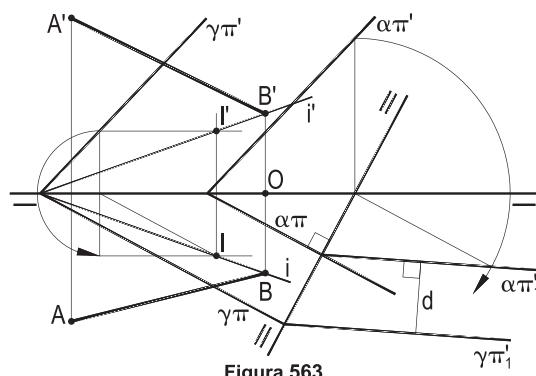
Figura 562

Nas épuras abaixo são dadas as projeções do ponto (A) e os traços do plano ( $\alpha$ ), além dos valores gráficos das distâncias  $d$  e  $k$ .

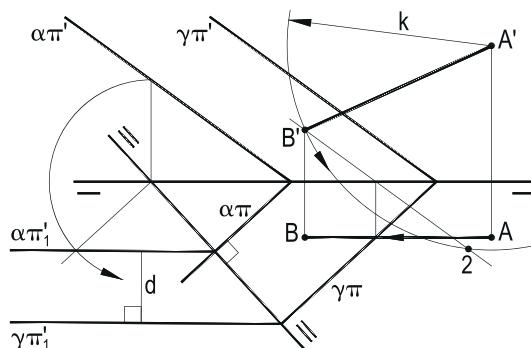
Pede-se, para cada caso, desenhar as projeções do segmento (A)(B), sabendo que o ponto (B) dista  $d$  de ( $\alpha$ ), atendendo às condições impostas. Apresente apenas uma solução.

Resoluções: Em todos os casos, constrói-se um dos planos ( $\gamma$ ), distantes  $d$  de ( $\alpha$ ), ao qual (B) deve pertencer, determinando-o pela utilização de cada condição estabelecida.

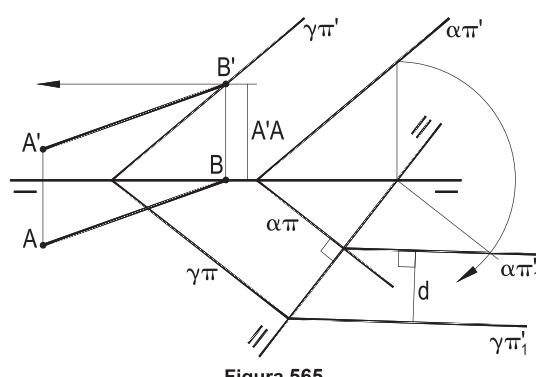
**441 – (B)  $\in (\beta_{13}\pi'')$**



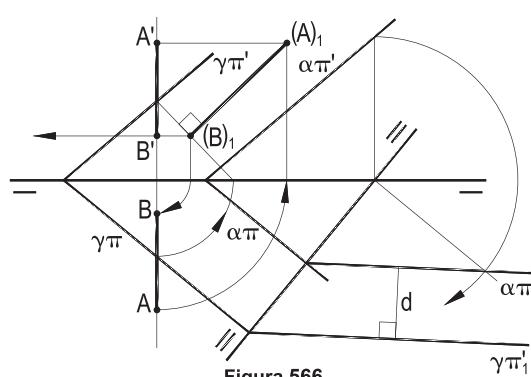
**442 – (A)(B) é frontal = k**



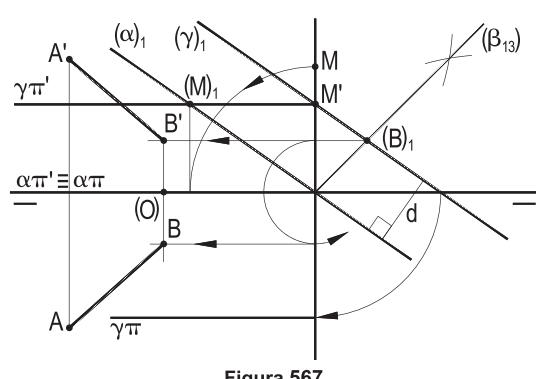
**443 – (A)(B) é paralelo a ( $\beta_{24}$ ); (B)  $\in (\pi')$**



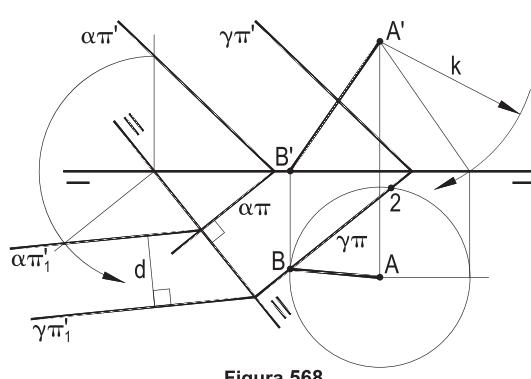
**444 – (A)(B) é de perfil, com valor mínimo**



**445 – (B)  $\in (\pi''\beta_{13})$ ; ( $\alpha$ )  $\in (M)$**



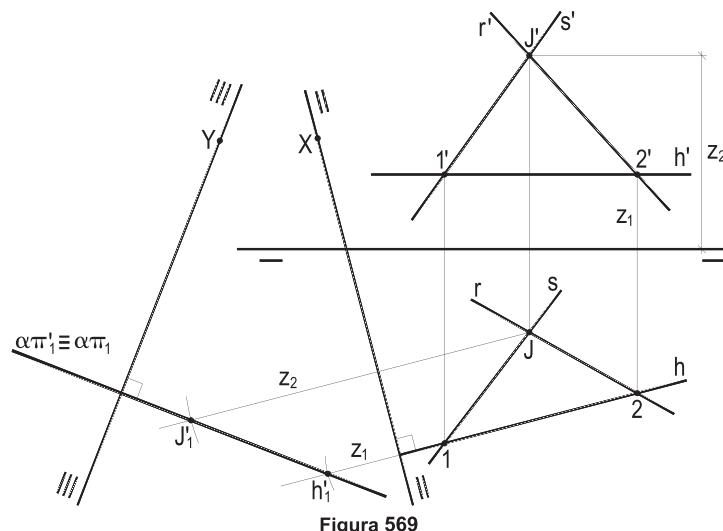
**446 – (B)  $\in (\pi)$ ; (A)(B) = k**



**447** – Com duas mudanças consecutivas, faça o plano ( $\alpha$ ), dado pelas projeções de suas retas ( $r$ ) e ( $s$ ), vir a ser de perfil, no último sistema projetivo. Conduza a primeira linha de terra pelo ponto X, dado, e a segunda pelo ponto Y, também dado.

Resolução: Com uma mudança de  $(\pi')$  transforma-se  $(\alpha)$  num plano de topo e, com uma segunda, esta de  $(\pi)$ , faz-se com que  $(\alpha)$ , no terceiro sistema projetivo, venha a ser de perfil (Figura 569).

Observe-se que poder-se-ia ter invertido as mudanças, a primeira, de  $(\pi)$ , levando  $(\alpha)$  a ser vertical e a segunda de  $(\pi')$ , fazendo-o de perfil.

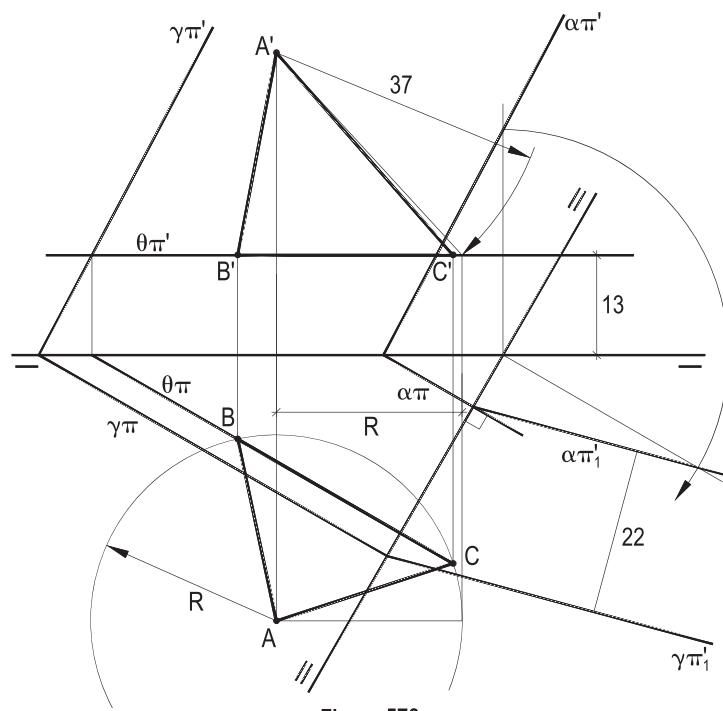


**448** – Construir as projeções do triângulo isósceles (A)(B)(C), cuja base (B)(C) dista 22 mm do plano ( $\alpha$ ), sabendo que seus lados iguais medem 37 mm, que (B) e (C) têm cota 13 mm, (B) com abscissa menor que (C), sendo dadas as projeções do ponto (A) e os traços do plano ( $\alpha$ ).

Resolução: Para distarem 22 mm de ( $\alpha$ ), (B) e (C) têm que pertencer a um plano ( $\gamma$ ), distante 22 mm de ( $\alpha$ ), o que se consegue com uma simples mudança que torne ( $\alpha$ ) de topo.

A seguir, o cone de revolução de vértice (A), base no plano horizontal ( $\theta$ ) de cota 13 mm e geratrizes iguais a 37 mm (Figura 570) proporciona os vértices (B) e (C), completando o triângulo.

O segundo plano distante 22mm de ( $\alpha$ ) é inútil por restar exterior ao cone construído.



**449 – Dadas as retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), por suas projeções, desenhe as projeções do losango ( $M(N)(P)(Q)$ , sabendo que os vértices ( $M$ ) e ( $N$ ) pertencem, respectivamente, a ( $r$ ) e a ( $s$ ), que os lados ( $M(Q)P(N)$  são fronto-horizontais, que ( $M(N)$  tem o menor comprimento possível e que o vértice ( $P$ ) tem a menor abscissa possível.**

Resolução: Para obter o lado ( $M(N)$ , naturalmente na perpendicular comum às retas quaisquer dadas ( $r$ ) e ( $s$ ), com duas mudanças consecutivas, leva-se ( $r$ ) a ser, primeiro, frontal e, em seguida, vertical (Figura 571), o que dá a verdadeira grandeza  $d$ , da distância entre ( $r$ ) e ( $s$ ) e do próprio lado ( $M(N)$ , por sua projeção  $M_1N_1$ , que, trazida de volta ao sistema projetivo original, proporciona o primeiro lado do losango pedido.

E, com essa própria V.G. do lado  $d$  do losango, consegue-se nas fronto-horizontais, por ( $M$ ) e por ( $N$ ), construir os lados ( $M(Q)$  e ( $P(N)$ ), completando o losango pedido (Figura 571).

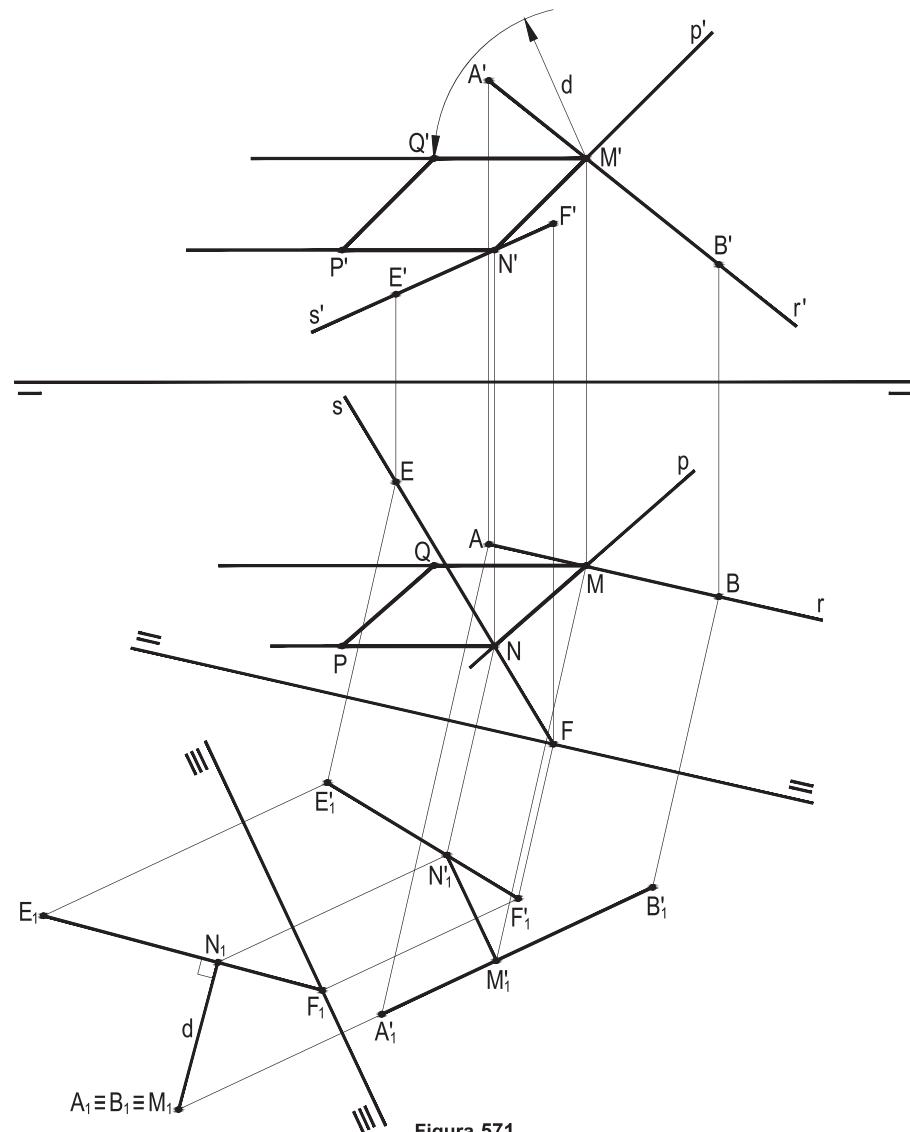


Figura 571

# CAPÍTULO IX

## MÉTODOS DESCRIPTIVOS ROTAÇÕES

Aqui continuam as aplicações dos métodos descritivos, com problemas relativos às rotações, como segue:

**450 – Dadas as projeções do ponto (J) e das retas (a), (b) e (c), efetue, inicialmente, a rotação de (J) em torno de (a), numa amplitude de  $90^\circ$ , que aumente seu afastamento, produzindo o ponto (A). Em seguida, gire (A), em torno de (b), de  $120^\circ$ , mantendo-se no primeiro diedro, gerando o ponto (B). Por último, efetue a rotação de (B), em torno do eixo (c), até que ele tenha a maior cota possível, passando a se denominar (C).**

**Apresente todos os movimentos executados e desenhe as projeções do triângulo (A)(B)(C), assim formado.**

Resolução: A primeira rotação vem em V.G. na projeção horizontal, enquanto a segunda, em sua projeção vertical. Para a terceira, recorre-se a uma vista lateral, uma vez que, em seu movimento, de (B) para (C), a abscissa permanece constante (Figura 572).

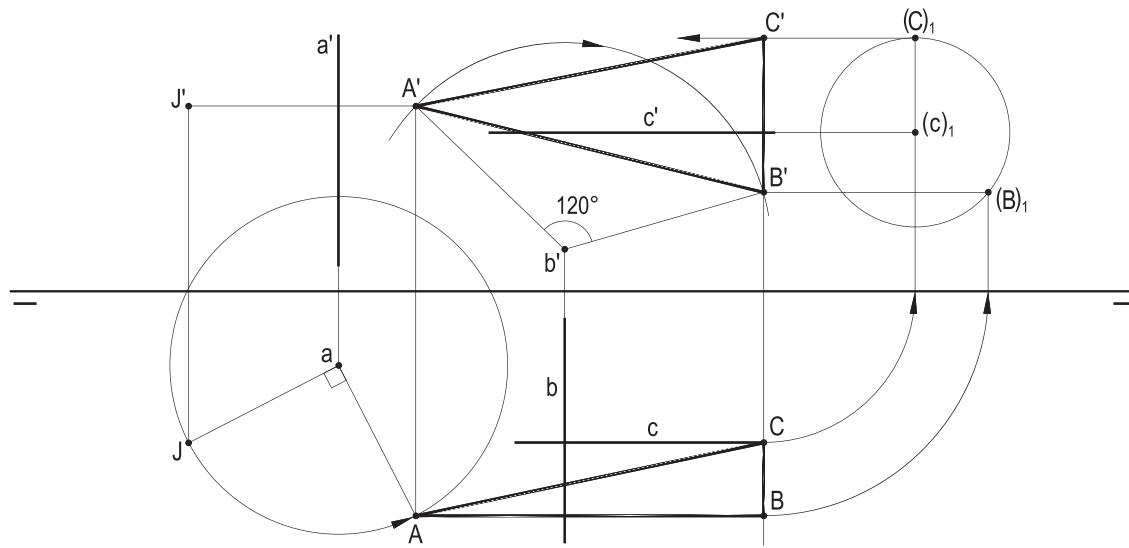


Figura 572

Para cada um dos casos abaixo, em que são dados, por suas projeções, um ponto (A) e uma reta vertical (e), pede-se girar (A), em torno de (e), até atender à condição imposta.

Resoluções: Em todos os casos, o eixo vertical acarreta a constância da cota do ponto girante (A). E, para as posições dadas, há, sempre, duas soluções.

451 – (A)  $\varepsilon(\pi')$

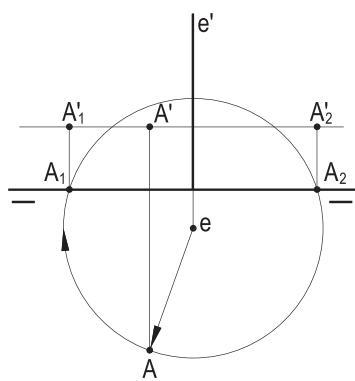


Figura 573

452 – (A)  $\varepsilon(\pi'')$

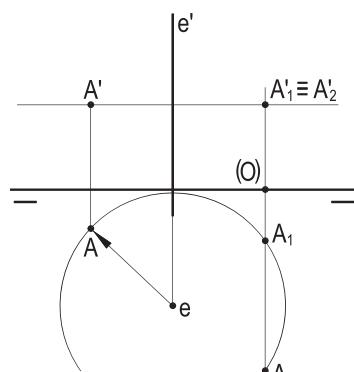


Figura 574

453 – (A)  $\varepsilon(\beta_{13})$

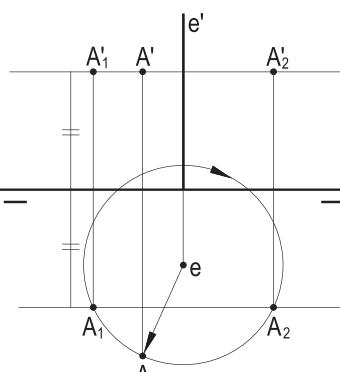


Figura 575

454 – (A)  $\varepsilon(\beta_{24})$

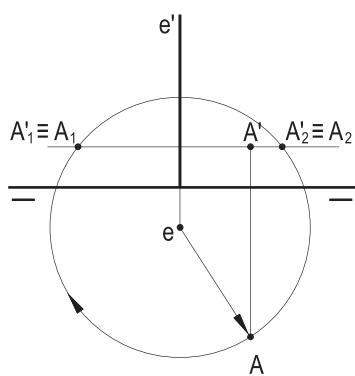


Figura 576

455 – (A)  $\varepsilon(\alpha)$ , dado

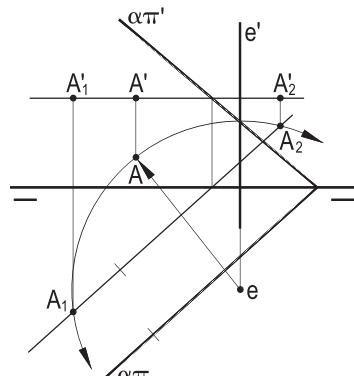


Figura 577

456 – (A)  $\varepsilon(\alpha)$ , dado

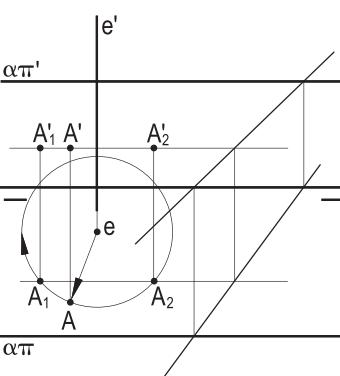


Figura 578

457 – (A)  $\varepsilon(\alpha) \equiv (\pi'\pi - M)$ ,  
dato

458 – (A)  $\varepsilon(\alpha) \equiv (a); (b)$ ,  
dados

459 – (A)  $\varepsilon(\alpha) \equiv (a); (b)$ ,  
dados

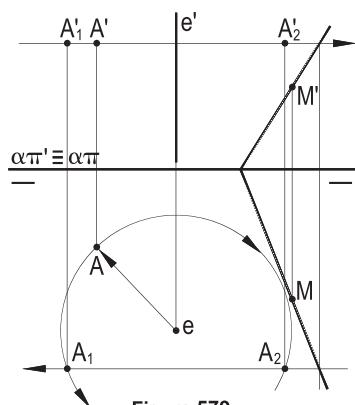


Figura 579

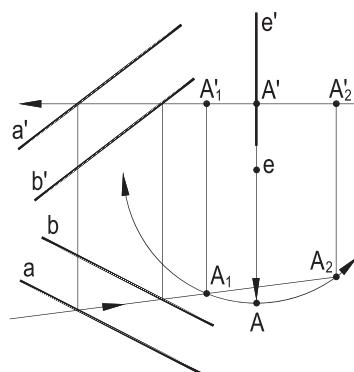


Figura 580

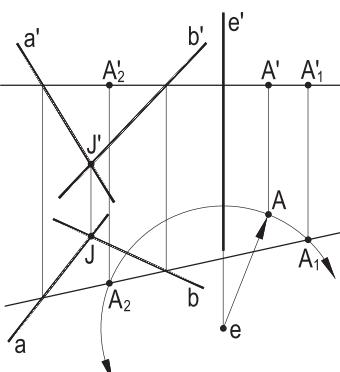


Figura 581

Em cada um dos casos abaixo, pede-se girar o ponto (A), dado por suas projeções, em torno do eixo de topo (e), também dado por suas projeções, até que cada imposição seja atendida.

Resolução: O eixo de rotação de topo faz com que todos os pontos girantes mantenham constantes seus afastamentos. Duas soluções, sempre, salvo no número 463.

**460 – (A)  $\varepsilon(\pi)$**

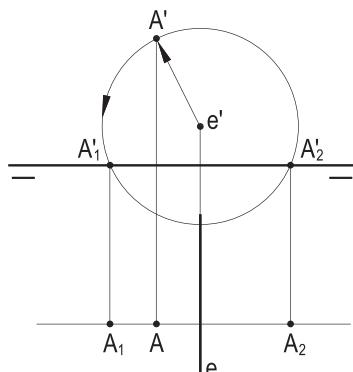


Figura 582

**461 – Duplique a abscissa de (A)**

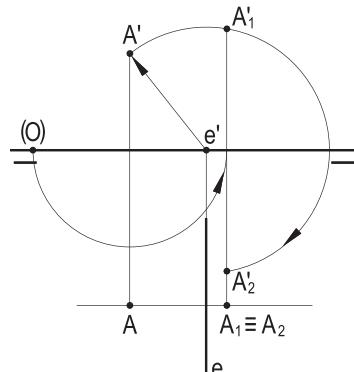


Figura 583

**462 – (A)  $\varepsilon(\beta_{13})$**

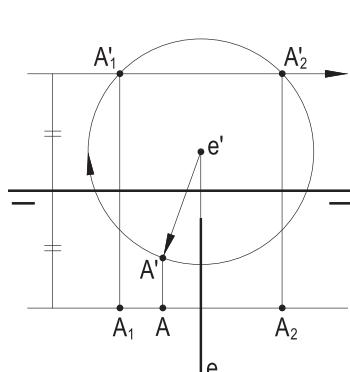


Figura 584

**463 – (A) tenha cota máxima**

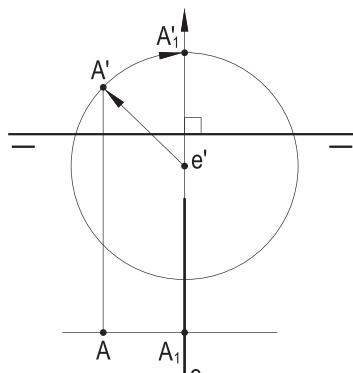


Figura 585

**464 – (A)  $\varepsilon(\alpha)$ , dado**

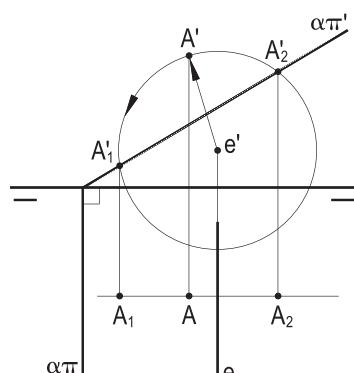


Figura 586

**465 – (A)  $\varepsilon(\alpha)$ , dado**

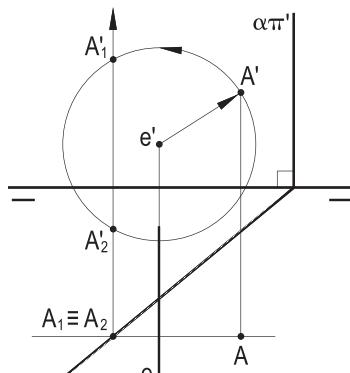


Figura 587

**466 – (A)  $\varepsilon(\alpha) \equiv (a); (b)$ , dadas**

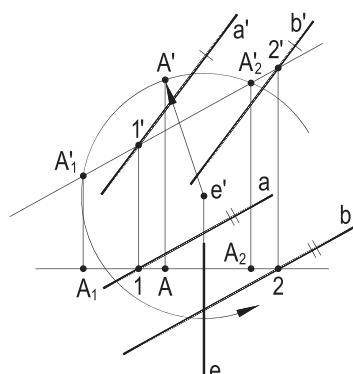


Figura 588

**467 – (A)  $\varepsilon(\alpha) \equiv (a); (b)$ , dadas**

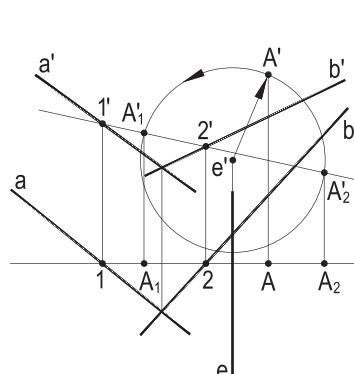


Figura 589

**468 – (A)  $\varepsilon(\alpha) \equiv (a); (b)$ , dadas**

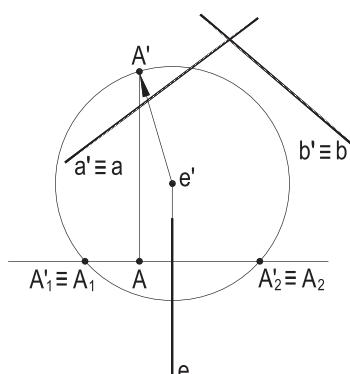


Figura 590

Em cada um dos casos abaixo, gire o ponto (A), dado por suas projeções, em torno da fronto-horizontal (e), também dada por suas projeções, para que seja atendida a condição estabelecida.

Resoluções: O ponto girante, em seu movimento, descreverá uma circunferência de perfil, o que indica a utilização de uma vista lateral. Duas soluções, salvo no último caso.

**469 – (A) equidiste de ( $\pi$ ) e de ( $\beta_{13}$ )**

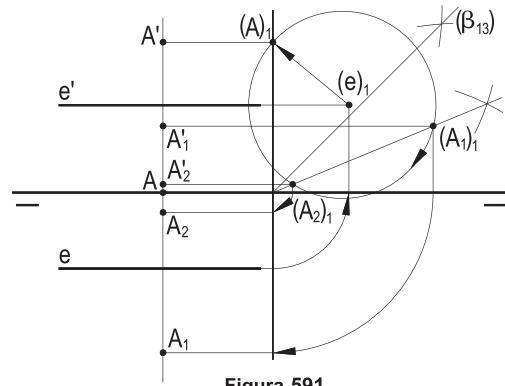


Figura 591

**470 – (A) diste 20 mm de ( $\pi'\pi$ )**

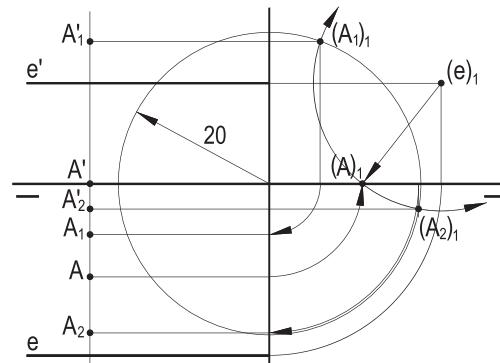


Figura 592

**471 – (A)  $\varepsilon (\alpha)$ , dado**

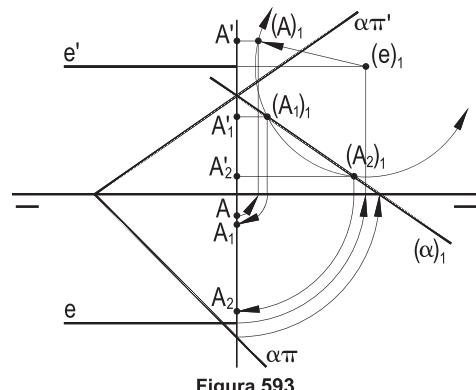


Figura 593

**472 – (A)  $\varepsilon (\alpha) \equiv (a); (b)$ , dadas**

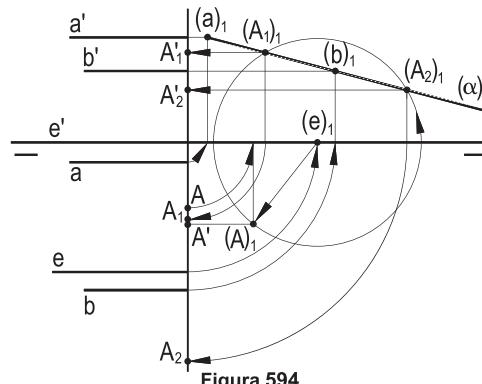


Figura 594

**473 – (A)  $\varepsilon (\beta_{24})$**

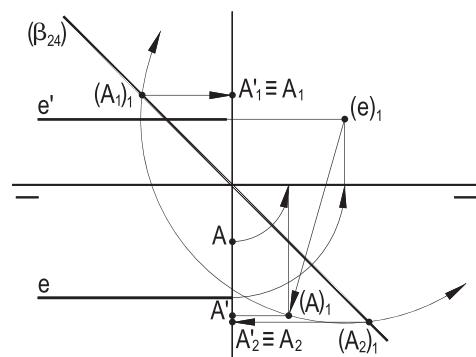


Figura 595

**474 – A distância de (A) a ( $\pi'\pi$ ) seja mínima**

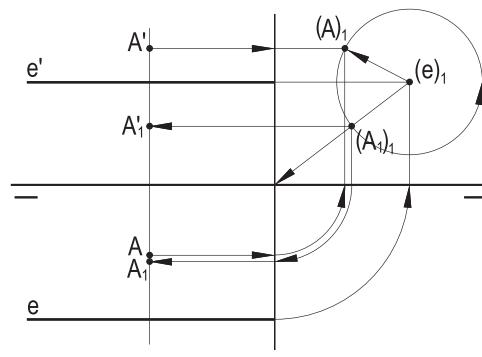


Figura 596

Para cada um dos casos abaixo, gire o ponto (A), em torno da reta (e), até que seja atendida a condição estabelecida.

São dadas as projeções de (A) e de (e), além do especificado em cada épura. Designe por (B) e (C) as soluções, em qualquer ordem.

Resoluções: Por serem horizontais ou frontais os eixos dados, será necessária uma mudança que os torne, respectivamente, de topo ou verticais, aproveitando, no novo sistema projetivo, os movimentos simples das projeções do ponto em estudo.

**475 – (A)  $\varepsilon(\alpha)$ , dado**

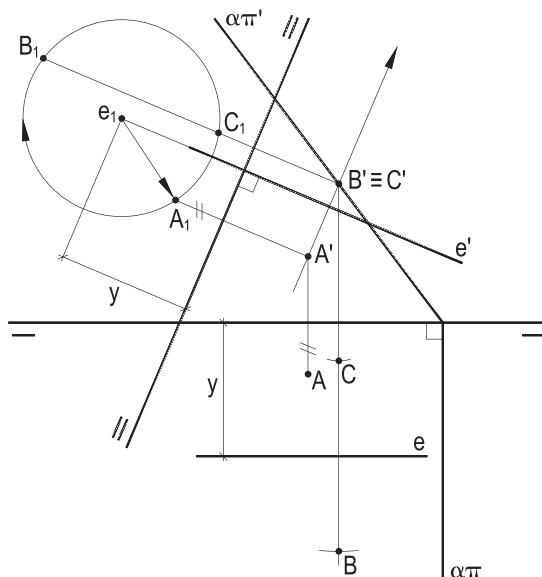


Figura 597

**476 – (A)  $\varepsilon(\pi')$**

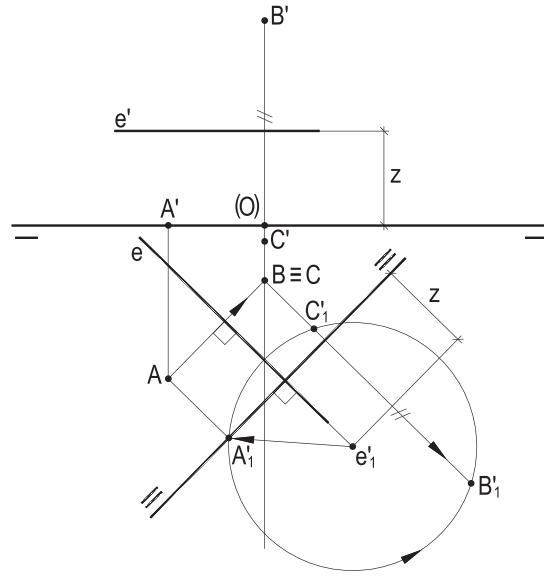


Figura 598

**477 – (A)  $\varepsilon(\pi)$**

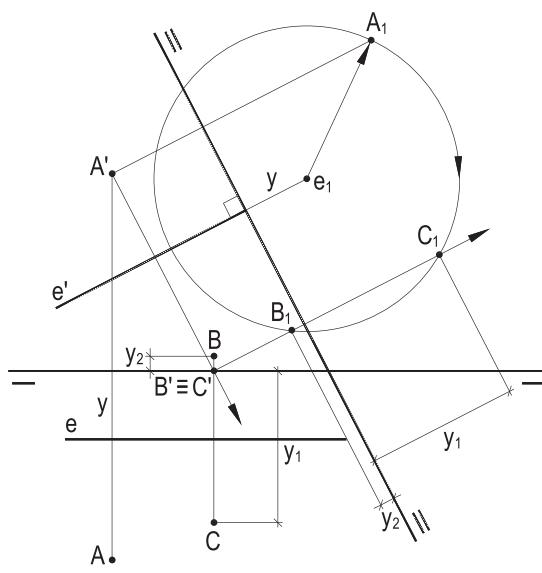


Figura 599

**478 – (A) duplique sua cota**

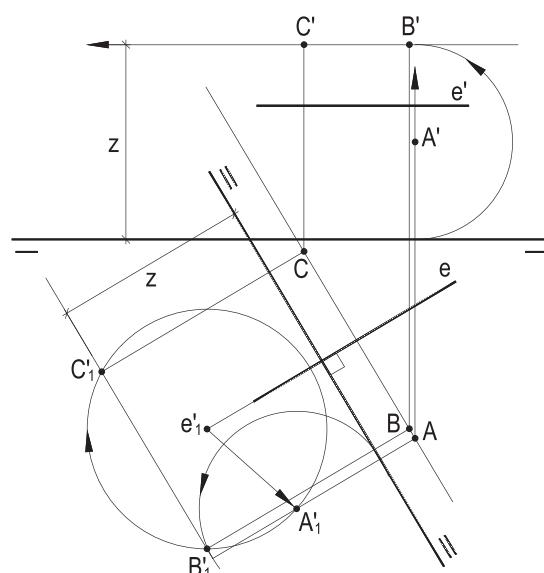


Figura 600

Para os casos abaixo, gire o ponto (A), em torno da reta (e), até que ele venha a pertencer ao plano ( $\alpha$ ). São dadas as projeções de (A) e de (e) e os traços de ( $\alpha$ ), ou as projeções de duas retas suas (a) e (b).

Resoluções:

**479** – Com uma mudança, (e) se torna de topo e, no novo sistema projetivo, o ponto (A), mantendo constante seu afastamento, há de se deslocar sobre uma frontal (f), que, marcada em ( $\alpha$ ), nesse novo sistema, proporciona os pontos (B) e (C) procurados, por suas projeções  $B'_1$  e  $C'_1$  (Figura 601).

**480** – Neste caso, o eixo dado (e) é transformado de frontal em vertical e, por isso, o ponto (A) se movimenta, no segundo sistema, sobre a horizontal (h), que, marcada em ( $\alpha$ ), agora qualquer, proporciona as duas soluções (B) e (C) pedidas (Figura 602).

**481** – Situação simplificada por serem as retas dadas (a) e (b) paralelas a (e), o que obriga que, quando (e) fique de topo, o plano ( $\alpha$ ), de (a) e (b), passe, também, a ser de topo, proporcionando, diretamente, os pontos (B) e (C) procurados (Figura 603).

O retorno ao sistema original foi feito utilizando as cotas de (B) e de (C).

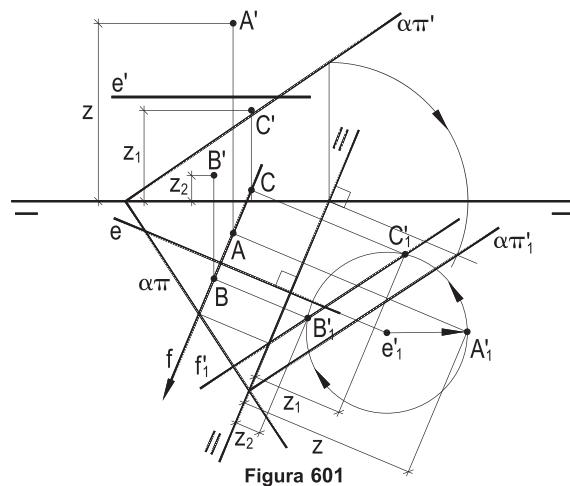


Figura 601

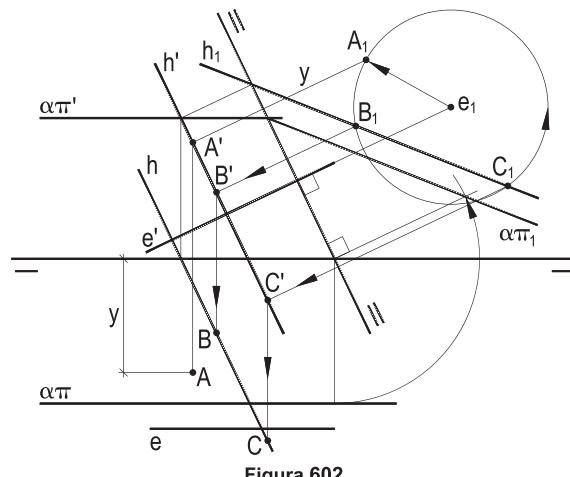


Figura 602

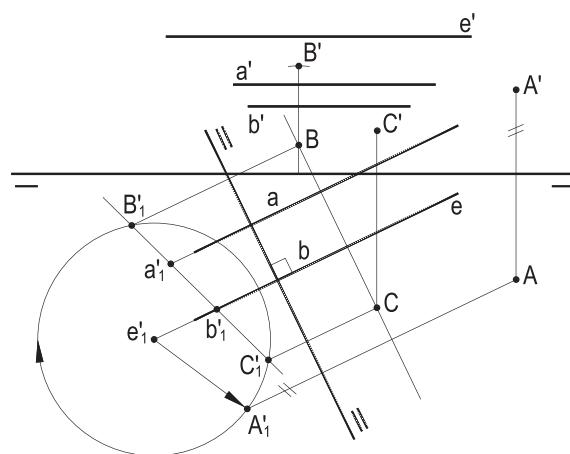


Figura 603

**482 – Dados, por suas projeções, o ponto (A), o eixo vertical (e) e a reta qualquer (r), mantida fixa, pede-se girar (A), em torno de (e), até que o plano que (A) venha a formar com (r) seja projetante.**

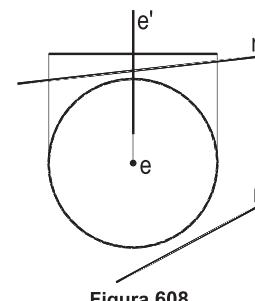
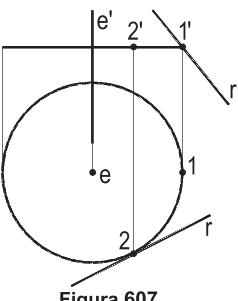
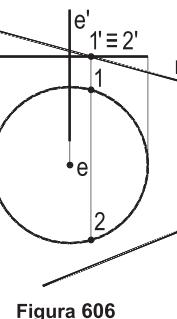
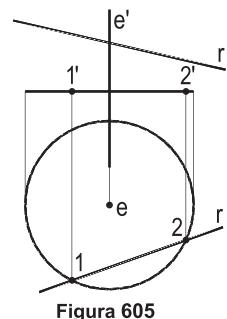
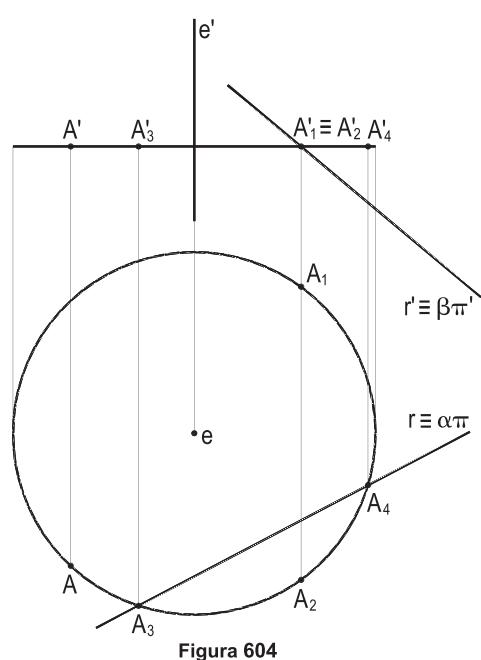
**Discutir as possibilidades.**

Resolução: Para que o plano formado com a nova posição de (A) e a reta qualquer dada (r) venha a ser projetante, basta que uma das projeções do novo ponto (A) pertença à de mesmo nome de (r).

Assim, para a situação mais favorável, o problema oferece quatro soluções, correspondentes (Figura 604) a cada uma das duas novas projeções verticais  $A'_1 \equiv A'_2$  e  $A'_3 \equiv A'_4$ , ou horizontais  $A_3$  e  $A_4$  do ponto (A).

Observe-se que, no caso, há quatro rotações do ponto original respondendo afirmativamente à questão, embora apenas dois planos projetantes venham a ser formados (Figura 604), o vertical ( $\alpha$ ) e o de topo ( $\beta$ ).

Como, durante uma rotação completa, os movimentos de  $A'$  e de A são limitados, respectivamente, a um segmento de reta e a uma circunferência, há uma infinidade de posições para as quais fica reduzida a quantidade de soluções, podendo chegar a apenas duas, quando uma das projeções de (r) não é atingida por algum daqueles movimentos (Figuras 605 e 606), ou quando  $r'$  atinge aquele segmento numa de suas extremidades, ou quando r é tangenciada por aquela circunferência (Figura 607), podendo acontecer, também, casos com três soluções, combinando as situações acima e, até mesmo, não haver qualquer solução possível, quando ambas as projeções de (r) restam exteriores aos movimentos das projeções do ponto girante (A) (Figura 608).



**483 – Dados, por suas projeções, dois pontos (A) e (J) e uma reta vertical (e), pede-se girar o ponto (A), em torno da reta (e), mantido fixo o ponto (J), até que (A) venha a formar, com (J), uma reta (r), concorrente com a linha de terra.**

**Construir as projeções de (r).**

Resolução: Por ser vertical o eixo (e), (A) mantém constante sua cota  $e$ , para que venha a formar, com (J), uma reta concorrente com ( $\pi'\pi$ ), deve vir a pertencer ao plano ( $\pi'\pi$ )–(J), situando-se, então, sobre a fronto-horizontal (f), desse plano, com cota igual à sua.

Para as posições dadas, o problema oferece duas soluções (Figura 609), as retas ( $r_1$ ) e ( $r_2$ ).

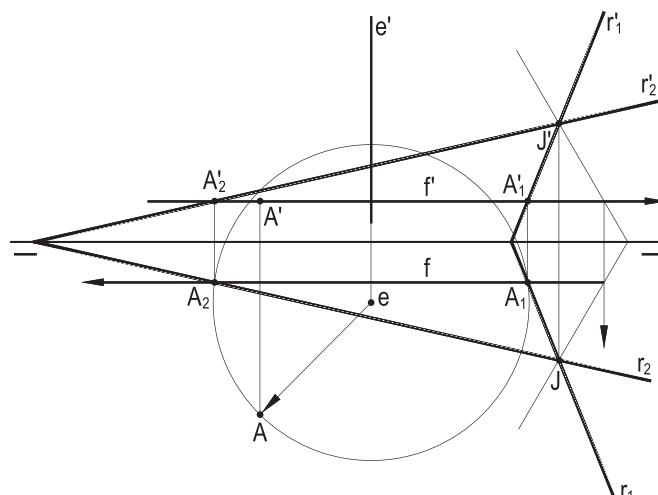


Figura 609

Mas observe-se que, em projeção horizontal, f poderia, para posições diversas das dadas, tangenciar a circunferência da rotação de (A), dando apenas uma solução ao problema, ou, até, não atingi-la, tornando impossível o pedido.

**484 – Dados, por suas projeções, os pontos (A), (B) e (C) e a reta (e), pede-se girar (A), em torno de (e), mantidos fixos (B) e (C), até que o plano do triângulo (A)(B)(C) venha a ser paralelo à linha de terra. Desenhe as projeções do novo triângulo ( $A_1$ )(B)(C), que corresponda ao maior perímetro.**

Resolução: Para o eixo de topo (e), o ponto girante (A) manterá constante seu afastamento. Assim, para que possa vir a formar com a reta de perfil (B)(C) um plano paralelo à linha de terra, deverá pertencer a uma reta fronto-horizontal (t), desse plano, construída pela concorrência com uma qualquer (B)(J) coplanar (Figura 610).

A segunda possibilidade, para a posição ( $A_2$ ), foi dispensada para atender à imposição do maior perímetro para o triângulo em estudo (Figura 610).

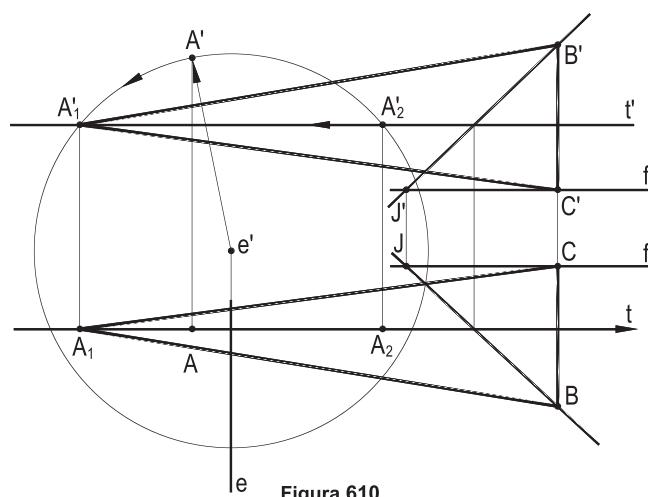


Figura 610

**485 – Efetue a rotação do ponto (A), em torno do eixo vertical (e), até que ele venha a distar 8 mm do plano ( $\alpha$ ).**

São dados as projeções  $A'$ ,  $A$ ,  $e'$ ,  $e$  e os traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$ .

Resolução: (A) gira num plano horizontal  $e$ , para distar 8 mm de ( $\alpha$ ), deve vir a pertencer a um dos dois planos ( $\alpha_1$ ), ou ( $\alpha_2$ ), paralelos a ( $\alpha$ ) e situados a tal distância dele, o que se consegue mediante uma mudança de ( $\pi'$ ), que torne ( $\alpha$ ) de topo (Figura 611).

Para as posições dadas, o problema oferece duas soluções ( $A'_1$ ) e ( $A'_2$ ), pertencentes ao plano ( $\alpha_1$ ), sendo inútil o segundo plano ( $\alpha_2$ ), visto que sua horizontal ( $h$ ), de cota igual à de (A), resta exterior ao círculo de rotação de (A) (Figura 611).

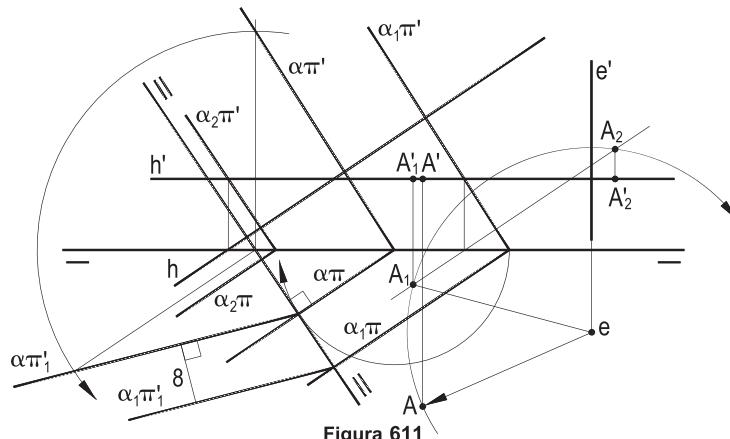


Figura 611

**486 – Gire o ponto (A), dado por suas projeções, em torno do eixo de topo (t), dado por sua projeção vertical  $t'$ , até que (A) venha a equidistar dos planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), dados por seus traços.**

Resolução: Equidistando dos dois planos dados ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), o ponto (A), após sua rotação, deve pertencer a um dos dois planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos que eles formam, o que se consegue, no caso, por uma mudança de ( $\pi'$ ), que os torne verticais (Figura 612).

Para as posições dadas, o problema apresenta quatro soluções, duas para cada bissetor.

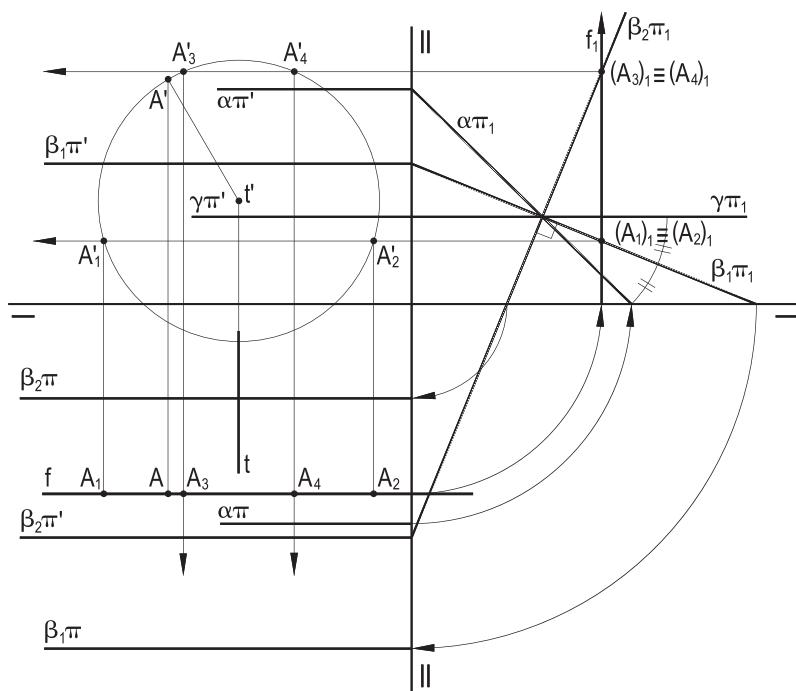


Figura 612

**487 – O triângulo isósceles (A)(B)(C), de base (B)(C), está situado num plano frontal e tem altura igual à abscissa da base.**

Dados, por suas projeções, os vértices (B) e (C) e a reta vertical (e), além da origem O das abscissas, pede-se efetuar a rotação do ponto (A), em torno do eixo (e), mantido fixo o lado (B)(C) até que o triângulo (A)(B)(C) venha a ser equilátero.

Feita a rotação, pede-se desenhar as projeções do triângulo (A)(B)(C), quando equilátero, em todas as posições possíveis.

Resolução: Já que a altura, relativa à base, do triângulo (A)(B)(C) iguala a abscissa da vertical (B)(C), há duas posições para o vértice (A), na origem do movimento: ( $A_1$ ) e ( $A_2$ ).

As rotações então possíveis originam as circunferências ( $c_1$ ) e ( $c_2$ ), descritas no plano mediador de (B)(C), apresentando, pois, em V.G., suas projeções horizontais.

E, para que venham a ser equiláteros os triângulos procurados, devem ter altura (A)(M) = h, igual à do triângulo equilátero  $\bar{A}B'C'$  da construção auxiliar da Figura 613.

Como a circunferência de rotação ( $c_2$ ) do vértice ( $A_2$ ) não é atingida, pela circunferência horizontal de centro (M) e raio  $h$  há apenas duas posições (J) e (L), para o vértice (A) do triângulo (A)(B)(C), após o movimento.

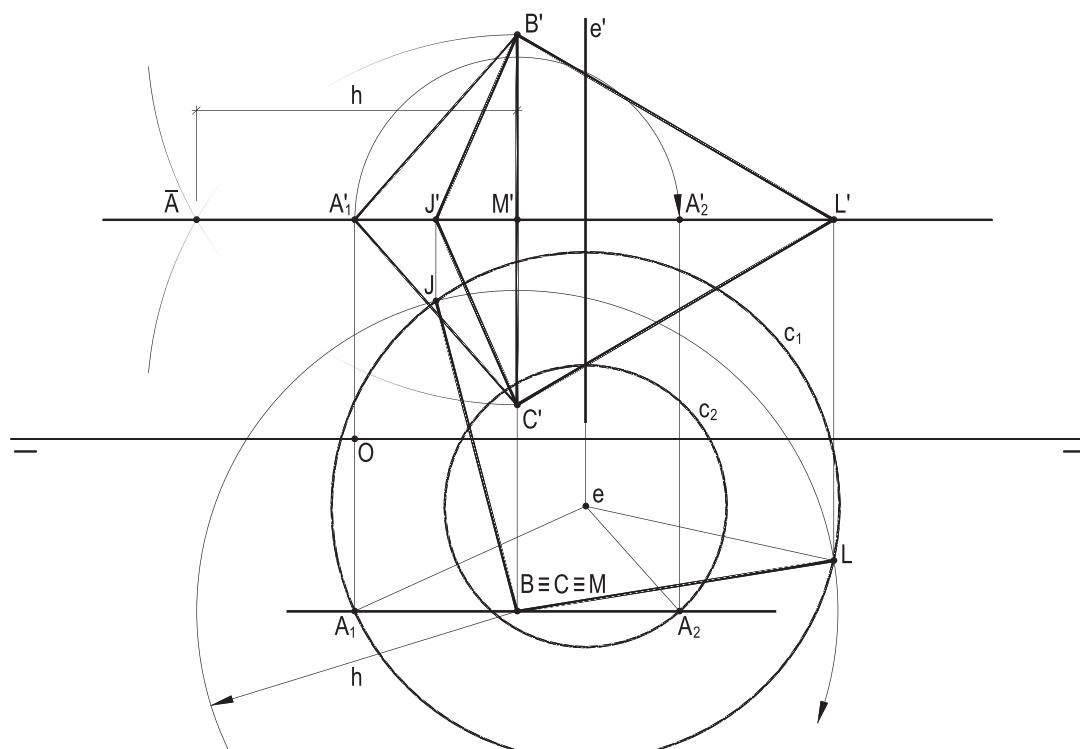


Figura 613

Nas épuras abaixo, são dadas, por suas projeções, as retas (a), (b) e (c). Pede-se determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\varphi$  que, respectivamente, (a) forma com ( $\pi$ ), (b) forma com ( $\pi'$ ) e (c) forma com os planos de perfil e com a linha de terra.

**Em todos os casos, faça uso de uma rotação em torno de um eixo (e), de sua escolha.**

Resoluções: Eixos verticais para obter a V.G. de  $\alpha$ , tornando (a) frontal; de topo para a V.G. de  $\beta$ , levando (b) a ser horizontal; fronto-horizontal para as V.G. de  $\gamma$  e  $\varphi$ , com auxílio de uma vista lateral.

**488**

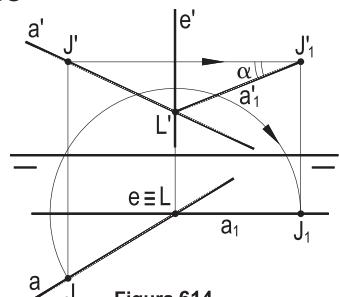


Figura 614

**489**

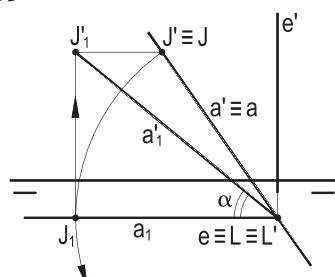


Figura 615

**490**

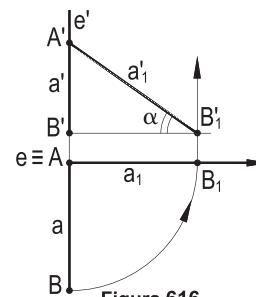


Figura 616

**491**

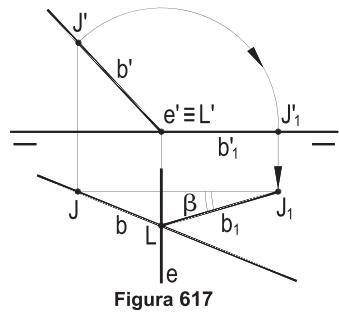


Figura 617

**492**

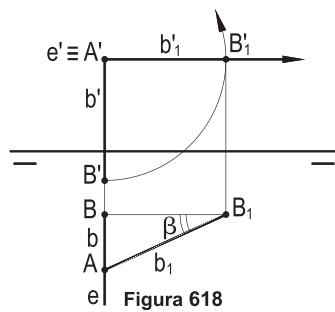


Figura 618

**493**

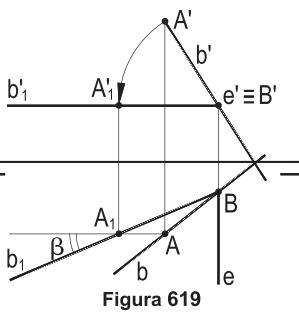


Figura 619

**494**

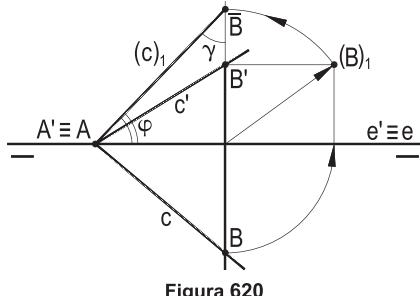


Figura 620

**495**

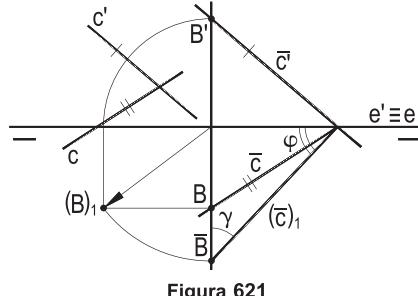


Figura 621

**496**

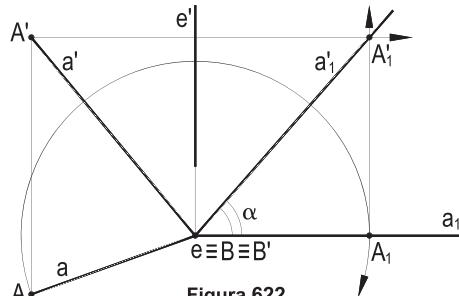


Figura 622

**497**

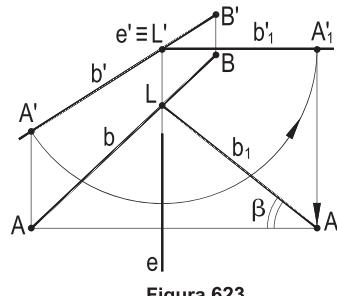


Figura 623

Em cada uma das figuras abaixo, pede-se girar a reta ( $r$ ), em torno do eixo vertical ( $e$ ), concorrente com ( $r$ ), fazendo com que seja atendida a condição estabelecida. São dadas as projeções de ( $r$ ) e de ( $e$ ), além da condição, caso a caso. Apresente apenas uma solução, indicando a segunda.

Resoluções: Por ser vertical o eixo, deve-se utilizar a cota constante de um ponto ( $A$ ) de ( $r$ ), escolhido conforme a conveniência de cada problema.

**498 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\beta_{24}$ )    499 – ( $r_1$ ) concorre com ( $t$ )    500 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\alpha$ )**

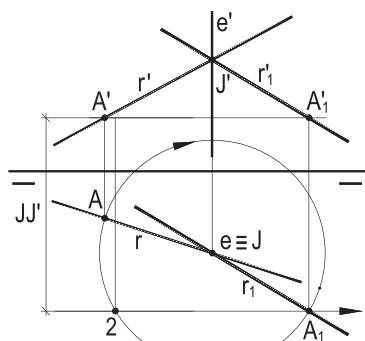


Figura 624

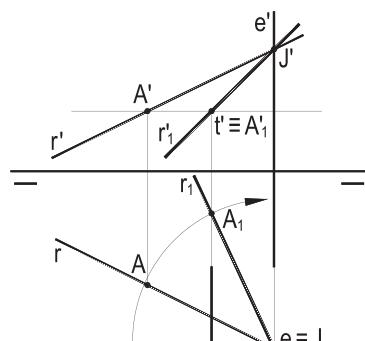


Figura 625

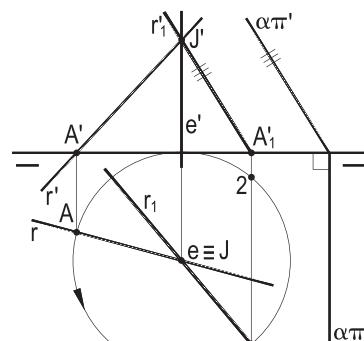


Figura 626

**501 – ( $r_1$ ) concorre com ( $h$ )    502 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\alpha$ )    503 – ( $r_1$ ) é frontal**

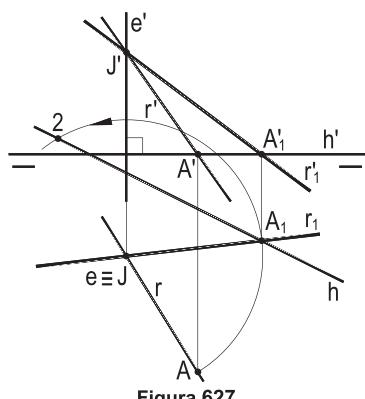


Figura 627

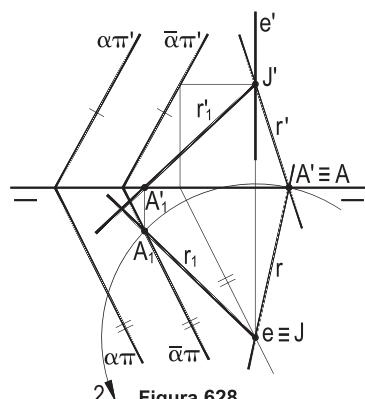


Figura 628

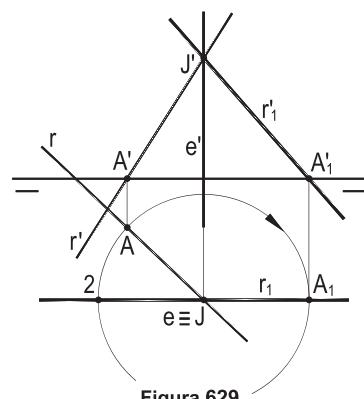


Figura 629

**504 – ( $r_1$ ) é ortogonal a ( $s$ )    505 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\alpha$ )    506 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\pi''$ )**

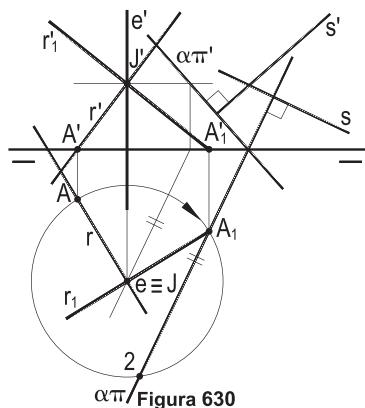


Figura 630

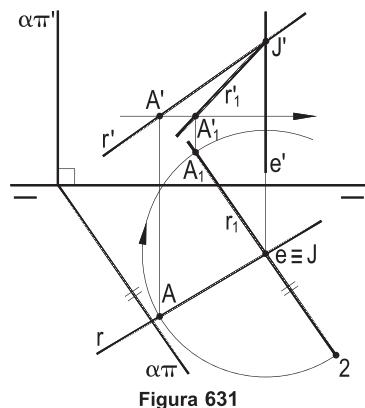


Figura 631

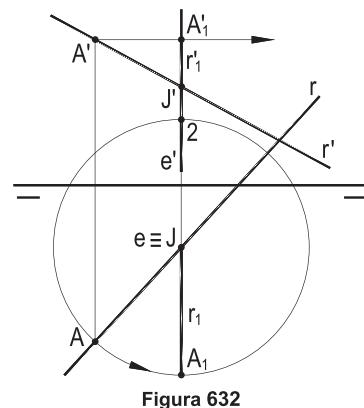
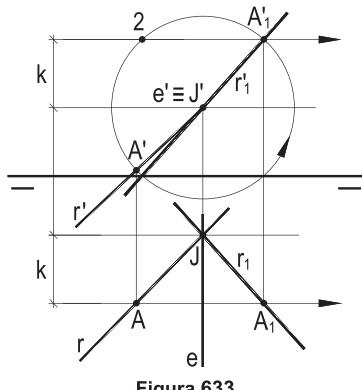


Figura 632

Para cada um dos casos abaixo, pede-se girar a reta  $(r)$ , em torno do eixo de topo  $(e)$ , concorrente com  $(r)$ , atendendo a cada condição imposta. Dadas as projeções de  $(r)$  e de  $(e)$ . Apresente apenas uma solução, indicando a segunda.

Resoluções: O ponto (J), comum a (r) e (e), fixo durante a rotação e o afastamento constante de um ponto (A) convenientemente escolhido, de (r), resolvem as questões.



**Figura 633**

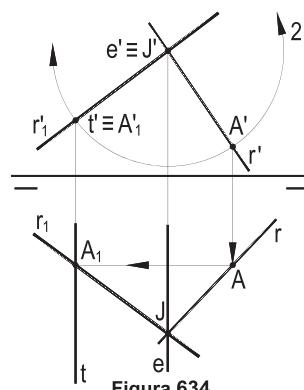


Figura 634

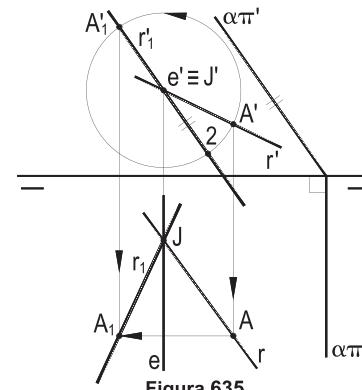
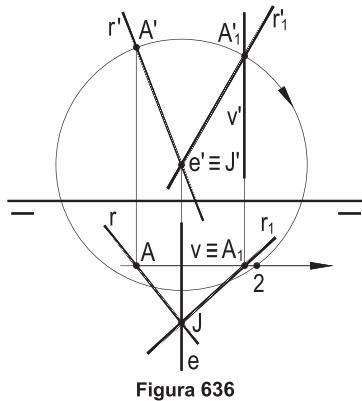
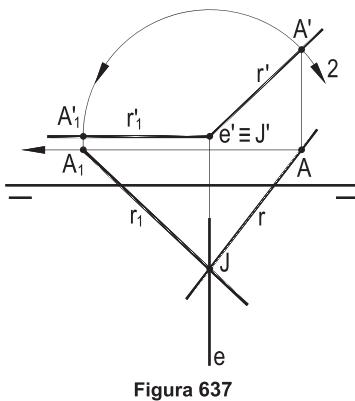


Figura 635

510 - ( $r_1$ ) concorre com ( $v$ ), 511 - ( $r_1$ ) é paralela a ( $\pi$ )  
dada



**Figura 636**



**Figura 637**

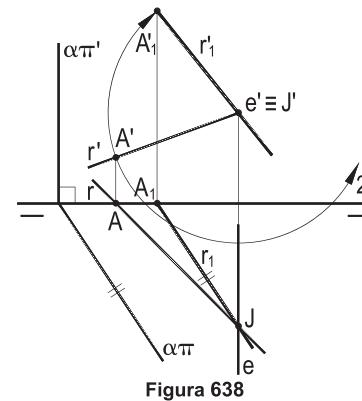


Figura 638

513 - ( $r_1$ ) é paralela a ( $\alpha$ ),  
 dado

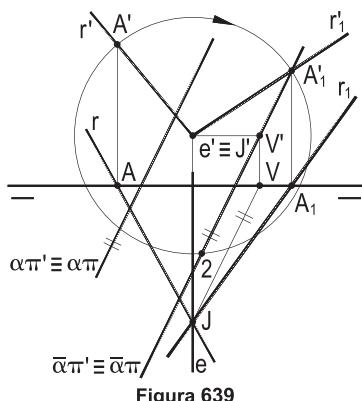


Figura 639

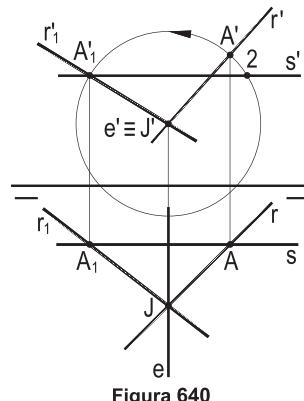


Figura 640

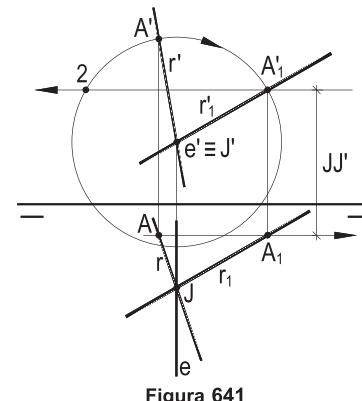


Figura 641

**Em todos os casos abaixo, são dadas as projeções da reta ( $r$ ) e do eixo fronto-horizontal ( $e$ ), concorrente com ( $r$ ). Pede-se girar ( $r$ ), em torno de ( $e$ ), até que sejam atendidas as condições dadas, caso a caso.**

**Resoluções:** Sendo fronto-horizontal o eixo ( $e$ ) da rotação, cada ponto ( $A$ ) da reta girante ( $r$ ) descreverá circunferência de perfil, o que aconselha a utilização de uma vista lateral, para atender cada condição estabelecida.

**516 – ( $r_1$ ) concorre com ( $P$ )( $Q$ ), dada**

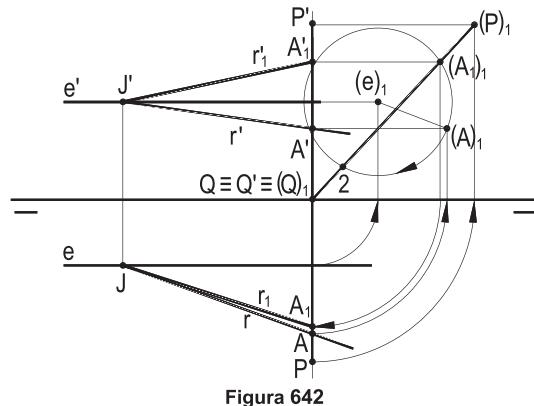


Figura 642

**517 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\beta_{24}$ )**

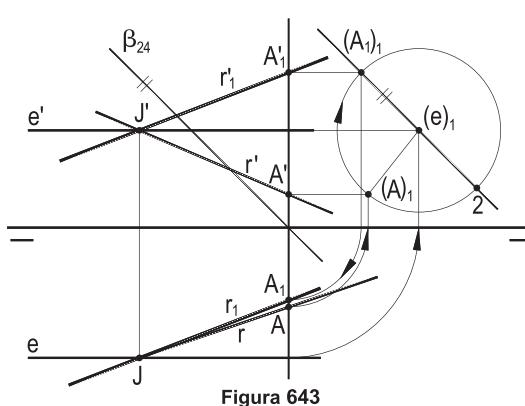


Figura 643

**518 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\beta_{13}$ )**

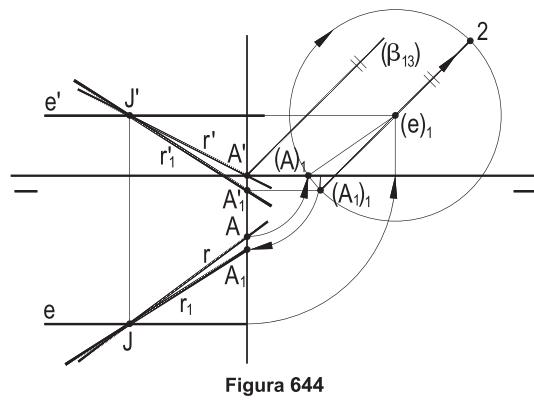


Figura 644

**519 – ( $r_1$ ) concorre com ( $t$ ), dada**

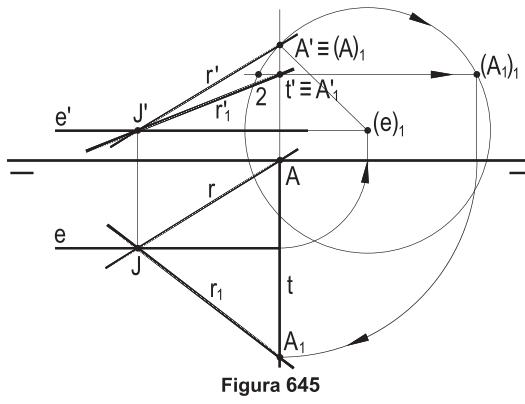


Figura 645

**520 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\alpha$ ), dado**

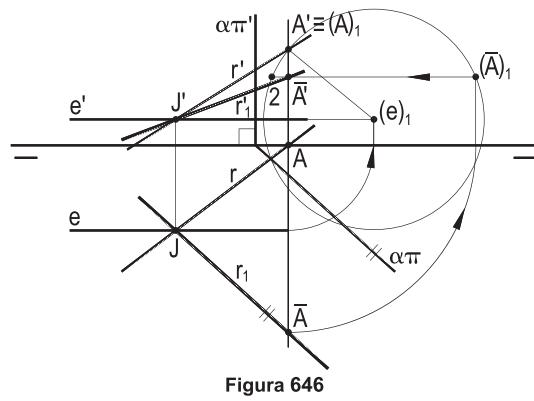


Figura 646

**521 – ( $r_1$ ) é paralela a ( $\alpha$ ), dado**

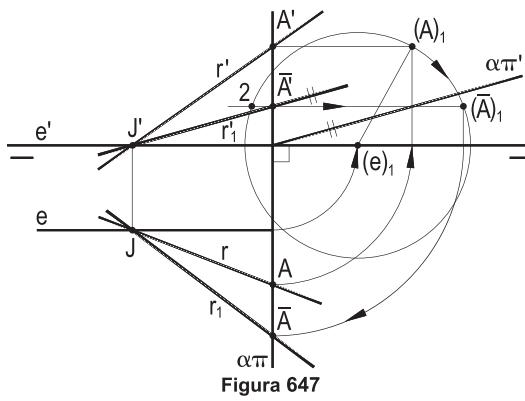


Figura 647

Para cada um dos casos abaixo, pede-se girar a reta (A)(B), em torno do eixo (e), a ela reverso, de modo a atender cada condição dada. Dadas as projeções de (A)(B) e de (e). Apresente apenas uma solução, mas indique a segunda.

Resolução: Sabe-se (*Geometria Descritiva*, números 99 e 100) que, sendo vertical, ou de topo, o eixo da rotação, a projeção horizontal, ou a vertical, respectivamente, da reta girante manter-se-á, em épura, tangente ao círculo da rotação, o que encaminha as soluções às questões propostas.

**522 – (A)(B) fique horizontal**

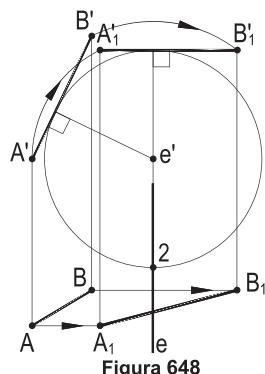


Figura 648

**523 – (A)(B) fique de perfil**

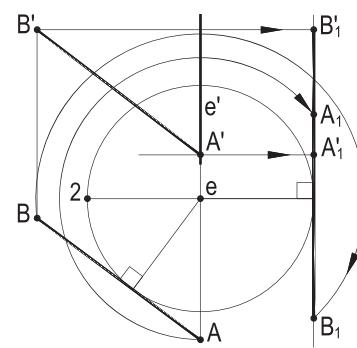


Figura 649

**524 – (A)(B) fique paralela a ( $\alpha$ ), dado**

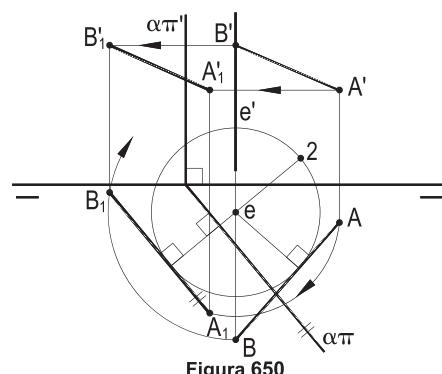


Figura 650

**525 – (A)(B) concorra com (t), dada**

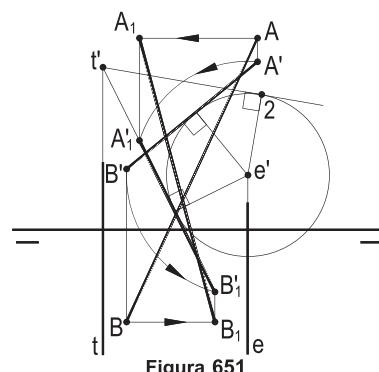


Figura 651

**526 – (A)(B) fique paralela ao plano das retas (a) e (b), dadas**

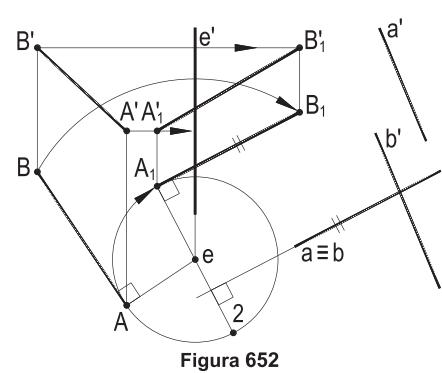


Figura 652

**527 – (A)(B) apresente sua V.G.**

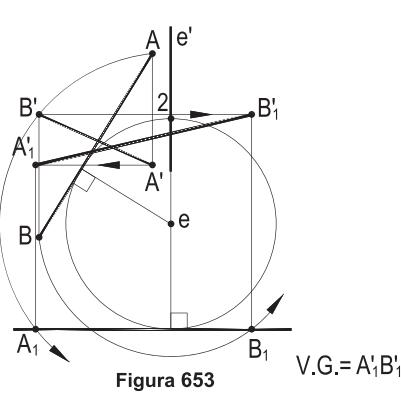


Figura 653

**528 – Nos dois casos abaixo, são dadas as retas reversas ( $r$ ) e ( $e$ ), por suas projeções. Pede-se girar ( $r$ ), em torno de ( $e$ ), até que ela venha a ficar paralela a cada um dos bissetores.**

**Apresente apenas uma solução.**

Resoluções: Como se trata de questão apenas de direção, e não de pertinência, para maior clareza das épuras, convém trabalhar com uma reta ( $s$ ) paralela à dada e com um eixo ( $\bar{e}$ ) de mesma natureza que o dado ( $e$ ), escolhido de modo tal que ( $s$ ) e ( $\bar{e}$ ) sejam concorrentes e resolver a questão para ( $s$ ) girando em torno de ( $\bar{e}$ ) (Figuras 654 e 655) para, em seguida, com a direção obtida para a reta ( $s_1$ ), conduzir a paralela ( $r_1$ ), que resolve o problema.

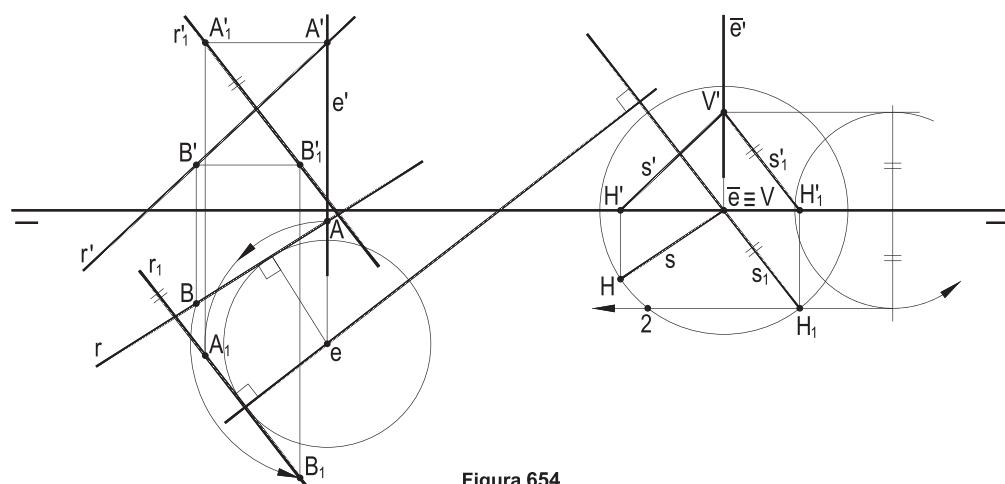


Figura 654

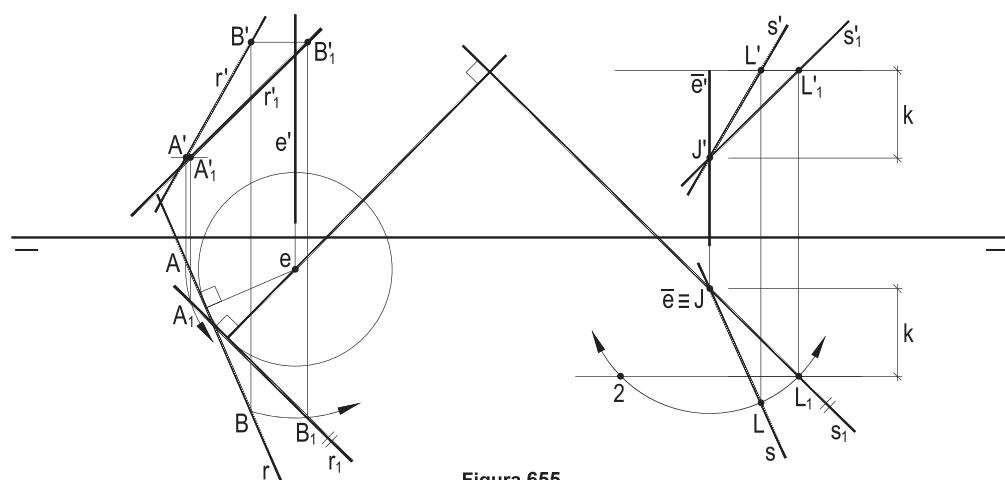


Figura 655

Observe-se que, para ( $s$ ) concorrente com ( $\bar{e}$ ), retorna-se, respectivamente, aos problemas 498 e 507, anteriores.

Na Figura 654, a reta dada foi levada a ser paralela a ( $\beta_{24}$ ) e, na Figura 655, a ( $\beta_{13}$ ).

**529 – Nos dois casos abaixo, são dadas as projeções das retas reversas ( $r$ ) e ( $e$ ). Pede-se girar ( $r$ ), em torno de ( $e$ ), até que ela venha a ficar paralela ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços.**

Resoluções: Para que ( $r$ ) venha a ser paralela a ( $\alpha$ ), ela, ou uma reta ( $s$ ), qualquer, mas paralela a ela, deve pertencer a um plano ( $\beta$ ), paralelo a ( $\alpha$ ).

Assim, para simplificar as épuras, convém trabalhar com uma reta ( $s$ ), um eixo ( $\bar{e}$ ) e um plano ( $\beta$ ), paralelos aos dados, fazendo ( $s$ ) e ( $\bar{e}$ ) concorrentes, para obter a nova posição ( $s_1$ ) de ( $s$ ), pertencente a ( $\beta$ ), e conduzir a paralela ( $r_1$ ) a ( $s_1$ ), para a rotação em torno do eixo dado ( $e$ ).

O procedimento aplica-se tanto para planos quaisquer (Figura 656) quanto para planos paralelos a ( $\pi'\pi$ ) (Figura 657).

Apenas uma solução foi completada, em ambos os casos, indicadas as segundas.

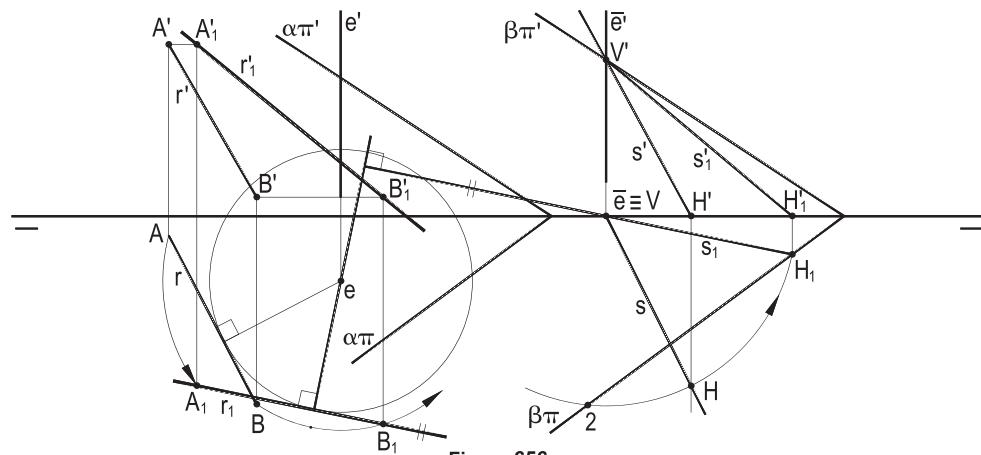


Figura 656

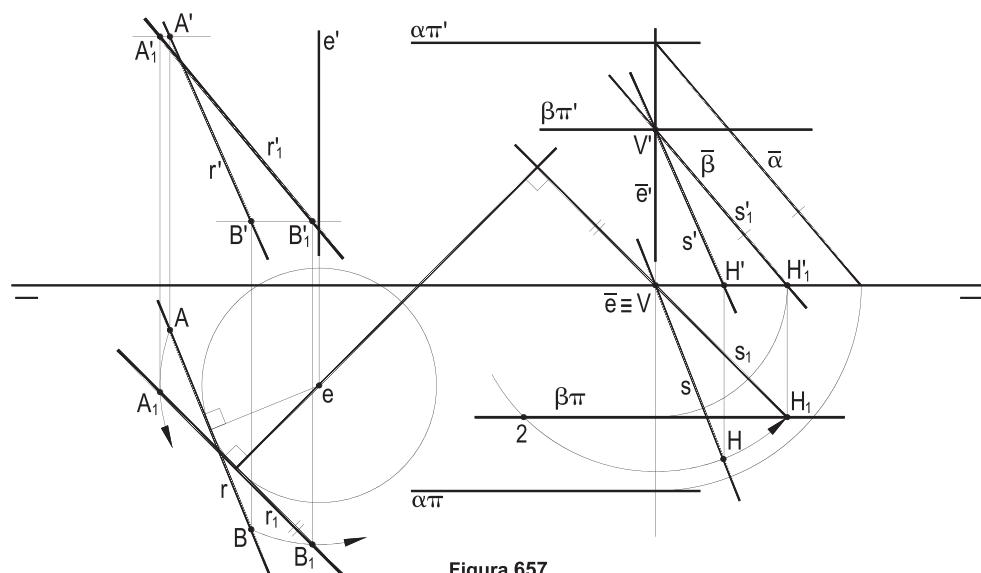


Figura 657

**530 – Dadas, por suas projeções, as retas  $(A)(B)$  e  $(e)$  e, por seus traços, os planos  $(\gamma)$ ,  $(\phi)$  e  $(\theta)$ , pede-se girar  $(A)(B)$ , em torno de  $(e)$ , até que  $(A)$  e  $(B)$  venham a definir com o ponto comum aos três planos dados um plano  $(\alpha)$  projetante em relação a  $(\pi)$ , cujos traços são pedidos.**

Resolução: Sendo  $(e)$  vertical, a projeção horizontal AB do segmento  $(A)(B)$  há de ser, sempre, tangente à circunferência da rotação, em projeção horizontal.

Assim, determinado o ponto  $(J)$  comum aos três planos dados, as tangentes, por  $J$ , àquela circunferência trazem as duas soluções para a reta  $(A)(B)$ , conforme o enunciado e, em consequência, a pronta determinação dos traços do plano  $(\alpha)$  pedido, observando-se que há uma segunda solução não completada na Figura 658.

**531 – Girando a reta  $(A)(B)$ , em torno do eixo de topo  $(e)$ , a ela reverso, até que  $(A)(B)$  venha a assumir duas posições de perfil  $(A_1)(B_1)$  e  $(A_2)(B_2)$ , dá-se formação aos quadriláteros  $(A_1)(B_1)(B_2)(A_2)$  e  $(A_1)(B_1)(A_2)(B_2)$ , cujas projeções são pedidas.**

São dadas as projeções  $A'$ ,  $A$ ,  $B'$ ,  $B$  e  $e'$ .

Resolução: Sendo de topo o eixo, é em projeção vertical que se apreciam as tangentes à circunferência da rotação (Figura 659).

E as posições pedidas são simples de obter, por corresponderem às abscissas extremas, à direita e à esquerda.

Imediatas, então, as rotações produzindo os segmentos  $(A_1)(B_1)$  e  $(A_2)(B_2)$  e os quadriláteros reversos que seus extremos definem (Figura 659).

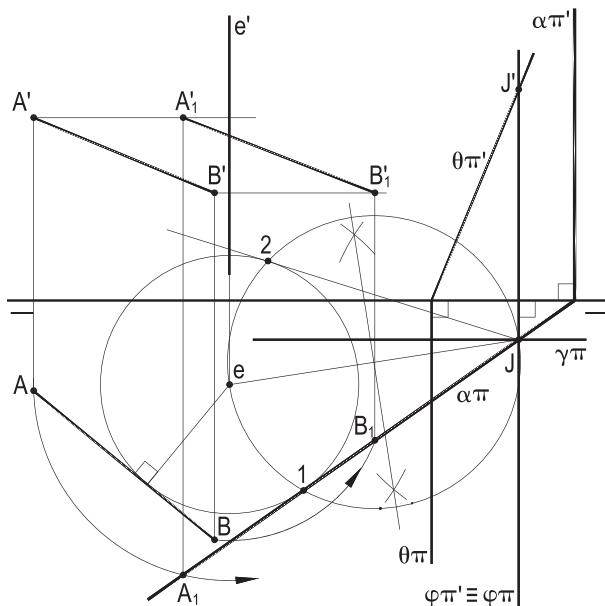


Figura 658

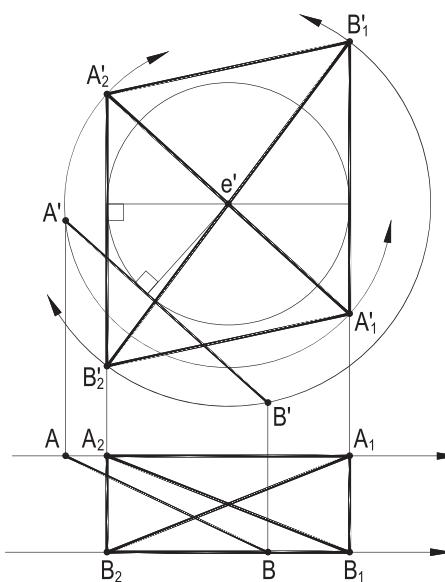


Figura 659

**532 – São dadas, por suas projeções, as retas concorrentes (a) e (b) e a reta horizontal (r), reversa às duas primeiras.**

Pede-se girar a reta (r), em torno de um eixo vertical (e) de abscissa nula, que deve ser determinado, de modo a fazer com que (r) venha a pertencer ao plano definido pelas retas (a) e (b).

Resolução: Sendo (r) horizontal, toda rotação sua em torno de um eixo vertical há de mantê-la com a mesma cota inicial.

Assim, é imediata a obtenção da posição final ( $r_1$ ) dessa horizontal, quando pertencente ao plano das retas (a) e (b) (Figura 660).

E como (r) não pode ser concorrente com o eixo vertical da rotação, pois seu ponto com abscissa nula não pertence ao plano das concorrentes, a projeção horizontal e do eixo tem que pertencer a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas projeções horizontais  $r$  e  $r_1$  da reta (r) em suas posições inicial e final.

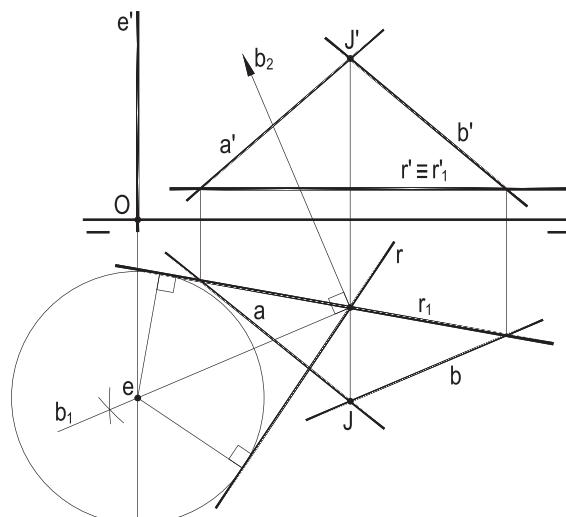


Figura 660

Há, por isso, duas soluções para o eixo (e), uma concluída na Figura 660 e a segunda apenas indicada pela bissetriz  $b_2$  daqueles ângulos.

**533 – Submeta a reta (r) a duas rotações sucessivas, até que ela fique fronto-horizontal.**

Os eixos das rotações devem concorrer com a reta girante e pertencer a cada um dos planos dados ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ). Apresente apenas uma solução.

Dados:  $r'$ ,  $r$ ,  $\alpha\pi' \equiv \alpha\pi$ ,  $\beta\pi' \equiv \beta\pi$ .

Resolução: Para transformar a qualquer dada (r) em fronto-horizontal, são necessárias duas rotações, a primeira em torno de um eixo de topo ( $e_1$ ), com ela concorrente, que leve (r) à posição ( $r_1$ ), horizontal (Figura 661), e uma segunda em torno de um eixo vertical ( $e_2$ ), que leve essa horizontal ( $r_1$ ) a ser a fronto-horizontal ( $r_2$ ).

Observe-se que apenas uma solução foi completada (Figura 661).

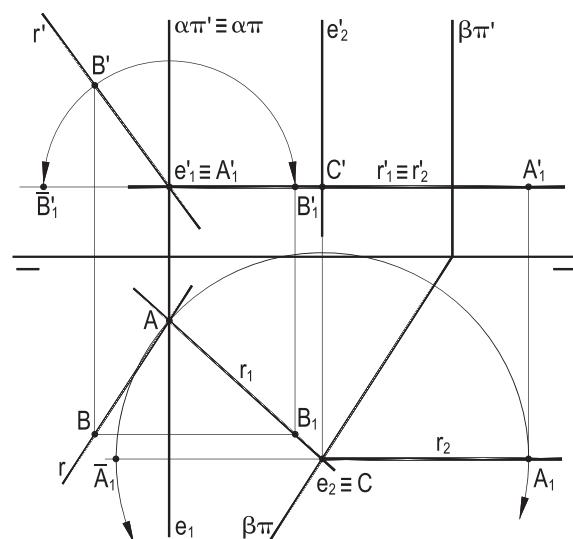


Figura 661

**534 – Determinar as projeções do eixo (e), em torno do qual se deve girar os pontos (A) e (B), de modo que eles venham a coincidir com o ponto (C).**

**Dados os três pontos, por suas projeções.**

Resolução: Naturalmente, o eixo (e) procurado há de ser perpendicular ao plano do triângulo (A)(B)(C). E, para permitir que suas distâncias aos três vértices sejam iguais, ele deve pertencer ao circuncentro (O) do triângulo, o que se consegue, em épura, pelas construções das mediatriizes ( $m_1$ ) e ( $m_2$ ), respectivamente, dos lados (A)(C) e (A)(B) (Figura 662).

O eixo (e) pedido é, então, a reta pertencente a (O) e perpendicular ao plano de (A)(B)(C), o que, para o caso particular da Figura 662, em que dois lados são as principais do plano, obriga as coincidências de  $e'$  e de  $e$ , respectivamente, com  $m'_1$  e com  $m_2$ .

**535 – Dadas as projeções das retas concorrentes (r) e (e), pede-se girar (r), em torno de (e), até que a verdadeira grandeza da distância entre os traços horizontal e vertical de (r) venha a ser igual a 50 mm.**

Resolução: Numa primeira rotação, movimentando o traço horizontal (H) de (r), tornando-a frontal, aproveitando o ponto fixo (P), que ela tem em comum com o eixo (e), marca-se, em V.G., a distância de 50 mm, obtendo-se, a partir de ( $H'_1$ ), o ponto ( $J'_1$ ), que será, na posição final (V), o traço vertical de (r) (Figura 663).

Assim, numa segunda rotação, que mantém constante sua cota, faz-se ( $J'_1$ ) vir a pertencer a ( $\pi'$ ), transformando-o no traço vertical (V) da reta (r) em sua posição final ( $r'_1$ ) (Figura 663).

Apenas, uma solução foi apresentada num dos sentidos possíveis, tendo sido indicada a segunda.

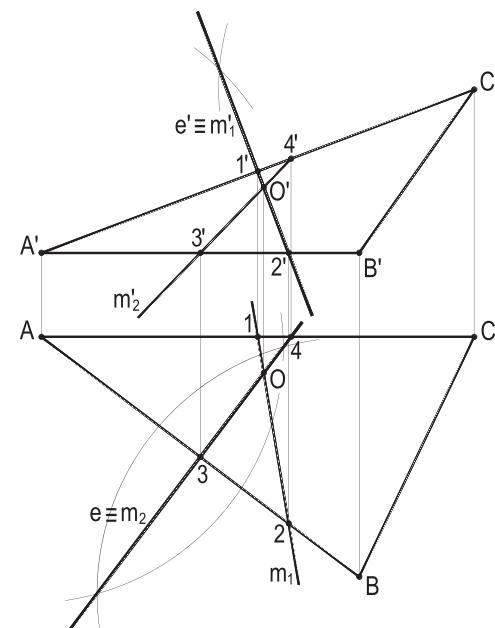


Figura 662

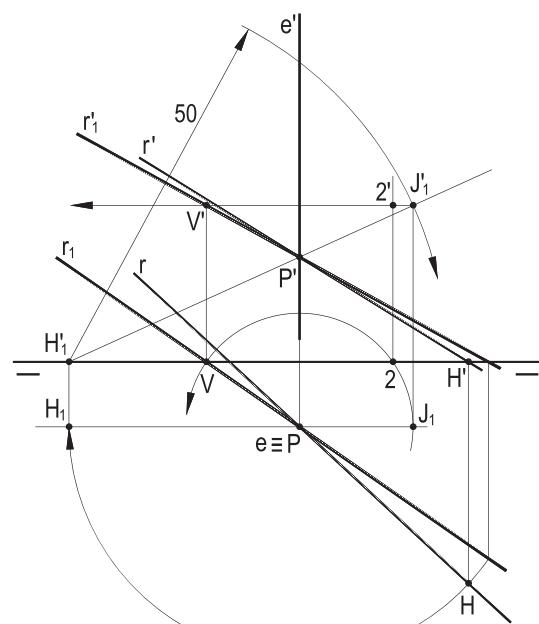


Figura 663

**536 – São dadas, por suas projeções, as retas concorrentes (a) e (b), pertencentes a ( $\pi$ ), e uma horizontal (e), reversa àquelas duas, além do ponto (J), do primeiro diedro.**

**Pede-se girar (J), em torno de (e), até que ele venha a equidistar de (a) e de (b).**

Resolução: Sabe-se (número 6.1) que o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas horizontais (a) e (b), dadas, é composto pelo par de planos bissoitores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados por essas duas retas, planos esses verticais, por terem que ser perpendiculares ao plano das duas retas.

Como o eixo de rotação (e) é horizontal, convém operar com uma mudança de ( $\pi'$ ), que o transforme numa reta de topo (Figura 664).

Para tal mudança, porque ( $\pi$ ) permanece fixo, esses dois bissoitores continuam verticais, sendo, então, seccionados por ( $\pi'_1$ ) segundo duas verticais ( $v_1$ ) e ( $v_2$ ).

Por isso, na nova projeção vertical, os pontos procurados hão de ser os comuns a cada uma dessas verticais com a circunferência de rotação de (J), em V.G. nessa projeção.

Para a posição relativa dos dados, o problema conta com quatro soluções, os pontos ( $J_1$ ), ( $J_2$ ), ( $J_3$ ) e ( $J_4$ ), indicados no segundo sistema projetivo, pelos números 1, 2, 3 e 4 (Figura 665).

Mas, é óbvio, conforme as posições das retas e do ponto dado, a quantidade de soluções pode diminuir, seja por tangência da circunferência de rotação de (J), em relação a qualquer das duas verticais ( $v_1$ ) e ( $v_2$ ), seja, até, por não poder atingi-las, cabendo, pois, a hipótese do problema se tornar impossível.

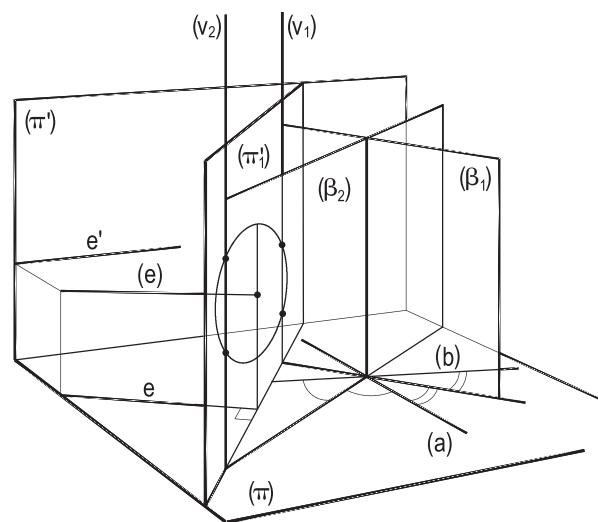


Figura 664

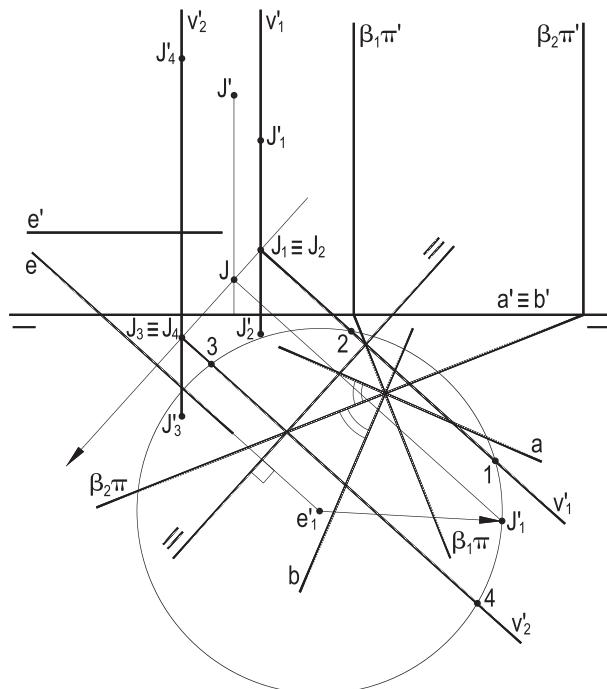


Figura 665

Para os diversos casos abaixo, pede-se determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\varphi$  que, respectivamente, os planos  $(\theta)$ ,  $(\rho)$  e  $(\lambda)$  formam com  $(\pi)$ , com  $(\pi')$  e com  $(\pi'')$  e  $(\pi''\pi)$ . Em todos os casos, faça uso de um eixo ( $e$ ), de sua escolha. Os planos são dados por seus traços.

Resoluções: Eixos verticais para obter a V.G. do ângulo  $\alpha$ , eixos de topo para determinar  $\beta$  e fronto-horizontais, ou a própria linha de terra para  $\gamma$  e  $\varphi$ .

537

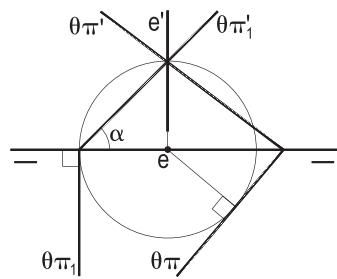


Figura 666

538

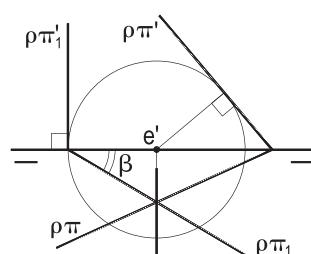


Figura 667

539

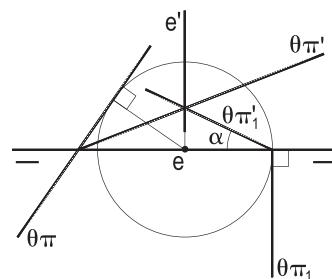


Figura 668

540

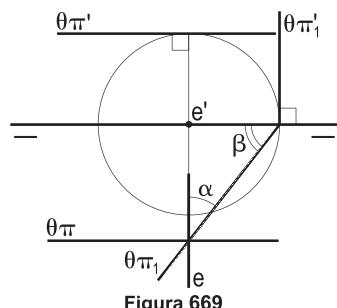


Figura 669

541

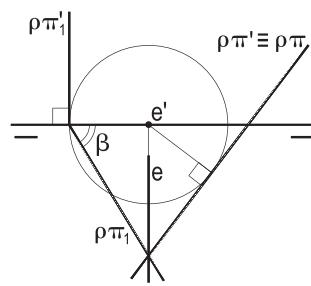


Figura 670

542

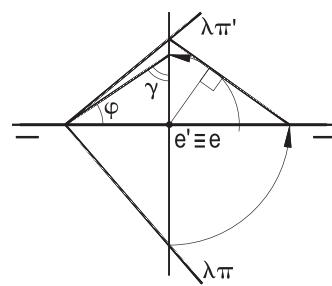


Figura 671

Para os casos abaixo, determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que os planos das retas (a) e (b) e o das retas (c) e (d) formam com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ , respectivamente.

Resoluções: Como acima, deve-se tornar de topo, ou vertical, cada um dos planos dados, girando, respectivamente, uma horizontal que se torne de topo, ou uma frontal que se torne vertical, mesmo sem a presença da linha de terra (Figuras 672 e 673).

543

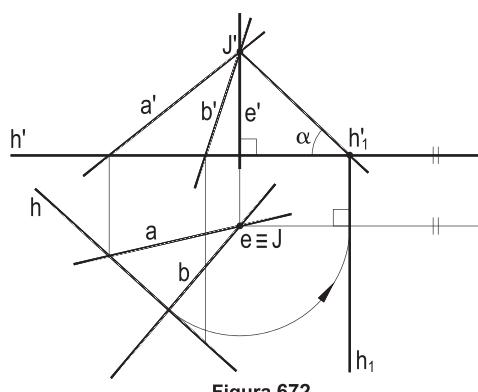


Figura 672

544

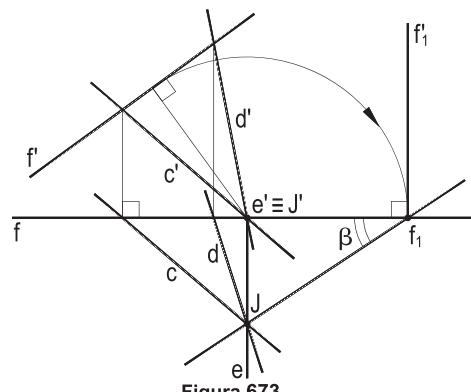


Figura 673

Em cada um dos casos abaixo, pede-se girar o plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, em torno do eixo vertical (e), situado em ( $\pi'$ ) e dado por suas projeções, para atender às condições impostas. Apresente apenas uma solução, mas indique todas.

Resoluções: Determina-se, de pronto, o traço (V) de (e) em ( $\alpha$ ), para, a seguir, girar um ponto (H), de ( $\alpha$ ), de modo a atender à condição dada. Convém, naturalmente, que esse ponto (H) pertença a  $\alpha\pi$ , já que o primeiro (V), fixo que é, pertence aos traços verticais original e final do plano girante.

**545 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a ( $\pi'\pi$ )**

**546 – ( $\alpha_1$ )  $\varepsilon$  (O), dado**

**547 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a (h), dada**

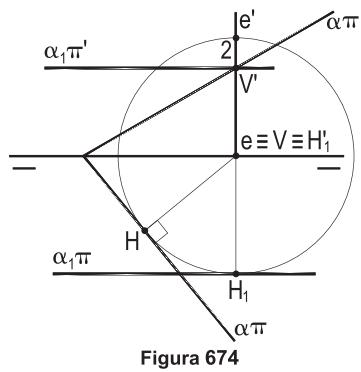


Figura 674

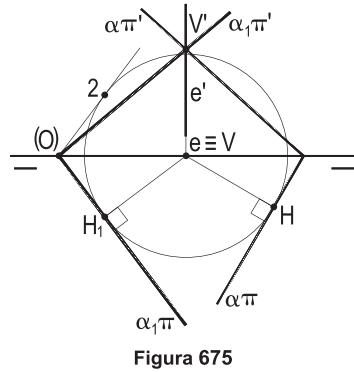


Figura 675

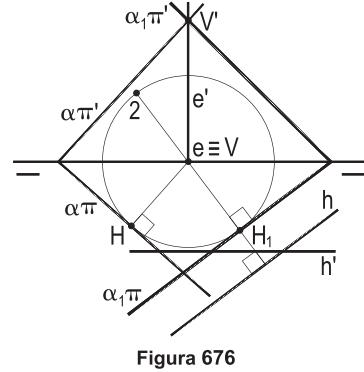


Figura 676

**548 – ( $\alpha_1$ ) é projetante**

**549 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a (s)**

**550 – ( $\alpha_1$ )  $\varepsilon$  (P), dado**

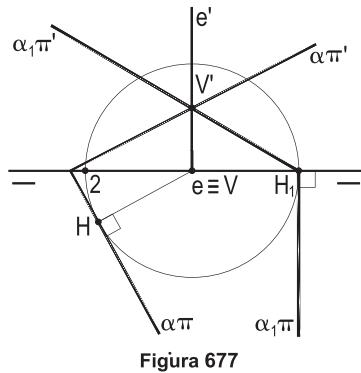


Figura 677

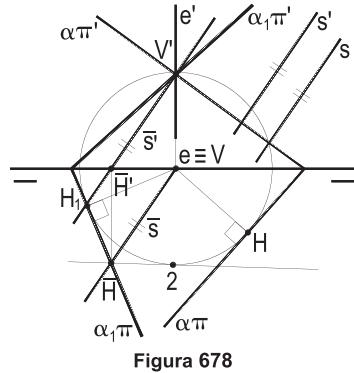


Figura 678

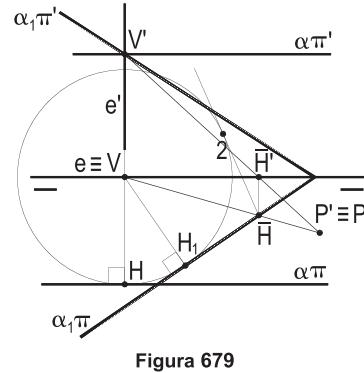


Figura 679

**551 – ( $\alpha_1$ ) é perpendicular a ( $\beta_{13}$ )**

**552 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a (h), dada**

**553 – ( $\alpha_1$ ) é perpendicular a ( $\gamma$ )**

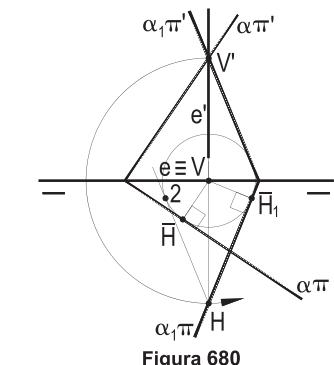


Figura 680

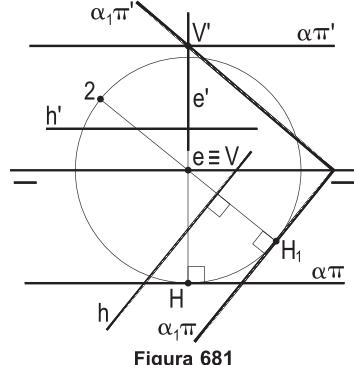


Figura 681

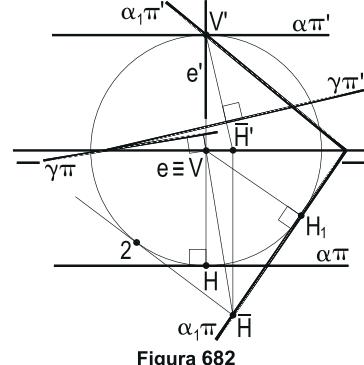
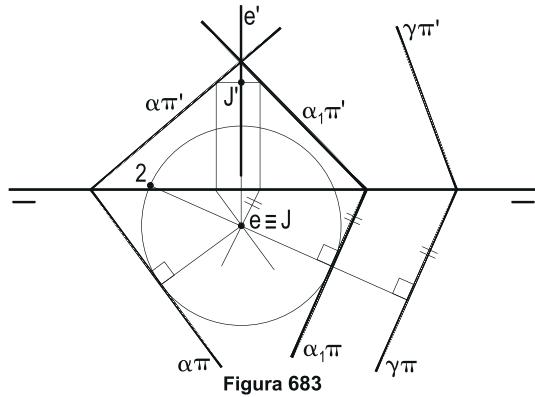


Figura 682

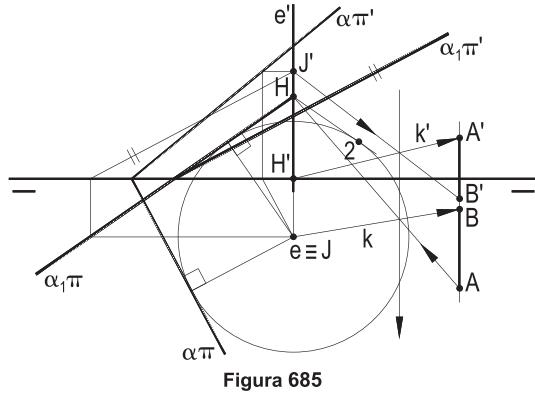
Para cada uma das épuras abaixo, pede-se girar o plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, em torno do eixo vertical ( $e$ ), dado por sua projeção horizontal, de modo a obedecer à condição imposta. Apresente apenas uma solução, mas indique todas.

Resoluções: Tal como nos exemplos anteriores, deve-se, de início, determinar o traço ( $J$ ) de ( $e$ ) em ( $\alpha$ ), que permanecerá fixo ao longo da rotação, e, em seguida, operar com ponto(s) de ( $\alpha$ ), adequadamente escolhido(s), observando a(s) constância(s) de sua(s) cota(s).

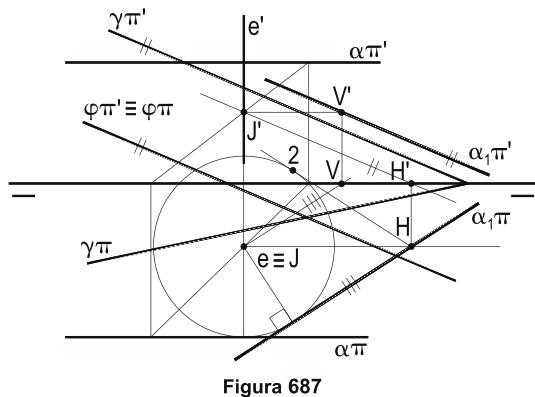
**554 – ( $\alpha_1\gamma$ ) seja horizontal, dado ( $\gamma$ )**



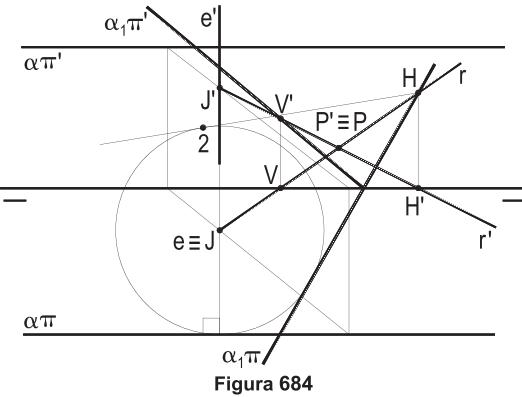
**556 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a (A)(B), dada**



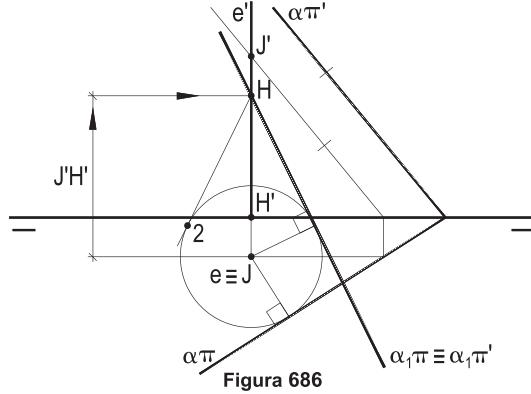
**558 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a ( $\gamma\varphi$ ), dados ( $\varphi$ ) e ( $\gamma$ )**



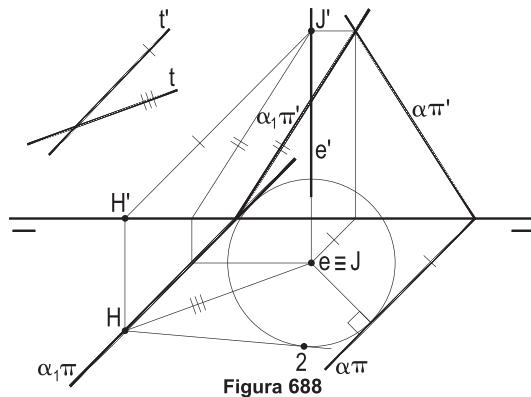
**555 – ( $\alpha_1$ )  $\epsilon$  (P), dado**



**557 – ( $\alpha_1$ ) é perpendicular a ( $\beta_{24}$ )**



**559 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a (t), dada**



Para cada um dos casos abaixo, são dados, por suas projeções, o eixo ( $e$ ), de topo, pertencente a ( $\pi$ ), e o plano ( $\alpha$ ), por seus traços.

Pede-se girar ( $\alpha$ ), em torno de ( $e$ ), atendendo às condições impostas, apresentando apenas uma solução, mas indicando todas.

Resoluções: Determina-se, inicialmente, o traço ( $H$ ) de ( $e$ ) com ( $\alpha$ ), que, permanecendo fixo, durante o movimento, há de pertencer ao traço horizontal  $\alpha_1\pi$  de ( $\alpha$ ), após a rotação. Basta, então, girar o traço vertical de ( $\alpha$ ), até a sua posição final  $\alpha_1\pi'$ .

**560 – ( $\alpha_1$ ) é projetante**

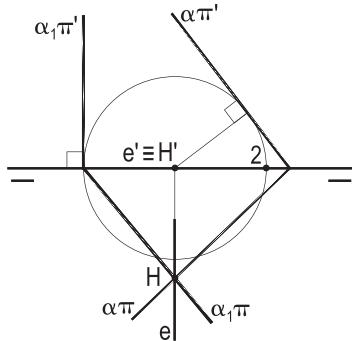


Figura 689

**561 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a ( $f$ ), dada**

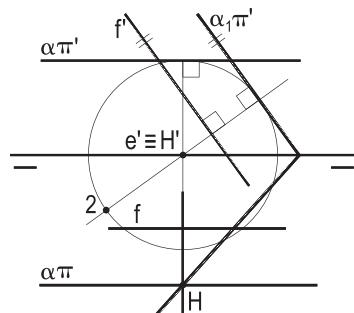


Figura 690

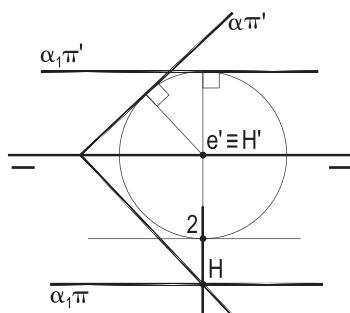


Figura 691

**562 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a ( $\pi'\pi$ )**

**563 – ( $\alpha_1$ ) é perpendicular a ( $\beta_{24}$ )**

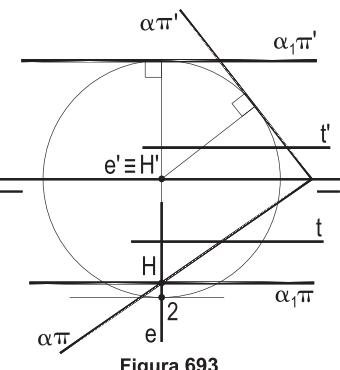


Figura 693

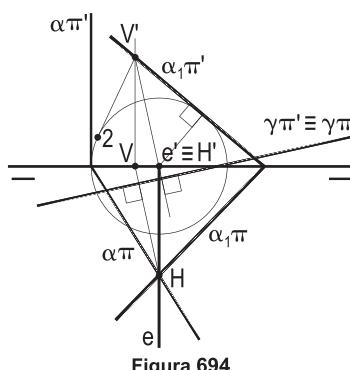


Figura 694

**564 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a ( $t$ ), dada**

**565 – ( $\alpha_1$ ) é perpendicular a ( $\gamma$ ), dado**



Figura 692

**566 – ( $\alpha_1$ ) é perpendicular a ( $\beta_{13}$ )**

**567 – ( $\alpha_1$ )  $\in$  ( $J$ ), dado**

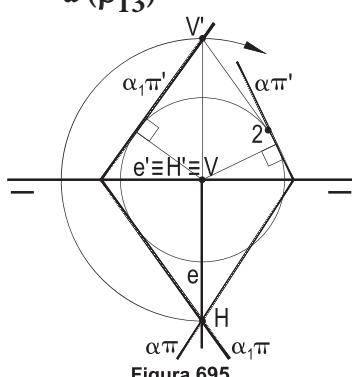


Figura 695

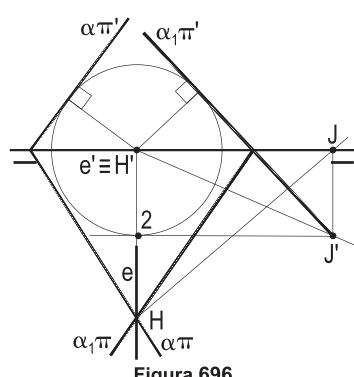


Figura 696

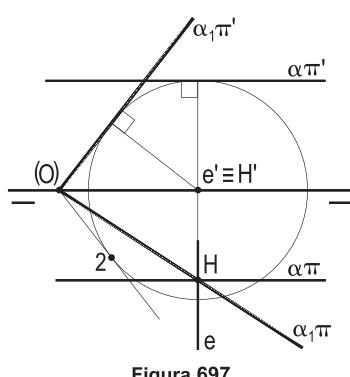


Figura 697

Para cada um dos casos abaixo, pede-se girar o plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, em torno do eixo de topo ( $e$ ), dado por sua projeção vertical, de modo a atender às condições ditadas.

Apresente apenas uma solução, mas indique todas.

Resoluções: Inicialmente, obtém-se o traço ( $J$ ) de ( $e$ ) em ( $\alpha$ ), que permanecerá fixo durante a rotação. A utilização de um segundo ponto de ( $\alpha$ ), convenientemente escolhido, resolverá a questão.

**569 – ( $\alpha_1\gamma$ ) seja frontal. Dado ( $\gamma$ )**

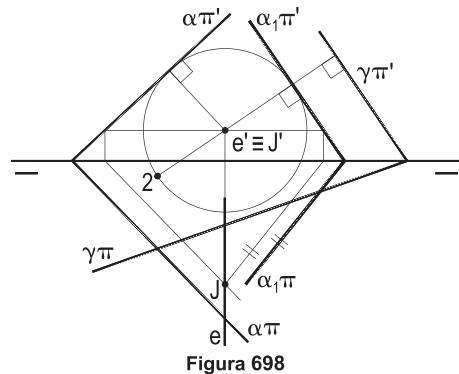


Figura 698

**570 – ( $\alpha_1$ )  $\epsilon$  (P), dado**

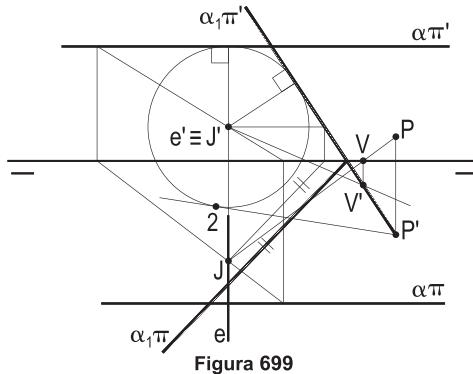


Figura 699

**571 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a ( $r$ ), dada**

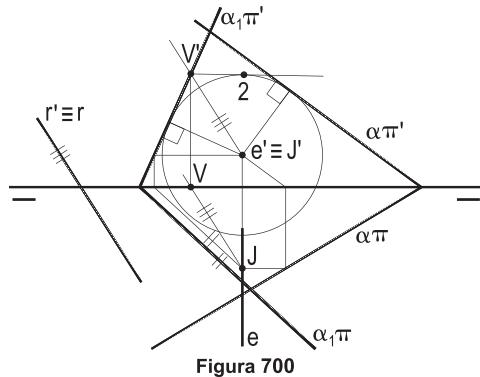


Figura 700

**572 – ( $\alpha_1$ ) é perpendicular a ( $\gamma$ ), dado**

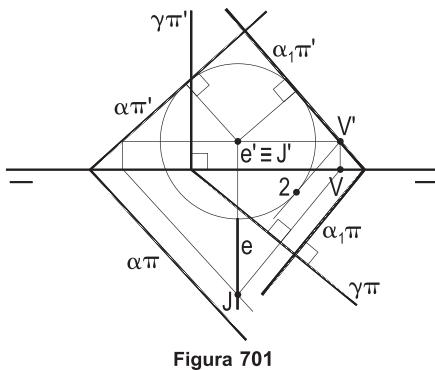


Figura 701

**573 – ( $\alpha_1$ ) é paralelo a ( $\pi'\pi$ )**

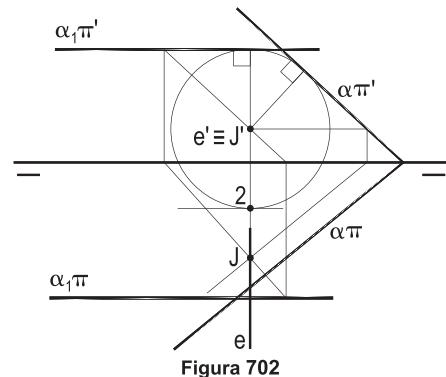


Figura 702

**574 – ( $\alpha_1$ ) é perpendicular a ( $\beta_{24}$ )**

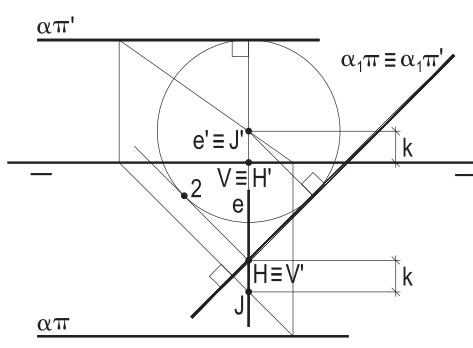


Figura 703

**575 – São dados, por suas projeções, os pontos (A) e (B) e a reta (r).**

Sabe-se que o plano ( $\alpha$ ) contém a reta (A)(B), forma  $45^\circ$  com ( $\pi$ ) e tem sua porção útil, no primeiro diedro, com ângulo agudo.

Pede-se girar ( $\alpha$ ), em torno de um eixo vertical (e), a determinar, construindo, após tal rotação, que faça ( $\alpha$ ) vir a pertencer a (r), com traços, em épura, voltados para a esquerda, as projeções do triângulo, cujos vértices sejam ( $A_1$ ) e ( $B_1$ ), resultantes das rotações de (A) e de (B) e (C), o único ponto fixo, durante esse movimento.

Resolução: À esquerda da épura, para aliviá-la, procedeu-se à construção de um plano ( $\bar{\alpha}$ ), paralelo ao referido no enunciado, a partir de um plano de topo ( $\gamma$ ), inclinado de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi$ ), que, girando em torno de um eixo vertical (v), venha a ter traço horizontal  $\bar{\alpha}\pi'$  paralelo a AB, visto que, pelos dados, (A)(B) pertence ao traço horizontal de ( $\alpha$ ) (Figura 704).

Há apenas uma posição para  $\bar{\alpha}\pi'$ , ou, o que é o mesmo, para  $\alpha\pi'$ , pela restrição referente à porção útil de ( $\alpha$ ) no primeiro diedro.

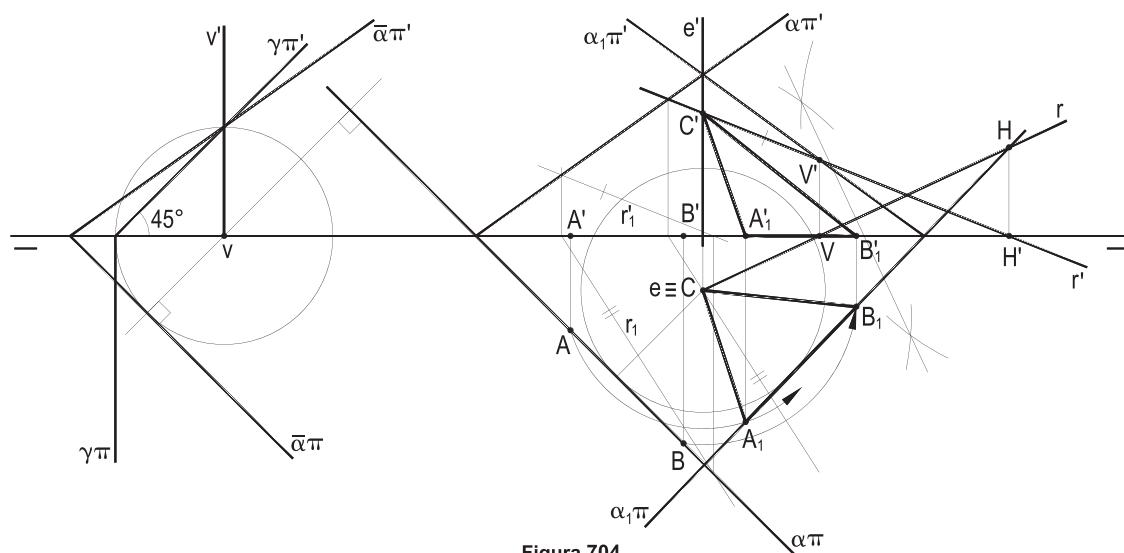


Figura 704

Para que ( $\alpha_1$ ) possa vir a conter (r), após a rotação proposta, o eixo possível há de pertencer ao ponto (C), traço de (r) em ( $\alpha$ ), que, então, ficará fixo, durante o movimento. E, se (r) vai pertencer a ( $\alpha_1$ ), posição final de ( $\alpha$ ), o traço horizontal  $\alpha_1\pi$  tem que passar por H, traço horizontal de (r), além, é claro, de ser tangente à circunferência de rotação, de centro C e tangente a  $\alpha\pi$ .

Resta apenas uma solução para o plano ( $\alpha_1$ ), para ter, em épura, traços voltados para a esquerda. E, com duas simples rotações, obtém-se ( $A_1$ ) e ( $B_1$ ), que, é claro, pertencerão a  $\alpha_1\pi$ , completando o triângulo pedido (Figura 704).

**576 – Gire o plano ( $\alpha$ ), em torno do eixo (e), até que ele venha a cortar os planos ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) segundo retas paralelas. São dados os traços dos planos ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) e as projeções de (e).**

Resolução: Para seccionar os planos ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) segundo retas paralelas, ( $\alpha$ ), após a rotação pedida, deverá ter seu novo traço horizontal paralelo a  $\beta\pi$  e a  $\gamma\pi$ , devendo, por isso, pertencer à reta horizontal ( $h$ ), conduzida pelo traço ( $J$ ) de (e) em ( $\alpha$ ) e paralela àqueles traços horizontais.

As duas tangentes do traço vertical de ( $h$ ) ao círculo da rotação proporcionam duas soluções, os planos ( $\alpha_1$ ) e ( $\alpha_2$ ) (Figura 705).

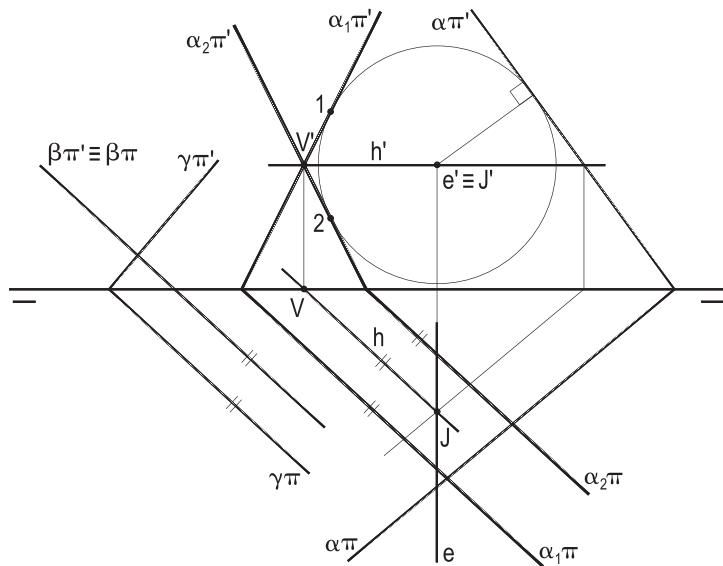


Figura 705

**577 – Dados, por seus traços, os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) e, por suas projeções, a reta (e), pede-se girar ( $\alpha$ ), em torno de (e), até que ele venha a ficar perpendicular a ( $\beta$ ).**

Resolução: A obtenção do traço ( $J$ ) de (e) em ( $\alpha$ ) é imediata (*Geometria Descritiva*, números 76 e 77), utilizando a reta ( $J$ )( $\bar{V}$ ).

E, com um corte de perfil, é simples traçar, por ( $J$ )<sub>1</sub>, a perpendicular ( $H$ )<sub>1</sub>( $V$ )<sub>1</sub> ao plano ( $\beta_1$ ), reta à qual deve pertencer o plano girante, em sua posição final, para assegurar que fique perpendicular a ( $\beta$ ).

Alçada a reta de perfil ( $H$ )( $V$ ), obtém-se o traço horizontal  $H$ , do qual se pode enviar as tangentes à circunferência de rotação (Figura 706) e utilizar o traço  $V'$ , por onde passarão os traços verticais  $\alpha_1\pi'$  e  $\alpha_2\pi'$  completando a épura.

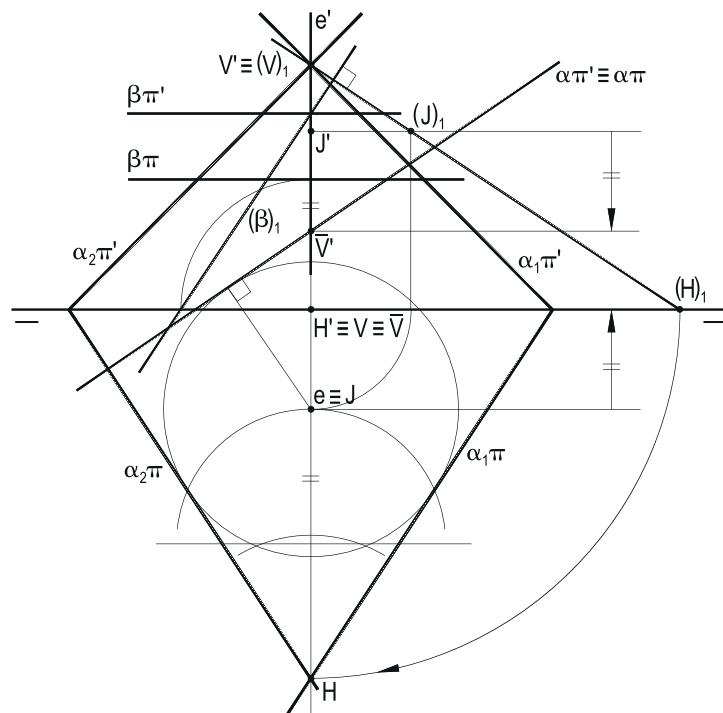


Figura 706

**578 – Gire os planos quaisquer ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), dados por seus traços, em torno de um eixo vertical (e), a ser determinado, até que esses planos tenham por interseção a reta horizontal (h), dada por suas projeções.**

Resolução: Devendo ser vertical o eixo (e) da rotação, as cotas dos elementos girantes manter-se-ão constantes.

Assim, a reta horizontal (h) há de ser a posição final de outras duas de mesma cota que ela: uma, (E)(F), do plano ( $\alpha$ ); outra, (F)(G), de ( $\beta$ ), de imediatas obtenções (Figura 707).

E como as projeções horizontais dessas duas retas devem vir a coincidir com h, ao final do movimento, os círculos de rotação que permitem tal operação são os que têm por centro ou o incentro do triângulo EFG que as três formam, ou um de seus exincentros.

O eixo vertical (e) será definido, então, por um desses quatro pontos. Escolhemos o exincentro e, referente ao vértice E (Figura 707), e utilizamos duas retas auxiliares (A)(V) em ( $\alpha$ ) e (B)(V) em ( $\beta$ ), formadas com os traços de (e) em ( $\alpha$ ) e em ( $\beta$ ) e com o traço vertical (V) de (h), para, por seus traços horizontais  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente, conduzir os traços horizontais  $\alpha_1\pi$  e  $\beta_1\pi$  dos planos, após suas rotações. As outras três soluções não foram desenhadas.

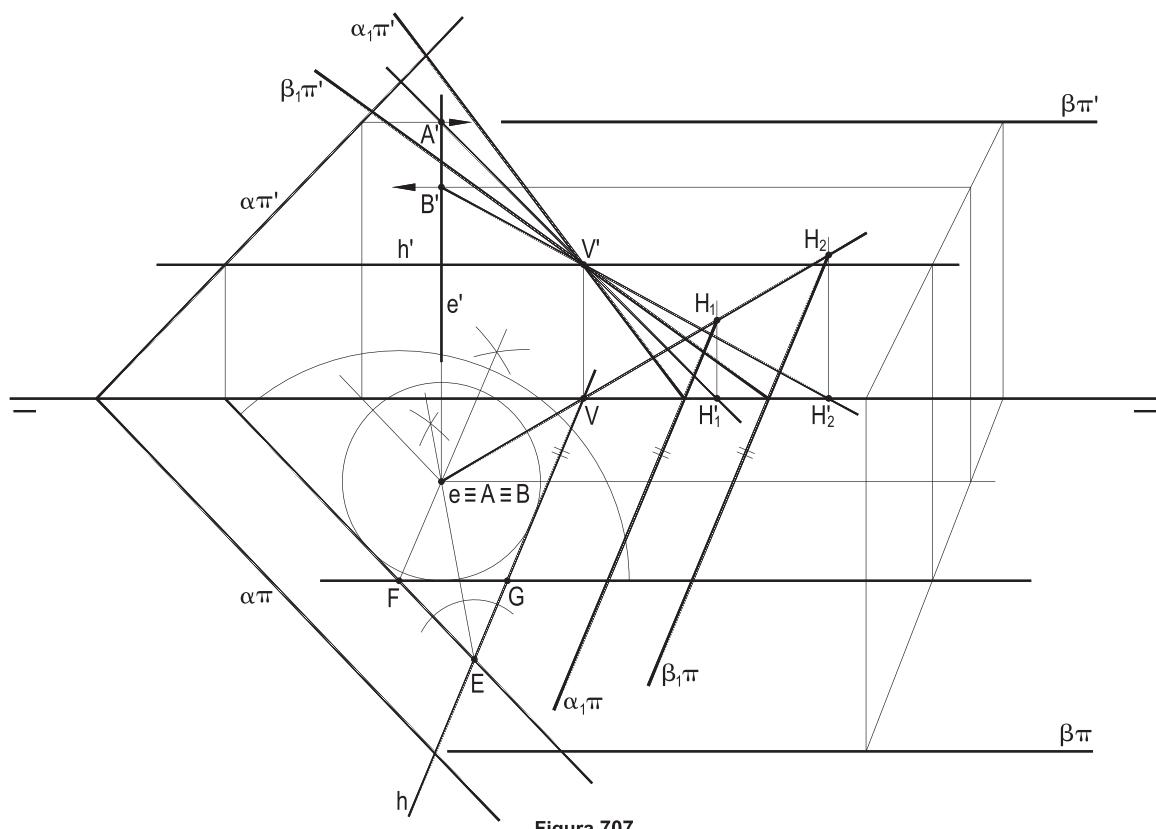


Figura 707

**579 – Dados os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , por seus traços, sendo  $\alpha\pi$  e  $\beta\pi$  paralelos entre si, pede-se girar os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , em torno de um eixo ( $e$ ) a ser determinado, de modo que ambos venham a ter cota nula.**

Análise: Observando os dados, porque os planos dados  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  têm traços horizontais paralelos, sua interseção há de ser uma horizontal ( $h$ ) com essa mesma direção, facilmente construída (Figura 709).

Assim, para que um mesmo eixo permita girar os dois planos até que venham a coincidir com  $(\pi)$ , tal eixo terá, também, que ser paralelo àquelas três horizontais e as rotações, então, se fazendo por tangenciamentos dos dois planos dados a uma superfície cilíndrica de revolução, de eixo ( $e$ ) paralelo a tais retas (Figura 708), objeto deste problema.

Para efetuar as rotações pedidas, convém utilizar uma mudança de  $(\pi')$ , que torne de topo, tanto os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , dados, quanto sua interseção ( $h$ ) e, até mesmo, então, o eixo ( $e$ ), que proporciona levar  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  à coincidência com  $(\pi)$ . E o eixo ( $e$ ), capaz de resolver a questão, há de ser, na nova projeção vertical, equidistante dos novos traços verticais  $\alpha\pi'_1$  e  $\beta\pi'_1$  dos planos dados e da nova linha de terra, já que  $(\pi)$  foi mantido fixo.

O incentro e cada um dos três exincentros do triângulo formado por  $\alpha\pi'_1$ ,  $\beta\pi'_1$  e pela nova linha de terra atendem a tais equidistâncias.

Assim, sendo  $I$  tal incentro (Figura 709), ele é uma primeira solução  $e'_1$  para o eixo pedido, que, retornado ao sistema projetivo original, produz a horizontal ( $e$ ) de mesma cota  $z$  (Figura 709).

Os outros três eixos, paralelos ao apresentado, mas não incluídos na épura da Figura 709, correspondem aos três exincentros do triângulo formado por  $\alpha\pi'_1$ ,  $\beta\pi'_1$  e pela nova linha de terra.

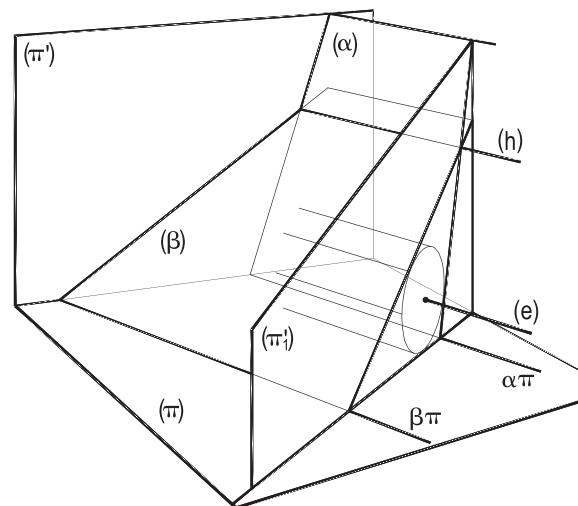


Figura 708

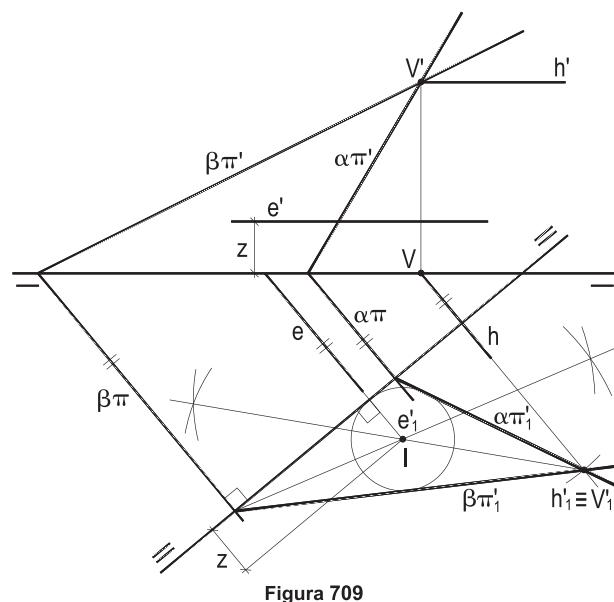


Figura 709

**580 – Dados, por suas projeções, o triângulo (A)(B)(C) e a reta (r), pede-se construir as projeções do triângulo ( $A_1$ )( $B_1$ )( $C_1$ ) do primeiro diedro, obtido com as rotações dos vértices do dado, em torno de (r), até que cada um deles venha a possuir abscissas e cotas iguais.**

Resolução: Sabe-se (número 10.2) que o lugar geométrico dos pontos que têm iguais abscissas e cotas é o plano de topo ( $\alpha$ ), pertencente à origem das abscissas, inclinado de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi$ ), tendo, em épura, seu traço vertical, no primeiro diedro, voltado para a direita (Figura 710).

Assim, tudo se resume em girar os vértices do triângulo (A)(B)(C), em torno de (r), até que eles venham a pertencer a ( $\alpha$ ).

Observe-se que há novas posições ( $A_2$ ), ( $B_2$ ) e ( $C_2$ ), para os vértices de (A)(B)(C), (Figura 710), mas todas fora do primeiro diedro.

**581 – Gire o plano ( $\alpha$ ), em torno da linha de terra, até que ele venha a cortar o bissetor par segundo uma reta paralela ao plano ( $\gamma$ ). ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) são dados por seus traços.**

Resolução: A rotação do plano ( $\alpha$ ) em torno da linha de terra se faz tangenciando a superfície cônica de revolução que tem ( $\pi\pi'$ ) como eixo e vértice no ponto ( $\alpha\pi'\pi$ ).

E, para que, em sua posição final, ele seccione ( $\beta_{24}$ ) segundo uma reta paralela ao plano ( $\gamma$ ), deve conter uma reta ( $\bar{p}$ ) paralela à interseção ( $p$ ) de ( $\gamma$ ) com ( $\beta_{24}$ ).

Uma vista lateral proporciona a tangente do traço ( $\bar{P}$ ) de ( $\bar{p}$ ) à circunferência da rotação que, com o ponto ( $\alpha\pi'\pi$ ), determina o plano ( $\alpha_1$ ), uma das duas soluções do problema, para as posições dadas (Figura 711).

A segunda solução ficou apenas indicada pelo segundo ponto de tangência 2, na vista lateral.

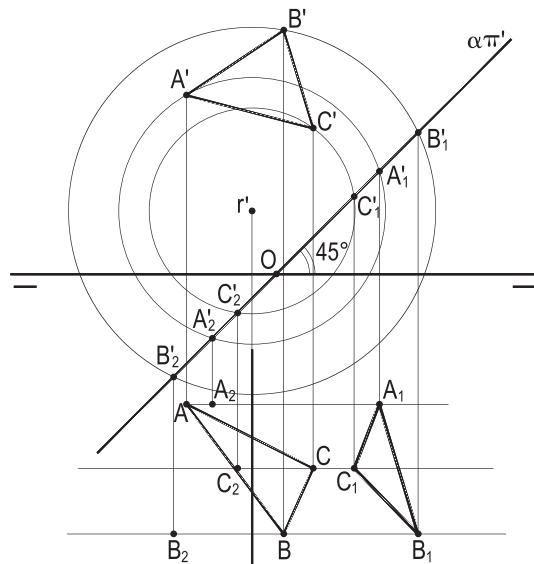


Figura 710

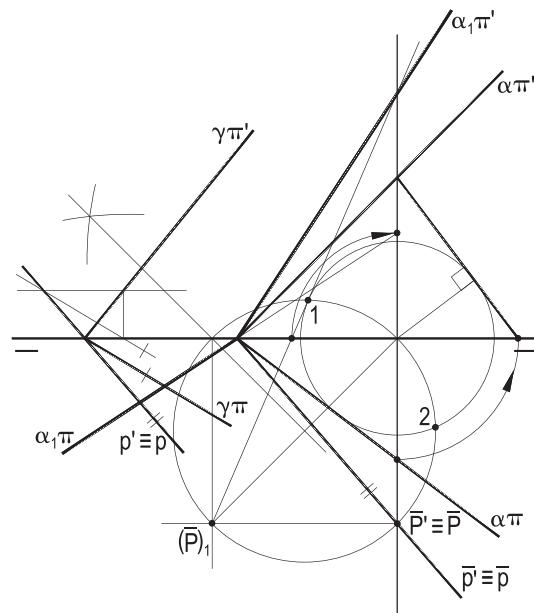


Figura 711

**582 – São dados, por suas projeções, os pontos (A) e (B) e as retas (r) e (s). Pede-se girar os pontos, em torno de cada uma das retas, até que cada um deles venha a apresentar, para a soma de suas coordenadas, um valor igual ao dobro da abscissa de (A).**

Resolução: Sabe-se (número 12) que o lugar geométrico dos pontos que têm soma constante de suas três coordenadas é o plano qualquer ( $\alpha$ ), com traços, em épura, inclinados de  $45^\circ$  com  $(\pi'\pi)$ , voltados, no primeiro diedro, para a esquerda e seu traço ( $J$ ) com  $(\pi'\pi)$  tendo abscissa igual à tal constante, dobro da abscissa de (A).

Assim, basta girar (A) e (B), em torno de (r) e de (s), até que venham a pertencer a ( $\alpha$ ), produzindo as oito soluções (Figura 712), numeradas, sequencialmente de (1) a (8), as quatro primeiras referentes ao ponto (A) e as quatro últimas ao ponto (B).

**583 – Gire o plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, em torno do eixo vertical (e) que contenha seu traço com a linha de terra, até que, em sua nova posição, ( $\alpha$ ) venha a ter retas fronto-horizontais.**

Resolução: Pela posição tão particular do eixo (e), nas duas rotações possíveis, o traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano dado virá a ocupar a posição da linha de terra, o que garante que ( $\alpha$ ), em sua nova posição, passando a ser um plano  $(\pi'\pi)-(M)$ , contenha fronto-horizontais.

Assim, gira-se um ponto (H) arbitrado, de  $\alpha\pi$ , até que ele venha a assumir a posição ( $H_1$ ), na linha de terra e, com isso, levando  $\alpha\pi$  a coincidir com  $(\pi'\pi)$  e, portanto, com  $\alpha_1\pi'$ , girando, então, um ponto bem escolhido (A), de ( $\alpha$ ), com amplitude e sentido iguais aos utilizados para (H), obtendo-se ( $A_1$ ) (Figura 713), que define, com  $(\pi'\pi)$ , a nova posição de ( $\alpha$ ). Há uma segunda solução indicada pelo ponto 2, numa rotação de (H) em sentido oposto.

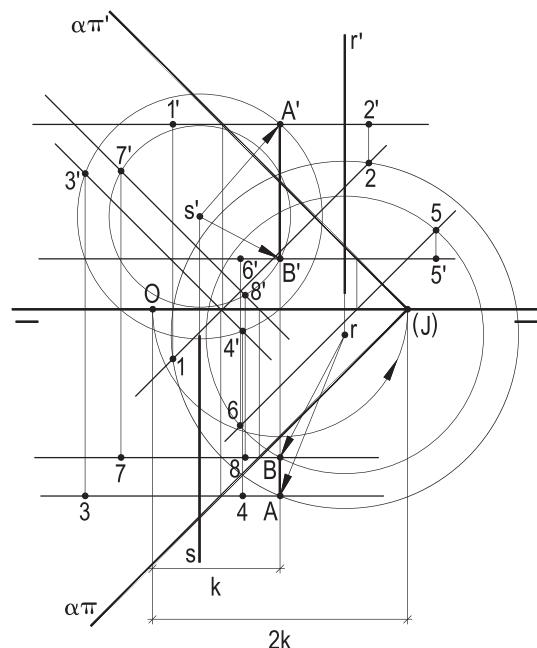


Figura 712

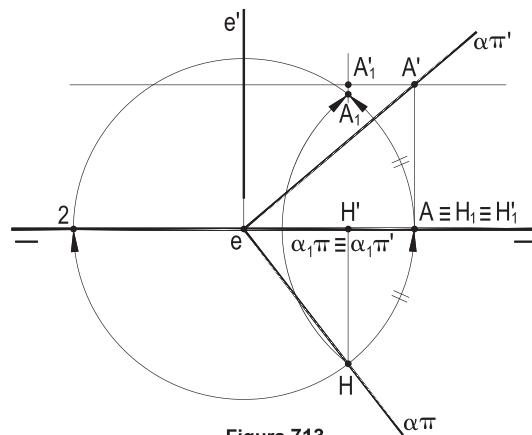


Figura 713

**584 – Determine as projeções do eixo de topo (e), de abscissa nula e cota positiva, que permita a rotação do plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, até que ele venha a conter a linha de terra.**

Resolução: Sendo de topo o eixo (e), as frontais de ( $\alpha$ ) giram mantendo-se frontais.

Assim, para que o traço vertical  $\alpha\pi'$  possa vir a coincidir com ( $\pi'\pi$ ), a projeção vertical  $e'$  do eixo pedido há de pertencer a uma das bissetrizes dos ângulos que  $\alpha\pi'$  forma com ( $\pi'\pi$ ) havendo, para os dados, apenas uma solução (Figura 714).

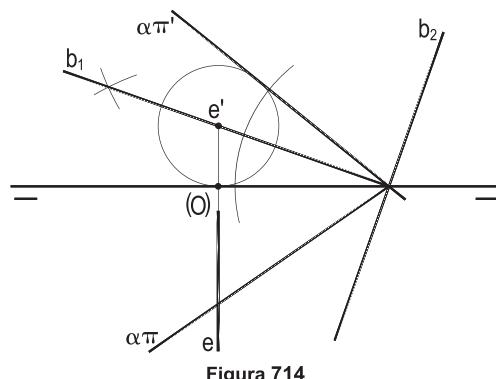


Figura 714

**585 – Dadas as projeções das retas (r), (s) e (t), mas não a linha de terra, determine as projeções do eixo (e) em torno do qual seja possível girar (r) e (s) até que ambas possam coincidir com a frontal (t).**

Resolução: Se (t) é frontal, (r) e (s) também o são, por pertencerem as três a um plano projetante em relação a ( $\pi$ ), o que obriga (e) ser de topo. E, para permitir que coincidam as três projeções verticais  $r'$ ,  $s'$  e  $t'$ , a projeção vertical  $e'$  tem que ser o incentro, ou um dos excentros do triângulo formado por  $r'$ ,  $s'$  e  $t'$ . Apenas o incentro foi apresentado na épura da Figura 715.

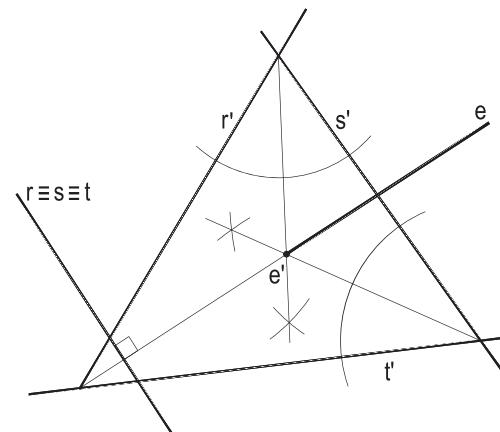


Figura 715

**586 – Determine a posição do eixo vertical (e) que permita a rotação do plano ( $\alpha$ ) até que ele venha a conter a reta (r). Efetue a rotação. São dados  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$ ,  $r'$  e  $r$ .**

Resolução: O eixo (e) há de pertencer ao traço (J) de (r) com ( $\alpha$ ). E, para que ( $\alpha$ ) venha a conter (r), seu traço horizontal  $\alpha\pi$  deverá, na posição final  $\alpha_1\pi$ , passar pelo traço horizontal (H) de (r).

Para os dados, há duas soluções, correspondentes às duas tangentes de H ao círculo da rotação, só uma tendo sido completada na Figura 716.

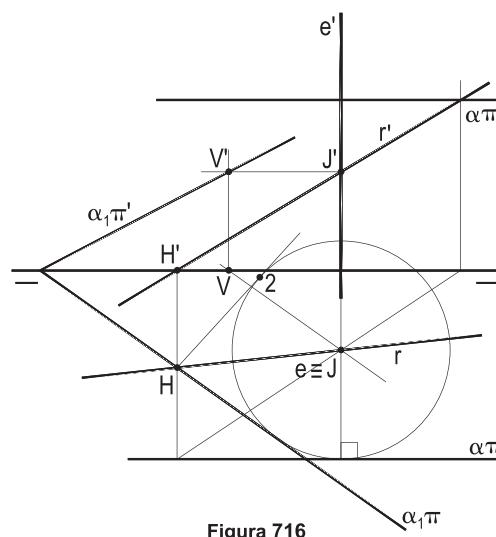


Figura 716

**587 – Gire o plano ( $\alpha$ ), formado pela linha de terra e pelo ponto (M), em torno do eixo (e), até que ele venha a ser projetante.**

São dadas as projeções de (M) e de (e).

Resolução: Sendo (e) de topo, o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano dado girará tangenciando a circunferência de centro  $e'$  e, por duas posições (Figura 717), ficará perpendicular a  $(\pi'\pi)$ , atendendo à condição imposta.

As rotações se completam, girando o ponto (M) em amplitudes e sentidos iguais ( $90^\circ$ ) aos efetuados para o traço  $\alpha\pi'$ , proporcionando as duas soluções ( $\alpha_1$ ) e ( $\alpha_2$ ).

**588 – Gire o ponto (A), em torno do eixo (e) até que ele venha a pertencer ao plano das horizontais (a) e (b), conhecendo as projeções de (A), (e), (a) e (b).**

Resolução: Por manter constante seu afastamento durante tal rotação, (A) deverá pertencer à frontal (1)(2) de plano das horizontais paralelas (a) e (b) que tenha esse mesmo afastamento (Figura 718).

Há uma segunda solução, inacessível no espaço disponível.

**589 – Dadas as retas (r) e (e), por suas projeções, pede-se girar, em torno de (e), o traço de (r) com ( $\beta_{24}$ ), até que ele venha a pertencer a ( $\beta_{13}$ ).**

Resolução: Durante a rotação, o traço (J) de (r) com ( $\beta_{24}$ ) manterá constante seu afastamento, por ser o eixo (e) de topo.

Assim, ele pertencerá a ( $\beta_{13}$ ) quando sua cota igualar tal valor.

Para as posições dadas (Figura 719), o problema oferece duas soluções, tendo sido a segunda apenas indicada pelo ponto 2.

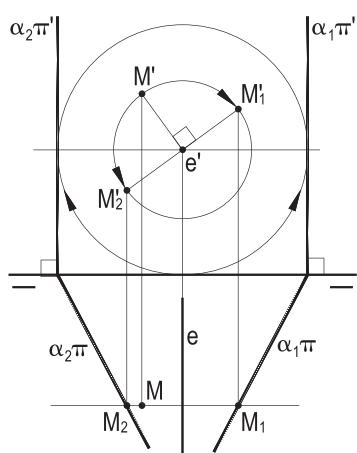


Figura 717

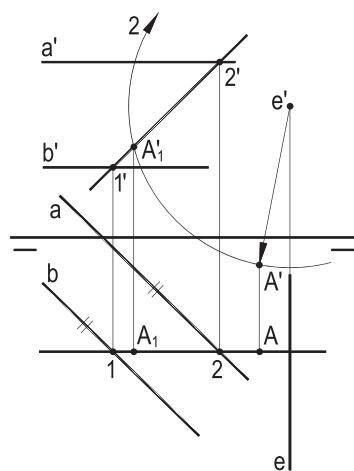


Figura 718

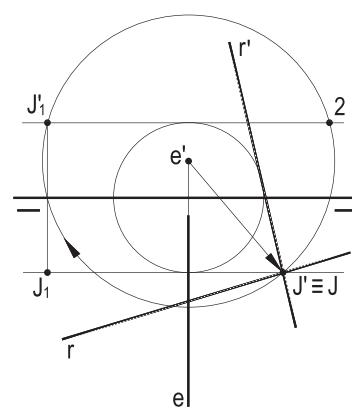


Figura 719

**590 – Dadas as projeções de quatro retas frontais paralelas (a), (b), (r) e (e), pede-se girar (r), em torno de (e), até que ela venha a pertencer ao plano formado por (a) e (b), mantidas fixas durante a rotação.**

Resolução: Com uma mudança de ( $\pi$ ), que torne verticais as quatro retas, obtém-se o traço  $\alpha_1\pi$  do plano, agora vertical, formado pelas retas fixas e, então, o giro de  $r_1$  em torno de  $e_1$  (Figura 720) leva (r) a pertencer a esse plano, havendo, para os dados, duas soluções, tendo sido a primeira ( $\bar{r}$ ) completada e a segunda apenas indicada pelo ponto 2 (Figura 720).

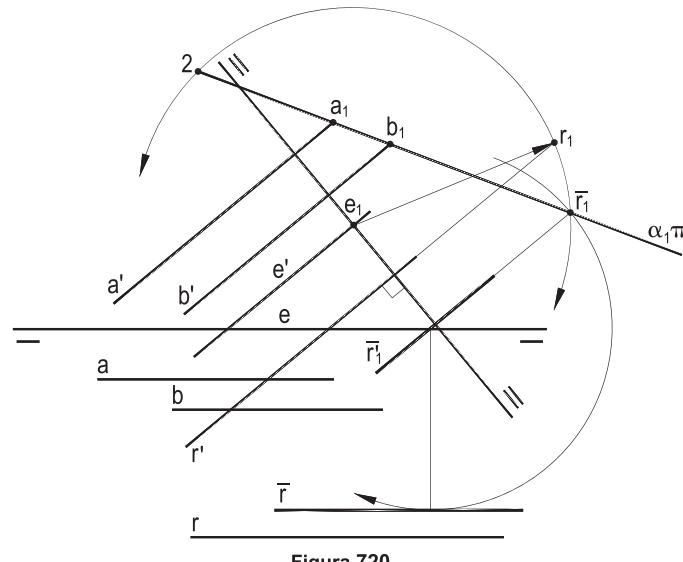


Figura 720

**591 – Gire o ponto (A), em torno do eixo (e), até que ele venha a equidistar dos traços do plano ( $\alpha$ ), mantido fixo.**

São dados as projeções de (A) e de (e) e os traços de ( $\alpha$ ).

Resolução: Sendo o eixo dado de topo, o ponto (A), em seu movimento, manterá constante seu afastamento, deslocando-se, pois, no plano frontal ( $\theta$ ).

E para poder equidistar dos traços de ( $\alpha$ ), tem que vir a pertencer ao plano ( $\bar{\gamma}$ ), perpendicular a ( $\alpha$ ) e equidistante de seus traços.

Daí, as duas soluções ( $\bar{A}_1$ ) e ( $\bar{A}_2$ ) para o problema (Figura 721), devidamente alçadas.

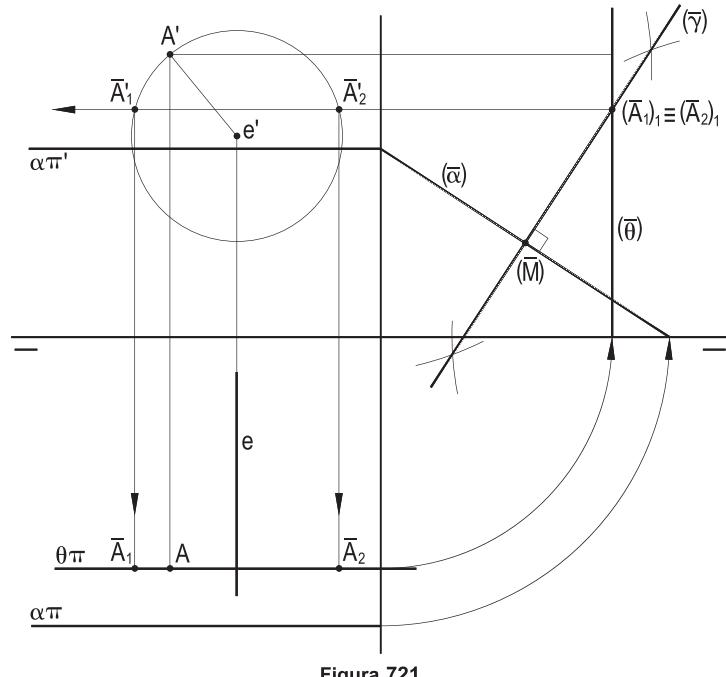


Figura 721

**592 – Gire a reta vertical (a), em torno da vertical (e), até que ela venha a equidistar dos planos verticais ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ). Dados as projeções das retas e os traços dos planos.**

Resolução: Por serem verticais as duas retas, (a), ao girar em torno de (e), se situam na superfície cilíndrica de rotação de eixo (e) e raio igual à distância entre as duas retas, mantendo-se sempre vertical.

E, para vir a equidistar dos planos dados ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), a reta (a) deverá pertencer a um dos planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados pelos planos dados, verticais, como eles, o que simplifica a construção das quatro soluções ( $a_1$ ), ( $a_2$ ), ( $a_3$ ) e ( $a_4$ ) (Figura 722).

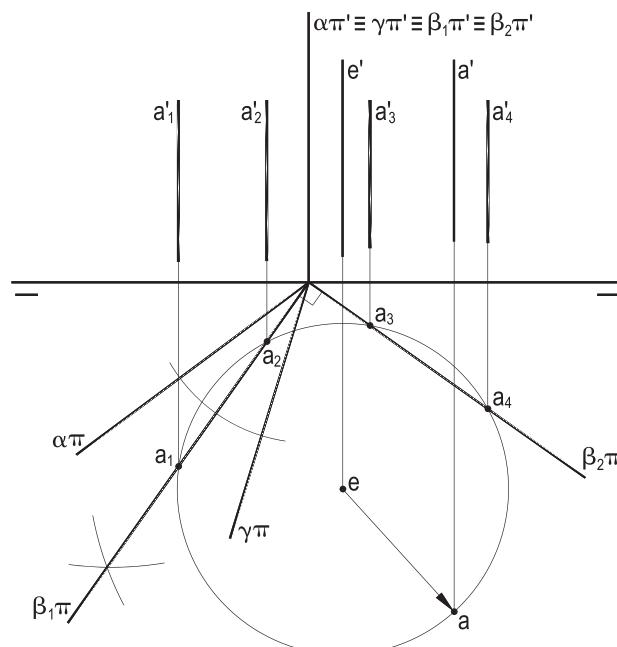


Figura 722

**593 – Desenhar as projeções do segmento ( $\bar{A}_1$ ) $(\bar{A}_2)$ , situado no plano horizontal de projeção, sabendo que seus extremos provêm de rotações do ponto (A), em torno do eixo horizontal (e), dados (A) e (e) por suas projeções.**

Resolução: Sendo horizontal o eixo (e), convém lançar mão de uma mudança de ( $\pi'$ ), que o torne de topo, passando-se, então, a operar nesse segundo sistema projetivo.

Nessas condições, é simples girar o ponto (A), até que ele venha a ter cota nula, o que proporciona a solução, visto que ( $\pi$ ) permanece fixo durante o movimento.

Observe-se que as denominações dos extremos ( $\bar{A}_1$ ) e ( $\bar{A}_2$ ) são permutáveis (Figura 723).

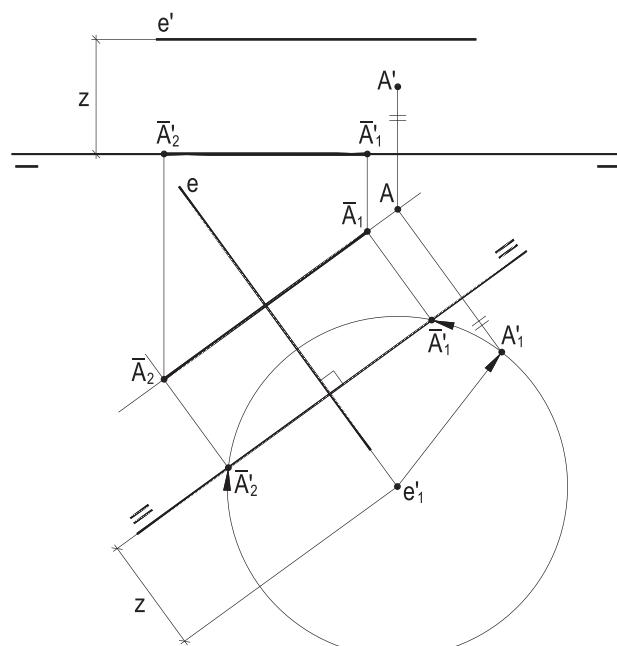


Figura 723

# CAPÍTULO X

## MÉTODOS DESCRIPTIVOS REBATIMENTOS

O mais utilizado dos três métodos, por sua pronta aplicação na obtenção e na utilização das verdadeiras grandezas das figuras planas, o método dos rebatimentos, objeto do presente capítulo, vai representado com problemas iniciais simples, dedicados à própria natureza de suas operações, progredindo para construções geométricas mais complexas e interessantes.

**594 – Desenhar as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D) pertencente ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo que (A)(B) pertence a ( $\pi''$ ), (C) a ( $\pi'$ ) e (D) a ( $\pi$ ), com abscissa inferior à de (A)(B).**

Resolução: Rebati-  
do o plano ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ),  
pela utilização da reta de  
perfil ( $V(H)$ ) de abscissa  
nula, obtém-se a reta su-  
porte do lado (A)(B) do  
quadrado, em seu rebati-  
mento ( $V_1(H)_1$ ).

Com auxílio de  
uma homotetia, a partir  
do polo ( $H_1$ ), fica simples  
construir, em V.G., o qua-  
drado ( $A_1(B_1(C_1(D_1$ )),  
que, alçado, soluciona a  
questão (Figura 724), com  
o lado (C)(D) também de  
perfil, o vértice (B) obtido  
com paralelas.

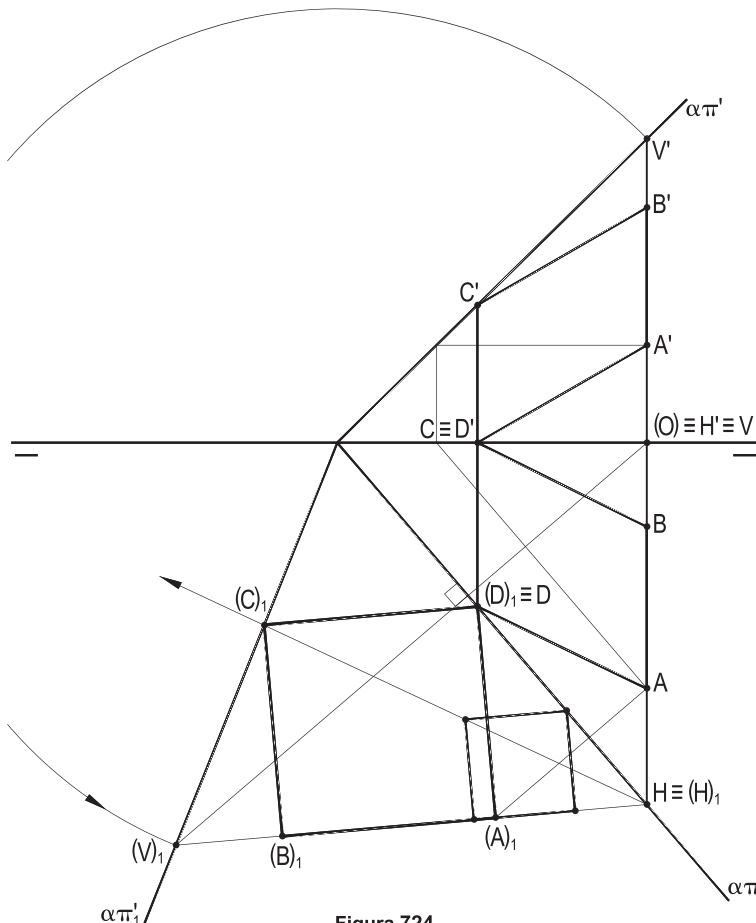
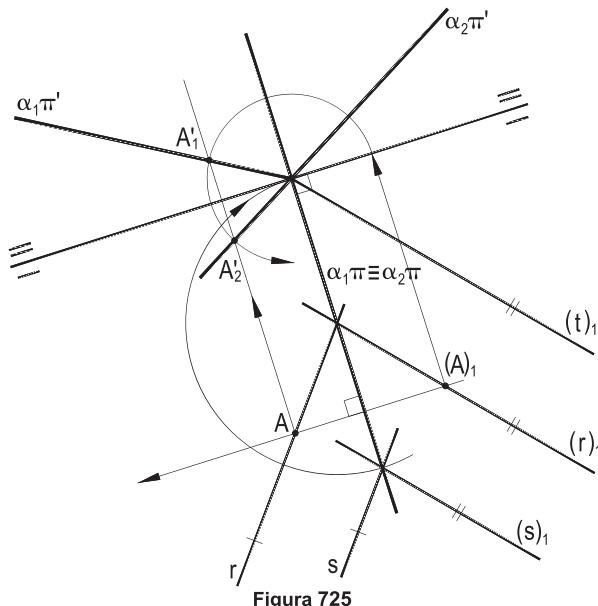


Figura 724

**595 – As retas paralelas ( $r$ ), ( $s$ ) e ( $t$ ), dispostas a intervalos iguais, pertencem ao plano ( $\alpha$ ), de topo. Sabendo que ( $r$ ) se situa entre ( $s$ ) e ( $t$ ), que ( $t$ ) concorre com ( $\pi'\pi$ ) e sendo dadas as projeções horizontais  $r$  e  $s$  das retas ( $r$ ) e ( $s$ ) e seus rebatimentos ( $r$ )<sub>1</sub> e ( $s$ )<sub>1</sub> sobre ( $\pi$ ), pede-se determinar a posição da linha de terra e construir os traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: É claro que a charneira  $\alpha\pi$  fica determinada pelos dois pontos de cruzamento de  $r$  com ( $r$ )<sub>1</sub> e de  $s$  com ( $s$ )<sub>1</sub>. E que o terceiro ponto de cruzamento referente à reta ( $t$ ), construído por simetria do de ( $s$ ) em relação ao de ( $r$ ), há de ser o ponto comum a  $\alpha\pi$  e a  $\alpha\pi'$ , visto que ( $t$ ) deve concorrer com ( $\pi'\pi$ ).

Assim, por esse terceiro ponto passa a linha de terra, obtendo-se  $\alpha_1\pi'$  a partir do alçamento de um ponto ( $A$ )<sub>1</sub> qualquer de uma das retas ( $r$ )<sub>1</sub> (Figura 725).

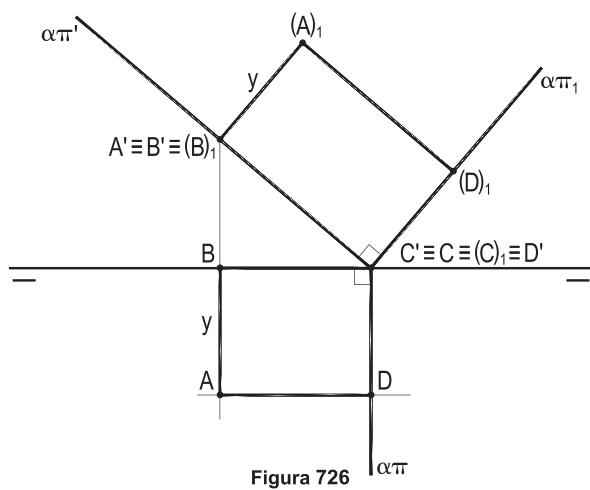


Observe-se que há duas orientações para ( $\pi'\pi$ ) e que uma outra solução,  $\alpha_2\pi'$ , indicada na Figura 725, corresponde ao segundo corte  $A'_2$  do arco do alçamento.

**596 – O retângulo ( $A$ )( $B$ )( $C$ )( $D$ ), do plano de topo ( $\alpha$ ), tem seus lados ( $B$ )( $C$ ) e ( $C$ )( $D$ ) respectivamente em ( $\pi'$ ) e em ( $\pi$ ). Sendo dadas as duas projeções do vértice ( $A$ ) e seu rebatimento ( $A$ )<sub>1</sub> sobre ( $\pi'$ ), pede-se determinar a posição da linha de terra, assim como os traços de ( $\alpha$ ) e as projeções de ( $A$ )( $B$ )( $C$ )( $D$ ), deixando ( $A$ ) no primeiro diedro.**

Resolução: O afastamento  $y$  de ( $A$ ), medido por ( $A$ )<sub>1</sub> $A'$ , proporciona determinar a posição de  $\pi'\pi$ , com uma só possível ordenação para que ( $A$ ) fique no primeiro diedro.

A V.G. ( $A$ )<sub>1</sub>( $B$ )<sub>1</sub>( $C$ )<sub>1</sub>( $D$ )<sub>1</sub> é imediata e a frontal ( $A$ )( $D$ ) serve para completar a projeção horizontal do retângulo (Figura 726).



**597** –  $(r)_1$  é o rebatimento da reta  $(r)$ , paralela a  $(\beta_{24})$  e pertencente ao plano vertical  $(\alpha)$ , sobre  $(\pi')$ , no sentido que dá a esse rebatimento movimento superior a  $90^\circ$ .

Dados  $\pi'\pi$ ,  $(r)_1$  e  $\alpha\pi'$ , pede-se determinar o traço horizontal  $\alpha\pi$ , de  $(\alpha)$ , e as projeções da reta  $(r)$ .

Resolução: Aproveitando que o traço horizontal  $(H)$  de  $(r)$  deve ter afastamento igual à cota do traço vertical de  $(r)$  (*Geometria Descritiva*, número 29), seu alçamento traz as projeções de  $(r)$  (Figura 727) e, então, o traço  $\alpha\pi$ .

O segundo ponto de corte 2 resta inútil, para atender ao sentido do rebatimento, como imposto pelo enunciado.

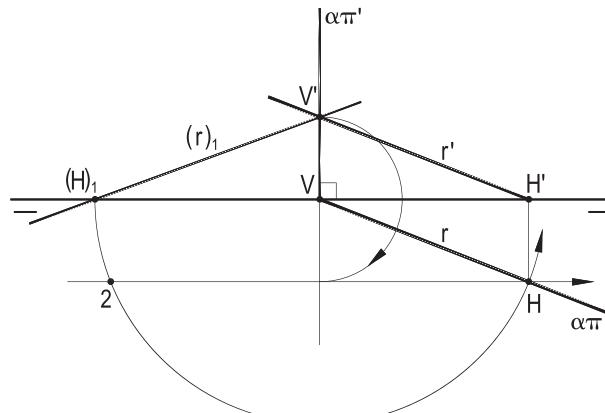


Figura 727

**598** – Desenhar as projeções do pentágono convexo regular  $(A)(B)(C)(D)(E)$  pertencente ao plano  $(\alpha)$ , sabendo que o lado  $(C)(D)$  tem afastamento nulo, sendo  $(B)$  o vértice de menor cota.

São dados o traço vertical  $\alpha\pi'$  e as projeções de  $(A)$ .

Resolução: Rebatido  $(\alpha)$  sobre  $(\pi')$  e arbitrado um círculo que passe por  $(A)_1$ , determina-se o valor  $\ell$  do lado do pentágono convexo regular  $(A)_11234$  nele inscrito (*Geometria Plana*, Capítulo XX, número 67) com a posição informada (Figura 728) e, por homotetia de polo  $(A)_1$ , constrói-se a V.G. do pentágono pedido, com seu lado  $(C)_1(D)_1$  sobre  $\alpha\pi'$ , como imposto.

Seu alçamento resolve o problema (Figura 728).

Observe-se que os vértices  $(B)$  e  $(E)$  pertencem a uma reta vertical, por ser a diagonal  $(B)(E)$  paralela ao lado  $(C)(D)$ .

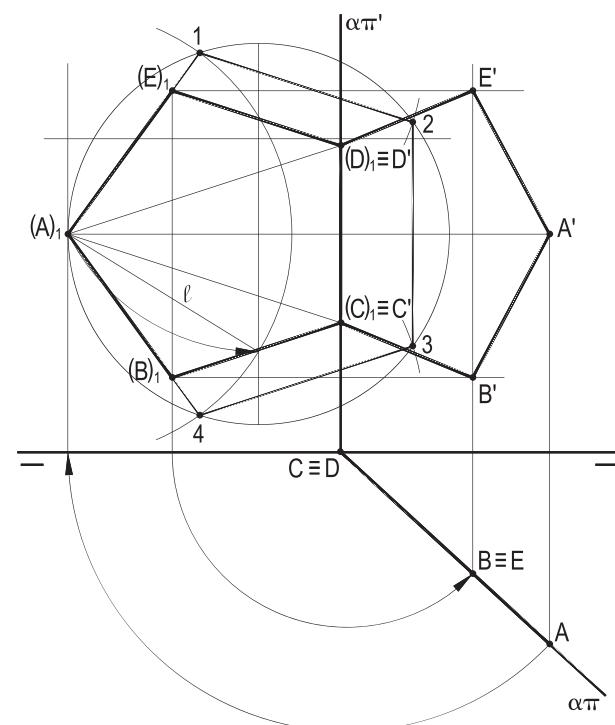


Figura 728

**599** – O retângulo  $(A)(B)(C)(D)$  pertence a um plano vertical, tendo o vértice  $(B)$  em  $(\beta_{13})$ , com a maior cota possível. Sendo dadas as projeções da diagonal  $(A)(C)$ , pede-se desenhar as projeções do retângulo.

Resolução: Com a pronta obtenção dos traços de  $(\alpha)$  e com a construção de sua interseção  $(i)$  com  $(\beta_{13})$ , rebate-se  $(\alpha)$  sobre  $(\pi')$ , para a construção, em V.G., do retângulo pedido, inscrito no círculo de diâmetro  $(A)_1(C)_1$  e para a localização do vértice  $(B)_1$ , sobre  $(i)_1$ , com a maior cota entre as duas posições possíveis (Figura 729).

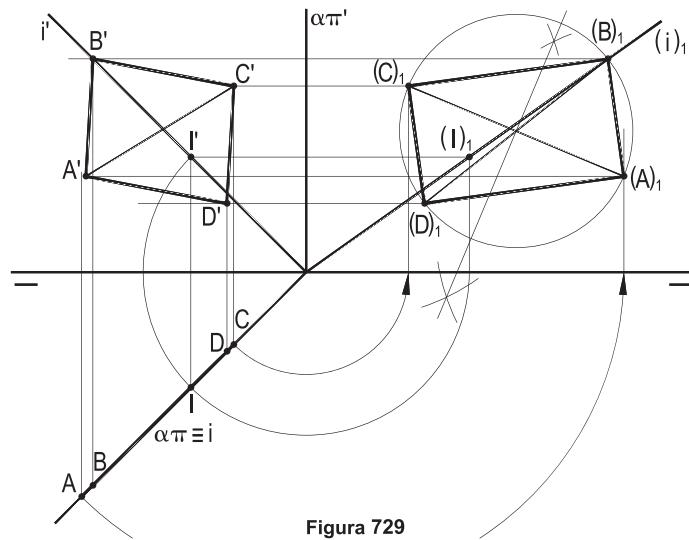


Figura 729

**600** – São dados os rebatimentos  $(A)_1$  e  $(B)_1$  e a projeção vertical  $A'$  do vértice  $(A)$  do hexágono regular  $(A)(B)(C)(D)(E)(F)$ , pertencente ao plano vertical  $(\alpha)$ , cujo traço vertical  $\alpha\pi'$  é, também, dado.

Pede-se construir a V.G. e a projeção vertical do hexágono, sabendo que ele não é atingido por  $(\pi')$ .

Resolução: A construção da V.G. do hexágono é imediata pela obtenção do centro  $(O)_1$  do círculo que o circunscreve.

E, pela utilização da afinidade ortogonal existente entre o rebatimento e a projeção vertical (*Geometria Descritiva*, número 114), a partir de  $(A)_1(B)_1$  e de  $A'$  obtém-se  $B'$  e todos os demais vértices de  $A'B'C'D'E'F'$  (Figura 730), com uso de paralelas.

Em nada importou a inexistência da linha de terra, nem das projeções horizontais.

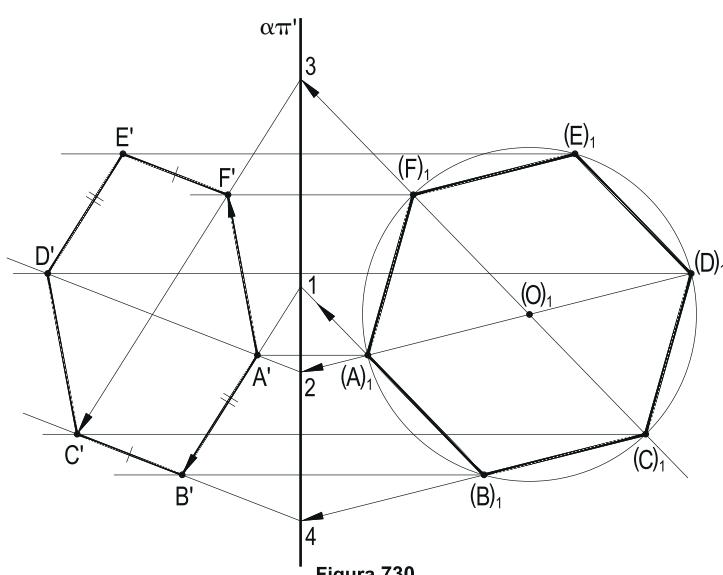


Figura 730

**601 – Um quadrado se inscreve num círculo tangente aos dois traços paralelos do plano ( $\alpha$ ), do qual são dados os traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  e o rebatimento  $\alpha\pi'_1$ , do vertical, sobre ( $\pi$ ).**

Arbitrando as abscissas, pede-se determinar a posição da linha de terra e as projeções de um desses quadrados, que tenha lados inclinados de  $30^\circ$  em relação aos traços de ( $\alpha$ ). Escolha apenas uma das posições possíveis para situar a linha de terra.

Análise: Para obter a posição da linha de terra, admitamos dados os dois traços de ( $\alpha$ ) e obtenhamos o rebatimento  $\alpha\pi'_1$  do vertical sobre ( $\pi'$ ), utilizando o triângulo de rebatimento  $HV\bar{V}$  de um ponto ( $V$ ) qualquer desse traço.

Observe-se que  $\bar{V}$  pertence a uma reta traçada por  $V'$  e inclinada de  $45^\circ$  em relação aos traços do plano e também ao arco da circunferência de centro  $H$  e raio  $H(V)_1$  (Figura 731).

Resolução: Arbitrando uma linha de chamada e marcados  $V'$ ,  $V \equiv H'$ ,  $H$  e  $(V)_1$ , é com a construção daqueles dois elementos que se obtém  $\bar{V}$ , um ponto da linha de terra pedida (Figura 732), com dupla orientação. Note-se que há um segundo  $\bar{\bar{V}}$ , numa outra solução, não completada em épura.

A construção, em V.G., de um quadrado  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$ , inscrito num círculo tangente a  $\alpha\pi$  e a  $\alpha\pi'_1$ , é bem simples, pela utilização de uma reta  $(t)_1$ , inclinada de  $30^\circ$  em relação a  $\alpha\pi$  e, pelo centro  $(O)_1$  do quadrado, da diagonal  $(A)_1(C)_1$  a  $45^\circ$  de  $(t)_1$  (Figura 732), assim como seu alçamento, pela utilização das retas suportes de dois lados paralelos do quadrado.

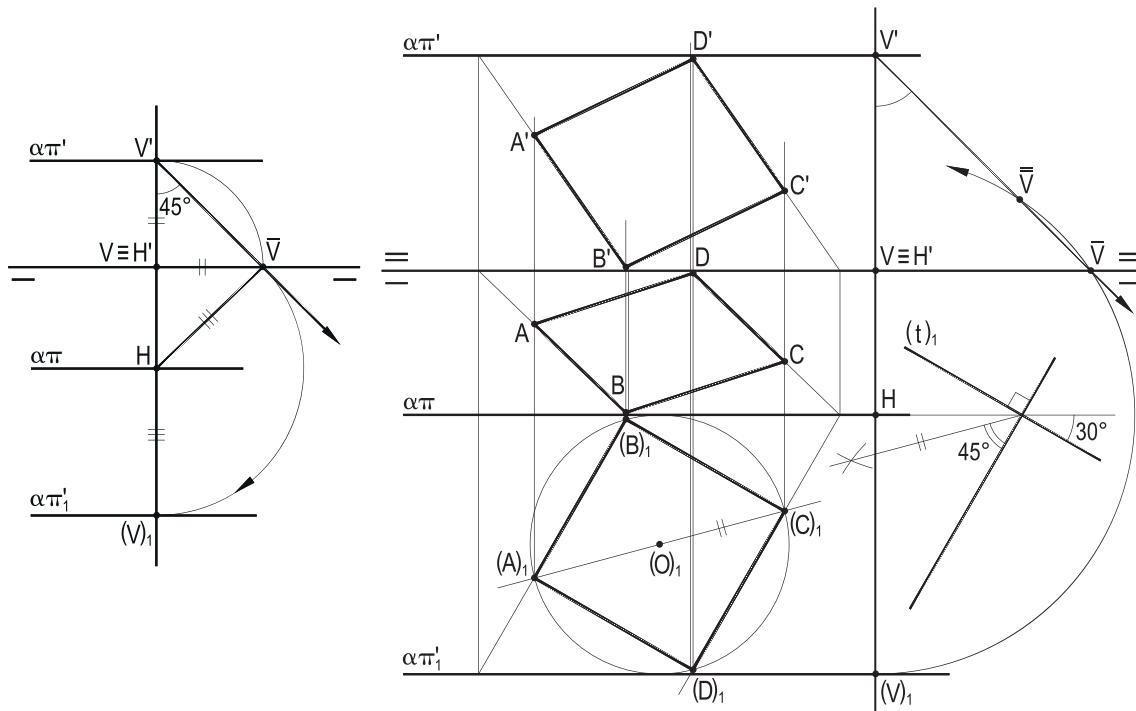


Figura 731

Figura 732

**602 – De um plano ( $\alpha$ ), paralelo a ( $\pi'\pi$ ), são dados o traço vertical  $\alpha\pi'$  e seu rebatimento  $\alpha\pi'_1$  sobre ( $\pi$ ). Além disso, são dadas a linha de terra e as projeções verticais dos pontos (B) e (C) de ( $\alpha$ ).**

**Pede-se determinar a posição do traço horizontal de ( $\alpha$ ) e as projeções dos triângulos isósceles (J)(B)(C) e (L)(B)(C), de ( $\alpha$ ), ambos com base (B)(C), sabendo que (J) pertence a ( $\pi'$ ) e (L) a ( $\pi$ ).**

**Resolução:** A obtenção de  $\alpha\pi$  é uma simples variação do problema anterior, pois, aproveitando o traço vertical (V) da reta (B)(C) e marcando  $\bar{V}$ , a mediatrix m do segmento  $\bar{V}(V)_1$  (Figura 733) proporciona o traço H, ponto de  $\alpha\pi$ , visto que  $H\bar{V}$  resta igual a  $H(V)_1$ .

A própria reta (B)(C) utilizada serve para marcar os pontos (B) e (C) em ( $\alpha$ ) e levá-los ao rebatimento do plano, para, com a mediatrix de  $(B)_1(C)_1$ , obter os pontos  $(J)_1$  e  $(L)_1$ , vértices dos triângulos isósceles pedidos (Figura 733), de alçamentos imediatos.

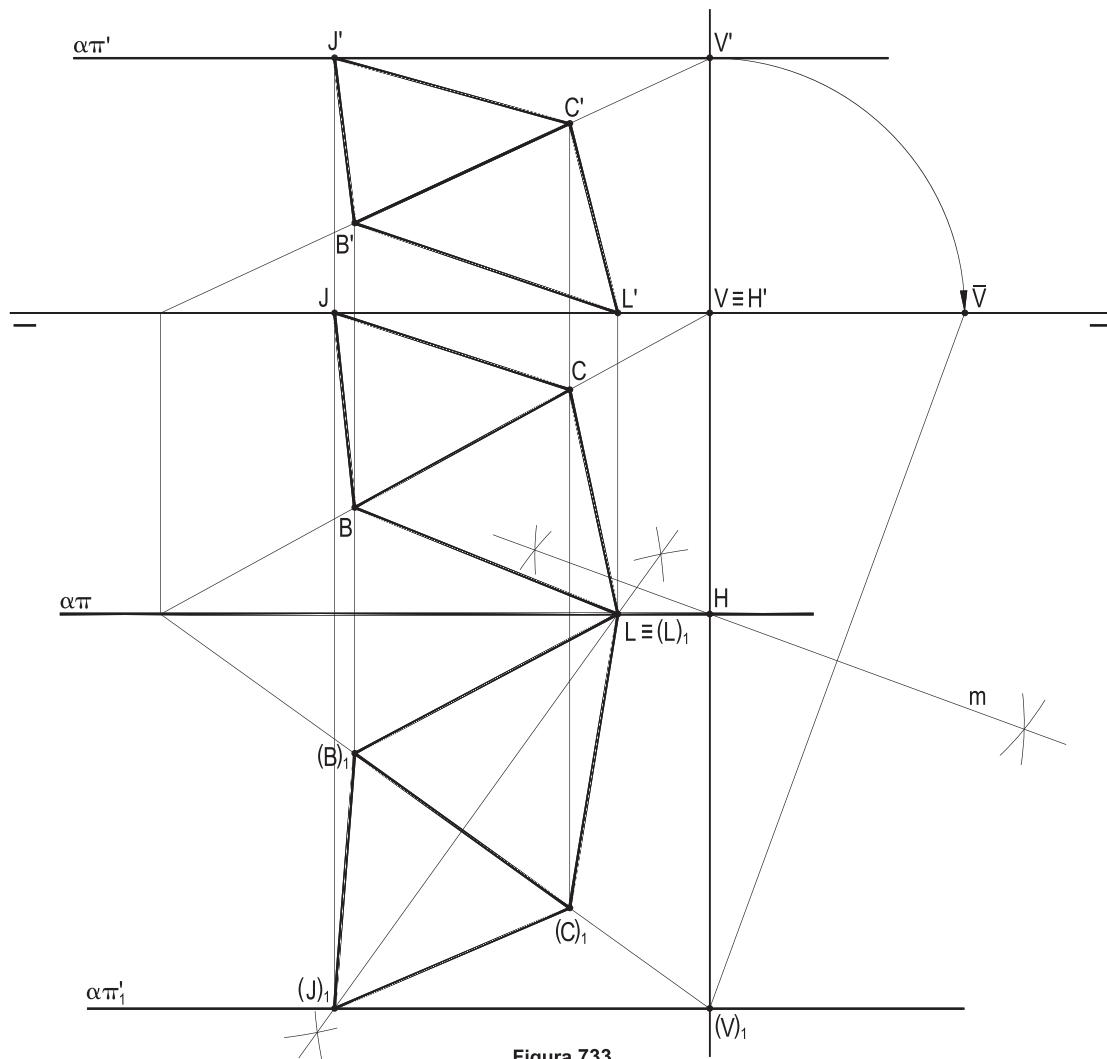


Figura 733

**603 – Do plano  $(\pi'\pi)-(M)$  são dados a projeção vertical  $M'$  e o rebatimento  $(M)_1$ , sobre  $(\pi)$ , do ponto  $(M)$  que o define. Dada, também, a linha de terra. Sabendo que o retângulo  $(A)(B)(C)(D)$ , desse plano, tem o vértice  $(C)$  na linha de terra e que são dadas as projeções verticais dos vértices  $(A)$  e  $(B)$ , pede-se determinar a projeção horizontal do ponto  $(M)$  e construir as projeções do retângulo.**

Análise: Observando-se (Figura 734) a construção do rebatimento do plano  $(\pi'\pi)-(M)$  sobre  $(\pi)$ , pela utilização do triângulo de rebatimento  $JML$ , fica clara a obtenção do ponto  $L$ , de corte na linha de chamada por  $\bar{M}$  com o arco de centro  $J$  e raio  $J(M)_1$ , que proporciona a determinação da projeção horizontal  $M$  (Figura 734).

Resolução: Determinada a projeção horizontal  $M$ , com a construção acima detalhada, aproveita-se a direção  $A'B'$  da projeção vertical dada, para, utilizando uma reta  $(r)$ , por  $(M)$ , de mesma direção, obter  $(A)_1(B)_1$ , no rebatimento sobre  $(\pi)$  e, então, completar o retângulo pedido (Figura 735).

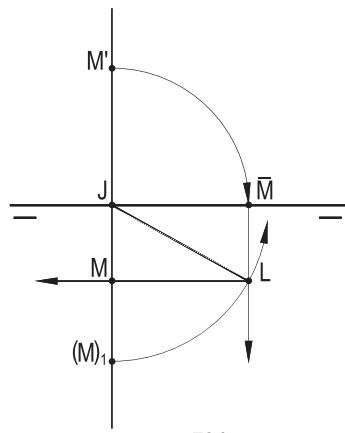


Figura 734

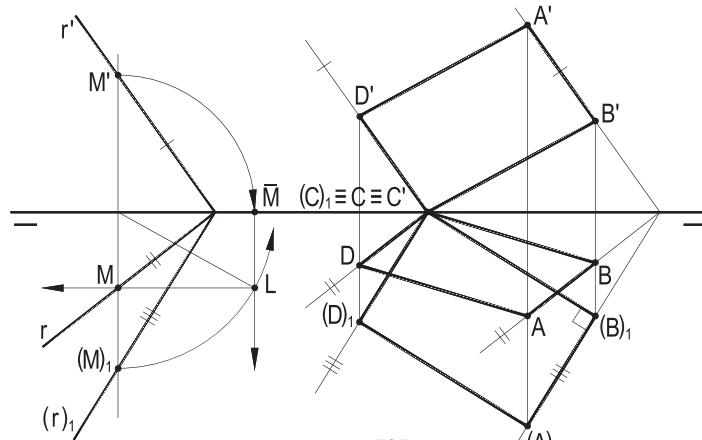


Figura 735

**604 – Construir as projeções do triângulo equilátero  $(A)(B)(C)$ , do primeiro diedro, pertencente ao plano  $(\pi'\pi)-(M)$ , dadas as projeções  $M'$ ,  $M$ ,  $A'$  e  $B'$ .**

Resolução: Rebatido o plano sobre  $(\pi)$ , é imediata a construção, em V.G., do triângulo equilátero, por ter seu lado  $(A)(B)$  na linha de terra, conforme os dados.

Seu alçamento se faz utilizando uma reta qualquer pertencente a  $(M)$  e a fronto-horizontal por  $(C)$ , ambas do plano (Figura 736).

Há apenas uma solução, pela restrição da pertinência do triângulo ao primeiro diedro.

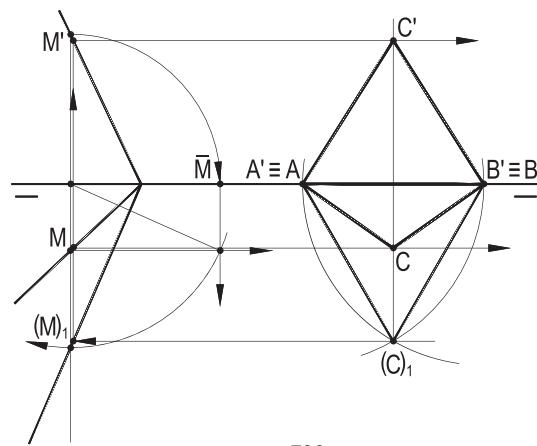


Figura 736

**605 – Desenhar as projeções do losango (A)(B)(C)(D), sabendo que seus lados (A)(B) e (C)(D) pertencem às fronto-horizontais ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas por suas projeções, que seu plano contém a linha de terra e que seu ângulo interno (A) mede  $60^\circ$ .**

**Não é dada a linha de terra.**

Resolução: Arbitrando um ponto ( $M$ ) em ( $r$ ) e outro ( $N$ ) em ( $s$ ), o cruzamento das projeções  $M'N'$  e  $MN$  fornece um ponto ( $1$ ) da linha de terra e o rebatimento do plano das retas sobre ( $\pi$ ) proporciona a construção da V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$  do losango, em verdade, um duplo triângulo equilátero e, pelo seu alcamento, as projeções de (A)(B)(C)(D) (Figura 737).

Observe-se que não se pode orientar a linha de terra, nem precisar a abscissa do primeiro vértice (A), além de que o losango poderia ter sido construído para a esquerda desse vértice.

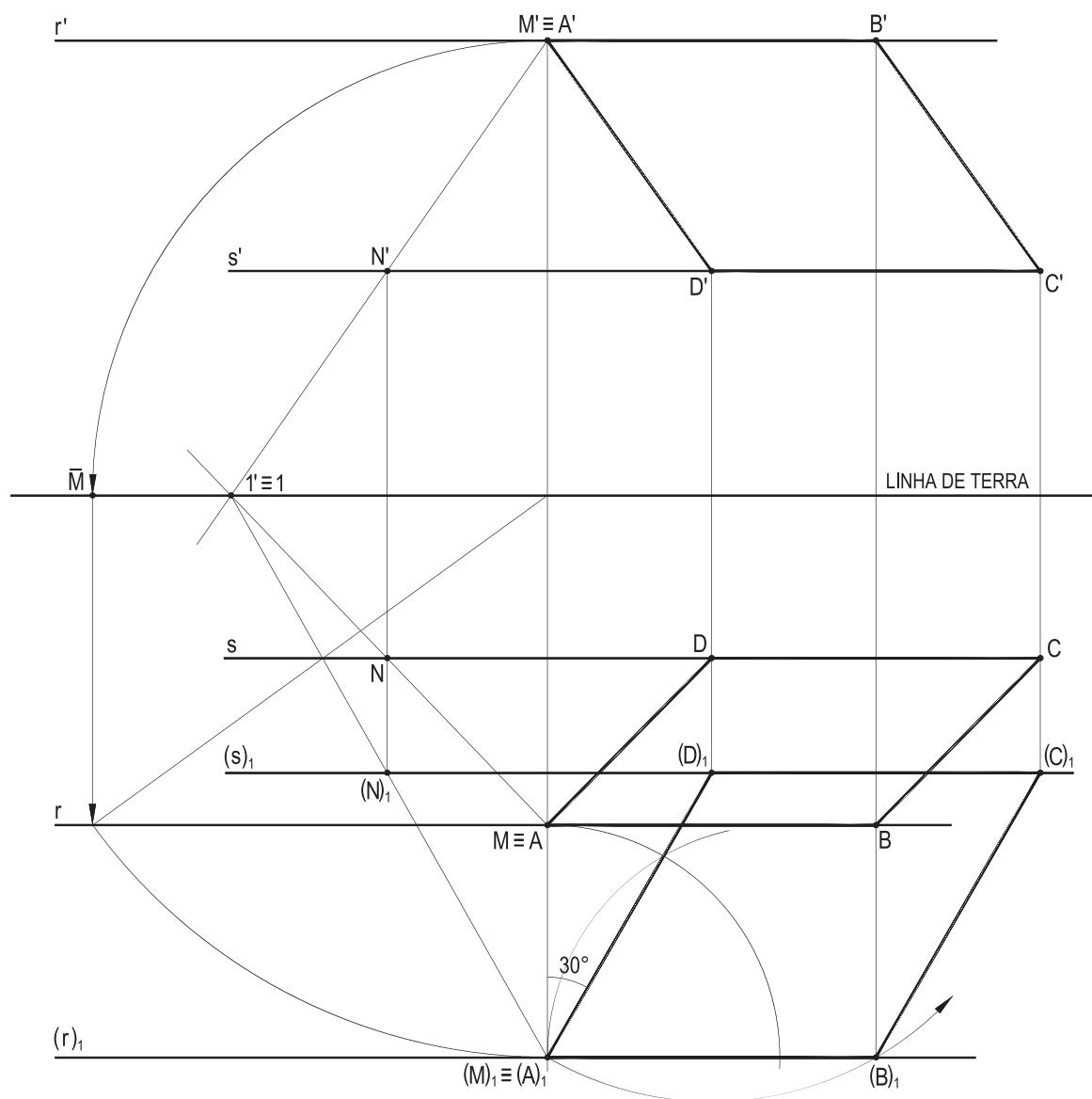


Figura 737

**606 – Construir as projeções do hexágono regular (A)(B)(C)(D)(E)(F) pertencente a  $(\beta_{13})$  e situado no primeiro diedro, sendo dados, apenas, as projeções horizontais A e B e o rebatimento  $(A)_1$  do vértice (A) sobre  $(\pi')$ , mas não a linha de terra.**

Resolução: Observando a Figura 738, que mostra o rebatimento de um ponto (M) de  $(\beta_{13})$  sobre  $(\pi')$ , no quadradão  $JLMM'$  ressalta a proporção a:  $a\sqrt{2}$  em que o segmento  $(M)(M)_1$  deve ser dividido, para a obtenção do ponto J, de passagem da linha de terra.

Feita essa construção, para um valor arbitrado a (Figura 739), o rebatimento sobre  $(\pi')$  permite construir a V.G. do hexágono — em verdade, bastou (Figura 739) desenhar a parte  $(A)_1(B)_1(C)_1$  do hexágono partir de seu centro  $(O)_1$ . Seu alçamento, com a utilização de paralelas e das simetrias próprias de  $(\beta_{13})$ , completa suas projeções.

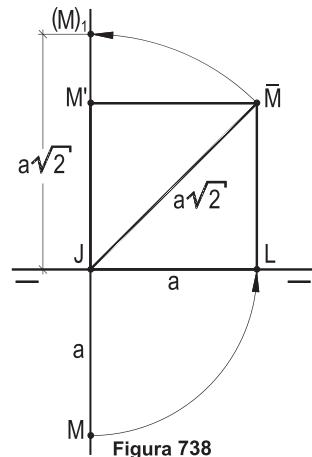


Figura 738

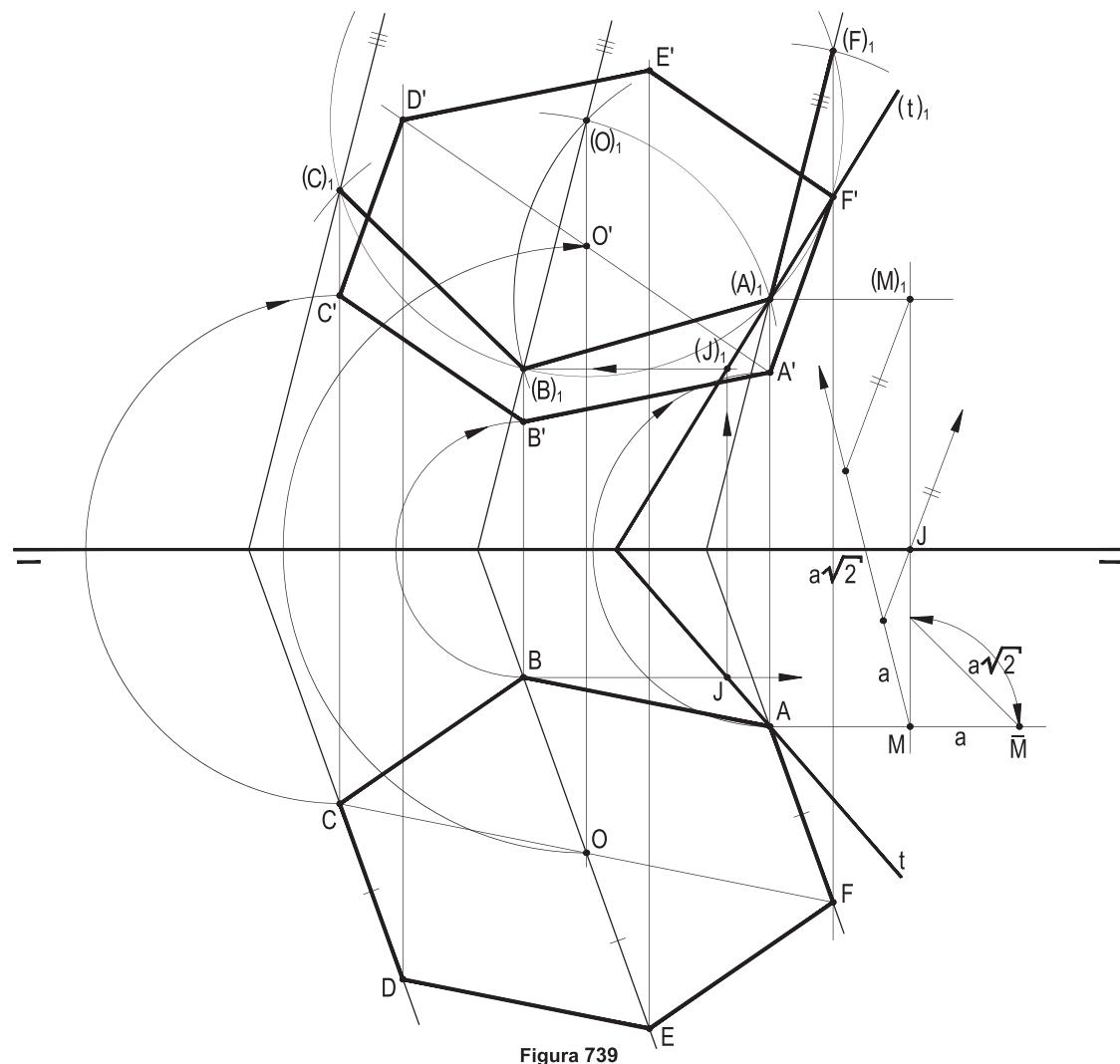


Figura 739

De um plano qualquer ( $\alpha$ ), considere seus dois traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$ , o rebatimento  $\alpha\pi_1'$  de seu traço vertical sobre ( $\pi$ ), além da linha de terra.

Para as épuras abaixo, dados três desses elementos, determine o quarto, completando apenas uma solução.

**607 – Dados  $\pi'\pi$ ,  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi_1'$ , pede-se  $\alpha\pi$**

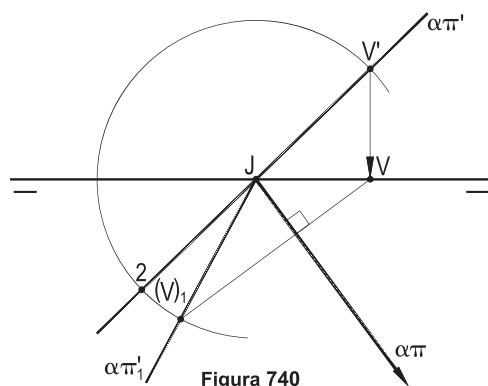


Figura 740

**608 – Dados  $\pi'\pi$ ,  $\alpha\pi$  e  $\alpha\pi_1'$ , pede-se  $\alpha\pi'$**

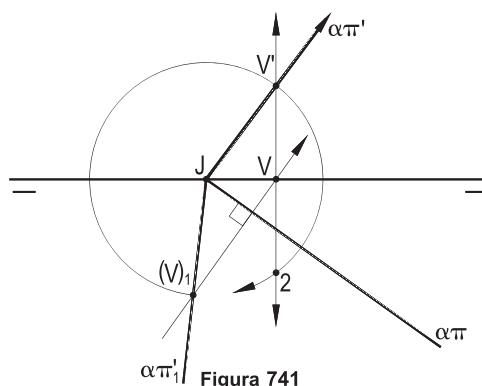


Figura 741

**609 – Dados  $\alpha'\pi$ ,  $\alpha\pi$  e  $\alpha\pi_1'$ , pede-se  $\pi'\pi$**

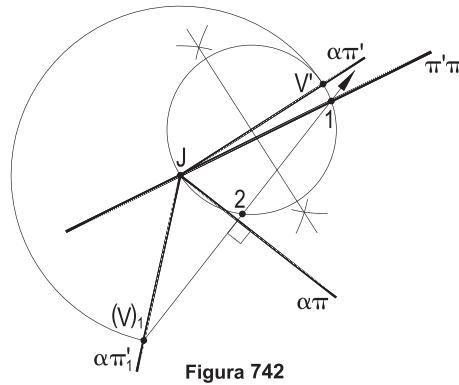


Figura 742

**610 – Dados  $\pi'\pi$ ,  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$ , pede-se  $\alpha\pi_1'$**

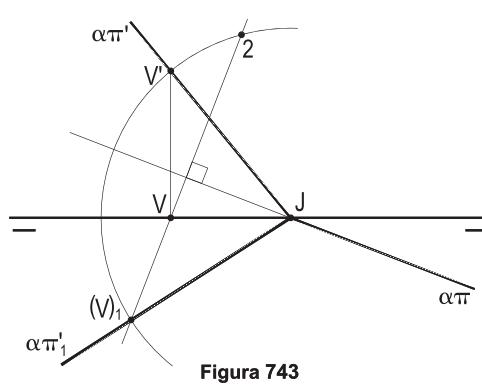


Figura 743

Resoluções: No primeiro exemplo (Figura 740), um arco de centro J e raio arbitrado proporciona  $V'$ ,  $V$  e  $(V)_1$  e, então,  $\alpha\pi$ , perpendicular, por J, a  $(V)_1V$ ; no segundo (Figura 741), escolhido um ponto qualquer  $(V)_1$  de  $\alpha\pi_1'$ , seu alcôdo traz  $V'$  e, por ele,  $\alpha\pi'$ ; no terceiro caso (Figura 742), a partir de um arco qualquer de centro J, o arco capaz de  $90^\circ$  para  $JV'$  e a perpendicular de  $(V)_1$  a  $\alpha\pi$  produzem, por interseção, um segundo ponto de passagem da linha de terra; no último, para um ponto  $V'$  arbitrado de  $\alpha\pi'$ , o arco de centro J e raio  $JV'$  corta a perpendicular por V a  $\alpha\pi$ , trazendo o rebatimento  $(V)_1$  e, portanto,  $\alpha\pi_1'$  (Figura 743).

Para as posições dadas, há, sempre, duas soluções, a segunda, não completada, indicada pelo número 2.

De um plano qualquer ( $\alpha$ ), considere um ponto (V) pertencente a ( $\pi'$ ), suas projeções V' e V e seu rebatimento ( $V_1$ ) sobre ( $\pi$ ), em torno de  $\alpha\pi$ . Nas épuras abaixo, para esses elementos, além de  $\pi'\pi$ , em cada caso, a partir dos dados, complete o conjunto, com apenas uma solução.

**611 – Dados V', V e ( $V_1$ )**

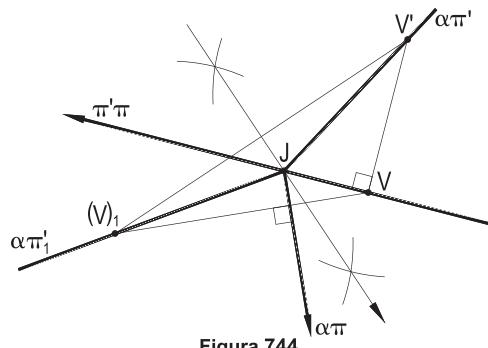


Figura 744

**612 – Dados V', V e  $\alpha\pi$**

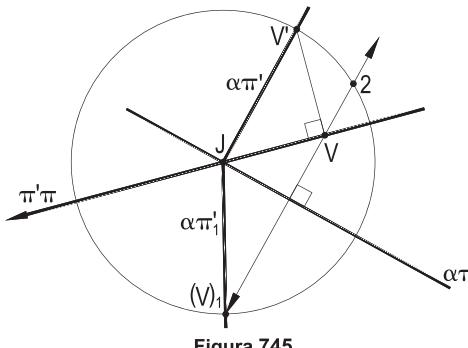


Figura 745

**613 – Dados V', V e  $\alpha\pi'_1$**

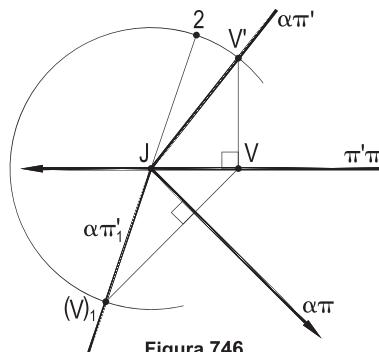


Figura 746

**614 – Dados  $\pi'\pi$ ,  $\alpha\pi$  e ( $V_1$ )**

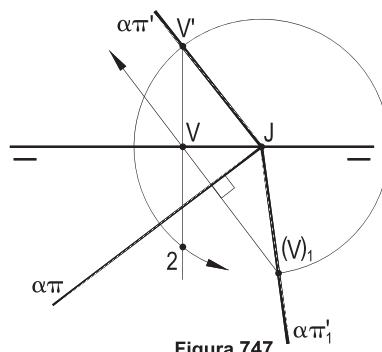


Figura 747

Resoluções: Os problemas aqui propostos são variações dos anteriores.

No primeiro exemplo (Figura 744),  $\pi'\pi$  é a perpendicular a  $V'V$ , por V, e a mediatrix de  $V'(V)_1$  traz J, em  $\pi'\pi$ , e, então, os traços de ( $\alpha$ ); no segundo (Figura 745),  $\pi'\pi$  é igualmente imediata e a perpendicular por V a  $\alpha\pi$  corta o arco de centro J e raio JV' produzindo ( $V_1$ ) e, então,  $\alpha\pi'_1$ ; no terceiro (Figura 746), mais uma vez obtém-se inicialmente  $\pi'\pi$  e, a partir de ( $V_1$ ), arbitrado em  $\alpha\pi'_1$ , vem V' em  $\alpha\pi'$ , proporcionando  $\alpha\pi$ , perpendicular por J a  $V(V)_1$ ; no último (Figura 747), trata-se do alçamento do ponto dado ( $V_1$ ).

Para todos os casos seguintes, opera-se apenas com projeções horizontais das figuras em estudo e com seus rebatimentos sobre ( $\pi$ ) em torno do traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano ( $\alpha$ ) a que cada figura pertence. A linha de terra é sempre ausente. Pede-se, para cada caso, construir a V.G. e a projeção horizontal da figura proposta, atendendo aos elementos dados.

Resoluções: Utilizada, sempre, a afinidade ortogonal entre projeção horizontal e rebatimento sobre ( $\pi$ ).

**615 – Losango (A)(B)(C)(D). (A)(B)  $\epsilon$  (r), (A)(D)  $\epsilon$  (s). (C)  $\epsilon$  ( $\pi$ ). Dados r, s, (r)<sub>1</sub>, (s)<sub>1</sub>**

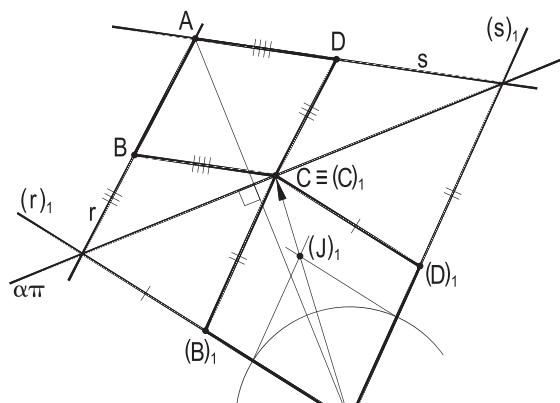


Figura 748

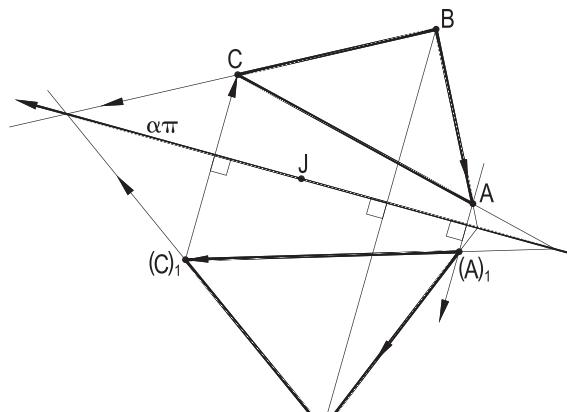


Figura 749

**617 – Triângulo isósceles (A)(B)(C). Base (B)(C). (A) em (s). Dados  $\alpha\pi$ , B, C, (C)<sub>1</sub>, s**

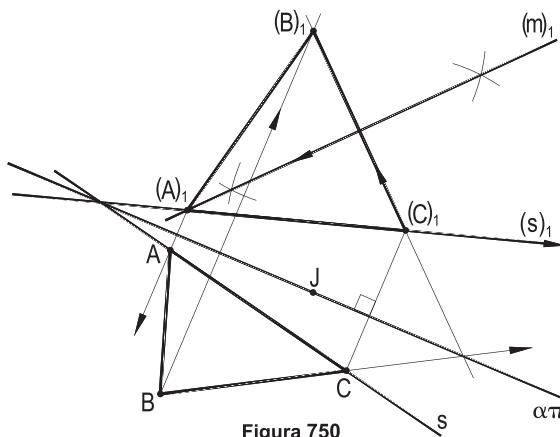


Figura 750

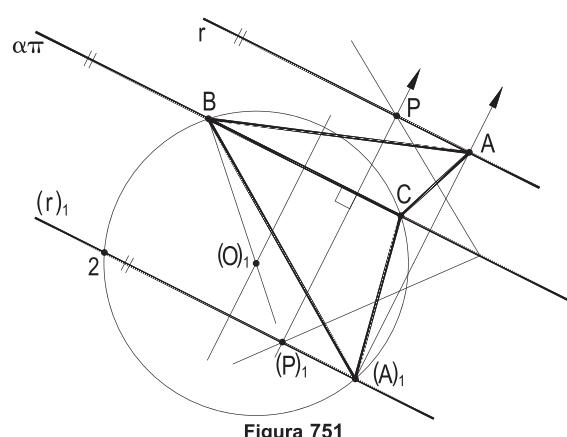


Figura 751

**619 – Quadrado (A)(B)(C)(D). Dados  $\alpha\pi$ , A, r, s, (r)<sub>1</sub>. Lados em (r) e (s)**

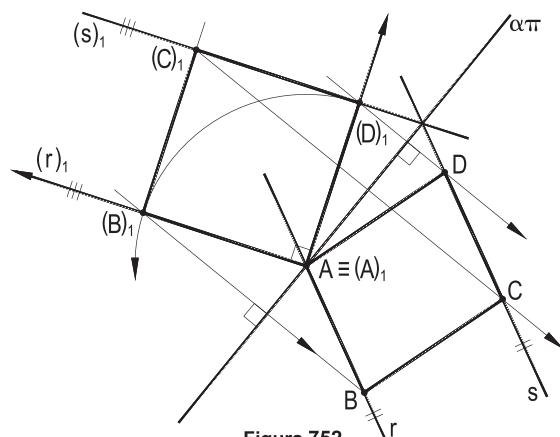


Figura 752

**620 – Losango de centro (O), o lado (A)(B) em ( $\pi$ ). Dados A, B, O**

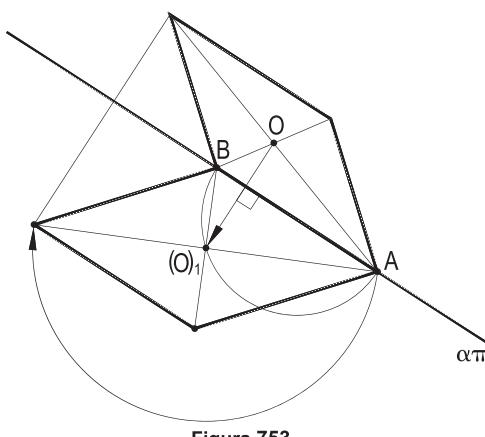


Figura 753

**621 – Triângulo equilátero (A)(B)(C), coplanar com o ponto (J), (A)(B) em  $\alpha\pi$ . Dados A, B, J,  $(J)_1$**

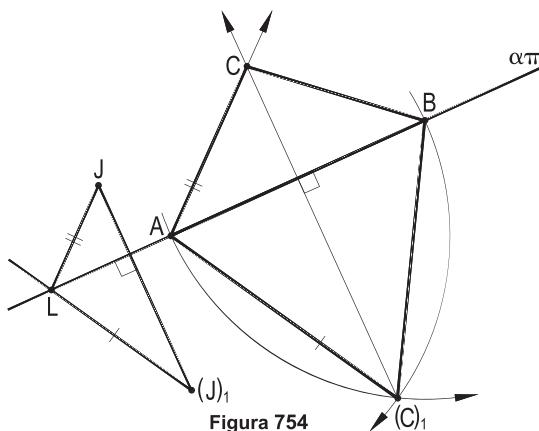


Figura 754

**622 – Hexágono regular de centro (O), o lado (A)(B) em  $\alpha\pi$ . (O) e  $(r)$ . Dados  $\alpha\pi$ , O,  $(r)_1$**

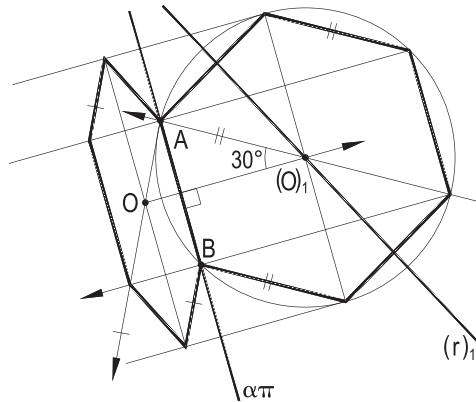


Figura 755

Resoluções: Para todos os exemplos elencados são dispensadas as projeções verticais das figuras estudadas.

No primeiro caso, determinada a charneira  $\alpha\pi$ , pelos pontos comuns a r e  $(r)_1$  e a s e  $(s)_1$ , uma homotetia de polo  $(A)_1$  leva o vértice  $(J)_1$  de um losango auxiliar, com lados paralelos a  $(r)_1$  e a  $(s)_1$ , à posição final  $(C)_1 \equiv C$ , em  $\alpha\pi$  (Figura 748), alçado com paralelas; no segundo,  $B(B)_1$  dá a direção da afinidade (Figura 749), e, então, pode-se traçar  $\alpha\pi$ , por J, perpendicular a  $B(B)_1$  e, utilizando-se as retas  $(A)_1(B)_1$  e  $(A)_1(C)_1$ , obtém-se suas afins AB e AC; no terceiro, determinado  $(B)_1$ , (Figura 750), a mediatrix  $(m)_1$  de  $(B)_1(C)_1$  traz  $(A)_1$  em  $(s)_1$  e, logo, A em s; no seguinte (Figura 751), o arco capaz de  $45^\circ$  para BC e  $(r)_1$  dão, por interseção,  $(A)_1$  e, então, A em r (observe-se que, pelos dados, r,  $(r)_1$  e  $\alpha\pi$  são paralelas); no quinto, a perpendicular por A  $\equiv (A)_1$  a  $(s)_1$ , paralela a  $(r)_1$ , dá o vértice  $(D)_1$  e, então, em V.G., o quadrado  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$  (Figura 752), de alçado imediato, por paralelas; no seguinte (Figura 753), A e B definem a charneira  $\alpha\pi$ , e o arco capaz de  $90^\circ$  para AB proporciona, por interseção com a perpendicular, por O, a  $\alpha\pi$ ,  $(O)_1$ , afim do centro O do losango O, completada a épura com paralelas; no penúltimo (Figura 754), o alçamento do triângulo equilátero, em V.G.,  $AB(C)_1$  se fez com a reta auxiliar  $(J)_1L$ , paralela a  $(C)_1A$  e sua afim LJ, que proporciona C, na paralela AC a LJ, por A; no último (Figura 755), a partir do centro O, obtém-se  $(O)_1$  em  $(r)_1$ , o que permite determinar A em  $\alpha\pi$ , com a reta inclinada de  $30^\circ$  em relação  $(O)_1O$  conduzida por  $(O)_1$ , e, com o círculo de centro  $(O)_1$  e raio  $(O)_1A$ , construir, em V.G., o hexágono regular, com seu lado AB em  $\alpha\pi$ , que, alçado, com o par de retas afins  $(O)_1A$  e  $AO$  e com paralelas resolve a questão.

Dos oito exemplos estudados, apenas o de número 618, para os dados oferecidos, apresenta duas soluções.

Em todas as épuras abaixo,  $(i)_1$  é o rebatimento sobre  $(\pi)$ , em torno de  $\alpha\pi$ , da interseção  $(i)$  do plano  $(\alpha)$  com  $(\beta_{13})$ .

Pede-se completar as épuras, a partir dos dados citados, caso a caso.

Resoluções: Simples o primeiro exemplo, por ser projetante o plano  $(\alpha)$ ; para os demais, foi utilizado o triângulo de rebatimento para um ponto  $(I)_1$ , genérico, de  $(i)_1$  e seu alçamento.

Segundas soluções indicadas pelo número 2.

623 – ( $\alpha$ ) de topo. Dados  $(i)_1$  e  $\pi'\pi$

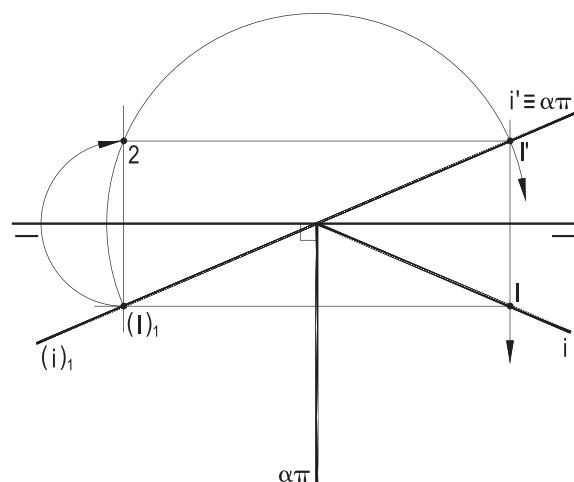


Figura 756

624 – ( $\alpha$ ) paralelo a  $\pi'\pi$ . Dados  $(i)_1$ ,  $i$  e  $\alpha\pi$

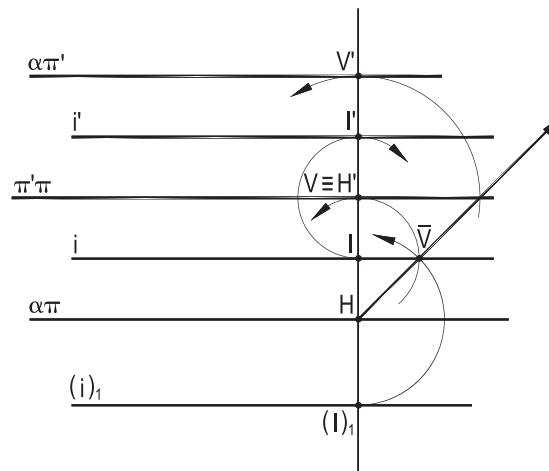


Figura 757

625 – ( $\alpha$ ) paralelo a  $\pi'\pi$ . Dados  $(i)_1$ ,  $\alpha\pi$  e  $\pi'\pi$       626 – ( $\alpha$ ) qualquer. Dados  $(i)_1$ ,  $i$  e  $\alpha\pi$   
 $\pi'\pi$

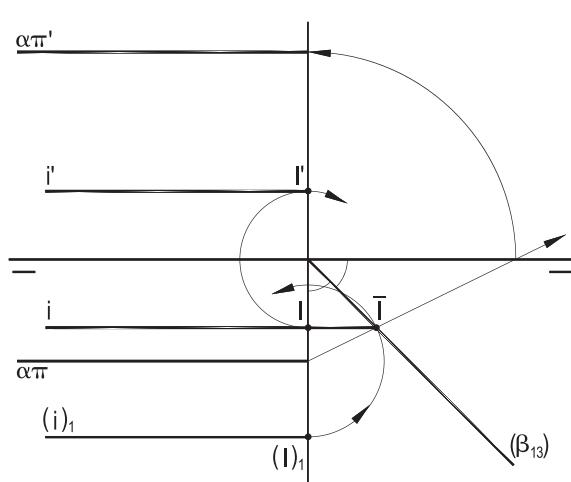


Figura 758

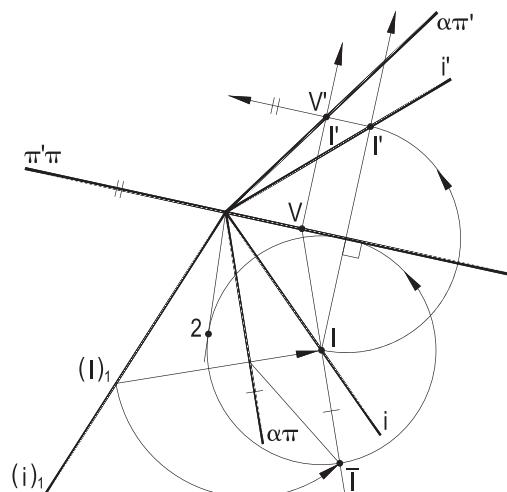


Figura 759

**627 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ) pertencente à reta horizontal ( $h$ ), dada por suas projeções, sabendo que  $(h)_1$ , também dada, é a posição de ( $h$ ) após o rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ).**

Resolução: Aproveitando o traço vertical ( $V$ ) de ( $h$ ), como o ponto ( $J$ ), comum aos traços de ( $\alpha$ ), deve equidistanciar de  $V'$  e de  $(V)_1$ , a mediatrix  $m$  do segmento  $V'(V)_1$  proporciona ( $J$ ) e, então, os traços de ( $\alpha$ ) (Figura 760).

**628 – Determinar a posição da linha de terra e os traços do plano ( $\alpha$ ), pertencente à reta frontal ( $f$ ), dadas as duas projeções de ( $f$ ) e seu rebatimento ( $f)_1$ , sobre ( $\pi$ ).**

Resolução: O ponto  $H$ , comum a  $f$  e a  $(f)_1$ , é da charneira  $\alpha\pi$ , o que proporciona a linha de chamada  $HH'$  perpendicular a  $f$ , e, então, a linha de terra ( $\text{Figura 761}$ ). A aplicação de dois segmentos iguais  $H'A'$  e  $H(A)_1$  traz  $(A)_1$ , rebatimento de ( $A$ ), e, a perpendicular a  $A(A)_1$ , por  $H$ , dá  $\alpha\pi$  e  $\alpha\pi'$  por ( $J$ ), paralela a  $f'$ .

Há uma segunda solução, não completada.

**629 – Os traços do plano ( $\alpha$ ) formam, no primeiro diedro,  $45^\circ$ .**

Determiná-los, sabendo que a horizontal ( $h$ ), dada por suas projeções, pertence a ( $\alpha$ ).

Resolução: A utilização de um plano ( $\beta$ ), paralelo a ( $\alpha$ ), resolve a questão.

Traçados  $\beta\pi$ , paralelo a  $h$ , e  $\beta\pi'_1$ , inclinado de  $45^\circ$  com  $\beta\pi$ , basta alçá-lo (Figura 762), para obter  $\beta\pi'$  e, então, pelo traço vertical ( $\bar{V}$ ) de ( $h$ ), completar os traços de ( $\alpha$ ).

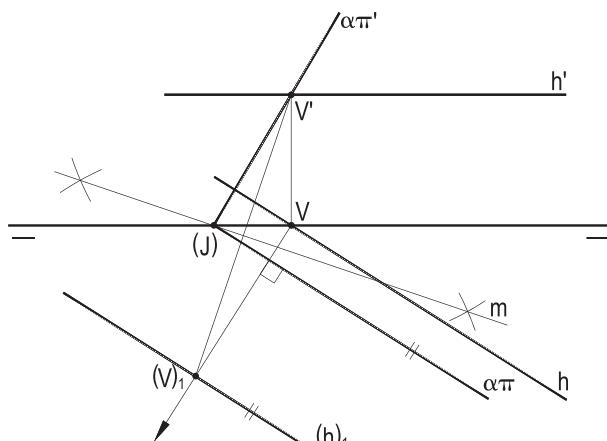


Figura 760

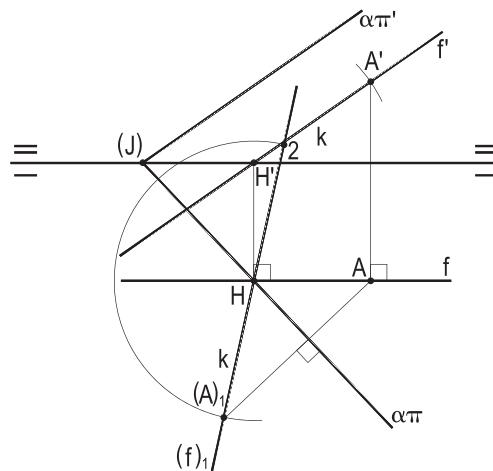


Figura 761

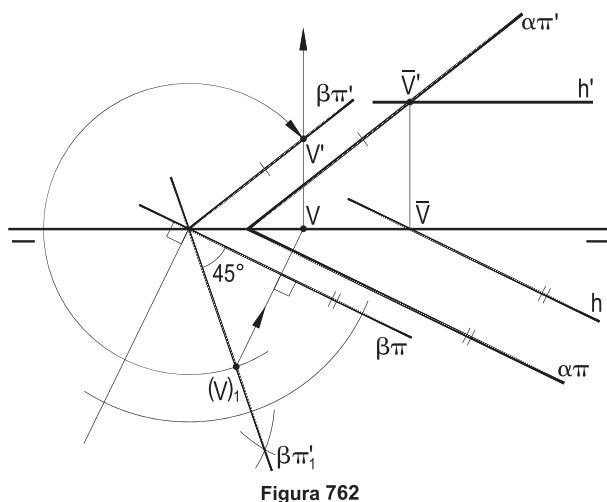


Figura 762

**630 – Determinar os traços verticais dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , sabendo que os dois planos formam  $60^\circ$  com  $(\pi)$  e que seus traços horizontais  $\alpha\pi$  e  $\beta\pi$ , dados, coincidem.**

Resolução: A construção do triângulo de rebatimento para dois pontos arbitrados ( $V_1$ ) de  $(\alpha)$  e ( $V_2$ ) de  $(\beta)$  permite, com a aplicação do ângulo de  $60^\circ$ , dado, obter as cotas (simétricas) de ( $V_1$ ) e ( $V_2$ ) e, assim, os traços pedidos (Figura 763), cujas denominações poderiam ser permutadas.

**631 – Construir os traços do plano  $(\alpha)$ , pertencente à reta de perfil  $(V)(H)$ , dada, conhecendo a direção  $(r)_1$  de outra reta de perfil do plano, rebatida sobre  $(\pi)$ .**

Resolução: Obtida a V.G.  $k$  do segmento  $(V)(H)$ , de perfil, e aplicada sobre a reta  $(s)_1$ , paralela a  $(r)_1$  e traçada pelo ponto fixo  $(H)$ , da charneira, obtém-se  $(V)_1$  e, então,  $\alpha\pi$ , por  $H$ , perpendicular a  $V(V)_1$ , e  $\alpha\pi'$ , unindo  $(J)$  a  $V'$  (Figura 764).

Há uma segunda solução, indicada pela posição 2.

**632 – Do ponto  $(M)$ , pertencente ao plano  $(\alpha)$ , são dadas as duas projeções e o rebatimento  $(M)_1$ , sobre  $(\pi)$ . Determine os traços de  $(\alpha)$ .**

Resolução: É bem simples a construção do triângulo de rebatimento  $M\bar{M}H$ , por se conhecer sua cota  $\bar{M}\bar{M}$ . Com o traçado da mediatrix  $m$  do segmento  $\bar{M}(M)_1$  e, obtido  $H$ , vem  $\alpha\pi$ , e com o traço vertical da horizontal ( $h$ ), por  $(M)$ , vem  $\alpha\pi'$  (Figura 765).

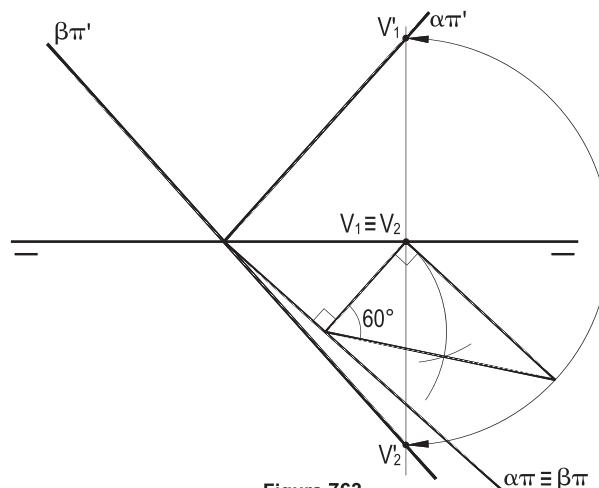


Figura 763

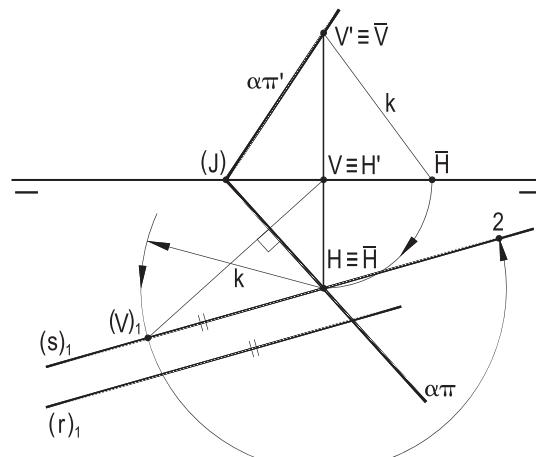


Figura 764

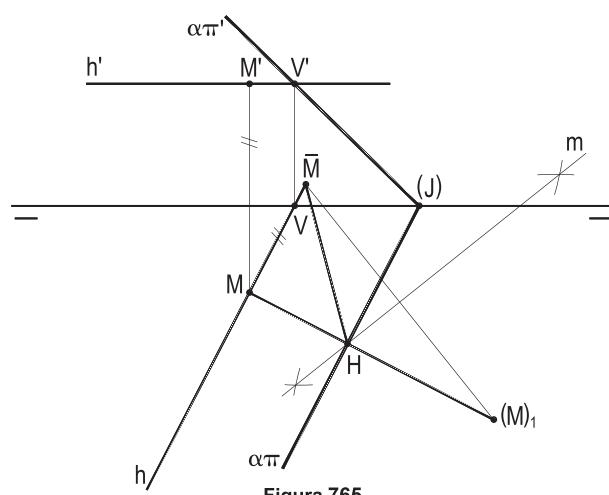


Figura 765

**633 – Construir as projeções do retângulo (A)(B)(C)(D), sendo dadas as projeções da diagonal (A)(C), que é de maior inclinação do plano do retângulo, sabendo que o vértice (B) tem cota nula e a maior abscissa possível.**

Resolução: A obtenção dos traços do plano ( $\alpha$ ), do retângulo, é imediata (*Geometria Descritiva*, número 58), como também, após seu rebatimento sobre ( $\pi$ ), a construção do quadrilátero, com o vértice (B) em  $\alpha\pi$ , para ter cota nula, escolhido com a maior das duas abscissas possíveis, visto que  $(B)_1$  tem que pertencer à circunferência de diâmetro  $(A)_1(C)_1$ .

O alçado é também bem simples, com o uso de paralelas para completar o retângulo (Figura 766).

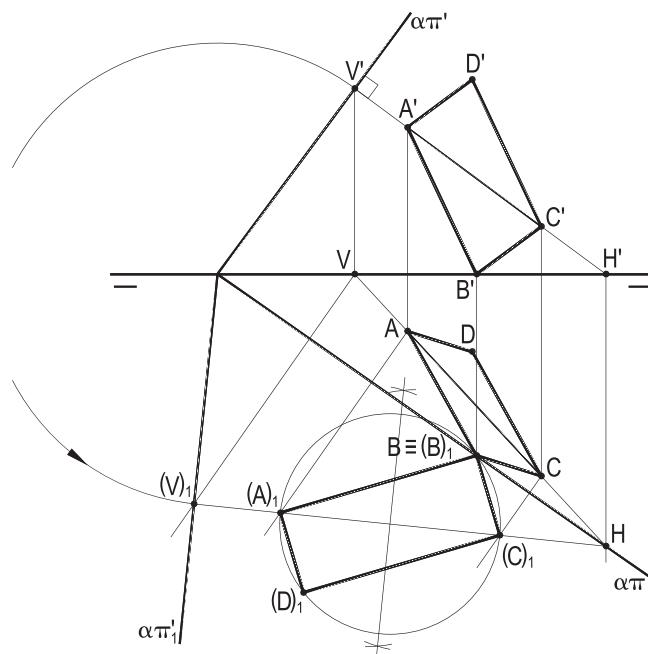


Figura 766

**634 – Desenhar as projeções do triângulo isósceles (A)(B)(C) pertencente ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo que os lados iguais (A)(B) e (A)(C) têm, respectivamente, cota e afastamento nulos e que a base (B)(C), do primeiro diedro, mede 38 mm.**

Resolução: A construção do triângulo isósceles (A)(V)(H), de ( $\alpha$ ), com lados iguais (A)(H) e (A)(V) arbitrados, permite obter, no rebatimento sobre ( $\pi$ ), a direção  $(H)_1(V)_1$  da base  $(B)_1(C)_1$  procurada.

E, aplicado o valor 38 mm sobre essa reta  $(H)_1(V)_1$ , uma simples translação resolve o problema, proporcionando  $(C)_1$  e, em seguida, B, B', C e C' (Figura 767), fazendo  $(B)(C)$  paralela a  $(H)(V)$ .

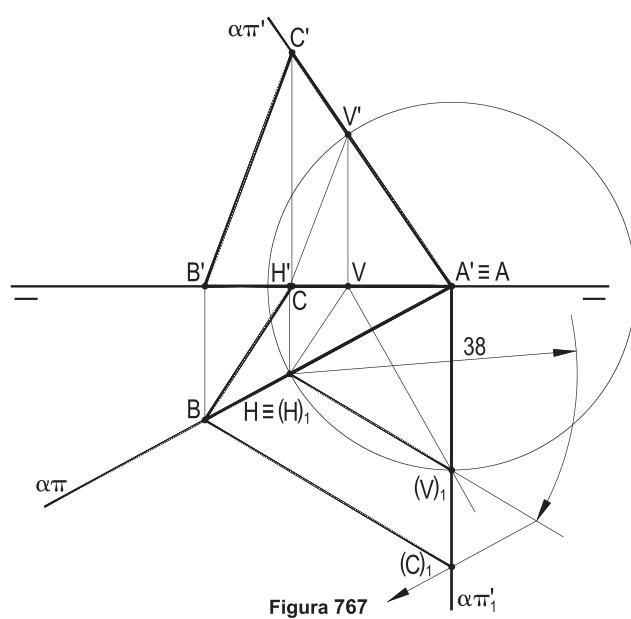


Figura 767

**635 – A circunferência (c), de centro (O), pertence ao plano ( $\alpha$ ).**

Sendo dados ( $\pi'\pi$ ),  $\alpha\pi$  e os rebatimentos, sobre ( $\pi$ ), em torno de  $\alpha\pi$ , ( $c$ )<sub>1</sub>, ( $O$ )<sub>1</sub> e ( $A$ )<sub>1</sub>, respectivamente da circunferência, de seu centro e do ponto (A) de (c), com o menor afastamento possível, pede-se recuperar o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano ( $\alpha$ ) e determinar as projeções do hexágono convexo irregular (A)(B)(C)(D)(E)(F) inscrito em (c), cujos vértices tenham uma coordenada máxima ou mínima, arbitrando a ordem de suas denominações.

Resolução: Os pontos da circunferência (c) que correspondem aos afastamentos extremos são (A), o de menor afastamento, por ser o mais próximo de  $\alpha\pi'$ , ou seja, de ( $\pi'$ ), e (D), diametralmente oposto a ele, sendo assim o de maior afastamento entre todos os pontos de (c). São, naturalmente, os pontos de contato das duas tangentes frontais a (c). Da mesma forma, os pontos (B) e (E), de cotas máxima e mínima, são os de contato das tangentes horizontais a (c), enquanto que os (C) e (F) de abscissas extremas são os de contato das tangentes de perfil a (c) (Figura 768).

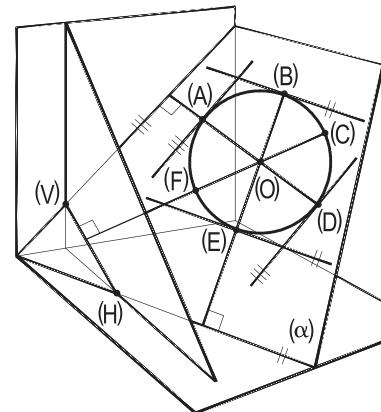


Figura 768

Assim, construído  $\alpha\pi'_1$ , perpendicular a ( $O$ )<sub>1</sub>(A)<sub>1</sub>, com seu alçamento pode-se arbitrar uma reta de perfil (V)(H) de ( $\alpha$ ) e, com seu rebatimento, construir o hexágono pedido e, enfim, suas projeções (Figura 769).

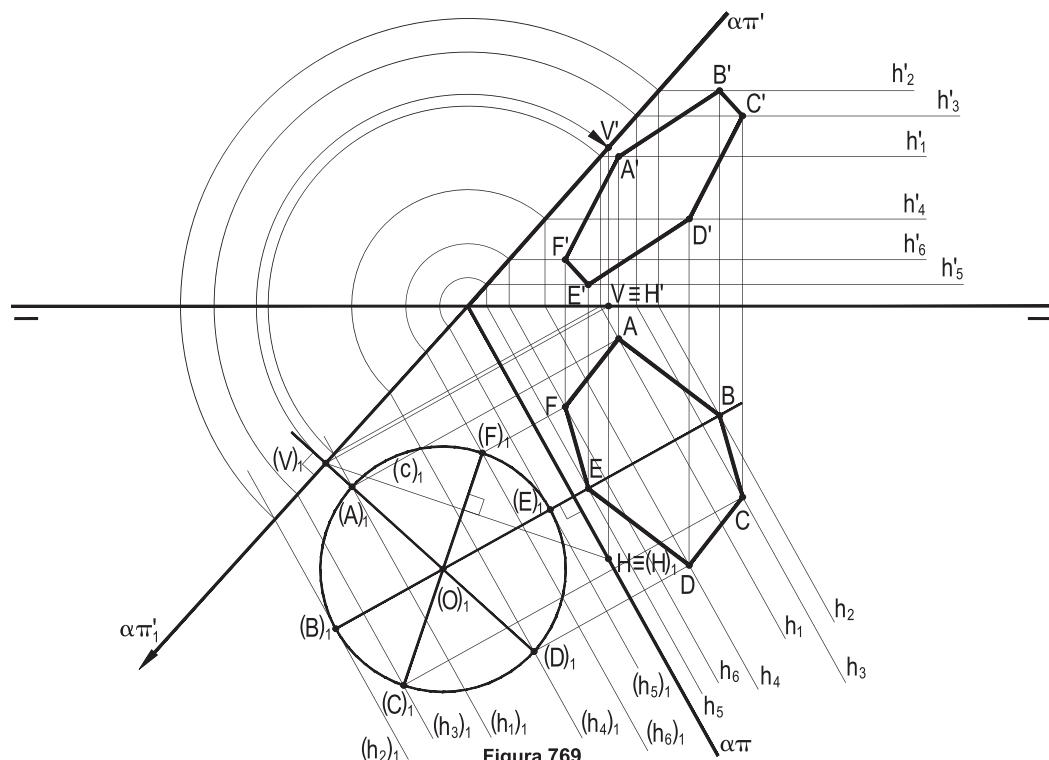


Figura 769

**636 – Construir as projeções do triângulo equilátero (A)(B)(C), do primeiro diedro, das as projeções de seu lado (B)(C), sabendo que o vértice (A) pertence a um dos dois planos de projeção.**

Resolução: O vértice (A) procurado há de pertencer ao plano  $(\alpha)$ , mediador do lado dado (B)(C), podendo estar sobre  $\alpha\pi'$ , ou sobre  $\alpha\pi$  (Figura 770).

Assim, para obter as projeções de (A), basta construir o mediador  $(\alpha)$  de (B)(C) e determinar o valor  $h$  da altura do triângulo (A)(B)(C), mediante uma rotação que torne (B)(C) frontal e de uma simples construção geométrica do triângulo equilátero  $\bar{B}'\bar{C}'_1\bar{A}$  (Figura 771).

Rebatido  $(\alpha)$  sobre  $(\pi)$ , a circunferência de centro no ponto  $(M)_1$ , rebatimento do ponto  $(M)$ , médio de (B)(C), e raio  $h$  proporciona, por interseção com cada traço de  $(\alpha)$ , as duas soluções  $(A_1)(B)(C)$  e  $(A_2)(B)(C)$  (Figura 771).

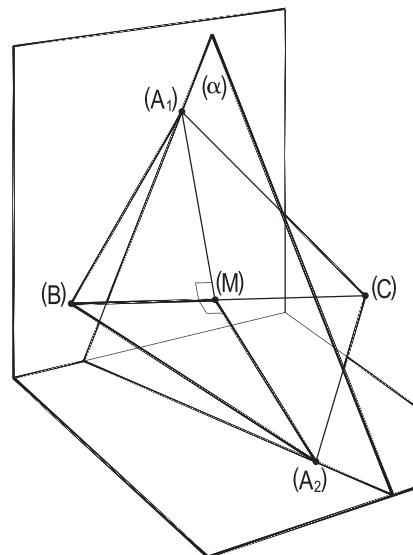


Figura 770

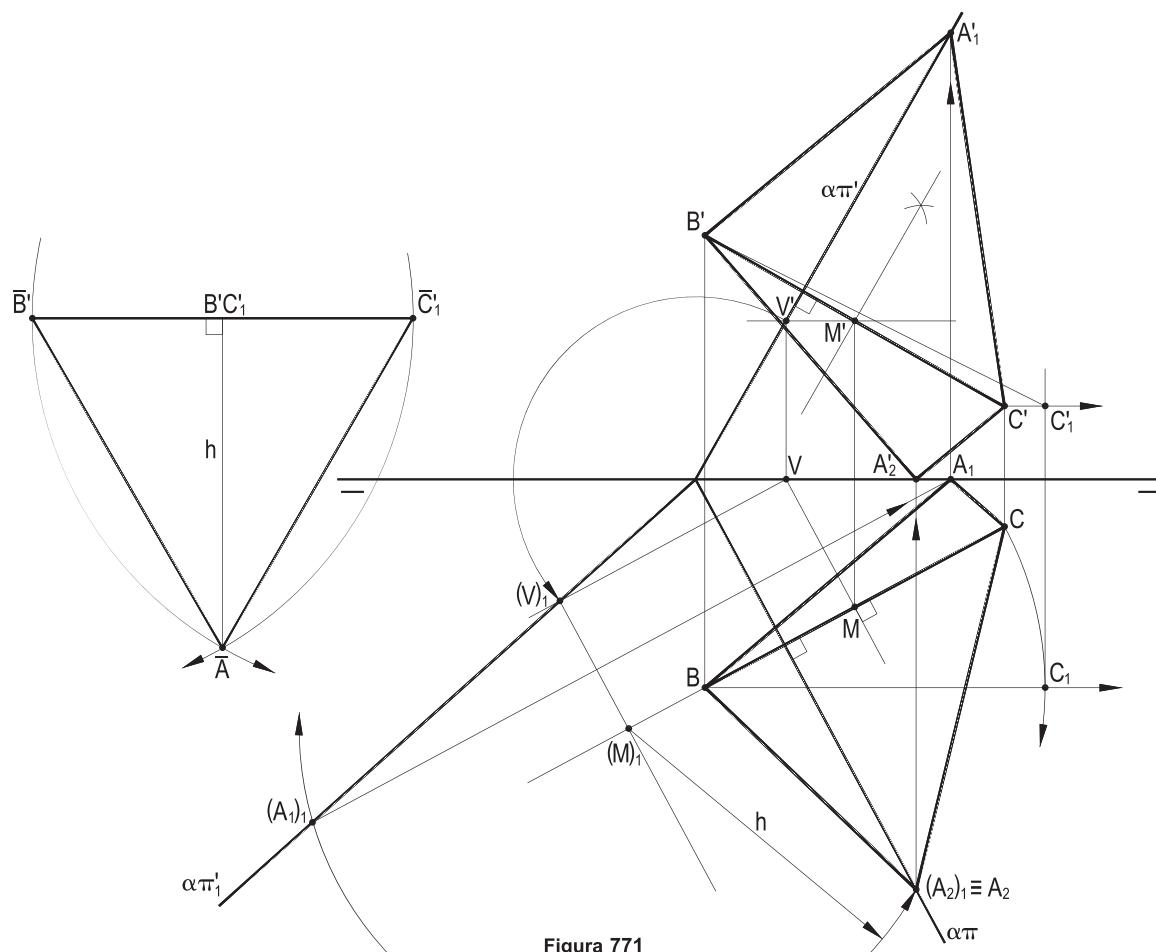


Figura 771

**637 – Desenhar as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), pertencente ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo que seus lados (A)(B) e (C)(D) são paralelos a ( $\beta_{13}$ ), (A) em ( $\pi$ ) e (D) em ( $\pi'$ ). O centro do quadrado tem afastamento igual à abscissa do traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ).**

Resolução: Determinada a reta ( $i$ ), traço de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{13}$ ), e rebatido o plano sobre ( $\pi$ ), obtém-se a direção ( $i$ )<sub>1</sub>, de dois lados do quadrado, podendo-se, então, construir um, auxiliar, em posição semelhante, com um vértice em cada traço do plano (Figura 772).

Por homotetia de centro J, consegue-se a V.G. do quadrado pedido, com centro (M) sobre a frontal ( $f$ ), de afastamento igual à abscissa de J.

O alçado é bem simples, com a utilização de paralelas (Figura 772).

**638 – Determinar o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano ( $\alpha$ ), sabendo que, em épura, após o rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ),  $\alpha\pi'_1$  coincide com  $\alpha\pi'$ . Dado o traço horizontal  $\alpha\pi$ .**

Resolução: A coincidência, em épura, de  $\alpha\pi'_1$  com  $\alpha\pi'$  faz do problema uma simples questão de simetria, visto que têm que ser iguais os segmentos JV' e J(V)<sub>1</sub>, sendo (J) o traço de ( $\alpha$ ) com a linha de terra.

Assim, a partir de um ponto V, qualquer, de ( $\pi'\pi$ ), seu simétrico  $\bar{V}$ , em relação a J, traço de  $\alpha\pi$  com ( $\pi'\pi$ ), proporciona  $(V)_1$  e, pela união de  $(V)_1$  a J, a projeção vertical V' e, então,  $\alpha\pi'_1 \equiv \alpha\pi'$  (Figura 773).

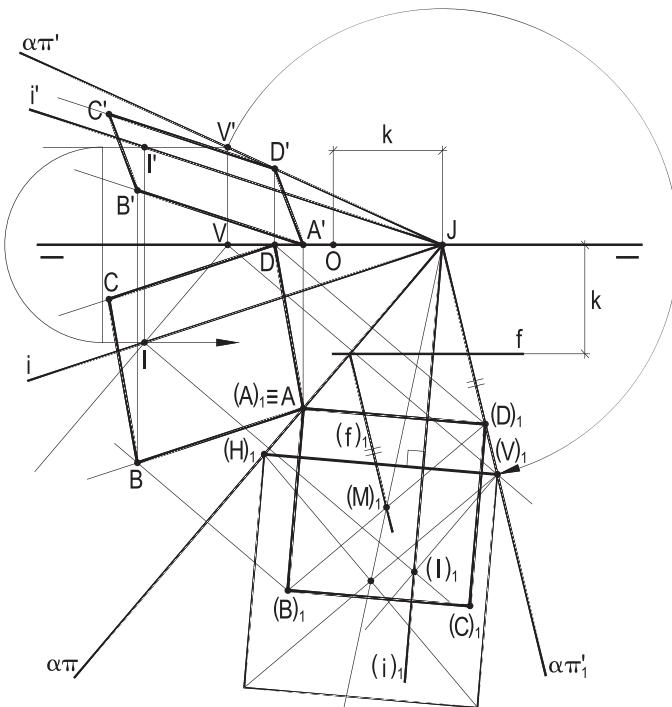


Figura 772

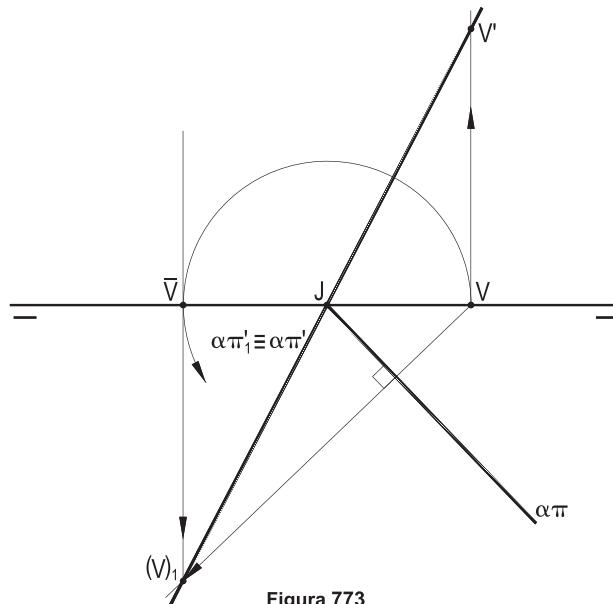


Figura 773

**639 – Todos os lados do hexágono regular (A)(B)(C)(D)(E)(F) são ortogonais à reta (r), que passa pelo seu centro.**

Sendo dadas as projeções dessa reta ( $r$ ) e as do vértice (A), pertencente a ( $\pi$ ), pede-se desenhar as projeções do hexágono, sabendo que (B) é o vértice de maior afastamento.

Resolução: Para ter todos os lados ortogonais à reta dada ( $r$ ), o plano ( $\alpha$ ) do hexágono tem que ser perpendicular a essa reta. Assim, traça-se, por (A), o plano ( $\alpha$ ), perpendicular a ( $r$ ), e determina-se o ponto (O), interseção de ( $r$ ) com ( $\alpha$ ), que há de ser o centro do hexágono.

Rebatido ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) (Figura 774), pode-se construir a circunferência de centro ( $O_1$ ) e raio ( $O_1(A)_1$ , que circunscreverá o hexágono. Escolhido, dentre todos, o vértice ( $B_1$ ), de maior afastamento, basta alçar o hexágono, para o que foram utilizados a afinidade com a projeção horizontal, o paralelismo entre lados e as simetrias em relação ao seu centro (Figura 774).

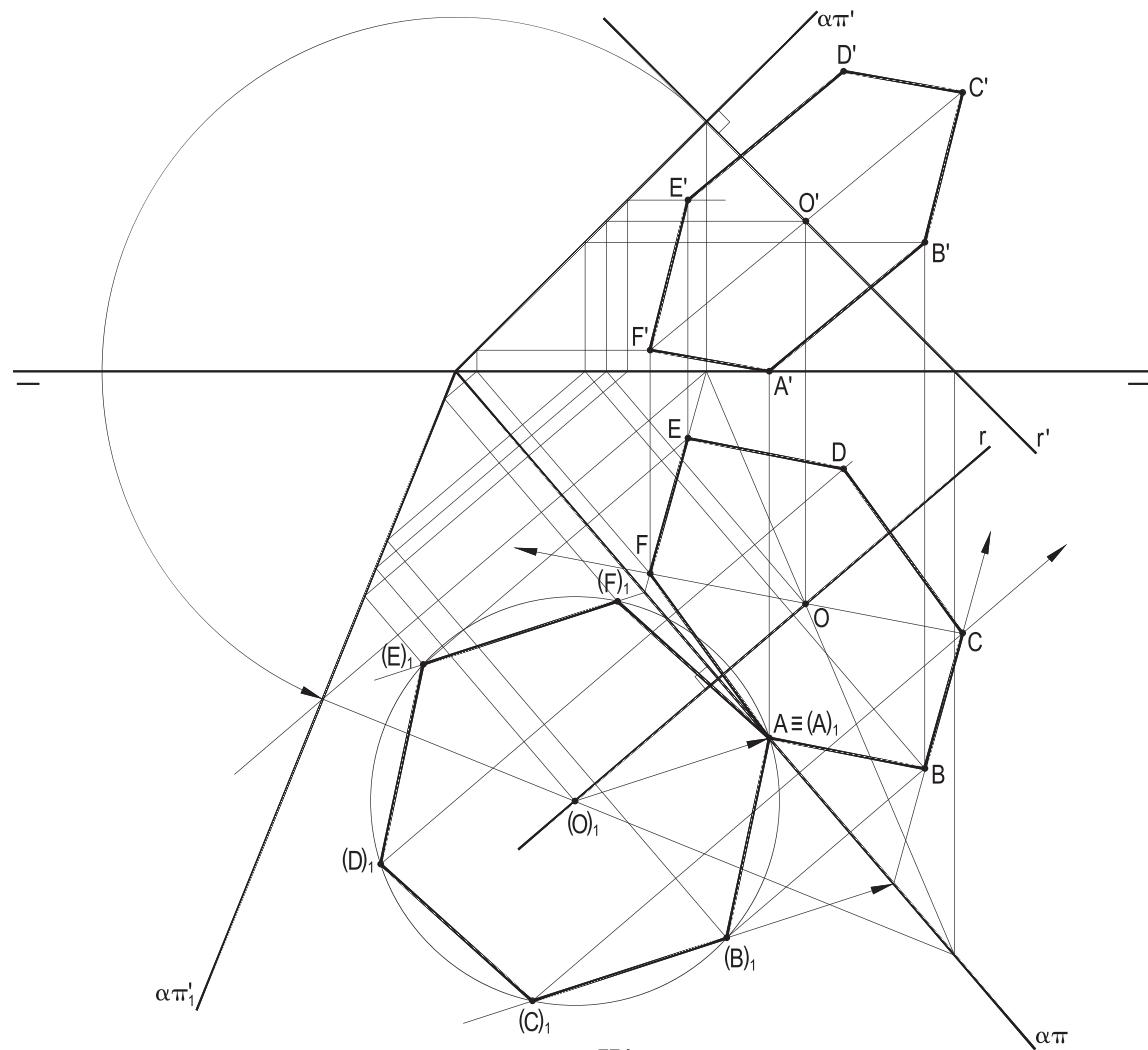


Figura 774

**640** – Desenhar as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D) pertencente ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo que (M), de abscissa nula, é o ponto médio do lado (B)(C), formando, com (A), dado por sua projeção vertical, uma frontal.

Sabe-se, ainda, que (D) é o vértice de menor afastamento.

Resolução: A projeção vertical A' permite, com o traçado da frontal (t) que passa por (A), determinar, na abscissa nula, o ponto (M), médio do lado (B)(C).

Para a construção, em V.G., do quadrado, observe-se (Figura 775) o triângulo ABM, cujos catetos valem um o dobro do outro. Aproveitando a frontal (A)(M), rebate-se ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi'$ ) e, construindo o triângulo retângulo auxiliar XYZ, com catetos na proporção 2 : 1, obtém-se o ângulo  $\hat{\varphi}$  do lado (A)(B) com a reta (A)(M), o que permite construir, em V.G., o quadrado, com apenas uma solução, pela restrição imposta ao vértice (D). Para o alçado, foram utilizados os lados (B)(C) e (A)(D) (Figura 776).

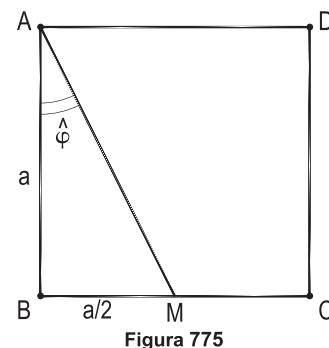


Figura 775

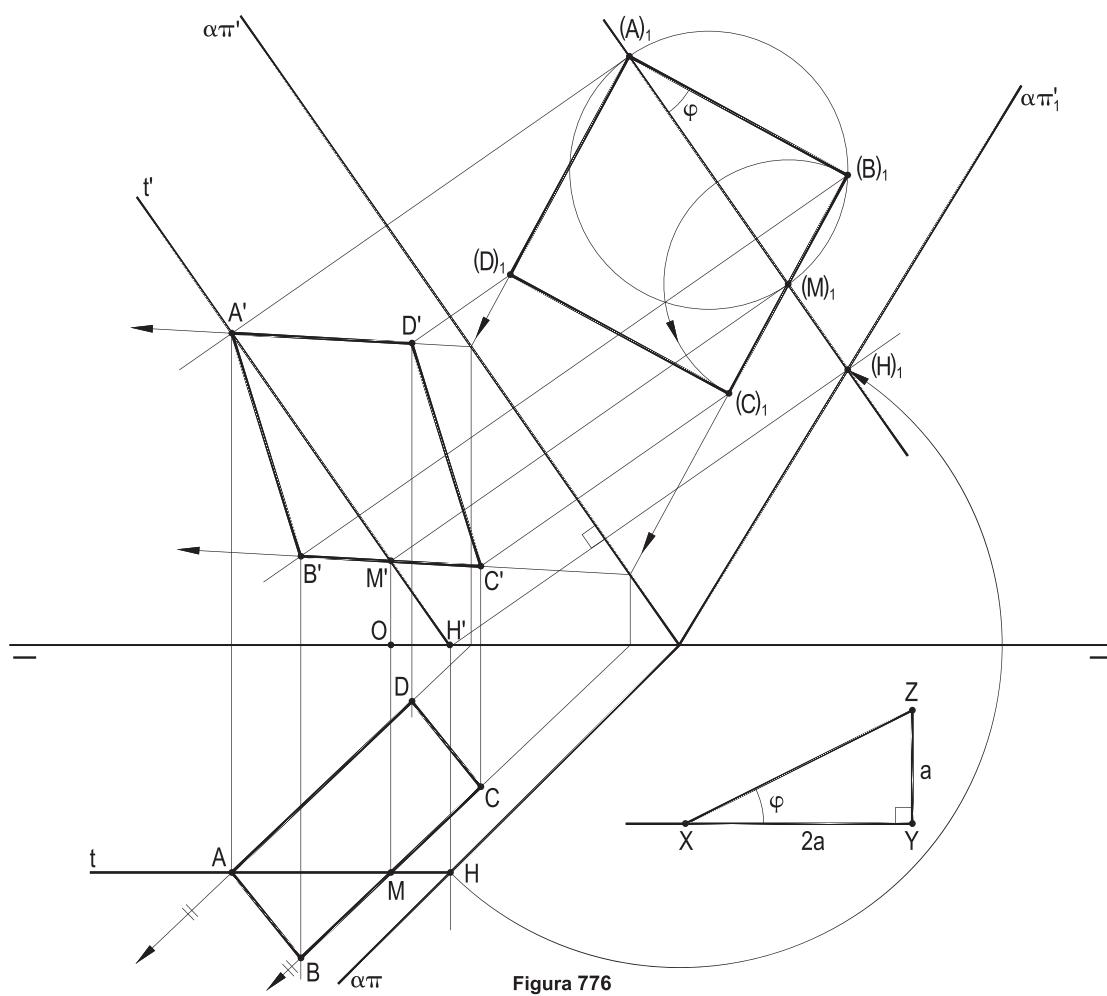


Figura 776

**641 – Desenhar as projeções do pentágono convexo regular (A)(B)(C)(D)(E), do primeiro diedro, apoiado pelo lado (A)(B) em  $(\pi)$ , sendo dada a projeção horizontal AB, sabendo que seu vértice (C) pertence a  $(\pi')$ .**

Resolução: Conhecido o traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano do pentágono, suporte de AB, para obter o traço vertical  $\alpha\pi'$ , ou, o que é o mesmo, a projeção C' do vértice (C), recorre-se, em construção auxiliar, à determinação do lado AJ do pentágono convexo inscrito num círculo  $\bar{O}$  qualquer e, por homotetia de polo  $\bar{A}$  (Figura 777), obteve-se, a partir da V.G. AB de seu lado, o raio  $\bar{R}$  do círculo circunscrito ao pentágono procurado, que pode, então, ser construído em V.G. e, em seguida, alçado (Figura 778), pelas utilizações da afinidade entre  $(D)_1(E)_1$  e DE e do paralelismo entre (A)(B) e (C)(E).

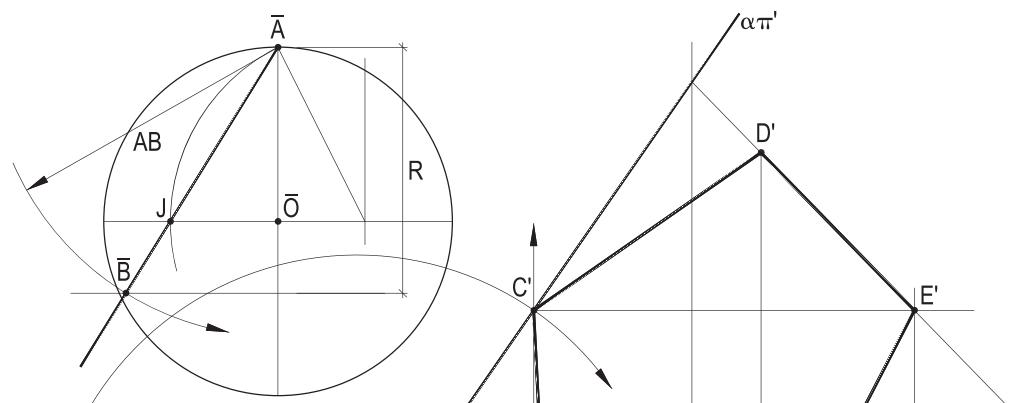


Figura 777

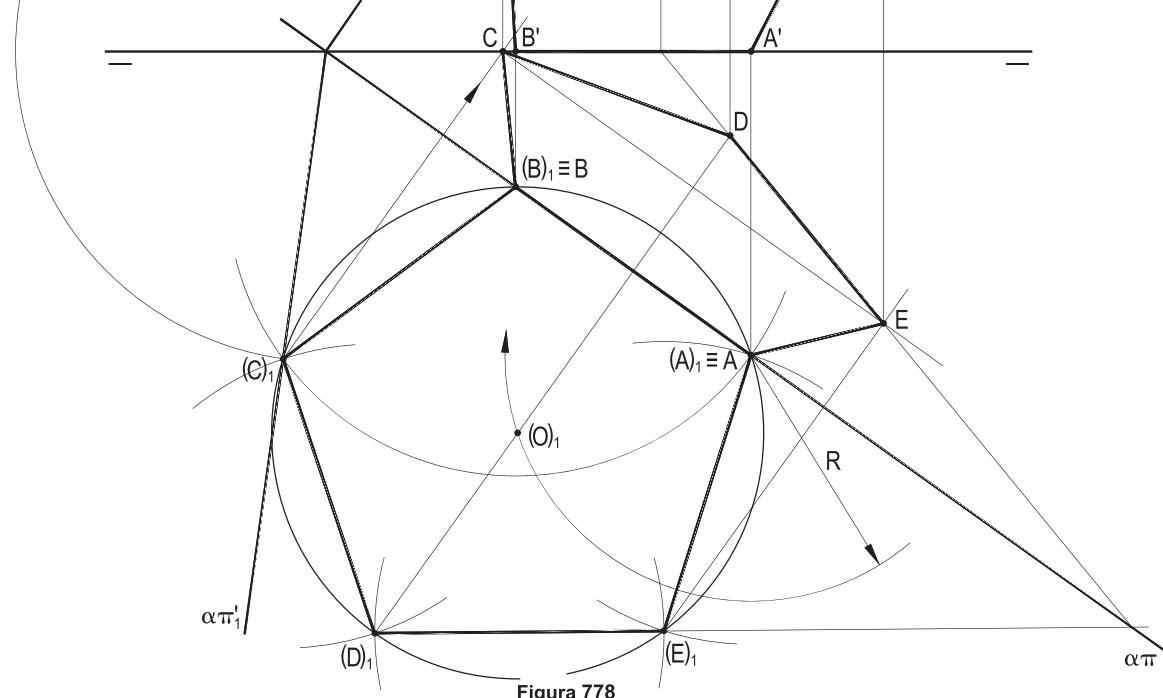


Figura 778

**642 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ), pertencente à reta de perfil ( $V(H)$ ), dada por suas projeções, sabendo que eles são, em épura, voltados para a direita e que, no espaço, formam, entre si, ângulo igual a  $60^\circ$ .**

Resolução: O rebatimento do plano ( $\alpha$ ) sobre o plano de perfil da reta dada ( $V(H)$ ) proporciona, pelo uso da reta ( $L\bar{J}$ ) e do arco capaz de  $60^\circ$  para  $\bar{V}\bar{H}$ , a solução (Figura 779), por determinar a V.G. da porção  $\bar{J}V = (J)(V)$  do traço vertical de ( $\alpha$ ), entre ( $\pi'\pi$ ) e aquele plano de perfil.

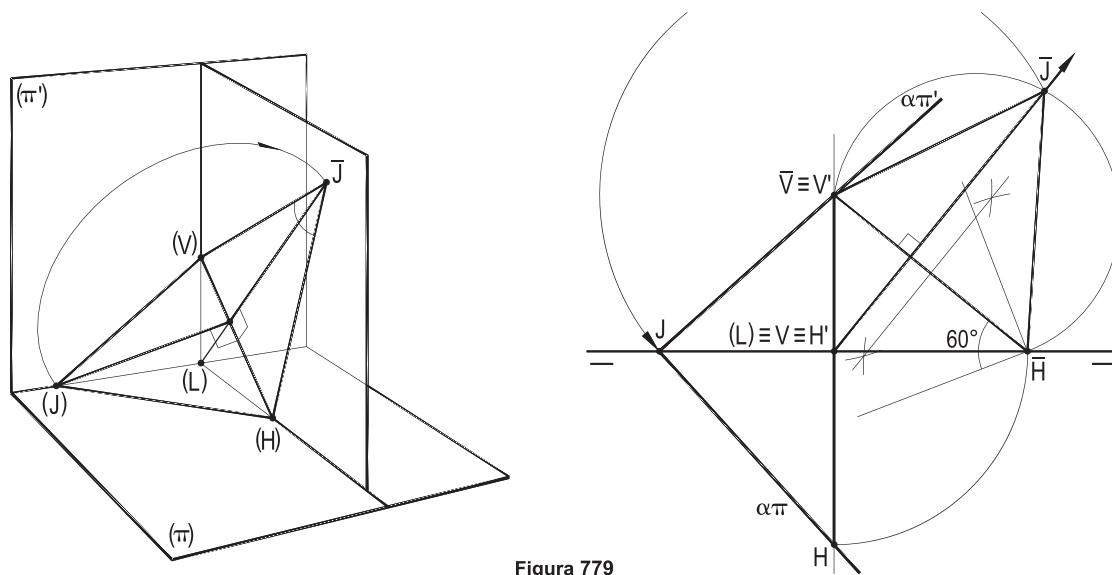


Figura 779

**643 – Construir a projeção vertical do triângulo (A)(B)(C), sabendo que seu ângulo interno (A) vale  $45^\circ$  e que, em épura, as projeções não se cruzam.**

**Dadas as projeções  $B'$ ,  $B$ ,  $C'$ ,  $C$  e  $A$ .**

Resolução: Aproveitando ser horizontal o lado  $(B)(C)$ , opera-se com o rebatimento do plano do triângulo sobre o plano horizontal ( $\theta$ ), de  $(B)(C)$ , para construir a V.G. do triângulo, com o auxílio do arco capaz de  $45^\circ$  para o segmento  $BC$ , da charneira  $h$ , e da perpendicular, por  $A$ , a essa charneira.

Construído o triângulo de rebatimento  $A\bar{A}J$ , obtém-se o valor  $z$  do cateto  $A\bar{A}$ , que corresponde à cota do ponto  $(A)$ , em relação à do plano ( $\theta$ ), com uma só solução, para que as projeções do triângulo restem exteriores uma à outra (Figura 780).

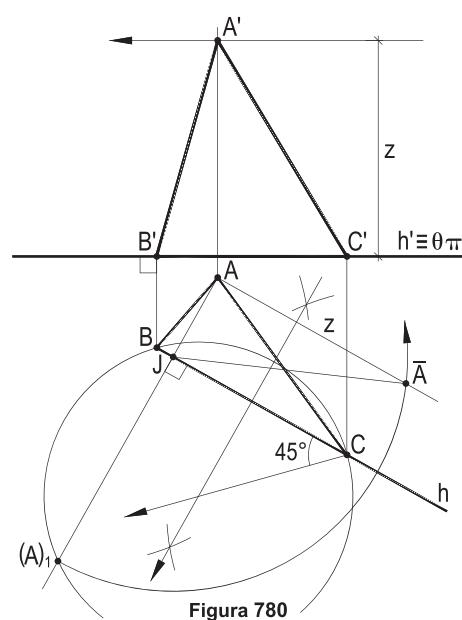


Figura 780

**644 - Construir as projeções do hexágono regular de centro ( $O$ ), pertencente ao plano formado pelas retas ( $r$ ) e ( $s$ ), sabendo que ele possui lados horizontais iguais a 19 mm.**

**Dadas as projeções  $r'$ ,  $r$ ,  $s'$ ,  $s$  e  $O'$ .**

Resolução: Por falta da linha de terra, utiliza-se um plano horizontal auxiliar ( $\alpha$ ) como referência e sua interseção ( $h$ ) com o plano das retas dadas como charneira e, com o auxílio do triângulo de rebatimento  $M\bar{M}J$ , efetua-se seu rebatimento sobre ( $\alpha$ ), o que permite, marcado ( $O$ ) no plano de ( $r$ ) e ( $s$ ), construir a V.G. do hexágono procurado (Figura 781).

O alçado foi simplificado pela particularidade de os lados ( $A)(F)$  e ( $C)(D)$  e a diagonal ( $B)(E)$  serem horizontais.

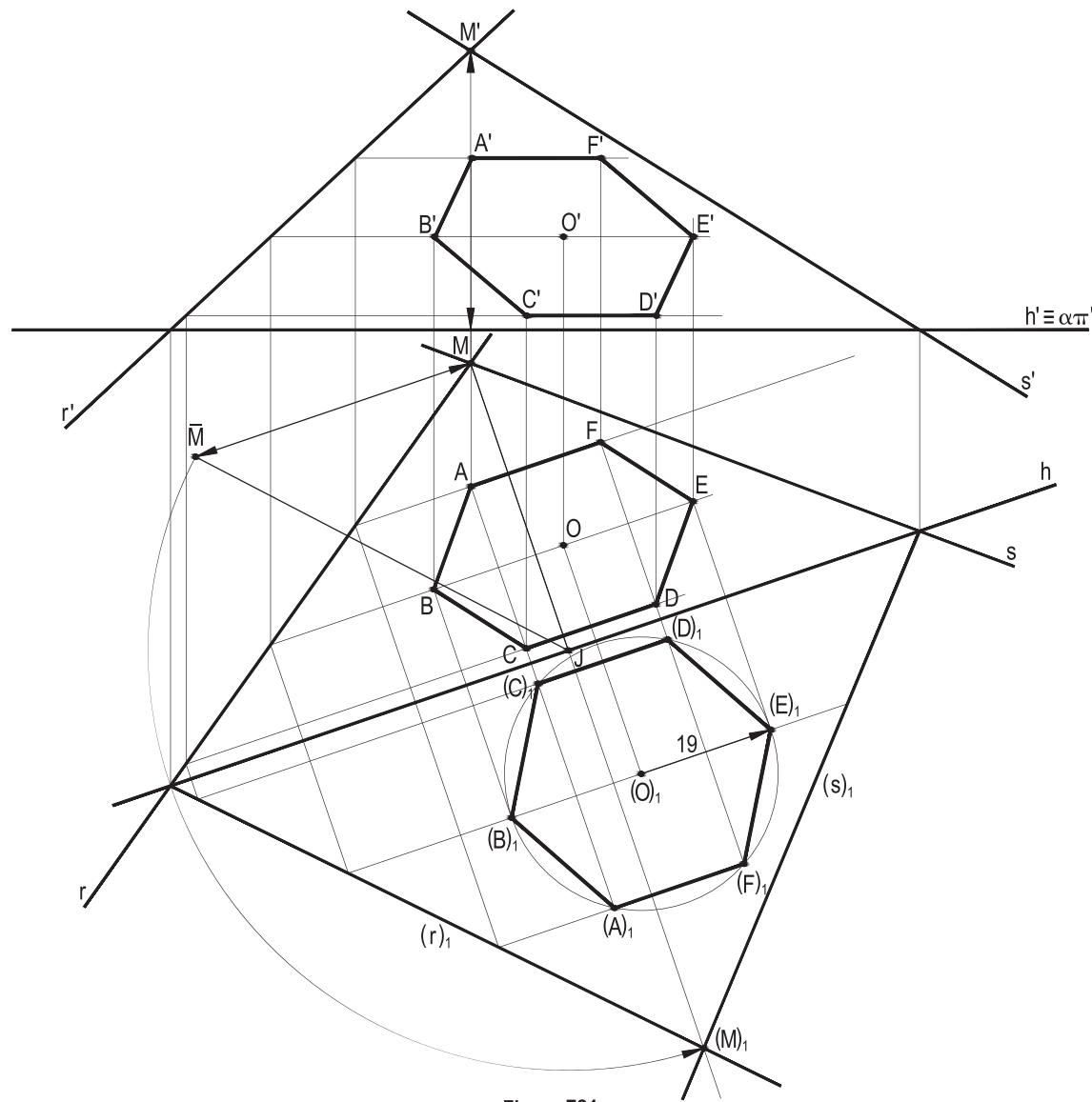


Figura 781

**645 – Desenhar as projeções do quadrilátero convexo  $(A)(B)(C)(D)$ , pertencente a um plano  $(\alpha)$ , paralelo a  $(\pi'\pi)$ , sabendo que seus ângulos internos  $(A)$  e  $(C)$  são retos e que a diagonal  $(B)(D)$  pertence ao plano  $(\gamma)$ ,  $(B)$  com abscissa maior que a de  $(D)$ .**

**São dados as projeções verticais dos vértices  $(A)$  e  $(C)$  os traços de  $(\alpha)$  e de  $(\gamma)$ .**

Resolução: O quadrilátero  $(A)(B)(C)(D)$ , tendo retos seus ângulos  $(A)$  e  $(C)$ , obriga que sua diagonal  $(B)(D)$  seja um diâmetro do círculo que o circunscreve (Figura 782).

A diagonal  $(B)(D)$ , pertencendo a  $(\alpha)$  e a  $(\gamma)$ , há de ter por suporte a interseção  $(r)$  desses dois planos. Assim, o centro  $(O)$  do quadrilátero terá que ser o ponto comum à mediatrix  $(m)$  da diagonal  $(A)(C)$  e a essa reta  $(r)$ .

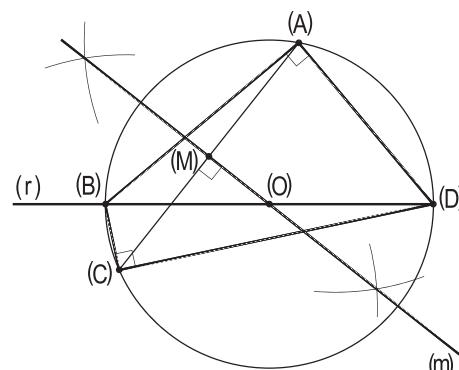


Figura 782

A resolução se faz, por isso, com a marcação de  $(A)(C)$  em  $(\alpha)$  e com o rebatimento do plano  $(\alpha)$ , a construção da reta  $(r)$  e com a obtenção do ponto  $(O)$ , interseção desta reta  $(r)$  com a mediatrix  $(m)$  da diagonal dada  $(A)(C)$  (Figura 783).

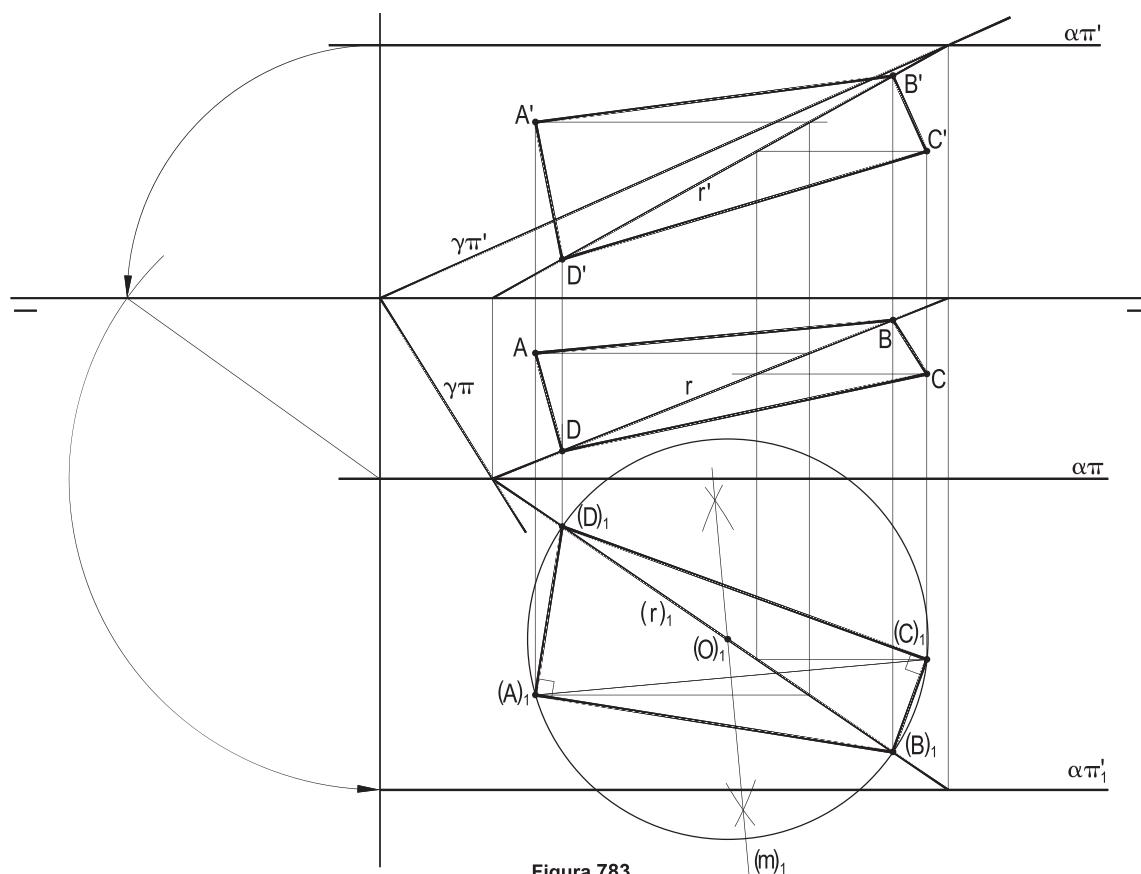


Figura 783

**646** – Desenhe as projeções do hexágono regular pertencente ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo que ele tem lados paralelos à reta ( $r$ ), da qual se dá a projeção vertical  $r'$ , e que o círculo a ele circunscrito tangencia as fronto-horizontais de ( $\alpha$ ) que distam 34 mm da linha de terra.

Arbitre a abscissa do vértice inicial.

Resolução: O próprio corte de perfil que permite determinar as duas fronto-horizontais de ( $\alpha$ ) estipuladas traz, também, a distância entre os traços do plano, o que permite rebatê-lo sobre ( $\pi$ ), para a construção do hexágono, com dois lados e, então, uma diagonal paralelos à reta ( $r$ ), marcada em ( $\alpha$ ).

O alçado foi efetuado com o auxílio das retas paralelas a ( $r$ ) (Figura 784).

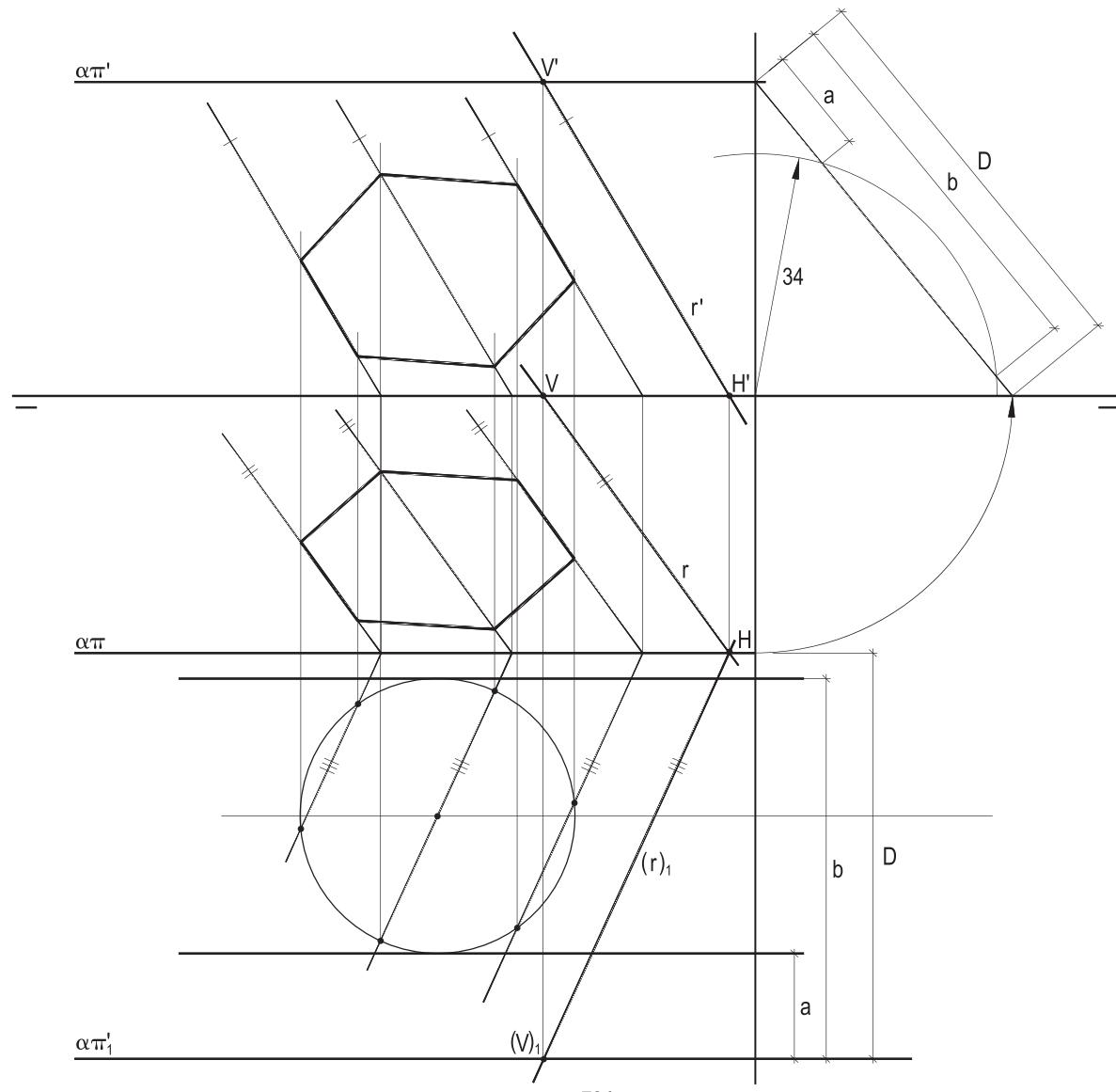


Figura 784

**647 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), do primeiro diedro, sabendo que o ângulo interno (A) vale  $30^\circ$ ; que os lados (A)(B) e (A)(C) são diretamente proporcionais aos números 3 e 2 e que (A) pertence a ( $\pi'$ ), com a maior abscissa possível.**

**Dadas as duas projeções do lado (B)(C).**

Resolução: Uma construção geométrica, a partir de um ângulo  $\bar{A}$  de  $30^\circ$  e da aplicação de 3 e 2 unidades sobre seus lados, com translação do valor do lado BC, até  $\bar{BC}$ , proporciona a determinação do valor da altura  $h = \bar{AH}$ , do triângulo, e a posição de seu pé (H), sobre (BC) ( $\bar{H}$  em  $\bar{BC}$ ).

E um corte de perfil fornece, a partir da abscissa de (C), a posição do vértice (A), pela abscissa  $CH = \bar{CH}$  (Figura 785).

**648 – Desenhar as projeções do triângulo retângulo (A)(B)(C), pertencente a ( $\beta_{13}$ ), sabendo que o vértice (A) pertence a ( $\beta_{24}$ ). Determine, ainda, a posição da linha de terra.**

**Da hipotenusa (B)(C) são dadas as projeções B, B' e C' de seus extremos.**

Resolução: Imediata a obtenção da projeção horizontal C do vértice (C), pelas diferenças necessariamente iguais entre cotas e afastamentos com (B), assim como a determinação da linha de terra, pelo traço (J) de (B)(C) com ( $\beta_{24}$ ).

Com o rebatimento de ( $\beta_{13}$ ) sobre ( $\pi$ ), pode-se construir a V.G. do triângulo, que deverá se inscrever na circunferência de diâmetro (B)(C).

E, para pertencer a ( $\beta_{24}$ ), o vértice (A) tem que estar na linha de terra, que, observe-se (Figura 786), pode ter duas orientações.

Há uma segunda solução, para (A), indicada pelo ponto 2, mas não completada na épura.

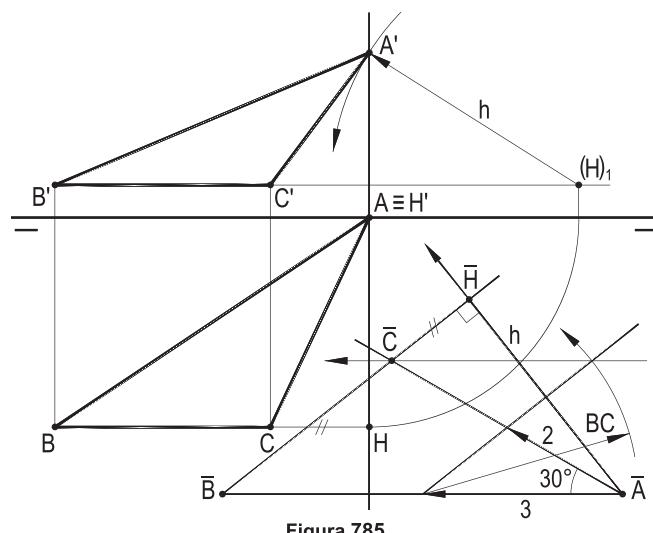


Figura 785

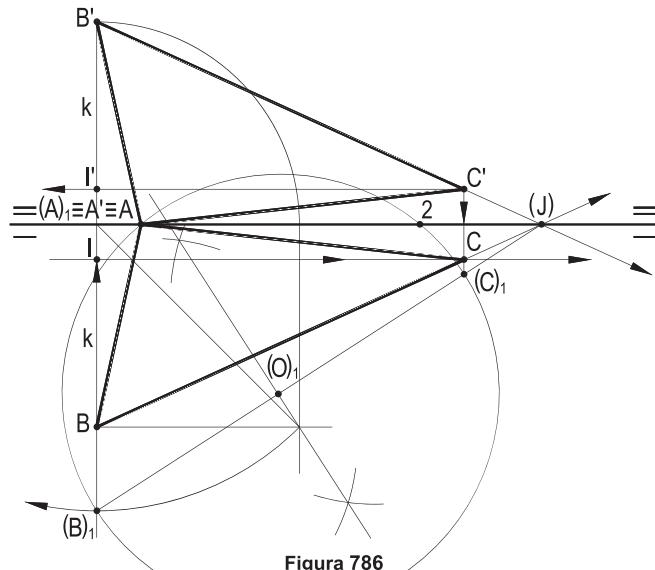


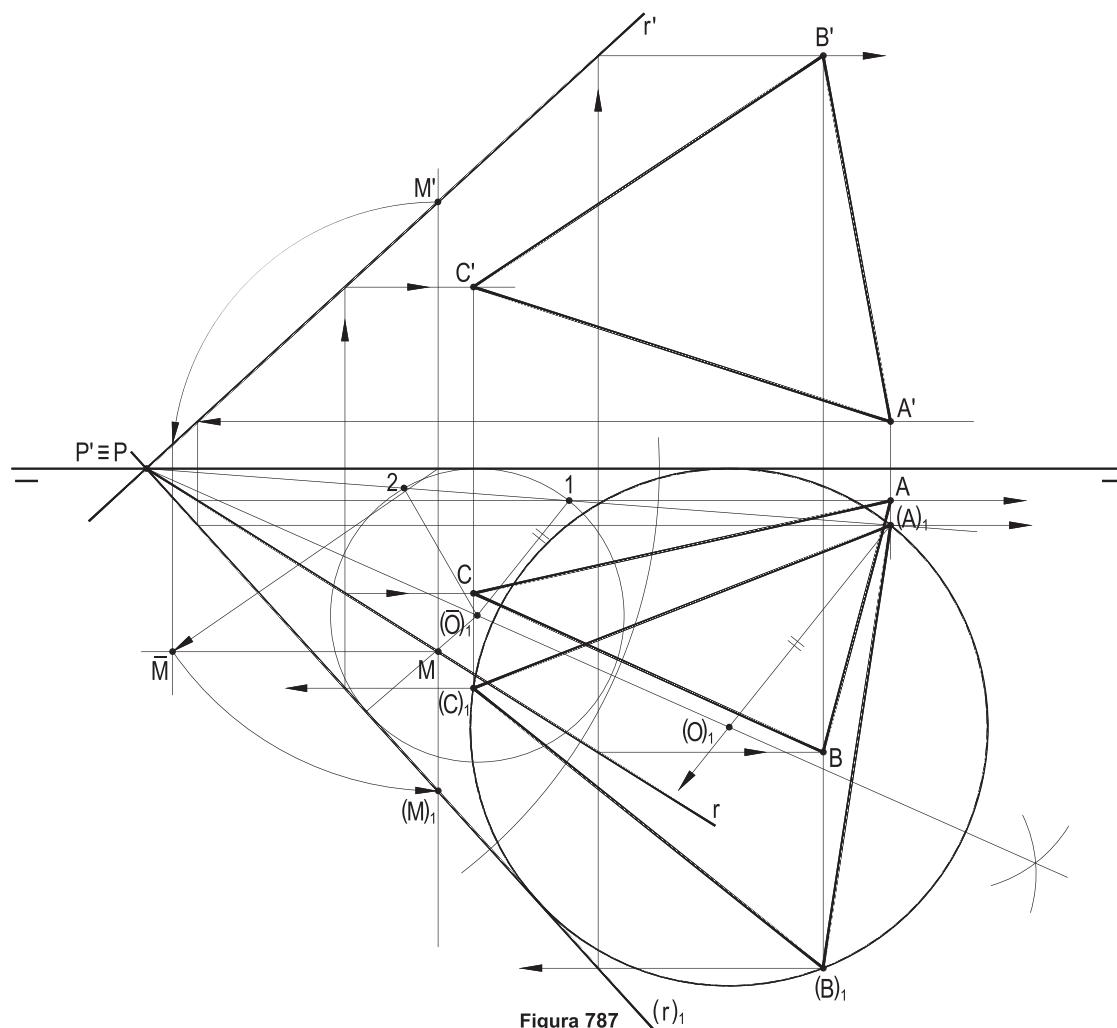
Figura 786

**649** – Desenhar as projeções do menor triângulo equilátero (A)(B)(C), do primeiro diedro, inscrito num círculo que tangencia a reta ( $r$ ) e a linha de terra.

A cota de (B) é maior que a de (C) e todos os vértices têm abscissas positivas.

São dadas as duas projeções de  $(r)$  e a vertical de  $(A)$ .

Resolução: O fato de o círculo circunscrito ao triângulo pedido ser tangente à reta ( $r$ ), concorrente com ( $\pi'\pi$ ), note-se, e à própria linha de terra, obriga que o seu plano seja pertencente à linha de terra, o que, de pronto, permite obter a projeção horizontal do vértice ( $A$ ), com auxílio de uma fronto-horizontal (Figura 787). Para operar em verdadeira grandeza, rebate-se o plano ( $\pi'\pi$ )–( $M$ ) do triângulo sobre ( $\pi$ ), levando a reta ( $r$ ) e o ponto ( $A$ ) às posições ( $r_1$ ) e ( $A_1$ ) e, para construir o círculo circunscrito ao triângulo, opera-se com um outro auxiliar, ( $\bar{O}_1$ ), genérico, mas tangente a ( $\pi'\pi$ ) e a ( $r_1$ ), e com a homotetia de polo ( $P$ ) (Figura 787), optando-se, das duas posições possíveis para o centro do círculo, por aquela que corresponde ao menor triângulo ( $A_1B_1C_1$ ).



**650 – Construir as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), sabendo que o vértice (C) pertence a  $(\beta_{13})$ , com abscissa menor que a de (B), dadas as projeções do lado (A)(B).**

Resolução: O vértice (C) há de pertencer ao plano conduzido por (B) e perpendicular ao lado dado (A)(B). Assim, construídos os traços desse plano ( $\alpha$ ) e, mediante uma rotação, que torne (A)(B) horizontal, obtida a V.G. do lado a do quadrado (Figura 788), rebate-se ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), levando a tal rebatimento a interseção (i) de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{13}$ ), à qual deve pertencer o vértice  $(C)_1$ , rebatimento de (C), que, afinal, é determinado pela interseção dessa reta (i)<sub>1</sub> com a circunferência de centro  $(B)_1$  e raio a.

Das duas possibilidades para (C), optou-se, conforme imposto no enunciado do problema, pela que corresponde à abscissa inferior à do vértice (B) (Figura 788).

Para o alçamento, aproveitou-se a reta (i), completando as projeções com paralelas.

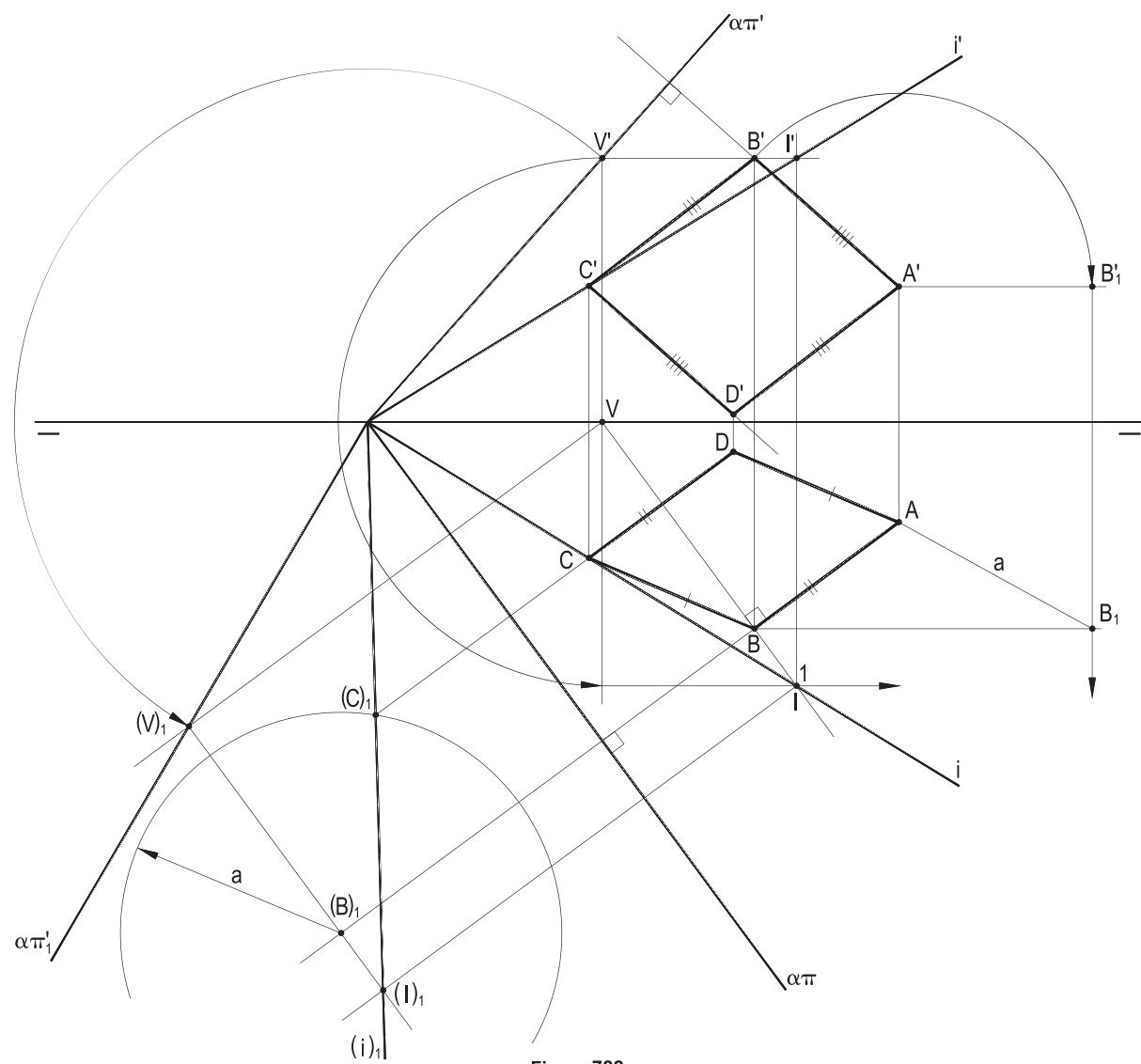


Figura 788

**651 – Desenhar as projeções do losango (A)(B)(C)(D), pertencente ao plano ( $\alpha$ ), sabendo que os lados (A)(B) e (A)(D) pertencem, respectivamente, aos planos ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ).**

O losango encontra-se inteiramente no primeiro diedro e seus lados medem 38 mm.

São dados os traços dos planos ( $\alpha$ ), ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ).

Resolução: Por pertencerem aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) e aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ), respectivamente, os lados (A)(B) e (A)(D) do losango têm que estar sobre as interseções (r) e (s) desses pares de planos, de projeções simples de obter, determinando-se o vértice (A) (Figura 789).

Rebatido ( $\alpha$ ), sobre ( $\pi$ ), pode-se aplicar, sobre essas interseções, a V.G. do valor do lado do losango, buscando a solução do primeiro diedro, marcando os vértices  $(B)_1$  e  $(D)_1$ .

O alçado é bem simples, pela utilização daquelas duas retas e de paralelas a elas (Figura 789).

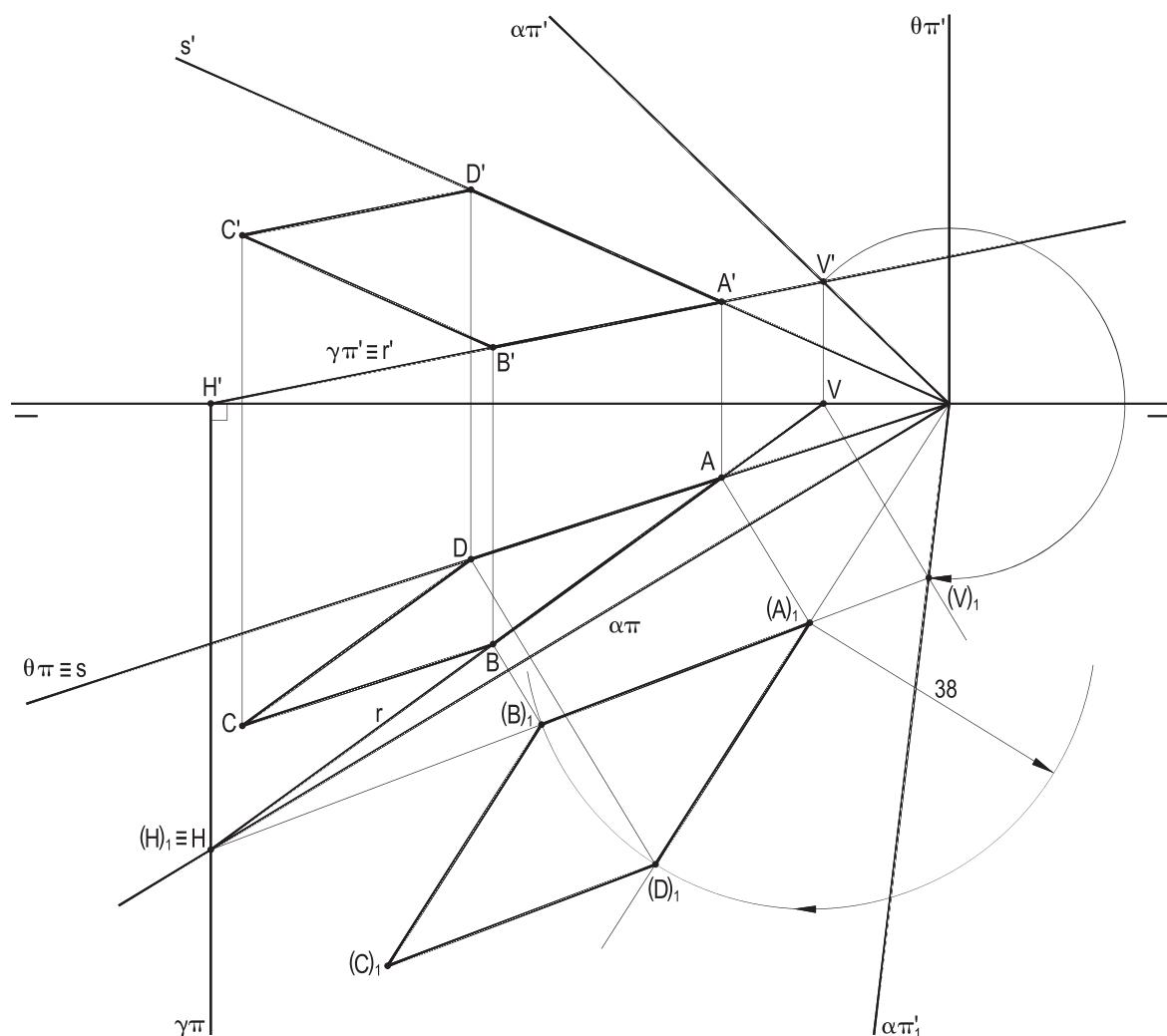


Figura 789

**652** – Dado um triângulo  $(A)(B)(C)$ , por suas projeções, pede-se inscrever nele um quadrado, que tenha um lado sobre  $(B)(C)$  e os outros dois vértices respectivamente em  $(A)(B)$  e  $(A)(C)$ .

Resolução: Por inexistir a linha de terra, rebate-se o plano do triângulo (A)(B)(C) sobre um plano horizontal auxiliar ( $\theta$ ), funcionando como charneira a reta horizontal (h), interseção desses dois planos.

Com o emprego do triângulo de rebatimento, para o ponto (A), obtém-se a V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1$  do triângulo dado e com uma homotetia de polo  $(A)_1$  leva-se um quadrado arbitrado  $\overline{JKLM}$ , mas com dois lados paralelos a  $(B)_1(C)_1$ , a assumir sua posição definitiva  $(J)(K)(L)(M)$ , inscrita no triângulo dado (Figura 790).

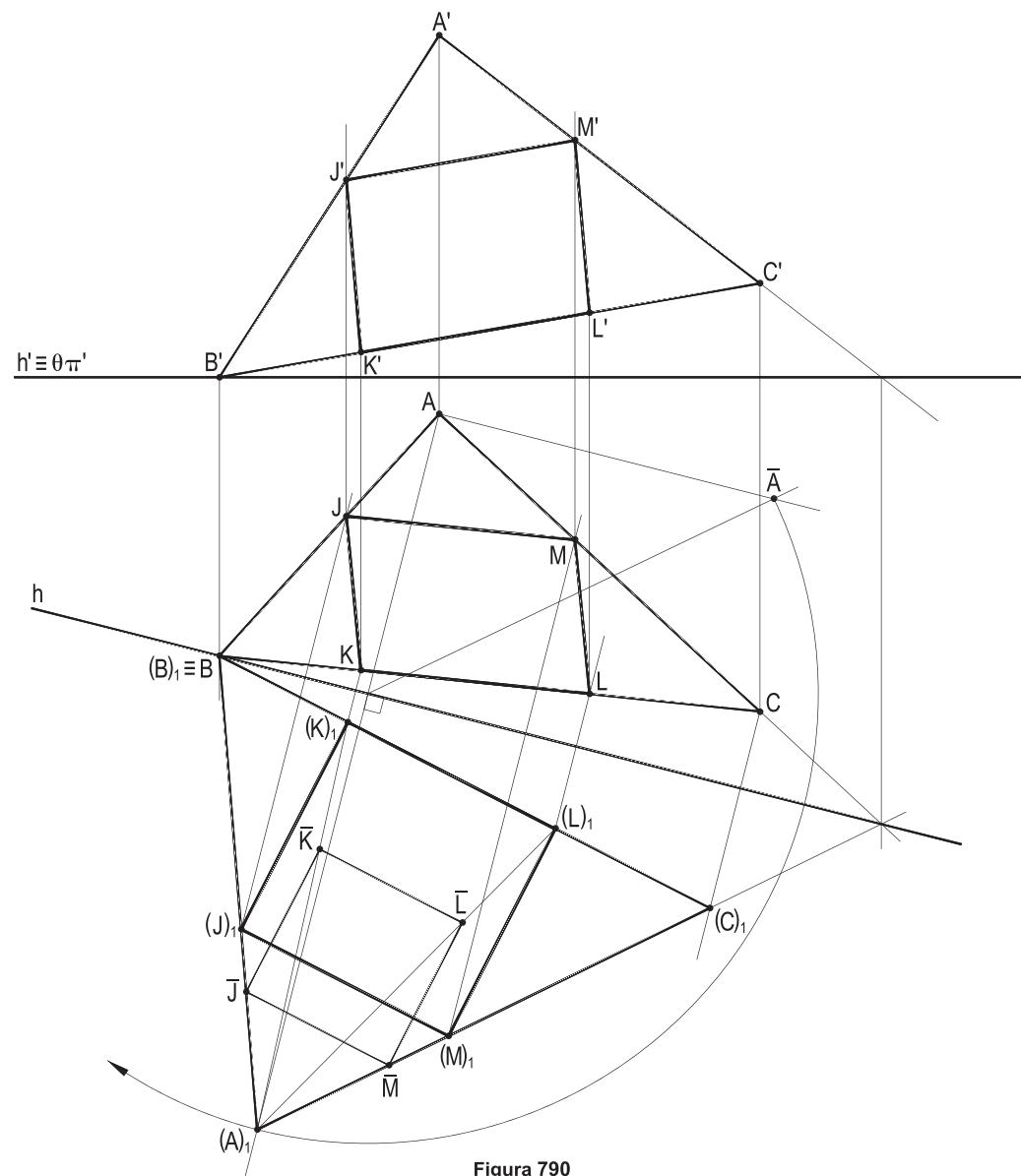


Figura 790

**653 – São dados os planos  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$  e  $(\theta)$ , o primeiro por seus traços e os outros dois, paralelos entre si, por seus traços horizontais  $\gamma\pi$  e  $\theta\pi$ .**

Sabendo que  $(\gamma)$  e  $(\theta)$  são perpendiculares a  $(\beta_{24})$ , pede-se desenhar as projeções do hexágono regular, pertencente a  $(\alpha)$ , informando que seu centro tem abscissa nula e que dois lados opostos de hexágono pertencem, respectivamente, a  $(\gamma)$  e a  $(\theta)$ .

Resolução: Rebatido  $(\alpha)$  sobre  $(\pi)$  e levadas a esse rebatimento as interseções  $(r)$  e  $(s)$  de  $(\gamma)$  e de  $(\theta)$  com  $(\alpha)$ , o centro ( $C$ ) do hexágono, com abscissa nula, há de pertencer à reta  $(t)$ , equidistante de  $(r)$  e de  $(s)$  (Figura 791).

A construção do hexágono se faz, então, pelo envio, de  $(C)_1$ , de uma perpendicular a  $(s)_1$  e de uma reta inclinada de  $30^\circ$  em relação a essa, definindo um primeiro vértice  $(A)_1$ , completando-se a V.G. do hexágono com a utilização do círculo a ele circunscrito.

O alçamento foi realizado com o auxílio de lados e diagonais paralelos (Figura 791).

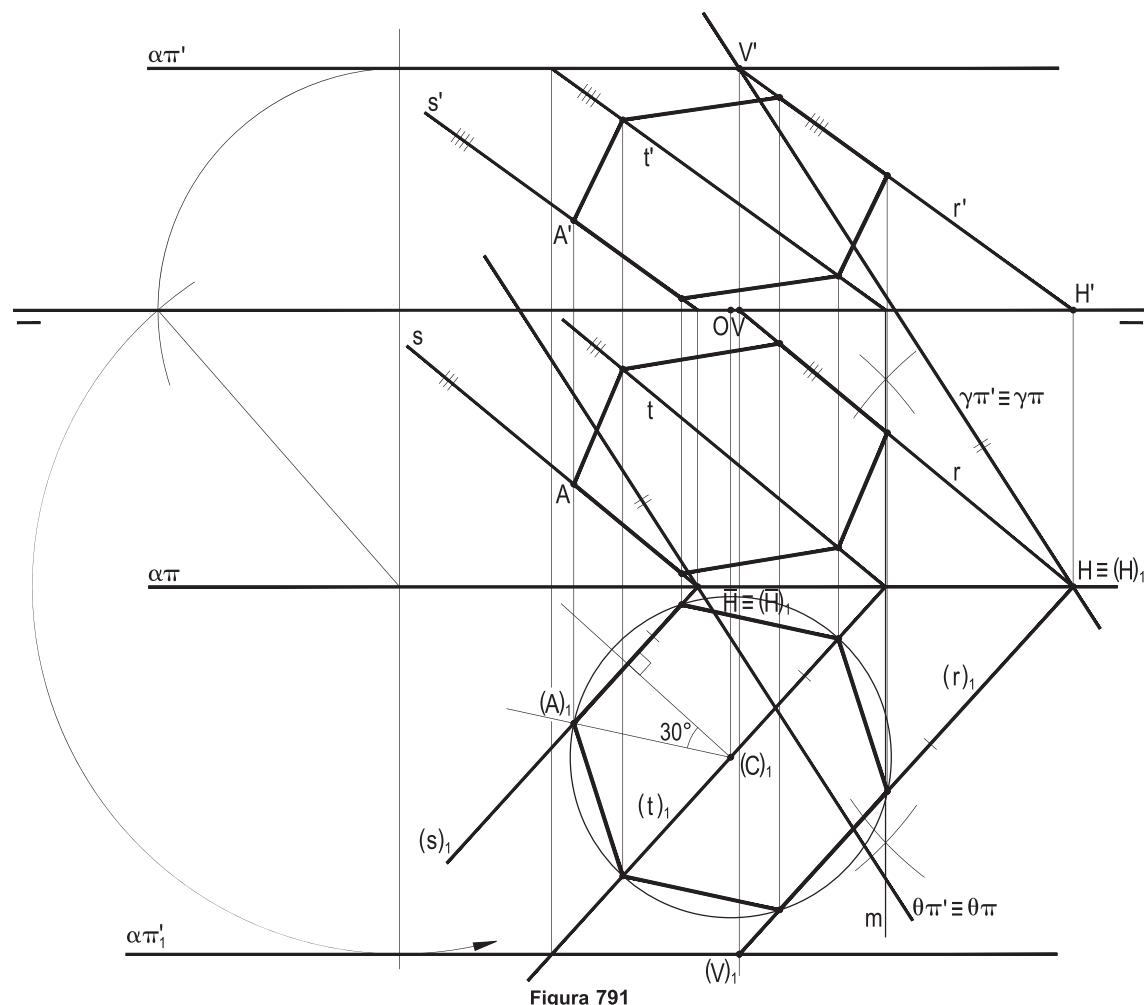


Figura 791

**654 – Dada a projeção horizontal de um triângulo (A)(B)(C) de um plano de topo, sabendo que seu lado (B)(C) mede, em V.G., tanto quanto a projeção horizontal AB, pede-se obter o traço vertical  $\alpha\pi'$ , a projeção vertical do triângulo e sua V.G.**

**Dados A, B, C e  $\alpha\pi'$ , escolha a solução do primeiro diedro.**

Resolução: Por ser frontal o lado (B)(C), sua V.G. vem em sua projeção vertical, o que permite, com a simples construção do segmento 12 igual à projeção horizontal AB, como estabelecido no enunciado, obter a direção 12 do traço vertical do plano, o que traz a solução para  $\alpha\pi'$  (Figura 792).

A projeção vertical do triângulo é imediata, já que  $(\alpha)$  é de topo, assim como sua V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1$ , pelo rebatimento de  $(\alpha)$  sobre  $(\pi)$ .

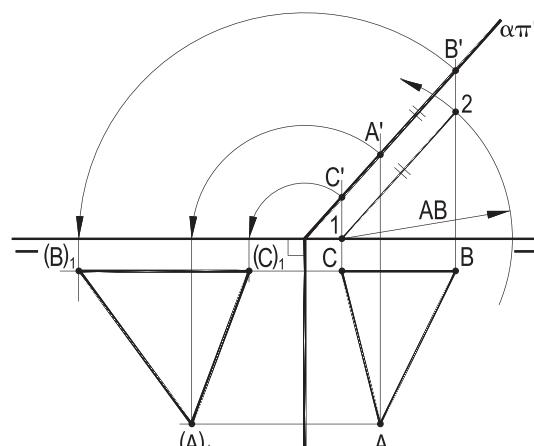


Figura 792

**655 – A reta (A)(B), dada por suas projeções, é de máxima inclinação do plano  $(\alpha)$  e é, também, suporte para o diâmetro de um círculo tangente aos dois traços de  $(\alpha)$ .**

**Pede-se construir as projeções do trapézio isósceles circunscrito a esse círculo, sabendo que seus lados iguais pertencem um a  $(\pi)$  e o outro a  $(\pi')$ .**

Resolução: Simples a obtenção dos traços de  $(\alpha)$ , aproveitando os traços  $(V)$  e  $(H)$  de (A)(B).

Rebatido o plano  $(\alpha)$ , o centro  $(O)$  do círculo inscrito no trapézio é o cruzamento de  $(V)_1(H)_1$  com a bissetriz do ângulo formado pelos traços de  $(\alpha)$ , para obrigar a igualdade dos lados do trapézio pertencentes aos traços de  $(\alpha)$ .

As bases  $(P)(S)$  e  $(Q)(R)$  do trapézio são, então, perpendiculares a essa bissetriz (Figura 793), circunscrevendo o círculo  $(O)_1$ .

O alçado é imediato, já que todos os quatro vértices pertencem, aos pares, aos traços de  $(\alpha)$ , aproveitando-se o paralelismo de  $(P)(S)$  e  $(Q)(R)$ .

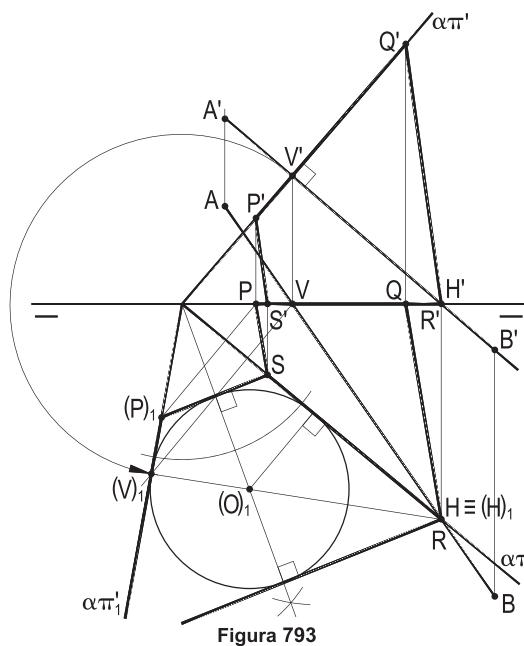


Figura 793

**656 – Desenhar a projeção vertical do triângulo isósceles (A)(B)(C), de base (B)(C), sabendo que o ângulo interno (A) vale  $120^\circ$  e que o lado (A)(B), dado por sua projeção vertical, pertence ao traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano do triângulo, que forma  $45^\circ$  com  $(\pi')$ .**

Resolução: Imediata é a construção da V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1$  do triângulo, assim como seu alçado, com o uso do triângulo de rebatimento  $J\bar{C}C'$ , que usa a V.G. do ângulo que o plano do triângulo forma com  $(\pi')$  (Figura 794). Há uma segunda solução simétrica da apresentada em relação a  $\alpha\pi'$ .

**657 – Construir as projeções do triângulo equilátero (A)(B)(C), cujo plano forma  $60^\circ$  com  $(\pi)$ , dadas as projeções do lado horizontal (B)(C), escolhendo a solução que, em épura, deixa A entre B'C' e BC e A' exterior a esse intervalo.**

Resolução: Aproveitando o lado horizontal (B)(C) como charneira, o rebatimento do plano do triângulo sobre o plano ( $\theta$ ) de (B)(C) traz a V.G.  $(A)_1BC$  de (A)(B)(C), de alcance bem simples (Figura 795), pela utilização do triângulo de rebatimento  $AM\bar{A}$ , que aproveita o ângulo de  $60^\circ$ , tal como feito no problema anterior.

**658 – Determinar a verdadeira grandeza do menor ângulo formado pelos traços do plano definido pelas retas (r) e (s), dadas por suas projeções.**

Resolução: Rebatido o plano das retas sobre o plano horizontal de uma reta horizontal (h) desse plano e levada ao rebatimento uma frontal (f) coplanar, obtém-se, em V.G., o ângulo  $\varphi$ , pedido, visto que essas principais (h) e (f) têm, respectivamente, as direções dos traços de seu plano.

Rebatimento feito com auxílio do triângulo de rebatimento  $MJ\bar{M}$  (Figura 796).

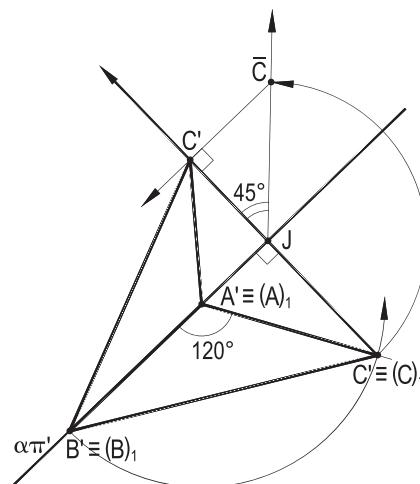


Figura 794

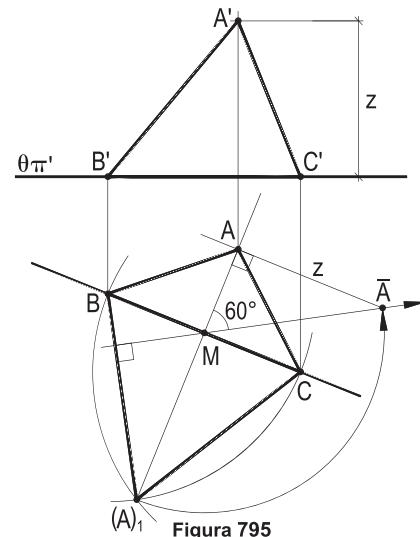


Figura 795

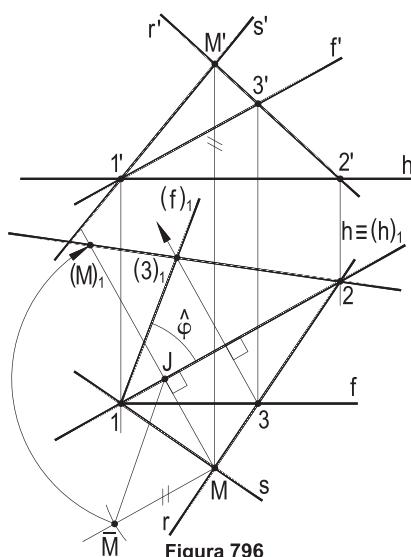


Figura 796

**659 – As retas concorrentes (r) e (s), dadas por suas projeções, definem um plano pertencente ao ponto (A), dado por sua projeção A'.**

**Pede-se construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), de perímetro mínimo, com (B) em (r) e (C) em (s).**

**Resolução:** Sabe-se (*Geometria Plana*, números 26 e 28) que o perímetro mínimo dos triângulos que têm um vértice fixo (A) e os outros dois sobre duas retas concorrentes (r) e (s) é o que se obtém pela interseção da reta formada pelos simétricos  $(A_1)$  e  $(A_2)$  de (A) em relação a (r) e a (s) com elas.

De fato, basta ver que para quaisquer outros pontos (P) e (Q) dessas retas, o percurso  $(A_1)(P)(Q)(A_2)$ , envolvendo o segmento  $(A_1)(A_2)$ , será a este superior (Figura 797).

Assim, basta rebater o plano dado sobre o plano horizontal ( $\theta$ ) que contém (A), construir os simétricos  $(A_1)$  e  $(A_2)$  de (A), em relação a (r) e a (s), e uni-los, para obter os vértices (B) e (C) do triângulo pedido (Figura 798).

**660 – Desenhar as projeções do triângulo (A)(B)(C) retângulo em (A), pertencente ao plano ( $\alpha$ ), sabendo que (B) tem cota igual a 11 mm e que (A) tem cota nula, com a maior abscissa possível, dados  $\alpha\pi$ , B e C, BC e  $\alpha\pi$  paralelos.**

**Resolução:** Com auxílio do triângulo de rebatimento para (C), pela utilização de sua cota 11 mm, obtém-se o rebatimento da hipotenusa  $(B)_1(C)_1$  e o vértice (A), com a utilização do círculo de diâmetro  $(B)_1(C)_1$  (Figura 799).

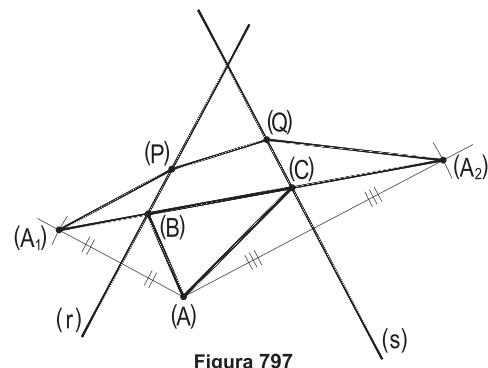


Figura 797

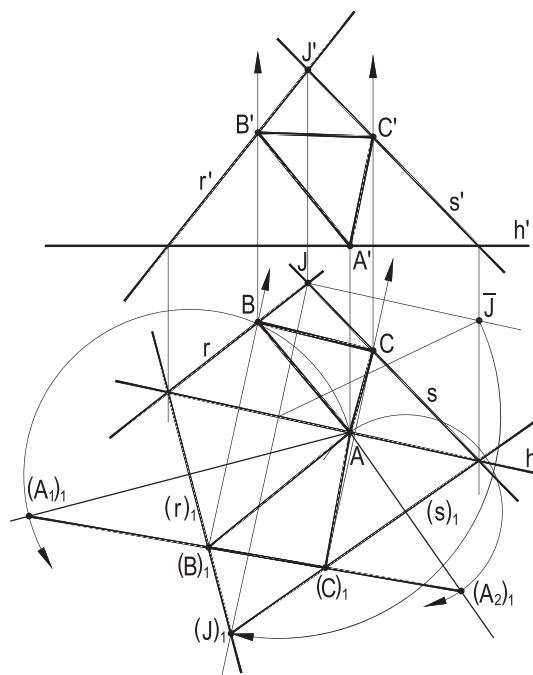


Figura 798

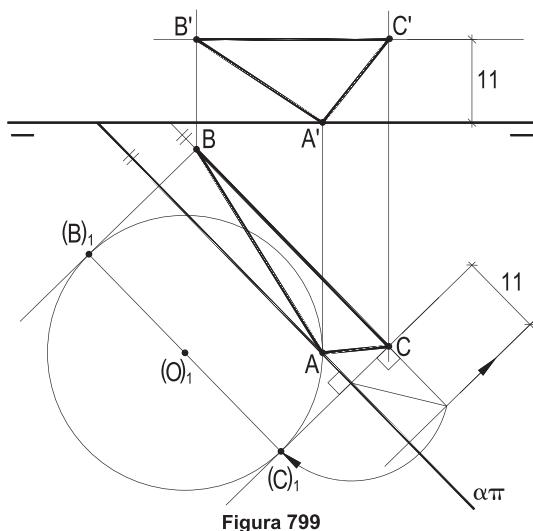


Figura 799

**661 – Construir as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D) pertencente ao plano ( $\alpha$ ), cujos traços são de sentido direto, sabendo que o ângulo objetivo formado por esses traços é igual a  $60^\circ$ .**

**Os lados (A)(B) e (C)(D) são frontais. (D) pertence à horizontal (h), de ( $\alpha$ ).**

**Dadas as projeções  $h'$ ,  $h$  e A.**

Resolução: O ângulo objetivo entre os traços de um plano qualquer é, naturalmente, igual ao formado entre horizontais e frontais desse plano. Então, efetuando o rebatimento do plano ( $\alpha$ ) sobre o plano horizontal da reta (h), porque (A)(B) é a frontal ( $f_1$ ), que se inclina de  $60^\circ$  com as horizontais de ( $\alpha$ ), é imediato obter seu rebatimento ( $f_1$ )<sub>1</sub> e, sobre ele, o vértice (A)<sub>1</sub> (Figura 800).

Construído em V.G. o quadrado pedido, com (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub> em ( $f_1$ )<sub>1</sub> e (D)<sub>1</sub> ≡ D em h, pela utilização do triângulo de rebatimento AJA, para o ponto (A), obtém-se sua cota z, em relação a (h) e, então, com paralelas, completa-se as projeções de (A)(B)(C)(D).

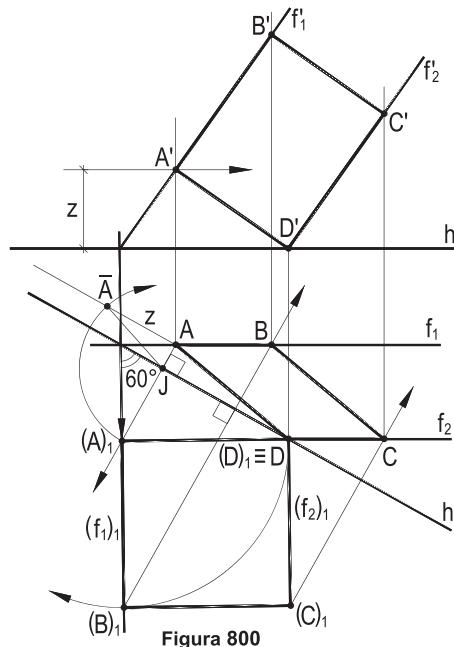


Figura 800

**662 – Construir as projeções e a V.G. do trapézio (A)(B)(C)(D) pertencente ao plano ( $\alpha$ ), no primeiro diedro, com bases (A)(B) e (C)(D) de perfil, (A)(B) com abscissa zero e comprimento igual à metade do de (C)(D). (A)(D) e (B)(C) pertencem, respectivamente, a ( $\pi$ ) e a ( $\pi'$ ).**

**Dados  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$  e a origem O das abscissas.**

Resolução: Rebatido o plano ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), obtém-se a V.G. (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub> da base (A)(B), que duplicada, de (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub> para (A)<sub>1</sub>(K)<sub>1</sub>, com uma simples translação, de (K)<sub>1</sub> para (C)<sub>1</sub>, proporciona a base maior (C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub> e, então, o próprio trapézio pedido.

O alçamento é muito simples porque as bases (A)(B) e (C)(D) são de perfil.

A verdadeira grandeza do trapézio vem no rebatimento (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub>.

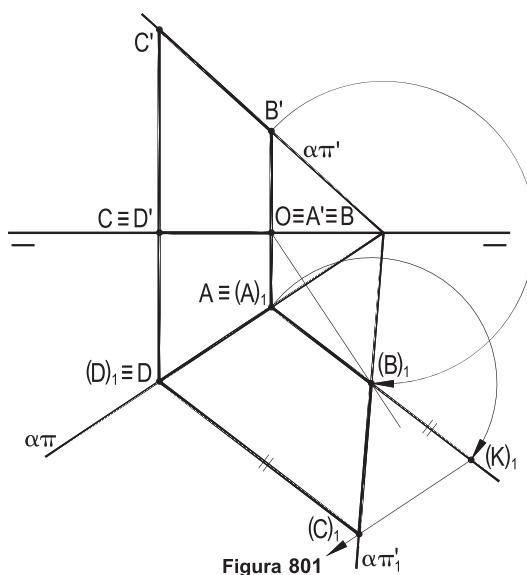


Figura 801

Para todos os casos seguintes, considere um plano qualquer ( $\alpha$ ), uma reta horizontal ( $h$ ), de ( $\alpha$ ), e seu rebatimento ( $(h)_1$ , sobre ( $\pi$ ), em torno de  $\alpha\pi$ .

Diversificando os dados e os pedidos estão incluídos  $\pi'\pi$ ,  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$ ,  $\alpha\pi'_1$ ,  $h'$ ,  $h$  e  $(h)_1$ .

Pede-se, então, para cada caso, completar a épura, a partir dos dados informados.

**663 – Dados  $\pi'\pi$ ,  $h'$ ,  $h$ ,  $(h)_1$**

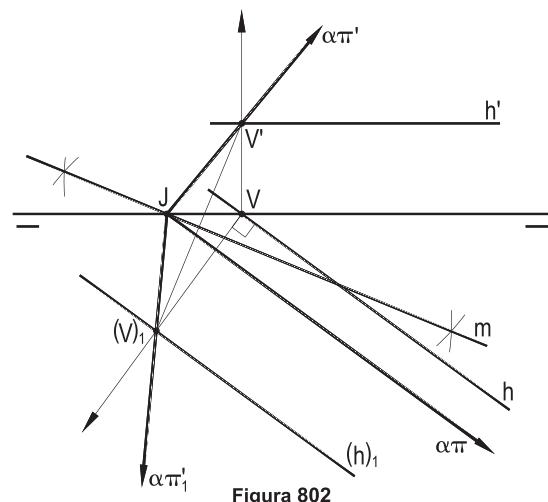


Figura 802

**664 – Dados  $\alpha\pi'$ ,  $h'$ ,  $h$ ,  $(h)_1$**

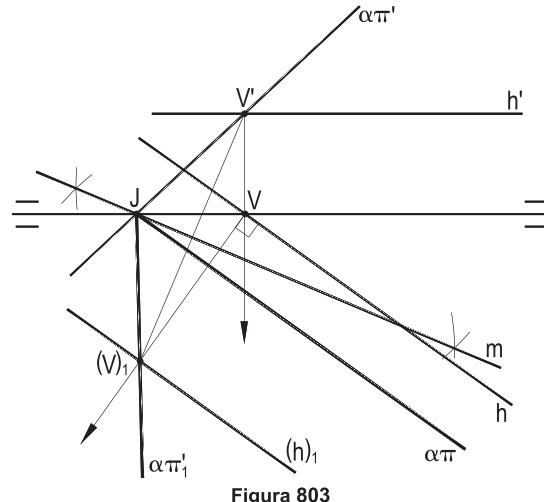


Figura 803

**665 – Dados  $\alpha\pi$ ,  $h'$ ,  $h$ ,  $(h)_1$**

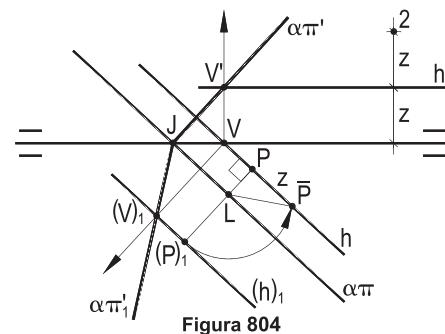


Figura 804

**666 – Dados  $\alpha\pi'$ ,  $\pi'\pi$ ,  $h'$**

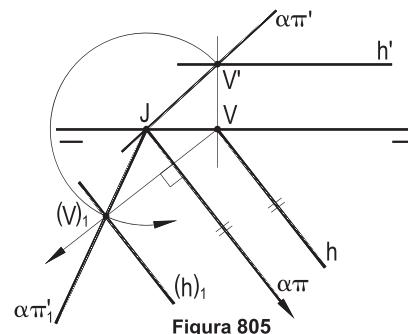


Figura 805

**667 – Dados  $\alpha\pi$ ,  $\alpha\pi'_1$  e a direção  $d$  de  $(\pi'\pi)$     668 – Dados  $\pi'\pi$ ,  $\alpha\pi$ ,  $h'$ ,  $h$**

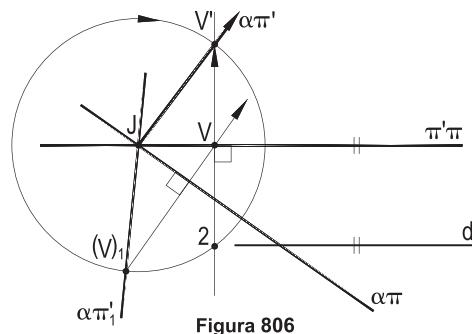


Figura 806

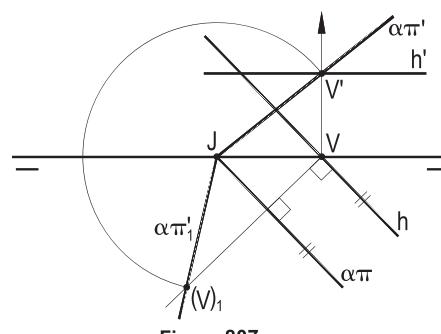
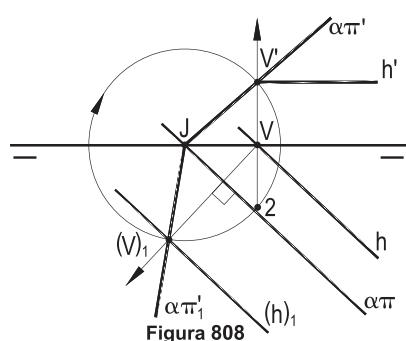
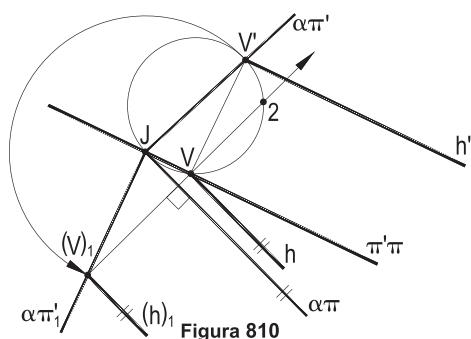


Figura 807

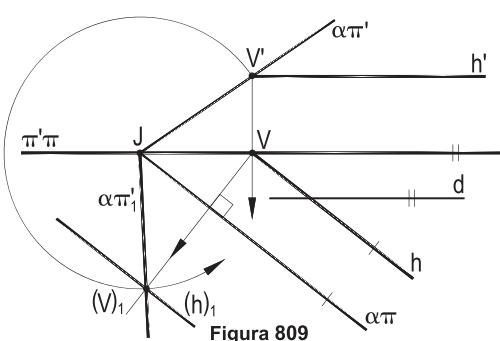
**669 – Dados  $\pi'\pi$ ,  $\alpha\pi$ , h,  $(h)_1$**



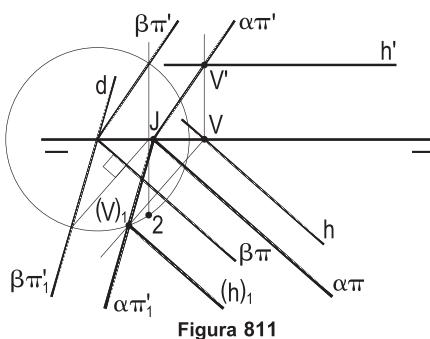
**671 – Dados  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$ ,  $\alpha\pi'_1$**



**670 – Dados  $(h)_1$ ,  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$  e a direção d de  $\pi'\pi$**



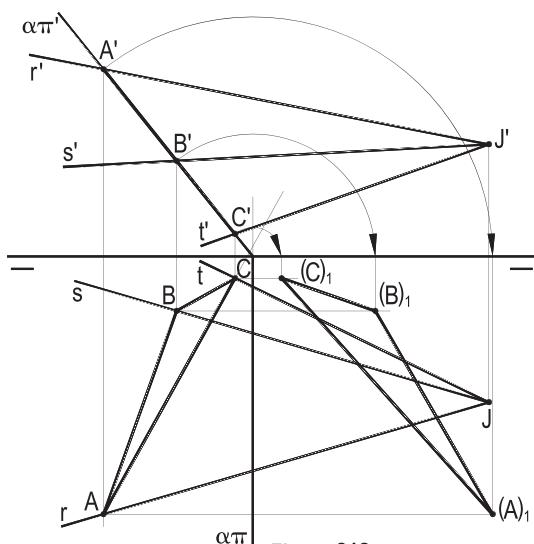
**672 – h', h,  $\pi'\pi$  e a direção d de  $\alpha\pi'_1$**



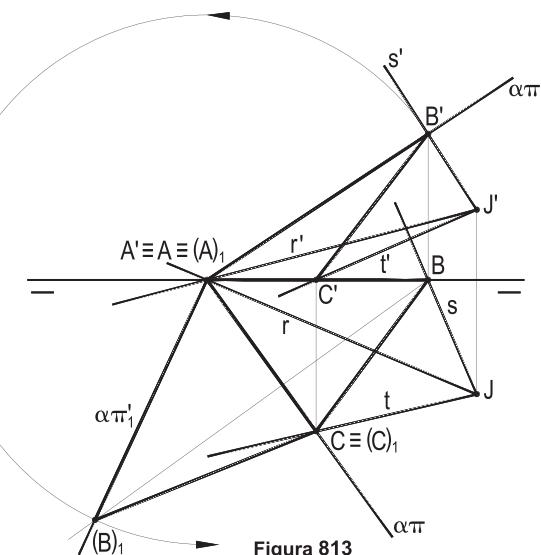
Resoluções: No primeiro caso, V é o ponto chave, dando V' e  $(V)_1$ . A mediatrix m de V'(V)<sub>1</sub> traz J, que, devendo equidistar de V' e de  $(V)_1$ , resolve o problema (Figura 802); no segundo, V' é o ponto chave, proporcionando, em ordem, V,  $\pi'\pi$  (com dupla orientação) e  $(V)_1$  (Figura 803), retornando-se ao problema anterior; no terceiro, o triângulo de rebatimento PPL, para um ponto (P), arbitrado de (h), dá a cota z, por seu cateto PP̄, que proporciona  $\pi'\pi$ , com duas soluções (uma apenas completada) (Figura 804), voltando-se ao problema 663; para o quarto, V' e J são as chaves, dando V,  $(V)_1$  (no arco de centro J e raio JV'),  $\alpha\pi'_1$ ,  $\alpha\pi$  e h (Figura 805); no quinto, J é o ponto chave e, para um ponto  $(V)_1$  arbitrado em  $\alpha\pi'_1$ , vêm V e V', com duas soluções (a segunda não completada) (Figura 806); no seguinte (Figura 807), V é o ponto chave, proporcionando V',  $\alpha\pi'$ ,  $(V)_1$  e  $\alpha\pi'_1$ ; no sétimo, V fornece  $(V)_1$  no cruzamento de  $(h)_1$  com a perpendicular por V a  $\alpha\pi$ , que, alçado, dá V' (duas soluções), resolvendo o problema (Figura 808); no oitavo, J é o ponto chave, trazendo  $\pi'\pi$ , com a direção d e, então, para um V' qualquer de  $\alpha\pi'$ , V,  $(V)_1$  e  $\alpha\pi'_1$  (Figura 809); no seguinte (Figura 810), arbitrado V' em  $\alpha\pi'$  e obtido  $(V)_1$ , o arco capaz de 90° para JV' e a perpendicular por  $(V)_1$  a  $\alpha\pi$  dão, por corte, V, trazendo  $\pi'\pi$ , com duas soluções, para os dados (observe-se que o problema poderia ter apenas uma solução, caso o arco capaz e aquela perpendicular se tangenciassem, ou nenhuma, se fossem um exterior à outra); no último (Figura 811), com a direção d, tomada como o rebatimento do traço vertical  $\beta\pi'_1$ , de um plano ( $\beta$ ), paralelo a ( $\alpha$ ), obtém-se, por alçamento, a direção  $\beta\pi'$  do traço vertical  $\alpha\pi'$  (duas soluções, para as posições dadas) e, por V', completa-se a épura, com paralelas aos traços de ( $\beta$ ).

**Construir as projeções e a V.G. da seção (A)(B)(C) que um dos triedros formados pelas retas ( $r$ ), ( $s$ ) e ( $t$ ), concorrentes no ponto ( $J$ ), todos dados por suas projeções, produz no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, para cada uma das quatro posições, particulares, assinale-se, dadas abaixo.**

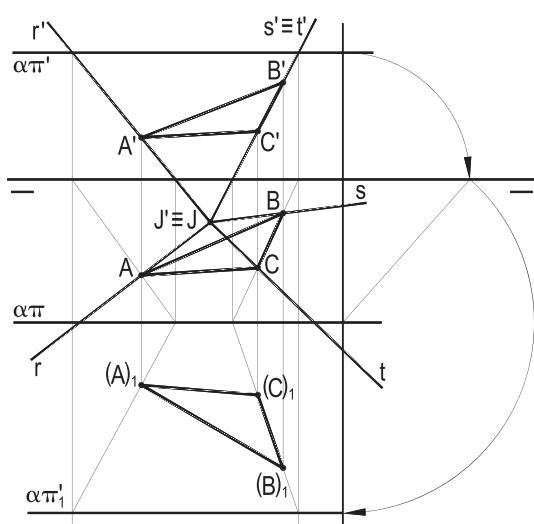
673



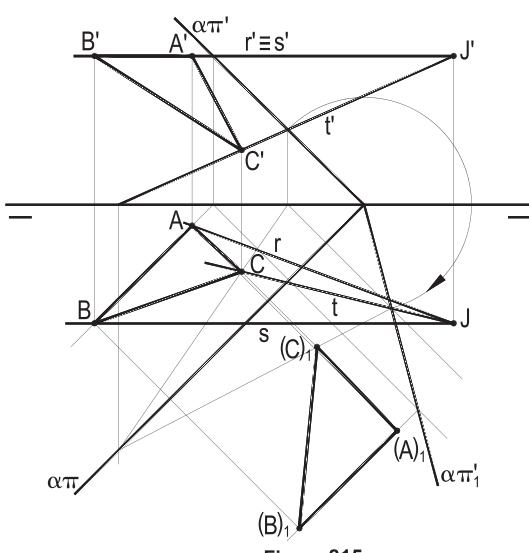
674



675



676



**Resoluções:** O primeiro exemplo é bem simples, por ser ( $\alpha$ ) projetante (Figura 812); o segundo ainda mais, porque os traços das arestas do triedro em ( $\alpha$ ) são pontos, respectivamente, de  $\pi'\pi$ , ( $\pi'$ ) e ( $\pi$ ) (Figura 813); no terceiro, uma face do triedro é de topo, o que simplifica a épura (Figura 814); no último, uma das faces é horizontal (Figura 815). Em todos os casos, o rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) dá a V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1$  pedida.

**677** – A' e A são as projeções do ponto (A) pertencente ao plano ( $\alpha$ ), perpendicular a ( $\beta_{24}$ ), e  $(A)_1$  é o seu rebatimento sobre ( $\pi$ ), em torno de  $\alpha\pi$ .

Sabendo que (A) é do primeiro diedro e sendo dados A', A e  $(A)_1$ , pede-se determinar a posição da linha de terra e os traços de  $(\alpha)$ .

Resolução: Para ser perpendicular a  $(\beta_{24})$ ,  $(\alpha)$  deve possuir um segmento de reta (A)(B) perpendicular a esse bissetor que, como se sabe (*Geometria Descritiva*, número 76), é de perfil e tem projeções iguais, com sentido trocados.

Assim, arbitrado um segmento (A)(B), em tais condições, pode-se rebater ( $\alpha$ ) sobre o plano horizontal ( $\theta$ ), de (B), utilizando o triângulo de rebatimento  $A\bar{J}\bar{B}$ , fácil de construir, já que  $A\bar{B}$  iguala a cota  $A'B'$  de (A) em relação a (B) e que a direção desse cateto  $A\bar{B}$  é a mesma que terá  $\alpha\pi$ , perpendicular à reta  $A(A)_1$  (Figura 816).

Obtido  $(B)_1$ , com a direção  $\bar{B}(B)_1$  obtém-se, a partir de  $(A)_1$ ,  $\bar{A}$ , e a paralela, por  $\bar{A}$ , a  $\bar{B} \bar{J}$ , traz, numa homotetia de polo  $A$ ,  $J$  e, por ele, a linha de terra e os traços (coincidentes) de  $(\alpha)$  (Figura 816).

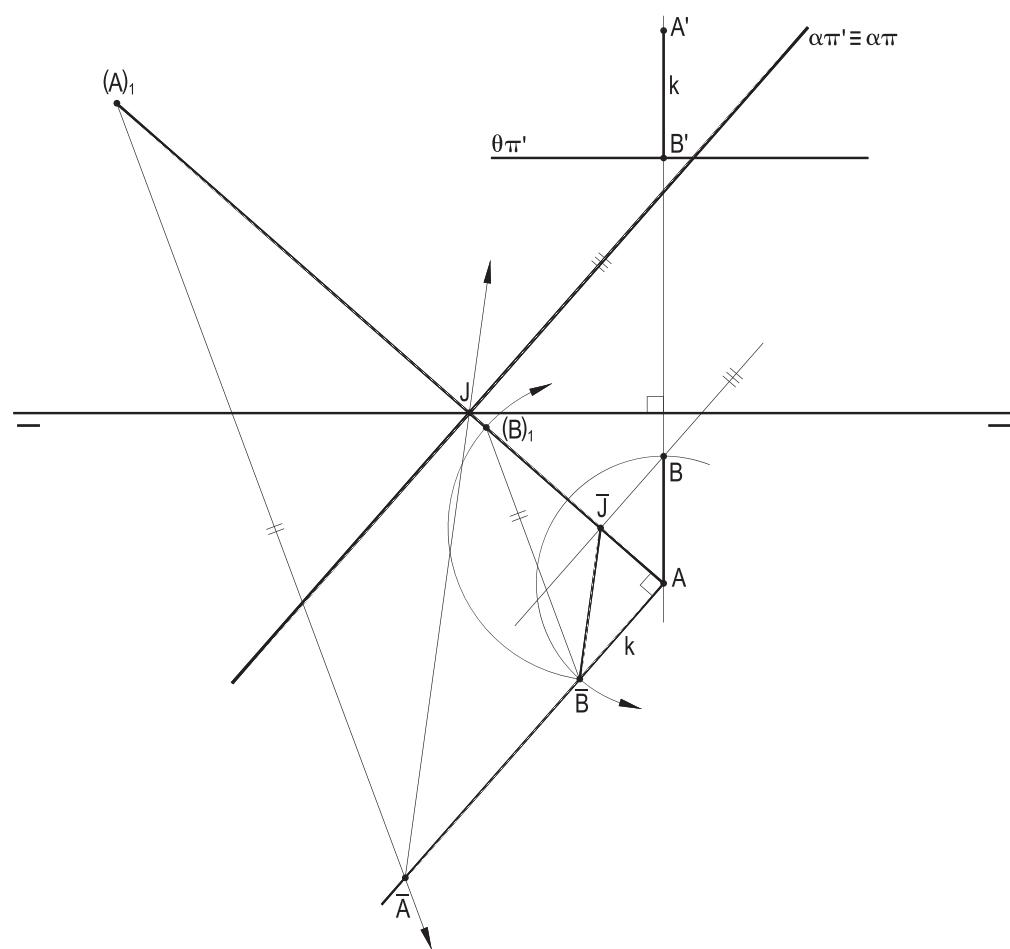


Figura 816

**678 – Gire o plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, em torno do eixo (e), dado por suas projeções, até que o ângulo formado pelos traços de ( $\alpha$ ), no espaço, valha  $60^\circ$ . Escolha a solução que dá traços de ( $\alpha$ ), no primeiro diedro, voltados para a direita.**

Resolução: Ao girar em torno de um eixo vertical (e), o plano ( $\alpha$ ) permanecerá tangente à superfície cônica de revolução de eixo (e) e vértice (V), traço de (e) em ( $\alpha$ ). Assim, o cone de revolução de vértice (V), eixo (e) e base em ( $\pi$ ) manterá, durante a rotação, constante o valor de sua geratriz (VT), o que permite, para buscar a posição final de ( $\alpha$ ), construir o triângulo retângulo (V)(J)(T), que traz o ângulo  $60^\circ$  estipulado (Figura 817).

Construído, em épura (Figura 818), tal triângulo, a partir da V.G.  $V\bar{T}$  da geratriz do cone, obtém-se o valor da hipotenusa  $V\bar{J}$ , que proporciona o ponto (J), comum aos traços de ( $\alpha_1$ ), posição final do plano ( $\alpha$ ).

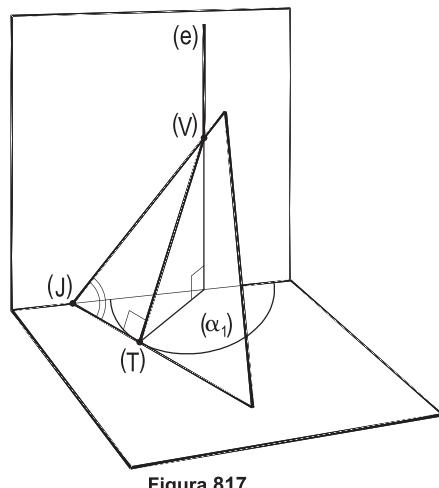


Figura 817

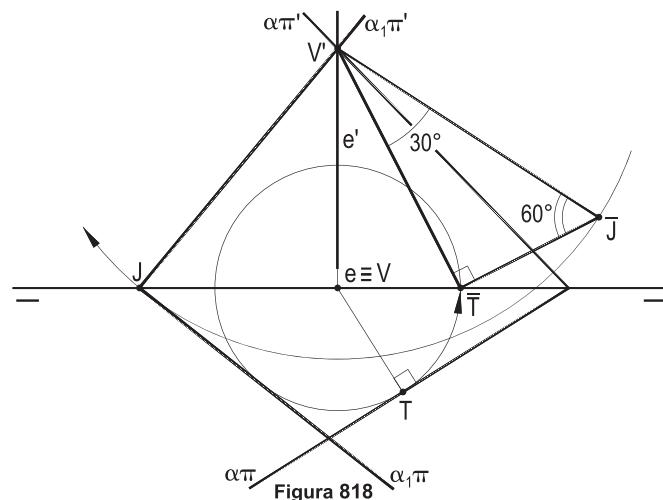


Figura 818

**679 – Mesmo problema, para eixo (e), ainda vertical, mas não pertencente a ( $\pi'$ ).**

Resolução: Opera-se com outro eixo vertical ( $\bar{e}'$ ), de ( $\pi'$ ), como no problema anterior, para um plano ( $\beta$ ) arbitrado, mas paralelo a ( $\alpha$ ) e, obtido o traço (A) de ( $e$ ) em ( $\alpha$ ), ponto fixo durante a rotação, com o auxílio da horizontal paralela a  $\beta\pi$ , por ele, completa-se o plano ( $\alpha_1$ ), com traço vertical  $\alpha_1\pi'$ , paralelo a  $\beta_1\pi'$  (Figura 819), por V'.

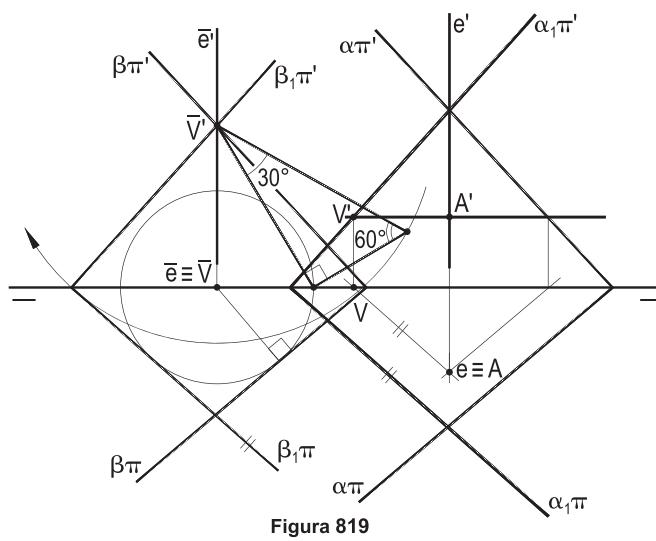


Figura 819

**680 – Gire o ponto (A), em torno da reta (r), até que ele venha a pertencer a ( $\pi''$ ), no primeiro diedro, sendo dadas as projeções de (A) e de (r).**

Resolução: Em sua rotação, (A) descreverá uma circunferência no plano ( $\alpha$ ), perpendicular a (r), com centro (C) em (r). E, para vir a estar em ( $\pi''$ ), deverá pertencer à reta (V)(H), interseção de ( $\alpha$ ) com ( $\pi''$ ).

Assim obtido o traço (C) de (r) em ( $\alpha$ ), basta rebater ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), levando (A) a ( $A_1$ ) e, com centro ( $C_1$ ), descrever a circunferência da rotação, que proporcionará a solução ( $\bar{A}_1$ ), no primeiro diedro (Figura 820), de alcance imediato.

**681 – Gire o ponto (A), em torno da reta (r), até que ele venha a ter a maior cota possível, dadas as projeções de (A) e de (r).**

Resolução: Como no problema anterior, o ponto (A) gira numa circunferência pertencente ao plano ( $\alpha$ ), conduzido por (A) e perpendicular ao eixo (r), com centro nessa reta (Figura 821).

Assim, obtida a interseção (O) de (r) com ( $\alpha$ ) e rebatido este plano sobre ( $\pi$ ), constrói-se a circunferência da rotação, buscando o ponto ( $A_1$ ) de tangência da horizontal (h), com a maior cota possível para (A), isto é, na posição mais afastada de  $\alpha\pi$ .

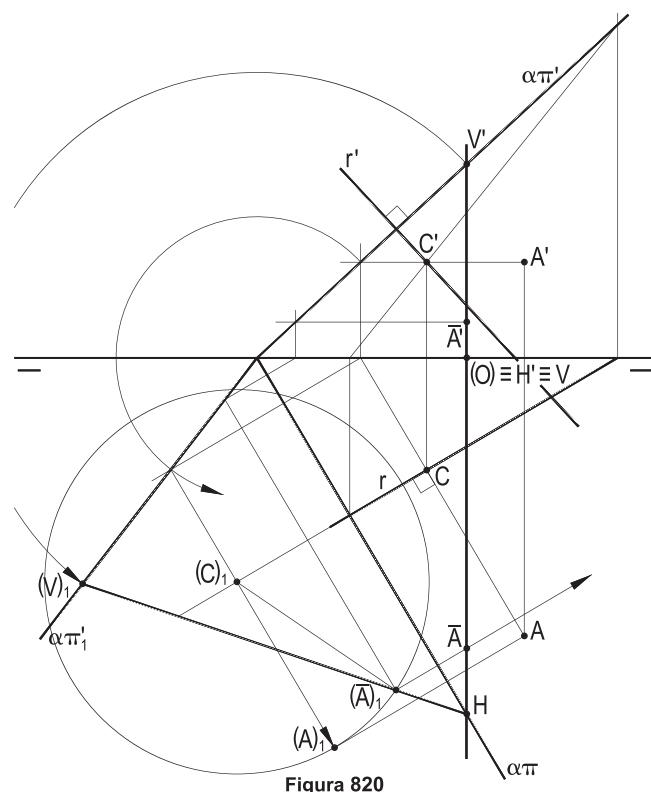


Figura 820

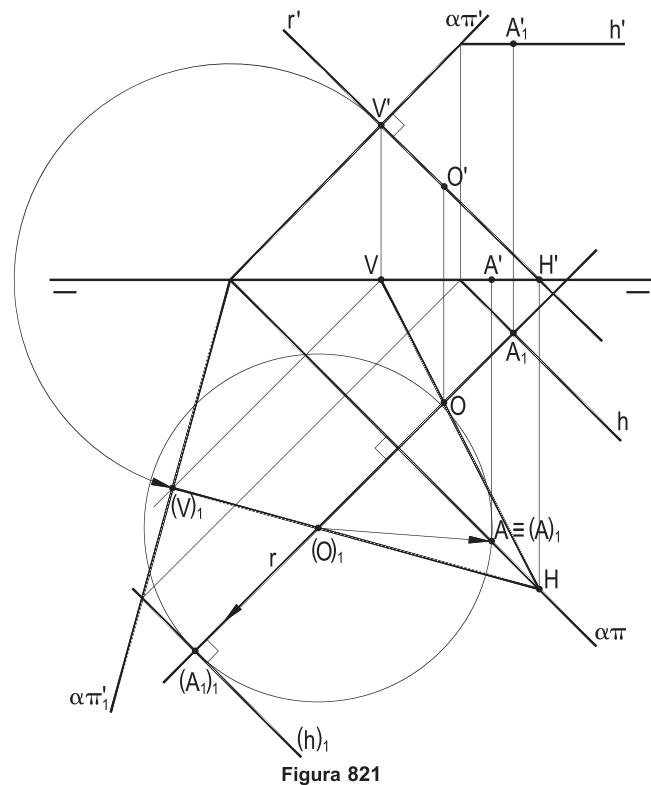


Figura 821

**682 – Dadas as projeções do ponto (A) e da reta (r), bem como os traços do plano ( $\gamma$ ), pede-se girar (A) em torno de (r) até que ele venha a pertencer a ( $\gamma$ ).**

Resolução: Em seu giro, o ponto (A) descreve uma circunferência situada no plano ( $\alpha$ ), construído por (A) e perpendicular a (r), com centro no ponto (O), traço de (r) em ( $\alpha$ ).

Assim, construído o plano ( $\alpha$ ) e obtido (O), o rebatimento desse plano sobre ( $\pi$ ) permite o traçado dessa circunferência, buscando seus cortes com a reta (V)(H), interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), visto que, vindo (A) a pertencer a esta reta (V)(H), estará pertencendo a ( $\gamma$ ), como imposto.

Apenas a solução ( $A_1$ ) foi alcançada, na Figura 822.

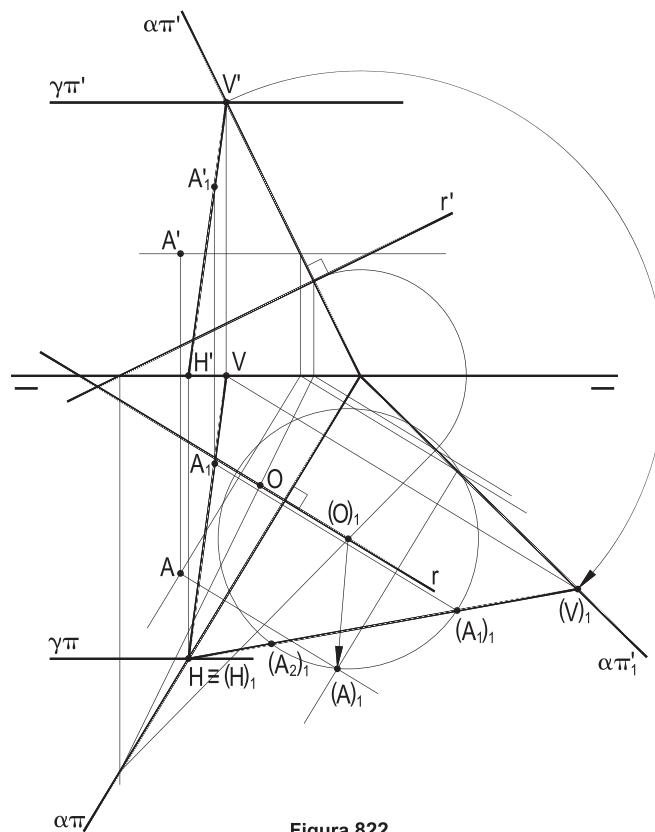


Figura 822

**683 – Determinar a projeção horizontal da reta (r), sabendo que ( $A_1$ ) é um ponto proveniente de certa rotação do ponto (A) em torno de (r), dadas as projeções dos pontos (A) e ( $A_1$ ) e a projeção vertical da reta (r).**

Resolução: Observando a rotação de um ponto (A), até sua posição final ( $A_1$ ), em torno de um eixo qualquer (r), já que (A) e ( $A_1$ ) equidistam de (r) (Figura 823), conclui-se que o eixo (r) tem que pertencer ao plano mediador ( $\alpha$ ) do segmento (A)( $A_1$ ).

Assim, basta construir esse mediador, por suas principais (h) e (f), e marcar nele a reta (r), a partir da projeção dada  $r'$  (Figura 824).

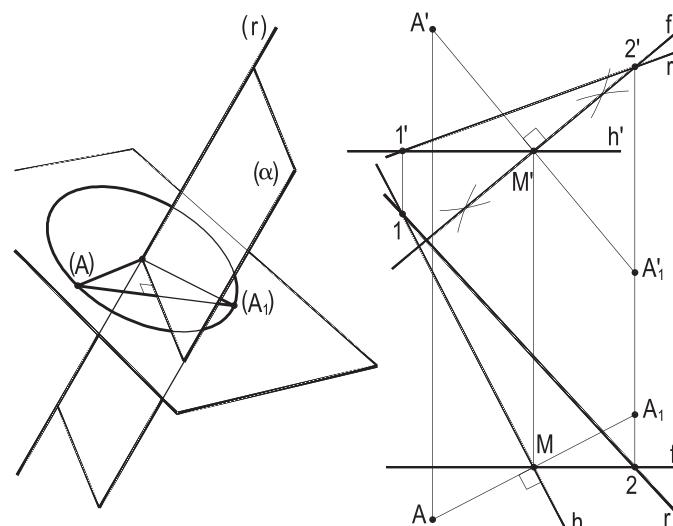


Figura 823

Figura 824

**684 – Dadas, por suas projeções, as retas concorrentes (a) e (e), e, por seus traços, o plano de topo ( $\alpha$ ), pede-se girar (a), em torno de (e), até que ela fique paralela a ( $\alpha$ ).**

Resolução: Na rotação de (a), em torno de (e), o ponto (J), comum às duas, permanece fixo e a rotação se faz arbitrando um ponto (A) da reta (a) que, em seu movimento, irá descrever uma circunferência situada no plano ( $\gamma$ ) traçado por (A) e perpendicular a (e), tendo por centro o ponto (O), interseção de (e) e ( $\gamma$ ).

E, para garantir que (a) venha a ficar paralela a ( $\alpha$ ), basta fazer com que ela pertença ao plano ( $\alpha_1$ ), traçado pelo ponto fixo (J) e paralelo a ( $\alpha$ ), ou seja, que o ponto girante (A) venha a pertencer à reta (i), interseção de ( $\alpha_1$ ) com ( $\gamma$ ).

Das duas soluções, alçou-se apenas uma, correspondente à posição final ( $A_1$ ) do ponto arbitrado (A) (Figura 825), deixando indicada, no rebatimento, a segunda ( $A_2$ ).

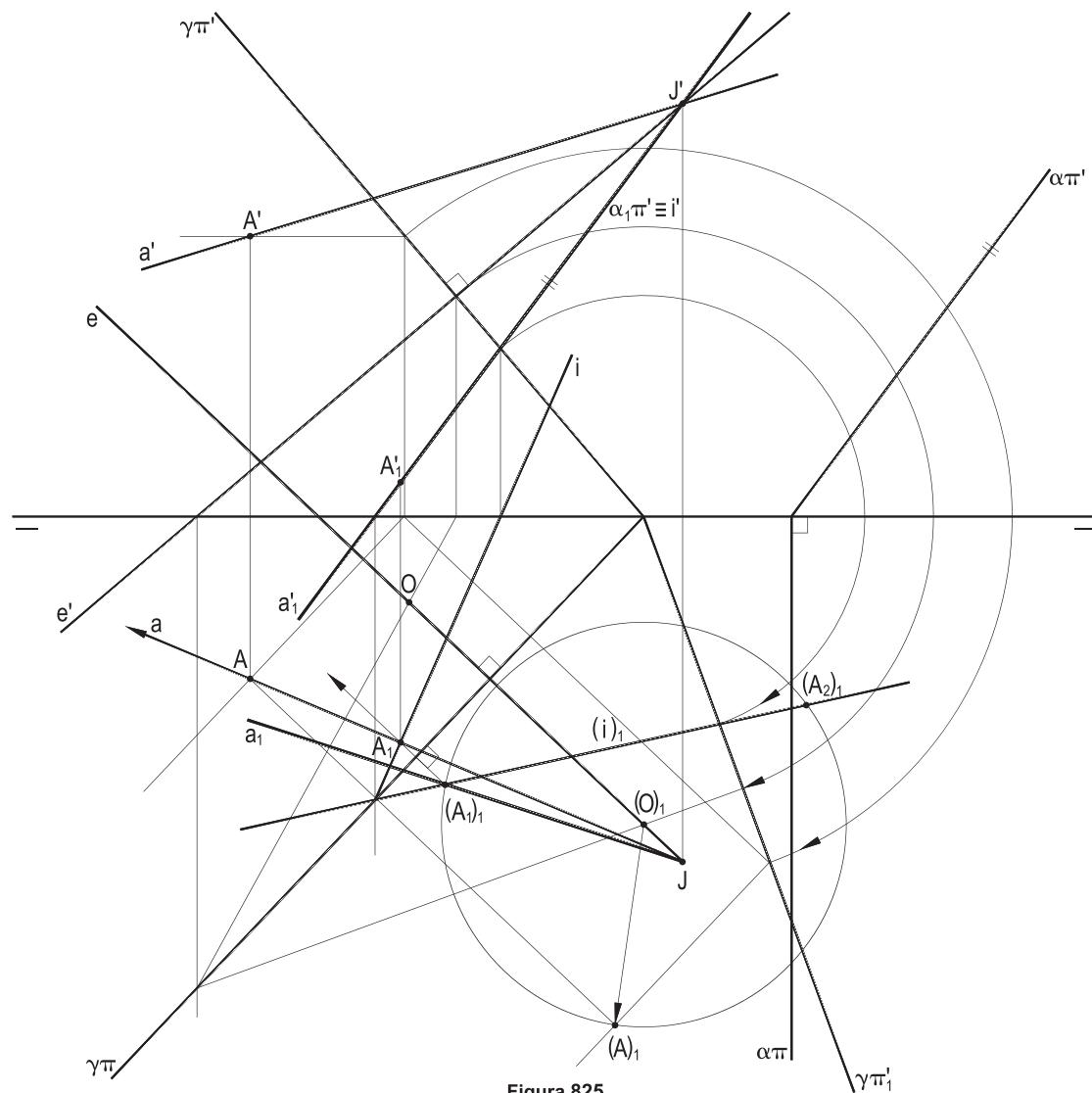


Figura 825

**685 – Dados por suas projeções, o ponto (A) e a reta (r), pede-se construir as projeções do triângulo (R)(S)(T), cujos vértices provêm de rotações de (A) em torno de (r) e tais que (R) pertença a ( $\pi$ ), com a maior das abscissas, (S) a ( $\pi'$ ), com a menor abscissa e (T) a ( $\beta_{13}$ ), com a menor abscissa.**

Resolução: As rotações que (A) sofre, em torno de (r), ocorrem no plano ( $\alpha$ ), pertencente a (A) e perpendicular a (r).

Assim, constrói-se esse plano ( $\alpha$ ), determina-se seu traço ( $O$ ) com (r) e, com seu rebatimento sobre ( $\pi$ ), consegue-se traçar a circunferência de centro ( $O_1$ ) e raio ( $O_1(A)_1$ ) responsável pelas rotações propostas.

Os alçados são bem simples, pelas posições especiais que os vértices do triângulo pedido devem ocupar (Figura 826).

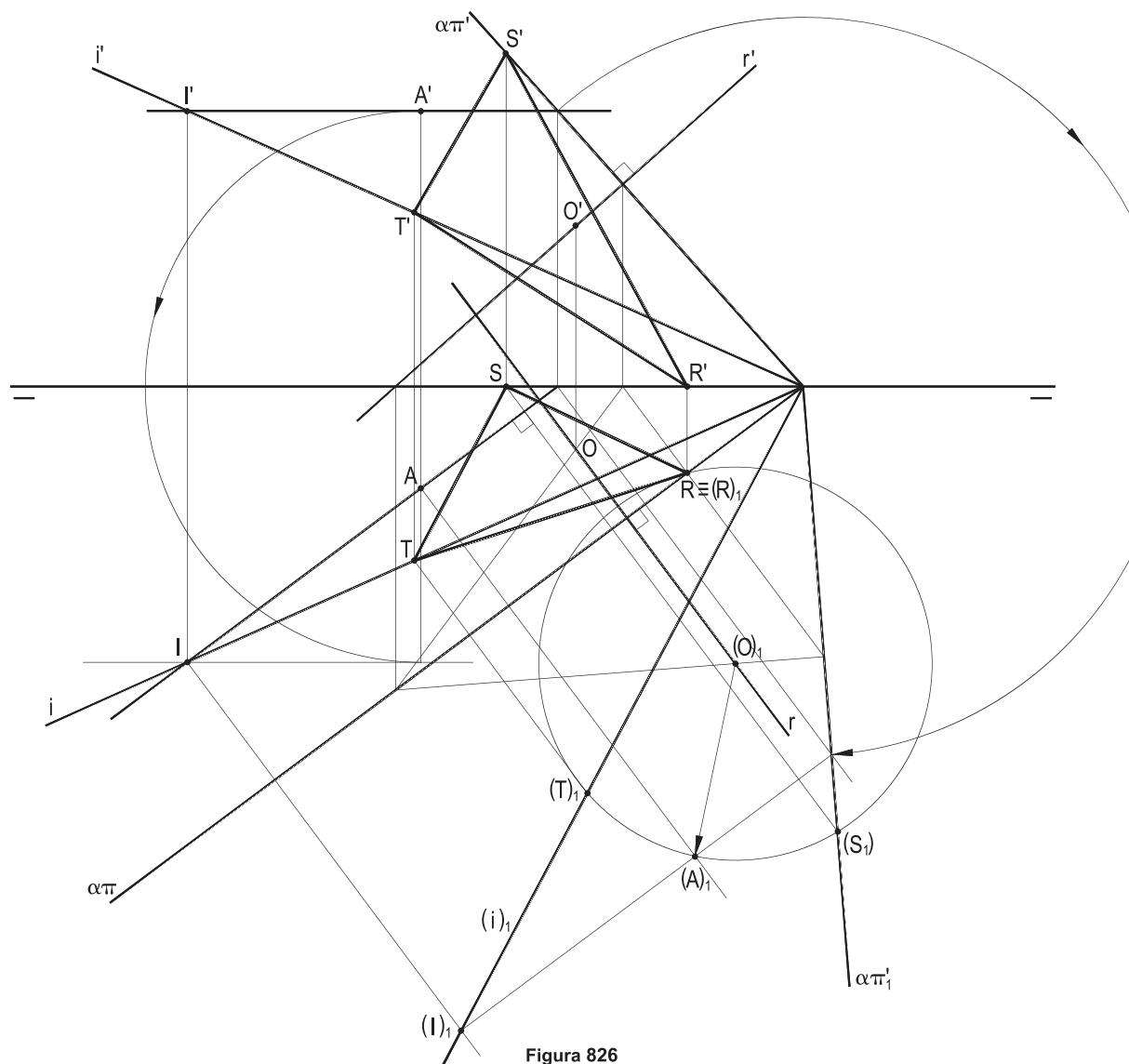


Figura 826

# CAPÍTULO XI

# PROBLEMAS MÉTRICOS

## DISTÂNCIAS

De posse do conhecimento dos três métodos descritivos, fica bem confortável visitar questões que buscam obter as verdadeiras grandezas de distâncias e de ângulos ou de utilizá-las.

São os problemas métricos.

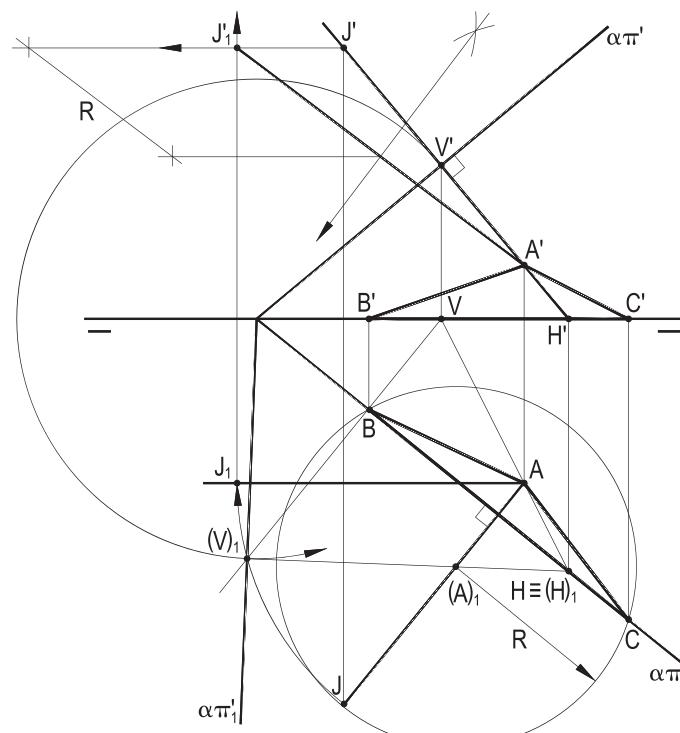
O presente capítulo dedica-se às distâncias.

**686** – Construir as projeções do triângulo  $(A)(B)(C)$  pertencente ao plano  $(\alpha)$ , dado por seus traços, sabendo que  $(A)$  é o pé da perpendicular de  $(J)$  a  $(\alpha)$ , que  $(B)(C)$  pertence a  $(\pi)$  e que  $(A)(B)$  e  $(A)(C)$  são iguais à metade da distância de  $(J)$ , dado por suas projeções, a  $(\alpha)$ .  $(B)$  é o vértice de menor abscissa.

Resolução: Obtido (A), traço da perpendicular de (J) a ( $\alpha$ ) com ( $\alpha$ ), com uma rotação que faça (J)(A) frontal, determinase a V.G. do segmento (J)(A), na nova projeção vertical J' A'

Sua metade R será o comprimento dos lados (A)(B) e (A)(C), tal como imposto.

Já que o triângulo  $(A)(B)(C)$  pertence a  $(\alpha)$ , com seu rebatimento sobre  $(\pi)$ , consegue-se obter os vértices  $(B)$  e  $(C)$  situados em  $\alpha\pi$ , conforme indicado na Figura 827.

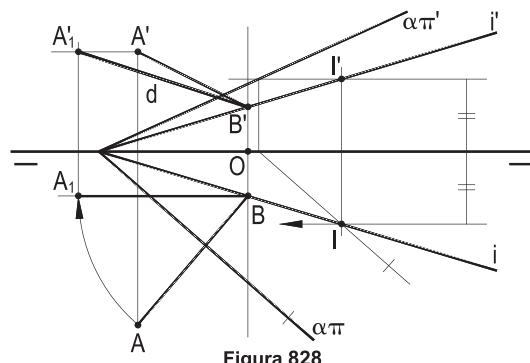


**Figura 827**

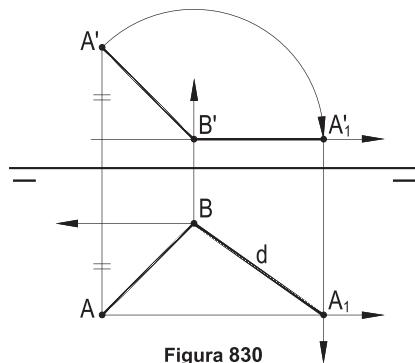
Em cada uma das épuras abaixo, é dado, por suas projeções, o ponto (A), e condições são estabelecidas para a obtenção do ponto (B). Pede-se a determinação das projeções de (B) e a verdadeira grandeza d da distância entre (A) e (B).

Resoluções: Determinada a posição do ponto (B), uma rotação, ou uma mudança, que torne o segmento (A)(B) horizontal, ou frontal, traz a V.G. d da distância entre os dois pontos.

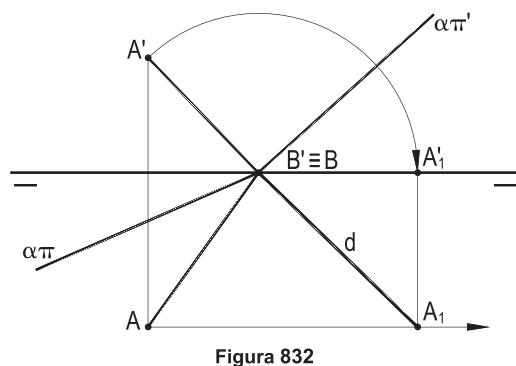
**687 –  $(B) \equiv (\alpha\beta_{13}\pi'')$ . Dados  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$**



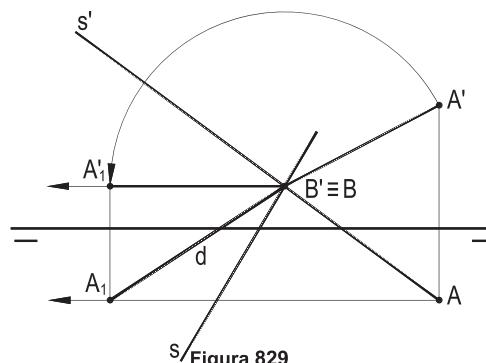
**689 – (A)(B) é paralelo a  $(\beta_{13})$ . Dado B**



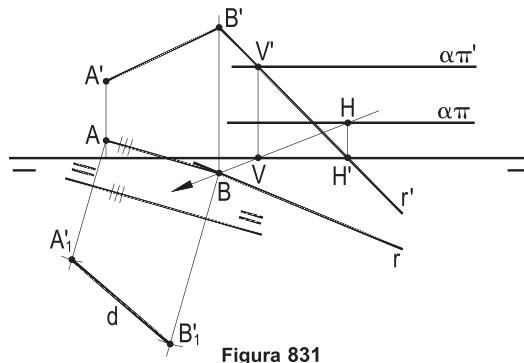
**691 –  $(B) \equiv (\alpha\pi'\pi)$ . Dados  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$**



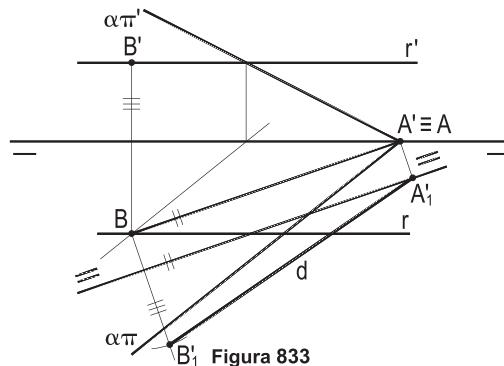
**688 –  $(B) \equiv (s\beta_{24})$ . Dadas s', s**



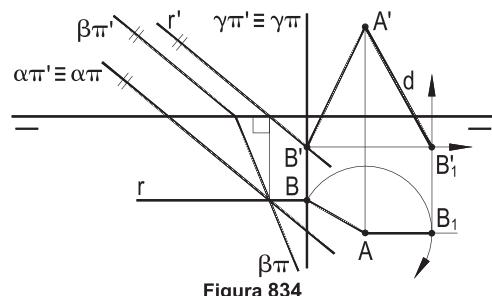
**690 –  $(B) \equiv (r\alpha)$ . Dados  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$ , r', r**



**692 –  $(B) \equiv (r\alpha)$ . Dados r', r,  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$**

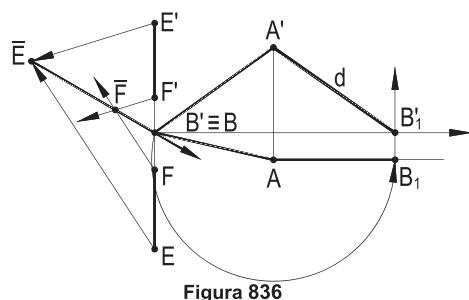


693 -  $(B) \equiv (\alpha\beta\gamma)$ . Dados  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$



695 -  $(r) \equiv (E)(F); (B) \equiv (r\beta_{24})$ .

Dado  $(E)(F)$



697 -  $(A)(B)$  é paralelo a  $(\beta_{24})$ .  $(B) \varepsilon (\alpha\beta)$ . 698 -  $(B) \equiv (r\alpha)$ ;  $(\alpha) \varepsilon (M)$ . Dados  $(M)$ ;  $(r)$

Dados  $(\alpha)$  e  $(\beta)$

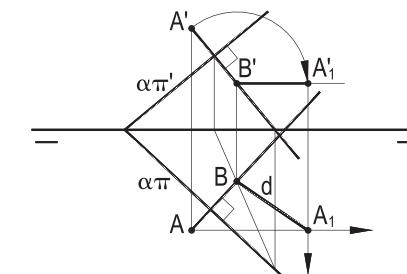
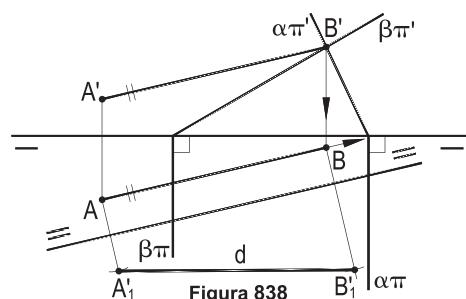


Figura 835

696 -  $(A)(B)$  é perpendicular a  $(\beta_{13})$ ,  $(B) \varepsilon (\alpha)$ ;  $(\alpha) \equiv (a; b)$ . Dados  $(a)$  e  $(b)$

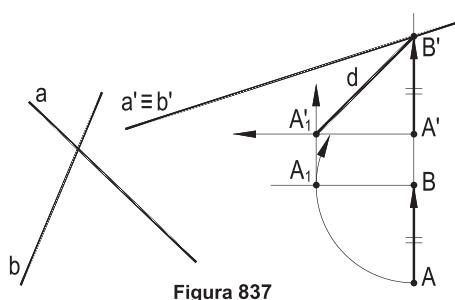
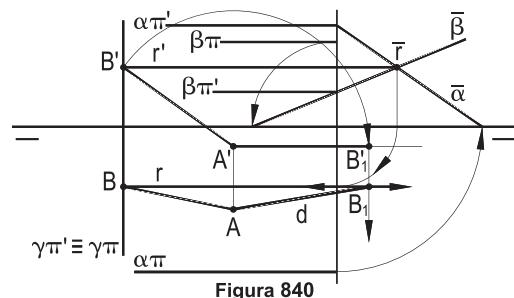
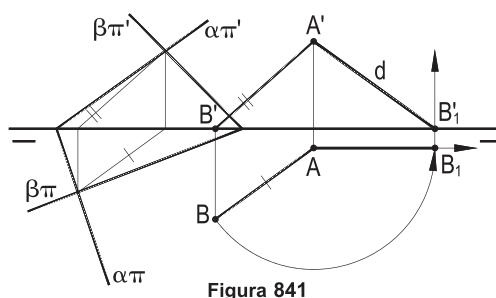


Figura 837

699 -  $(B) \equiv (\alpha\beta\gamma)$ . Dados  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$



700 -  $(B) \varepsilon (\pi)$ .  $(A)(B)$  paralelo a  $(\alpha)$  e a  $(\beta)$ .  
Dados  $(\alpha), (\beta)$



### Problema inverso – o uso do cone de revolução.

Sabe-se (número 9.4) que o lugar geométrico dos pontos que distam um valor constante  $d$  de um ponto fixo ( $A$ ) é a superfície esférica de centro ( $A$ ) e raio  $d$ .

Disso decorre que o lugar geométrico dos pontos ( $B$ ) pertencentes a um plano ( $\alpha$ ) e distantes um valor constante  $d$  de um ponto fixo ( $A$ ) é a circunferência de ( $\alpha$ ), cujo centro é o pé da perpendicular de ( $A$ ) a ( $\alpha$ ) e cujo raio  $r$  é o segundo cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa  $d$  e primeiro cateto igual à distância  $h$  de ( $A$ ) a ( $\alpha$ ) (Figura 842). É claro que, para que exista tal circunferência, é necessário e suficiente que  $d$  seja maior que  $h$ . Em caso de igualdade, o único ponto a atender à condição é o próprio ponto ( $O$ ), pé de perpendicular de ( $A$ ) a ( $\alpha$ ).

Esse lugar geométrico é a chave para o clássico problema da construção de um segmento ( $A$ )( $B$ ) de comprimento  $d$  conhecido, quando o extremo ( $A$ ) é dado e o outro extremo ( $B$ ) é condicionado a pertencer a um plano dado ( $\alpha$ ), sob determinadas condições específicas.

Tomemos, como exemplo, a construção do segmento ( $A$ )( $B$ ) de comprimento dado  $d$ , a partir das projeções dadas do ponto ( $A$ ), sabendo que o extremo ( $B$ ), com cota nula, deve pertencer ao plano ( $\alpha$ ), dado por duas retas ( $a$ ) e ( $b$ ). A resolução consiste, então, em construir a circunferência base do cone, em ( $\pi$ ), determinar o traço horizontal  $\alpha\pi'$  de ( $\alpha$ ) e os pontos ( $B_1$ ) e ( $B_2$ ) em que ele corta aquela circunferência (Figuras 843 e 844).

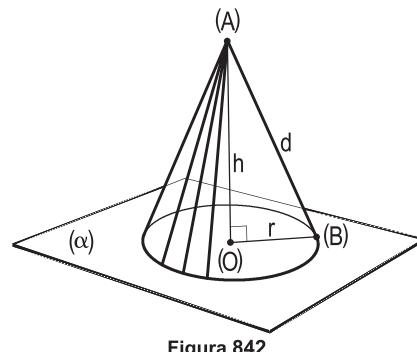


Figura 842

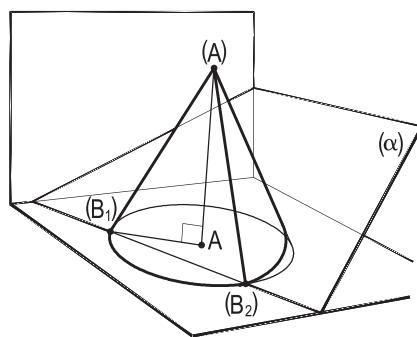


Figura 843

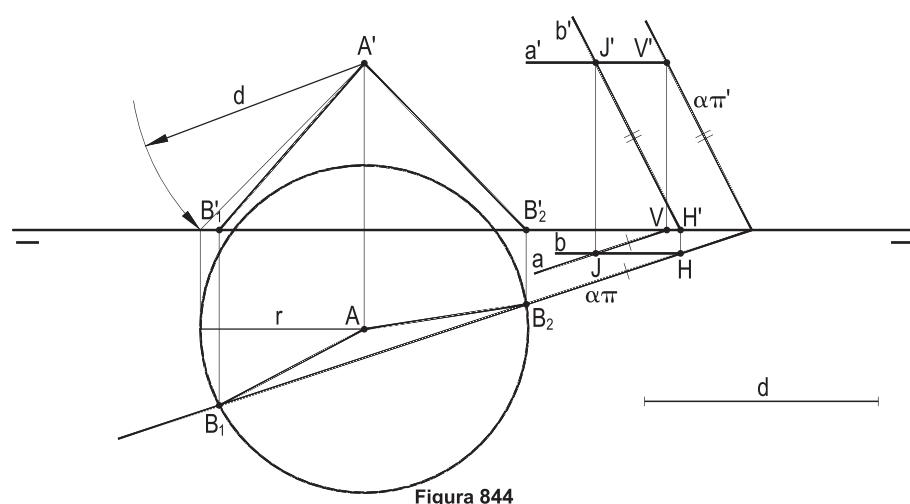
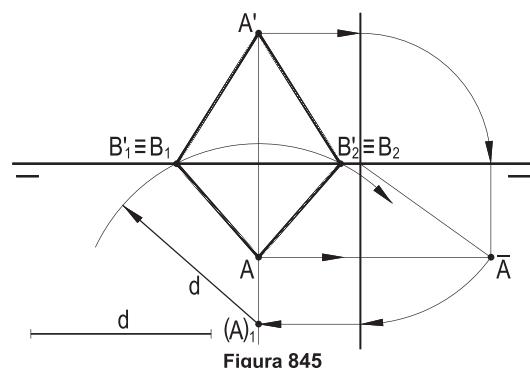


Figura 844

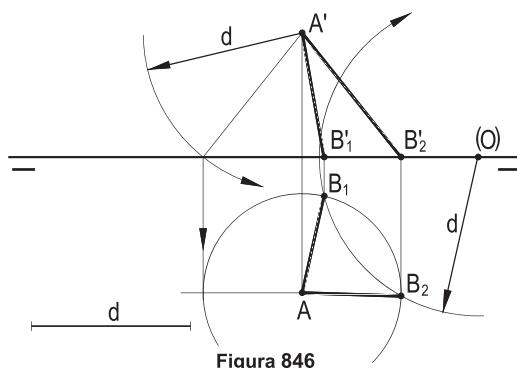
Em cada uma das épuras seguintes, são dadas as projeções do ponto (A), bem como condições que determinem o ponto (B), distante d de (A), valor sempre apresentando, graficamente, em cada caso. Pede-se construir as projeções de (A)(B).

Resoluções: É com a construção do cone de revolução de vértice (A), base no plano adequado às condições impostas e geratriz com o comprimento d, fornecido, que se completa cada épura. Ou com um rebatimento (Figura 845).

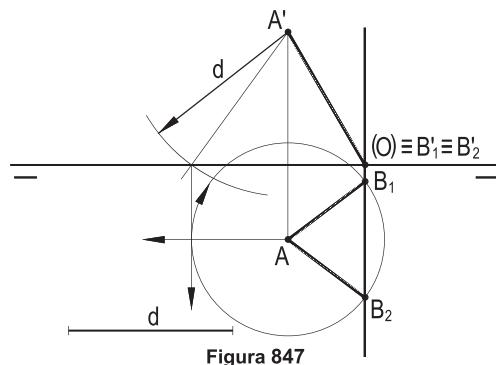
701 – (B)  $\epsilon (\pi' \pi)$



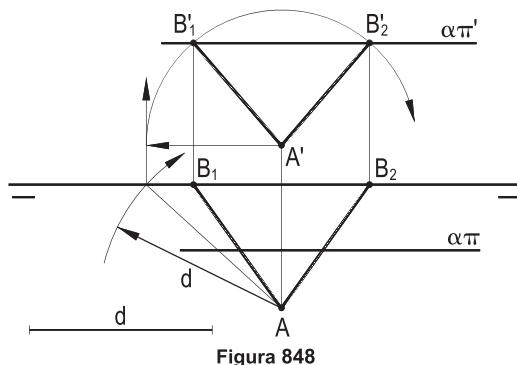
702 – (B)  $\epsilon (\pi)$  e dista d de (O)



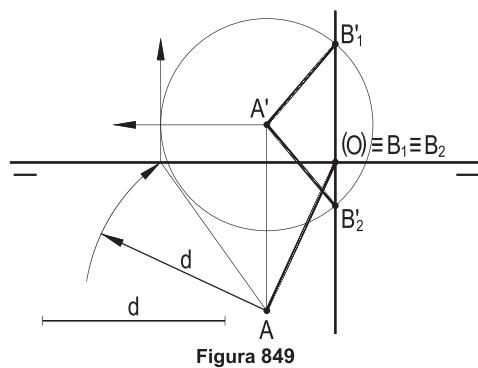
703 – (B)  $\epsilon (\pi'' \pi)$



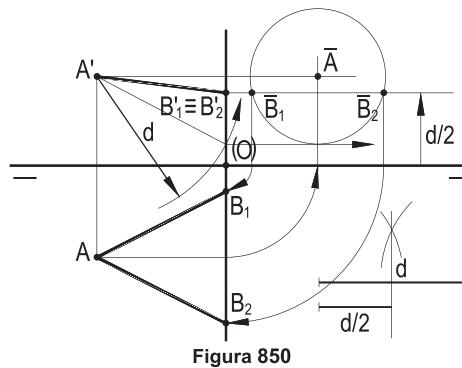
704 – (B)  $\epsilon (\alpha \pi')$



705 – (B)  $\epsilon (\pi' \pi'')$



706 – (B)  $\epsilon \pi'',$  com cota d/2



707 – (B)  $\varepsilon(\alpha)$ , equidistando de seus traços

708 – (B)  $\varepsilon(\alpha\beta_{13})$ , com abscissa maior que a de (A)

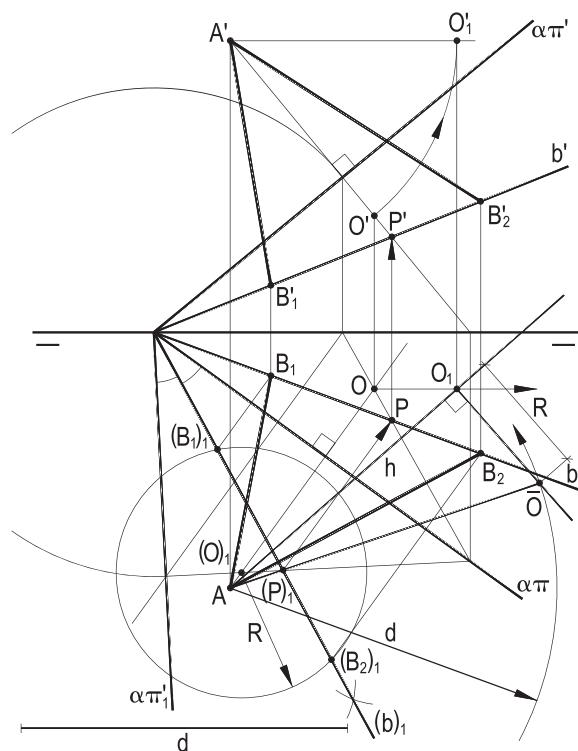


Figura 851

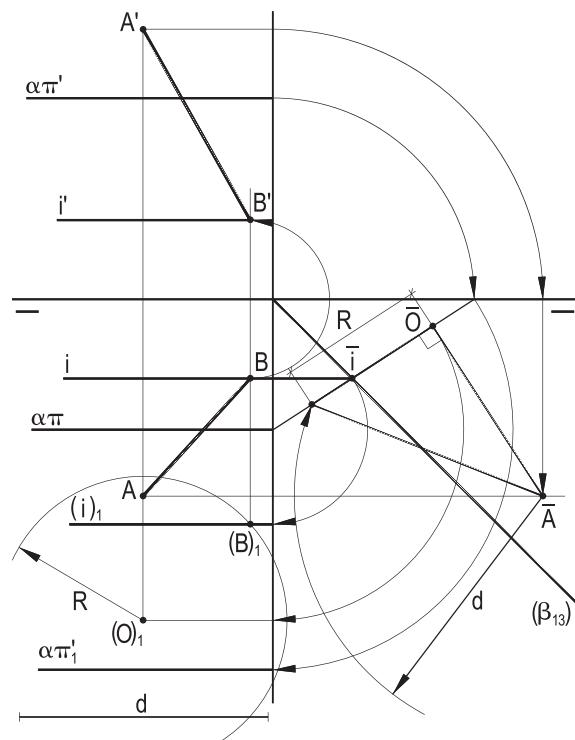


Figura 852

709 – (B)  $\varepsilon(\alpha) \equiv (a), (b)$ ; (B) equidista de (a) e de (b), com a menor abscissa

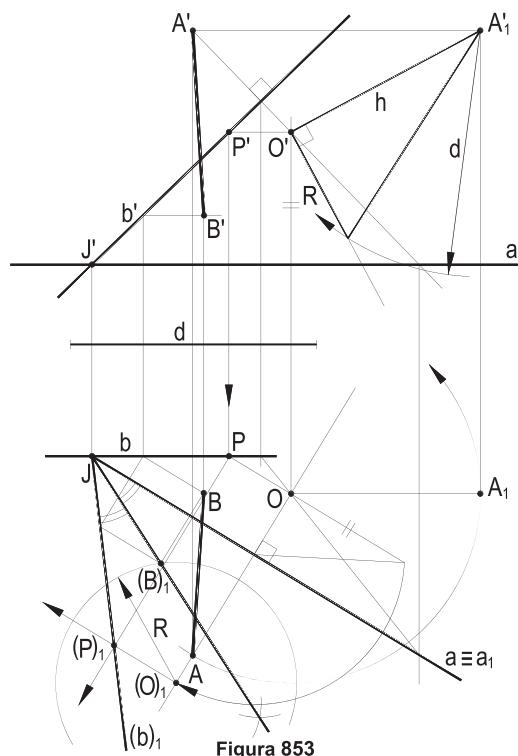


Figura 853

710 – (B)  $\varepsilon(\alpha) \cdot (B)(J) = d$ . Dado (J)

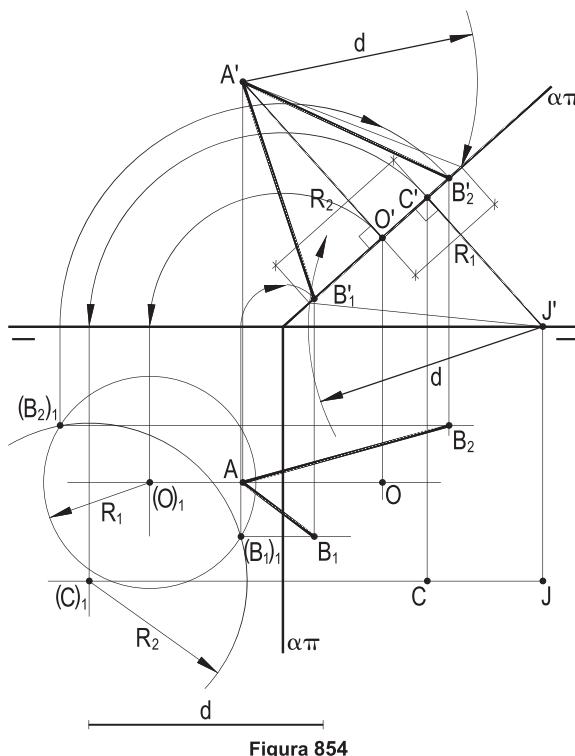


Figura 854

Em cada uma das épuras abaixo, são dados o ponto (A), por suas projeções, e o plano ( $\alpha$ ), este por seus traços, ou pelas projeções de duas retas suas ( $r$ ) e ( $s$ ). Pede-se determinar a V.G. da distância  $d$  de (A) a ( $\alpha$ ).

Resoluções: Vistas laterais (Figuras 855, 856 e 861), para planos paralelos ou pertencentes a ( $\pi'\pi$ ), verdadeiras grandezas imediatas para planos projetantes (Figuras 857 e 860), ou o traçado da perpendicular de (A) a ( $\alpha$ ), quando o plano é qualquer (Figuras 858, 859 e 862), com a obtenção de seu traço (O) em ( $\alpha$ ) e, com o auxílio de uma rotação (Figuras 858 e 862), ou de uma mudança de plano (Figura 859), vem a V.G. pedida  $d$ .

711

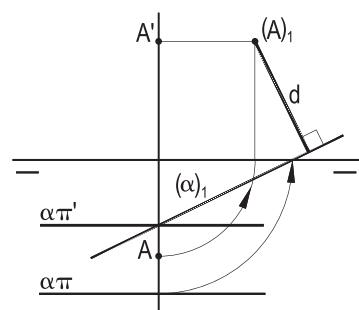


Figura 855

712

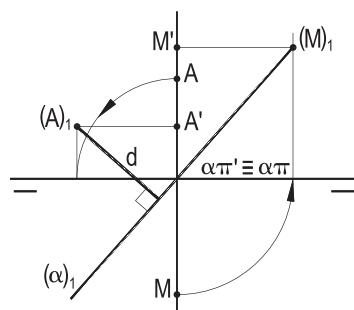


Figura 856

713

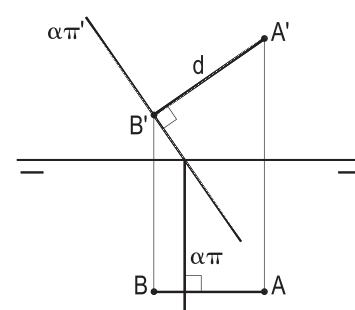


Figura 857

714

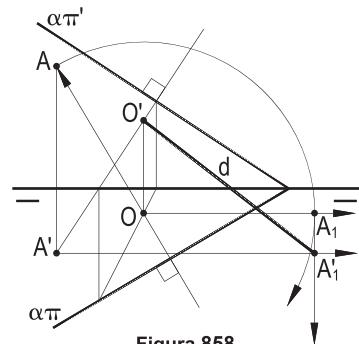


Figura 858

715

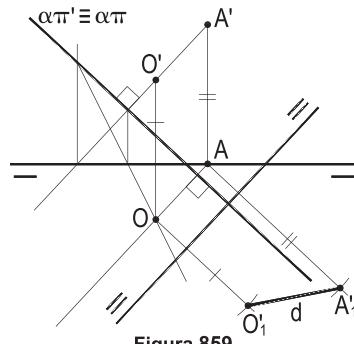


Figura 859

716

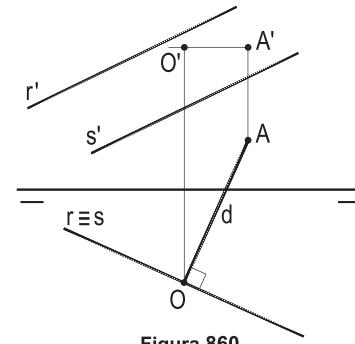


Figura 860

717

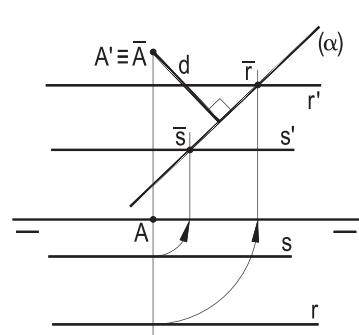


Figura 861

718

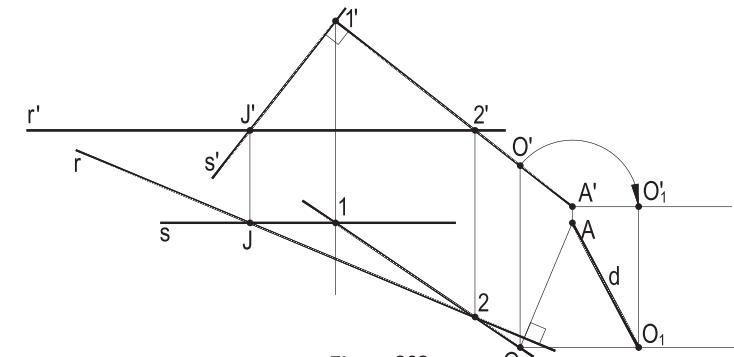
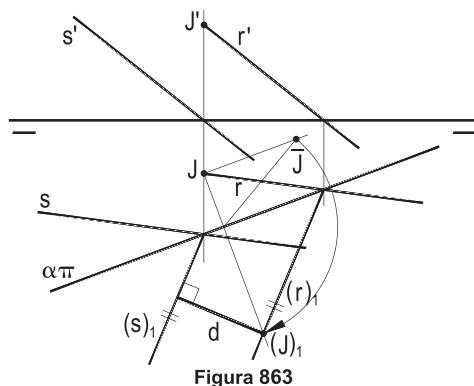


Figura 862

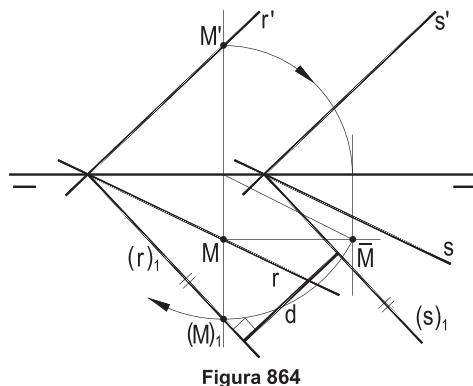
**Em cada uma das épuras seguintes, pede-se determinar a verdadeira grandeza d da distância entre as retas paralelas ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas por suas projeções.**

Resolução: Rebatimentos dos planos formados pelas duas paralelas (Figuras 863, 864, 865 e 867), rotação do segmento ( $P$ )( $Q$ ) entre as paralelas, até que se torne frontal (Figura 866) e a própria V.G. da horizontal entre as duas verticais ( $r$ ) e ( $s$ ) dadas (Figura 868) respondem às proposições.

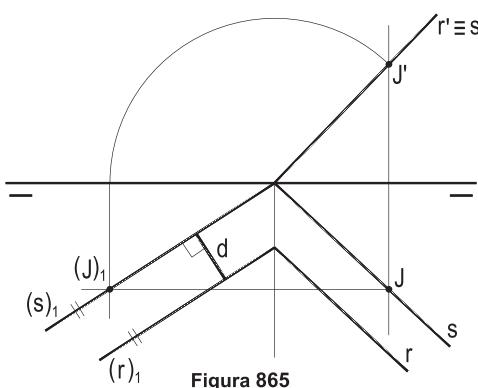
719



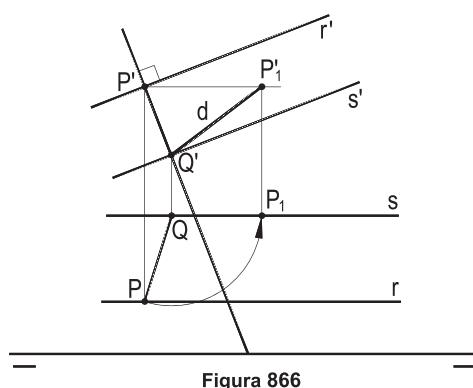
720



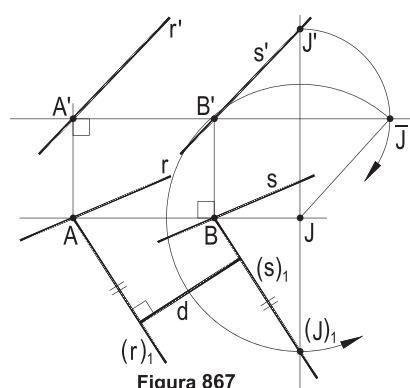
721



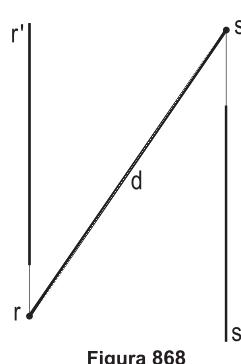
722



723



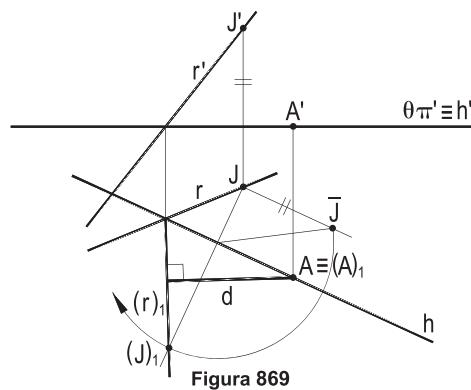
724



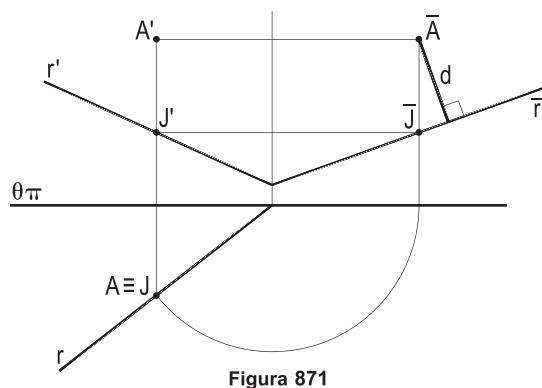
Para cada um dos casos abaixo, pede-se determinar a V.G. da distância  $d$  do ponto (A) à reta ( $r$ ), dados por suas projeções.

Resoluções: Com auxílio de rebatimentos (Figuras 869, 871, 872 e 874), de uma rotação (Figura 870), ou aproveitando ser (r) de topo (Figura 873), fica sempre simples obter a V.G. procurada.

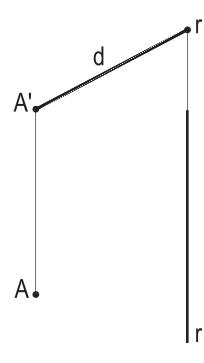
725



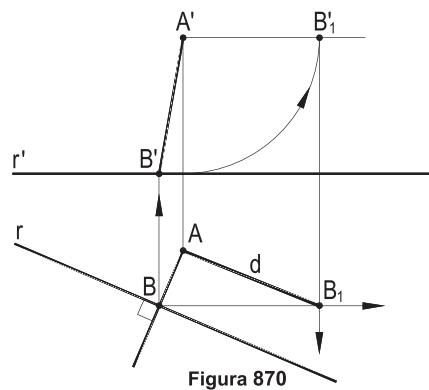
727



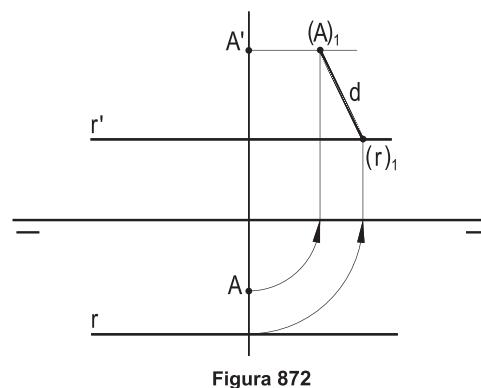
729



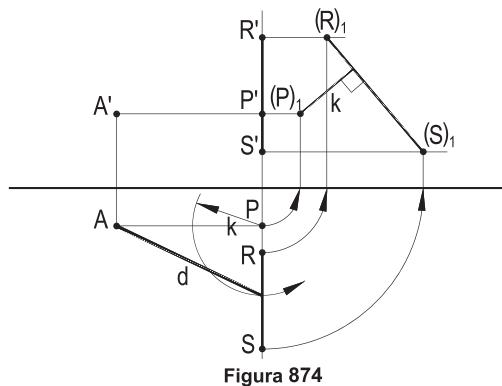
726



728



730 - (r) ≡ (R)(S)



Passemos a detalhar a construção da perpendicular comum a duas retas reversas dadas e a determinação da verdadeira grandeza da distância entre elas.

Nos estudos teóricos (*Geometria Descritiva*, números 78 e 84.3) foram apresentados o processo clássico para a resolução dessa questão, desenvolvido por Gaspard Monge, o criador da Geometria Descritiva, e a utilização do método das mudanças dos planos de projeção, para as mais diversas situações de pares de retas reversas.

Para percorrer todas as possibilidades, cumpre observar que a perpendicular comum às duas retas reversas em estudo tem que ser, evidentemente, perpendicular aos planos paralelos a tais reversas, o que permite concluir que:

- Sendo paralelas a um dos planos de projeção as duas reversas dadas ( $r$ ) e ( $s$ ), a perpendicular comum a elas ( $p$ ) tem que ser vertical, de topo, ou fronto-horizontal (Figura 875).

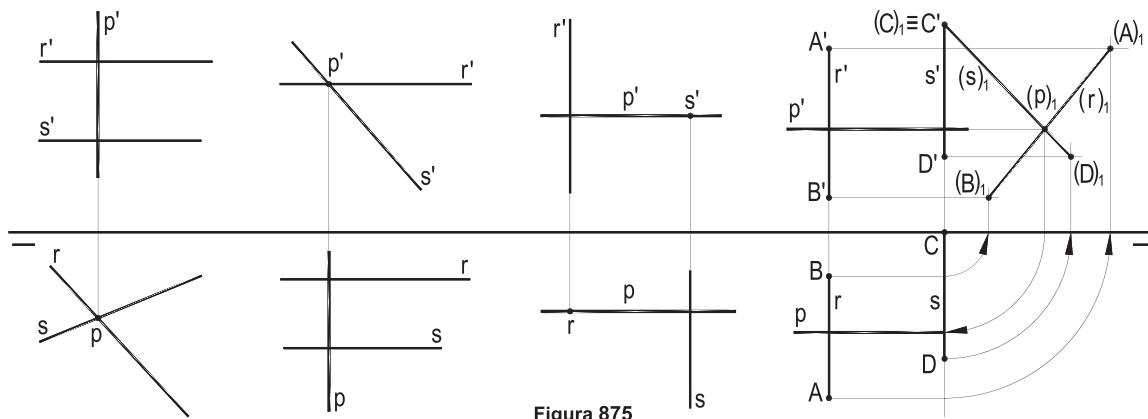


Figura 875

- Sendo paralelas a um plano vertical (Figura 876), ou a um plano de topo (Figura 877), as retas reversas dadas ( $r$ ) e ( $s$ ), a perpendicular comum a elas, ( $p$ ), há de ser, respectivamente, uma horizontal, ou uma frontal, perpendicular aos planos paralelos a ( $r$ ) e a ( $s$ ).

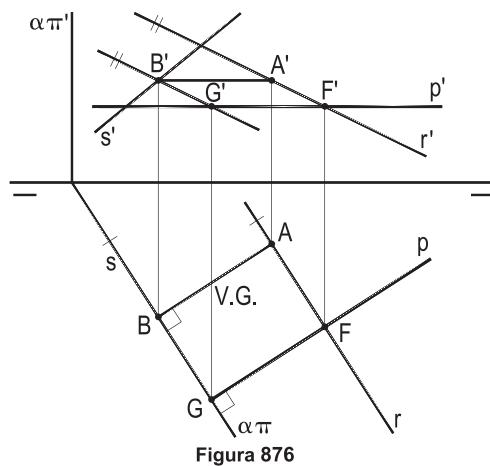


Figura 876

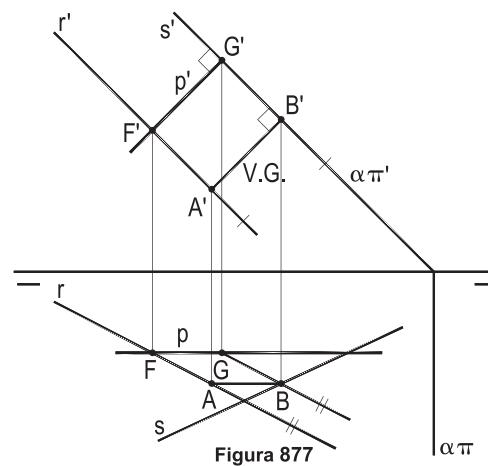


Figura 877

- c. Sendo  $(r)$  e  $(s)$  paralelas a um dos bissetores, a perpendicular comum terá que ser de perfil e perpendicular ao bissetor em questão. Assim é a reta  $(A)(B)$ , perpendicular às reversas  $(r)$  e  $(s)$ , ambas paralelas a  $(\beta_{13})$  (Figura 878), tanto quanto a reta de perfil  $(J)(L)$ , perpendicular comum às retas reversas  $(r)$  e  $(s)$  e paralelas, ambas, a  $(\beta_{24})$  (Figura 879). Suas construções vão detalhadas adiante (números 742 e 743).

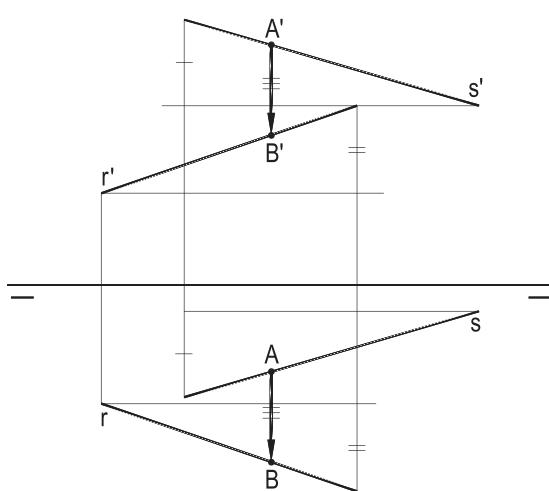


Figura 878

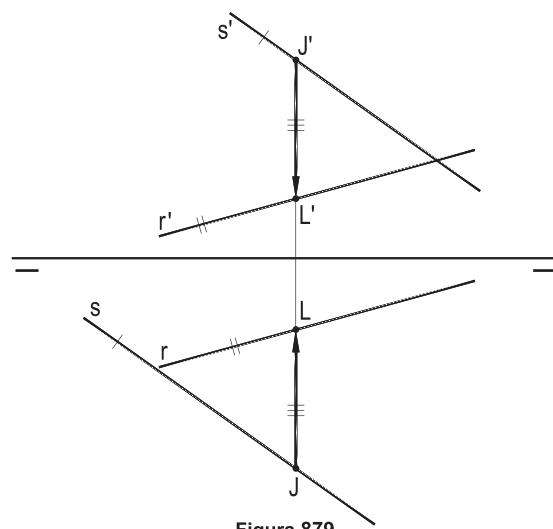


Figura 879

- d. Sendo uma das reversas perpendicular a um dos planos de projeção (vertical, de topo, ou fronto-horizontal), a perpendicular ( $p$ ) comum a ela e à segunda reversa, independentemente da natureza desta, tem que ser paralela ao plano de projeção correspondente, o que implica em que, nessa projeção, o ângulo reto com a segunda reversa apresente-se em verdadeira grandeza (Figuras 880, 881 e 882).

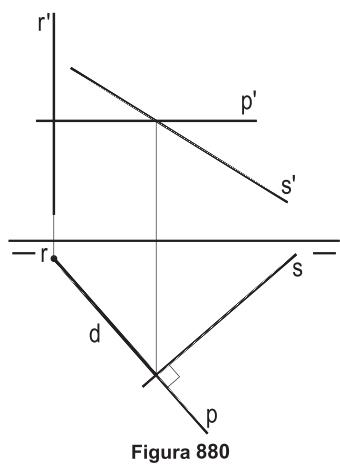


Figura 880

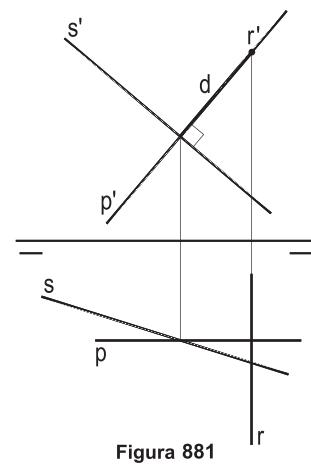


Figura 881

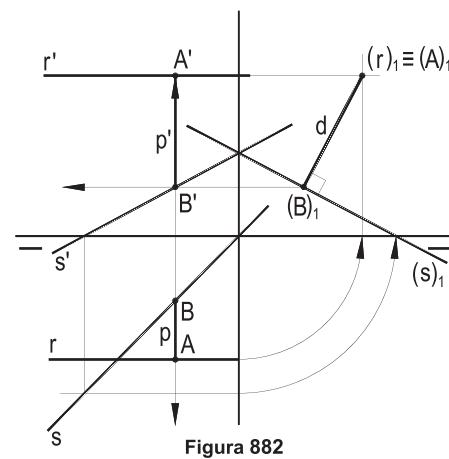


Figura 882

Também a distância  $d$  entre as duas reversas vem em V.G. na projeção da perpendicular comum que é paralela ao plano de projeção correspondente, ou numa vista lateral, quando de perfil.

Para cada uma das épuras abaixo, pede-se construir as projeções da reta ( $p$ ), perpendicular comum às duas reversas, dadas por suas projeções, determinando a verdadeira grandeza da distância  $d$  que separa as duas reversas.

Resoluções: Nas épuras 883, 884, 885 e 889, a V.G. da distância  $d$  vem nas projeções horizontais; nas das épuras 886, 887 e 888, com as retas de topo ( $t$ ), essa V.G. é apresentada em projeção vertical e, por último, nas épuras 890 e 891, é nos rebatimentos laterais que se apresentam as verdadeiras grandezas pedidas.

731

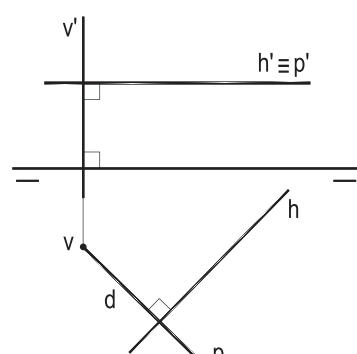


Figura 883

732

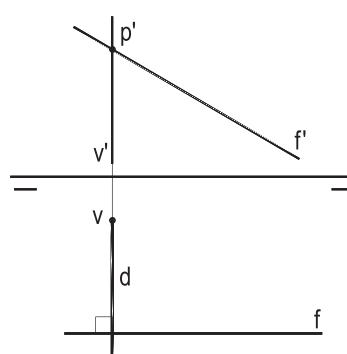
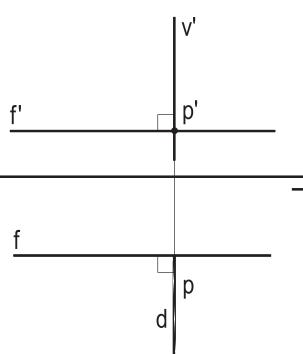


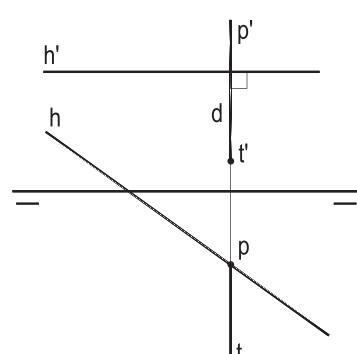
Figura 884

733



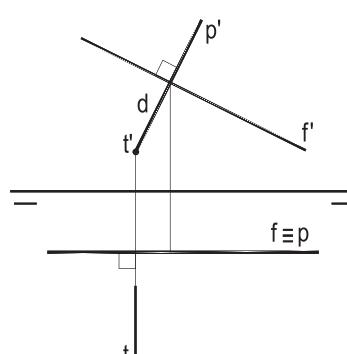
**Figura 885**

734



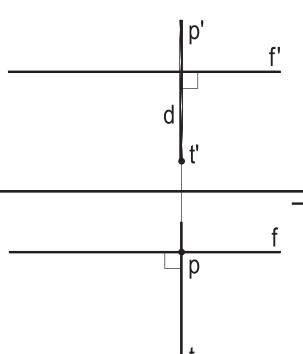
**Figura 886**

735



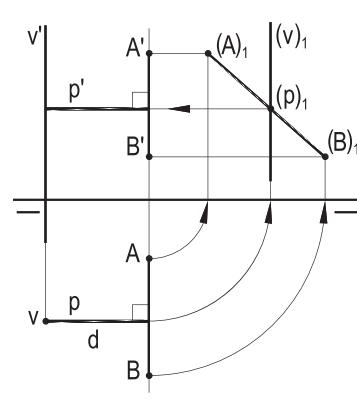
**Figura 887**

736



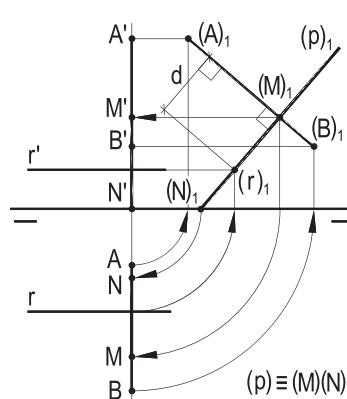
**Figura 888**

737



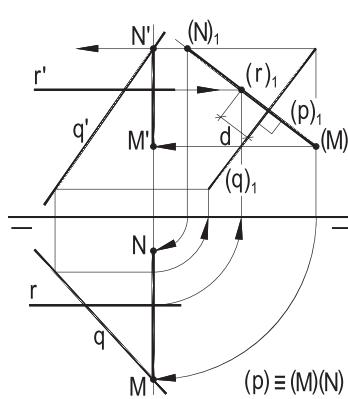
**Figura 889**

738



**Figura 890**

739



**Figura 89**

**740 – Construir as projeções e a V.G. do triângulo isósceles (A)(B)(C), cuja base (B)(C), com abscissa nula, pertence ao plano frontal ( $\alpha$ ), sabendo que os lados iguais medem 30 mm, cada.**

**São dados as projeções de (A) e o traço  $\alpha\pi$ , de ( $\alpha$ ).**

Resolução: O cone de revolução de vértice (A), base em ( $\alpha$ ) e geratriz medindo 30 mm dá solução à questão, os vértices (B) e (C) pertencendo à circunferência da base em V.G. desse cone e a ( $\pi''$ ). A projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta, por ser sua base (B)(C) vertical (Figura 892).

A V.G.  $(A)_1B'C'$  foi obtida pela utilização dos valores  $B'C'$  da base e 30 mm dos lados iguais do triângulo.

(B) e (C) são permutáveis.

**741 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que o vértice (A) pertence ao plano ( $\alpha$ ) e que os lados (A)(B) e (A)(C) medem, respectivamente, 33 mm e 23 mm.**

**Dados as projeções do lado (B)(C) e os traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: Mais uma vez, a utilização do cone de revolução (*Geometria Descritiva*, número 124) resolve o problema.

Desta vez são dois os cones, com vértices em (B) e (C), geratrizes 33 mm e 23 mm, respectivamente, ambos apoiados em ( $\alpha$ ).

Determinados os raios  $R_1$  e  $R_2$  de suas bases e rebatido o plano ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), esses dois círculos podem ser construídos em V.G., para a determinação, por suas intersecções, das duas soluções (A) e ( $\bar{A}$ ) do vértice procurado.

Apenas uma foi alçada (Figura 893).

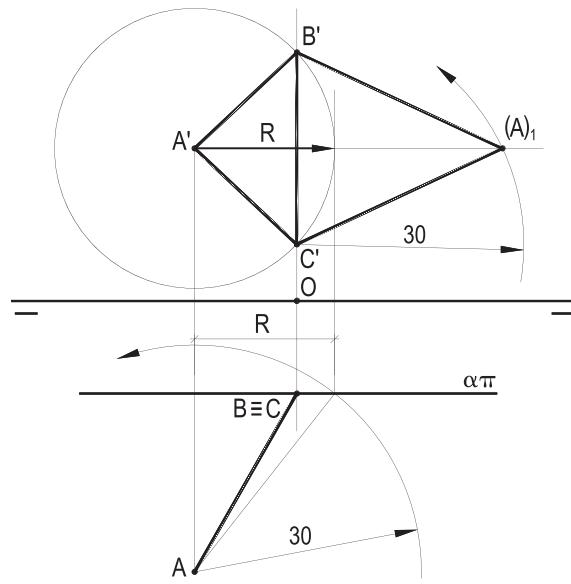


Figura 892

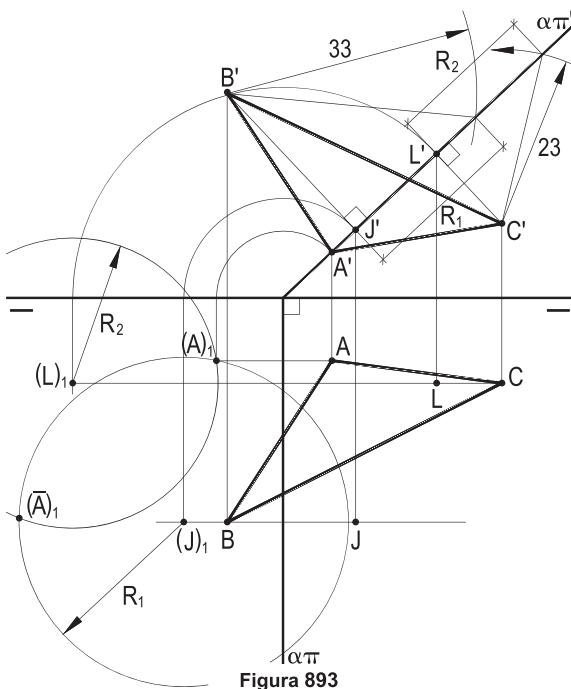


Figura 893

**742 – As retas reversas  $(r)$  e  $(s)$  são ambas paralelas a  $(\beta_{24})$ . Sabendo que  $(r)$  pertence ao ponto  $(A)$  e  $(s)$  ao ponto  $(B)$ , pede-se construir as projeções da reta  $(p)$ , perpendicular comum a  $(r)$  e a  $(s)$ , e determinar a V.G. da distância  $d$  que as separa.**

**São dadas as projeções  $A, A', B, B', r'$  e  $s'$ .**

Resolução: A reta  $(p)$  procurada, tendo que ser perpendicular às duas dadas, há de ser, também, perpendicular a  $(\beta_{24})$ .

Assim, essa reta  $(p)$  será uma das projetantes ortogonais de  $(r)$  e de  $(s)$  sobre  $(\beta_{24})$ , reduzindo-se a um ponto  $(\bar{P})$  sua projeção sobre  $(\beta_{24})$  (Figura 894), o próprio ponto comum às projeções  $(\bar{r})$  e  $(\bar{s})$  das duas retas dadas sobre  $(\beta_{24})$ .

Como a projeção ortogonal de um ponto qualquer sobre  $(\beta_{24})$  tem que ser, em épura, o ponto médio de sua linha de chamada (*Geometria Descritiva*, número 76), uma vez completadas as projeções das retas  $(r)$  e  $(s)$ , dadas, fica simples construir suas projeções ortogonais  $\bar{r}$  e  $\bar{s}$  sobre  $(\beta_{24})$  e, pelo ponto  $\bar{P}$  comum a elas, conduzir a reta  $(J)(L)$ , que é a reta  $(p)$  pedida (Figura 895).

A V.G. da distância  $d$  que separa  $(r)$  e  $(s)$  se obtém com igual facilidade, pela construção do triângulo retângulo e isósceles  $J'L'\bar{L}$ , cuja hipotenusa mede  $d$  (Figura 895).

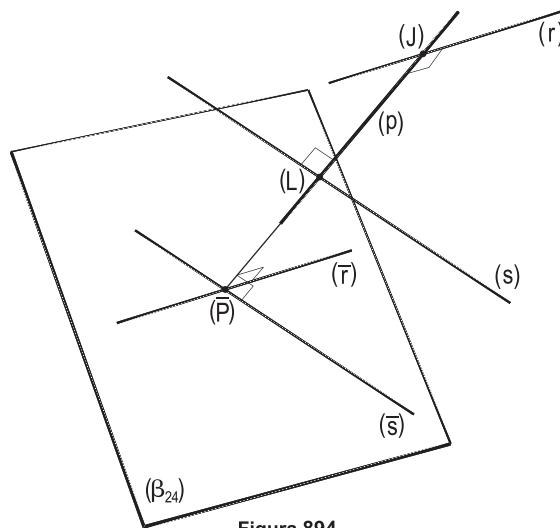


Figura 894

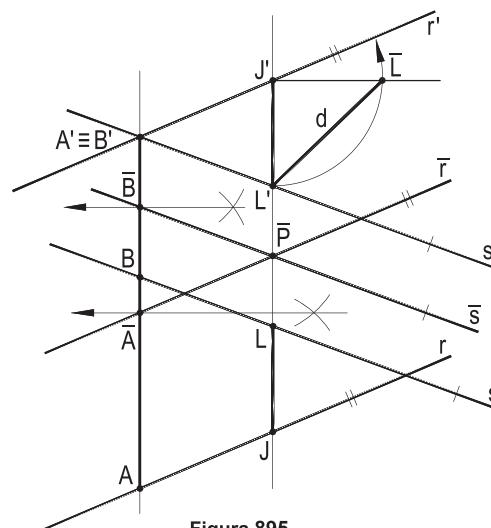


Figura 895

Também utilizando o procedimento clássico, instituído por Gaspard Monge (*Geometria Descritiva*, número 78), consegue-se bom resultado (Figuras 896 e 897): por uma das reversas  $(r)$ , traça-se uma reta  $(M)(N)$  perpendicular a  $(\beta_{24})$ , compondo, com  $(r)$ , um plano  $(\theta)$  naturalmente perpendicular a esse bissetor e que há de conter a reta  $(J)(L)$  procurada, o que se consegue com a interseção que a segunda reversa  $(s)$  provoca nesse plano  $(\theta)$ , trazendo o ponto  $(L)$ , pelo qual se conduz a perpendicular comum  $(J)(L)$  pedida.

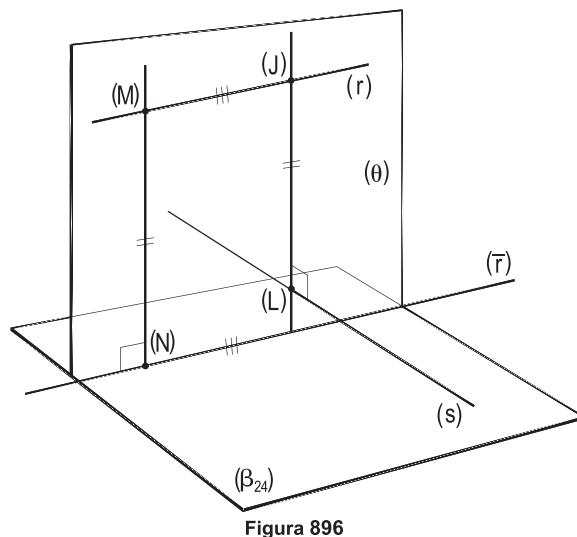


Figura 896

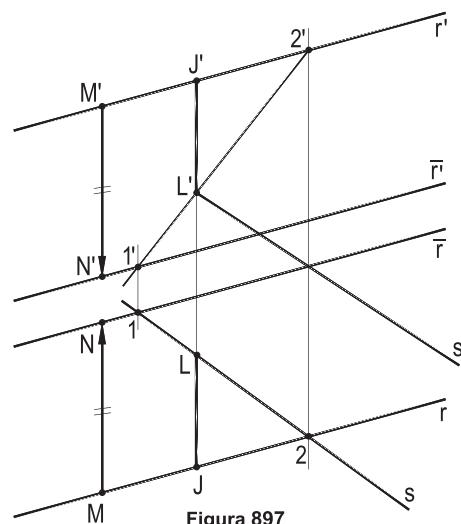


Figura 897

Outra resolução, bem simples também, mas, baseada apenas em Geometria Plana, pode ser proposta. Para tanto, admita-se resolvido o problema e, observando, como se sabe (*Geometria Descritiva*, número 76), que as duas projeções do segmento (J)(L) da perpendicular comum e situada entre as duas retas dadas devem ser iguais, mas com sentidos contrários, os triângulos 1'J'L' e 2JL, por terem lados respectivamente paralelos e os terceiros, J'L' e JL iguais, são iguais. E, com as paralelas a  $r'$  e a  $s'$ , por L' e por J' (Figura 898), vem a igualdade dos triângulos 2JL, 2'J'L' e 1'J'L', o que, então, assegura ser 1'J'2'L' um paralelogramo, ou seja, que a linha de chamada J'J equidista das de 1' e 2' (Figura 898) e, assim, cortem-se mutuamente ao meio suas diagonais J'L' e 1'2'.

Logo, para obter as projeções da perpendicular comum (J)(L), basta tomar os pontos de corte 1' e 2 das projeções do mesmo nome das reversas e obter a linha de chamada deles equidistante (Figura 899), que há de ser aquela que passa pelo ponto M, médio do segmento 1'2'.

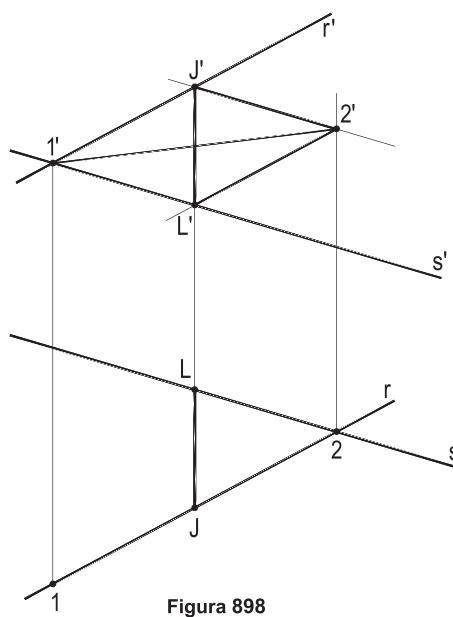


Figura 898

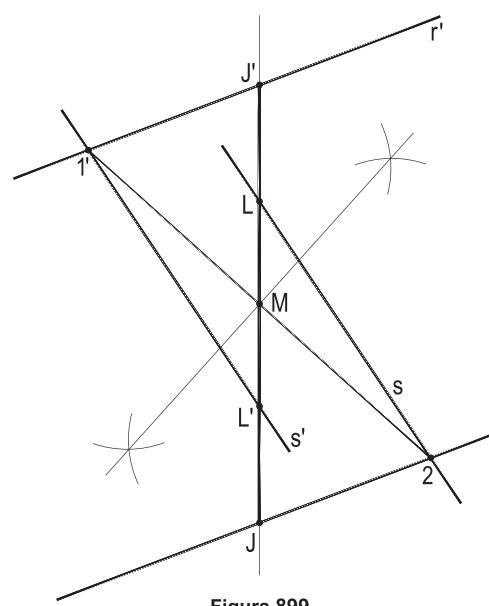


Figura 899

**743 – Dadas, por suas projeções, duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), ambas paralelas a ( $\beta_{13}$ ), pede-se construir as projeções da perpendicular comum a elas.**

Resolução: O problema é semelhante ao anterior e vai, aqui, resolvido com o auxílio do método tradicional de Gaspard Monge (*Geometria Descritiva*, número 78).

Assim, constrói-se o plano ( $\theta$ ) com uma das reversas ( $r$ ) e com uma reta ( $M(N)$ ) perpendicular a ( $\beta_{13}$ ), obtendo-se ( $\bar{r}$ ), paralela a ( $r$ ).

O traço desse plano com a segunda reversa ( $s$ ) é um ponto ( $L$ ) da perpendicular comum ( $J(L)$ ) pedida (Figura 900), sendo, então, imediato obter suas projeções.

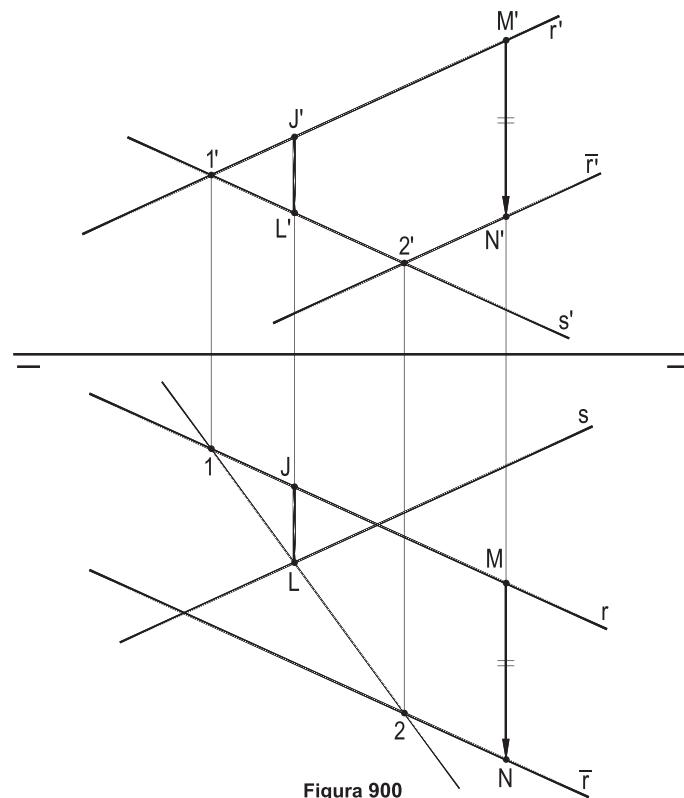


Figura 900

**744 – Desenhar as projeções do triângulo (A)(B)(C), retângulo em (A), sabendo que (A) pertence à horizontal ( $h$ ), dadas as projeções de (B)(C) e de ( $h$ ).**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Plana*, número 76) que a mediana do triângulo retângulo, relativa à sua hipotenusa, vale a metade dessa hipotenusa.

Assim, determinada a V.G.  $m = M'C'_1$  dessa mediana, constrói-se o cone de vértice ( $M$ ), ponto médio de ( $B(C)$ ), apoiado no plano horizontal de ( $h$ ) (*Geometria Descritiva*, número 124), para obter as duas soluções ( $A$ ) e ( $\bar{A}$ ) para o vértice procurado (Figura 901). Apenas um triângulo foi completado.

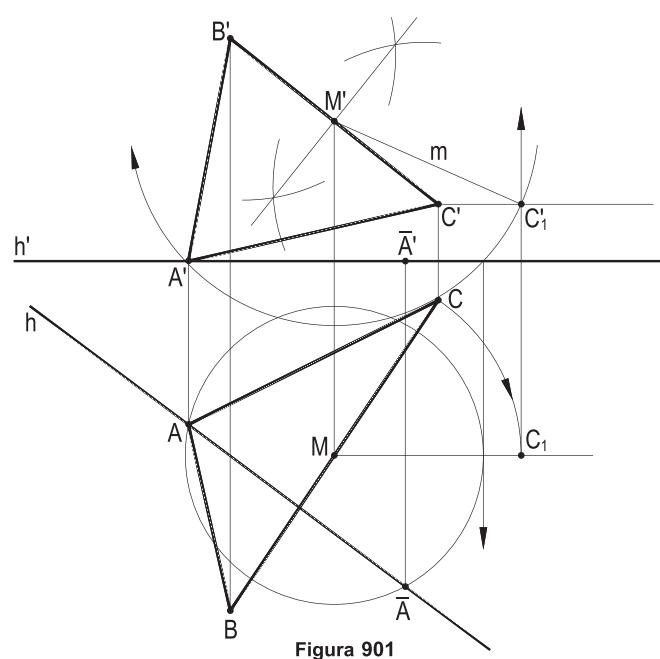


Figura 901

**745** – Desenhar as projeções do triângulo isósceles (A)(B)(C), do primeiro diedro, cuja base (B)(C), de perfil, mede 46 mm e pertence ao plano ( $\alpha$ ). Os lados iguais do triângulo medem 57 mm e (B) tem cota maior que (C).

São dados as projeções do ponto (A) e os traços do plano ( $\alpha$ ).

Resolução: Como em exemplos anteriores, os lados iguais (A)(B) e (A)(C) são geratrizess do cone de revolução de vértice (A), base em ( $\alpha$ ), geratrizess medindo 57 mm e altura (A)(O), perpendicular a ( $\alpha$ ), (O) em ( $\alpha$ ).

Assim, traçada a perpendicular por (A) a ( $\alpha$ ), obtido seu traço (O) em ( $\alpha$ ) e determinada a V.G. h dessa altura, a construção auxiliar do triângulo retângulo  $A'\bar{O}'\bar{J}$  proporciona o valor R do raio da base do cone.

Feito o rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) e levada, a esse rebatimento, uma reta ( $V(H)$  de perfil do plano, obtém-se a direção ( $V_1(H)_1$ ) da base do triângulo que, então, pode ser construída, pela marcação da metade, 23 mm, do lado ( $B(C)$ ) (Figura 902), facilmente alcada.

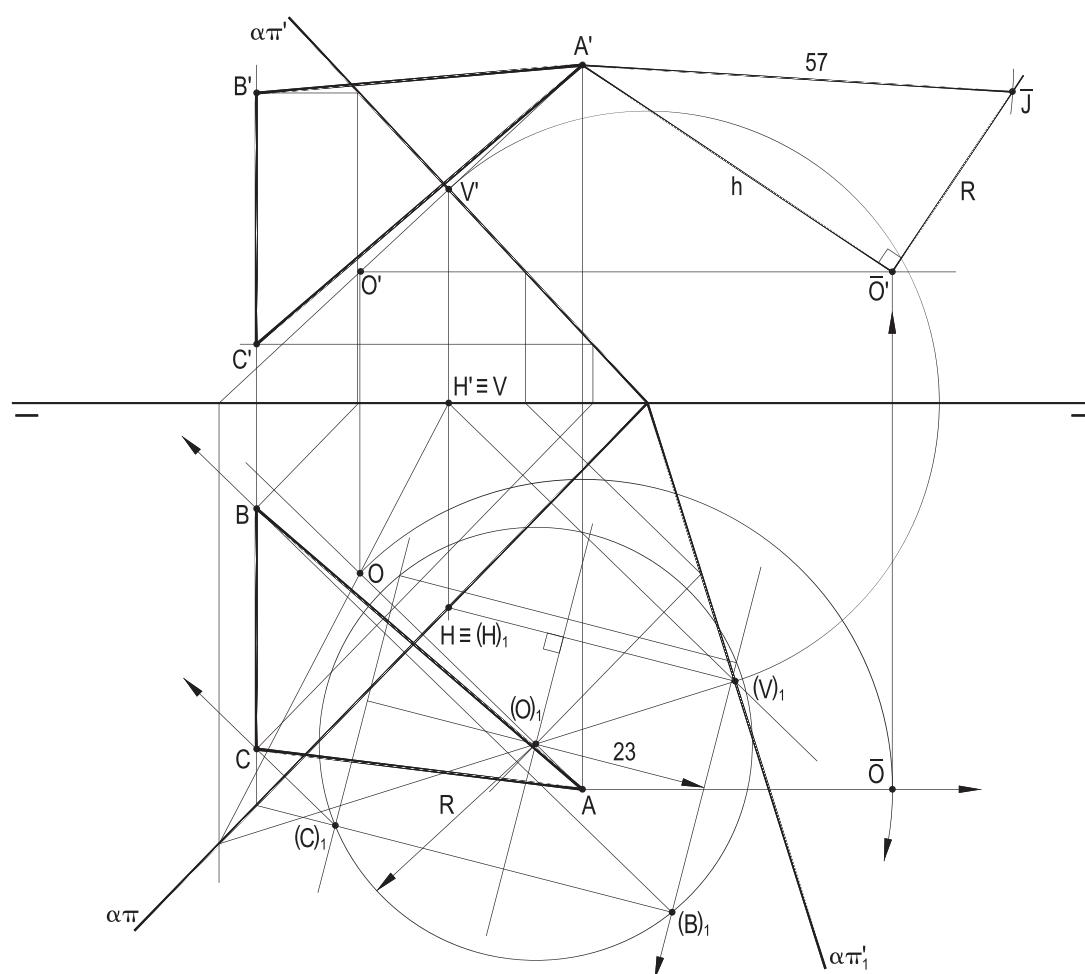
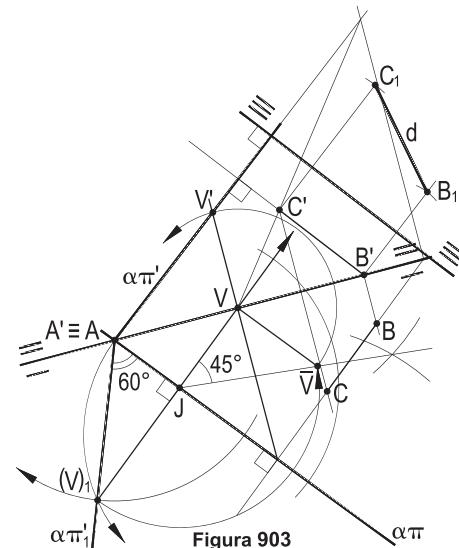


Figura 902

**746** – Sendo dados o traço  $\alpha\pi$  do plano ( $\alpha$ ) e o ponto (A), de ( $\alpha$ ), sobre  $\alpha\pi$  e com projeções coincidentes, além da projeção vertical  $B'$ , de um ponto (B) de ( $\pi'$ ) exterior a ( $\alpha$ ), e sabendo-se que ( $\alpha$ ) forma  $45^\circ$  com ( $\pi$ ), tem traços no sentido direto e que, no espaço, os traços de ( $\alpha$ ) formam, entre si, um ângulo de  $60^\circ$ , pede-se determinar a posição de linha de terra, o traço  $\alpha\pi'$  e a distância d, de (B) a ( $\alpha$ ).

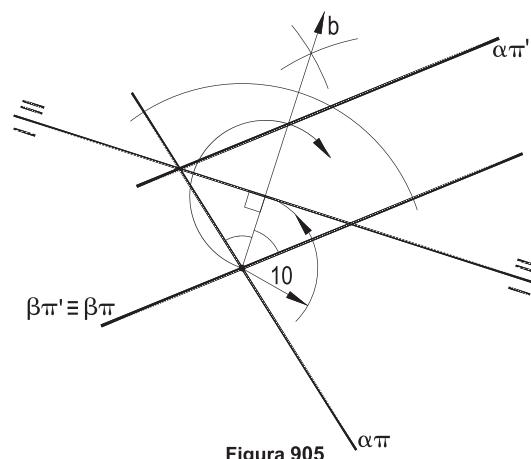
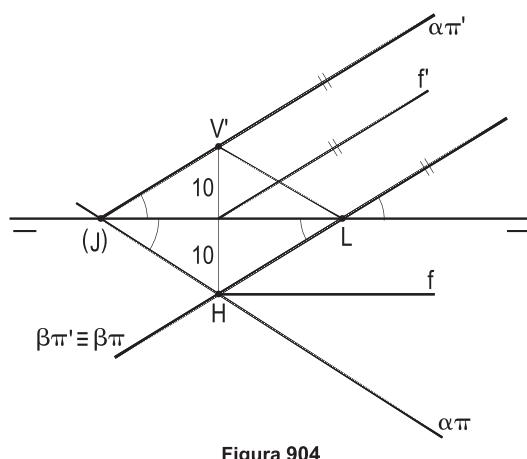
Resolução: Construído  $\alpha\pi'_1$ , inclinado de  $60^\circ$  com  $\alpha\pi$  e arbitrado um ponto  $(V)_1$  de  $\alpha\pi'_1$ , passemos a seu alcamento, utilizando seu triângulo de rebatimento  $JVV'$ , que pode ser facilmente construído, por se conhecer seu ângulo de  $45^\circ$  (Figura 903). A linha de terra, naturalmente pertencente ao ponto (A), passa também por V, o que a define em posição, com dupla orientação. E a cota  $VV'$  do ponto (V) permite, então, obter  $V'$  e, como consequência,  $\alpha\pi'$ .

A perpendicular  $(B)(C)$  a ( $\alpha$ ) proporciona, em V.G., a distância  $B_1C_1 = d$ , pedida.



**747** – Os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) são, respectivamente, perpendiculares a ( $\beta_{13}$ ) e a ( $\beta_{24}$ ) e cortam-se segundo uma frontal, de afastamento igual a 10 mm. Dados seus traços horizontais  $\alpha\pi$  e  $\beta\pi$ , pede-se determinar a posição da linha de terra e os traços verticais dos dois planos, em apenas uma solução.

Resolução: Imaginemos o problema resolvido, os traços de ( $\beta$ ) coincidentes e os de ( $\alpha$ ) simétricos em relação à linha de terra, os traços verticais  $\alpha\pi'$  e  $\beta\pi'$  paralelos e a frontal ( $f$ )  $\equiv (\alpha\beta)$ , marcada (Figura 904). Os paralelogramos e as simetrias, existentes, implicam em que ( $J$ )V'LH seja um losango (Figura 904) e que, por isso, HV' venha a pertencer à bisetriz de um dos ângulos formados pelos traços horizontais dados, o que resolve o problema, tal como construído na Figura 905.



**748 – Determinar as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), do primeiro diedro, com 5 cm de lado, sabendo que seu lado (B)(C) pertence ao plano ( $\alpha$ ), perpendicular a ( $\beta_{24}$ ) e seu vértice (B) a ( $\pi$ ).**

São dados as projeções de vértice (A) e o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano ( $\alpha$ ).

Resolução: Já que o vértice (B) pertence a ( $\alpha$ ) e a ( $\pi$ ), ele há de estar sobre  $\alpha\pi$ . Assim, a construção do cone de revolução de vértice (A), base em ( $\pi$ ) e geratriz iguais a 5 cm proporciona, pela interseção da circunferência de sua base com  $\alpha\pi$ , a localização do vértice (B).

Como se trata de um quadrado, o lado (B)(C) tem que pertencer ao plano ( $\theta$ ), conduzido por (B) e perpendicular ao lado (A)(B), já construído. E se, pelos dados, (B)(C) pertence ao plano ( $\alpha$ ), (B)(C) tem que estar sobre a interseção (r) de ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ).

Então, construídos o plano ( $\theta$ ) e sua interseção (r) com ( $\alpha$ ), basta aplicar sobre esta reta o valor 5 cm do lado do quadrado, mediante uma mudança de ( $\pi$ ), que a leve a ser horizontal, para obter, no primeiro diedro, o vértice (C) e, com paralelas, completar as projeções de (A)(B)(C)(D) (Figura 906).

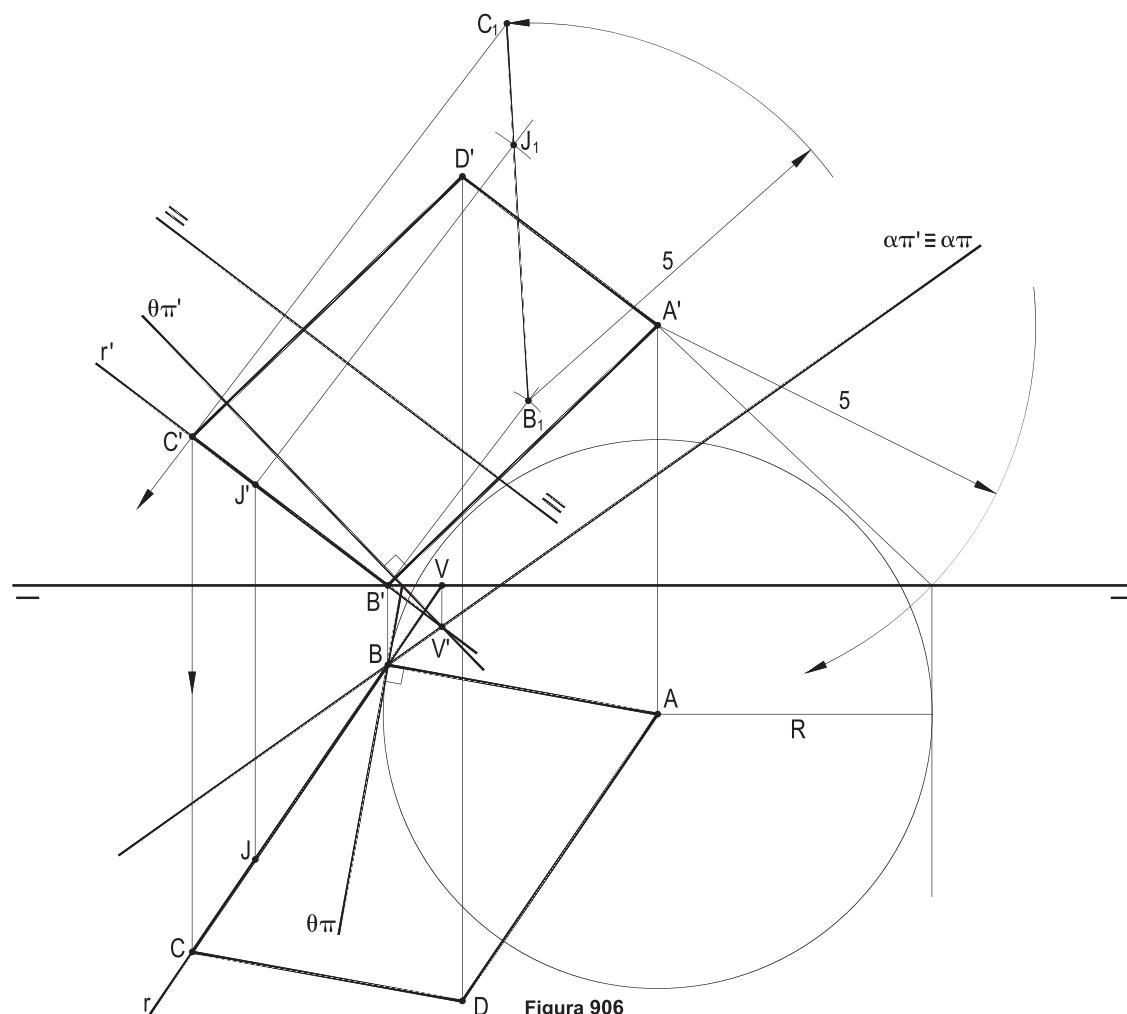


Figura 906

**749 – Construir as projeções do segmento (A)(B) de 28 mm de comprimento, pertencente ao primeiro diedro e igualmente inclinado em relação a ( $\pi$ ) e a ( $\pi'$ ), sabendo que (B) tem abscissa nula. Dados A' e A.**

Resolução: (A)(B) há de ser uma geratriz de 28 mm do cone de revolução de vértice (A), eixo fronto-horizontal, e base em ( $\pi''$ ). E, para se inclinar igualmente em relação aos dois planos de projeção, deve ser paralelo a um dos bissetores (Figura 907).

Das quatro posições possíveis para atender às condições, apenas duas restam no primeiro diedro (Figura 908) e só uma foi alçada.

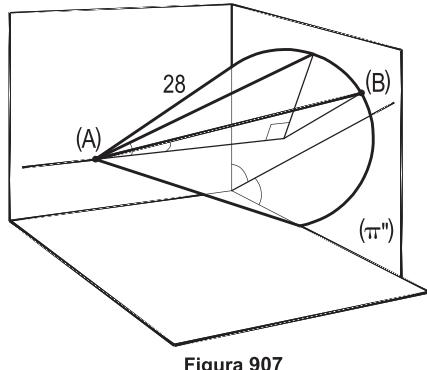


Figura 907

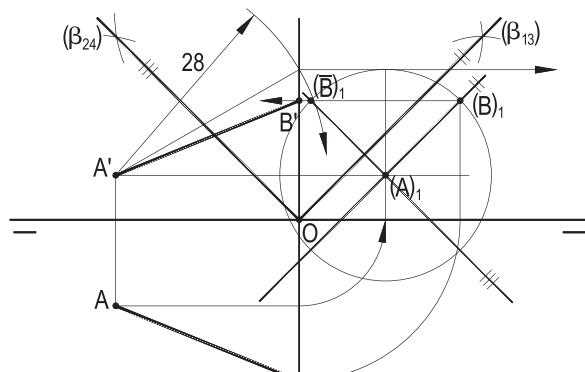


Figura 908

**750 – Desenhar as projeções do menor quadrado, que tenha um vértice sobre a horizontal (r) e outro sobre (s), também horizontal, mas reversa a (r), sabendo que o plano do quadrado forma  $30^\circ$  com ( $\pi'$ ), dadas as projeções das duas horizontais.**

Resolução: Buscando a menor dimensão para o quadrado, deve-se pensar na perpendicular comum às reversas (r) e (s), que há de ser uma vertical (v) (Figuras 909 e 910). E mais, para reduzir ao máximo as dimensões do quadrado (A)(B)(C)(D) procurado, os vértices situados em (r) e em (s) devem definir uma diagonal (A)(C) sua. Há uma segunda solução, não incluída na Figura 910, simétrica em relação ao plano de perfil de (A)(C).

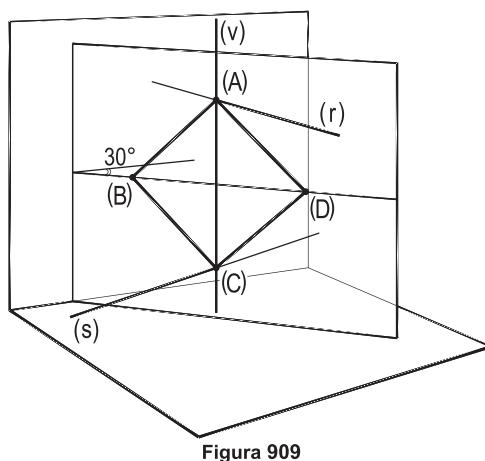


Figura 909

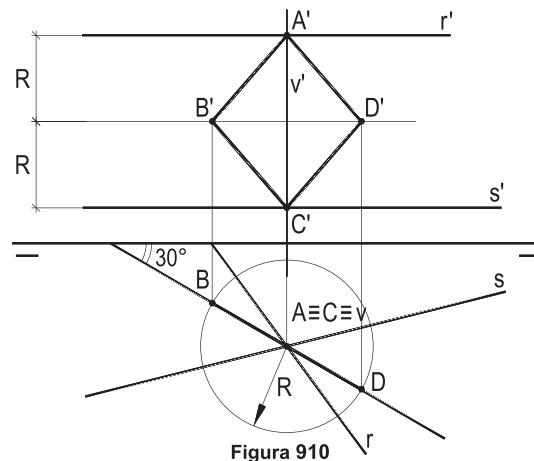


Figura 910

**751 – A reta (a) é de máximo declive de um plano ( $\alpha$ ) em relação ao plano ( $\beta$ ) e, reciprocamente, (b) é uma das retas de máximo declive de ( $\beta$ ) em relação a ( $\alpha$ ).**

Pede-se construir esses dois planos, sendo dadas as projeções das retas reversas (a) e (b).

Resolução: A simples observação (Figura 911) dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) e das retas (a) e (b), de máximo declive de cada um em relação ao outro, mostra a interseção ( $p$ ) dos dois planos como a perpendicular comum às duas retas dadas. Basta, por isso, obter ( $p$ ) (Figura 912) para compor, com (a) e com (b), os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), pedidos.

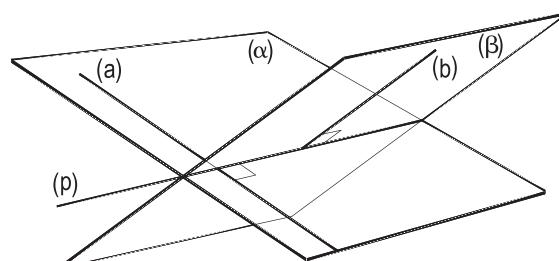


Figura 911

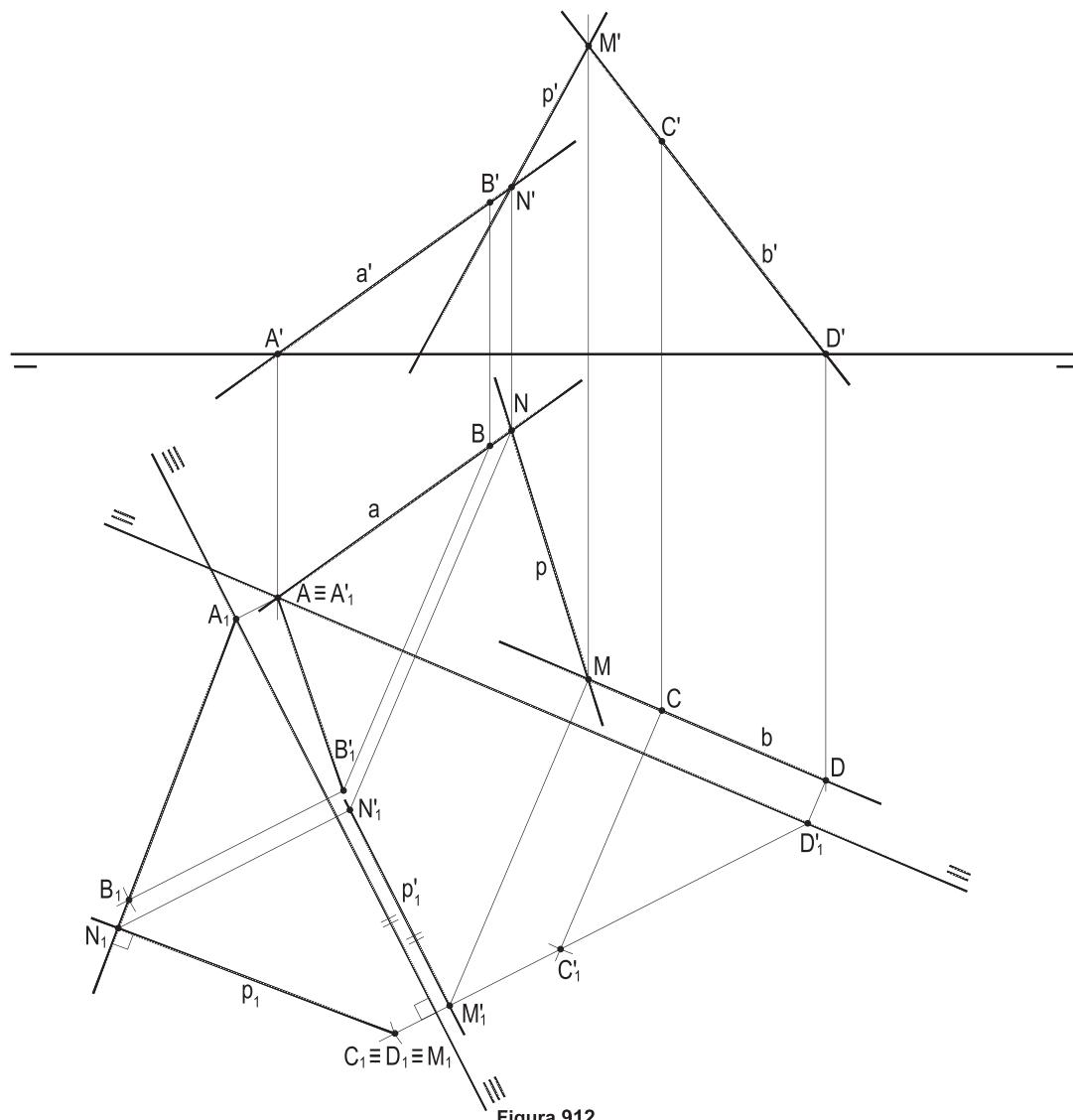


Figura 912

**752 – Desenhar as projeções do paralelogramo (A)(B)(C)(D), cuja projeção horizontal é retangular, sabendo que (A), (B) e (C) pertencem, respectivamente, às retas dadas (a) e (b) e a ( $\pi'$ ) e que (C)(D) é paralelo a ( $\beta_{24}$ ), (D) em ( $\beta_{13}$ ).**

Resolução: Sendo verticais as retas dadas (a) e (b), a projeção horizontal, retangular, é de imediata construção, já que (C) tem afastamento nulo. Para a projeção vertical, marca-se D' e, em seguida, C', já que C'D' é paralela a CD (Figura 913).

**753 – Dados o ponto (J), por suas projeções, e o plano ( $\alpha$ ), por seus traços, pede-se construir as projeções do segmento (J)(A) de comprimento igual ao dobro da abscissa de (J), sabendo que (A) pertence a ( $\alpha$ ) e a um dos planos de projeção.**

Resolução: Sabe-se que o lugar geométrico dos pontos (A) de ( $\alpha$ ) que distam um valor constante  $2x$ , igual ao dobro da abscissa  $x$ , é a circunferência de ( $\alpha$ ), de centro (C), pé da perpendicular de (J) a ( $\alpha$ ) e raio R igual ao segundo cateto  $J_1L_1$  do triângulo retângulo  $C_1J_1L_1$ , cujo primeiro cateto vale a distância  $J_1C_1$  de (J) a ( $\alpha$ ) e cuja hipotenusa mede  $2x$ . Os pontos (A) procurados são seus cortes com um dos traços de ( $\alpha$ ).

Há quatro soluções, para as posições dadas, mas só duas ( $A_1$ ) e ( $A_2$ ) foram alçadas na Figura 914.

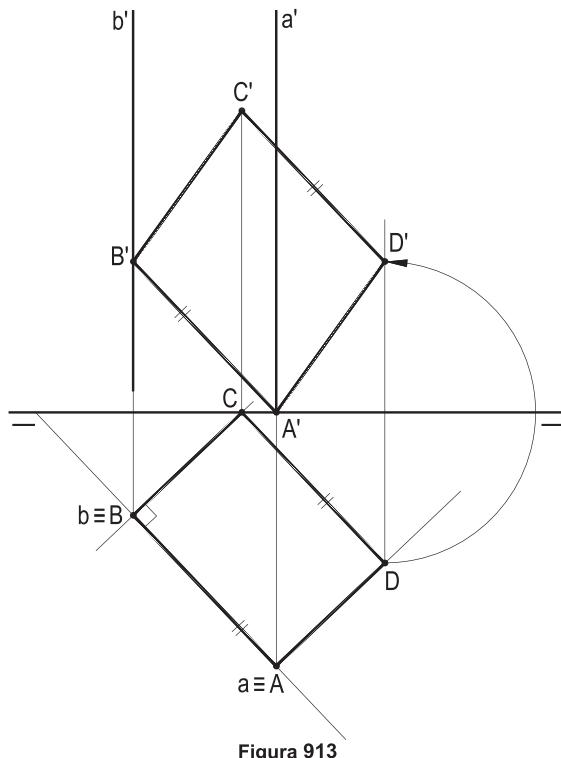


Figura 913

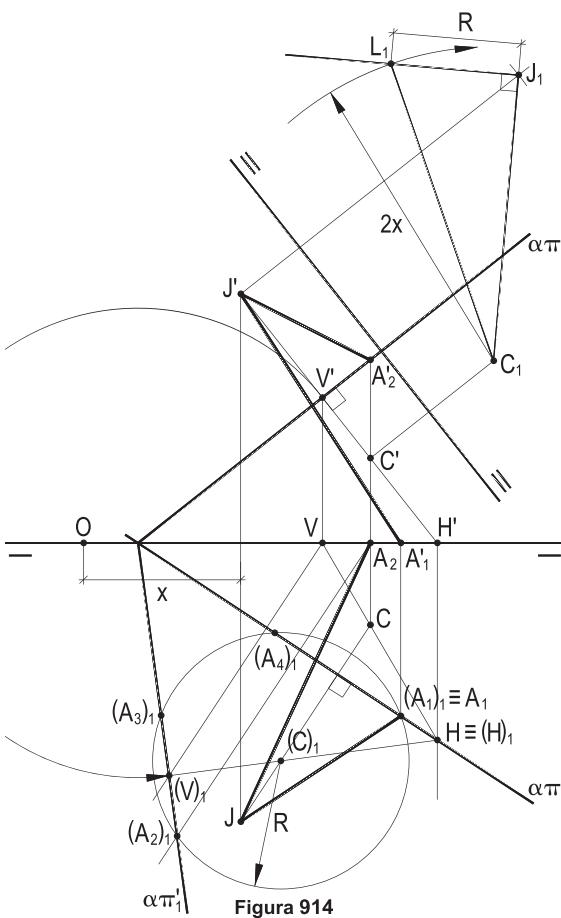
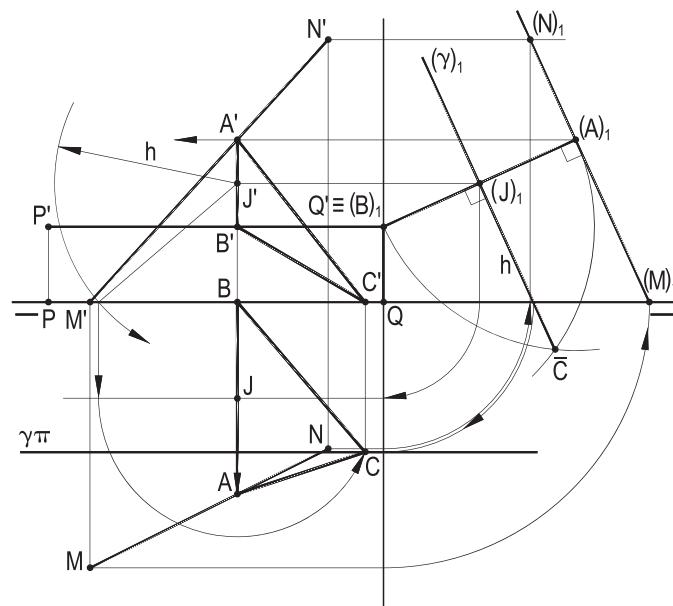


Figura 914

**754 – Determinar as projeções do triângulo equilátero mínimo (A)(B)(C), que tenha os vértices (A) e (B) respectivamente nas retas (M)(N) e (P)(Q) e o vértice (C) sobre o P.H. de projeção, correspondendo à solução de maior abscissa. Dadas as projeções de (M)(N) e (P)(Q). (FEUG – 62).**

Resolução: Para ser mínimo o triângulo equilátero (A)(B)(C), seu lado (A)(B), mínimo, tem que pertencer à perpendicular comum às retas (M)(N) e (P)(Q), obtida com uma vista de perfil (Figura 915), proporcionando, ademais, a V.G.  $h = (J)_1 \bar{C}$  da altura do triângulo.

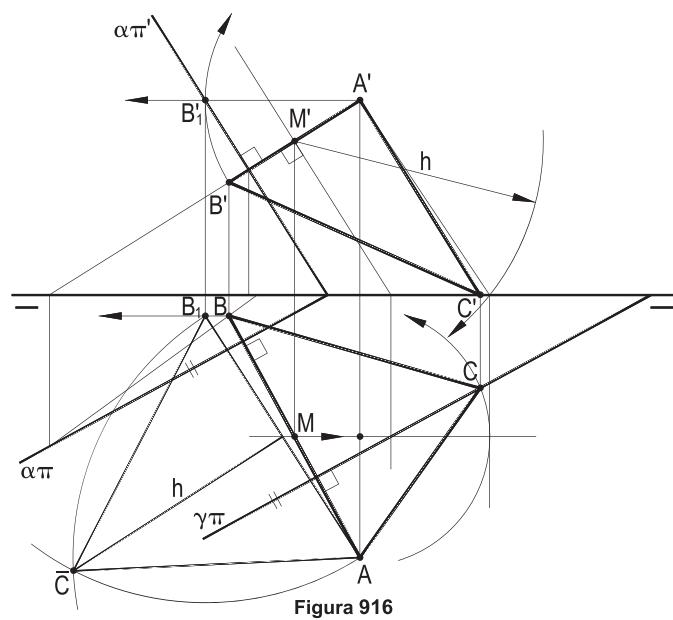
O cone de revolução de vértice no ponto (J), médio de (A)(B), base em ( $\pi$ ) e geratrizes iguais a  $h$ , traz o vértice (C), de ( $\pi$ ), no traço horizontal  $\gamma\pi$  do plano ( $\gamma$ ), mediador de (A)(B).



**Figura 915**

755 – Determinar as projeções de um triângulo equilátero (A)(B)(C), sabendo-se que: 1) o comprimento do lado é dado pela distância do vértice (A) ao plano ( $\alpha$ ); 2) o vértice (B) está sobre o plano ( $\alpha$ ); 3) o vértice (C) está sobre o P.H. de projeção, correspondendo à solução de menor afastamento. Dados as projeções de (A) e os traços de ( $\alpha$ ). (FNA – 63).

Resolução: A perpendicular de (A) a ( $\alpha$ ) traz (B). Com uma rotação que faça (A)(B) ser horizontal, obtém-se a V.G.  $AB_1$  do lado do triângulo e, com a construção de sua V.G.  $AB_1\bar{C}$ , obtém-se sua altura  $h$ , que proporciona a construção do cone de revolução de vértice (M), médio de (A)(B), base em ( $\pi$ ), geratrices iguais a  $h$ , cuja circunferência da base corta o traço horizontal  $\gamma\pi$  do plano mediador de (A)(B) segundo o vértice (C), que completa o triângulo (Figura 916).



**Figura 916**

**756 – Construir as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), cujo lado (A)(B) é perpendicular ao plano ( $\alpha$ ), (A) na reta (r) e (B) em ( $\alpha$ ), sabendo que o vértice (C) pertence a ( $\pi$ ) e que o comprimento de seu lado é igual ao afastamento de (r), dadas as projeções de (r) e os traços de ( $\alpha$ ).**

**Escolha a solução que corresponda à menor abscissa para o vértice (C).**

**Resolução:** Sendo perpendicular a ( $\alpha$ ), com comprimento conhecido  $k$ , igual ao afastamento de (r), (A) deve pertencer a um plano ( $\beta$ ), paralelo a ( $\alpha$ ), afastado de ( $\alpha$ ) daquele valor  $k$ , dispensando o plano à direita de ( $\alpha$ ), para atender à menor abscissa para (C). Assim, (A) é a interseção de (r) com ( $\beta$ ), sendo (B) o pé da perpendicular de (A) a ( $\alpha$ ). E (B)(C), perpendicular a (A)(B), há de pertencer ao plano ( $\alpha$ ) (Figura 917), devendo (C) ter sua posição determinada sobre  $\alpha\pi$  pela interseção da circunferência de centro  $(B)_1$  e raio igual ao lado do quadrado, no rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) (Figura 918).

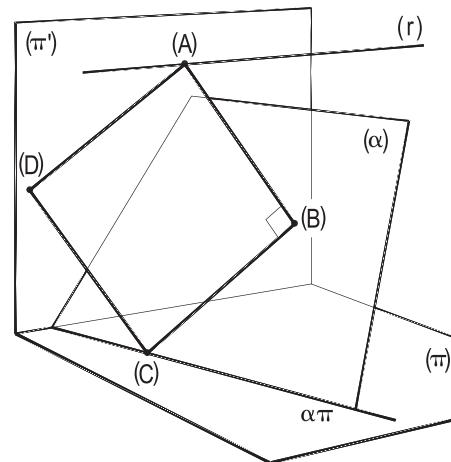


Figura 917

As projeções do quadrado são, então, completadas com paralelas.

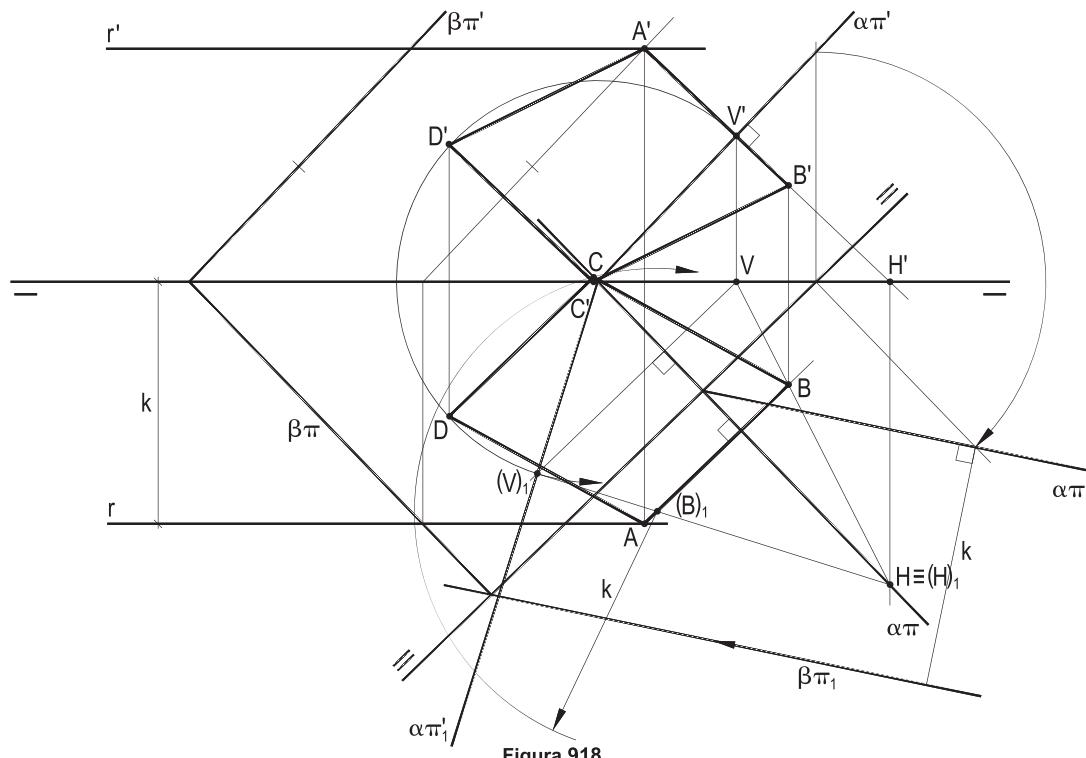


Figura 918

**757 – Dado, por suas projeções, o triedro  $(J)-(x)(y)(z)$ , pede-se determinar o eixo de rotação ( $e$ ), pertencente a  $(J)$ , que permite girar duas de suas arestas até que coincidam com a terceira.**

Resolução: Se considerarmos sobre as arestas do triedro três segmentos iguais  $(J)(A)$ ,  $(J)(B)$  e  $(J)(C)$ , seja qual for o valor  $k$  desses segmentos, sendo  $(e)$  o eixo que responde à questão, após a rotação das arestas do triedro, quando chegarem a coincidir, os pontos  $(A)$ ,  $(B)$  e  $(C)$  também coincidirão, o que implica em que tal eixo  $(e)$  há de ser perpendicular ao plano  $(\alpha)$  do triângulo  $(A)(B)(C)$  (Figura 919), passando pelo circuncentro  $(O)$  desse triângulo e, também, por  $(J)$ .

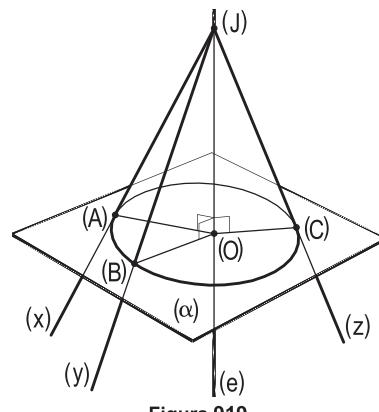


Figura 919

Assim, para construir as projeções do eixo  $(e)$ , basta aplicar três segmentos iguais a um valor arbitrado  $k$  sobre as arestas do triedro, marcando os segmentos  $(J)(A)$ ,  $(J)(B)$  e  $(J)(C)$  e, em seguida, traçar, pelo vértice  $(J)$ , a perpendicular  $(e)$  ao plano  $(\alpha)$  dos pontos  $(A)$ ,  $(B)$  e  $(C)$ , cujos traços são definidos pelos traços  $(H)$ ,  $(V)$  e  $(\bar{V})$  das retas  $(A)(B)$  e  $(A)(C)$  (Figura 920).

É claro que seria equivalente obter o circuncentro  $(O)$  do triângulo  $(A)(B)(C)$  e uni-lo a  $(J)$ , para obter o eixo  $(e)$ .

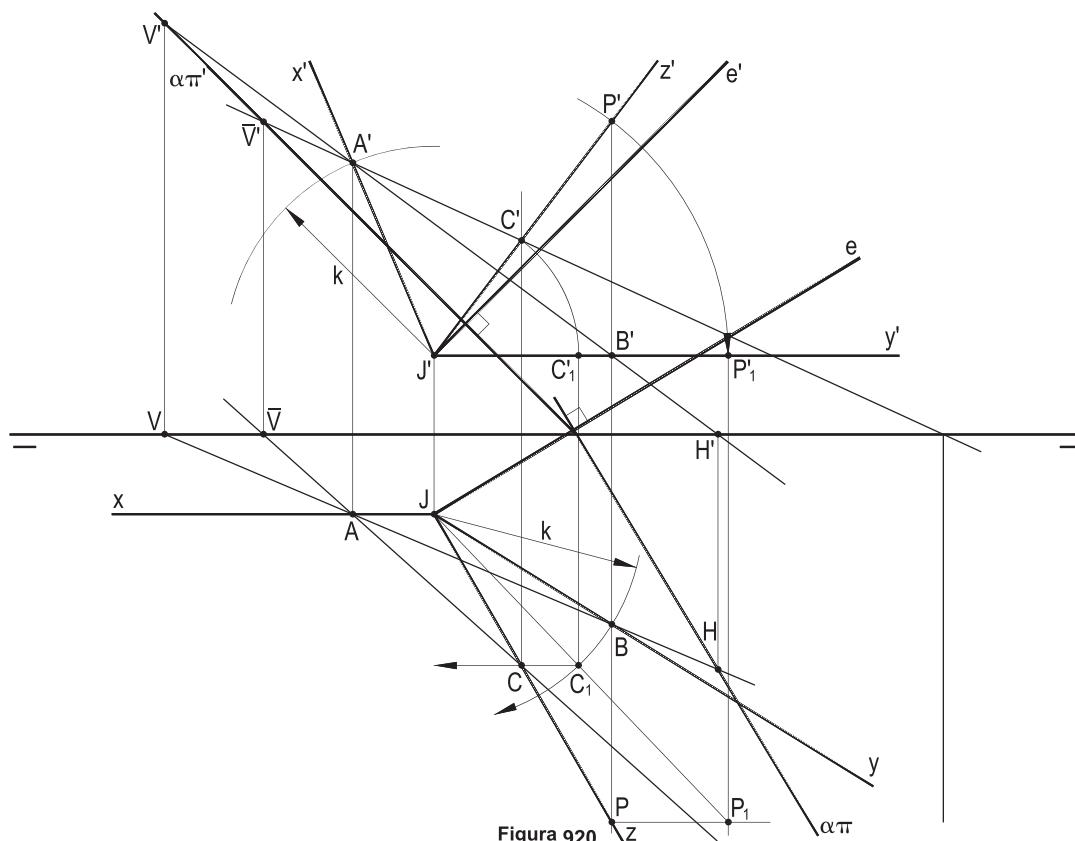


Figura 920

**758 – Três retas ( $r$ ), ( $s$ ) e ( $t$ ) concorrem num mesmo ponto ( $J$ ). Determine as posições que pode ocupar uma reta ( $e$ ) que, passando pelo ponto ( $J$ ), permita que ( $r$ ), ( $s$ ) e ( $t$ ) sejam giradas em torno dela, até que venham a coincidir. Resolução apenas espacial.**

Resolução: O problema é uma generalização do anterior. Aqui são retas, e não semirretas, que estão em jogo, permanecendo válido o procedimento para sua resolução. A diferença está em que combinando as seis semirretas em jogo, o problema oferece quatro soluções para a reta ( $e$ ), eixos de rotações que permitem a coincidência das retas ( $r$ ), ( $s$ ) e ( $t$ ).

De fato, aplicando um mesmo comprimento, arbitrário, num sentido e no outro, sobre cada reta, a partir do vértice ( $J$ ), obtém-se os pontos ( $A$ ) e ( $A'$ ), sobre ( $r$ ), ( $B$ ) e ( $B'$ ) em ( $s$ ) e ( $C$ ) e ( $C'$ ) sobre ( $t$ ), o que permite organizar quatro pares de triedros opostos por seu vértice comum ( $J$ ) e, então, construir, como no problema anterior, as perpendiculares ( $e_1$ ), ( $e_2$ ), ( $e_3$ ) e ( $e_4$ ), que são os eixos pedidos (Figuras 921, 922, 923 e 924).

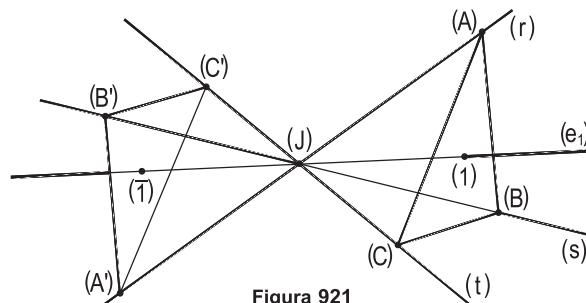


Figura 921

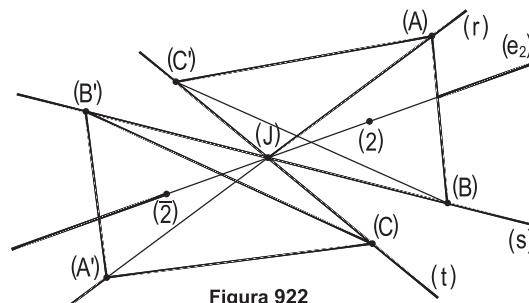


Figura 922

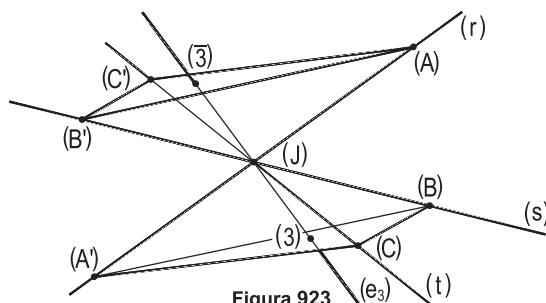


Figura 923

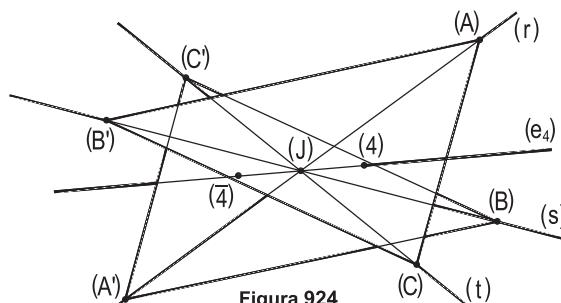


Figura 924

Em verdade, os oito triedros compõem um octaedro, para o qual as retas dadas funcionam como diagonais e os quatro eixos como perpendiculares, do vértice comum dos triedros (o centro do octaedro), aos pares de faces opostas (Figura 925).

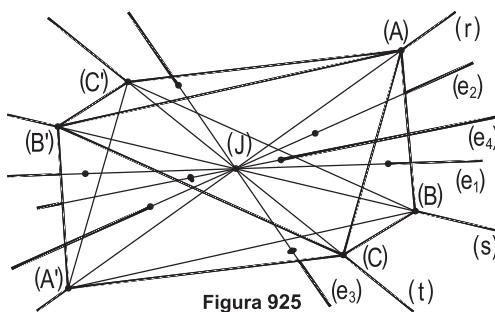


Figura 925

**759 – Os planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , paralelos a  $(\pi'\pi)$ , são perpendiculares um ao outro, contando-se segundo a reta  $(r)$ .**

Sendo dados  $\alpha\pi'$ ,  $\gamma\pi'$  e  $r$ , pede-se determinar as posições de  $\alpha\pi$ ,  $\gamma\pi$  e  $r'$ .

Resolução: Uma vista lateral permite, com a construção do arco, capaz de  $90^\circ$  para os traços  $(V)$  e  $(\bar{V})$  dos planos dados, a obtenção da vista de perfil  $(\bar{r})$  da interseção, com duas soluções para os dados, a segunda apenas indicada pelo número 2, mas não completada na épura.

Simples, os alcâmentos proporcionam os traços  $\alpha\pi$  e  $\gamma\pi$  e a projeção  $r$  pedidos (Figura 926).

**760 – Construir as projeções do losango  $(A)(B)(C)(D)$ , sabendo que os vértices  $(A)$  e  $(C)$  pertencem respectivamente aos planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ . Dados as projeções da diagonal  $(B)(D)$  e os traços dos planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ .**

Resolução:  $(A)$  e  $(C)$  devem pertencer, respectivamente, às intersecções  $(V)(H)$  e  $(f)$  do plano  $(\theta)$ , mediador de  $(B)(D)$ , com os planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , dados.

E como as diagonais do losango cortam-se mutuamente ao meio, a simétrica  $t$  de  $VH$  em relação a  $O$ , projeção horizontal do centro do losango, traz  $C$  (Figura 927), permitindo completar, com paralelas, suas projeções.

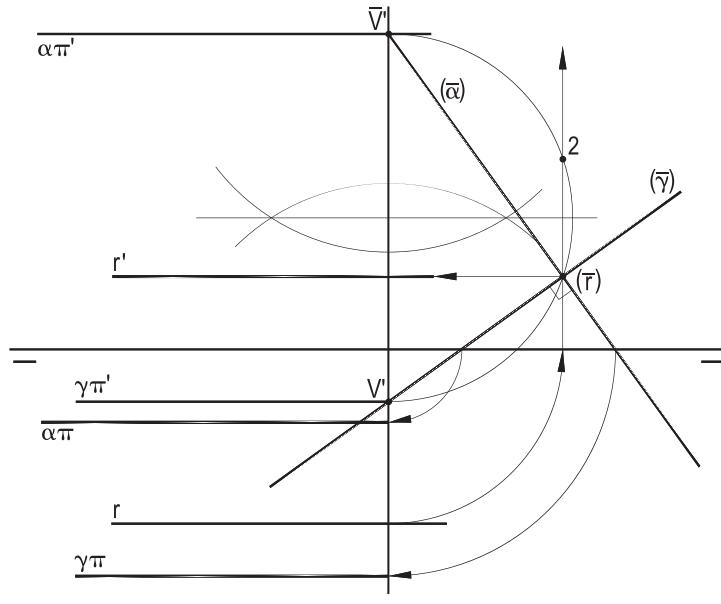


Figura 926

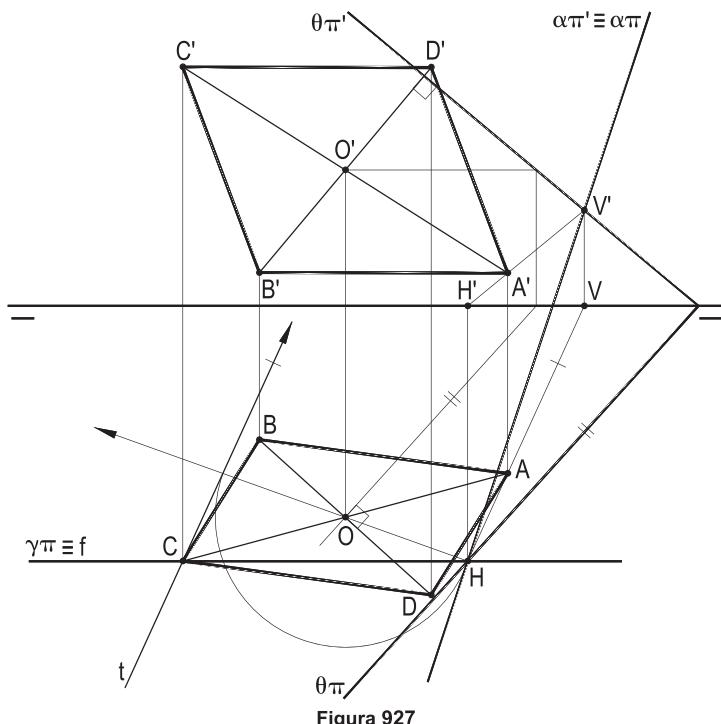


Figura 927

**761 – São dadas as retas de frente (r), (s) e (p).**

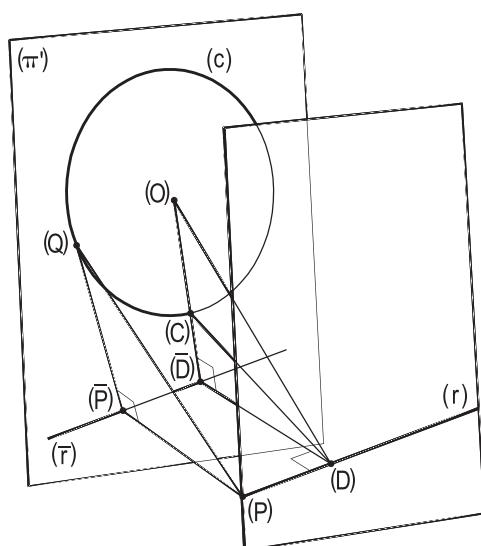
Pede-se determinar as projeções da menor distância de (r) a (C). Sabe-se que (C) é o vértice de um triângulo equilátero, de área mínima, cujos outros dois vértices pertencem respectivamente a (s) e (p). Dados  $r'$ ,  $r$ ,  $s'$ ,  $s$ ,  $p'$  e  $p$ . (EPUC - Escola Pontifícia da Universidade Católica - 1964).

Resolução: Para ter área mínima, o triângulo equilátero (A)(B)(C) em estudo deve ter seu lado (A)(B) situado na reta de topo que é a perpendicular comum às frontais (s) e (p), tendo, pois, sua altura  $h$  projetada em V.G. em ( $\pi'$ ), o que obriga C' a pertencer à circunferência (c) de centro A'  $\equiv$  B' e raio  $h$  (Figura 929), altura do triângulo equilátero AB $\bar{C}$ , V.G. do estudado.

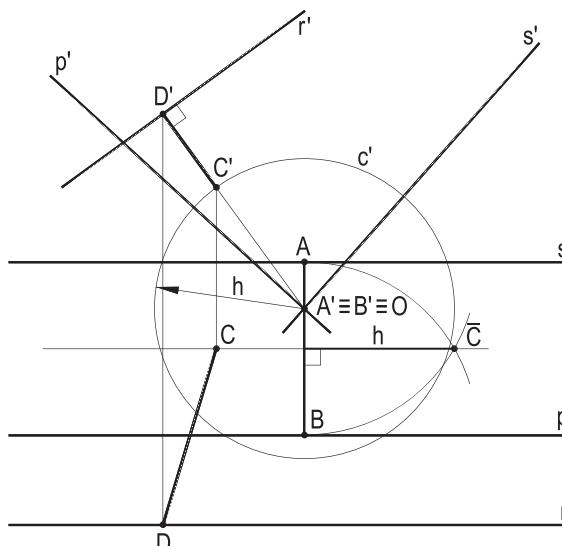
Como  $(r)$  é paralela a  $(\pi')$ , todos os segmentos  $(P)(Q)$  apoiados em  $(r)$  e naquela circunferência produzem triângulos retângulos  $(P)(\bar{P})(Q)$  que têm, todos, um cateto  $(P)(\bar{P})$  de valor constante, igual à distância entre os planos frontais pertencentes a  $(r)$  e à circunferência  $(c)$  (Figura 928). Então, para ser mínima sua hipotenusa, deve ser mínimo seu segundo cateto  $(P)(Q)$ , o que se consegue na posição  $(D)(\bar{D})(C)$  (Figura 928).

De fato, para ser mínima a distância de (r) a (C), ela há de se situar sobre a reta perpendicular à projeção de (r) sobre o plano da circunferência, que se projeta em V.G. em ( $\pi'$ ), tracada do centro (O) de (c), por serem ambas frontais.

Assim é (C)(D) a distância mínima pedida, que vem representada por suas projeções na épura da Figura 929.



**Figura 928**



**Figura 929**

**762 – Desenhar as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), de lado igual ao afastamento do vértice (A), sabendo que o lado (B)(C) pertence ao plano ( $\alpha$ ), (B) em ( $\pi$ ) e que (A) é o vértice de maior abscissa, dados  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$ , A e A'.**

Resolução: O cone de revolução de vértice (A), base em ( $\pi$ ) e geratrizes iguais ao afastamento  $y_A$  de (A) proporciona (B). E, como (B)(C) há de pertencer ao plano ( $\gamma$ ), por (B), e perpendicular a (A)(B), (C) tem que pertencer à interseção (r) de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ).

Com uma rotação que leve (r)  $\equiv$  (B)(J) a ser horizontal, marca-se a V.G. do lado do quadrado, obtendo-se C<sub>1</sub>, e, em seguida, C e C' (Figura 930) e, com paralelas, vem o vértice (D), abandonada a segunda posição possível, por ter abscissa superior à de (A).

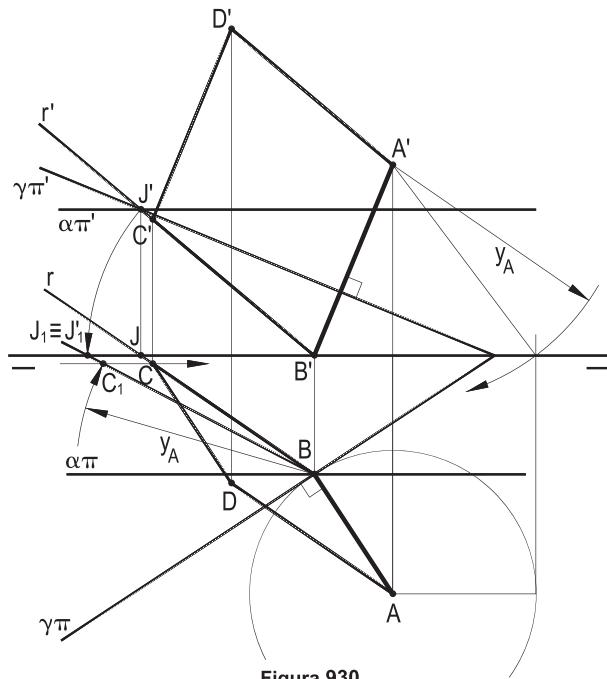


Figura 930

**763 – Construir as projeções do triângulo retângulo (A)(B)(C), de catetos (A)(B) = 18 mm e (A)(C) = 28 mm, sabendo que (A)(B) é perpendicular ao plano ( $\alpha$ ), (A) na reta (r) e (B) em ( $\alpha$ ), que o vértice (C) tem cota nula e afastamento menor que o de (B).**

**Dados as projeções de (r) e os traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: Para distar 18 mm de ( $\alpha$ ), (A) deve pertencer ao plano ( $\beta$ ), distante 18 mm de ( $\alpha$ ), construído com uma mudança de ( $\pi'$ ) (Figura 931).

Obtido (A), por interseção de (r) com ( $\beta$ ), a perpendicular, por (A), a ( $\alpha$ ), dá, em seu pé, o vértice (B). (C) se obtém com o cone de revolução de vértice (A), base em ( $\pi$ ) e geratrizes medindo 28 mm (Figura 931).

A segunda possibilidade, para ( $\beta$ ), à direita de ( $\alpha$ ), é inútil, por ser exterior àquele cone.

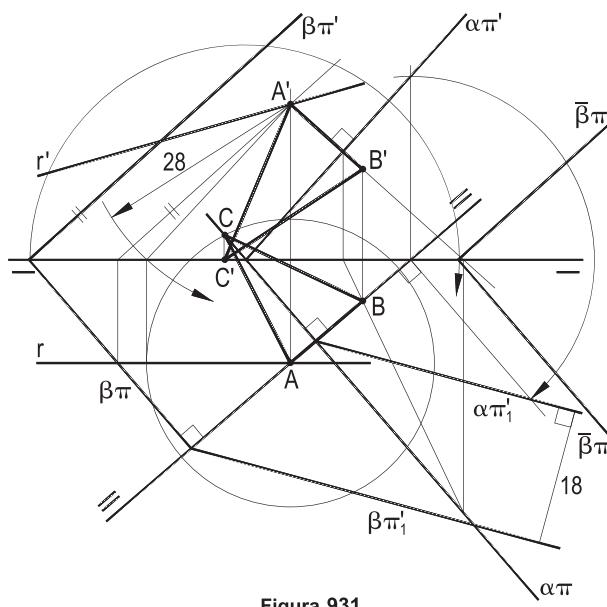


Figura 931

**764 – Determinar as projeções ortogonais e a verdadeira grandeza do triângulo (A)(B)(C), sabendo-se que: 1) o lado (A)(B) é segmento de maior declive de um plano ( $\alpha$ ) em relação ao plano horizontal de projeção; 2) este plano ( $\alpha$ ) é perpendicular ao plano do triângulo; 3) o lado (A)(C) passa pelo centro da circunferência circunscrita ao triângulo, sendo (C) o vértice de maior cota; 4) o ângulo oposto ao lado (A)(B) é de  $60^\circ$ . Dados A', A, B' e B. (FNA – Faculdade Nacional de Arquitetura – 1964).**

Resolução: Para serem perpendiculares ( $\alpha$ ) e o plano de (A)(B)(C), este deve conter a perpendicular ( $p$ ), por (B), a ( $\alpha$ ), o que obriga a ser vertical o plano do triângulo, por coincidirem as projeções horizontais p e BC.

E (*Geometria Plana*, número 128.2) se (A)(C) passa pelo centro do triângulo, este tem que ser retângulo em (B), o que resolve o problema, com a V.G. (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub> (Figura 932).

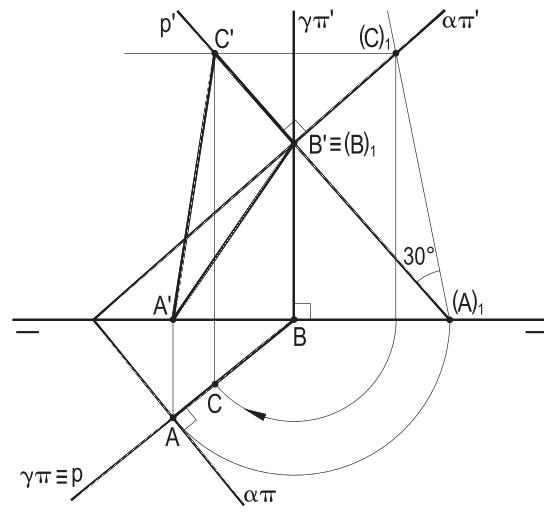


Figura 932

**765 – O plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra, e o plano ( $\beta$ ), qualquer, são, ambos, perpendiculares a ( $\beta_{24}$ ), cortando-se segundo a reta (A)(B).**

Sabendo que o ponto (J) pertence a ( $\beta$ ) e que a cota de (A) vale o dobro da de (J), pede-se determinar os traços de ( $\alpha$ ) e de ( $\beta$ ).

**Dados B', B, J' e J.**

Resolução: Todas as construções baseiam-se na igualdade das projeções dos segmentos de retas de perfil perpendiculares a ( $\beta_{24}$ ) (*Geometria Descritiva*, número 76), como tem que ser (A)(B), proporcionando A a partir de AB = A'B' e de V', com B'V' = BV (Figura 933).

Igualmente, obtém-se H, a partir de JH = J'H', o que define as posições dos traços dos planos ( $\beta$ ) e ( $\alpha$ ).

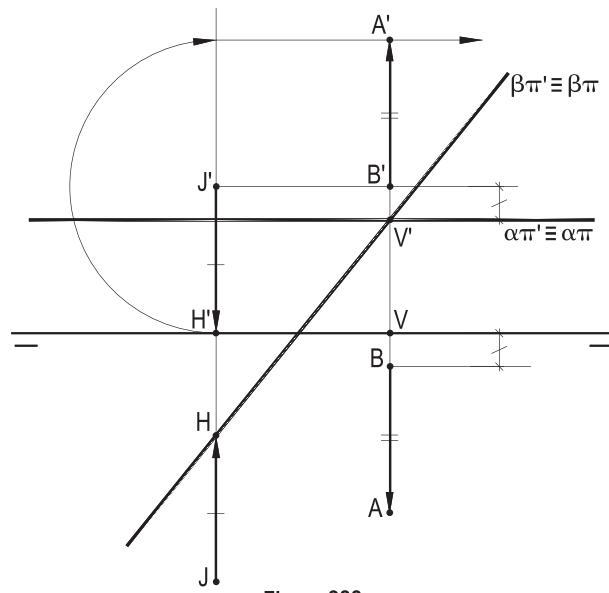


Figura 933

# CAPÍTULO XII

## PROBLEMAS MÉTRICOS ÂNGULOS

Dando continuidade aos problemas métricos, com interesse na determinação e na utilização das verdadeiras grandezas das figuras planas, este capítulo trata dos ângulos, entre retas e planos.

Reúne várias dezenas de problemas, como segue.

**766 – Determinar a verdadeira grandeza do ângulo  $\varphi$  que a reta (r) forma com o plano ( $\alpha$ ), das retas paralelas (a) e (b), sabendo que (b) provém da rotação de (a), em torno do eixo (e), paralelo a (a), traçado pelo ponto (J), numa posição tal que (b) e (J) definam um plano projetante em relação a ( $\pi'$ ), dadas as projeções do ponto (J) e das retas (a) e (r).**

Resolução: Inicialmente é efetuada a rotação de (a) em torno de (e), até que (b), posição final de (a), e (e) formem um plano de topo, havendo uma segunda solução, não completada, mas indicada por  $b_2$  (Figura 934), tudo mediante uma mudança de ( $\pi'$ ) que torna (a), (e) e (b) retas verticais.

Para determinar  $\varphi$ , basta (*Geometria Descritiva*, número 138) obter a V.G. do ângulo  $\gamma$  que (r) forma com uma perpendicular (p) a ( $\alpha$ ), pelo rebatimento do plano de (r) e (p), sobre um plano horizontal ( $\theta$ ) e construir seu complemento (Figura 934).

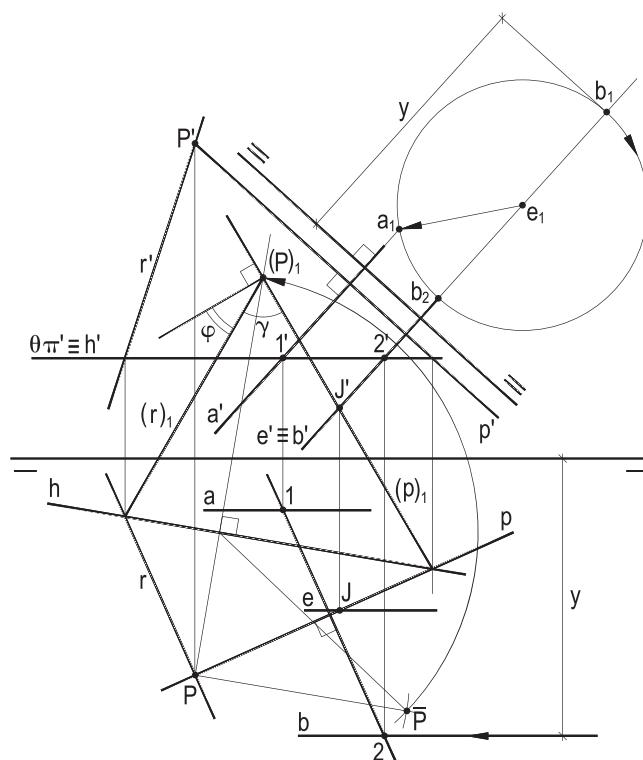


Figura 934

Para todas as épuras abaixo, são dadas, por suas projeções, as retas ( $r$ ) ou ( $A$ )( $B$ ). Pede-se determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que, respectivamente, ( $r$ ) forma com ( $\pi$ ) e ( $A$ )( $B$ ) forma com ( $\pi'$ ).

Resoluções: Leva-se ( $r$ ) a ser frontal, ou ( $A$ )( $B$ ) a ser horizontal, mediante uma mudança de plano, ou uma rotação, para obter as verdadeiras grandezas pedidas.

767

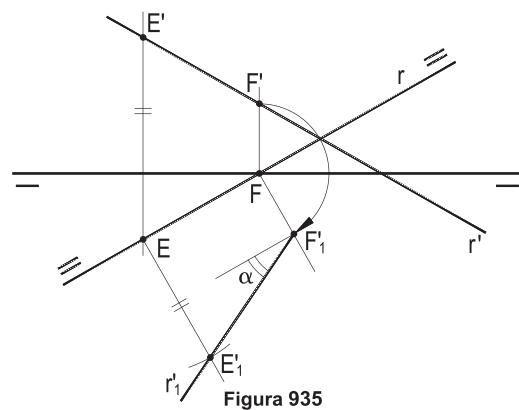


Figura 935

768

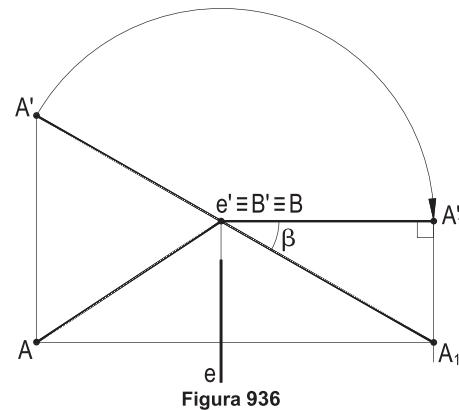


Figura 936

769

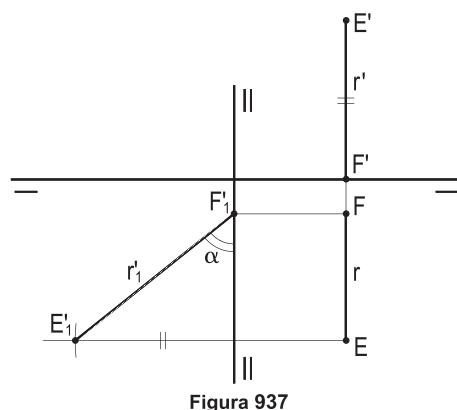


Figura 937

770

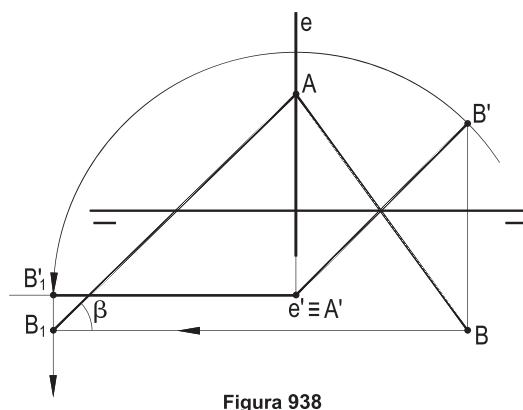


Figura 938

771

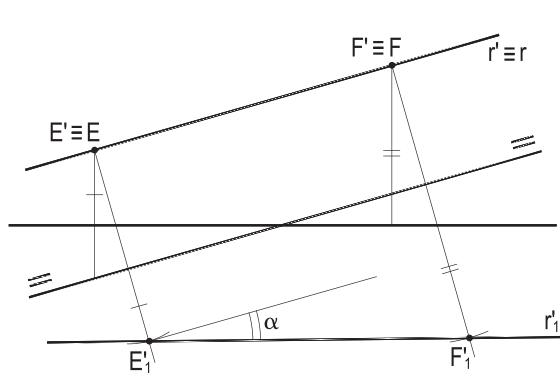


Figura 939

772

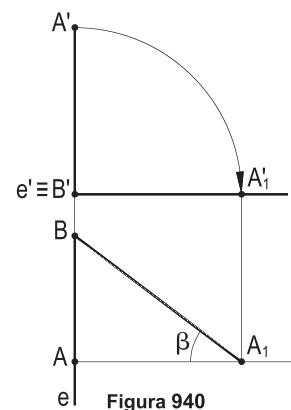


Figura 940

Nas épuras abaixo, são dados, por seus traços, os planos  $(\gamma)$  e  $(\theta)$ . Pede-se determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que, respectivamente,  $(\gamma)$  forma com  $(\pi)$  e  $(\theta)$  forma com  $(\pi')$ .

Na sequência,  $(\gamma)$  vem dado por duas retas (a) e (b) e  $(\theta)$  por duas retas (r) e (s).

Resoluções: Mediante adequadas mudanças de planos, ou rotações, que transformem o plano  $(\gamma)$  em de topo, ou o plano  $(\theta)$  em vertical, obtém-se as verdadeiras grandezas dos ângulos pedidos. Para os exemplos finais, em que os planos vêm dados por duas retas, triângulos de rebatimento são boas alternativas para as resoluções.

773

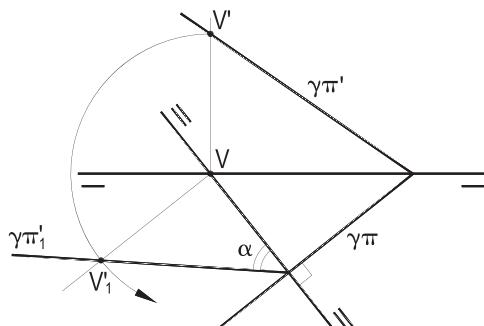


Figura 941

774

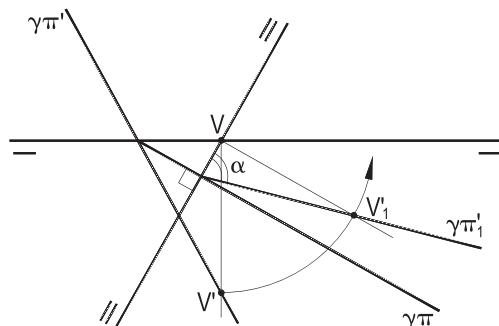


Figura 942

775

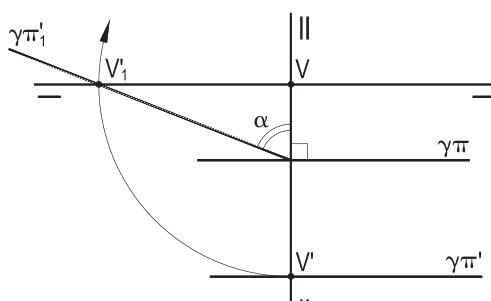


Figura 943

776

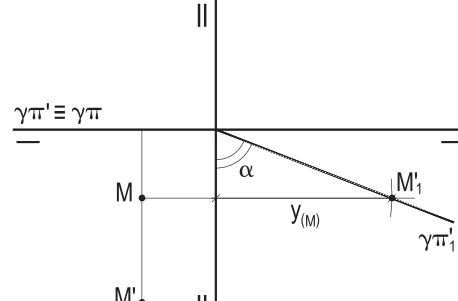


Figura 944

777

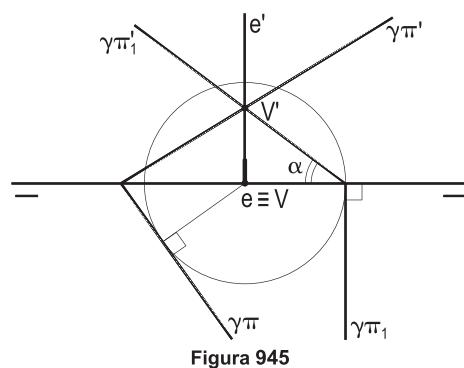


Figura 945

778

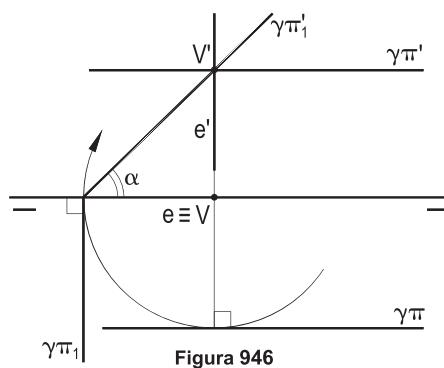
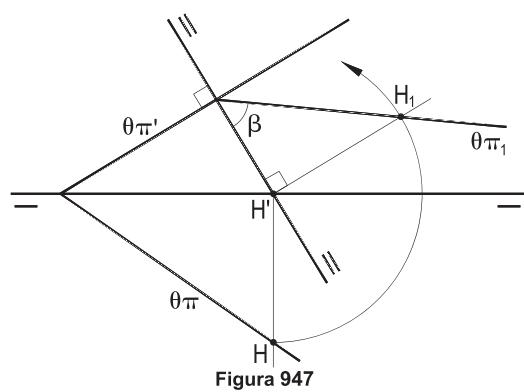
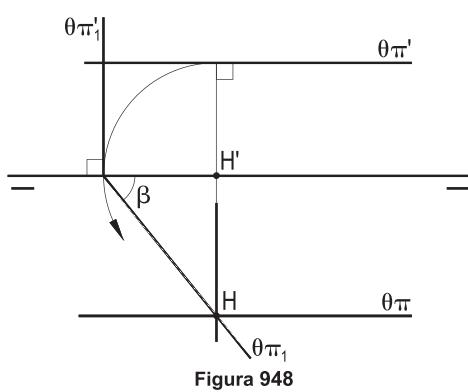


Figura 946

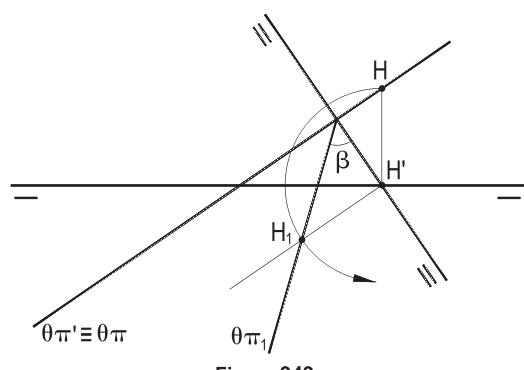
779



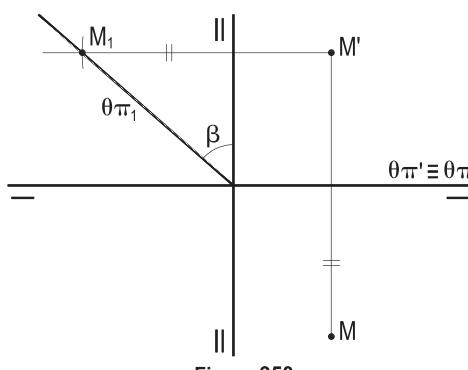
780



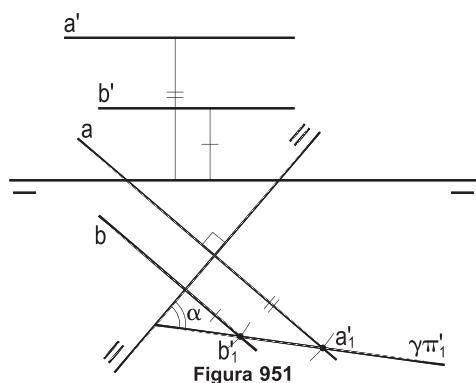
781



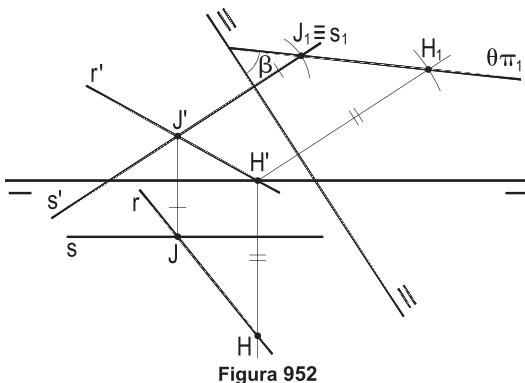
782



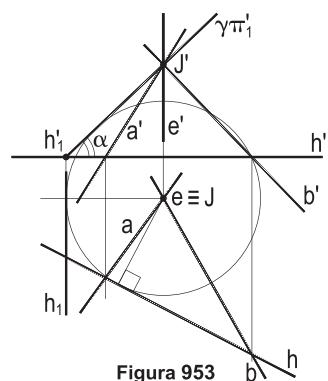
783



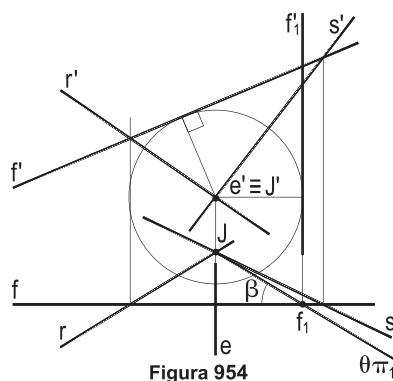
784



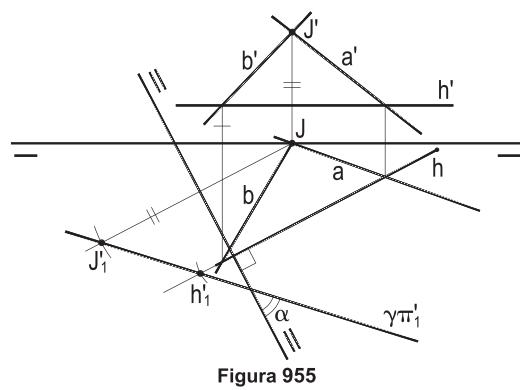
785



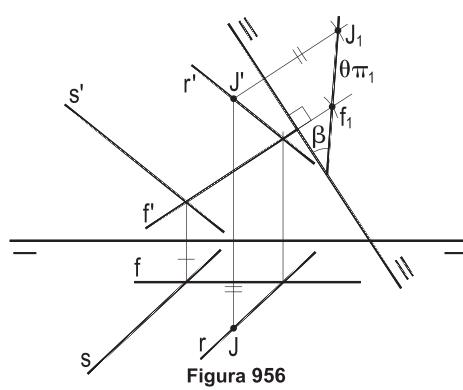
786



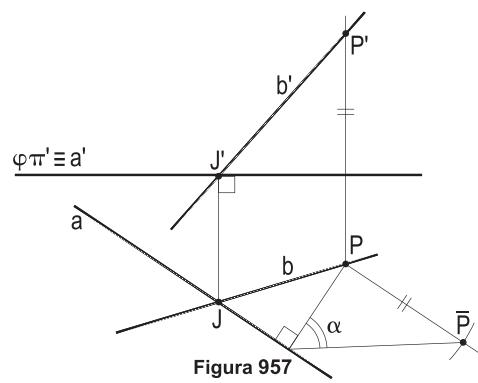
787



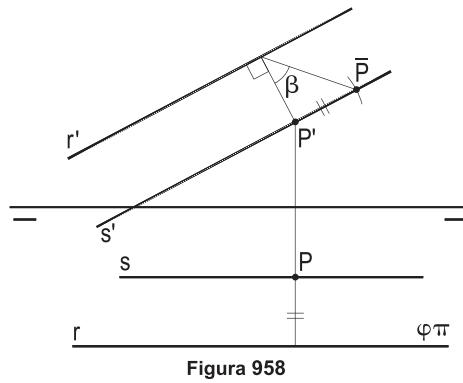
788



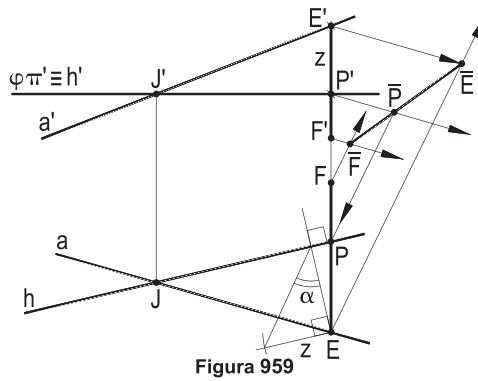
789



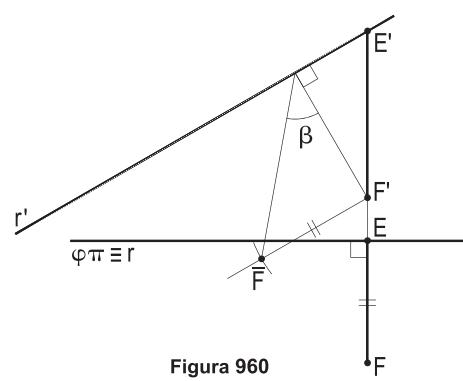
790



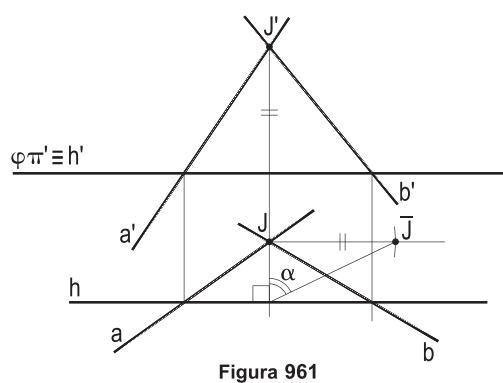
791 - (b)  $\equiv$  (E)(F)



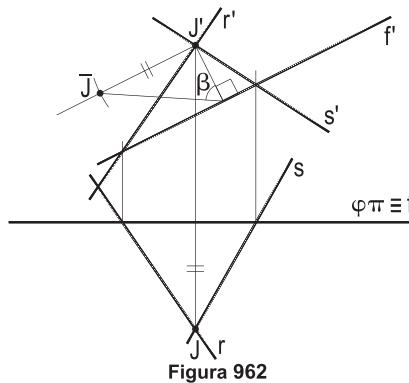
792 - (s)  $\equiv$  (E)(F)



793



794

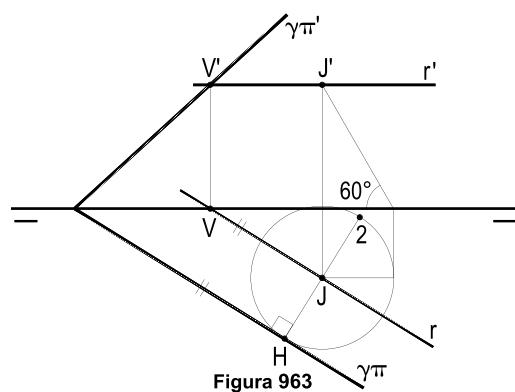


Nas épuras seguintes, pede-se completar, para cada caso, os traços do plano ( $\gamma$ ), que pertence à reta ( $r$ ), ou ao ponto (A), dados por suas projeções, sabendo que ( $\gamma$ ) forma  $60^\circ$  com ( $\pi$ ), atendendo a eventuais condições impostas.

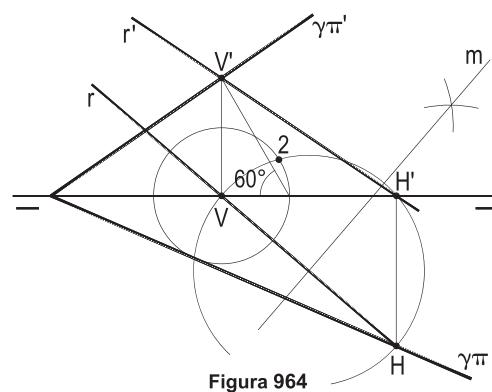
Resoluções: É sempre com a utilização do cone de revolução com base em ( $\pi$ ), vértice num ponto adequadamente escolhido de ( $r$ ) e geratriz es inclinadas a  $60^\circ$  com ( $\pi$ ) que se obtém um ponto H de  $\alpha\pi$ , proporcionando este traço e, a seguir,  $\alpha\pi'$ .

Para as posições, sempre duas soluções, a segunda indicada pelo número 2.

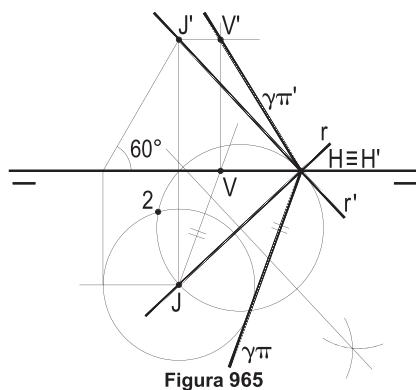
795



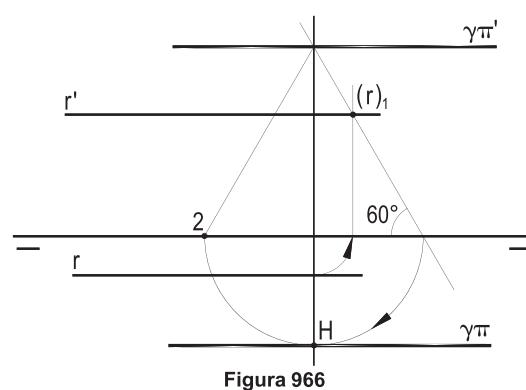
796



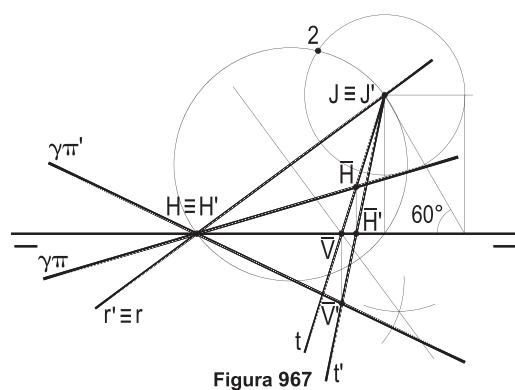
797



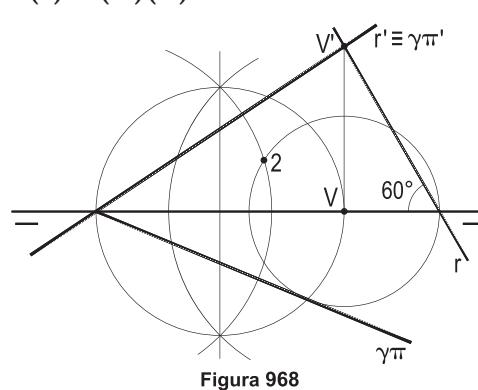
798



799



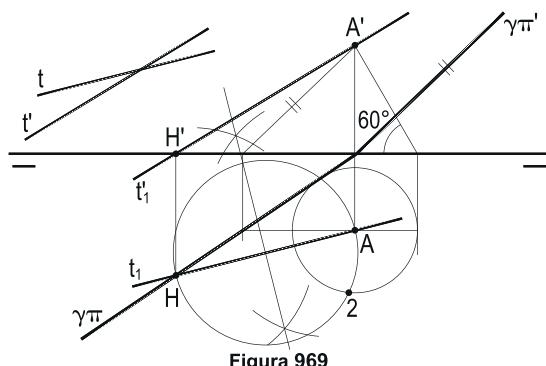
800 - (r)  $\equiv$  (A)(B)



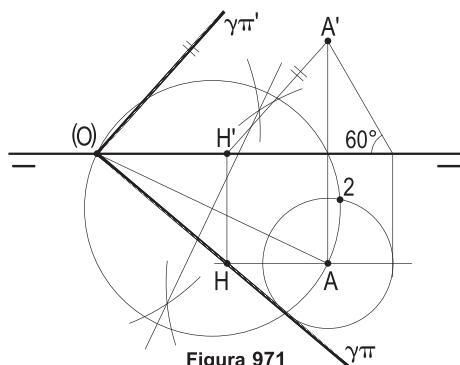
Também quando é dado um ponto (A), a condição adicional traz uma reta, por (A), recaindo-se nas situações anteriores.

Uma paralela ( $t_1$ ) a ( $t$ ) (Figura 969), a perpendicular ( $p$ ) a ( $\theta$ ) (Figura 970), a perpendicular ( $A(H)$ ) ao bissetor (Figuras 972 e 973) e a reta ( $A(M)$ , onde ( $M$ ) é o ponto médio do segmento ( $P(Q)$ ), (Figura 974), conduzem ao ponto chave ( $H$ ) que leva os problemas às situações anteriores.

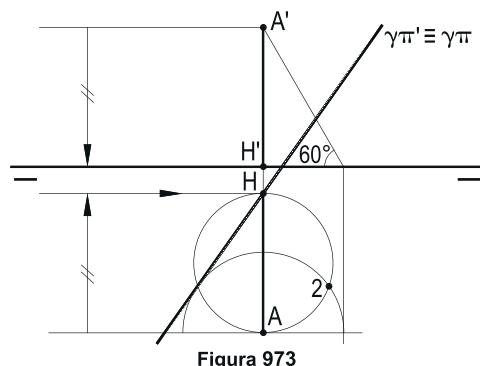
**801 – ( $\gamma$ ) é paralelo a ( $t$ ), dada**



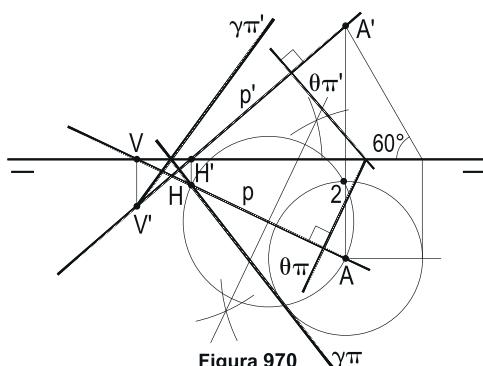
**803 – ( $\gamma$ )  $\in$  ( $O$ ), origem das abscissas**



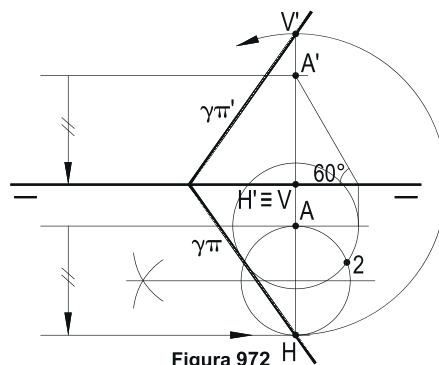
**805 – ( $\gamma$ ) é perpendicular a ( $\beta_{24}$ )**



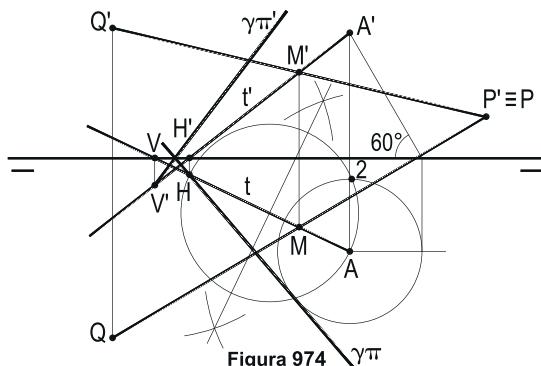
**802 – ( $\gamma$ ) é perpendicular a ( $\theta$ ), dado**



**804 – ( $\gamma$ ) é perpendicular a ( $\beta_{13}$ )**



**806 – ( $\gamma$ ) equidista de ( $P$ ) e ( $Q$ ), dados**

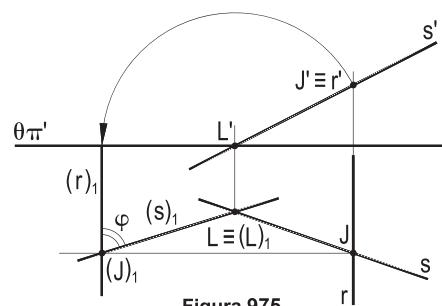


Nos casos abaixo, são dadas, por suas projeções, as retas concorrentes ( $r$ ) e ( $s$ ).

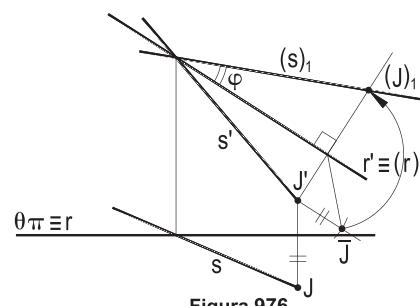
Pede-se determinar a V.G. do ângulo  $\phi$  entre elas formado.

Resoluções: O rebatimento do plano das retas sobre um dos planos de projeção, ou sobre um plano auxiliar, traz a V.G. procurada.

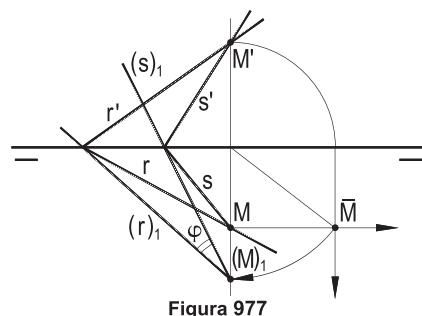
807



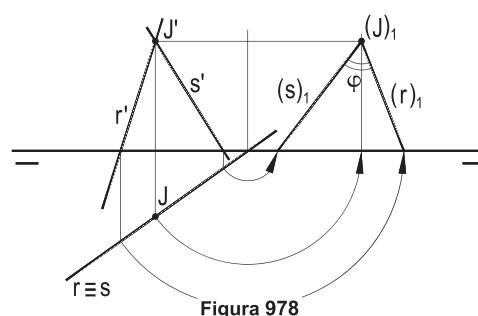
808



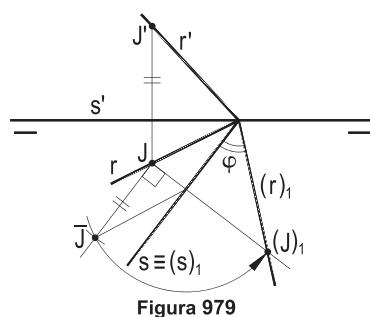
809



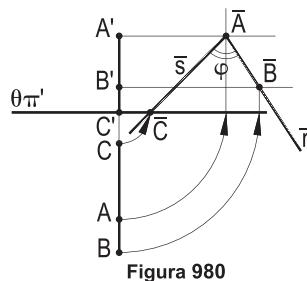
810



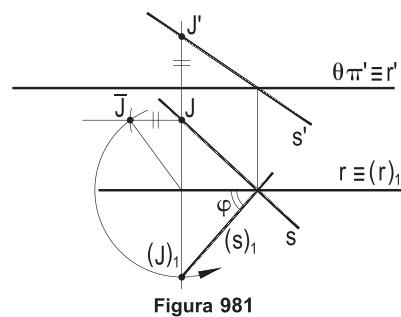
811



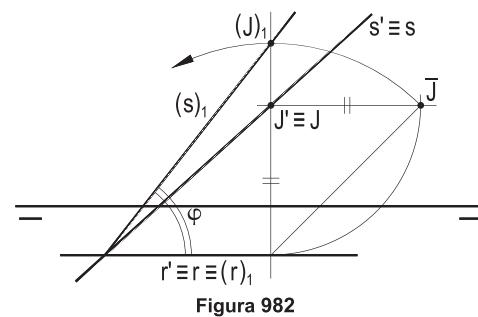
812 - ( $r$ )  $\equiv$  (A)(B); ( $s$ )  $\equiv$  (A)(C)



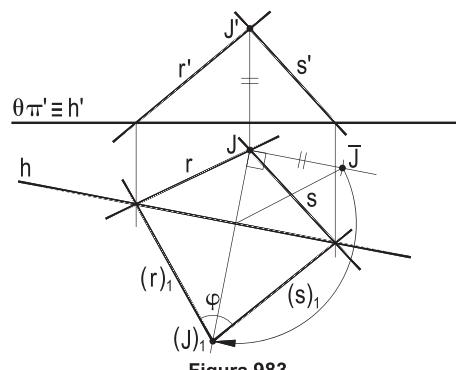
813



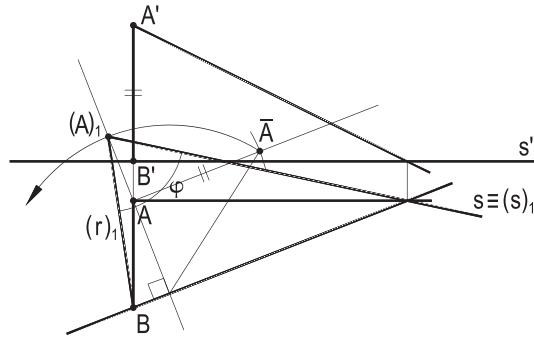
814



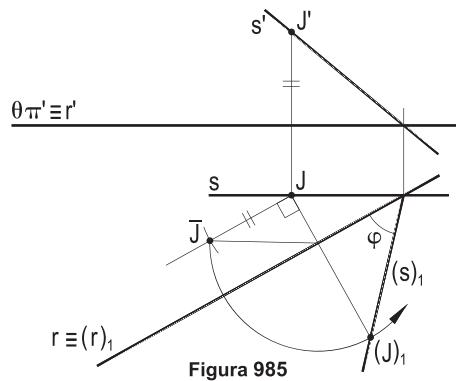
815



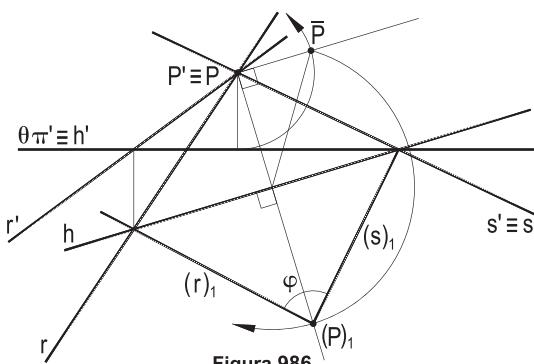
816 -  $(r) \equiv (A)(B)$



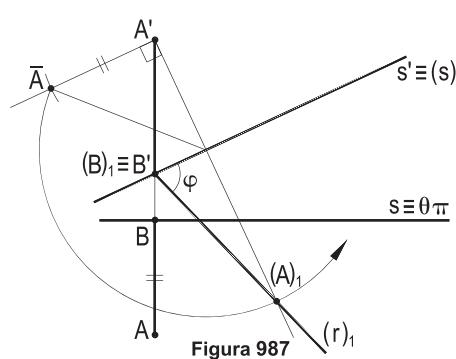
817



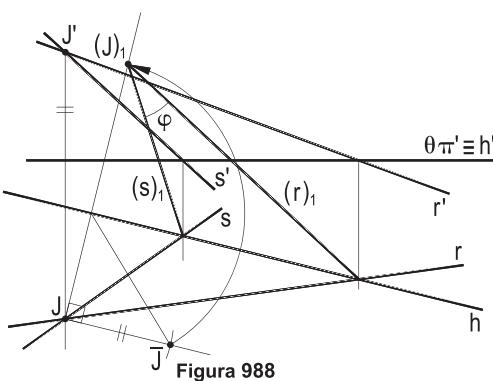
818



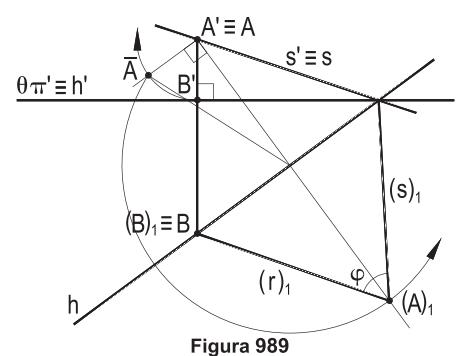
819 -  $(r) \equiv (A)(B)$



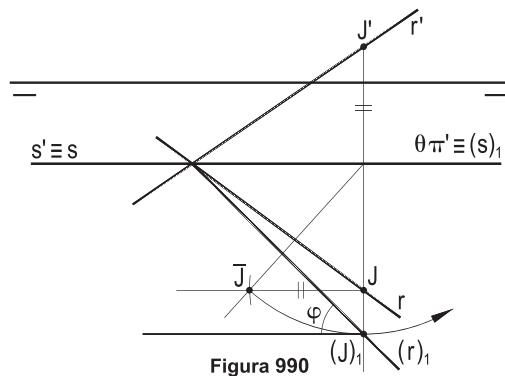
820



821 -  $(r) \equiv (A)(B)$



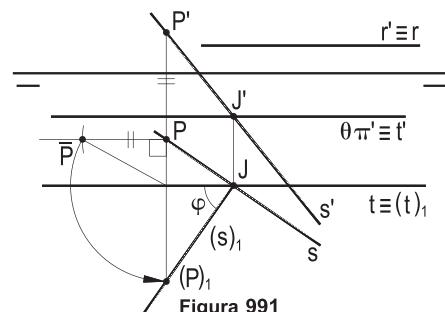
822



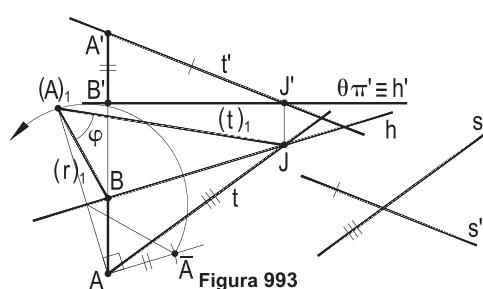
**Para os diversos casos abaixo, pede-se determinar a verdadeira grandeza do ângulo  $\phi$  formado pelas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas por suas projeções.**

**Resoluções:** Basta traçar por um ponto ( $J$ ) de uma das retas dadas a paralela ( $t$ ) à outra, para recairmos nos casos anteriores, de duas retas concorrentes.

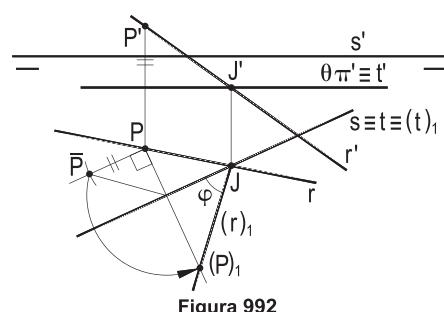
**823**



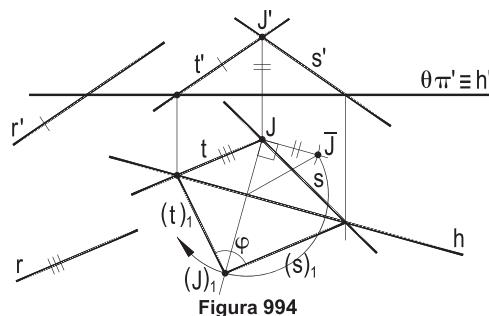
**825 – ( $r$ )  $\equiv$  (A)(B)**



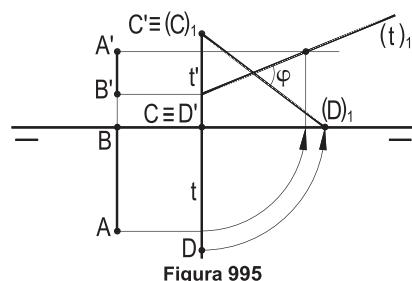
**824**



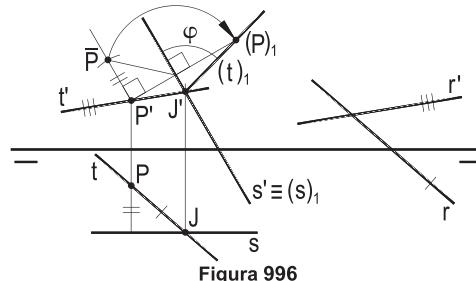
**826**



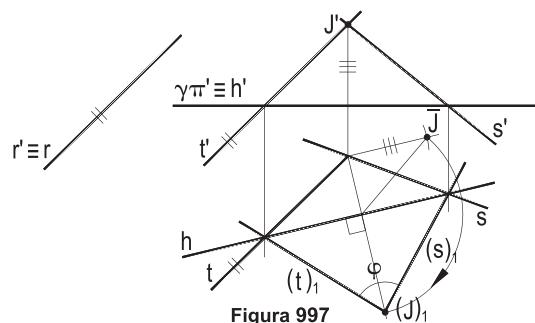
**827 – ( $r$ )  $\equiv$  (A)(B); ( $s$ )  $\equiv$  (C)(D)**



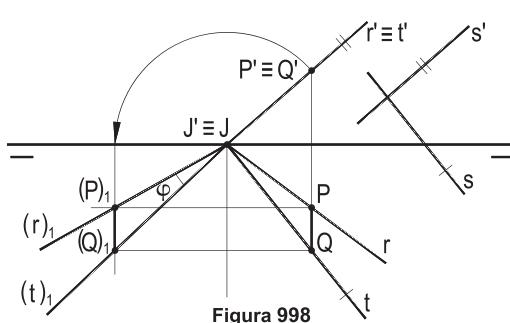
**828**



**829**



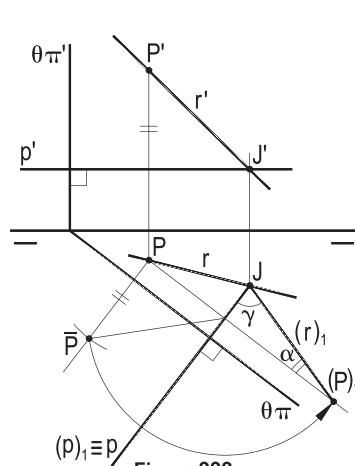
**830**



Para cada uma das épuras abaixo, pede-se determinar a verdadeira grandeza do ângulo  $\alpha$  que a reta (r), dada por suas projeções, forma com o plano ( $\theta$ ), dado por seus traços ou pelas projeções de duas retas suas (a) e (b).

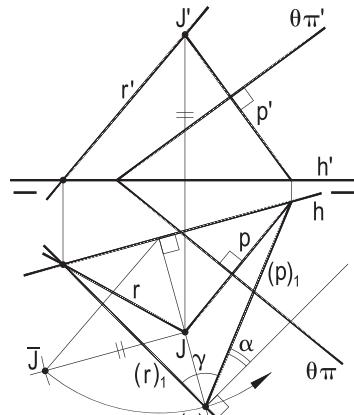
Resoluções: Por um ponto ( $J$ ), qualquer de ( $r$ ), baixa-se a perpendicular ( $p$ ) a ( $\theta$ ) e, rebatido o plano formado por ( $r$ ) e por ( $p$ ), obtém-se a V.G. do ângulo agudo  $\gamma$  dessas duas retas, para, construindo seu complemento (*Geometria Descritiva*, número 138), chegar ao valor  $\alpha$  do ângulo pedido.

831



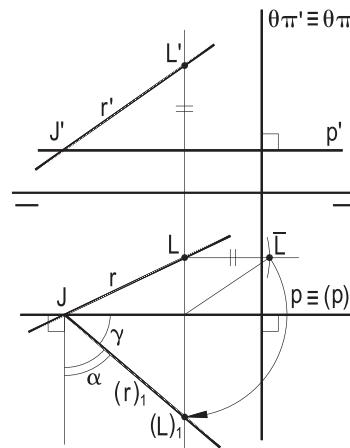
**Figura 999**

832



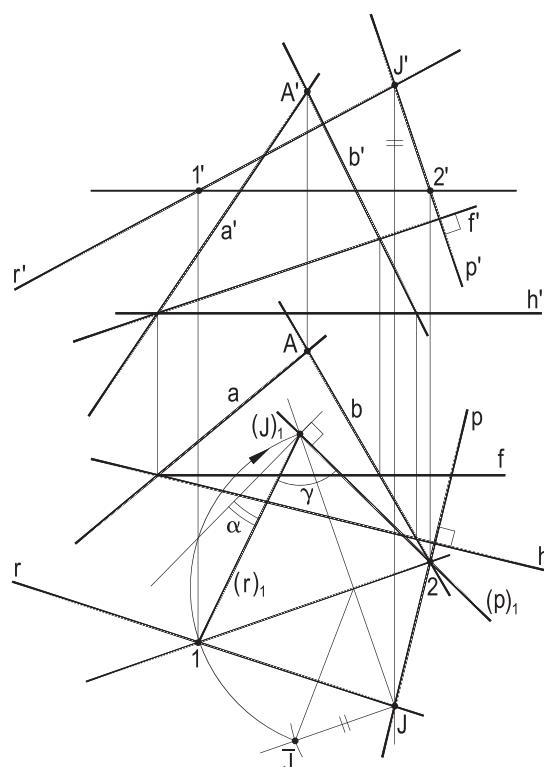
**Figura 1000**

833



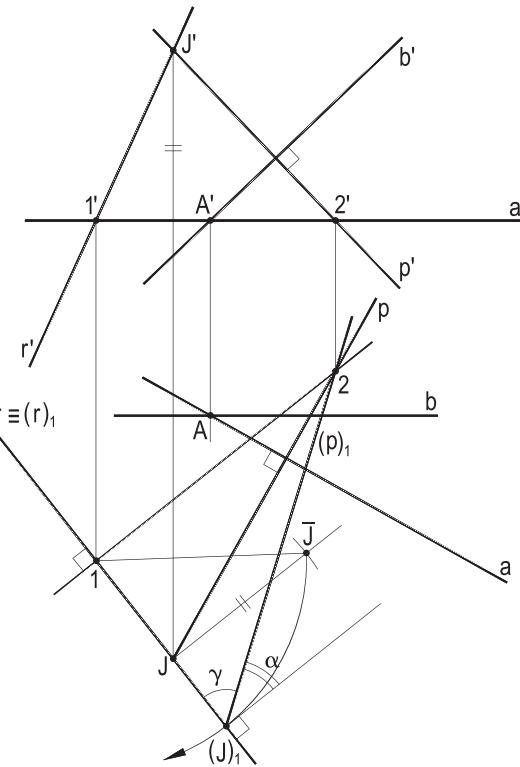
**Figura 1001**

834



**Figura 1002**

835



**Figura 1003**

**Em cada uma das épuras seguintes, pede-se determinar a verdadeira grandeza do menor ângulo  $\alpha$  formado entre os planos  $(\theta)$  e  $(\gamma)$ , dados por seus traços ou por duas de suas retas.**

**Resoluções:** As Figuras 1004, 1005, 1006 e 1012 trazem a V.G. de ângulo pedido  $\alpha$  diretamente por serem ambos os planos projetantes, ou em relação a  $(\pi')$ , ou a  $(\pi)$ , o que também acontece com as Figuras 1007, 1009, 1010 e 1011 com planos perpendiculares aos de perfil.

No exemplo da Figura 1008, o triângulo de rebatimento resolve, já que o plano  $(\theta)$ , frontal, é paralelo a  $(\pi')$ .

**836**

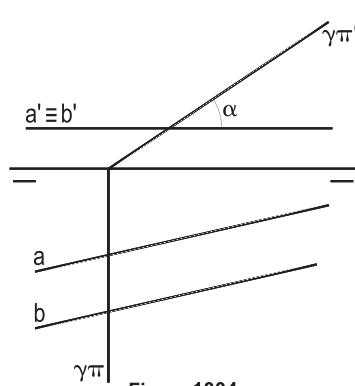


Figura 1004

**837**

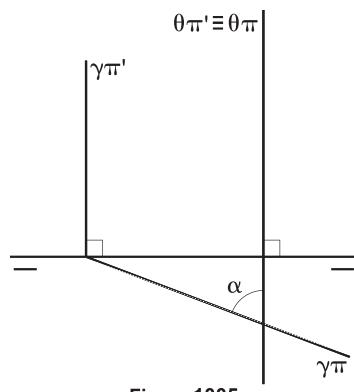


Figura 1005

**838**

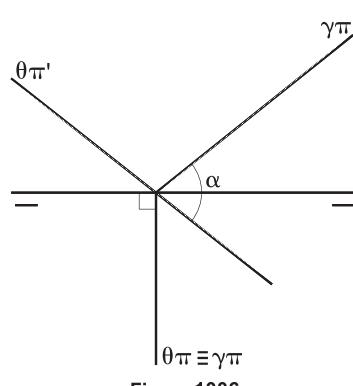


Figura 1006

**839**

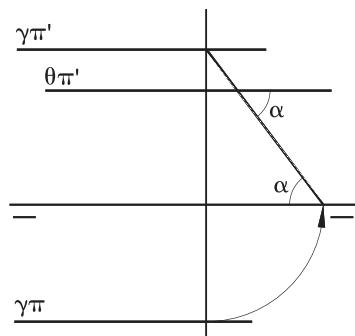


Figura 1007

**840**

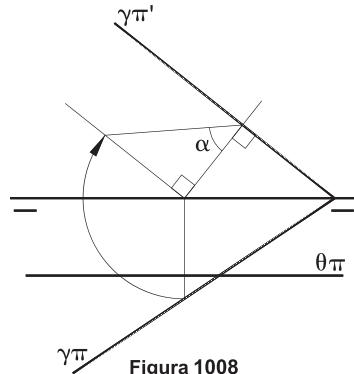


Figura 1008

**841**

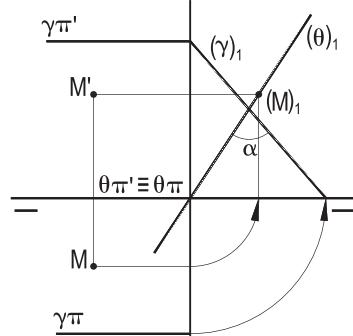


Figura 1009

**842**

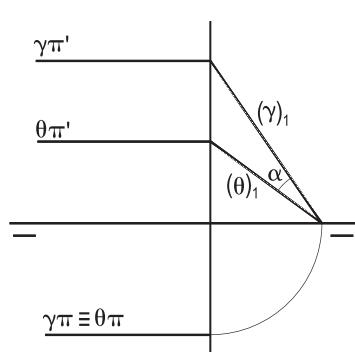


Figura 1010

**843**

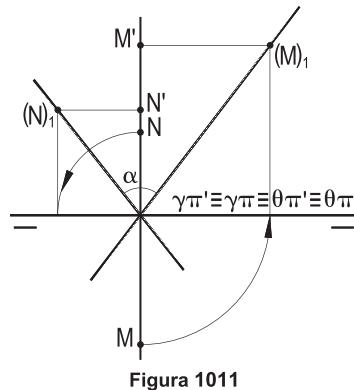


Figura 1011

**844**

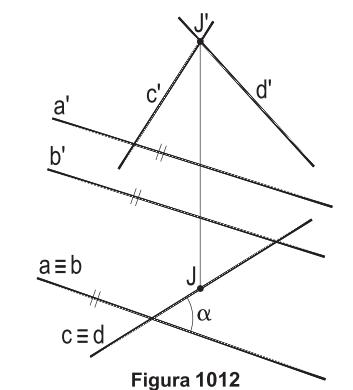


Figura 1012

Nos exemplos seguintes, aproveitando a particularidade de um par de traços de mesmo nome ter a mesma direção, uma única mudança pode torná-los de topo, ou verticais, trazendo, então, em V.G., o ângulo  $\alpha$ , procurado.

**845**

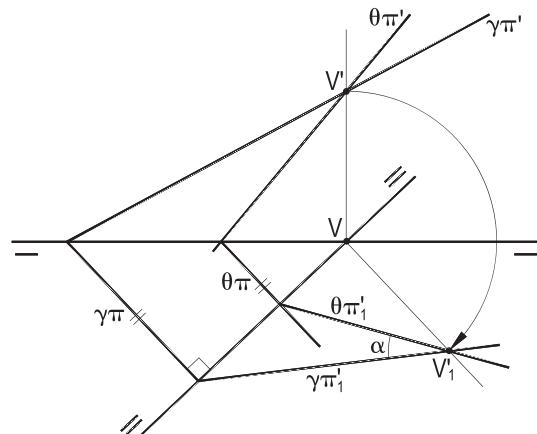


Figura 1013

**846**

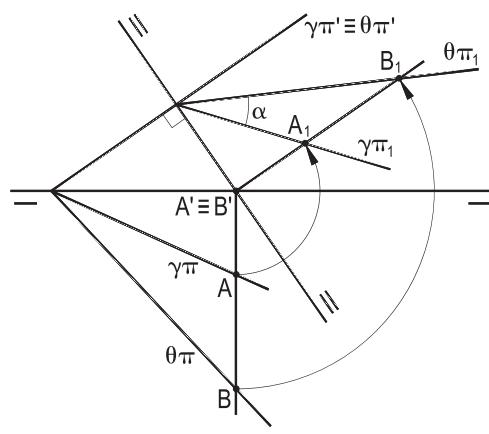


Figura 1014

**847**

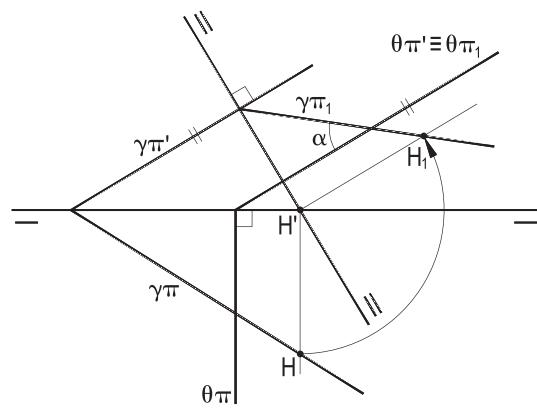


Figura 1015

**848 – (θ) ≡ (a); (b)**

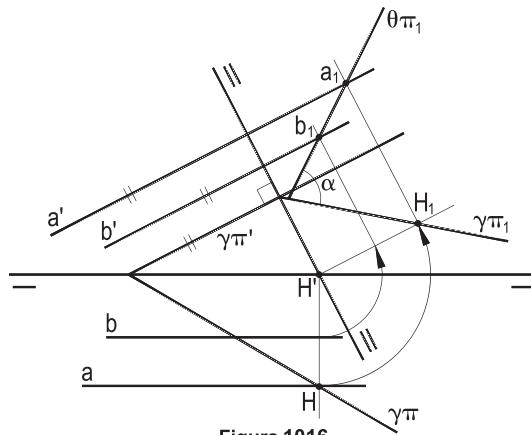


Figura 1016

**849 – (θ) ≡ (a); (b)**

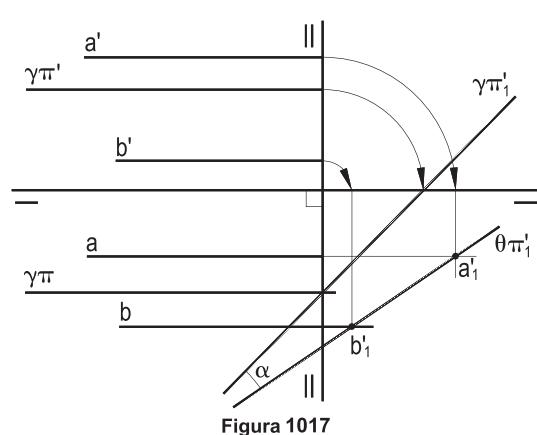


Figura 1017

**850**

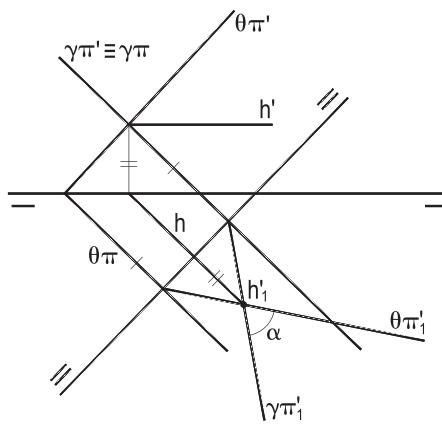
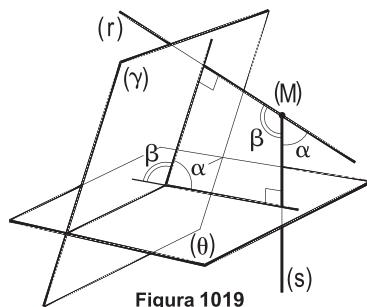


Figura 1018

Em situações menos particulares, para evitar a necessidade de duas mudanças sucessivas, deve-se, por um ponto ( $M$ ), arbitrado, baixar as perpendiculares ( $r$ ) e ( $s$ ) aos planos ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ), dados, e determinar a V.G. do ângulo  $\alpha$ , por elas formado, igual, como se sabe (*Geometria Descritiva*, número 140) ao ângulo dos dois planos (Figura 1019). Exemplos:



851

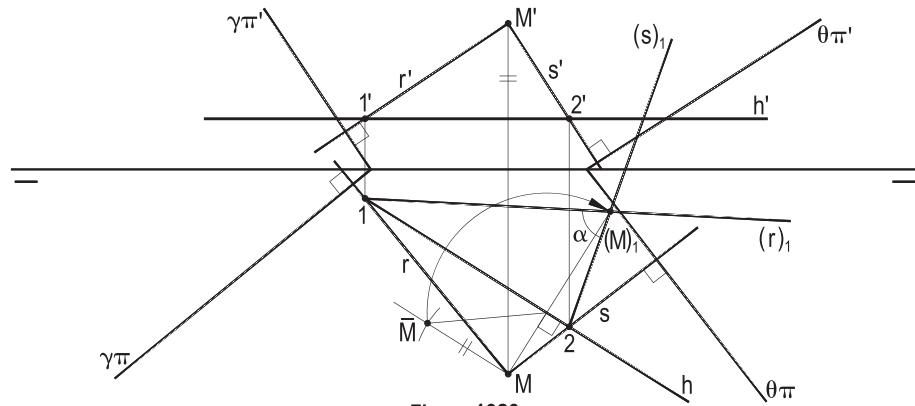


Figura 1020

852

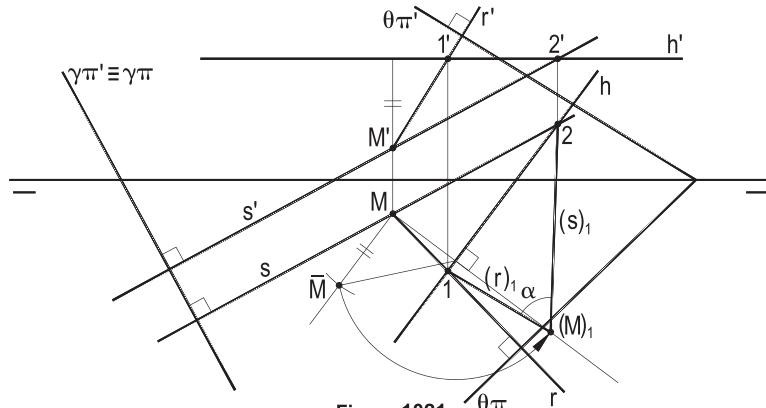


Figura 1021

853

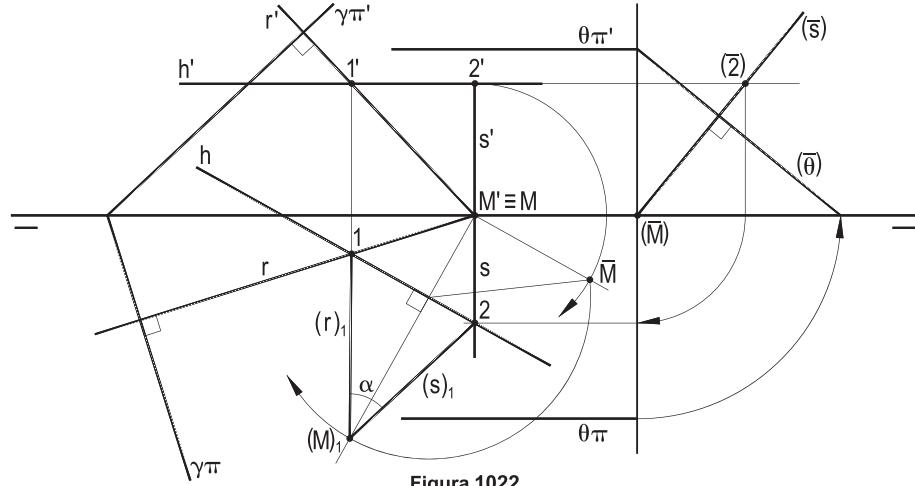


Figura 1022

Os exemplos seguintes utilizam o mesmo procedimento anterior, da medição do ângulo  $\alpha$  formado entre as perpendiculares (r) e (s), baixadas de um ponto qualquer (M), aos dois planos, ambos dados por duas retas suas, (a) e (b), para ( $\gamma$ ), e (c) e (d), para ( $\theta$ ).

No primeiro exemplo, o plano ( $\gamma$ ) é vertical e, por isso, a perpendicular (s) a ele é horizontal, funcionando, então, como charneira para o rebatimento que proporciona  $\alpha$  (Figura 1023); no segundo, aproveita-se que (c) e (d) são horizontais de ( $\theta$ ) (Figura 1024).

**854**

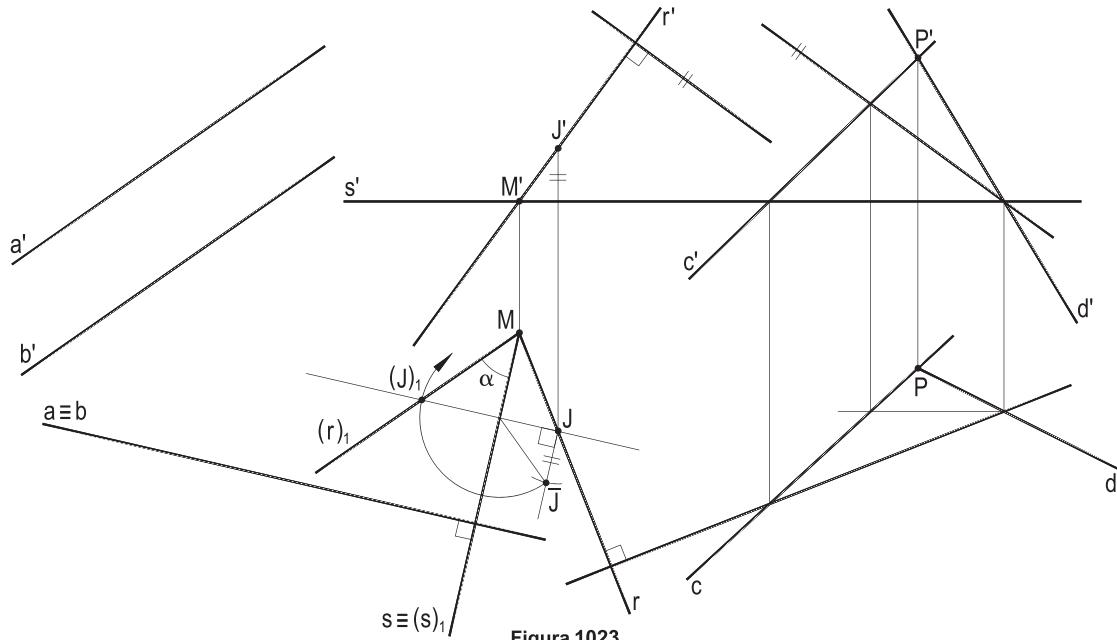


Figura 1023

**855**

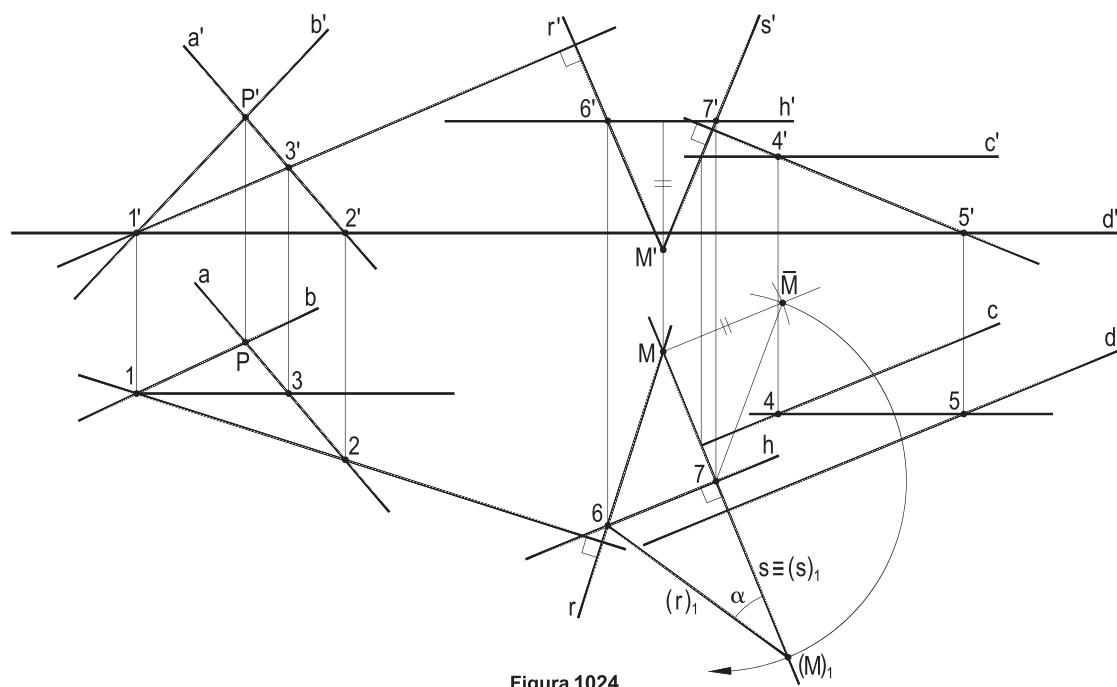


Figura 1024

**856 – Dados um plano ( $\alpha$ ), por seus traços, um ponto (A), por suas projeções, uma reta (r), apenas por sua projeção horizontal, e um ponto (J), apenas por sua projeção vertical, pede-se determinar o plano ( $\gamma$ ), pertencente a (r) e paralelo à reta (t), que, contendo (A), é paralela a ( $\alpha$ ), formando  $45^\circ$  com ( $\pi'$ ), tendo traço horizontal com abscissa positiva.**

**Sabe-se que a reta (r) pertence ao ponto (J), forma  $30^\circ$  com ( $\pi'$ ) e que seu traço vertical tem cota positiva.**

Resolução: A reta (t) há de ser uma geratriz do cone de revolução de vértice (A), base em ( $\pi'$ ), com geratrizes inclinadas de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi'$ ), além de pertencer ao plano ( $\alpha_1$ ), conduzido por (A) e paralelo a ( $\alpha$ ). Assim, construído tal cone, a interseção de sua base com o traço horizontal  $\alpha_1\pi$  desse plano é o ponto (H) que, com (A), define a reta (t), com apenas uma solução, por ter (H) abscissa positiva (Figura 1025).

Da mesma forma, (r) é uma geratriz do cone de revolução de vértice (J), base em ( $\pi'$ ), com geratrizes inclinadas de  $30^\circ$  em relação a ( $\pi'$ ), ficando definida a partir de seu traço vertical (V), com uma só solução, visto que a segunda posição, indicada pelo número 2, tem cota negativa.

Afinal, o plano ( $\gamma$ ) pedido fica definido por essa reta (r) e por uma reta ( $t_1$ ), paralela a (t) e traçada por (J).

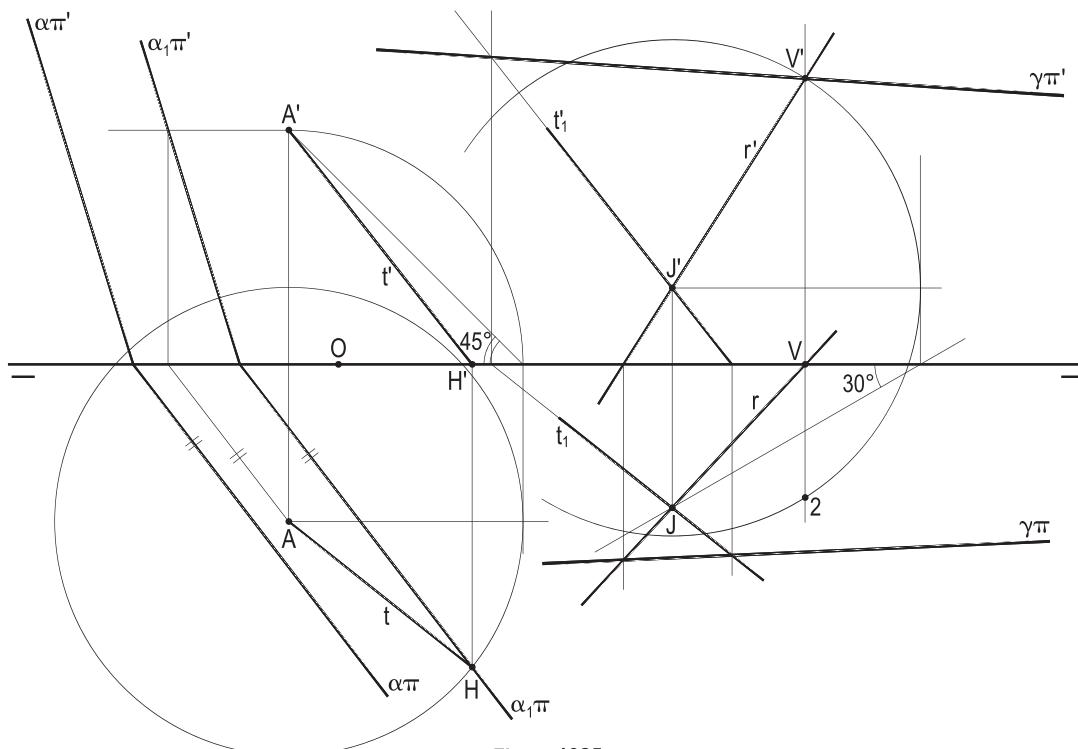


Figura 1025

**857 – As retas (r) e (s) pertencem ao ponto (A), dado por suas projeções, e formam  $50^\circ$  com a reta vertical (v), dada por sua projeção horizontal v. Essas duas retas concorrem com a fronto-horizontal (f), dada por suas projeções.**

Pede-se construir as retas (r) e (s), bem como a interseção (p) do bissetor par com o plano ( $\gamma$ ) pertencente ao ponto (J), dado por suas projeções e paralelo às retas (r) e (s).

Resolução: Formando  $50^\circ$  com qualquer vertical, as retas (r) e (s) devem ser geratrizes do cone de revolução de vértice (A) base no plano horizontal de (f), inclinadas de  $40^\circ$  com ( $\pi$ ), ficando, então, definidas pelos pontos (K) e (L).

Como (r) e (s), concorrendo com a fronto-horizontal (f), têm que formar um plano paralelo a ( $\pi'\pi$ ), a reta (p), pedida, tem que ser também fronto-horizontal (Figura 1026), conduzida pelo traço (P) de ( $s_1$ ), paralela a (s), com ( $\beta_{24}$ ).

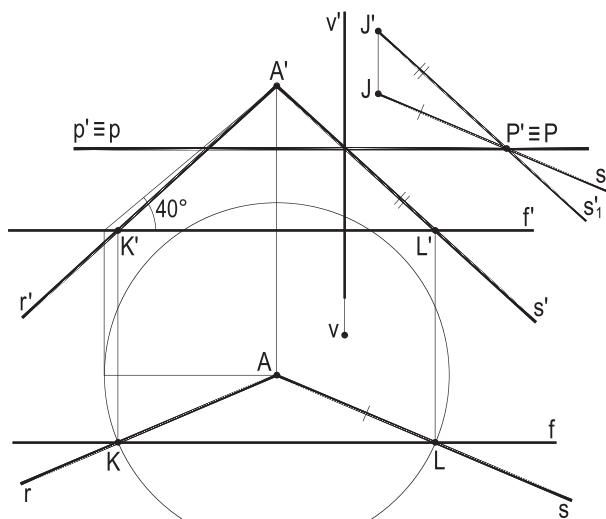


Figura 1026

**858 – Dados o ponto (A), por suas projeções, e o plano ( $\alpha$ ), de topo, por seu traço vertical  $\alpha\pi'$ , sabe-se que a reta (A)(B) faz  $30^\circ$  com ( $\pi'$ ), que (B) pertence a ( $\pi'\pi$ ), que a reta (A)(C), horizontal, forma  $45^\circ$  com ( $\alpha$ ) e que (C) pertence a ( $\alpha$ ).**

Pede-se completar as projeções do triângulo (A)(B)(C), escolhendo a solução que corresponda ao maior perímetro.

Resolução: Dois cones de revolução de vértice (A), um com base em ( $\alpha$ ), de centro (O), pé da perpendicular de (A), e outro com base em ( $\pi'$ ), obedecendo aos ângulos dados, trazem duas soluções para (B) e duas para (C), tendo sido abandonadas ( $\bar{B}$ ) e ( $\bar{C}$ ), para dar ao triângulo (A)(B)(C) o maior perímetro (Figura 1027), conforme imposto pelo enunciado.

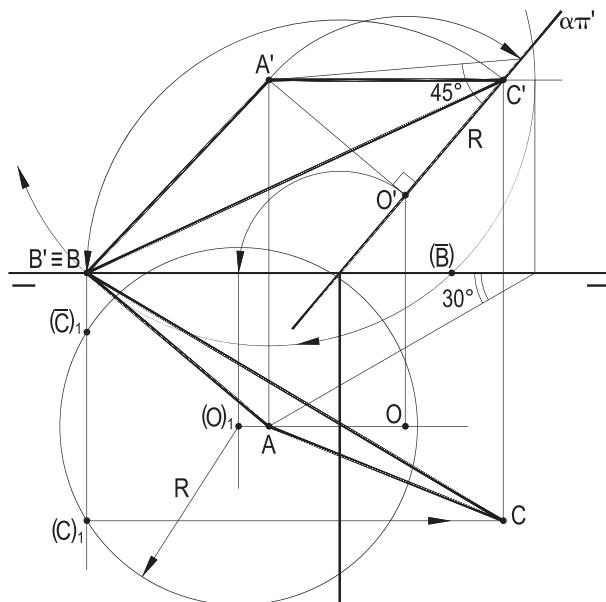


Figura 1027

**859 – Construir as projeções e a V.G. do triângulo (A)(B)(C), sabendo que (A)(B) e (A)(C) concorrem com a reta ( $r$ ) e se inclinam de  $60^\circ$  com ( $\pi$ ) e que o lado (B)(C) pertence a ( $\pi$ ), (B) com abscissa menor que (C).**

São dadas as projeções  $A'$ ,  $A$ ,  $r'$  e  $r$ .

Resolução: O cone de revolução de vértice ( $A$ ), base em ( $\pi$ ), geratrizes a  $60^\circ$  com ( $\pi$ ), e o plano ( $\alpha$ ), formado com ( $A$ ) e ( $r$ ), interceptam-se produzindo os lados ( $A$ ( $B$ ) e ( $A$ ( $C$ ) do triângulo procurado (Figura 1028), ( $B$ ) com abscissa menor que a de ( $C$ ).

Em seguida, a verdadeira grandeza  $(A)_1(B)_1(C)_1$  foi obtida com o auxílio do triângulo de rebatimento  $AAJ$  (Figura 1028) e com o rebatimento do plano do triângulo sobre ( $\pi$ ).

**860 – Desenhar as projeções do triângulo (A)(B)(C), de perfil, sabendo que (B)(C) pertence a ( $\alpha$ ) e que ( $A$ ( $B$ ) e ( $A$ ( $C$ ) formam  $50^\circ$  com ( $\alpha$ ). São dados as projeções de ( $A$ ) e os traços de ( $\alpha$ ).**

Resolução: O cone de revolução de vértice ( $A$ ), base em ( $\alpha$ ), com geratrizes inclinadas de  $50^\circ$  em relação a ( $\alpha$ ), define o círculo de centro ( $O$ ), pé da perpendicular de ( $A$ ) a ( $\alpha$ ) e com raio  $R$ , extraído do triângulo  $OA_1\bar{A}$ .

Para ser de perfil, o triângulo pedido tem que ter a abscissa do vértice dado ( $A$ ). Assim, o círculo base do cone corta a reta de perfil de ( $\alpha$ ), com a abscissa de ( $A$ ), proporcionando os vértices ( $B$ ) e ( $C$ ) (Figura 1029). A ordem desses dois vértices poderia ter sido invertida.

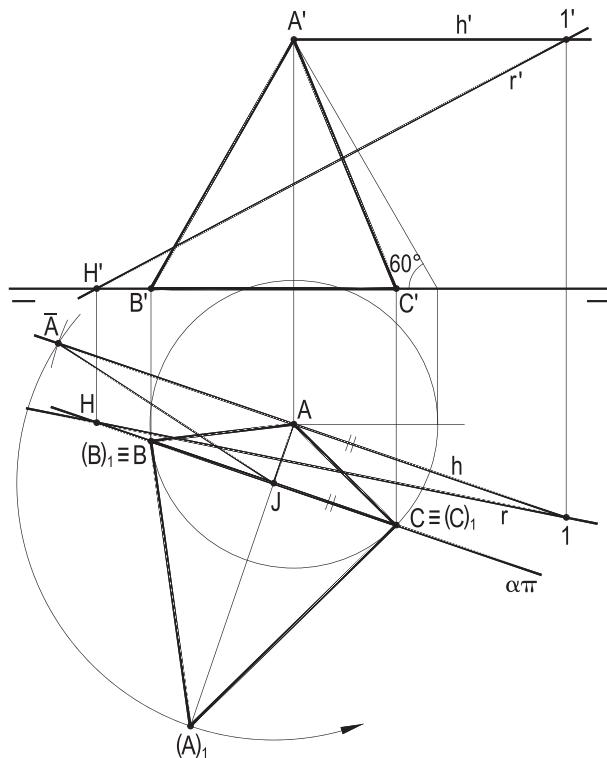


Figura 1028

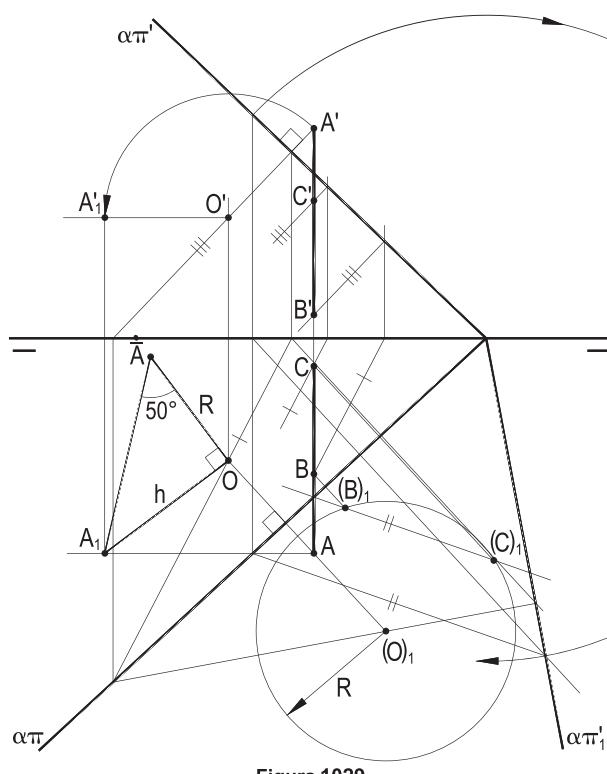


Figura 1029

**861 – O hexágono regular (A)(B)(C)(D)(E)(F), do primeiro diedro, apoia-se em ( $\pi$ ) pelo lado (A)(B).**

Sabendo que os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), que se cortam segundo a reta (J)(K), formam, com a linha de terra, ângulos iguais ao que o plano do hexágono forma com ( $\pi'\pi$ ), pede-se completar as projeções do hexágono e construir os traços dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), dando a ( $\alpha$ ) sentido direto.

**São dadas as projeções A, B, C, J, J' e K.**

Resolução: Para a construção do hexágono foi utilizado o triângulo retângulo  $CBC'$ , aproveitando a V.G. do lado  $a = AB$  (Figura 1030), obtendo-se a cota  $z$  do vértice (C) e, a partir daí, com paralelas aos lados (A)(B) e (B)(C) e à diagonal (C)(F), completá-lo.

Como o traço vertical do plano do hexágono resta inacessível, com o auxílio da frontal ( $f$ ), de seu plano, pode-se obter os traços de um plano ( $\gamma$ ), paralelo ao do hexágono e, com um rebatimento lateral, determinar a V.G. do ângulo  $\varphi$  que esse plano forma com ( $\pi'\pi$ ) (Figura 1030).

Com novo rebatimento lateral, do plano de perfil que contém (K), e com o uso de novo cone de revolução de vértice (J), com eixo em ( $\pi'\pi$ ) e semiângulo no vértice igual a  $\varphi$ , as tangentes de ( $K_1$ ) à sua base proporcionam as vistas laterais ( $\bar{\alpha}_1$ ) e ( $\bar{\beta}_1$ ), que, alçadas, entregam os traços dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), procurados (Figura 1030).

Conforme imposto, ( $\alpha$ ) tem traços com sentido direto.

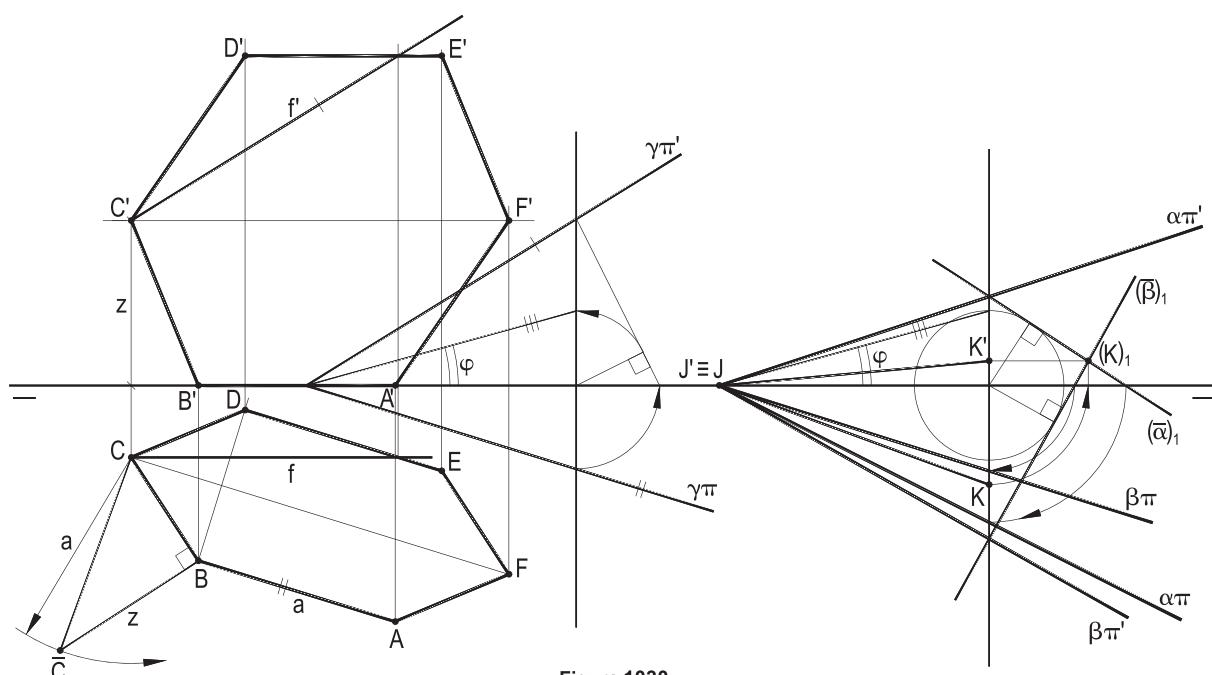


Figura 1030

Para cada uma das épuras abaixo, pede-se construir os traços dos planos bissetores dos diedros formados pelos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), dados por seus traços.

Resoluções: Os exemplos, reunindo planos projetantes em relação a ( $\pi$ ) ou a ( $\pi'$ ) (Figuras 1031, 1032 e 1035), são de pronta resolução, por trazerem em V.G., numa das projeções, os ângulos dos planos dados ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ); nos demais casos, os dois planos dados e, em consequência, também seus bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) são paralelos ou pertencentes a ( $\pi'\pi$ ), dando ensejo à resolução, com o auxílio de vistas laterais (Figuras 1033, 1034 e 1036).

No último, por serem pertencentes à linha de terra, os dois planos dados, também os são seus bissetores.

862

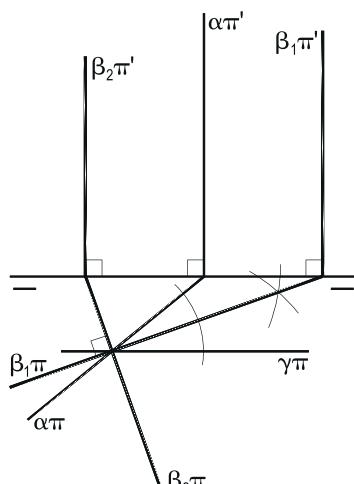


Figura 1031

863

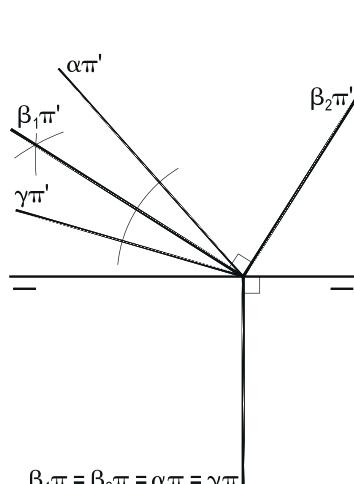


Figura 1032

864

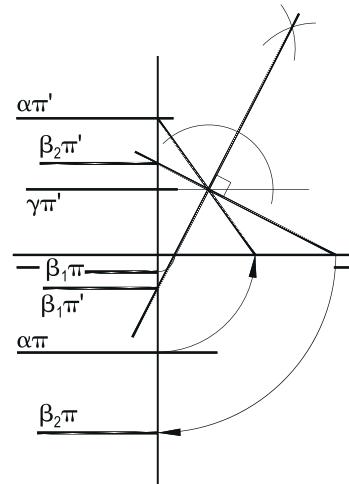


Figura 1033

865

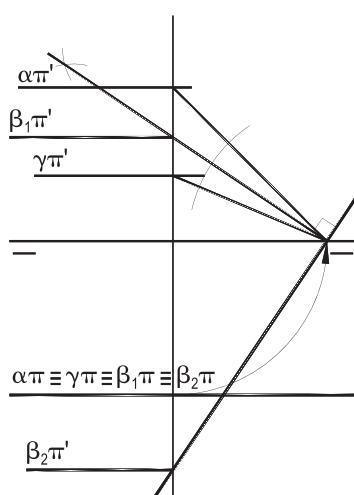


Figura 1034

866

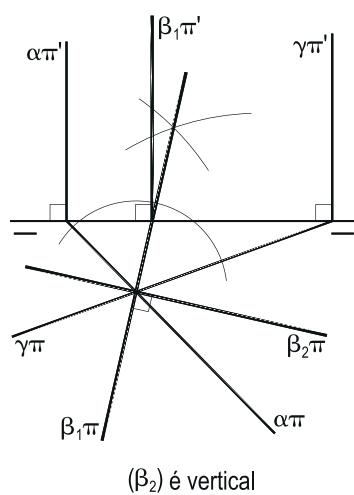


Figura 1035

867

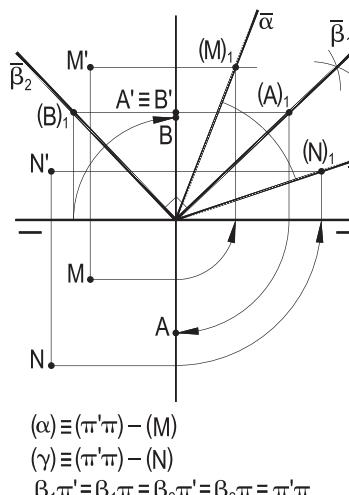


Figura 1036

**Nos exemplos seguintes, muito particulares, os dois planos dados ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) são, sempre, paralelos, cada um, a um dos três planos referenciais.**

**Mais uma vez pede-se construir os traços dos planos ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ), seus bissetores.**

Resoluções: Nos quatro primeiros exemplos, ( $\alpha$ ) é paralelo a ( $\pi$ ) e ( $\gamma$ ) a ( $\pi'$ ), o que leva ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) a serem paralelos (Figura 1037) a cada um dos bissetores ( $\beta_{13}$ ) e ( $\beta_{24}$ ), ou, em posições ainda mais particulares (Figuras 1038 e 1039), a com eles coincidirem, o que ocorre quando os planos dados ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) ficam a distâncias iguais de ( $\pi$ ) e de ( $\pi'$ ). Aliás, quando tal não acontece, como no exemplo da Figura 1040, vale observar que cota e afastamento dos traços de cada bissector correspondem à soma, ou à diferença, das cotas e afastamentos dos traços dos planos dados.

Para os casos dos dois planos dados serem respectivamente paralelos a ( $\pi$ ) e a ( $\pi''$ ) (Figura 1041) ou, respectivamente paralelos a ( $\pi'$ ) e ( $\pi''$ ) (Figura 1042), retorna-se aos casos estudados no grupo anterior, de planos projetantes a um dos dois planos de projeção.

**868**

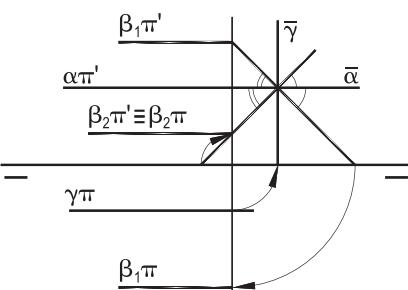


Figura 1037

**869**

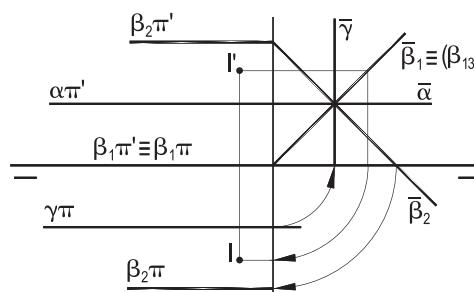


Figura 1038

**870**

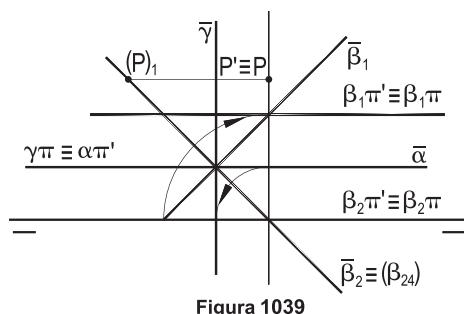


Figura 1039

**871**

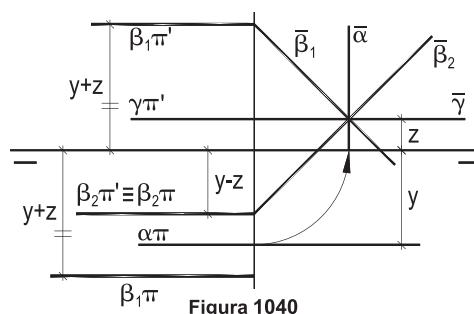


Figura 1040

**872**

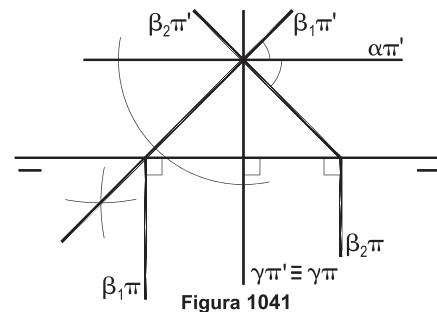


Figura 1041

**873**

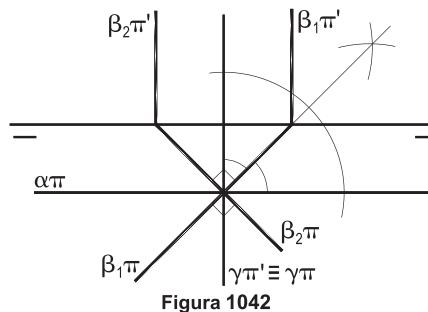


Figura 1042

Para os casos das épuras seguintes, pede-se determinar os traços de um dos planos bissectores dos ângulos formados pelos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), dados, ambos, por seus traços.

Resolução: Nos dois primeiros exemplos (Figuras 1043 e 1044), com uma só mudança, transforma-se os dois planos dados em projetantes, retornando a exemplos anteriores; nos demais, lançou-se mão da propriedade da equidistância dos pontos dos bissetores aos dois planos dados (*Geometria Descritiva*, número 154.1).

**874**

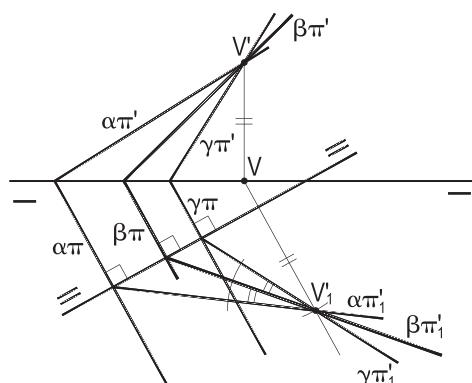


Figura 1043

**875**

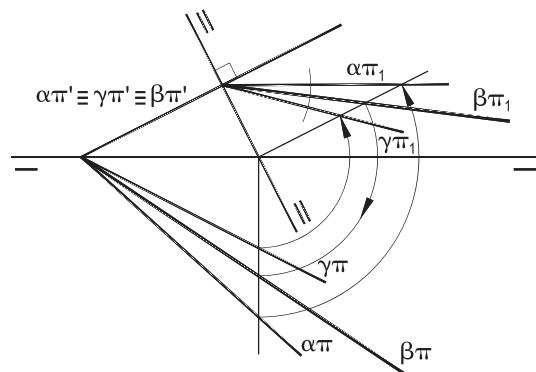


Figura 1044

**876**

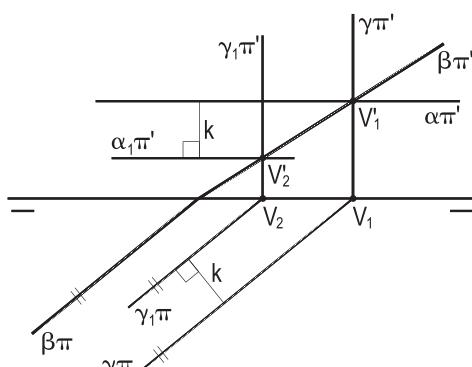


Figura 1045

**877**

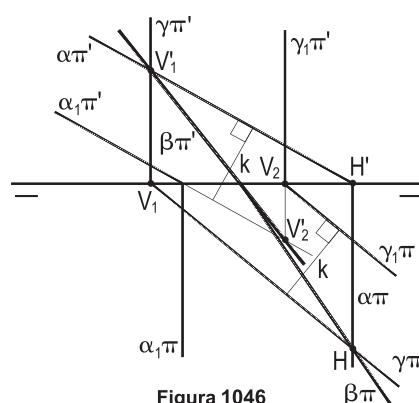


Figura 1046

**878**

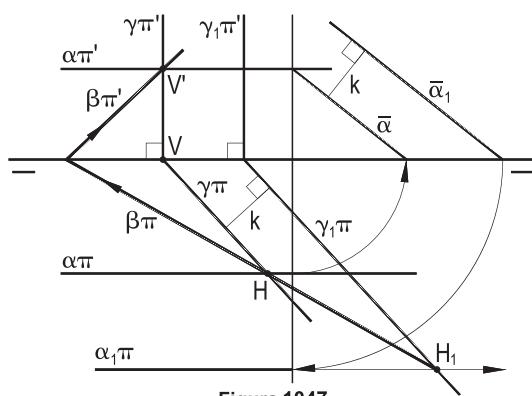


Figura 1047

**879**

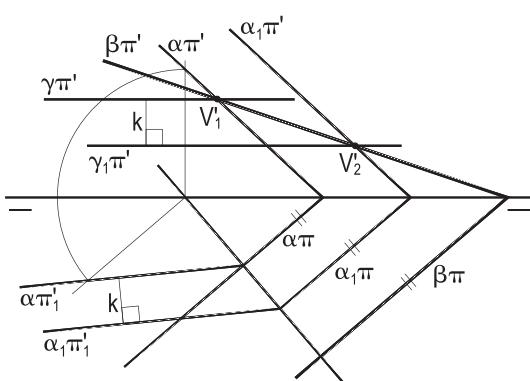


Figura 1048

Para os exemplos das épuras abaixo, em que são dados, por seus traços, os planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , pede-se determinar os traços dos planos bissoitores  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  dos ângulos por eles formados.

Resoluções: Em ambos os exemplos (Figuras 1049, 1050 e 1051), trabalhou-se com um plano  $(\varphi)$ , perpendicular à interseção dos dois planos dados, buscando-se obter as verdadeiras grandezas dos ângulos planos dos diedros formados pelos dois planos dados e a construção de seus bissoitores (*Geometria Descritiva*, número 152.3).

No primeiro exemplo (Figura 1050), aproveitou-se a paralela  $(i_1)$  a  $(i)$ ; no segundo (Figura 1051), foi preciso utilizar uma frontal  $(f)$  do segundo bissecor  $(\beta_2)$ , para obter a direção de seu traço  $\beta_2\pi'$ .

**880**

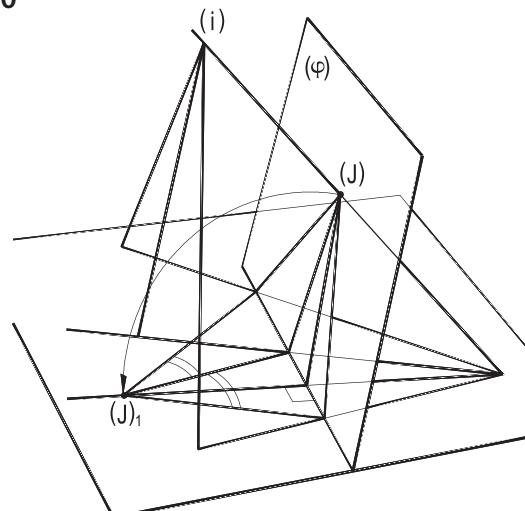


Figura 1049

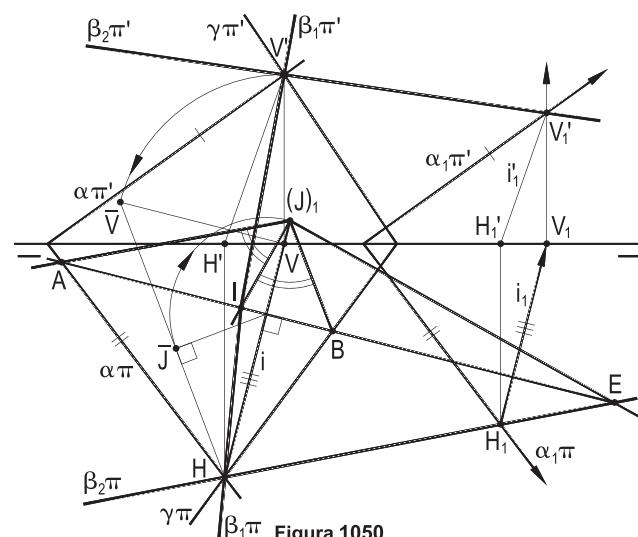


Figura 1050

**881**

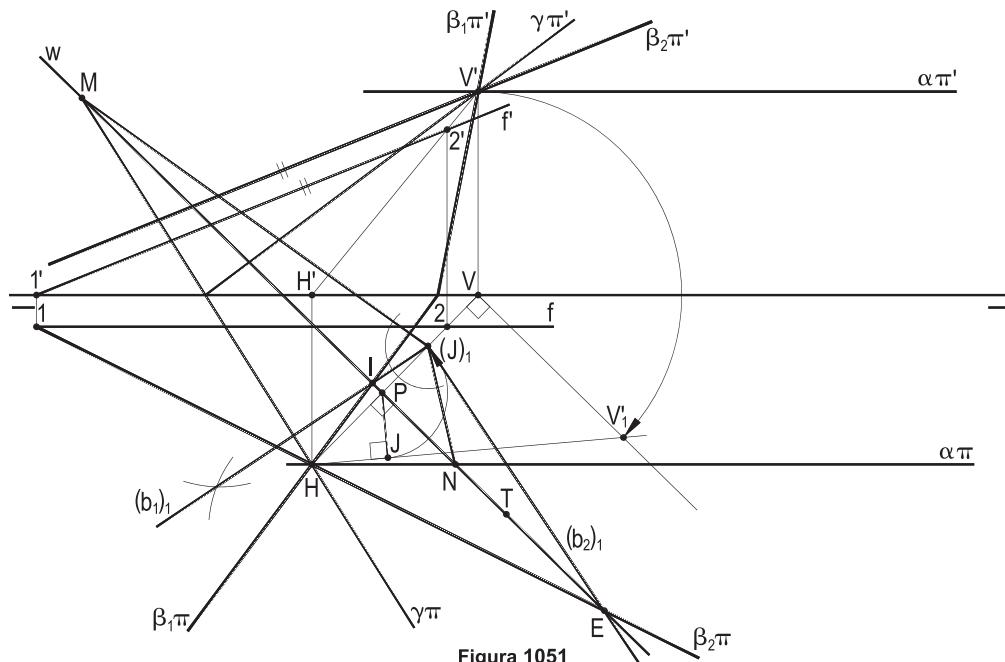


Figura 1051

Para cada um dos exemplos abaixo, pede-se construir os planos  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$ , bissectores dos ângulos formados pelas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  dadas por suas projeções.

Resoluções: Nos dois primeiros exemplos (Figuras 1052 e 1053), por pertencerem as duas retas dadas  $(r)$  e  $(s)$  a um plano horizontal, os bissectores procurados hão de ser planos verticais, como mostra a Figura 1054. Nos dois seguintes (Figuras 1055 e 1056), por pertencerem a um plano frontal as retas dadas, são de topo seus dois bissectores (Figura 1057). Nos dois últimos, em que uma das retas dadas  $(r)$  é vertical (Figura 1058), ou de topo (Figura 1059), utilizou-se o processo descrito no item 3.4, para construir as bissetrizess  $(b_1)$  e  $(b_2)$  dos ângulos dados, e os bissectores hão de ser planos quaisquer, definidos por cada uma dessas bissetrizess e pela perpendicular  $(p)$  ao plano de  $(r)$  e  $(s)$ , completado apenas um.

882

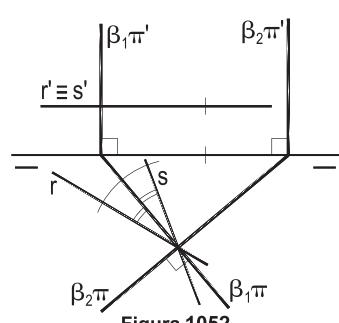


Figura 1052

883

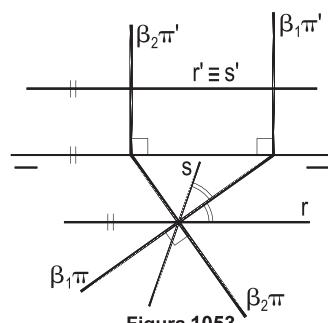


Figura 1053

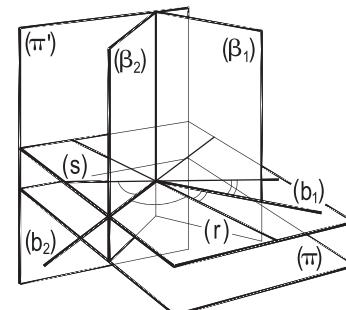


Figura 1054

884

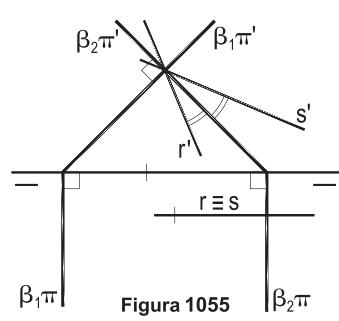


Figura 1055

885

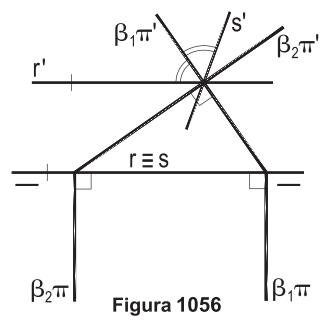


Figura 1056

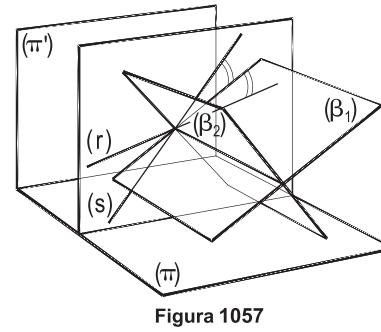


Figura 1057

886

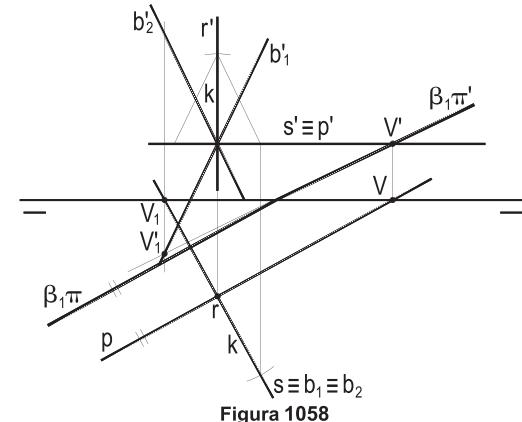


Figura 1058

887

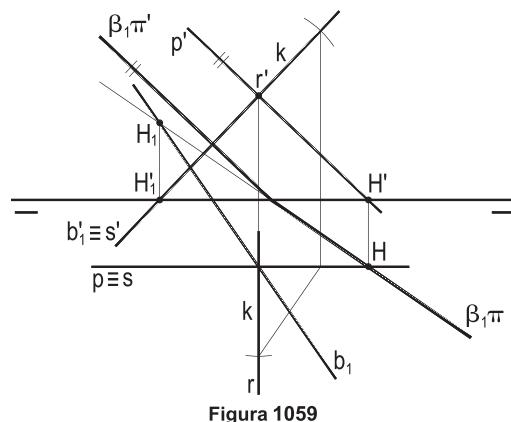


Figura 1059

Para os exemplos a seguir, pede-se construir um dos bissetores dos ângulos formados pelas retas concorrentes ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas por suas projeções.

Resoluções: Em todos os casos, efetuou-se o rebatimento do plano das retas, para obter a bissetriz ( $b$ ) de um dos ângulos por elas formados, sendo que no último (Figura 1063), tal rebatimento foi feito sobre um plano horizontal ( $\theta$ ), aproveitando que uma das retas dadas – ( $s$ ) – é horizontal.

Alçada a bissetriz ( $b$ ) e construída a perpendicular ( $p$ ) ao plano das retas dadas, ( $b$ ) e ( $p$ ) definem um dos bissetores.

888

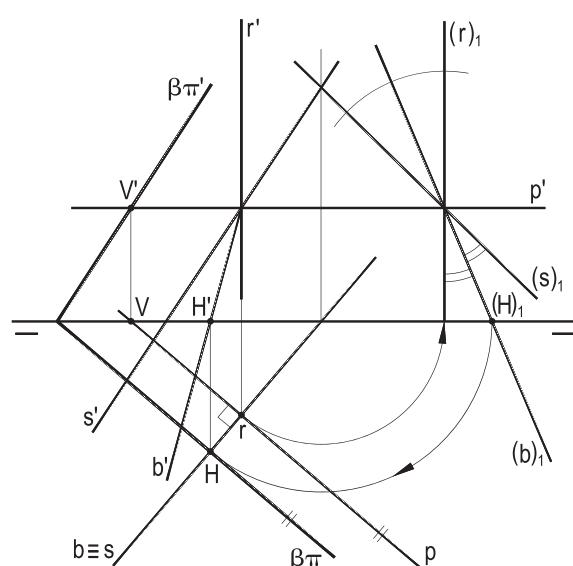


Figura 1060

889

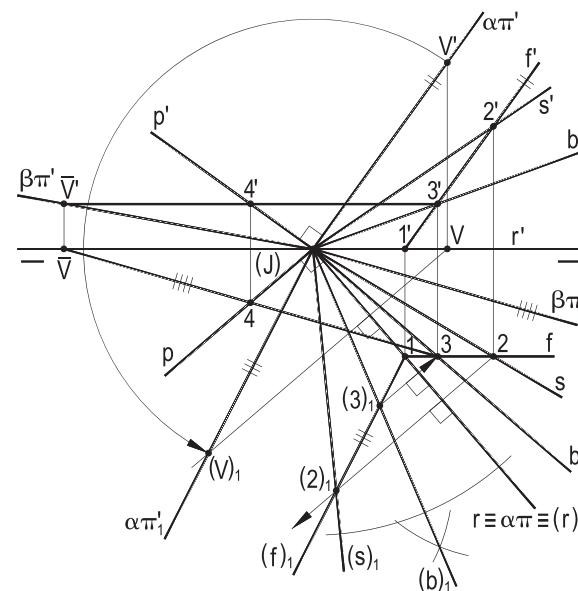


Figura 1061

890

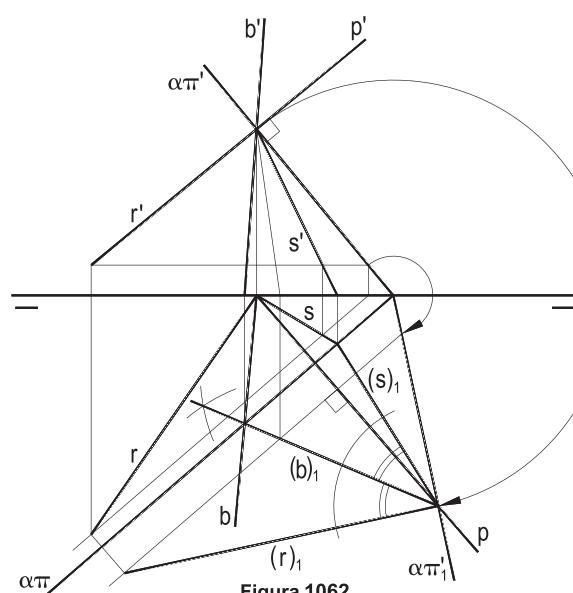


Figura 1062

891

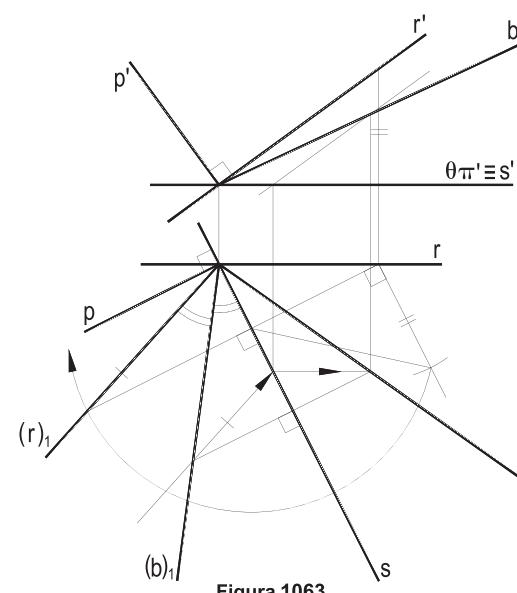


Figura 1063

**Em todos os casos abaixo, são dados os traços de um plano ( $\alpha$ ). Pede-se construir os traços do plano ( $\beta$ ), bissetor do ângulo formado, no primeiro diedro, pelos traços de ( $\alpha$ ).**

**Resoluções:** Em todos os casos, a bissetriz ( $b$ ) do ângulo formado pelos traços de ( $\alpha$ ) é obtida pelo método detalhado no número 3.4. E a perpendicular ( $p$ ), pelo ponto ( $J$ ), comum aos dois traços de ( $\alpha$ ) forma, com ( $b$ ), o bissetor ( $\beta$ ) pedido.

Observe-se que, no último exemplo (Figura 1067), a bissetriz ( $b$ ) é a reta de perfil ( $J)(M$ ) que, dada a particularidade de ( $\alpha$ ) ser perpendicular a ( $\beta_{24}$ ), também o é, obrigando que também ( $\beta$ ) o seja.

**892**

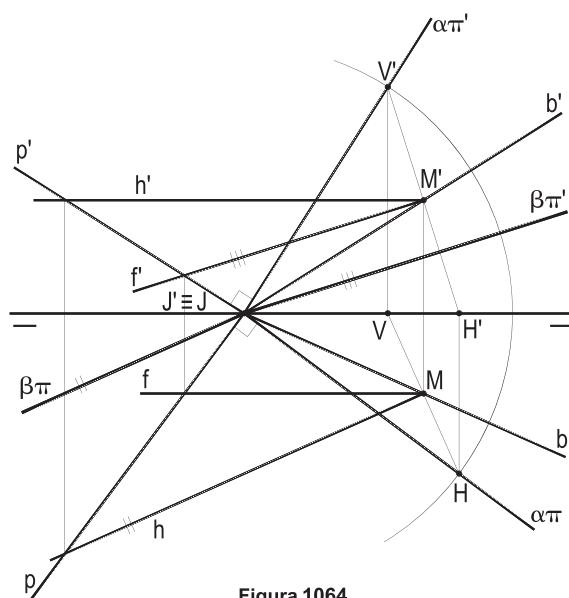


Figura 1064

**893**

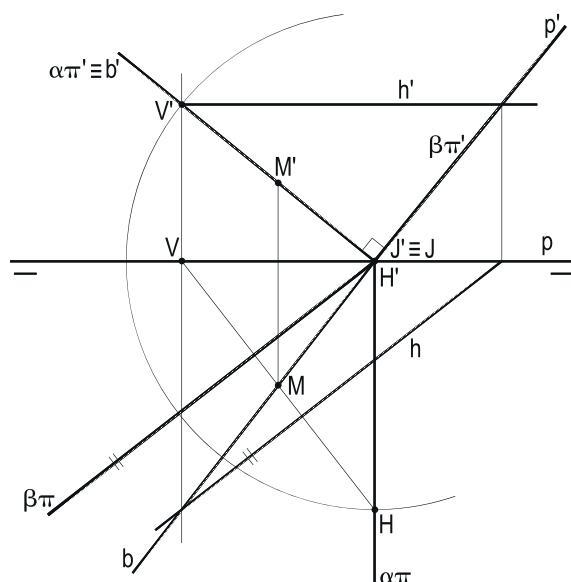


Figura 1065

**894**

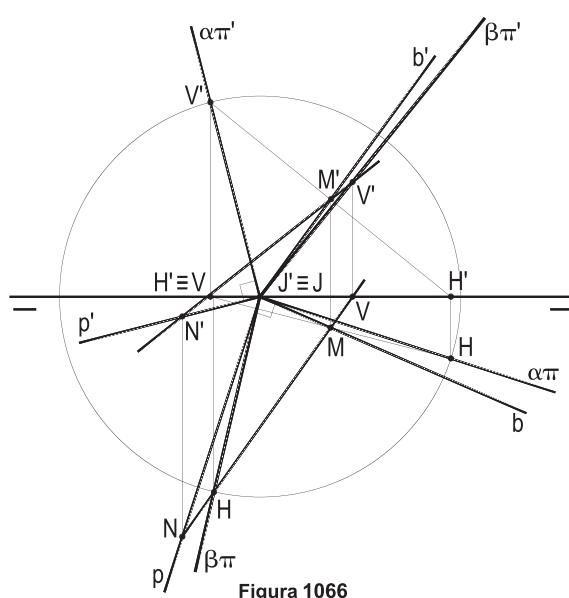


Figura 1066

**895**

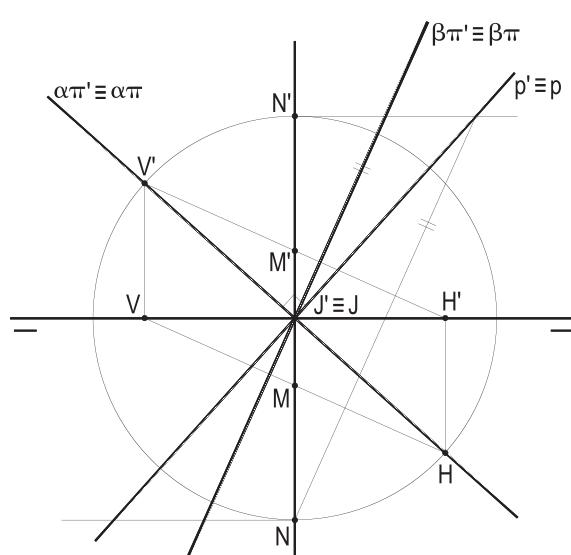


Figura 1067

**896 – Construir as projeções do triângulo (A)(B)(C), sabendo que o lado (B)(C) pertence à reta ( $r$ ), que (B) e (C) equidistam dos traços do plano ( $\alpha$ ), (B) com cota maior que (C), e que (A) tem abscissa, afastamento e cotas iguais entre si e iguais à abscissa do ponto ( $\alpha\pi'\pi$ ).**

**Dados as projeções de ( $r$ ), os traços de ( $\alpha$ ) e a origem O das abscissas.**

**Resolução:** Para equidistar dos dois traços de ( $\alpha$ ), cada um dos vértices (B) e (C) deve pertencer a um dos planos bissetores dos ângulos formados pelos traços de ( $\alpha$ ) (número 6.1).

Deve-se, por isso, construir as bissetrizes ( $b_1$ ) e ( $b_2$ ) dos ângulos objetivos dos traços de ( $\alpha$ ), tal como detalhado no item 3.4, assim como a perpendicular ( $p$ ) a ( $\alpha$ ), conduzida pela interseção de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ), que forma com ( $b_1$ ) e com ( $b_2$ ) os dois bissetores buscados.

As interseções de ( $r$ ) com cada um desses bissetores são os vértices (B) e (C) pedidos. (A) é de obtenção imediata (Figura 1068).

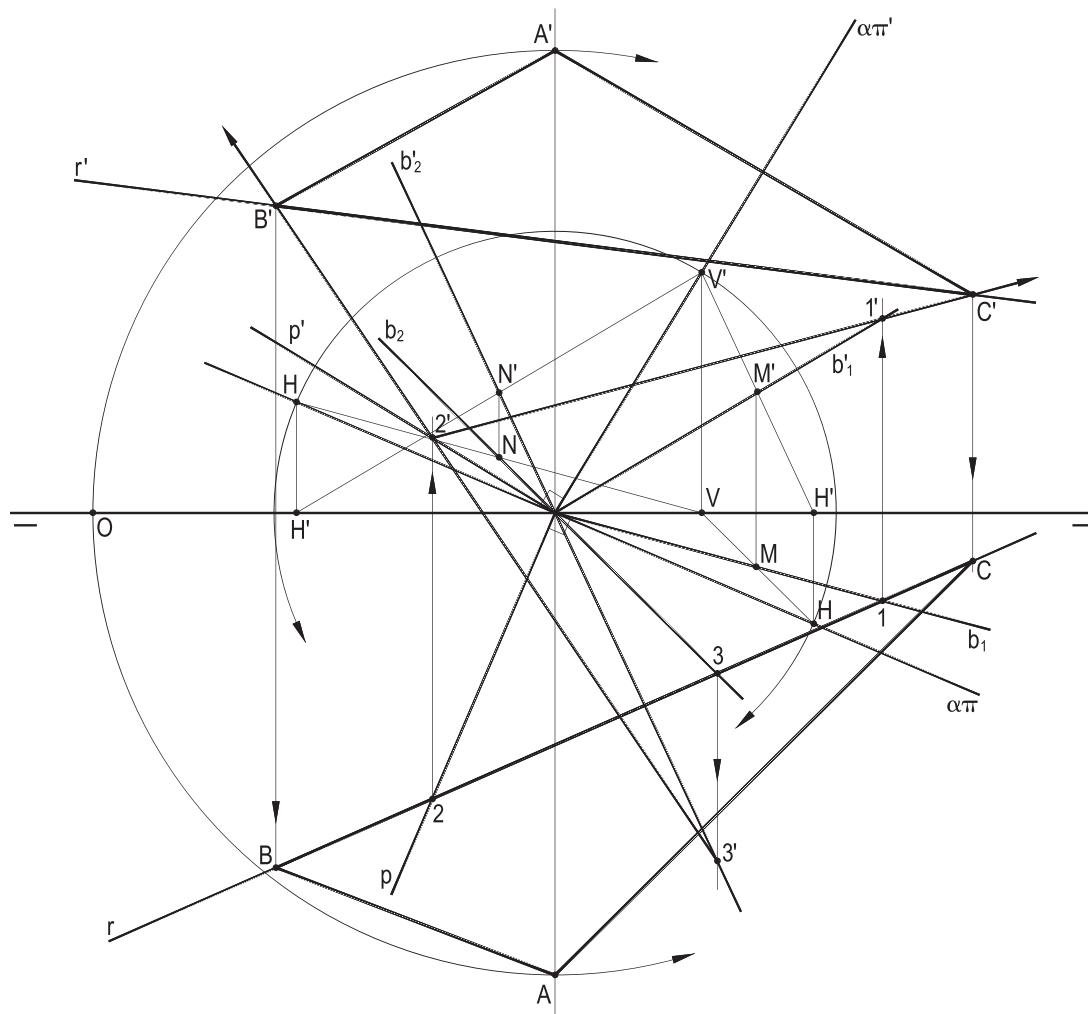


Figura 1068

**897 – Construir as projeções da reta (t), pertencente ao ponto (A), paralela ao plano vertical ( $\alpha$ ) e igualmente inclinada em relação às retas reversas (r) e (s).**

São dadas as projeções do ponto (A) e das retas (r) e (s), além do traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano ( $\alpha$ ).

Resolução: Para formar ângulos iguais com (r) e (s), a reta procurada deve ser paralela a um dos planos bissetores dos ângulos formados por duas paralelas a elas – ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), traçadas por um ponto (J), qualquer. E para ser também paralela a ( $\alpha$ ), (t) deverá ser paralela à interseção de ( $\alpha$ ) com um plano ( $\beta_1$ ) paralelo a um desses bissetores, conduzido por um ponto qualquer (M).

Este plano ( $\beta_1$ ) fica formado pelas paralelas ( $\bar{b}$ ) e ( $p$ ) às retas que definem tal bissetor – (b) e (p).

A segunda solução, correspondente ao segundo bissetor das direções (r) e (s), não está incluída nas Figuras 1069 e 1070.

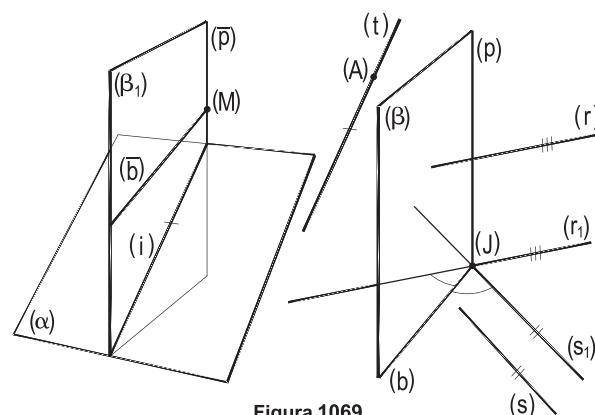


Figura 1069

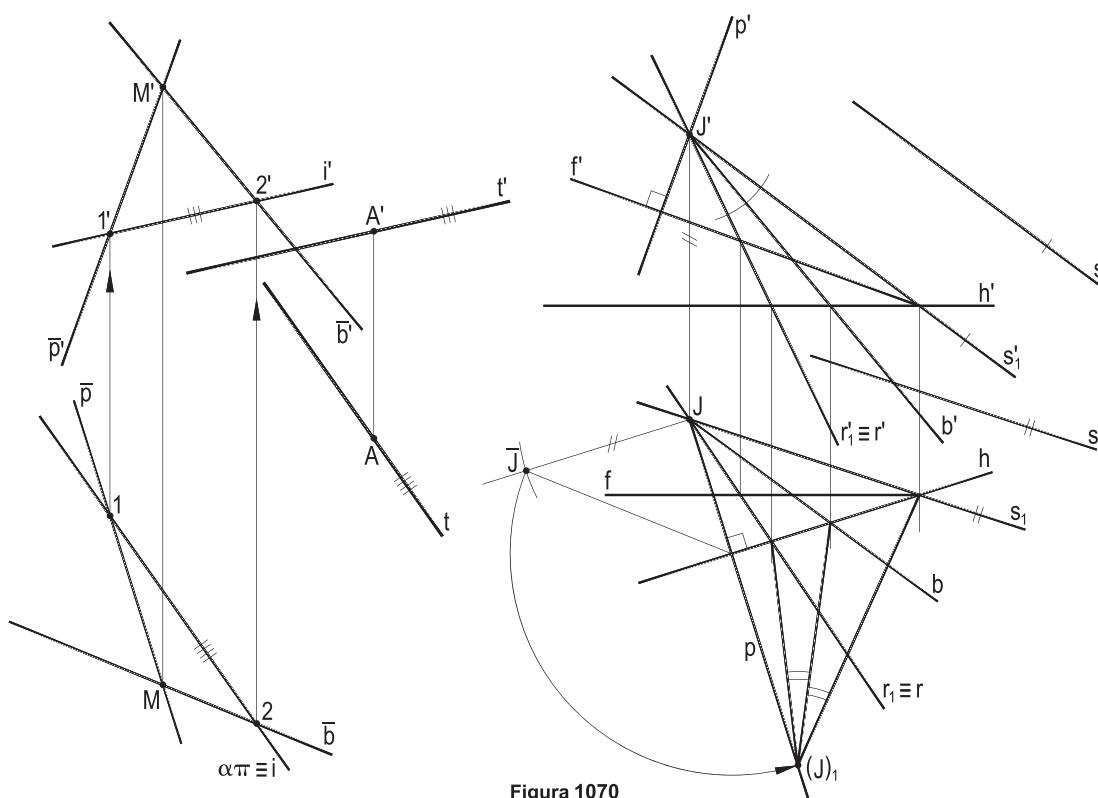


Figura 1070

**898 – Desenhar as projeções do quadrado (A)(B)(C)(D), do primeiro diedro, sabendo que o lado (A)(B) pertence à reta (r), que os vértices (B) e (C) equidistam dos lados do ângulo ( $x\hat{O}y$ ) e que (C) pertence a ( $\pi$ ).**

São dadas as projeções do ângulo ( $x\hat{O}y$ ) e da reta (r).

Resolução: Como o ângulo ( $x\hat{O}y$ ) dado pertence a um plano horizontal, os pontos (B) e (C) devem estar no plano ( $\beta$ ), vertical, bissetor desse ângulo, o que proporciona, de pronto, o vértice (B) (Figura 1071). E, se (r) é suporte para o lado (A)(B), (B)(C) há de pertencer ao plano ( $\gamma$ ), conduzido por (B) e perpendicular a (r), o que define a posição do vértice (C), no cruzamento de  $\beta\pi$  e  $\gamma\pi$  (Figura 1071).

Conhecidas as projeções do lado (B)(C), basta, então, determinar sua V.G.  $a = B'_1 C'_1$ , mediante uma mudança de ( $\pi'$ ), que o torne frontal, para, com outra mudança semelhante, levando (r) também à posição frontal, aplicar nela, a partir do ponto B, o valor  $a$  do lado do quadrado, de modo que (A) fique no primeiro diedro e, enfim, completar (A)(B)(C)(D) com paralelas (Figura 1071).

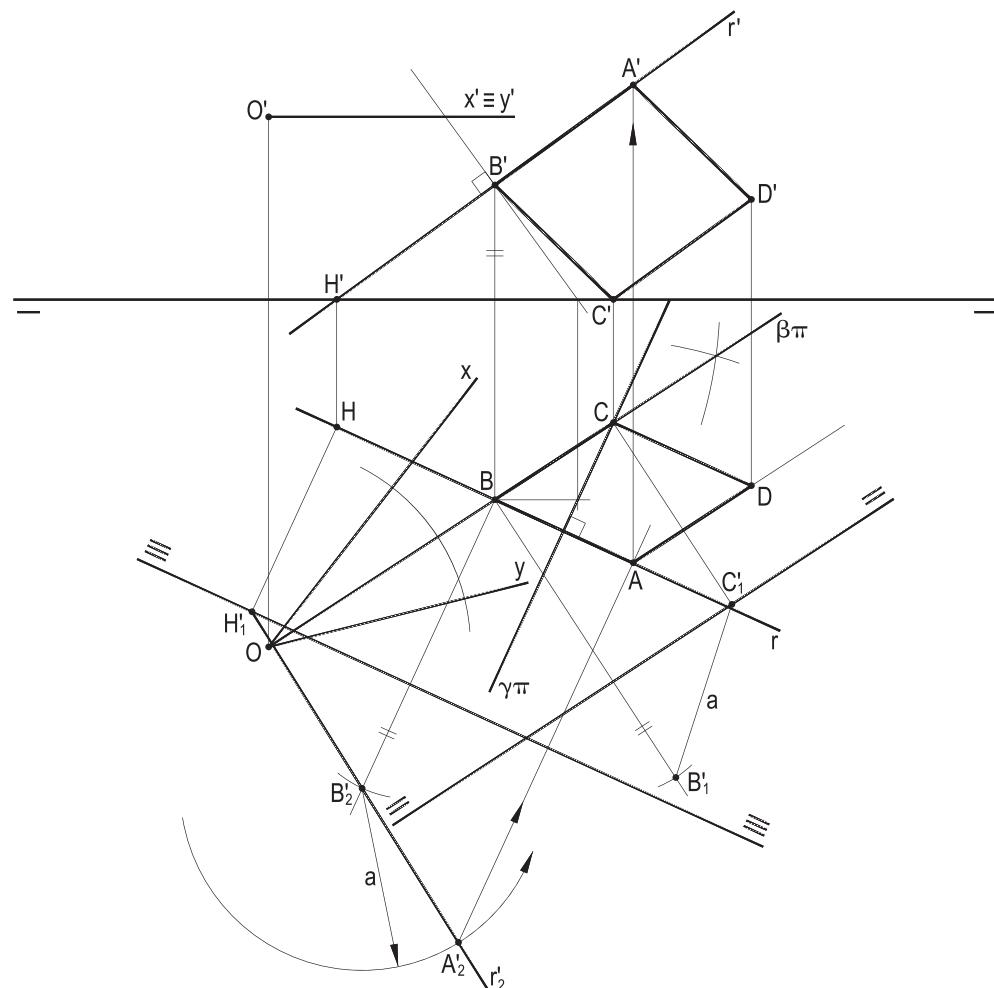


Figura 1071

**899 – Determinar as projeções da reta frontal ( $\omega$ ) apoiada na vertical (a) e na reta de topo (b) e igualmente inclinada em relação às retas reversas (r) e (E)(F), dadas as projeções a, b', r', r, E', E, F' e F.**

Resolução: A frontal ( $\omega$ ), pedida, há de ser paralela a uma frontal ( $\bar{\omega}$ ) de um dos planos bissoletores dos ângulos formados por (E)(F) e ( $r_1$ ), paralela a (r) e conduzida por (E).

Assim, construídas a bissetriz (b) de um dos ângulos formados por ( $r_1$ ) e (E)(F) e a perpendicular (p), por (E), ao plano das retas (E)(F) e ( $r_1$ ), define-se o plano bissector procurado ( $\bar{\omega}$ ). Basta, então, construir uma frontal ( $\bar{\omega}$ ) desse plano e a paralela ( $\omega$ ), concorrente com as retas (a) e (b), uma das duas soluções do problema.

A segunda, correspondente ao segundo bissecor, não foi incluída na Figura 1072.

**900 – Instituir o lugar geométrico dos pontos pertencentes ao plano ( $\alpha$ ) e equidistantes dos planos ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ), todos dados por seus traços.**

Resolução: O lugar geométrico é (número 5.2) o par de retas ( $h_1$ ) e ( $h_2$ ), interseções dos bissoletes de ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) com o plano horizontal ( $\alpha$ ) (Figura 1073).

A resolução fica facilitada, por terem os planos dados ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) traços horizontais paralelos.

Uma simples mudança de ( $\pi'$ ) transforma os planos em de topo, levando seus ângulos a verdadeiras grandezas na nova projeção vertical (Figura 1073).

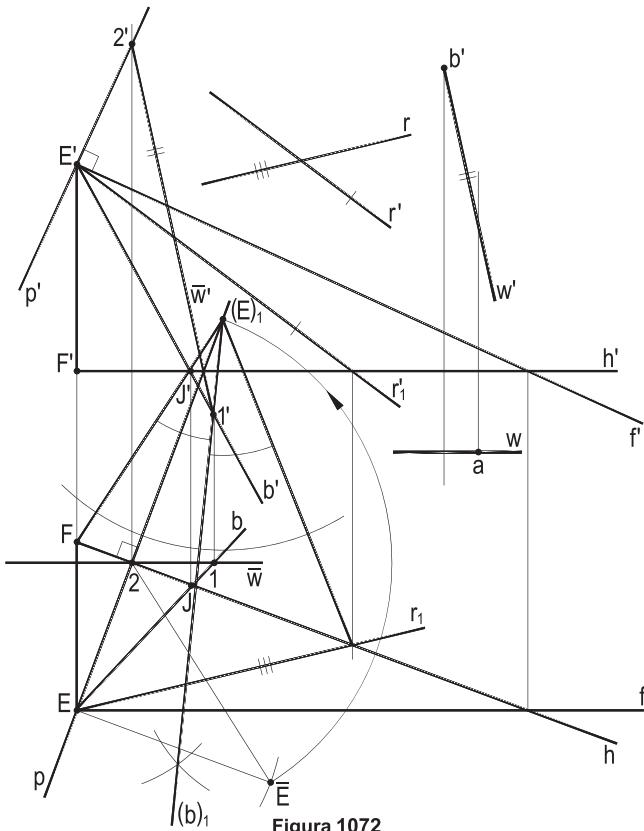


Figura 1072

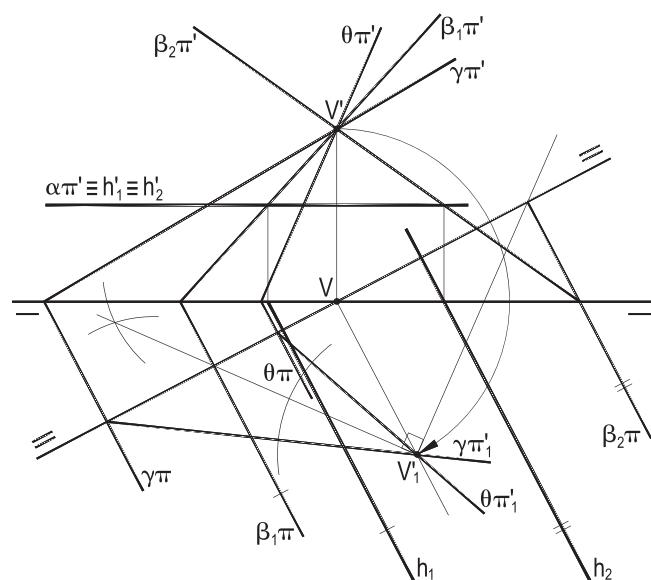


Figura 1073

**901 – Desenhar as projeções do quadrilátero convexo (A)(B)(C)(D), pertencente a ( $\pi$ ), sabendo que todos os seus vértices equidistam das retas (r) e (s), dadas por suas projeções, e que o quadrilátero se inscreve num círculo tangente a ( $\pi'$ ), cujo centro é a projeção horizontal J do ponto (J) comum a (r) e (s), dadas as projeções de (r) e (s). (A) é o vértice de menor abscissa e (B) o de menor afastamento.**

Resolução: Os pontos procurados, devendo pertencer a cada um dos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados por (r) e (s), hão de estar sobre os traços horizontais  $\beta_1\pi$  e  $\beta_2\pi$ , definidos, respectivamente, pelas uniões do traço horizontal (H) da perpendicular (p) ao plano de (r) e (s), conduzida por (J), aos traços horizontais ( $H_1$ ) e ( $H_2$ ) das bissetrizes ( $b_1$ ) e ( $b_2$ ) dos ângulos formados por (r) e (s), obtidas com o rebatimento do plano ( $\alpha$ ) dessas retas (Figura 1074), sobre ( $\pi$ ).

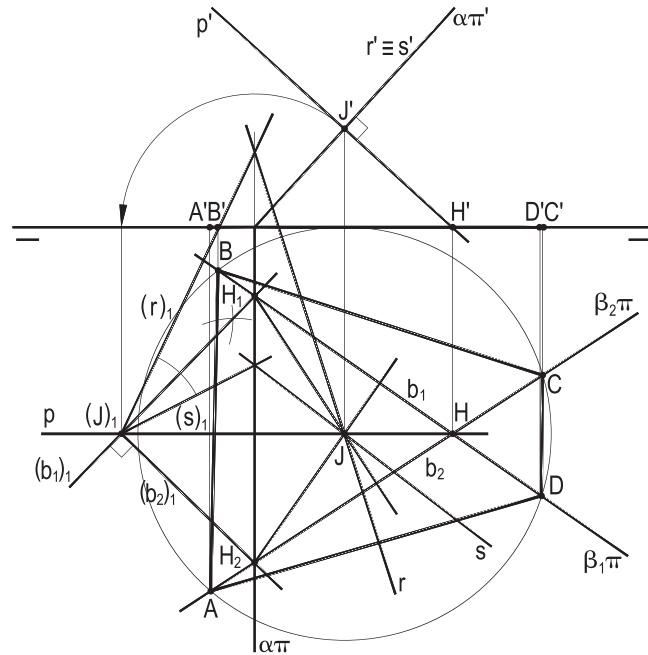


Figura 1074

**902 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ), inclinado de  $60^\circ$  em relação a ( $\pi$ ), conhecendo a projeção horizontal i da interseção de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{13}$ ).**

Resolução: Completada a reta (i), por simetria em relação ( $\pi'\pi$ ), o cone de revolução de vértice num ponto (I) qualquer de (i), base em ( $\pi$ ) e geratrizes inclinadas de  $60^\circ$  em relação a ( $\pi$ ), dá as duas soluções pelas tangentes de (J) à sua base, e, com o auxílio da frontal (I)(H) (Figura 1075), obtém-se  $\alpha\pi'$ .

A segunda solução ficou indicada pelo ponto 2, de tangência de (J) à base desse cone.

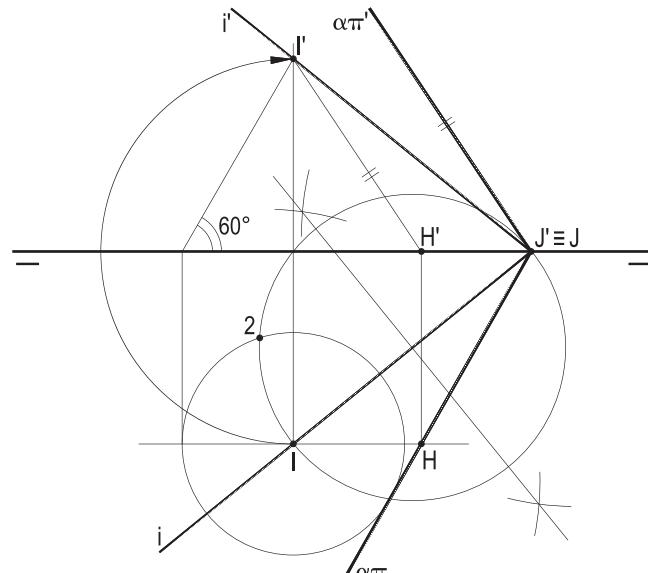


Figura 1075

**903 – Determinar os traços do plano ( $\alpha$ ) pertencente ao ponto (A), dado por suas projeções, inclinado de  $60^\circ$  em relação ao plano ( $\gamma$ ), dado por seus traços, sabendo que a reta ( $\alpha\gamma$ ) é horizontal.**

Resolução: O plano ( $\alpha$ ) há de ser tangente ao cone de revolução de vértice (A), base em ( $\gamma$ ) e geratrizas inclinadas de  $60^\circ$  em relação a ( $\gamma$ ).

E, para poder cortar ( $\gamma$ ) segundo uma horizontal, deve conter uma das tangentes à base do cone com a direção horizontal de  $\gamma\pi$ , o que, para as posições dadas, resulta em duas soluções: os planos ( $\alpha_1$ ) e ( $\alpha_2$ ) (Figura 1076).

**904 – As retas (r), (s) e (e) pertencem, todas, a um ponto (F). Pede-se instituir o lugar geométrico dos eixos de rotação (e), que permitem girar (r), até que ela venha a ocupar a posição de (s).**

**Apresente apenas a resolução espacial.**

Resolução: Para qualquer eixo (e), que permita girar (r), até que venha a coincidir com (s), sendo (r), (s) e (e) concorrentes num ponto fixo (F), já que os ângulos que tal eixo forma com (r) e (s) têm que ser iguais, fica (e) obrigado a pertencer a pelo menos um dos bissetores ( $\beta$ ) dos ângulos formados pelas retas (r) e (s) (Figura 1077).

Assim, o lugar geométrico pedido é o par de planos bissetores dos ângulos formados por (r) e (s).

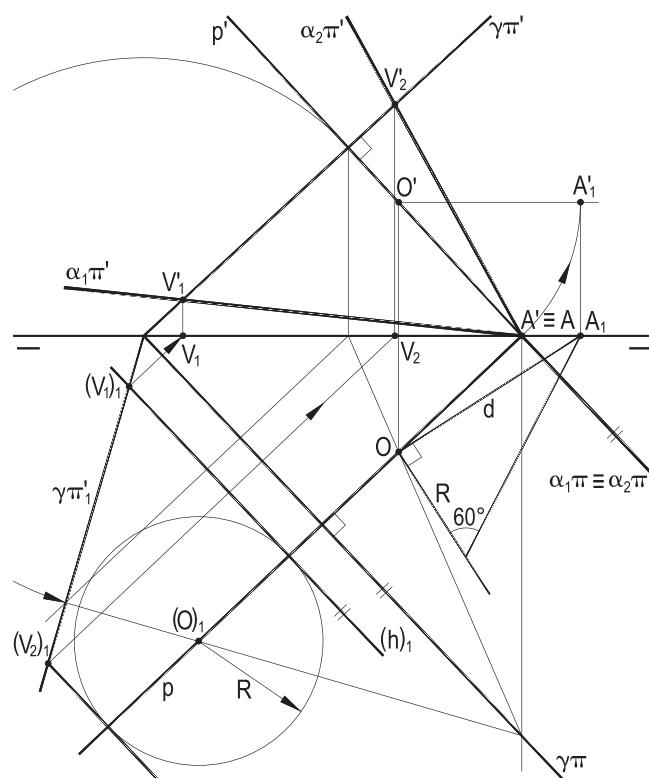


Figura 1076

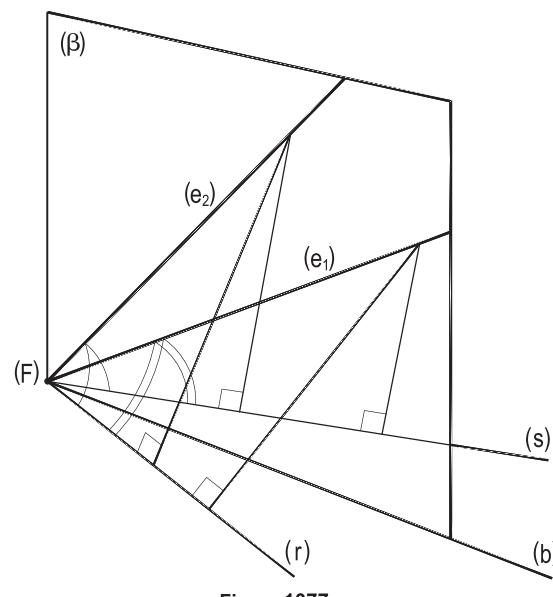


Figura 1077

**905 – Determinar as projeções da reta ( $r$ ) que, passando pelo vértice ( $O$ ) do triedro ( $O-xyz$ ), dado pelas projeções de suas arestas, serve de eixo para as rotações dessas arestas, de modo que venham todas a coincidir.**

Resolução: Tal como instituído no problema anterior, a reta ( $r$ ) procurada deve pertencer aos bissetores dos ângulos faces do triedro. Como duas arestas são horizontais e a terceira é frontal, é bem simples construir o bissetor ( $\alpha$ ) das horizontais, assim como o bissetor ( $\gamma$ ), do ângulo formado por uma dessas horizontais e da terceira aresta, frontal.

Assim, ( $\alpha$ ) é um plano vertical de simples obtenção e ( $\gamma$ ) fica definido pela bissetriz ( $b$ ) do ângulo das arestas ( $Oy$ ) e ( $Oz$ ) e da perpendicular ( $p$ ) ao plano dessas arestas, pelo vértice ( $O$ ).

Um plano vertical auxiliar ( $\theta$ ), paralelo a ( $\alpha$ ), secciona ( $\gamma$ ), produzindo a reta ( $\bar{r}$ ) que, por ter que ser paralela à reta procurada ( $r$ ), proporciona o traçado desta, por ( $O$ ) (Figura 1078).

Cabe observar que o presente problema é repetição do de número 757, com resolução absolutamente diferente.

**906 – Determinar os traços dos planos bissetores dos ângulos que o plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, forma com ( $\pi''$ ).**

Resolução: Basta, com uma mudança, construir um plano ( $\bar{\alpha}$ ), paralelo ao dado ( $\alpha$ ) e dele distante um valor arbitrado  $k$ , e utilizar suas interseções com os planos de perfil de abscissas  $+k$  e  $-k$  (*Geometria Descritiva*, número 154.1), além, é claro, da própria interseção de ( $\alpha$ ) com ( $\pi''$ ) (Figura 1079).

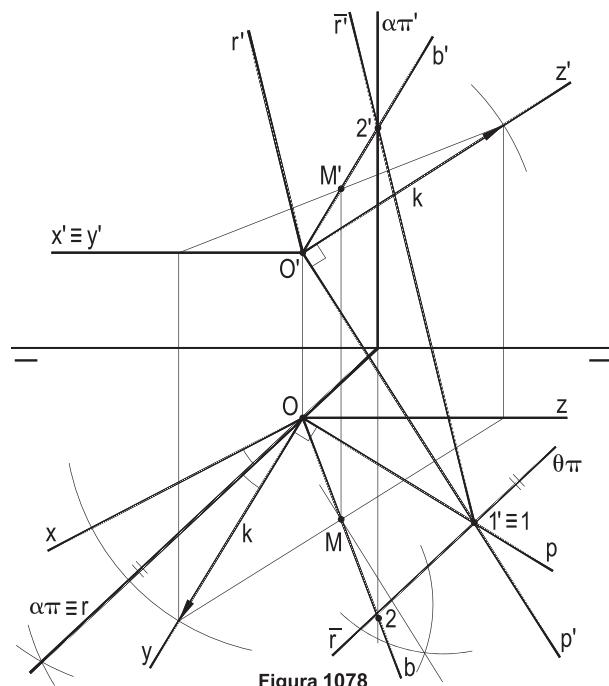


Figura 1078

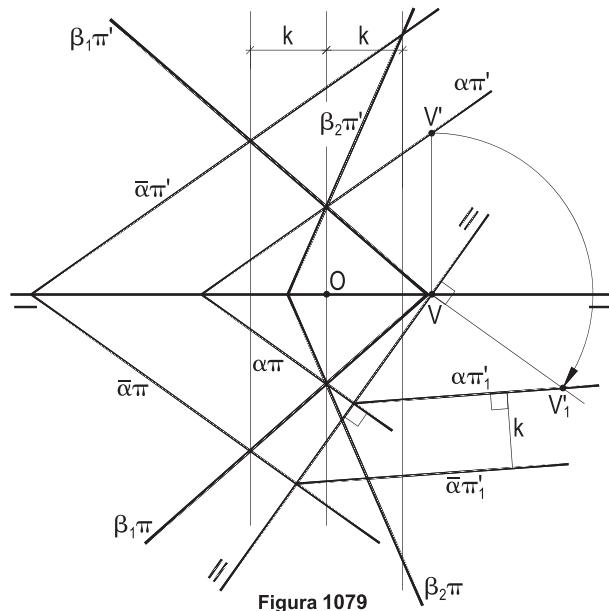


Figura 1079

**907 – Desenhar as projeções do triângulo equilátero (A)(B)(C) pertencente a ( $\pi$ ), sabendo que seu lado (B)(C) tem todos os seus pontos equidistantes dos planos ( $\theta$ ) e ( $\gamma$ ).**

**Dados**  $\theta\pi'$ ,  $\theta\pi$ ,  $\gamma\pi'$ ,  $\gamma\pi$  e A.

**Resolução** O lado (B)(C) há de pertencer a um dos bissetores ( $\beta$ ) dos ângulos formados por ( $\theta$ ) e ( $\gamma$ ), e, como também pertence a ( $\pi$ ), (B)(C) há de estar sobre  $\beta\pi$ , facilmente construído com o auxílio de AC, inclinado de  $30^\circ$  com a perpendicular, por A, a  $\beta\pi$  (Figura 1080).

Os vértices (B) e (C) têm denominações permutáveis, e a segunda solução, para o outro bissector de ( $\theta$ ) e ( $\gamma$ ), não foi incluída na épura da Figura 1080.

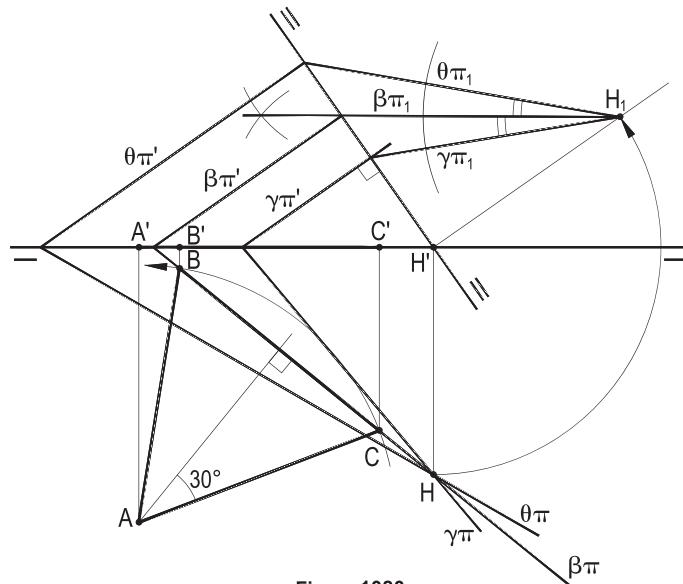


Figura 1080

**908 – Determinar as projeções da reta (e), que permitam girar os planos ( $\alpha$ ), ( $\theta$ ) e ( $\gamma$ ), dados por seus traços, até que venham a coincidir, em posição paralela à reta (r), dada por suas projeções.**

**Resolução:** Sendo todos os três planos dados perpendiculares a ( $\pi'$ ), os eixos de rotação que permitem girá-los até suas coincidências são os de topo que passem, ou pelo incentro (I), ou por um dos três excentros do triângulo formado por seus traços verticais  $\alpha\pi'$ ,  $\gamma\pi'$  e  $\theta\pi'$ , eixos também de cada uma das quatro superfícies cilíndricas de revolução tangentes aos três planos.

Na Figura 1081 apresenta-se uma das duas posições finais – ( $\phi$ ) – que os três planos dados assumem após as rotações, em torno do eixo de topo (e) pertencente ao incentro (I), ficando, então, coincidentes e paralelos a (r).

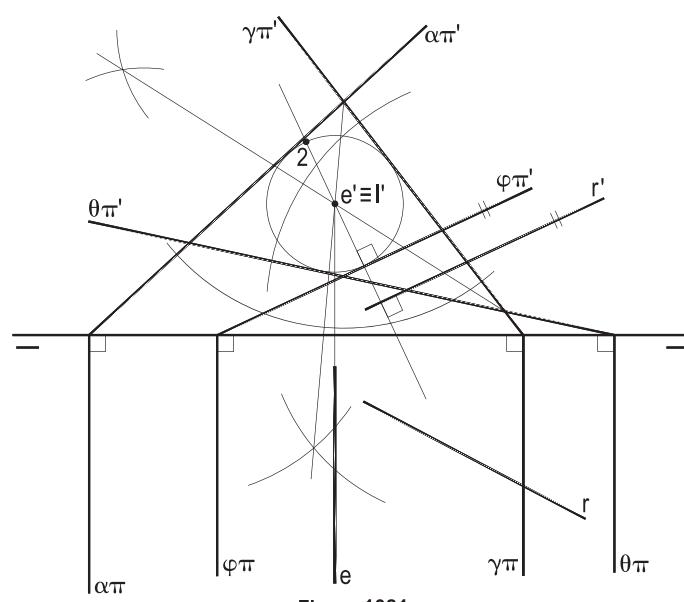


Figura 1081

# CAPÍTULO XIII

## CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS

Neste capítulo vão listados problemas referentes à construção de poliedros. São pouco mais de quatro dezenas.

Antes, porém, das construções propriamente, cabe recordar como se determina a visibilidade desses sólidos quando representados em épura. Para tanto, vejamos as convenções estabelecidas, conforme detalhado no item 167 do livro *Geometria Descritiva* deste autor e que seguem listadas:

1 – As faces dos poliedros são habitualmente consideradas opacas, devendo ser explicitamente citadas eventuais exceções a esta regra.

2 – Como consequência primeira de tais opacidades, decorre que alguns elementos desses sólidos, como vértices e arestas, poderão, por estarem encobertos por uma ou mais faces, vir a ser ocultos, ou invisíveis, para o observador que os estiver apreciando.

3 – Convenciona-se representar todas as linhas visíveis por traçados contínuos e, por linhas tracejadas e homogêneas àquelas, as arestas invisíveis.

Alguma linha interior ao sólido, que mereça ser destacada, pode, então, ser representada por linha mista (traço, ponto, traço), devendo ser, necessariamente, alvo de especial referência.

4 – As projeções de um poliedro são independentes, visto que, para toda a Geometria Descritiva, são dois os observadores considerados, ambos impróprios, um para ( $\pi$ ), com cota positiva e infinita; outro para ( $\pi'$ ), com afastamento positivo e também infinito.

5 – Para se construir cada projeção de determinado poliedro, deve-se obter as projeções de todos os seus vértices e uni-las ordenadamente, criando, assim, todas as suas arestas.

6 – E, para tanto, do ponto de vista teórico, devem ser enviadas ao poliedro projetantes verticais, para a projeção horizontal, que alcancem todos os pontos de suas arestas, e, de modo equivalente, projetantes de topo que os atinjam, para produzir a projeção vertical do sólido.

7 – Pois, essas projetantes se organizam de modo tal que, sempre, se dá a criação de duas superfícies prismáticas circunscritas ao poliedro em estudo, uma com arestas verticais, produzindo, assim, o contorno da projeção horizontal do poliedro, naturalmente um polígono convexo, visto que o presente estudo limita-se aos poliedros convexos. A outra superfície prismática circunscrita ao poliedro, com arestas de topo, proporciona o contorno de sua projeção vertical (Figuras 1082 e 1083).

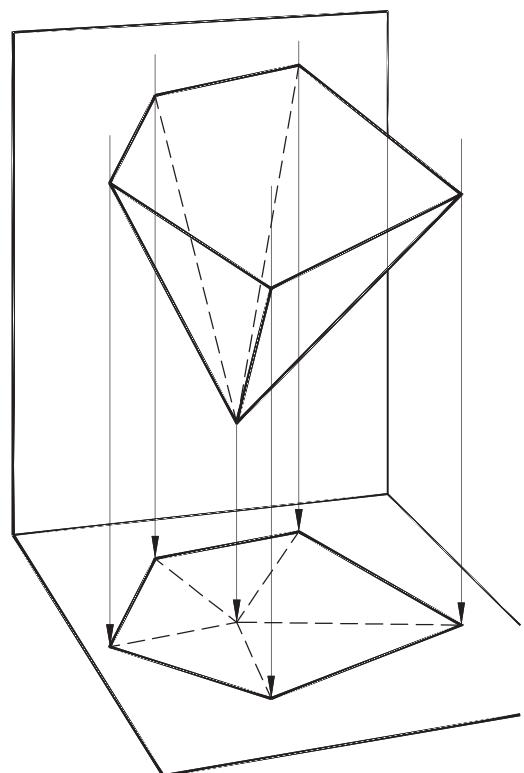


Figura 1082

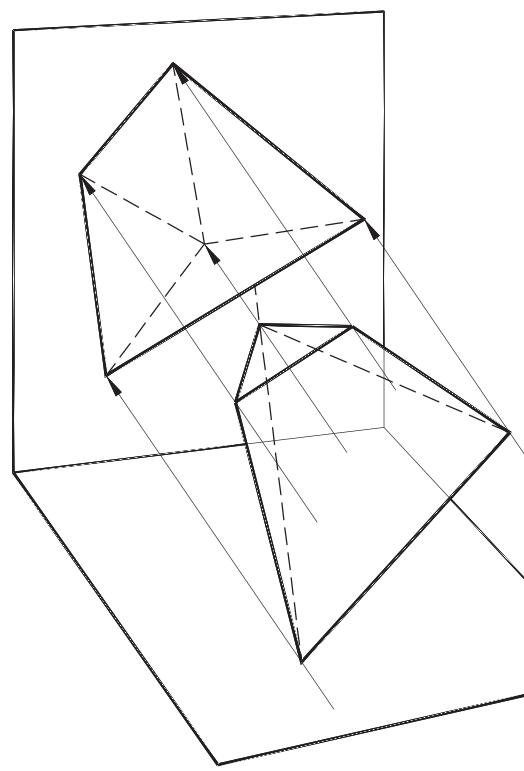


Figura 1083

8 – Esses dois polígonos convexos, um em  $(\pi)$ , o outro em  $(\pi')$ , por corresponderem apenas às projeções do poliedro, são denominados contornos aparentes do poliedro e são sempre visíveis, por não sofrerem obstrução de quaisquer faces do sólido, em cada uma de suas projeções, sendo representados por linhas contínuas.

Eles correspondem às projeções mais periféricas de arestas, vértices e, eventualmente, faces do poliedro.

9 – Naturalmente, arestas e vértices não pertencentes ao contorno aparente restarão interiores a ele, em cada projeção, podendo ser visíveis ou não.

10 – Os planos de projeção são, salvo expressa referência contrária, considerados transparentes, não interferindo, então, nas visibilidades das projeções dos poliedros, que, por isso, não dependem de quais sejam os diedros alcançados pelos sólidos.

11 – Voltando ao mencionado no item 6, anterior, é fácil concluir que, em projeção horizontal, serão visíveis os vértices e as arestas de maiores cotas, situadas, por isso, na parte do poliedro superior à linha poligonal de contato dele com a superfície prismática a ele circunscrita. E, ao contrário, invisíveis aqueles que estiverem em sua porção inferior.

Simplificadamente, diz-se que são visíveis os elementos de maiores cotas e invisíveis os de menor cota.

De modo equivalente, para a projeção vertical, são visíveis os elementos de maior afastamento e invisíveis os de menor afastamento.

12 – Para enfatizar o acima exposto, consideremos duas arestas, reversas (A)(C) e (B)(D) de um poliedro convexo qualquer, e observemos a projetante vertical correspondente ao ponto de cruzamento, em projeção horizontal, das projeções AC e BD dessas arestas, dando especial atenção aos pontos (M) e (N) em que tal projetante encontra, no espaço tridimensional, aquelas arestas (Figuras 1084 e 1085). É claro que, porque as duas faces do poliedro que formam a aresta (A)(C), mais altas que são, encobrem, para a projeção sobre ( $\pi$ ), a aresta (B)(D), na projeção horizontal do sólido resta visível AC, ao contrário de BD, o que se observa, em épura (Figura 1085), comparando as cotas de (M) e (N), pelas projeções verticais M' e N'.

O mesmo raciocínio se aplica, para a projeção vertical entre duas arestas reversas (A)(C) e (B)(D), pela utilização da reta de topo (R)(S) (Figura 1085), mostrando ser visível a aresta (A)(C), situada à frente de (B)(D), que fica oculta pelas duas faces que formam a primeira, visto que o ponto (R) tem afastamento maior que (S), conforme indicam suas projeções horizontais R e S.

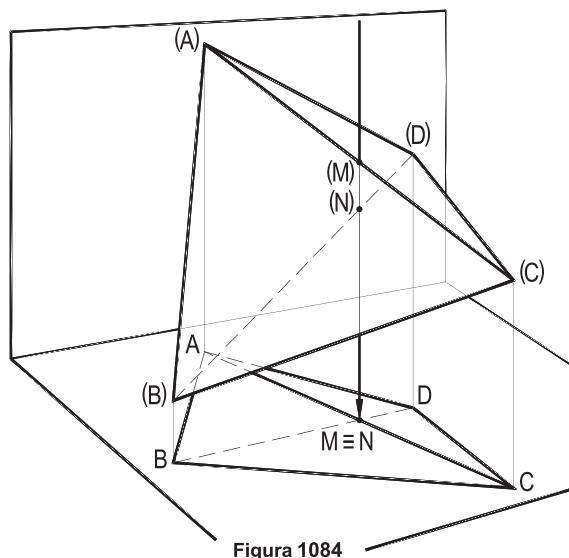


Figura 1084

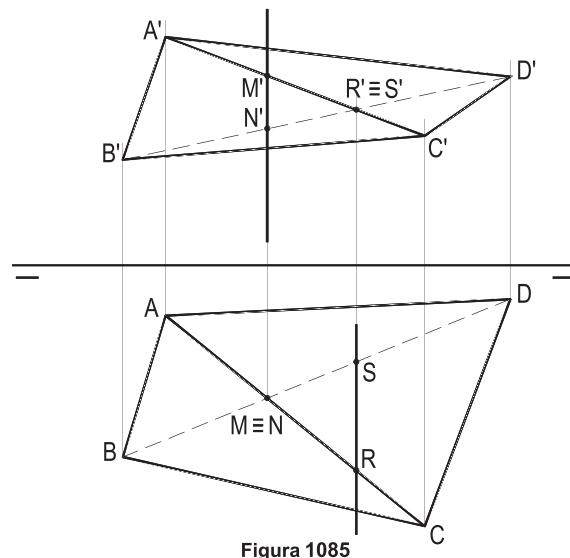


Figura 1085

Em resumo, diz-se que duas arestas reversas, cujas projeções se cruzam no interior do contorno aparente, têm visibilidades opostas.

13 – Naturalmente, se um vértice interior ao contorno aparente for visível, serão visíveis todas as arestas que a ele chegam. É o que ocorre no exemplo das Figuras 1086 e 1087, em que é apresentada apenas uma projeção de um sólido, para ressaltar as visibilidades dos vértices (A) e (B), em projeção horizontal, ambos visíveis, tais suas grandes cotas, como visíveis também hão de ser todas as arestas que a ele chegam, altas também.

Já o vértice (J), por sua muito menor cota, apresenta-se invisível na projeção horizontal apreciada J, como também invisíveis têm de ser as quatro arestas que nele convergem, ocultas que estão, para o observador relativo a ( $\pi$ ), pelas faces que, mais altas, formam o contorno aparente da projeção horizontal do sólido estudado.

Assim, quando um vértice interior ao contorno aparente é invisível, assim o são, também, todas as arestas que a ele chegam.

É também o que ocorre, agora em projeção vertical (Figuras 1088 e 1089), com as arestas visíveis que chegam ao vértice (J), de maior afastamento, e com as invisíveis que formam os vértices (A), (B), (C) e (D), pertencentes à parte posterior do poliedro apreciado.

Como exercícios, passamos a propor a determinação das visibilidades de poliedros diversos, dados por seus vértices e sob certas condições.

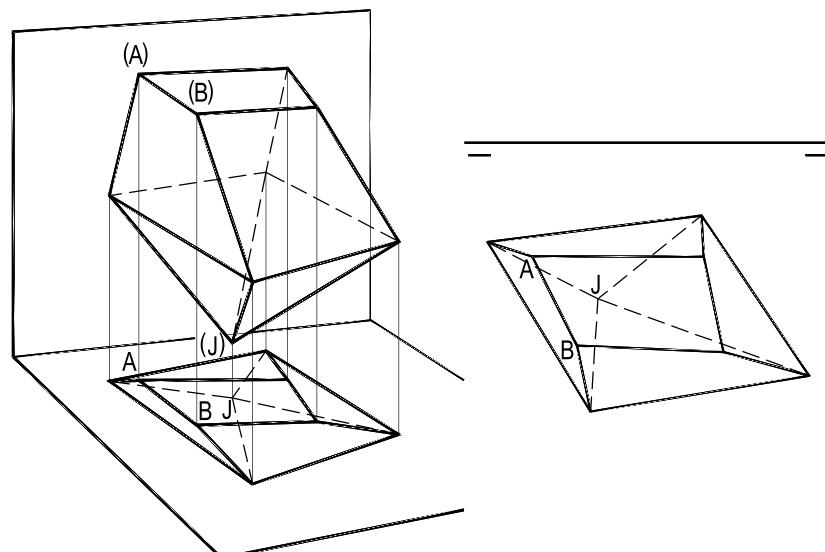


Figura 1086

Figura 1087

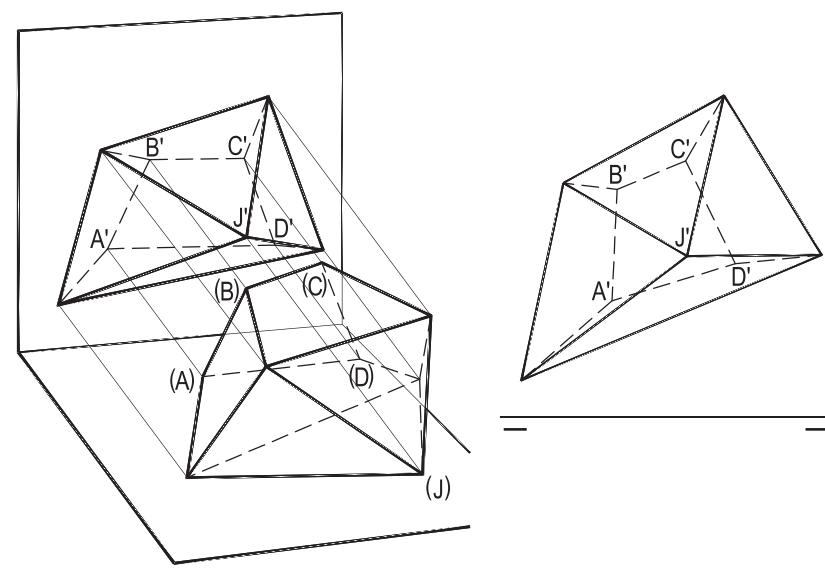


Figura 1088

Figura 1089

Em cada uma das épuras abaixo, apenas uma projeção de um poliedro convexo é apresentada, por todos os seus vértices, esclarecida pelas informações adicionais fornecidas.

Pede-se completar tal projeção, indicando as arestas visíveis e as ocultas.

Resoluções: Em todos os casos, é a determinação dos vértices visíveis, por suas cotas, ou afastamentos, superiores, e a apreciação de arestas reversas que resolvem as questões.

**909 – Tetraedro**

(J)–(A)(B)(C), base em ( $\pi$ ); (J) no 1º diedro

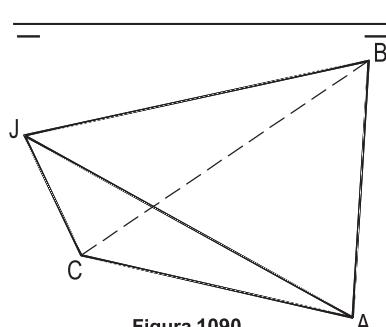


Figura 1090

**910 – Pirâmide**

(J)–(A)(B)(C)(D). (J) tem a menor cota

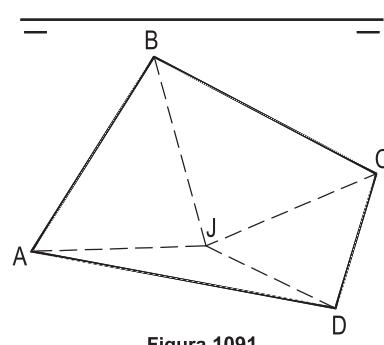


Figura 1091

**911 – Prisma**

(A)(B)(C)–(R)(S)(T) do 1º diedro

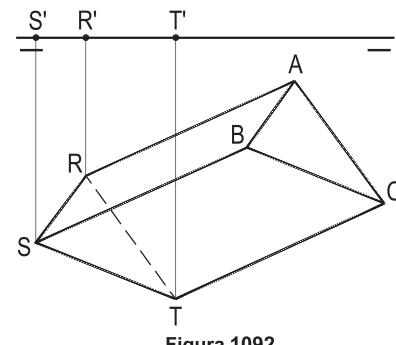


Figura 1092

**912 – Paralelepípedo. Base**

(A)(B)(C)(D) frontal, à frente de (R)(S)(T)(U)

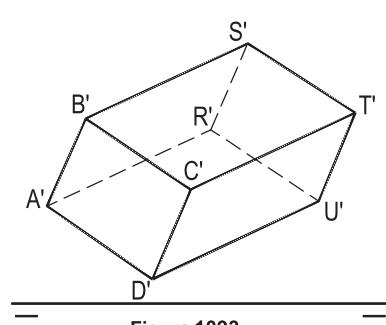


Figura 1093

**913 – Tetraedro**

(J)–(A)(B)(C), 914 – Prisma (R)(S) ε ( $\beta_{24}$ ) base em ( $\beta_{13}$ ); (J) ε ( $\pi'$ ) (A)(B)(C) ε ( $\beta_{13}$ )

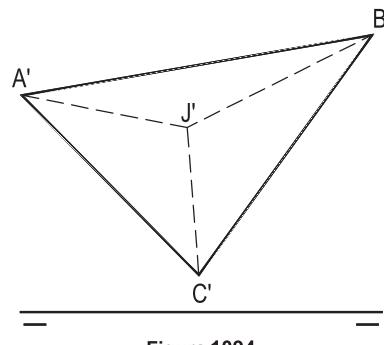


Figura 1094

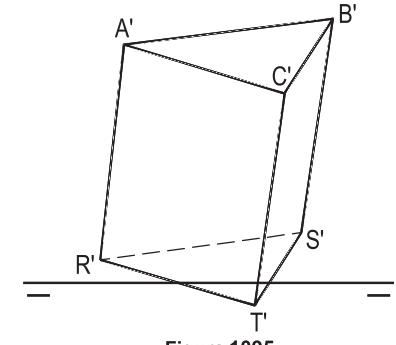


Figura 1095

**915 – Pirâmide (J). Base em**

( $\pi$ ). (J) no 4º diedro

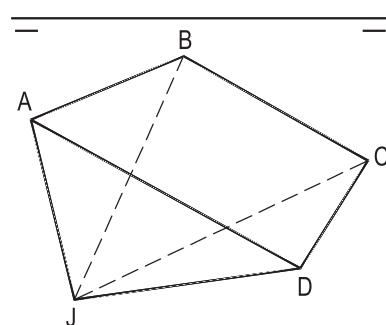


Figura 1096

**916 – Prisma no 1º diedro**

(A)(B)(C) em ( $\pi$ )

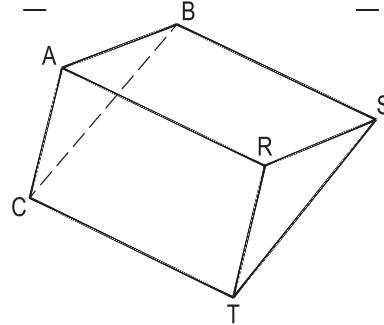


Figura 1097

**917 – Pirâmide (J) do 1º**

diedro. (J) ε ( $\pi'$ )

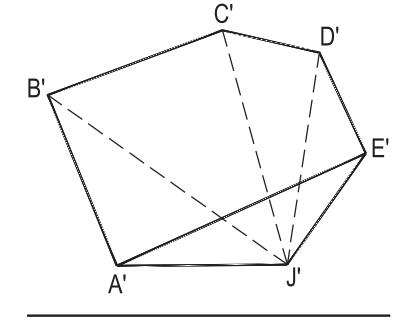


Figura 1098

**Em cada uma das épuras abaixo, são dadas as projeções de todos os vértices dos poliedros convexos nominados, caso a caso.**

**Pede-se completar suas projeções, sabendo que todas as suas faces são opacas.**

**Resolução:** Lembrar que as visibilidades são independentes em cada projeção, buscando cotas e afastamentos maiores e arestas reversas, utilizando, quando necessário, auxiliares (v) e (t), respectivamente, vertical e de topo.

**918**

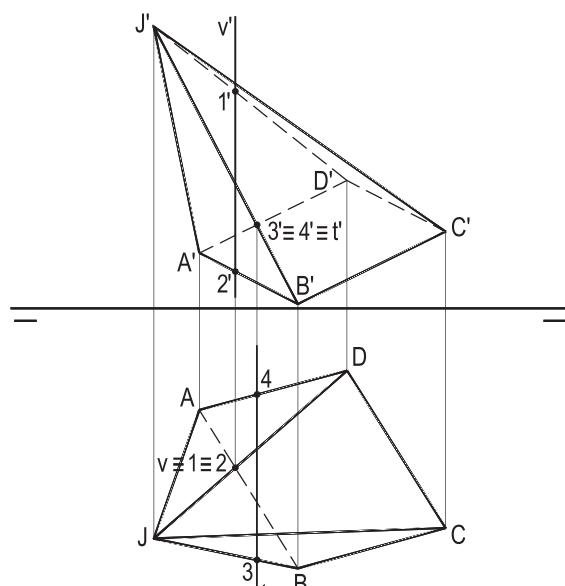


Figura 1099

**919**

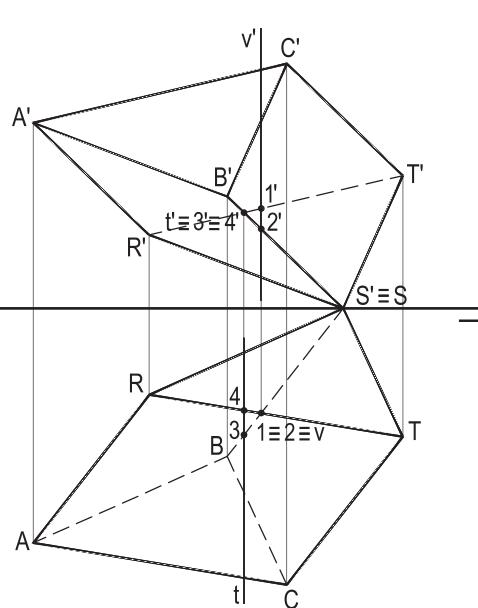


Figura 1100

**920**

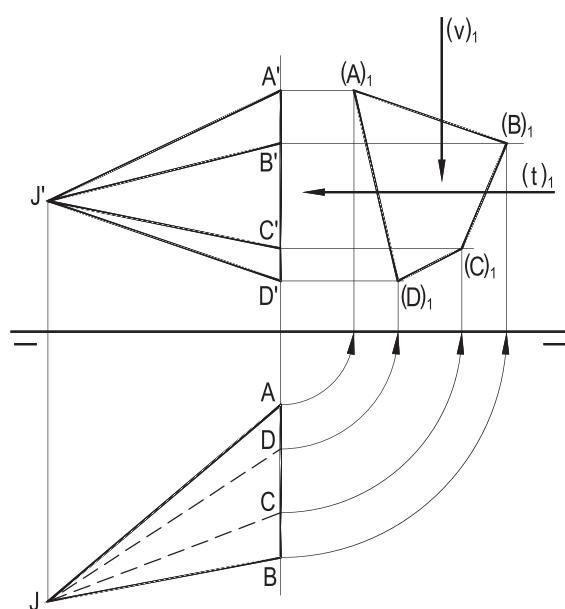


Figura 1101

**921**

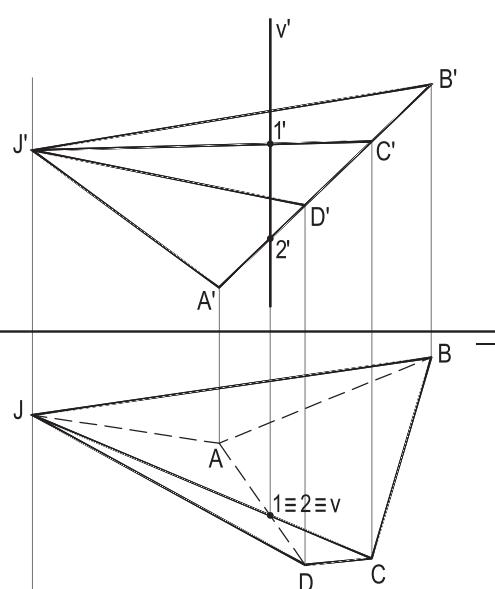


Figura 1102

**922 – O tetraedro regular  $(J)-(A)(B)(C)$ , do primeiro diedro, tem sua face  $(A)(B)(C)$  em  $(\pi)$ , inscrita num círculo de 16 mm de raio, tangente a  $(\pi'\pi)$  e ao traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano  $(\alpha)$ . Sabendo que  $(A)$  tem distância máxima a  $\alpha\pi$  e que  $(J)$  pertence a  $(\alpha)$ , pede-se desenhar as projeções do sólido e construir o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano  $(\alpha)$ , que deve ser considerado transparente e com sentido direto. Dado  $\alpha\pi$ .**

Resolução: Marcado o centro  $J$  do círculo circunscrito à face  $(A)(B)(C)$ , sua construção, em V.G., em  $(\pi)$ , fornece o valor  $a$  da aresta do tetraedro, que proporciona, com uma rotação que leve a areta  $(J)(A)$  à posição frontal  $(J)(\bar{A})$ , a obtenção de  $J'$  (Figura 1103).

Com auxílio da horizontal  $(h)$ , obtém-se o traço vertical  $\alpha\pi'$ , pedido.

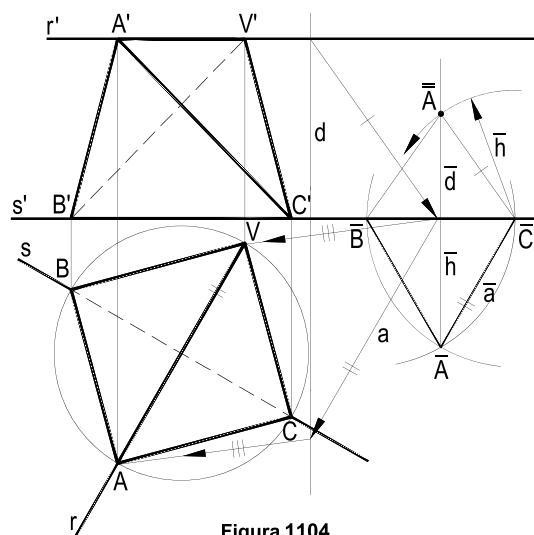
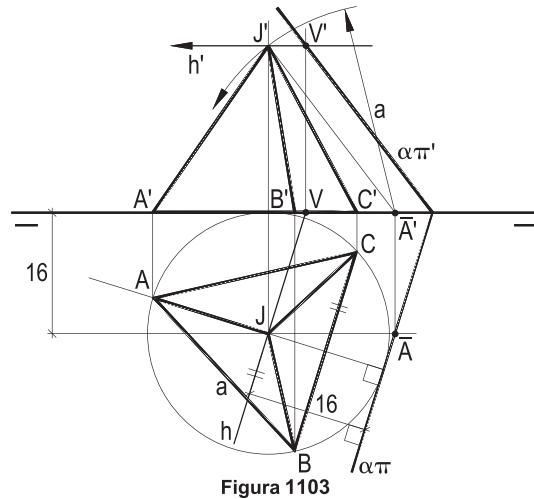
A ordem dos vértices  $(B)$  e  $(C)$  foi arbitrada.

**923 – As horizontais  $(r)$  e  $(s)$  servem de suportes a duas arestas opostas de um tetraedro regular  $(V)-(A)(B)(C)$ , a aresta  $(V)(A)$  em  $(r)$ .**

**Construir as projeções do sólido, sabendo que  $(A)$  é o vértice de maior afastamento e  $(B)$  o de menor abscissa. Dados  $r'$ ,  $s'$ ,  $r$  e  $A$  (em  $r$ ).**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Descritiva*, número 170) que as arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais e que a distância entre elas se mede pela altura de um triângulo isósceles de base igual à aresta do sólido e cujos dois lados iguais valem as alturas de suas faces.

Como, no caso, é implicitamente dada a distância  $d$  entre as arestas opostas  $(V)(A)$  e  $(B)(C)$ , uma simples construção geométrica, a partir de um triângulo equilátero  $\bar{ABC}$ , de lado  $\bar{a}$ , arbitrado, dá a altura facial  $\bar{h}$  e a distância  $\bar{d}$ . Por paralelas, a  $\bar{AC}$  e  $\bar{CA}$ , a partir da distância  $d$  conhecida, obtém-se o valor  $a$  da aresta do tetraedro pedido, o que, então, permite a construção do quadrado  $ABVC$ , em projeção horizontal (Figura 1104), cujas diagonais são iguais ao valor  $a$  da aresta do sólido.



**924 – Desenhar a épura de um cubo do primeiro diedro, apoiado por uma face em ( $\pi'$ ) e por uma aresta em ( $\pi$ ), sabendo que duas faces do sólido formam  $30^\circ$  com ( $\pi$ ).**

**Arbitre a abscissa inicial e dê à aresta a medida de 26 mm.**

Resolução: Tendo uma face em ( $\pi'$ ), a projeção vertical do cubo reduz-se ao quadrado que é seu próprio contorno aparente (Figura 1105), por ter quatro arestas de topo.

O ângulo  $30^\circ$  da face com ( $\pi$ ) vem em V.G. na projeção vertical e poderia ter sido construído no sentido oposto.

Conforme estabelecido, a abscissa inicial foi arbitrada.

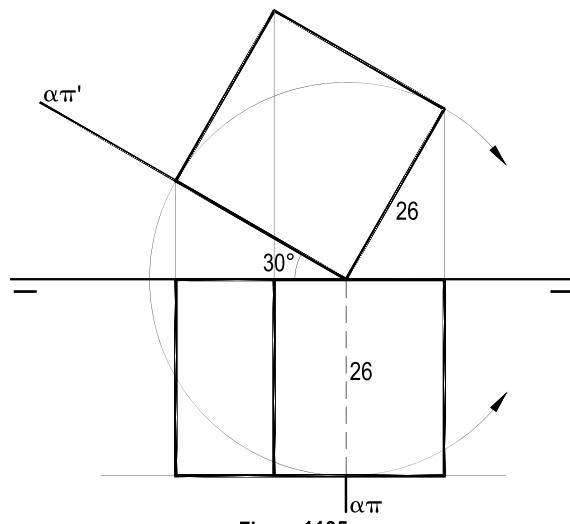


Figura 1105

**925 – Construir as projeções do hexaedro regular situado no primeiro diedro e apoiado pela face (A)(B)(C)(D), no plano ( $\alpha$ ), a aresta (A)(B) em ( $\pi$ ) e o vértice (C) em ( $\pi'$ ), dadas, apenas, as projeções horizontais dos vértices (A) e (B).**

Resolução: Por estar em ( $\pi$ ) e em ( $\alpha$ ), a aresta (A)(B) define o traço horizontal  $\alpha\pi$ .

Assim, construída a V.G., rebatida, AB(C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub> da face quadrada situada em ( $\alpha$ ), o alçamento do vértice (C)<sub>1</sub> traz sua projeção vertical C' (Figura 1106).

Para compor o cubo, são traçadas as perpendiculares, pelos vértices da face alcançada, a ( $\alpha$ ) e, com auxílio de uma mudança de ( $\pi'$ ), aplica-se o valor da aresta a do sólido numa delas, obtendo-se o primeiro vértice (R) da segunda face, completando a épura com paralelas.

Observe-se o traçado mais fino do trecho de  $\alpha\pi'$  encoberto pelo cubo.

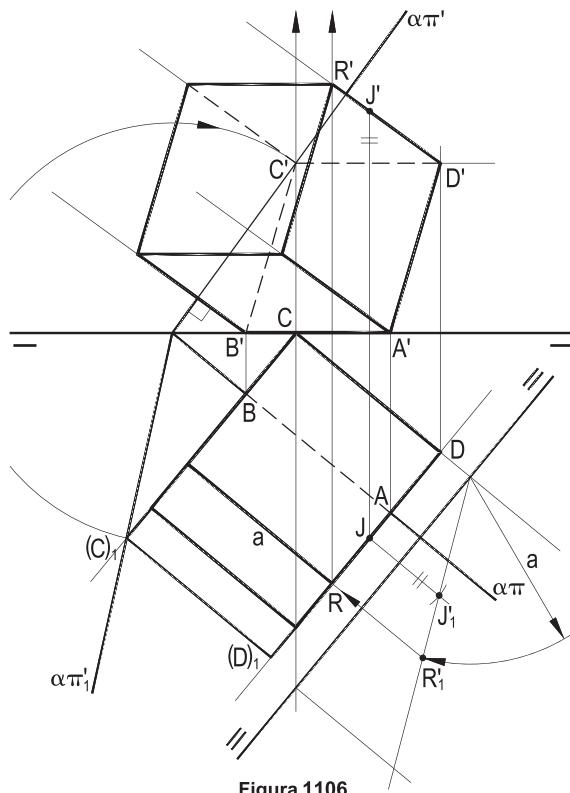
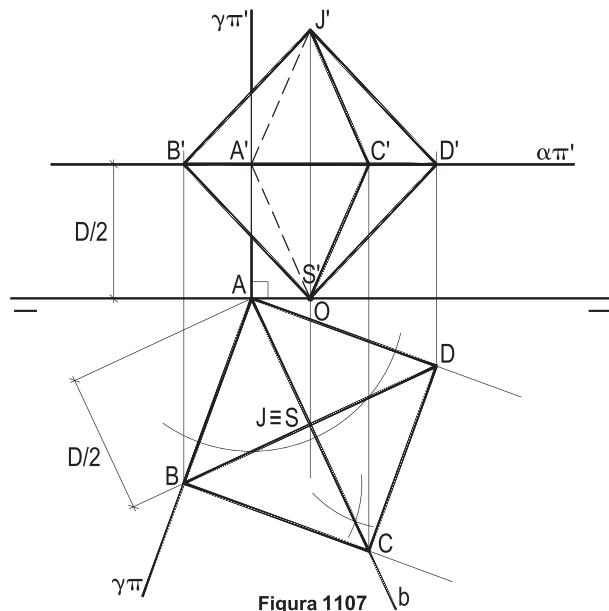


Figura 1106

**926 – O octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S) tem a diagonal (J)(S), vertical, em ( $\pi''$ ), a aresta (A)(B) no plano ( $\gamma$ ), (A) em ( $\pi'$ ), e está inteiramente no primeiro diedro, apoiado por (S) em ( $\pi$ ). Pede-se construir sua épura, sendo dados o traço horizontal do plano ( $\gamma$ ) e a origem O das abscissas.**

Resolução: Sendo vertical a diagonal (J)(S), a seção diagonal (A)(B)(C)(D), que lhe é perpendicular, projeta-se em V.G. em ( $\pi$ ), o que permite, com a construção da bisetriz b do ângulo reto em A, determinar o centro J  $\equiv$  S do quadrado ABCD (Figura 1107).

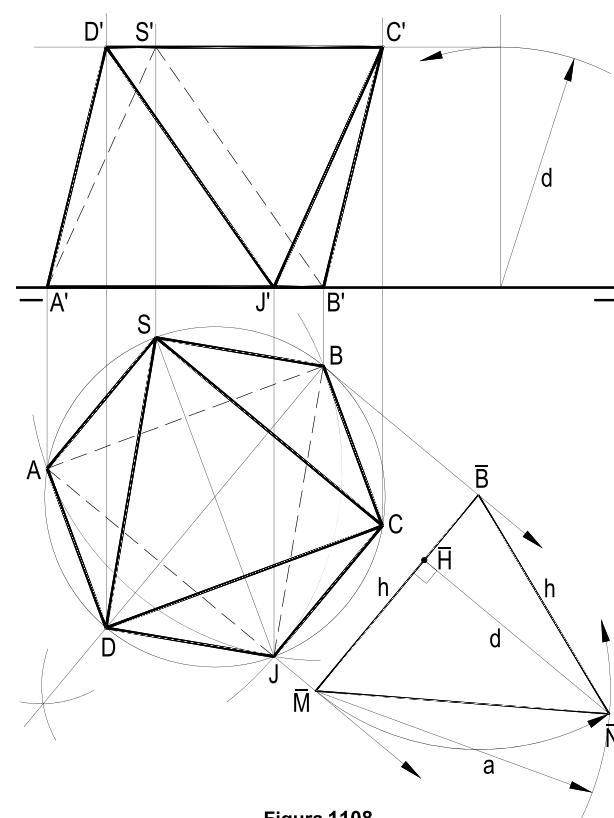
Para a projeção vertical, pronta a diagonal J'S', com mesmo comprimento que AC = BD, o plano horizontal ( $\alpha$ ), mediador de (J)(S), completa a questão.



**927 – Desenhar as projeções do octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S), apoiado por sua face (J)(A)(B) em ( $\pi$ ) e situado no primeiro diedro, dados A e B.**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Descritiva*, número 172) que, no caso, o contorno da projeção horizontal é um hexágono regular, de imediata construção, após se desenhar, em V.G., a face (J)(A)(B), com apenas uma solução.

A distância d entre esta face e a oposta (S)(C)(D), também horizontal, se obtém com a construção do triângulo isósceles  $\bar{B}\bar{M}\bar{N}$ , com lados  $\bar{B}\bar{M}$  e  $\bar{B}\bar{N}$  iguais à altura facial h e a base  $\bar{M}\bar{N}$  igual à aresta a do octaedro (*Geometria Espacial*, números 114.18 e 114.31), o que proporciona a distância d e, então, a projeção vertical do sólido (Figura 1108).



**928 – As arestas  $(J)(A)$ ,  $(J)(B)$  e  $(J)C$  da pirâmide de base  $(A)(B)(C)(D)$  em  $(\pi)$  e vértice  $(J)$  no primeiro diedro medem, respectivamente, 24 mm, 26 mm e 25 mm.**

**Dadas as projeções dos vértices da base, pede-se construir as projeções da pirâmide.**

Resolução: Completada a base da pirâmide, pode-se obter os rebatimentos sobre  $(\pi)$  das faces  $(J)(A)(B)$  e  $(J)(B)(C)$ , conhecidas que são as medidas de suas arestas.

E as perpendiculares pelos rebatimentos  $(J)_1$  e  $(J)_2$  do vértice  $(J)$  às charneiras  $AB$  e  $AC$  proporcionam a projeção horizontal  $J$  do vértice  $(J)$  do sólido (Figura 1109).

Finalmente, a rotação que leva a aresta  $(C)(J)$  à posição frontal traz a cota de  $(J)$ , completando a questão.

**929 – Construir as projeções da pirâmide regular  $(J)-(A)(B)(C)(D)(E)(F)$ , de cota positiva, assente por sua face lateral  $(J)(A)(B)$  em  $(\pi)$ , dadas as projeções de  $(A)$  e  $(B)$ , sabendo que  $(J) \in (\pi'')$ .**

Resolução: Construídas, em V.G., a face  $(J)(A)(B)$  e a base da pirâmide, por seu rebatimento sobre  $(\pi)$  em torno da charneira  $AB$ , o triângulo  $JMN$  (Figura 1110) com dois lados  $JM$  e  $JN$  iguais ao apótema da pirâmide e o terceiro  $MN$  medindo o dobro do apótema da base, num segundo rebatimento lateral dessa seção, sobre  $(\pi)$ , em torno de  $JM$ , proporciona a projeção horizontal da base e as cotas  $z$  e  $2z$  dos vértices  $(C)$  e  $(F)$  e dos vértices  $(D)$  e  $(E)$ , respectivamente (Figura 1110), que completam a projeção vertical.

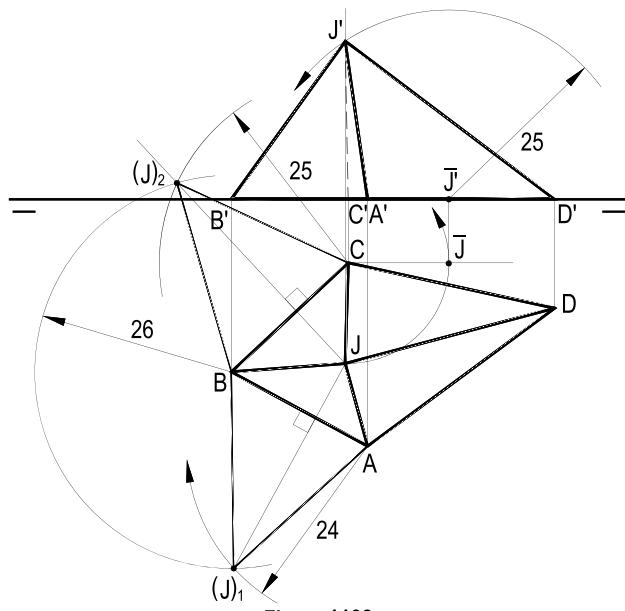


Figura 1109

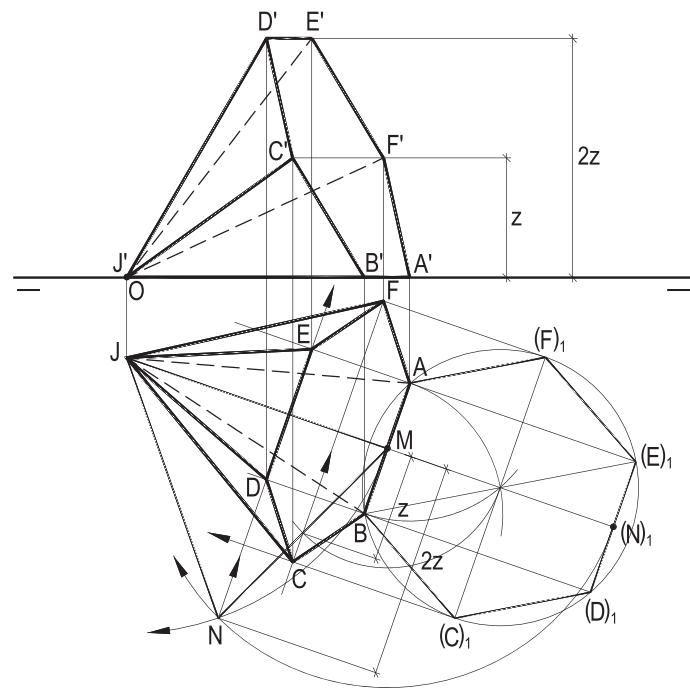


Figura 1110

**930 – O plano vertical ( $\alpha$ ), dado por seus traços, contém os vértices (A), (B), (C) e (D) de um octaedro regular de diagonal (J)(S).**

Dadas as projeções verticais dos vértices (A) e (B), pede-se a épura do sólido sabendo que pertence ao primeiro diedro e que a abscissa de (J) é maior que a de (S).

Resolução: Rebatido ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi'$ ), consegue-se a seção quadrada  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$ , em V.G., que, alçada, proporciona os vértices (C) e (D) do sólido.

A diagonal (J)(S), perpendicular a ( $\alpha$ ), tem que ser a horizontal ( $h$ ), por seu centro ( $O$ ), com a V.G. obtida do rebatimento, como  $(B)_1(D)_1$ , o que completa a épura (Figura 1111).

Observe-se a porção do traço vertical  $\alpha\pi'$ , do plano ( $\alpha$ ), em linha contínua, mas fina, por estar oculta pelo sólido.

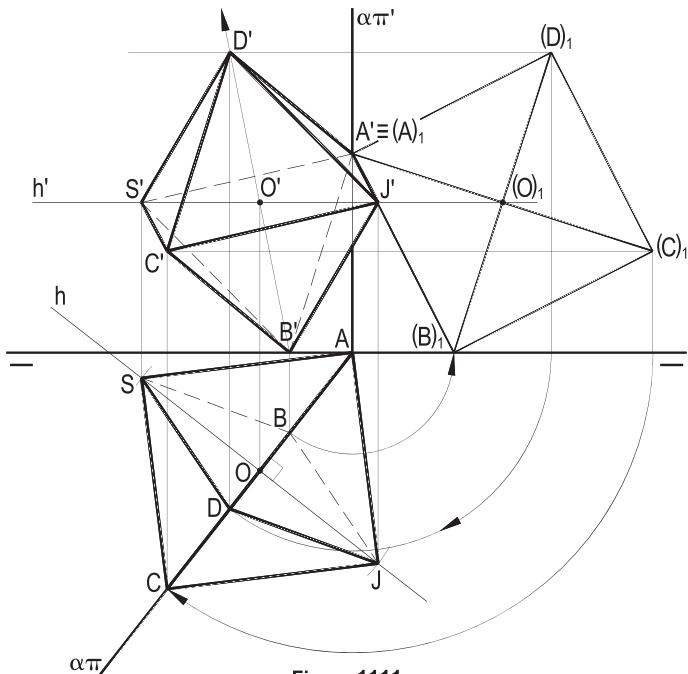


Figura 1111

**931 – Um cubo contido inteiramente no primeiro diedro tem uma aresta (A)(B) em ( $\pi$ ) e outra (C)(D) em ( $\pi'$ ). Dadas as projeções horizontais dos vértices (A) e (B), numa paralela a ( $\pi'\pi$ ), desenhe a épura do sólido.**

Resolução: Por ter arestas fronto-horizontais, como a dada (A)(B), o cubo tem que ter duas faces de perfil, perpendiculares àquelas arestas, o que enseja o uso de uma vista lateral, para a construção, em V.G., do quadrado do primeiro diedro, apoiado por (A)(B) em ( $\pi$ ) e por (C)(D) em ( $\pi'$ ), imediata, por se ter o valor  $a$  da aresta do cubo (Figura 1112).

A vista lateral é útil, também, para a determinação das visibilidades das projeções do sólido.

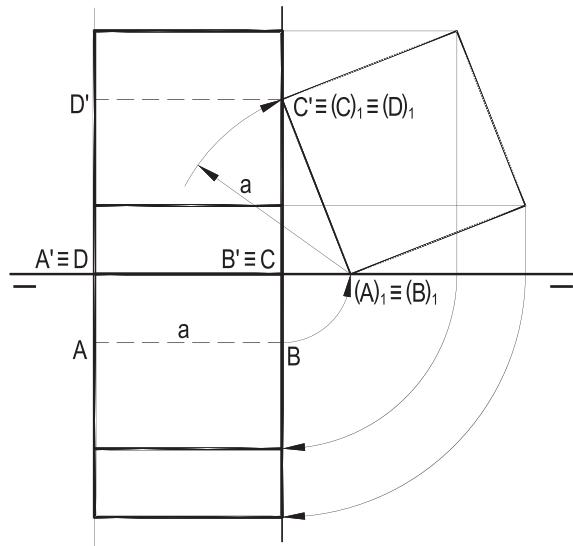


Figura 1112

**932 – Desenhar as projeções de um cubo do primeiro diedro e de aresta igual a 28 mm, sabendo que sua face (A)(B)(C)(D) pertence ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, e que a aresta (A)(B) é de perfil, (A) em ( $\pi$ ) e (B) em ( $\pi'$ ).**

Resolução: A vista lateral de uma reta ( $V(H)$ ) de perfil de ( $\alpha$ ) permite a aplicação do valor estipulado 28 mm, proporcionando a aresta (A)(B) (Figura 1113).

Rebatido ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) fica imediato construir, em V.G., a face (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub>, tanto quanto alcá-la. As perpendiculares a ( $\alpha$ ) por esses vértices dão corpo ao cubo e a rotação da aresta de (A), tornando (A)(J) horizontal, permite a determinação do primeiro vértice – (R) – da face oposta e, com paralelas, completar a épura.

**933 – Construir as projeções do octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S), que tem seus vértices (A), (B), (C) e (D) no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, com a aresta (A)(B) horizontal de menor cota, (A) com abscissa menor que (B), dadas as projeções de (J).**

Resolução: A perpendicular de (J) a ( $\alpha$ ) dá, por seu traço (O) em ( $\alpha$ ), o centro do octaedro e, por rotação que faz (J)(O) horizontal, o raio R do sólido, com o qual, rebatido ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), consegue-se construir o quadrado (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub>, que, alçado, proporciona os vértices que faltavam, já que (S) é o simétrico de (J) em relação a (O) (Figura 1114).

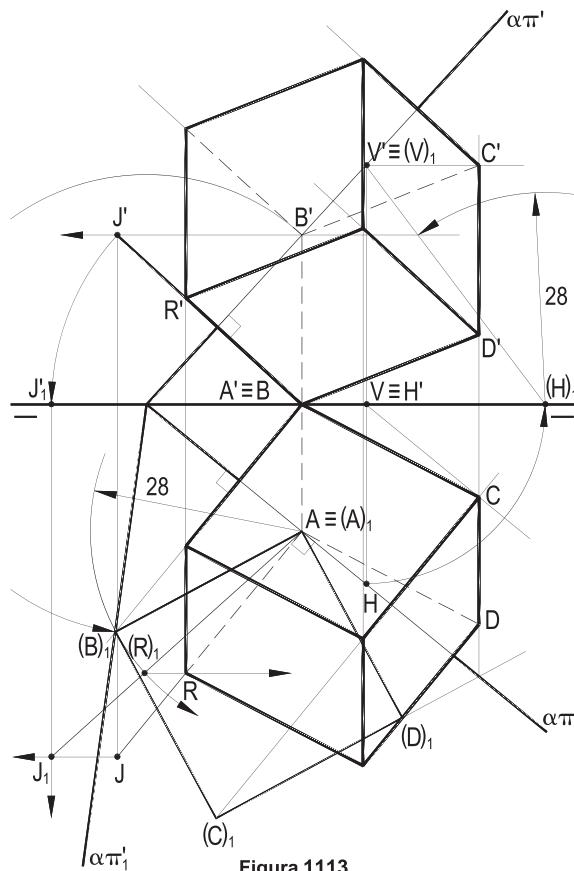


Figura 1113

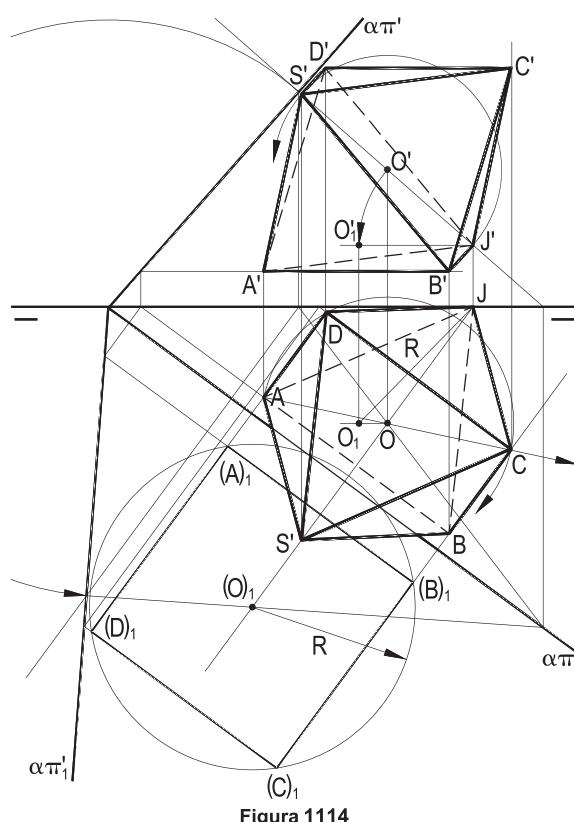


Figura 1114

**934 – Os pontos (A) e (T) são os extremos de uma diagonal vertical de um cubo situado inteiramente no primeiro diedro, cuja épura pede-se construir, dadas as projeções de (A), sabendo que  $(A)(T) = 39$  mm e que uma segunda diagonal (B)(U) do cubo é paralela ao plano transparente ( $\gamma$ ), dado por seus traços. (R) é o vértice de menor abscissa, com cota inferior a de (C).**

Resolução: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 111.19) que a projeção horizontal de um cubo que tenha uma diagonal vertical tem por contorno um hexágono regular, cujo centro é a projeção dessa diagonal (Figura 1115) e cujo raio é igual à altura do triângulo retângulo de hipotenusa igual à diagonal, traçada por um de seus pontos terços.

Assim, marcado o vértice (T) e construído o triângulo retângulo  $\bar{A}\bar{B}\bar{T}$  conforme acima detalhado (Figura 1116), obtém-se a V.G. r do raio do círculo circunscrito ao hexágono regular, contorno da projeção horizontal do cubo pedido.

Por ter que ser paralela ao plano vertical ( $\gamma$ ), dado, a diagonal (B)(U) deve ter sua projeção BU paralela a  $\gamma\pi'$ , o que define a posição do hexágono (Figura 1116). Para a projeção vertical, basta lembrar que esses seis vértices do cubo são os vértices de dois triângulos equiláteros cruzados (B)(D)(R) e (S)(U)(C), situados em planos horizontais pertencentes aos pontos terços da diagonal (A)(T) (Figura 1116). A ordem da nominação dos vértices foi arbitrada.

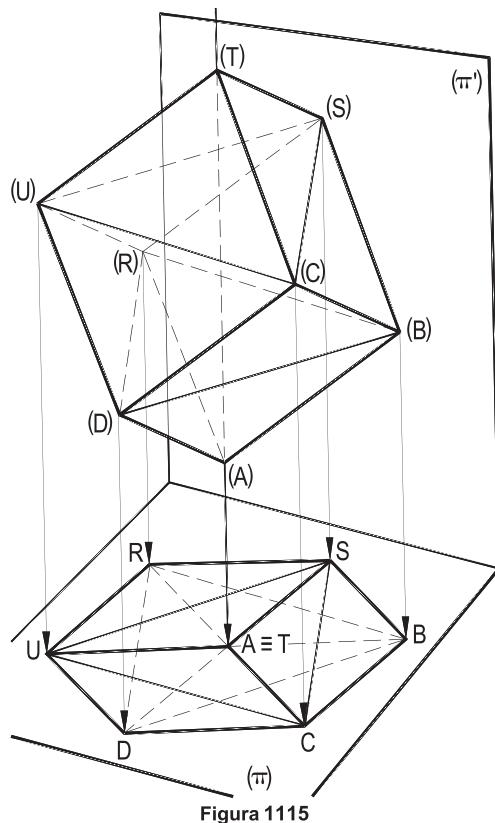


Figura 1115

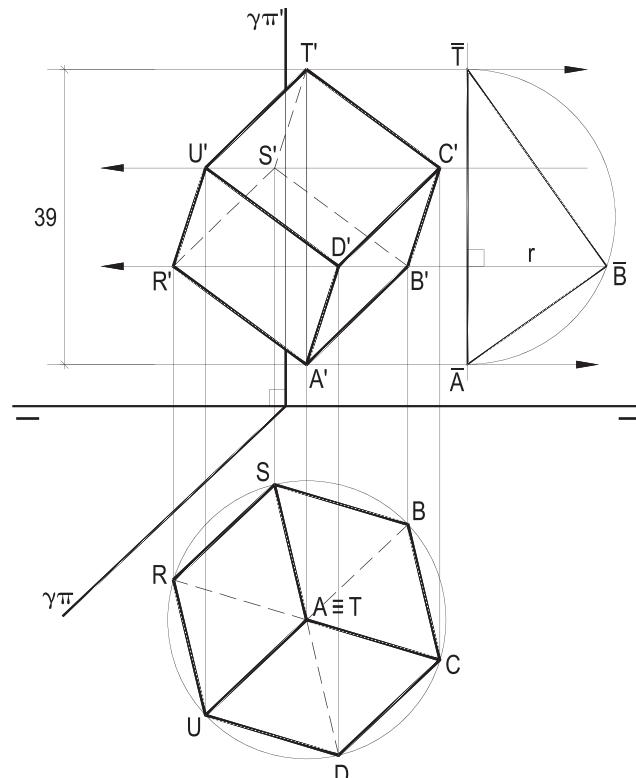


Figura 1116

**935 – Desenhar a épura do prisma hexagonal regular do primeiro diedro, assente por uma base no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo que todas as suas arestas medem 16 mm, que as bases têm lados frontais e que a que pertence a ( $\alpha$ ) tem por centro o ponto ( $I$ )  $\equiv (\pi''\beta_{13})$ .**

Resolução: Imediata a obtenção do ponto ( $I$ ), interseção de ( $\alpha$ ), ( $\pi''$ ) e ( $\beta_{13}$ ) e, com o rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), a construção da V.G. da primeira base do prisma (Figura 1117). Também simples a construção das arestas laterais, todas frontais, por serem perpendiculares ao plano de topo dessa base.

**936 – Um prisma pentagonal regular, pertencente ao primeiro diedro, tem sua base inferior ( $A(B)(C)(D)(E)$  apoiada pelo lado ( $A(B)$  em ( $\pi$ ) e pelo vértice ( $D$ ) em ( $\pi'$ ).**

**Dada a projeção horizontal do vértice ( $A$ ) e sabendo que ( $A(B)$  é paralela a ( $\pi'$ ), que as arestas básicas medem 25 mm e que as laterais medem 22 mm, pede-se construir as projeções do prisma.**

Resolução: Por ser fronto-horizontal, a aresta ( $A(B)$ , uma vista lateral, com o apoio da construção, em V.G., da base ( $A(B)(C)(D)(E)$ , resolve a questão, pelos transportes das distâncias de ( $D$ ) ao lado ( $A(B)$  e entre as paralelas ( $A(B)$  e ( $C)(E)$ .

Para a segunda base, bastou obter um vértice – ( $U$ ), na Figura 1118 – e trabalhar com paralelas, na épura.

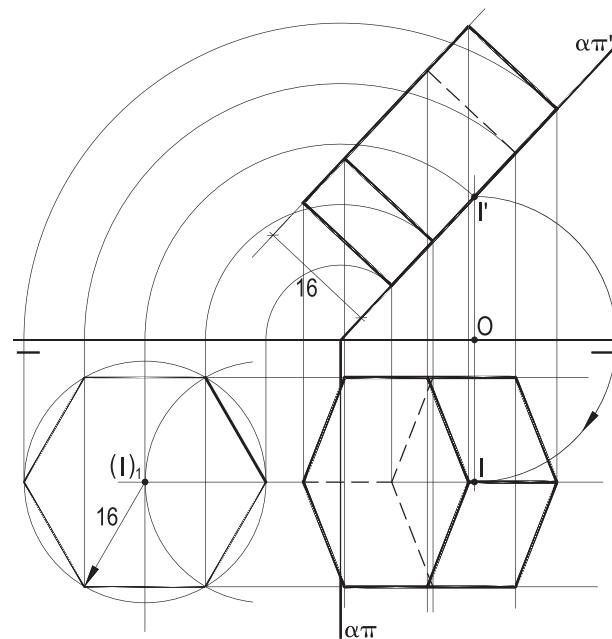


Figura 1117

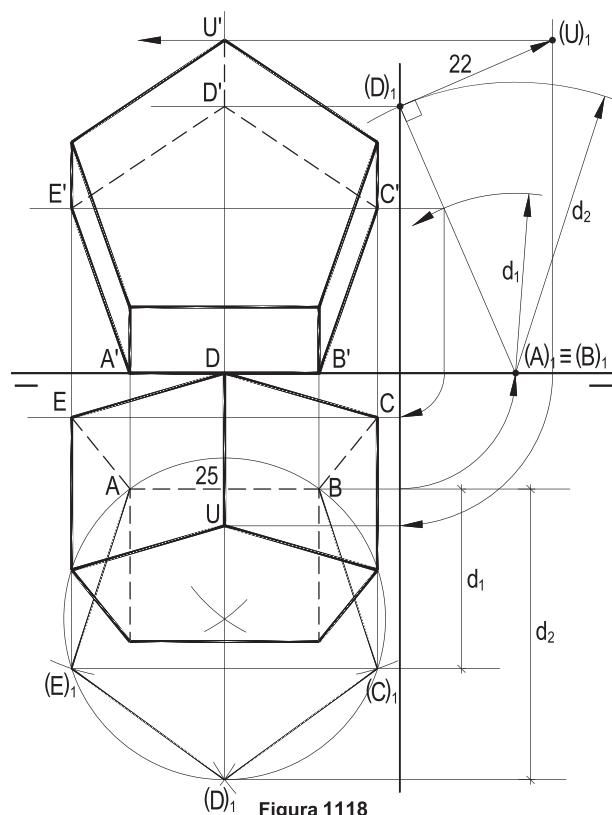


Figura 1118

**937 – Construir as projeções da pirâmide regular  $(V)-(A)(B)(C)(D)$ , que tenha a base em  $(\beta_{13})$  e o vértice  $(V)$  em  $(\pi')$ , dadas as projeções verticais dos vértices  $(A)$  e  $(B)$ , sabendo que a pirâmide se situa no primeiro diedro, considerando  $(\beta_{13})$  transparente.**

Resolução: Rebatido  $(\beta_{13})$  sobre  $(\pi)$ , constrói-se a base em V.G., que é alçada com o auxílio das retas suportes dos lados  $(A)(B)$  e  $(A)(D)$  e com paralelas.

Marcado o centro  $(O)$  da base, a altura  $(O)(V)$  do sólido, perpendicular que tem que ser a  $(\beta_{13})$ , é de perfil, com projeções  $OV$  e  $O'V'$  iguais, e com mesmos sentidos (*Geometria Descritiva*, número 76).

**938 – Desenhar as projeções da pirâmide hexagonal regular, do primeiro diedro cujo vértice  $(V)$  pertence a  $(\pi'')$ , sabendo que a aresta  $(A)(B)$ , dada por suas projeções, é de maior declive do plano da base do sólido.**

Resolução: Obtidos os traços do plano  $(\alpha)$  da base, seu rebatimento proporciona, de imediato, sua construção em V.G., com alçado simples, aproveitando o paralelismo de lados e diagonais (Figura 1120).

A perpendicular a  $(\alpha)$  pelo centro  $(O)$  da base traz  $(V)$ , na abscissa zero.

Os traços de  $(\alpha)$  foram apresentados com linhas contínuas, mas finas, já que o plano não foi dado.

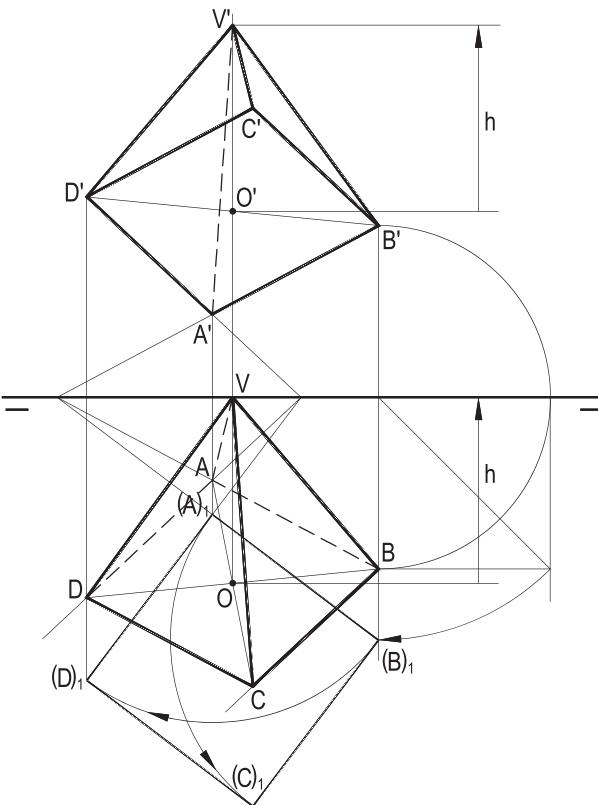


Figura 1119

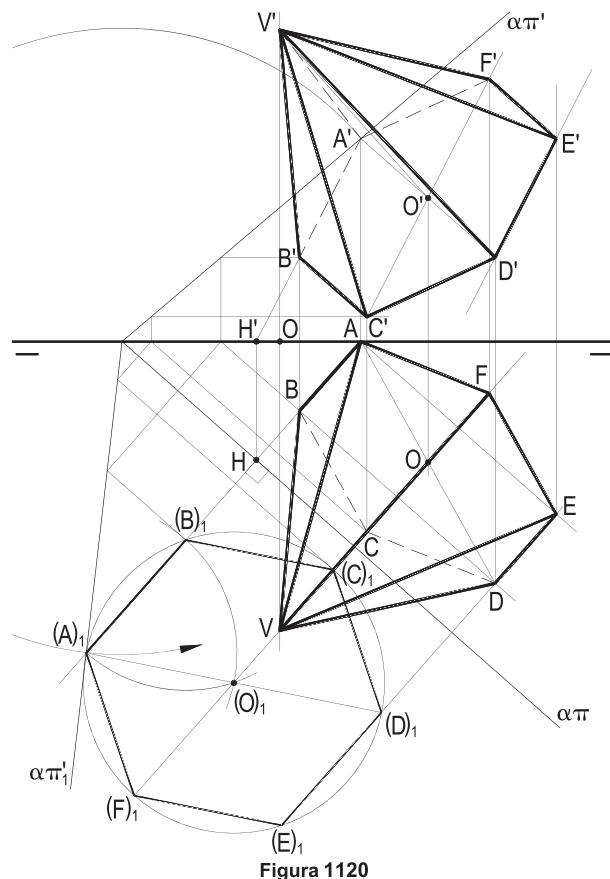


Figura 1120

**939 – Desenhar as projeções da pirâmide (J)–(A)(B)(C), dadas as projeções do vértice (J) e os traços do plano ( $\alpha$ ), da base (A)(B)(C), sabendo que as três arestas que chegam ao vértice (A) formam um triedro trirretângulo, que as arestas (J)(A), (A)(B) e (A)(C) são iguais, (B) em ( $\pi$ ) e que o sólido não é cortado pelos planos de projeção.**

Resolução: Sendo trirretângulo o triedro em (A), a aresta (J)(A) tem que ser perpendicular ao plano ( $\alpha$ ), da base da pirâmide.

Assim, obtido (A), traço, em ( $\alpha$ ), da perpendicular por (J) a esse plano e o valor a da aresta (J)(A), com a rotação que dá  $AJ_1 = a$ , no rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) temos  $(B)_1 \equiv B$  em  $\alpha\pi$ , com uma segunda posição, indicada pelo número 2, que, afinal, não serve, para manter o sólido no primeiro diedro.

O alçamento de  $(C)_1$  se fez com a reta (A)(C) (Figura 1121).

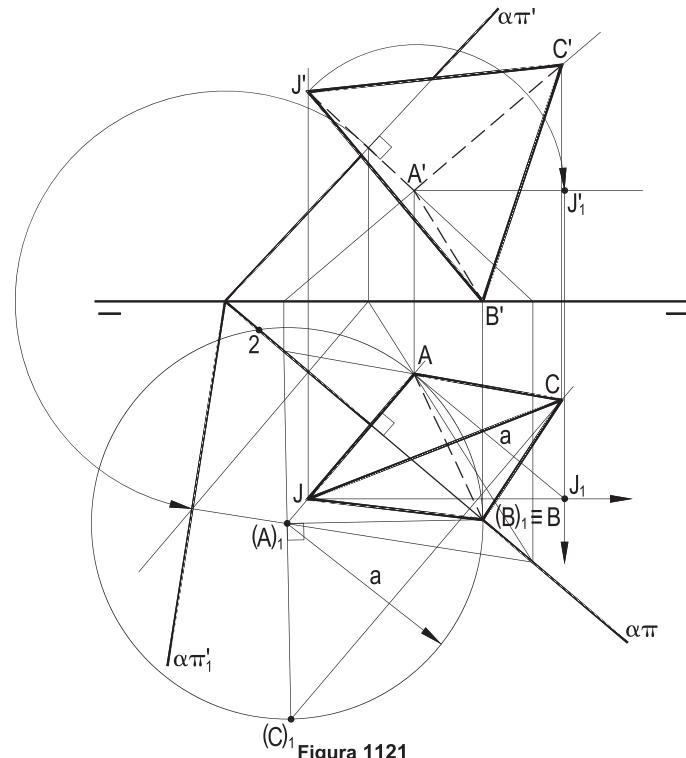


Figura 1121

**940 – Construir as projeções do cubo que tem uma face no plano ( $\alpha$ ), outra no plano ( $\beta$ ), outra em ( $\pi$ ) e uma aresta no plano ( $\gamma$ ), restando inteiramente no primeiro diedro, dados os traços de ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ).**

Resolução: Com uma face no plano horizontal ( $\alpha$ ) e outra em ( $\pi$ ), fica definido o valor a da aresta do cubo.

E, tendo uma aresta em ( $\gamma$ ), esta há de pertencer, dado que ( $\gamma$ ) e ( $\beta$ ) são planos verticais, à interseção desses dois planos.

Enfim, para restar no primeiro diedro, o cubo só pode ter uma posição (Figura 1122), à frente de ( $\beta$ ) e de ( $\gamma$ ).

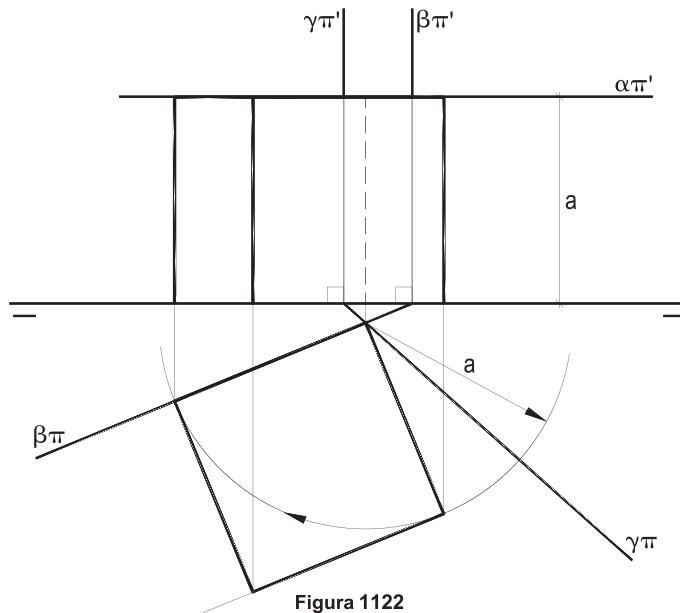


Figura 1122

**941** – Um tronco de prisma oblíquo tem uma base em  $(\pi)$ , outra no plano transparente  $(\alpha)$ , dado por seus traços, e se situa inteiramente no primeiro diedro.

Sabendo que a base inferior é um quadrado, do qual é dado, por sua projeção horizontal, o lado  $(A)(B)$  e que as arestas laterais do tronco formam  $45^\circ$  com  $(\pi)$  e  $30^\circ$  com  $(\pi')$ , pede-se construir as projeções do sólido.

Resolução: A construção da base inferior do tronco é imediata, em V.G., a partir do lado dado  $AB$ , assim como a da reta  $(r)$ , por um ponto arbitrado  $(J)$ , com as inclinações estipuladas (*Geometria Descritiva*, número 142), escolhida, das quatro possibilidades, a única que produz, no plano  $(\alpha)$ , um sólido inteiramente situado no primeiro diedro (Figura 1123), no espaço disponível para a épura.

A segunda base do tronco se consegue com a interseção da aresta lateral do vértice  $(C)$  com o plano  $(\alpha)$ , obtendo-se  $(\bar{C})$ , e com a afinidade existente entre as projeções horizontais das duas bases do tronco (Figura 1123), tendo por eixo o traço horizontal  $\alpha\pi'$ .

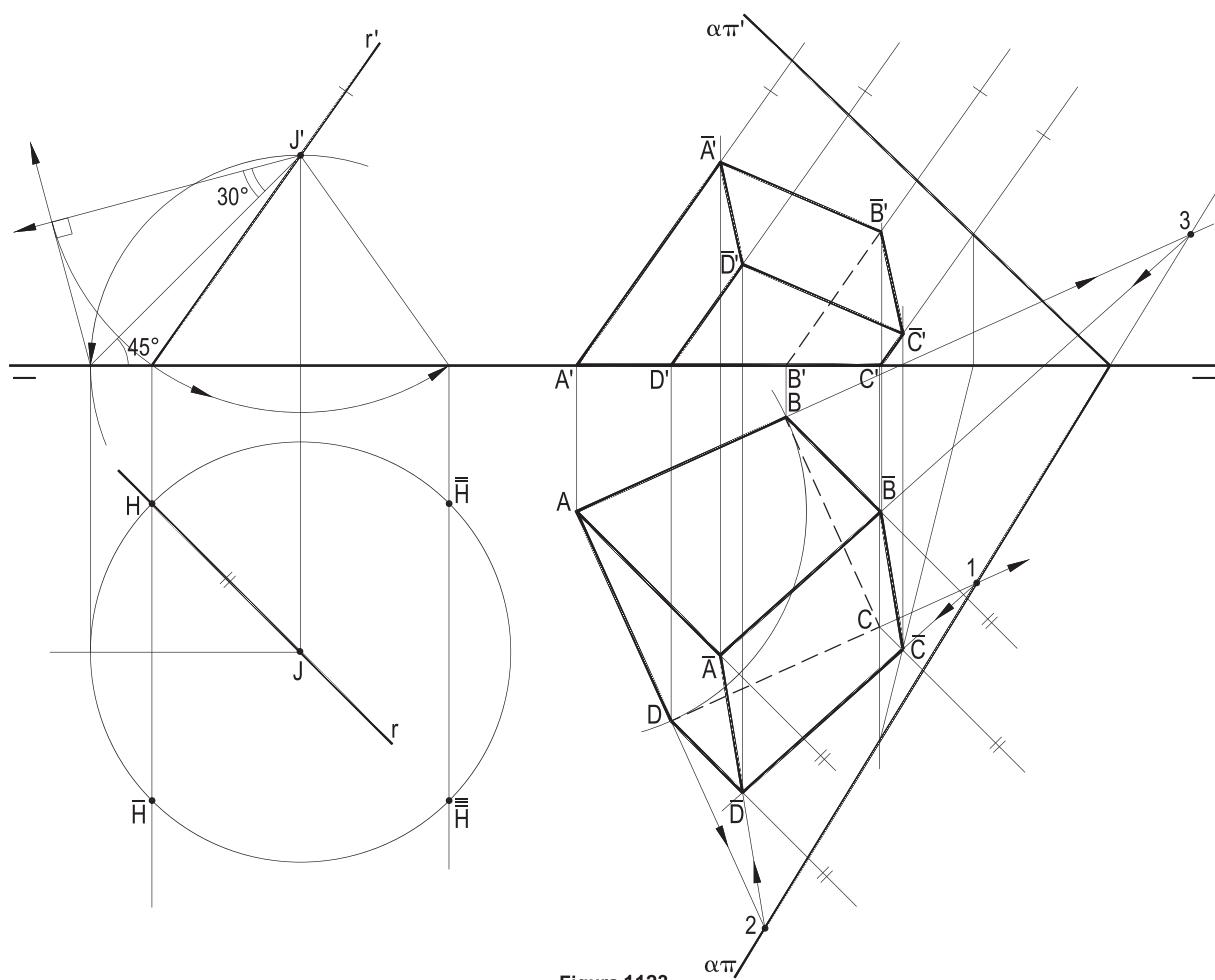
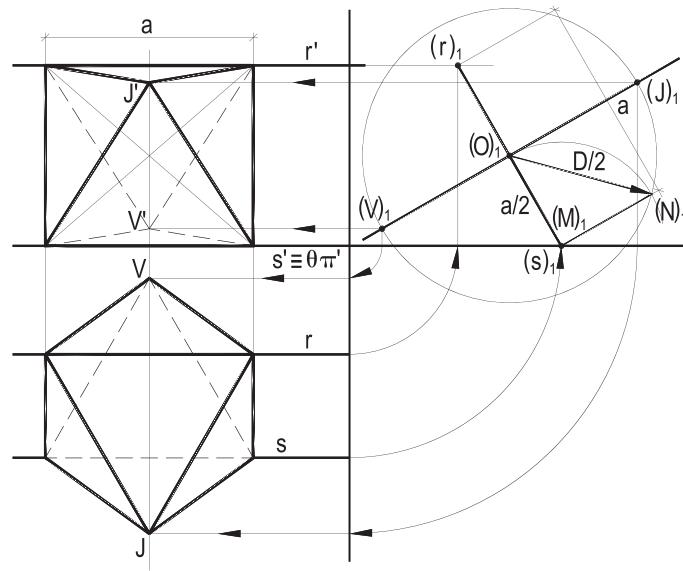


Figura 1123

**942** – Dadas, por suas projeções, as fronto-horizontais (r) e (s), sabendo que elas são suportes de duas arestas de um octaedro regular, desenhe as projeções do sólido.  
Arbitre a abscissa inicial.

Resolução: A inexistência de linha de terra propõe a utilização de um plano horizontal ( $\theta$ ), pertencente à reta (s), que funcione como referência. E, numa vista lateral, obtida a V.G. da aresta a do sólido, a construção do triângulo retângulo isósceles  $(O)_1(M)_1(N)_1$  traz o valor  $D/2$  da semidiagonal (Figura 1124) e, então, na vista lateral, a diagonal  $(J)_1(V)_1$  que, alçada, completa a épura, com paralelas.



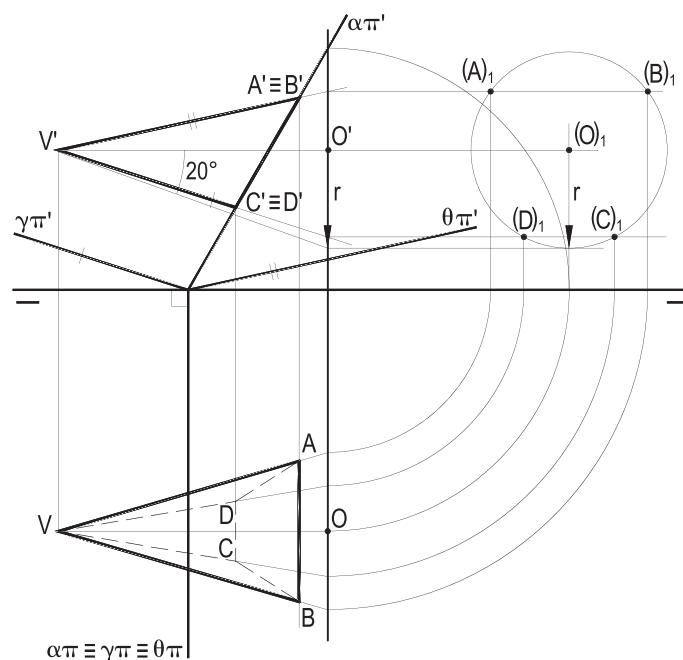
**Figura 1124**

**943** – Construir as projeções da pirâmide quadrangular (V)–(A)(B)(C)(D), que tem todas as suas arestas laterais inclinadas de  $20^\circ$  em relação à linha de terra, dadas as projeções do vértice (V) e os traços do plano ( $\alpha$ ) de sua base. Sabe-se que as arestas laterais são paralelas duas ao plano ( $\gamma$ ) e duas ao plano ( $\theta$ ), também dados por seus traços.

Resolução: As arestas laterais hão de pertencer a geratrizes de um cone de revolução de vértice (V), eixo paralelo à linha de terra e semiângulo no vértice igual a  $20^\circ$ . A construção das arestas da pirâmide se faz com o auxílio de uma vista lateral (*Geometria Descritiva*, número 136) e com as projeções verticais respectivamente paralelas a  $\gamma\pi'$  e a  $\theta\pi'$  (Figura 1125).

A base se obtém com facilidade, por ser ( $\alpha$ ) de topo.

**944 – Desenhar as projeções da pirâmide irregular (V)–(A)(B)(C)(D), sabendo que sua base é um retângulo perten-**



**Figura 1125**

cente a um plano paralelo à linha de terra, a aresta (A)(B) na reta (r) e os vértices (D) em ( $\pi''$ ) e (C) em ( $\pi$ ), dadas as projeções de (r) e de (V)

Resolução: Os traços de (r) trazem os traços do plano ( $\alpha$ ) da base da pirâmide, que, rebatido sobre ( $\pi$ ), permite, facilmente, construir o retângulo (A)(B)(C)(D), de alçado bem simples (Figura 1126).

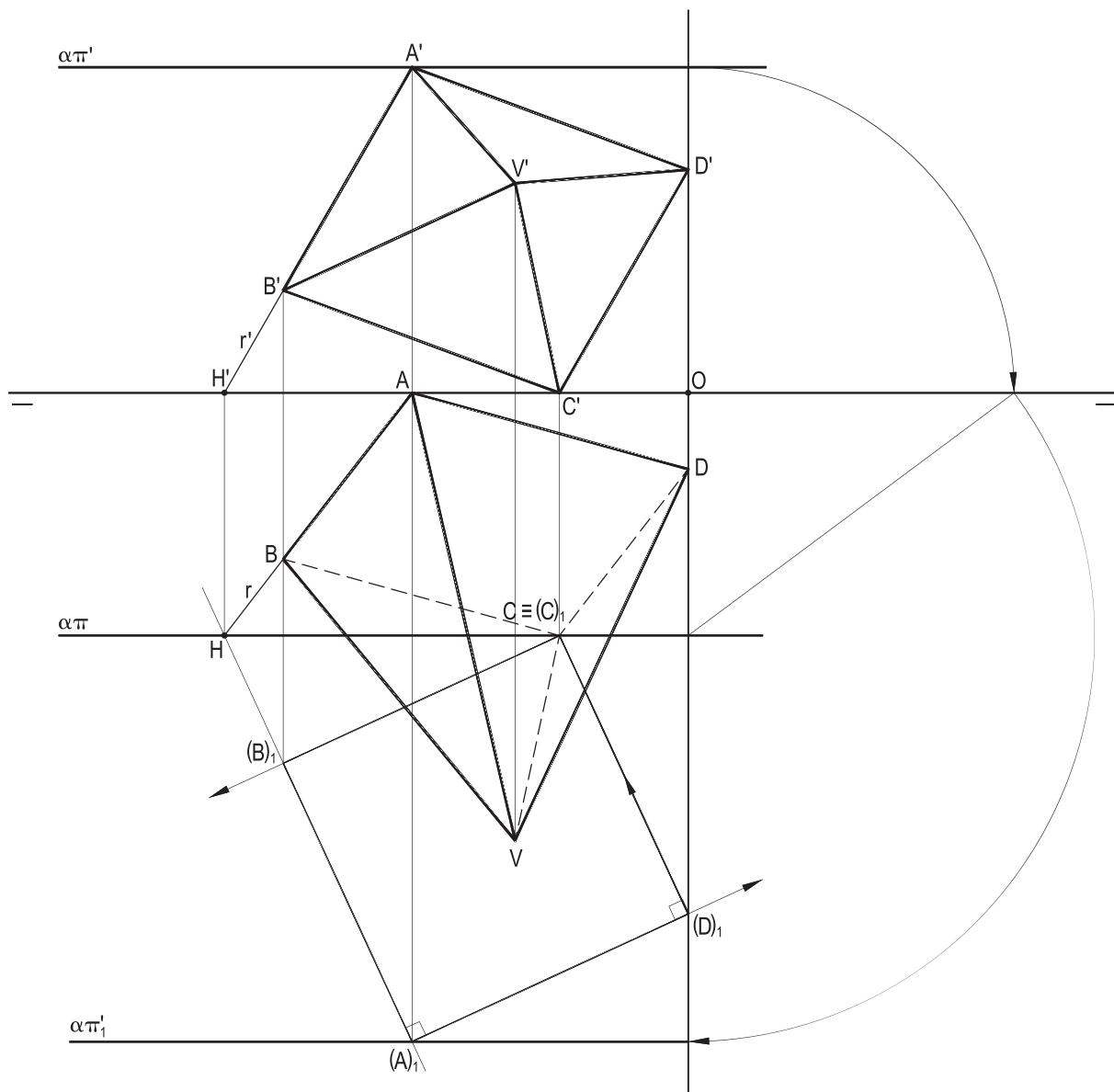


Figura 1126

**945** – Um triedro trirretângulo de vértice (J) é seccionado pelo plano horizontal ( $\theta$ ) produzindo o triângulo (A)(B)(C). Dados o traço  $\theta\pi'$  e as projeções A, B e C, pede-se representar, por suas projeções, o triedro, escolhendo a solução que corresponda, em épura, à maior distância entre as projeções J' e J.

Resolução: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 76) que a projeção do vértice de um triedro trirretângulo sobre um plano a ele secante é o ortocentro do triângulo seção, assim produzido.

Desse modo, por ser ( $\theta$ ) horizontal, o ortocentro do triângulo ABC é a própria projeção J e, com o rebatimento da face (J)(A)(B) sobre ( $\theta$ ), obtém-se a V.G.  $(J)_1A$  do segmento (J)(A) e, com ela, a construção do triângulo retângulo  $JA\bar{J}$  que proporciona a cota h de (J) em relação a ( $\theta$ ) (Figura 1127).

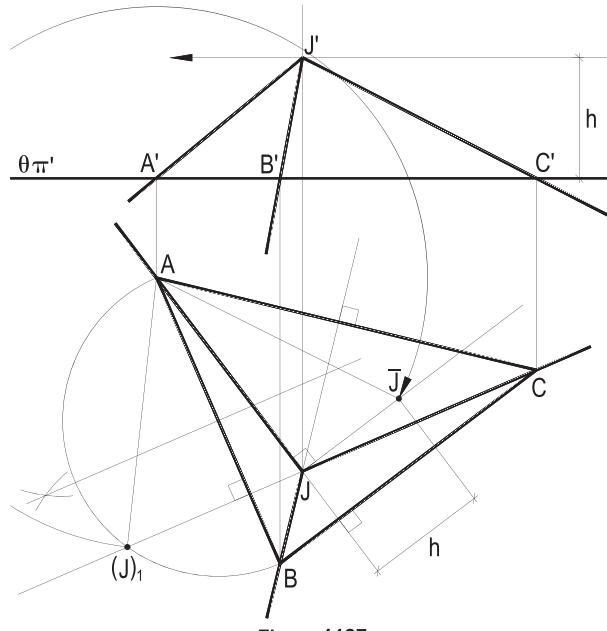


Figura 1127

**946** – Dadas as projeções dos pontos (A) e (B), complete o hexágono regular (A)(B)(C)(D)(E)(F), de ( $\pi$ ), não cortado por ( $\pi''$ ), e levante, por (C) e por (F), os segmentos verticais (C)( $\bar{C}$ ) e (F)( $\bar{F}$ ) iguais a 15 mm, para cima de ( $\pi$ ). Levante, ainda, verticais por (D) e por (E), até que cortem o plano formado por (A), (B) e ( $\bar{C}$ ), obtendo os pontos ( $\bar{D}$ ) e ( $\bar{E}$ ), de modo a criar o tronco de prisma de bases (A)(B)(C)(D)(E)(F) e (A)(B)( $\bar{C}$ )( $\bar{D}$ )( $\bar{E}$ )( $\bar{F}$ ).

Pede-se apresentar as projeções desse tronco de prisma.

Resolução: Completando o hexágono ABCDEF, V.G. da primeira base do tronco, imediata, por pertencer a ( $\pi$ ), conforme os dados, fica simples obter os vértices ( $\bar{C}$ ) e ( $\bar{F}$ ), assim como os dois últimos ( $\bar{D}$ ) e ( $\bar{E}$ ), por terem que ter cotas iguais ao dobro das dos dois anteriores (Figura 1128), pertencendo a um plano paralelo à linha de terra.

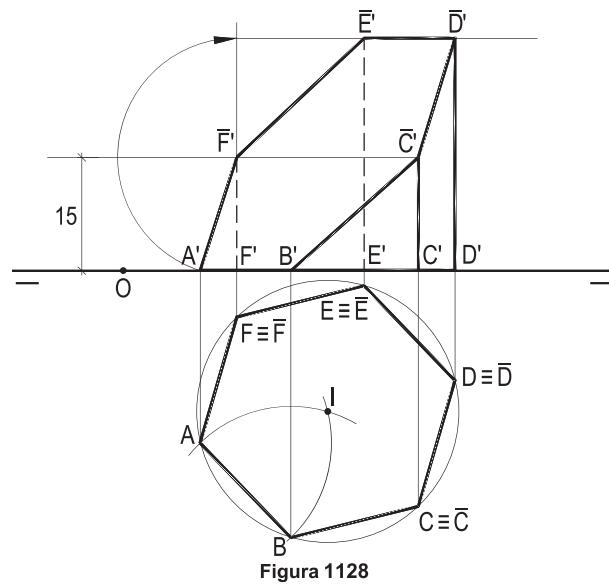


Figura 1128

**947 - De um cubo (A)(B)(C)(D)-(R)(S)(T)(U) são dados, por suas projeções, os pontos (E), (F) e (G), que pertencem, respectivamente, às arestas (R)(A), (R)(S) e (R)(U). Pede-se construir as projeções do cubo, sabendo que (R) tem abscissa maior que as de (E), (F) e (G) e que (A) pertence a ( $\pi'$ ).**

Resolução: Como (E), (F) e (G) pertencem a um plano perfil, opera-se numa vista lateral, com esse triângulo, para definir a posição do vértice (R), tal como no problema 945, anterior.

Obtidas as retas (R)(E), (R)(F) e (R)(G), o traço vertical da primeira dá o vértice (A) e, com a V.G. a da aresta do sólido, determinam-se os vértices (U) e (S), com os rebatimentos laterais RKK̄ e RLL̄, para completar, com paralelas, suas projeções (Figura 1129).

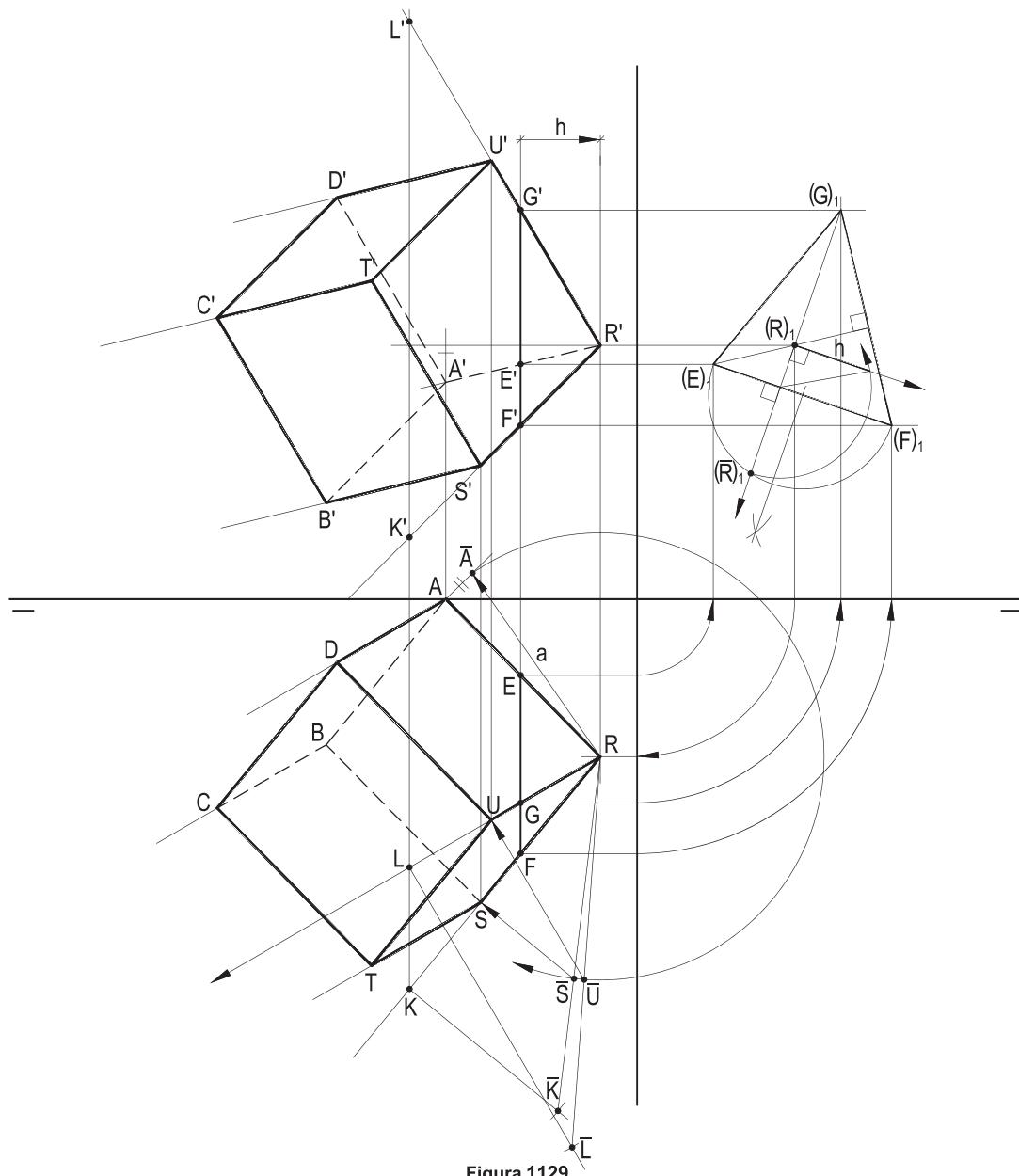


Figura 1129

**948 – Dadas as projeções dos pontos (B) e (C), pede-se construir as projeções do prisma reto (A)(B)(C)–(R)(S)(T), do primeiro diedro, sabendo que o vértice (A) pertence à linha de terra, com abscissa menor que a de (B)(C), que o ângulo ( $\hat{A}$ ) da base (A)(B)(C) mede  $45^\circ$  e que a altura do sólido é igual à aresta (B)(C).**

Resolução: Para construir a V.G. da face (A)(B)(C), basta utilizar uma vista lateral, com o arco capaz de  $45^\circ$ , que dá o triângulo ( $\bar{A}$ )(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub> e, então, a V.G. de (A)(B) e, logo, o vértice (A).

E, com uma mudança que torne frontal a reta suporte da aresta lateral (C)(1), aplica-se a V.G. da altura  $h$  do sólido, igual a (B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub>, completando-se a épura com paralelas (Figura 1130).

**949 – Desenhar as projeções de um ortoedro, situado no primeiro diedro e apoiado por uma face quadrada no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, a partir das projeções verticais dos vértices (A) e (B) dessa face, sabendo que a aresta lateral do vértice (A) tem seu outro extremo no plano horizontal ( $\gamma$ ), dado por seu traço  $\gamma\pi'$ .**

Resolução: Marcados (A) e (B) em ( $\alpha$ ), com o rebatimento desse plano sobre ( $\pi$ ), constrói-se a V.G. da face quadrada (A)(B)(C)(D) e, por seus vértices, traçam-se as perpendiculares a ( $\alpha$ ), que dão corpo ao sólido, localizando o vértice ( $\bar{A}$ ) da segunda base em ( $\gamma$ ), completando-se o sólido com paralelas (Figura 1131).

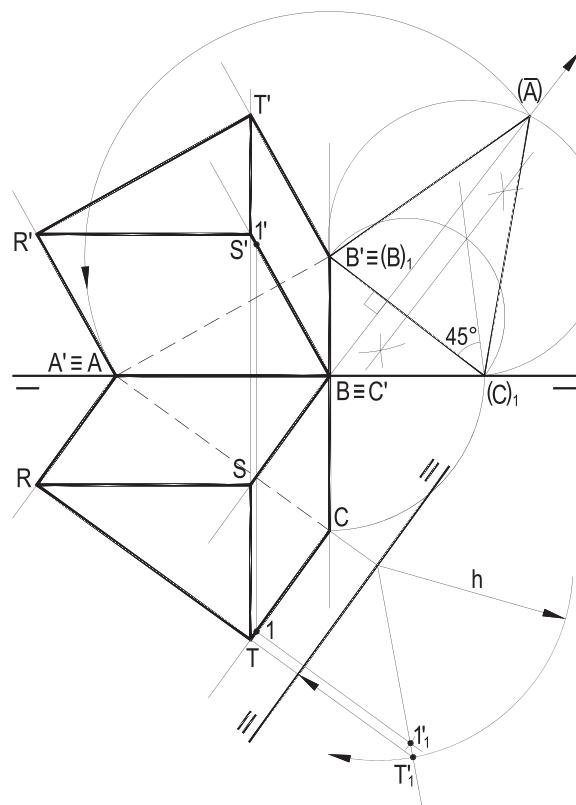


Figura 1130

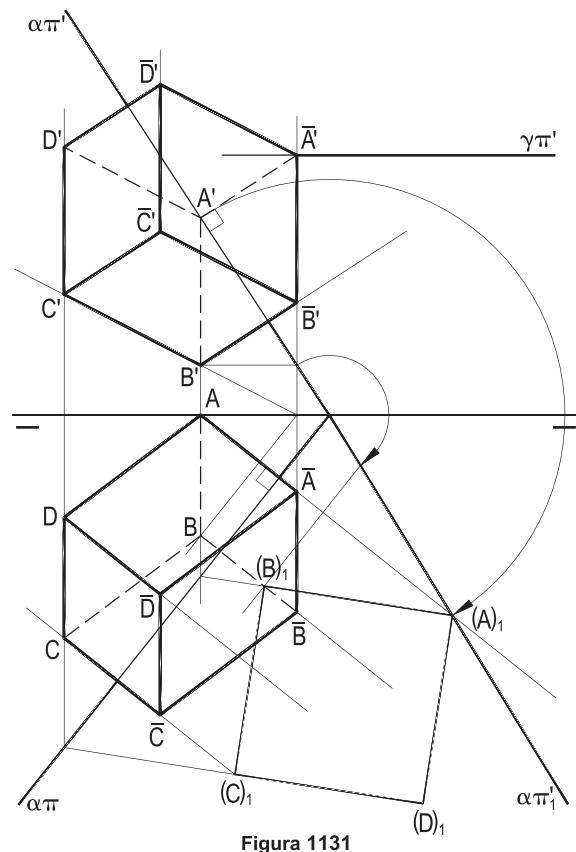


Figura 1131

**950 – Desenhar as projeções do tetraedro  $(J)-(A)(B)(C)$ , apoiado pela base  $(A)(B)(C)$  em  $(\pi)$  e situado no primeiro diedro, sabendo que a aresta  $(J)(A)$  é perpendicular à base e que o ângulo  $(B)(\hat{J})(C)$  mede  $45^\circ$ . Dadas as projeções A, B e C.**

Resolução: Com o rebatimento da face  $(J)(B)(C)$  sobre  $(\pi)$ , em torno de  $(B)(C)$ , a interseção da perpendicular por J a BC com o arco capaz de  $60^\circ$  em relação a BC proporciona  $(J)_1$  e, com a construção do triângulo retângulo  $JH\bar{J}$ , rebatimento sobre  $(\pi)$  da seção  $(J)(A)(H)$ , vem a cota h do vértice (J) (Figura 1132).

Observe-se que, por ser vertical a aresta  $(J)(A)$ , a projeção horizontal do sólido reduz-se a um triângulo.

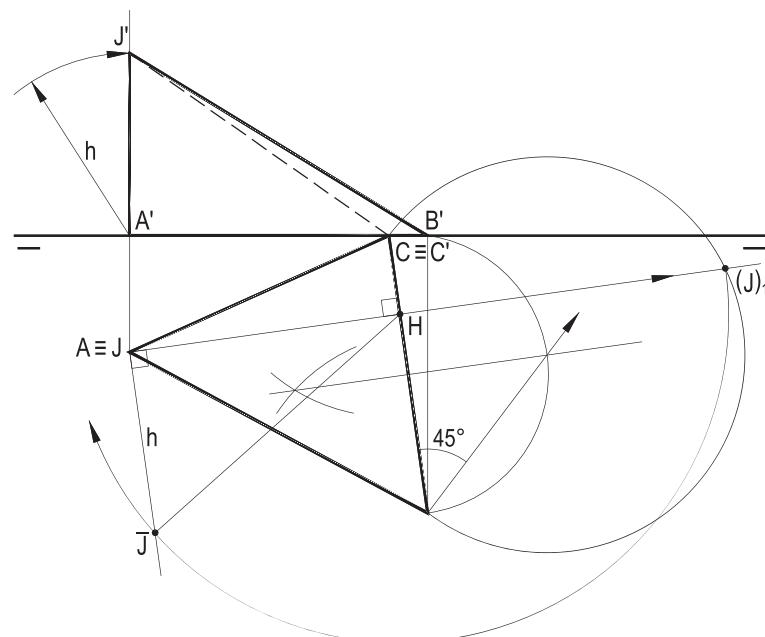


Figura 1132

**951 – Representar, por suas projeções, a pirâmide hexagonal regular  $(V)-(A)(B)(C)(D)(E)(F)$ , situada no primeiro diedro e apoiada por sua aresta  $(A)(B)$ , dada por sua projeção horizontal, em  $(\pi)$ , sabendo que o centro de sua base pertence a  $(\beta_{13})$  e que sua altura é igual ao diâmetro da base.**

Resolução: Conhecida a V.G. AB da aresta básica, obtém-se o valor a do apótema da base, com o qual, numa vista de perfil, determina-se a posição do centro  $(O)_1$  da base do sólido, valendo observar que há uma segunda posição, inutilizada pela pertinência da pirâmide ao primeiro diedro (Figura 1133).

A altura  $(O)_1(V)_1$  do sólido vem, em V.G., na vista lateral.

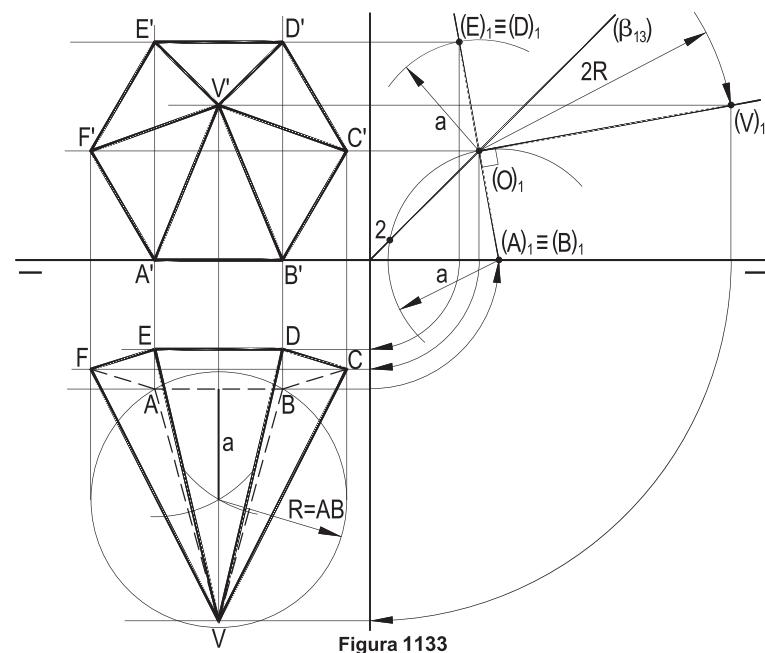


Figura 1133

**952 – Dados, por seus traços, o plano transparente ( $\alpha$ ) e, por suas projeções verticais, os pontos (A), (B), (C) e (D), de ( $\alpha$ ), considere o hexágono (A)(B)(C)(D)(E)(F), que tenha os lados opostos paralelos e, aos pares, iguais e construa o sólido formado pelo prisma reto de base (A)(B)(C)(D)(E)(F), situado acima de ( $\alpha$ ), com altura igual à aresta básica (B)(C) e por duas pirâmides iguais, com bases em cada uma das bases desse prisma, alturas traçadas pelo ponto (M), médio da diagonal (A)(D), sabendo que o vértice (V) da pirâmide situada abaixo de ( $\alpha$ ) tem abscissa nula.**

Resolução: Marcados os pontos dados em ( $\alpha$ ) e completado o hexágono (A)(B)(C)(D)(E)(F), constrói-se o prisma com perpendiculares, por esses seis vértices a ( $\alpha$ ), marcando, com uma mudança de ( $\pi'$ ), a V.G. BC de (B)(C) sobre a perpendicular (B)(P), obtendo o primeiro vértice ( $\bar{B}$ ) da segunda base do prisma, e, com paralelas, completando essa segunda base.

A obtenção dos vértices (V) e (J) das duas pirâmides é bem simples, pela pertinência de (V) a ( $\pi''$ ) e pela igualdade de suas alturas (Figura 1134), marcadas nas projeções horizontais  $MV \equiv NJ$ .

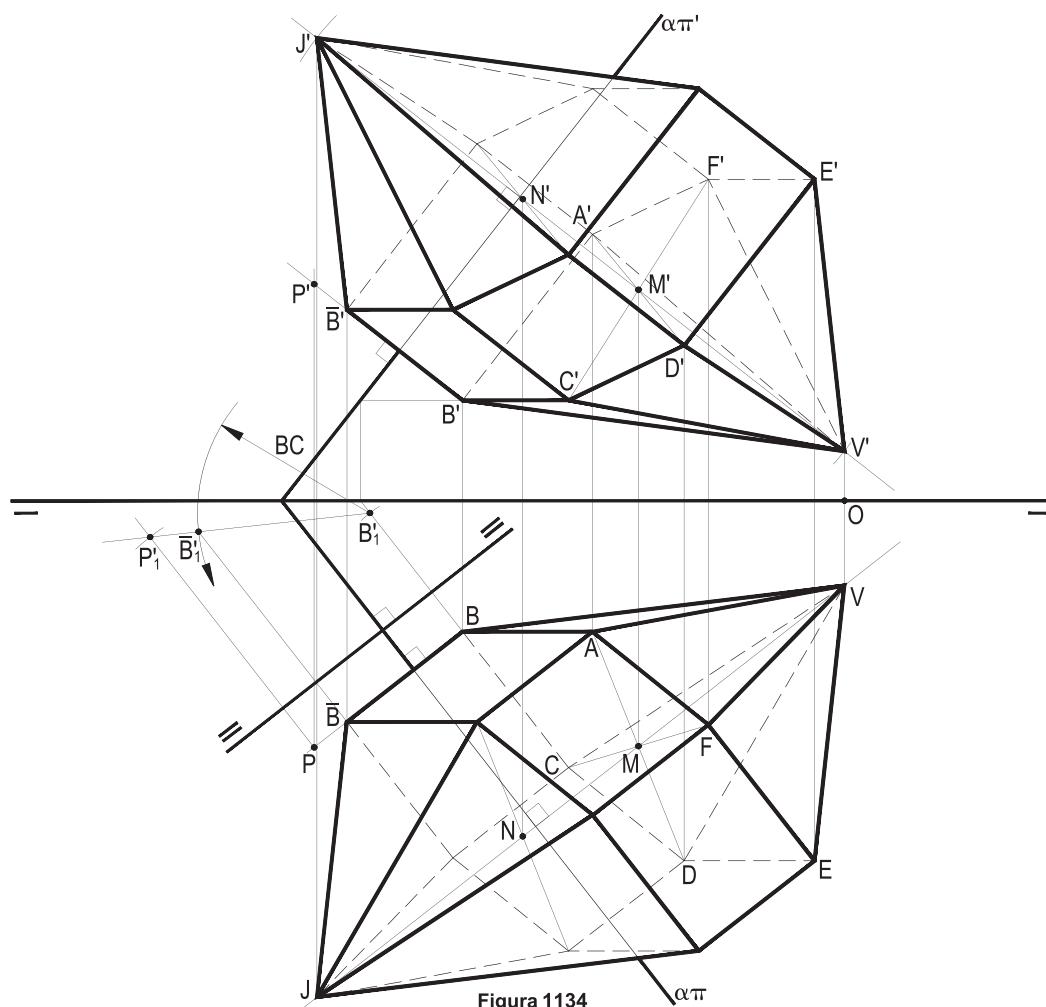


Figura 1134

# CAPÍTULO XIV

## SEÇÕES PLANAS EM POLIEDROS

Sabe-se (*Geometria Descritiva*, número 175) que, em relação a um poliedro, um plano pode ser exterior (Figura 1135), apoiado no sólido, por um vértice, por uma aresta ou por uma face (Figuras 1136 e 1137), ou atravessá-lo (Figura 1138), produzindo, então, um polígono, denominado seção plana no sólido.

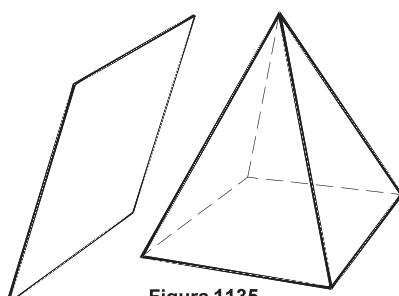


Figura 1135

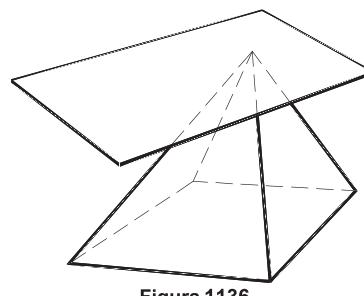


Figura 1136

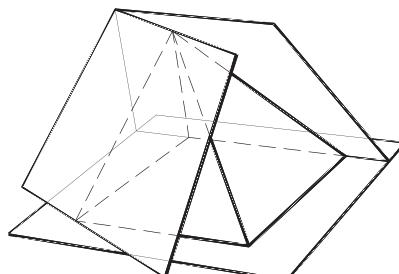


Figura 1137

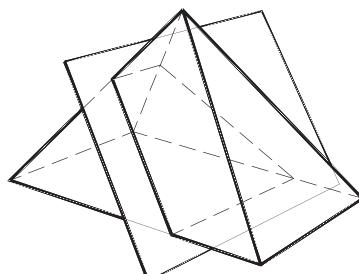


Figura 1138

Como estamos estudando apenas poliedros convexos, as seções planas neles hão de ser, sempre, polígonos convexos, por inexistirem diedros reentrantes. E, naturalmente, o procedimento espontâneo para a determinação dos vértices dessas seções decorre da obtenção das interseções de arestas do sólido com o plano secante, de maneira adequadamente ordenada, visto que nem todas as arestas interessarão a tal seção.

Outro processo cabível, e conveniente em determinadas ocasiões, é determinar interseções de planos de faces do poliedro com o plano secante, limitadas, naturalmente, aos segmentos situados entre as arestas de tais faces.

Em cada uma das épuras abaixo, são dados poliedros, por suas duas projeções e, por seus traços, planos ( $\alpha$ ), sempre projetantes.

Pede-se construir, em cada caso, as projeções da seção que ( $\alpha$ ) produz no poliedro. Considere ( $\alpha$ ) sempre transparente.

Resoluções: Sempre muito simples, aproveitando-se os cortes das projeções das arestas do sólido no traço de ( $\alpha$ ) no plano de projeção ao qual é perpendicular, caso a caso.

953

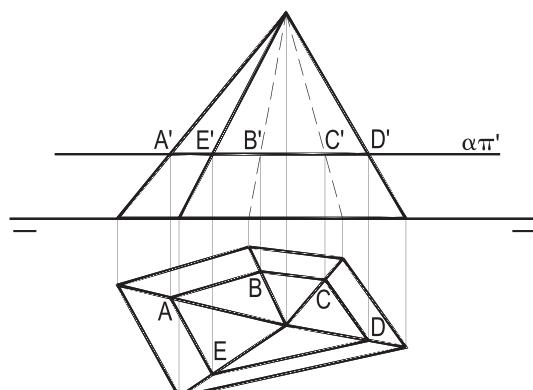


Figura 1139

954

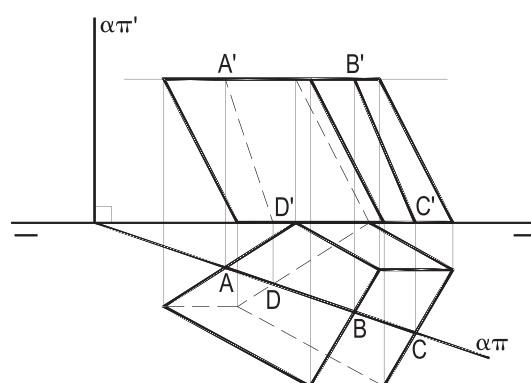


Figura 1140

955

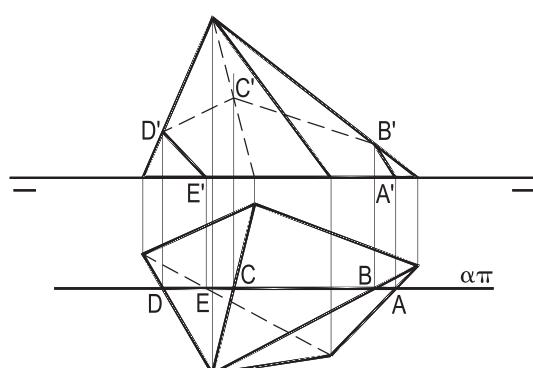


Figura 1141

956

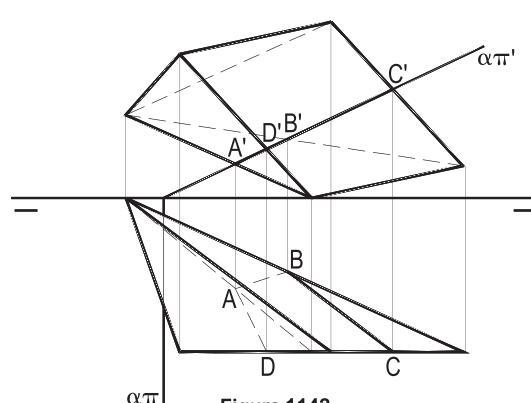


Figura 1142

957

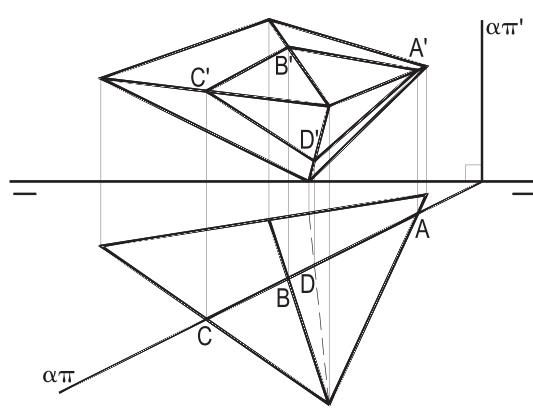


Figura 1143

958

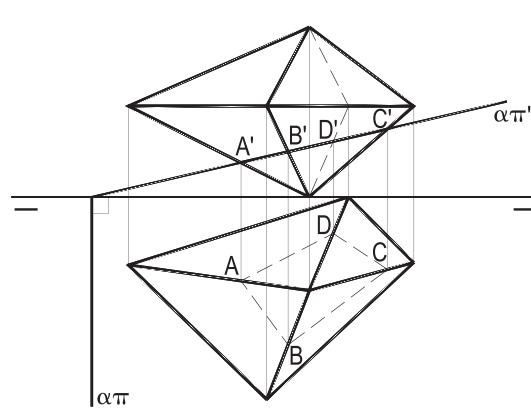


Figura 1144

Sabe-se também que, para planos secantes paralelos ou pertencentes à linha de terra, convém utilizar, como auxílio para a determinação dos vértices da seção, uma vista lateral (Figura 1145) e que, para planos secantes quaisquer, pode-se lançar mão de uma mudança de plano que o torne vertical, ou de topo (Figura 1146), retornando-se, assim, às condições antes detalhadas.

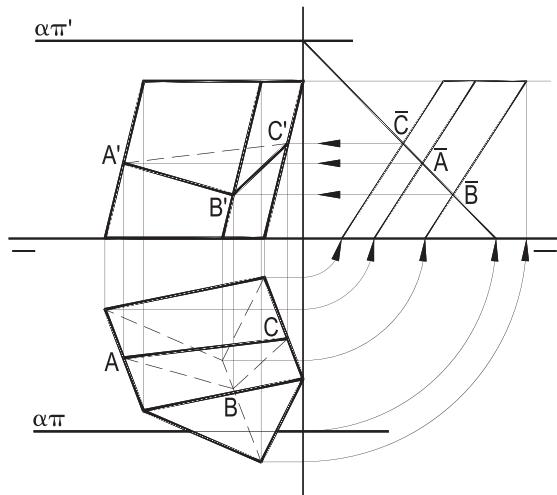


Figura 1145

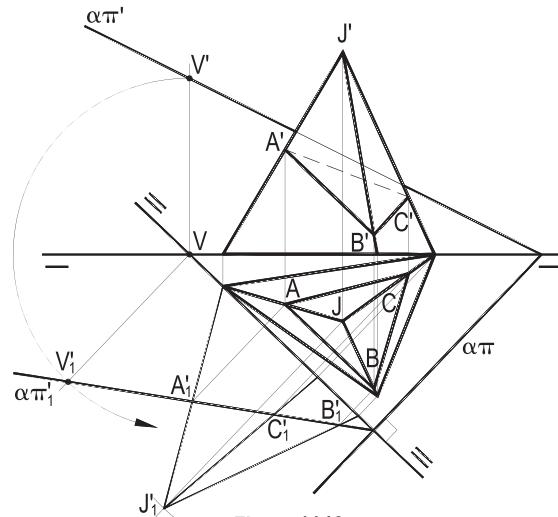


Figura 1146

Cabe observar a afinidade existente entre duas seções planas numa superfície prismática (Figura 1147) e a homologia entre duas seções numa superfície piramidal (Figura 1148), o que implica em que as retas suportes de dois lados correspondentes, um de cada seção, cortem-se sobre a interseção dos dois planos secantes considerados, pontos esses que são os comuns aos pares de planos secantes e cada plano face da superfície. Tais como (Figuras 1147 e 1148) o ponto (1) comum a (A)(B) e ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ ) e (2), comum a (B)(C) e ( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ).

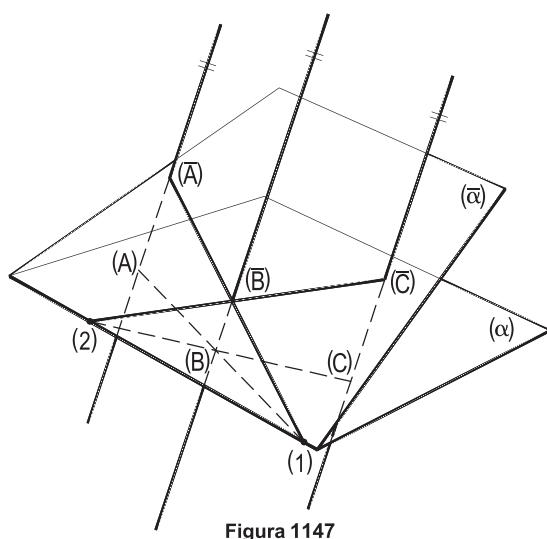


Figura 1147

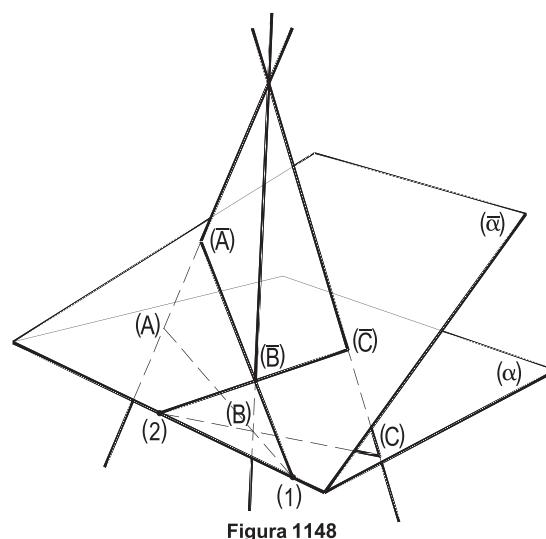


Figura 1148

Essa propriedade ganha especial conveniência quando se estuda a seção que um plano dado ( $\alpha$ ) provoca num poliedro assente por sua base em ( $\pi$ ), porque, então, é o traço  $\alpha\pi$  que funciona como eixo de convergência de pares correspondentes de arestas da base do sólido e de lados da seção criada, o que facilita, a partir de um primeiro vértice  $\bar{A}$  da seção, obter os demais (Figura 1149).

É claro que tudo se passa da mesma forma quando o poliedro tem uma face em ( $\pi'$ ), sendo, então, o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano secante o eixo de tais correspondências. A partir do vértice  $\bar{A}'$ , da seção, é possível completá-la (Figura 1150).

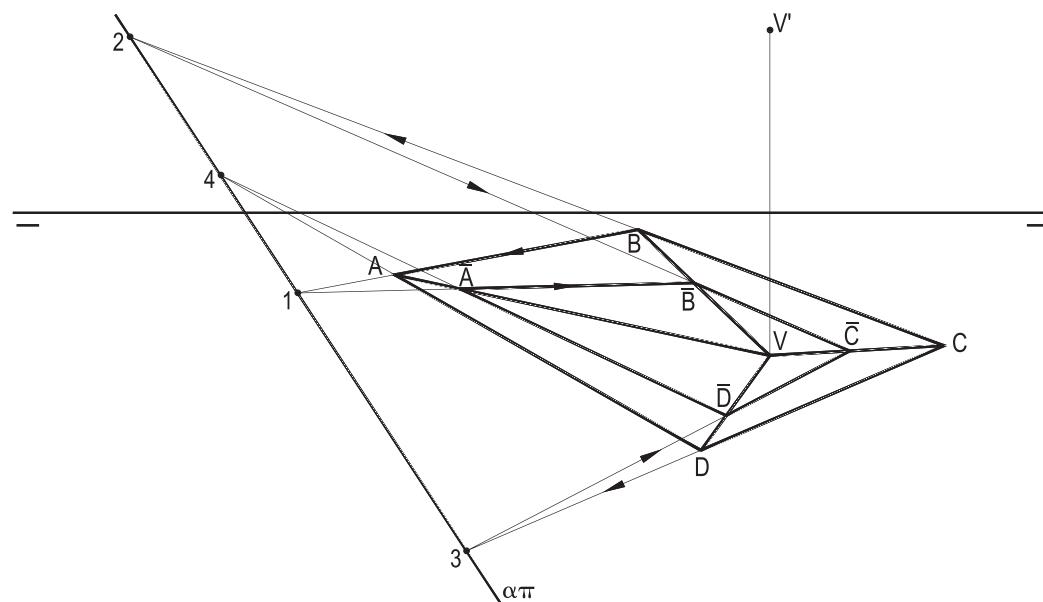


Figura 1149

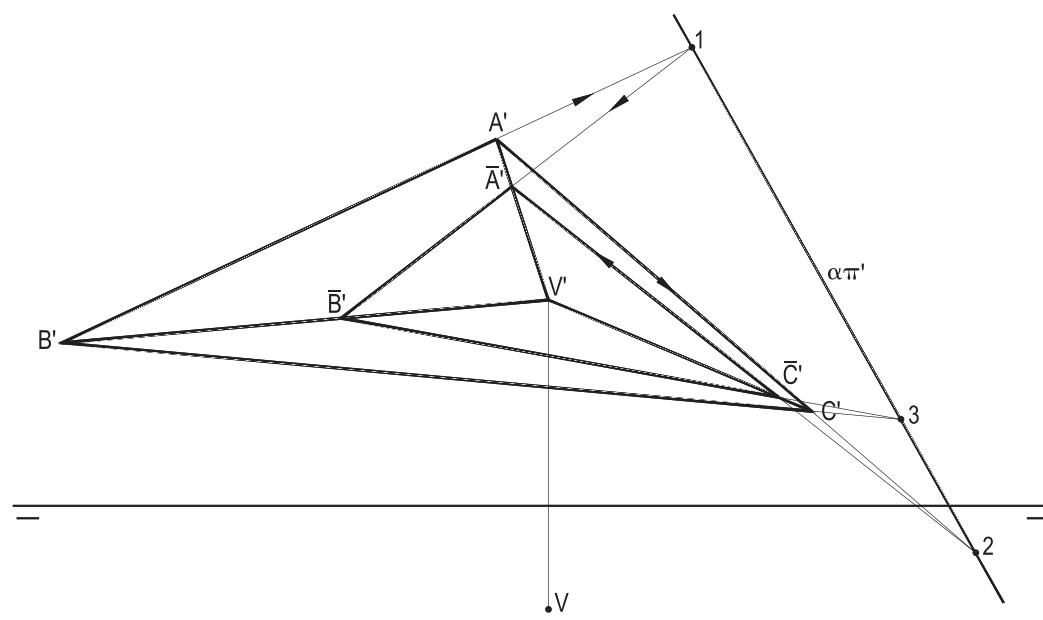


Figura 1150

Em cada um dos casos abaixo, são dadas, conforme esquema à esquerda, a base, em  $\alpha\pi$ , de uma pirâmide de vértice (V), do primeiro diedro, e a projeção horizontal  $\bar{A}$  de um vértice ( $\bar{A}$ ) da seção que o plano ( $\alpha$ ) produz no sólido.

Pede-se, em cada caso, completar a projeção horizontal da seção plana de ( $\alpha$ ) no sólido, sendo, sempre, dado o traço  $\alpha\pi$ .

Resoluções: O vértice F em  $\alpha\pi$  causa sua coincidência com seu homólogo F da seção; duas arestas básicas da pirâmide paralelas a  $\alpha\pi$  (Figura 1152) implicam em que os dois lados da seção que lhe correspondam também o sejam; um ponto de corte de uma aresta básica com  $\alpha\pi$  fora dos limites de trabalho aconselha utilização de outros vértices da base da pirâmide (Figura 1153).

#### 959 – $F \in \alpha\pi$

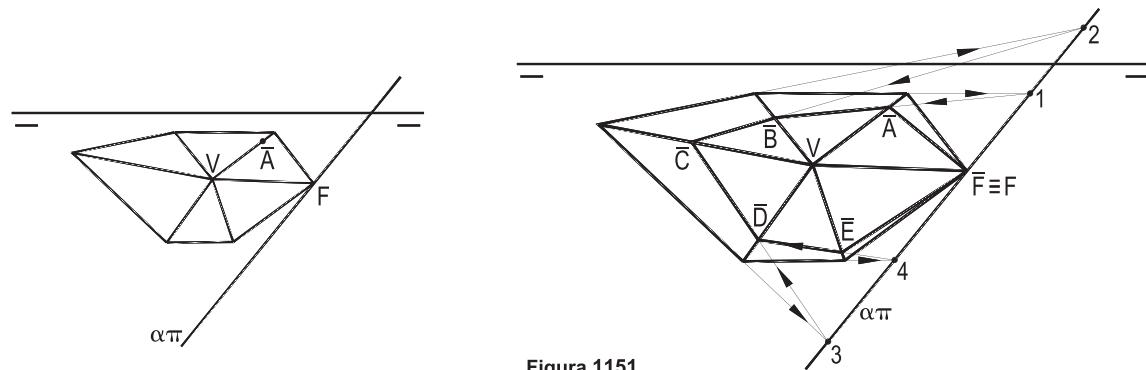


Figura 1151

#### 960 – $AE // BC // \alpha\pi$

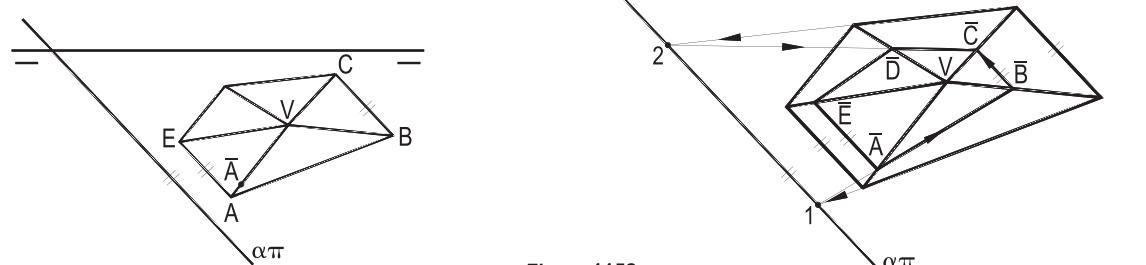


Figura 1152

#### 961 – Corte de BC em $\alpha\pi$ inacessível

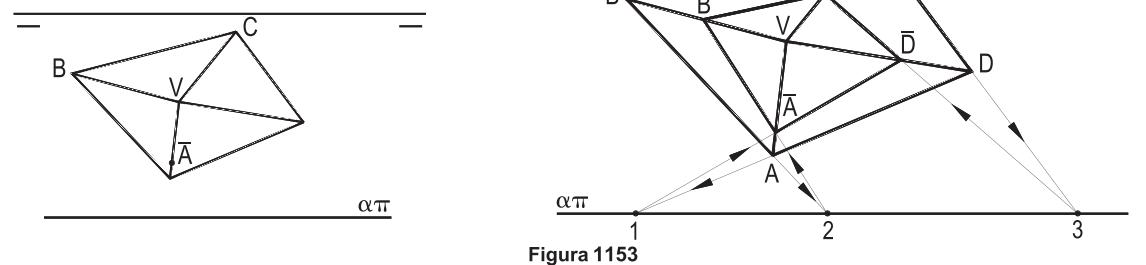


Figura 1153

Nas duas épuras abaixo, são dados, por suas projeções, um prisma quadrangular oblíquo e, por seus traços, um plano transparente ( $\alpha$ ). Pede-se construir as projeções da seção plana que ( $\alpha$ ) produz no prisma, para cada um dos dois casos.

Observe-se que, no primeiro caso, uma base do prisma está em ( $\pi'$ ), enquanto, no segundo, os dois planos das bases são frontais.

Resoluções:

**962** – Determina-se, inicialmente, a interseção ( $\bar{A}$ ) de uma aresta lateral do prisma com o plano secante ( $\alpha$ ), com o auxílio do plano vertical ( $\gamma$ ) dessa aresta (Figura 1154).

A afinidade, na projeção vertical, entre a seção e a base do sólido situada em ( $\pi'$ ) completa a projeção vertical  $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'\bar{D}'$  da seção e, em seguida, a projeção horizontal, com as linhas de chamada.

**963** – Como neste exemplo as bases do prisma pertencem a planos frontais, o eixo de afinidade, para a projeção vertical da seção, é a projeção vertical  $f'$  da interseção, com ( $\alpha$ ), do plano ( $\gamma$ ) de uma das bases do sólido.

Assim, com o auxílio do plano de topo que contém a aresta mais à esquerda do prisma, obtém-se o primeiro vértice  $\bar{A}'$  da projeção vertical da seção, completada com aquela afinidade (Figura 1155).

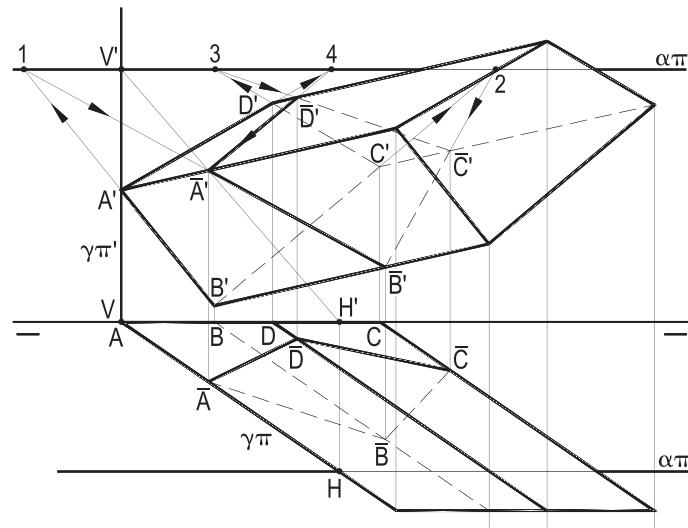


Figura 1154

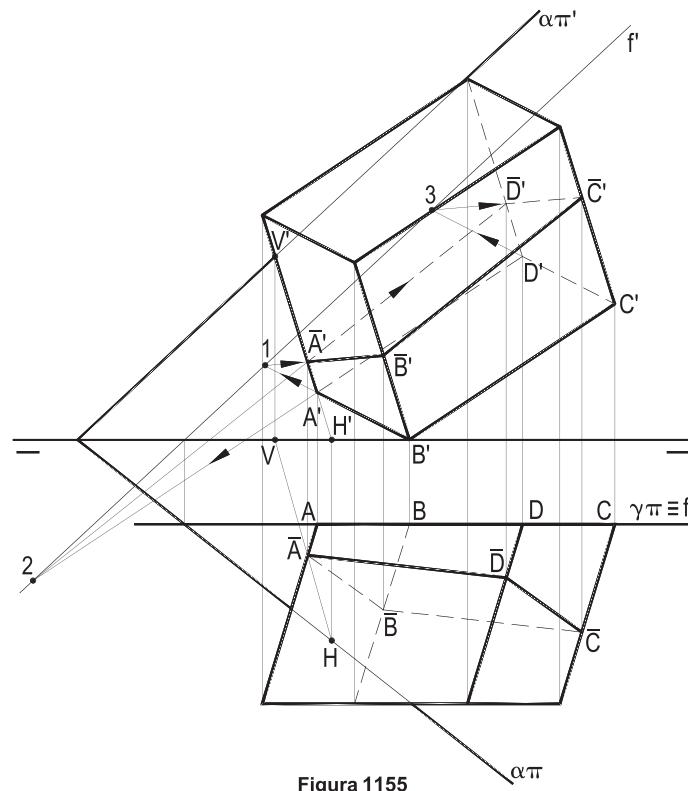


Figura 1155

**964 – A pirâmide regular  $(J)-(A)(B)(C)(D)$ , situada no primeiro diedro, tem altura igual à diagonal da base  $(A)(B)(C)(D)$ , pertencente a  $(\pi)$ .**

**Dada a projeção horizontal da aresta  $(A)(D)$ , pede-se construir as projeções do sólido e da seção que o plano transparente  $(\alpha)$ , dado por seus traços, produz nela.**

Resolução: A posição é particular, já que  $\alpha\pi$  contém D, projeção horizontal do vértice (D) da base da pirâmide, o que obriga a ser um dos vértices da seção. Aproveitando a reta (r), no plano vertical de (B)(D), obtém-se outro vértice ( $\bar{B}$ ) da seção e, com a homologia que utiliza  $\alpha\pi$  como eixo, consegue-se completar a projeção horizontal da seção  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(D)$  e, em seguida, sua vertical (Figura 1156).

**965 – Um prisma oblíquo do primeiro diedro está assente em  $(\pi)$  por uma de suas bases, um hexágono regular, dado por seu lado  $(P)(Q)$  e pela direção (r) de suas arestas laterais. Com altura igual à maior diagonal dessa base, o sólido apoia-se em  $(\pi'')$  por um vértice, não sendo cortado por esse plano. Determinar a verdadeira grandeza da seção provocada no prisma pelo plano de perfil que passa pelo centro de sua base inferior.**

Resolução: As projeções do prisma são bem simples, com uma única solução, para não ser atravessado por  $(\pi'')$ . O plano de perfil secante ao prisma atinge apenas duas arestas da base inferior e três arestas laterais e a V.G.  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$  da seção pentagonal assim formada vem numa vista lateral (Figura 1157).

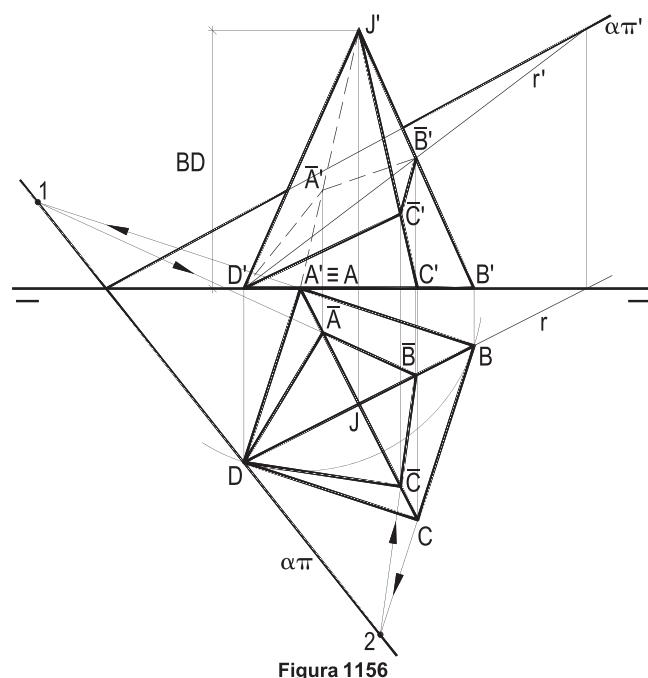


Figura 1156

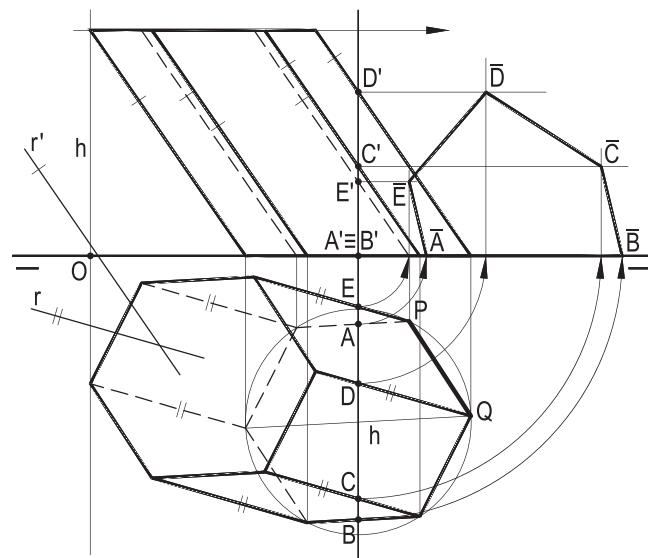


Figura 1157

**966 – O octaedro regular (V)–(A)(B)(C)(D)–(S) tem a diagonal (V)(S) vertical, (S) em ( $\pi$ ) e o vértice (A) em ( $\pi''$ ), com afastamento maior que o de (V), que é dado por suas projeções.**

**Pede-se construir as projeções do octaedro, bem como as da seção nele produzida pelo plano transparente ( $\alpha$ ), dado por seus traços.**

**Resolução:** As projeções do octaedro são de imediata construção, com apenas uma solução, embora a escolha da ordem dos vértices da seção diagonal (A)(B)(C)(D), pertencente ao plano ( $\theta$ ), mediador de (V)(S), tenha sido arbitrada.

E, com uma mudança de ( $\pi'$ ), torna-se ( $\alpha$ ) de topo, o que facilita obter as projeções da seção plana (1)(2)(3)(4)(5)(6) (Figura 1158), pedida.

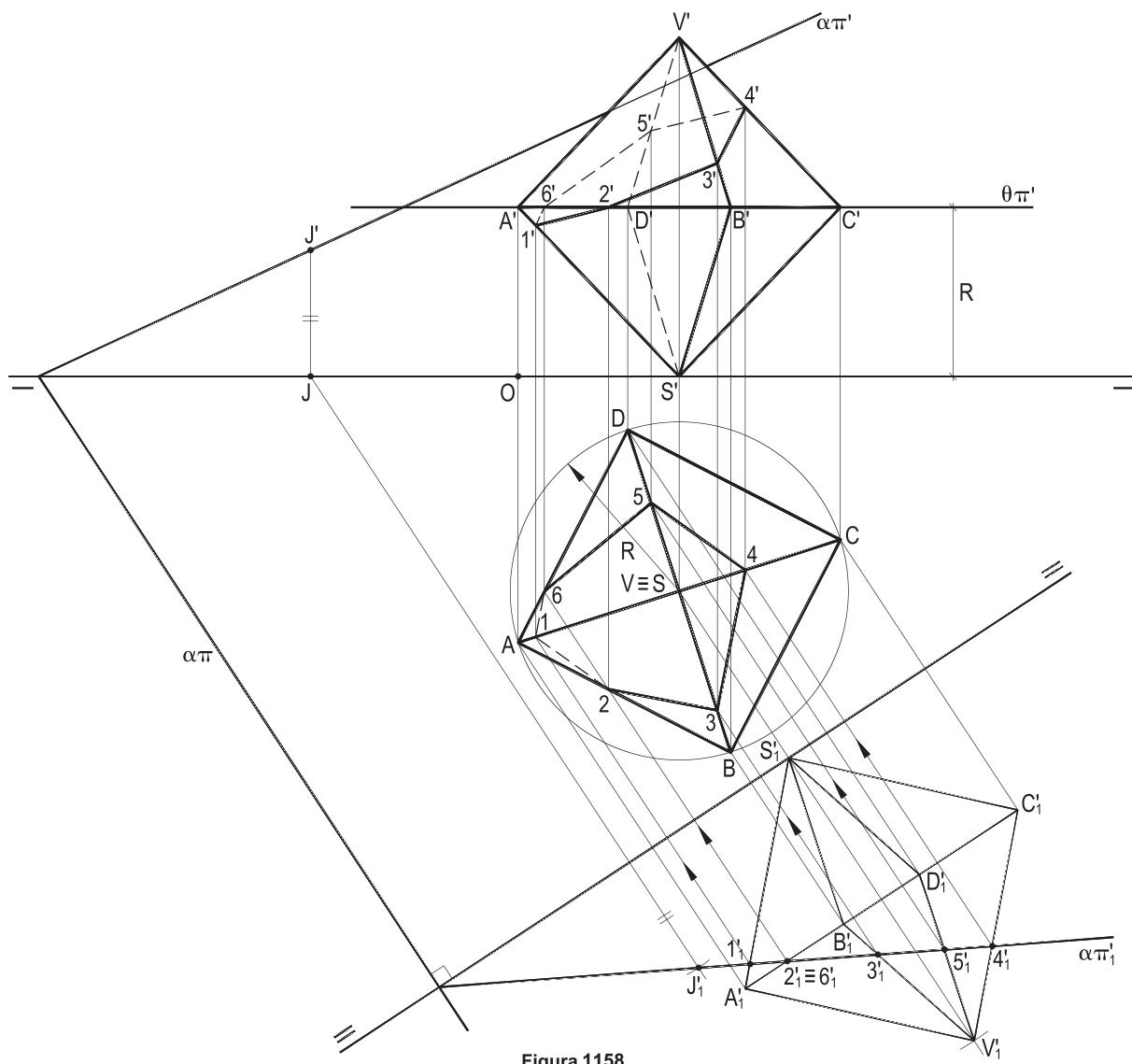


Figura 1158

**967** - A pirâmide regular  $(J)-(A)(B)(C)(D)(E)$ , situada inteiramente no primeiro diedro, tem sua base em  $(\pi')$ , inscrita num círculo de centro  $(O)$ , tangente a  $(\pi'\pi)$ , dado pela projeção vertical  $O'$  de seu centro.

Sabendo que  $(A)$  tem a maior cota possível, pede-se construir as projeções do sólido, que tem suas faces laterais formando  $60^\circ$  com  $(\pi')$ , bem como as projeções e a V.G. da seção produzida na pirâmide pelo plano transparente  $(\alpha)$ , dado por seus traços.

Resolução: A construção das projeções da pirâmide é bem simples, já que sua base vem em V.G. na projeção vertical e que sua altura é o segundo cateto  $\bar{J}J' = h$  do triângulo retângulo  $J'M'J$ , cujo primeiro  $J'M'$  é o apótema da base e cujo ângulo oposto é  $60^\circ$  (Figura 1159).

As projeções da seção são obtidas com uma mudança de  $(\pi)$ , que torna  $(\alpha)$  vertical e sua verdadeira grandeza vem com o rebatimento desse plano  $(\alpha)$ , no novo sistema projetivo, sobre o novo  $(\pi)$  – o pentágono  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1(\bar{D})_1(\bar{E})_1$ .

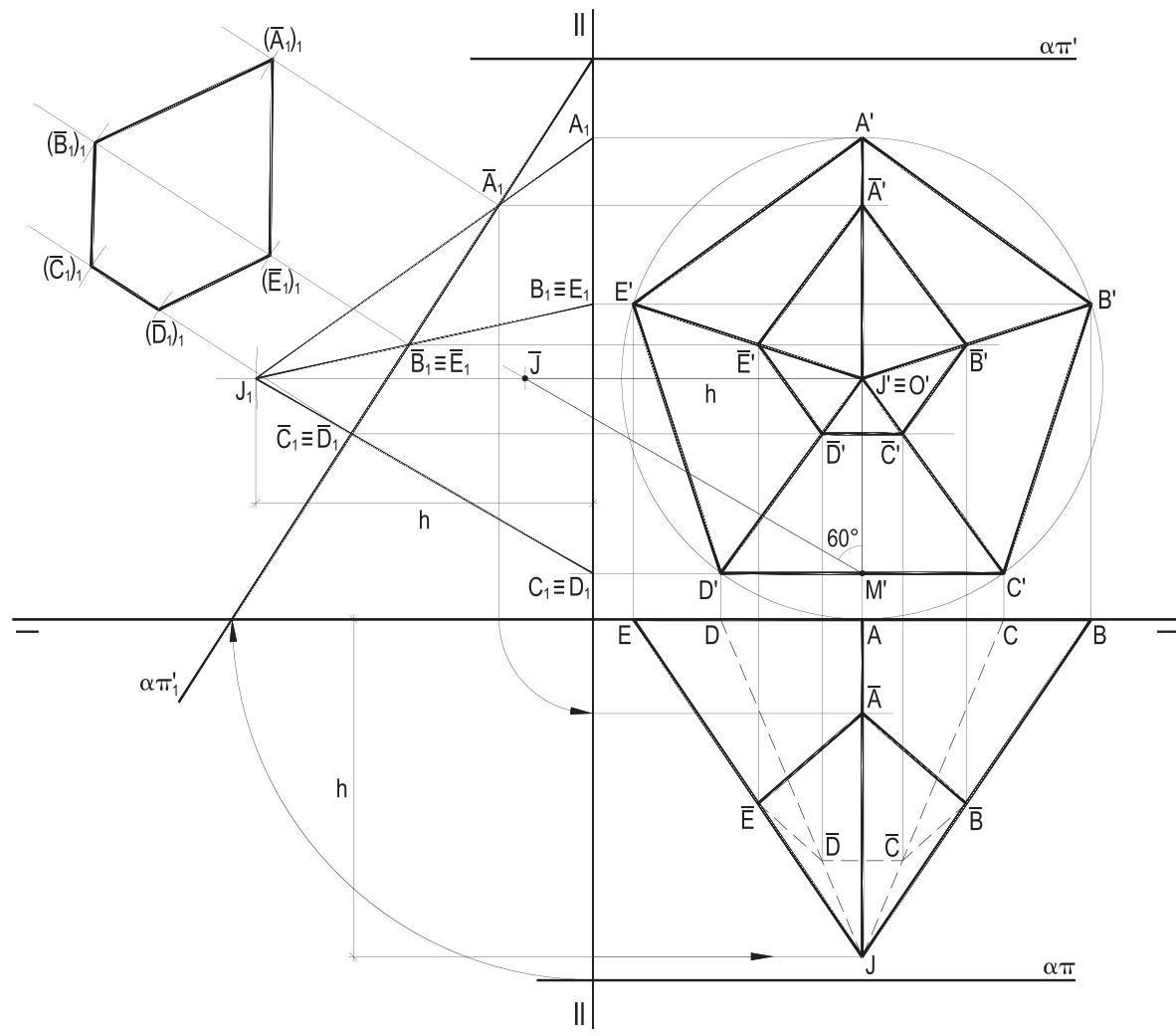


Figura 1159

**968 – Dadas as projeções do pentágono (A)(B)(C)(D)(E), de  $(\pi)$ , e as do ponto (R), pede-se desenhar as projeções do prisma oblíquo (A)(B)(C)(D)(E)–(R)(S)(T)(U)(V), bem como as da seção que o plano transparente  $(\alpha)$ , dado por seus traços, produz no sólido e a V.G. dessa seção.**

Resolução: Tão particular é a base dada, com duas arestas (A)(E) e (C)(D) de topo, que simplifica-se a projeção vertical do prisma e, com uma mudança de  $(\pi')$ , que torna  $(\alpha)$  de topo, obtém-se a seção  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D})(\bar{E})$ , construindo sua V.G. com seu rebatimento sobre  $(\pi)$  no segundo sistema projetivo (Figura 1160), para aliviar a épura.

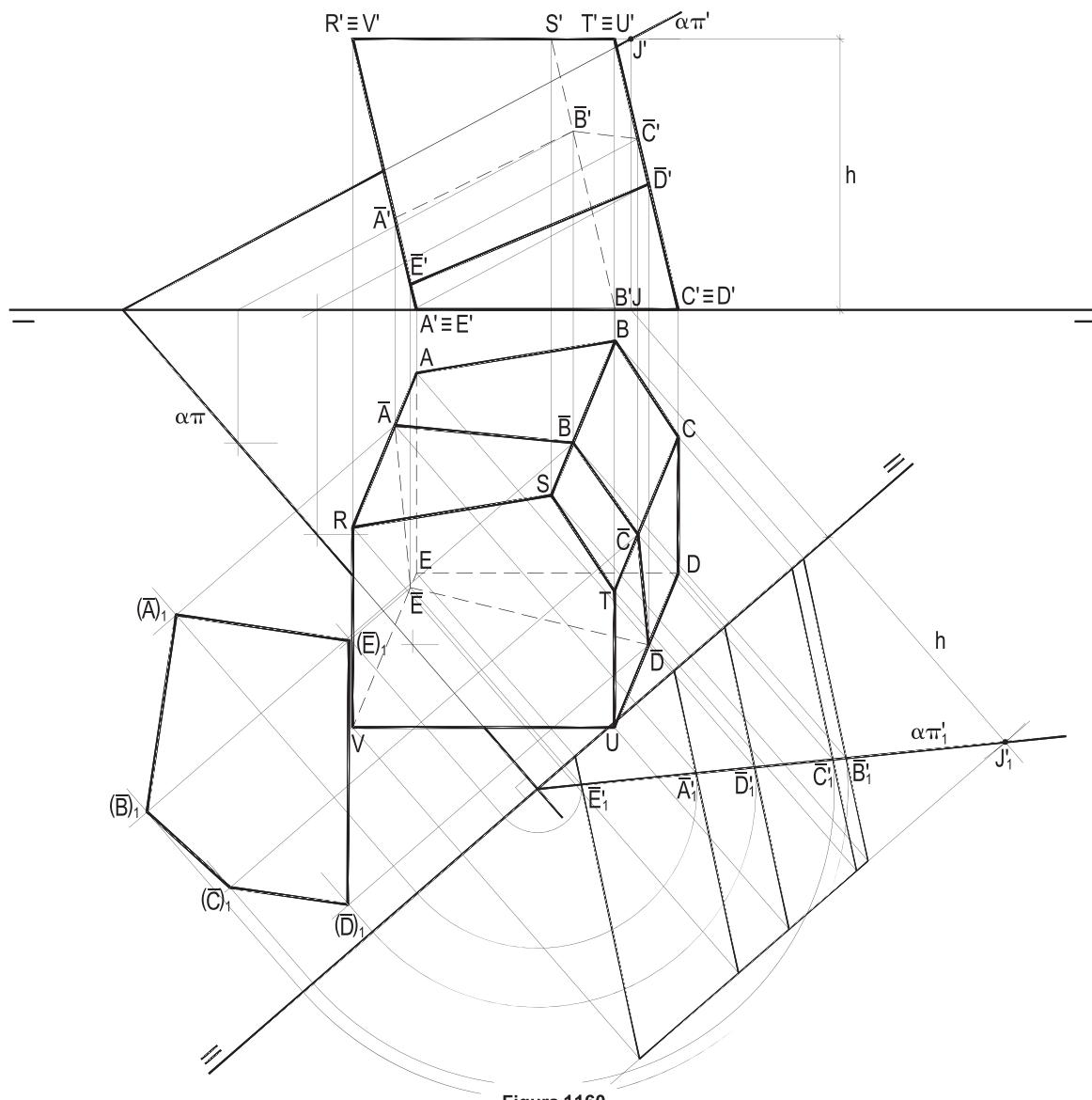


Figura 1160

Observe-se que, para maior precisão na obtenção da projeção vertical da seção, foram utilizadas frontais de  $(\alpha)$ , devido à grande inclinação das projeções verticais das arestas laterais em relação à linha de terra.

**969** – O plano ( $\gamma$ ) pertence ao ponto (A), dado por suas projeções, e forma  $45^\circ$  com ( $\pi$ ) e  $60^\circ$  com ( $\pi'$ ), tendo, em épura, no primeiro diedro, seus dois traços voltados para a direita.

Construir as projeções da pirâmide regular (V)–(A)(B)(C)(D), do primeiro diedro, com altura medindo 45 mm, apoiada por sua base em ( $\gamma$ ), o vértice (B) pertencendo a ( $\pi\pi''$ ), e desenhar as projeções da seção provocada no sólido pelo plano horizontal ( $\theta$ ), que contém o vértice (D), de maior cota da base.

Resolução: A construção dos traços de ( $\gamma$ ) é simples (*Geometria Descritiva*, número 143), assim como das projeções da pirâmide (Figura 1161), tornando frontal a perpendicular (J)(P), traçada pelo centro (J) da base, para a marcação de sua altura, medindo 45 mm.

E da seção ( $\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(D)$  também, já que o plano secante ( $\theta$ ) é projetante.

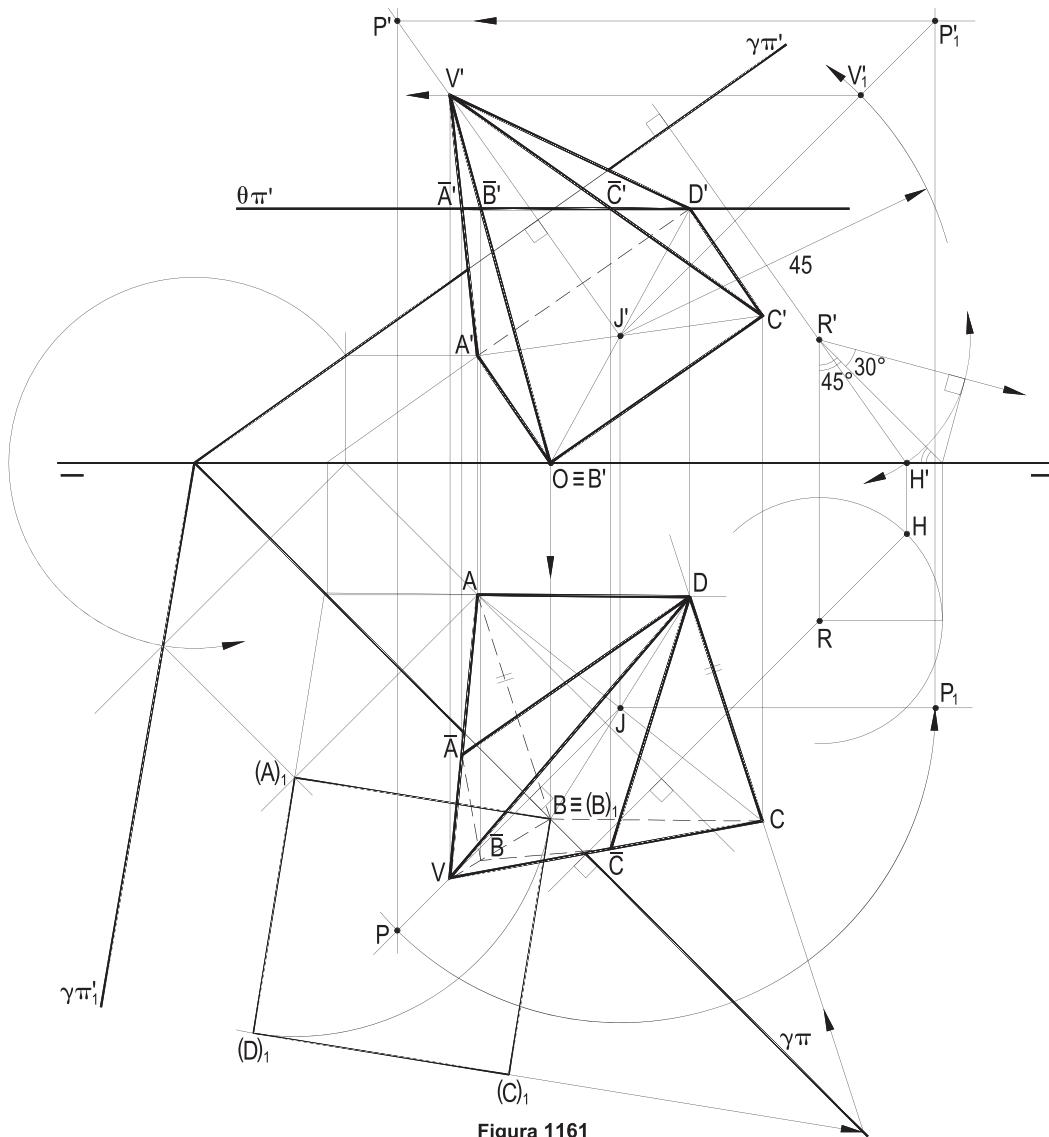


Figura 1161

**970** – Um ortoedro, situado no primeiro diedro, e apoiado por sua face quadrada  $(A)(B)(C)(D)$  no plano  $(\alpha)$ , dado por seus traços, tem um vértice em  $(\pi')$ , não sendo atravessado por esse plano. Dadas as projeções  $A'$  e  $B'$ , pede-se determinar as projeções e a verdadeira grandeza da seção que o plano  $(\gamma)$ , dado por seus traços, produz no ortoedro.

Resolução: Marcados em  $(\alpha)$  os pontos  $(A)$  e  $(B)$  e rebatido esse plano sobre  $(\pi)$ , constrói-se o quadrado  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$  que, alçado, traz as projeções da primeira base do ortoedro.

A segunda é simples, por ter o sólido um vértice  $(\bar{A})$  com abscissa nula, com os demais  $(\bar{B})$ ,  $(\bar{C})$  e  $(\bar{D})$  à direita dele. Com paralelas completa-se o ortoedro e as projeções da seção  $(R)(S)(T)(U)$  são imediatas, por ser  $(\gamma)$  um plano vertical (Figura 1162). Sua V.G.  $(R)_1(S)_1(T)_1(U)_1$  vem no rebatimento de  $(\gamma)$  sobre  $(\pi')$ .

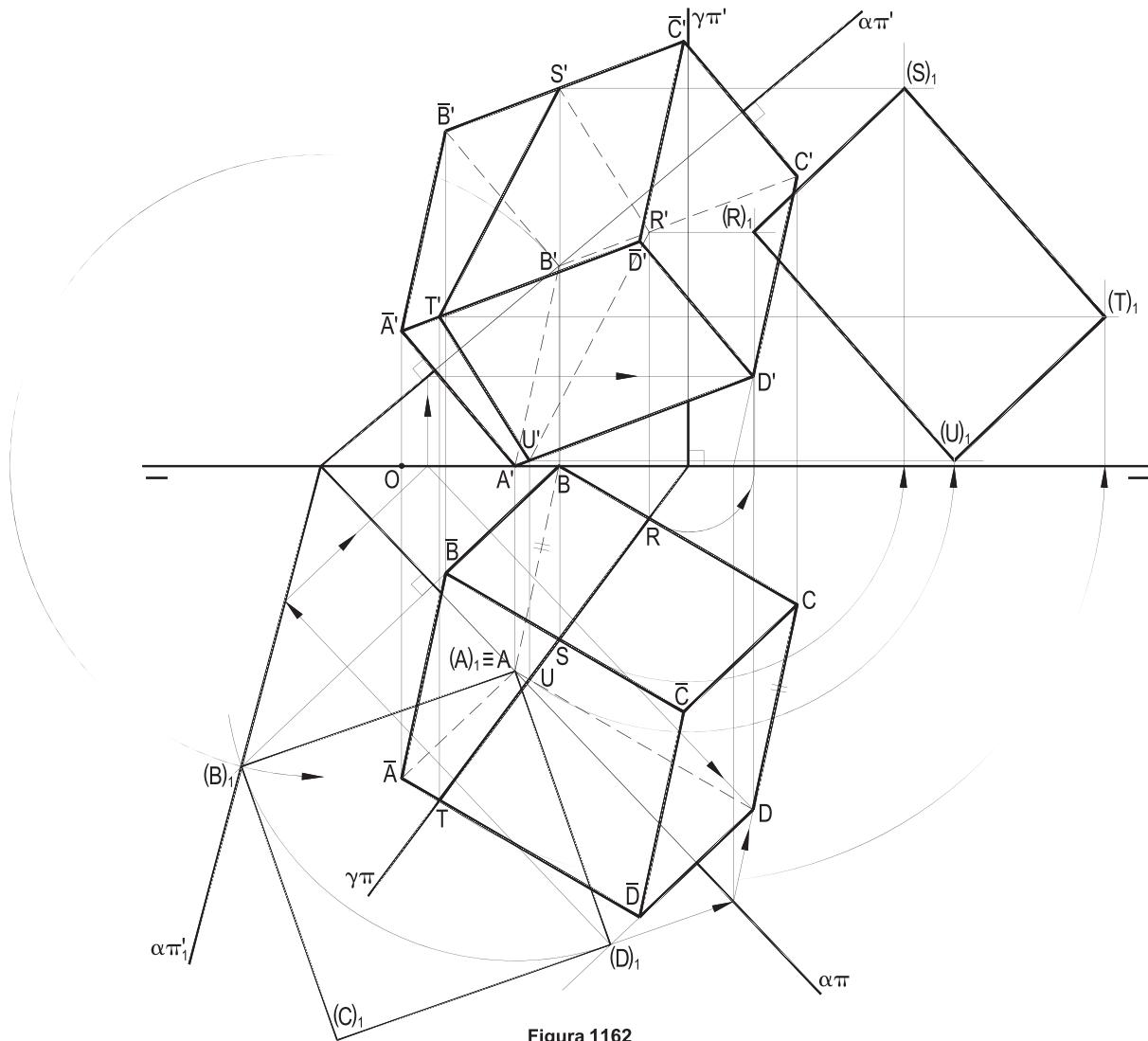


Figura 1162

**971 – Dadas, por suas projeções, as retas (r), (s) e (t), assim como completo, por suas projeções, um prisma quadrangular oblíquo, assente, por uma base, no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, pede-se obter as projeções das interseções de cada reta dada com a superfície do sólido.**

Resolução: Para se obter os traços de uma reta com a superfície de um poliedro, deve-se conduzir um plano, convenientemente escolhido e pertencente à reta, determinar sua seção com o sólido e buscar os pontos comuns à reta e a essa seção (Figura 1163).

Naturalmente, para os muitos planos que contêm a reta (r), em tudo, mudam as seções planas provocadas no sólido, mas, como todas terão em comum essa reta, embora mudem as seções, os pontos de corte (A) e (B) serão sempre os mesmos (Figura 1163).

Para a épura do exemplo ao lado, utilizou-se o plano vertical ( $\theta$ ), das retas (r), (s) e (t), dadas, que produz uma seção quadrangular ( $P)(Q)(R)(S)$  no prisma (Figura 1164).

A reta (r) corta a superfície do sólido nos pontos (A) e (B), enquanto (s) tem em comum com essa superfície apenas o ponto (P) e, enfim, a reta (t) resta exterior ao prisma, por não ter ponto em comum com aquela seção (Figura 1164).

Observe-se a visibilidade, admitido transparente o plano auxiliar ( $\theta$ ), mas, como de hábito, opacas as faces do prisma.

Em seguida, vão apreciadas diversas hipóteses de posições relativas entre a reta e o poliedro dados.

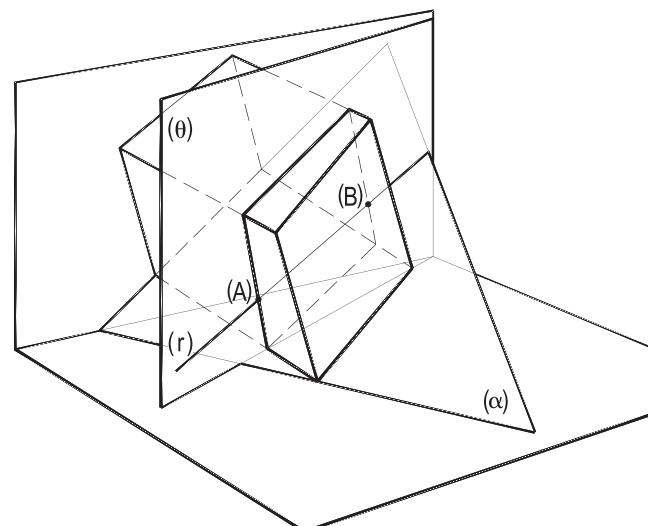


Figura 1163

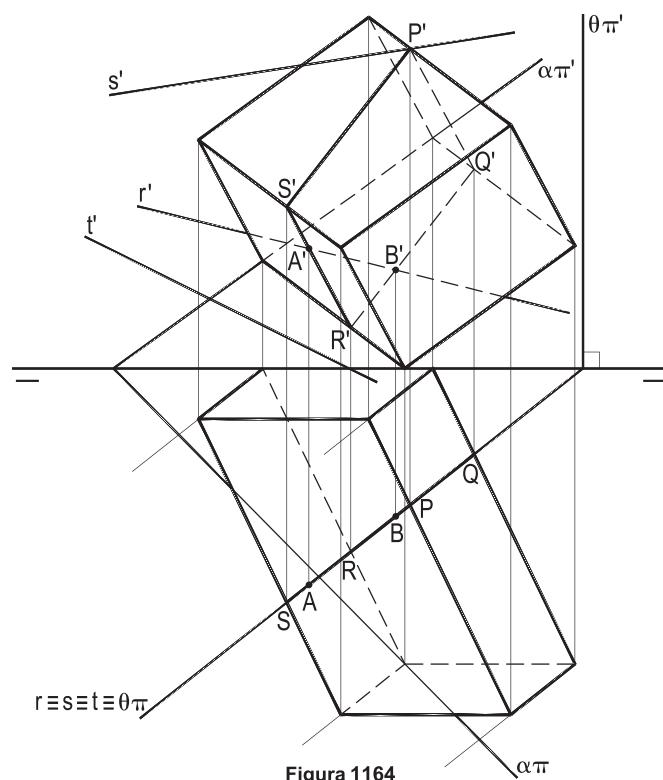


Figura 1164

**Em cada uma das épuras seguintes, são dadas as projeções de um poliedro convexo e de duas retas ( $r$ ) e ( $s$ ). Pede-se determinar as projeções dos pontos (A) e (B), interseções de ( $r$ ) e (C) e (D), de ( $s$ ), com a superfície do poliedro.**

**Resoluções:** Já que há duas retas secantes aos sólidos, deve-se considerar o plano ( $\alpha$ ) que ( $r$ ) e ( $s$ ) formam, obter a seção que esse plano produz no poliedro e buscar os pontos em que ( $r$ ) e ( $s$ ) cortam os lados do polígono seção.

No primeiro exemplo (Figura 1165), tal plano ( $\alpha$ ) é vertical, no segundo, é horizontal (Figura 1166) e, no terceiro (Figura 1167), é frontal.

No quarto exemplo convém utilizar um corte de perfil, já que as duas secantes formam um plano paralelo a ( $\pi'\pi$ ) (Figura 1168). No seguinte (Figura 1169), é útil uma mudança que torna ( $\alpha$ ) de topo, observando-se que apenas ( $r$ ) corta a pirâmide.

No último (Figura 1170), o plano ( $\alpha$ ), das retas dadas ( $r$ ) e ( $s$ ), é de topo, o que simplifica a obtenção das projeções da seção (R)(S)(T)(U) produzida por cortes desse plano nas arestas laterais do prisma, e, em seguida, as dos pontos (A), (B), (C) e (D).

**972**

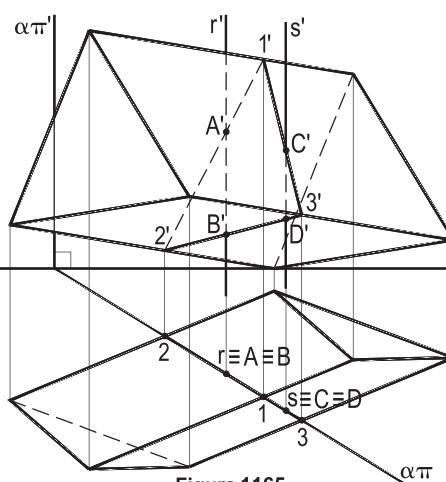


Figura 1165

**973**

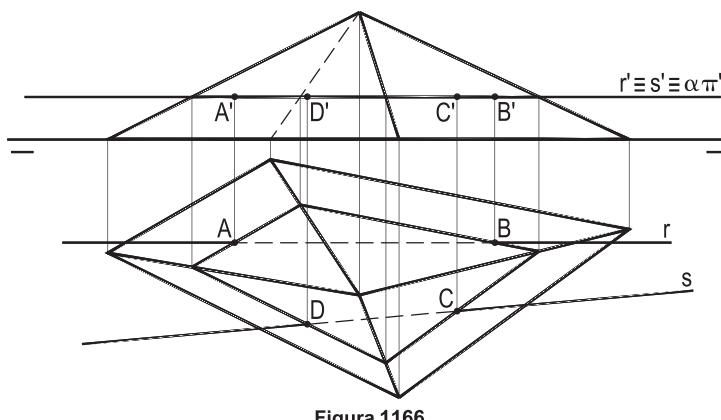


Figura 1166

**974**

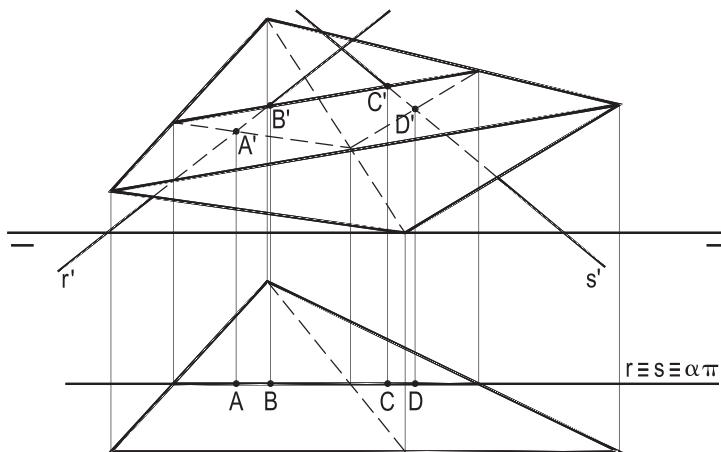


Figura 1167

975

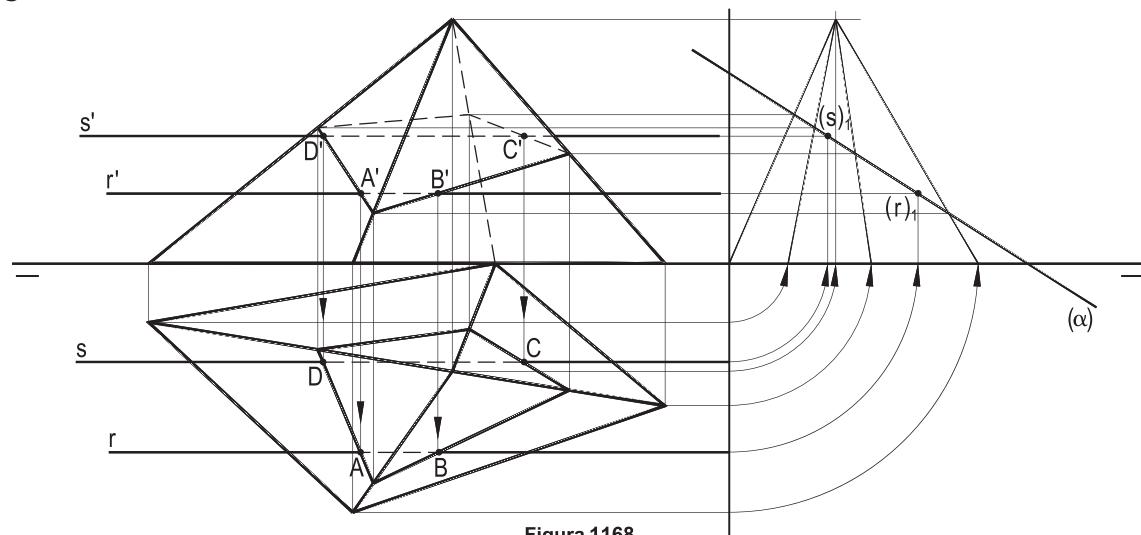


Figura 1168

976

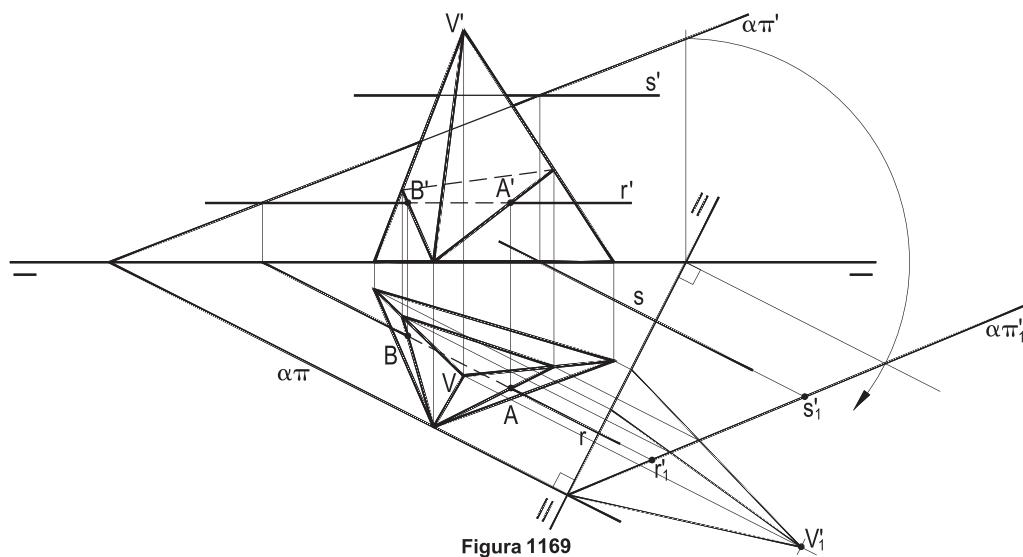


Figura 1169

977

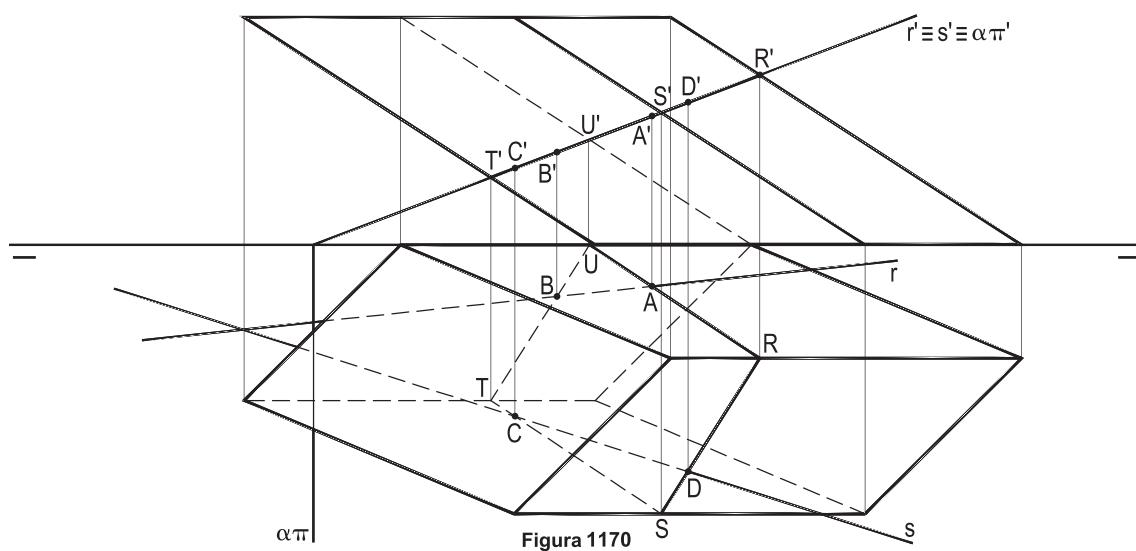


Figura 1170

**978 – O paralelogramo (A)(B)(C)(D), dado pelas projeções de seus vértices (A), (B) e (C), é uma seção reta de um prisma que tem uma base em ( $\pi$ ) e a outra pertencendo ao vértice (D) daquela seção.**

Pede-se determinar as projeções do prisma.

Resolução: Tendo dois lados, dados, (A)(D) e (B)(C) frontais, basta apoiar neles a horizontal (h), para, tendo-se, então, as direções dos traços do plano dessa seção reta, construir perpendiculares a ele, pelos vértices (A), (B), (C) e (D).

Os traços horizontais dessas quatro retas são os vértices da base inferior do prisma e a superior, com a cota de (D), completa, com paralelas, o sólido (Figura 1171).

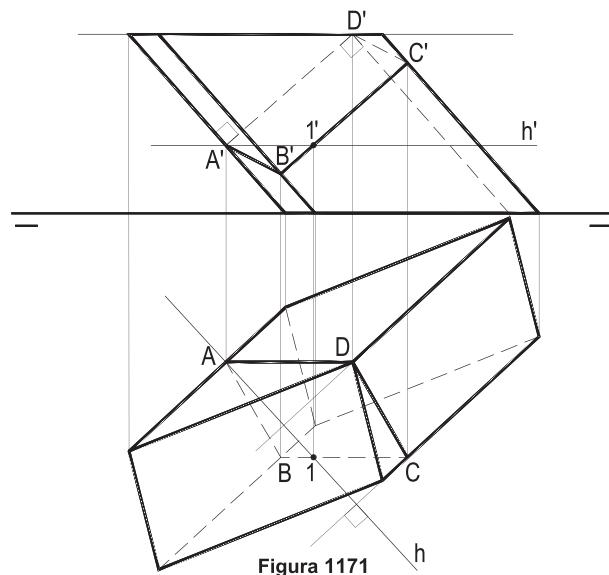


Figura 1171

**979 – O plano transparente ( $\alpha$ ), do qual se dá o traço horizontal  $\alpha\pi$ , secciona uma superfície prismática de arestas paralelas a ( $\beta_{13}$ ) segundo o quadrilátero (A)(B)(C)(D), do qual é dada a projeção horizontal ABCD, destacado o paralelismo existente entre AD, BC e  $\alpha\pi$ .**

Sabendo que (A) pertence à aresta lateral ( $R\bar{R}$ ) de um prisma de bases horizontais limitado naquela superfície, construa as projeções desse sólido, sendo dadas as projeções  $R'$ ,  $R$  e  $\bar{R}$ .

Resolução: A partir da projeção horizontal  $R\bar{R}$ , obtém-se a vertical  $R'\bar{R}'$ , de modo tal que a diferença entre as cotas de  $(\bar{R})$  e de  $(R)$  iguale a diferença entre os afastamentos desses dois pontos (*Geometria Descritiva*, número 29) e, pela afinidade existente, em projeção horizontal, entre a base RSTU e a seção ABCD, constrói-se a projeção horizontal dessa base, observando o paralelismo entre AD, BC, RU, ST e  $\alpha\pi$  (Figura 1172).

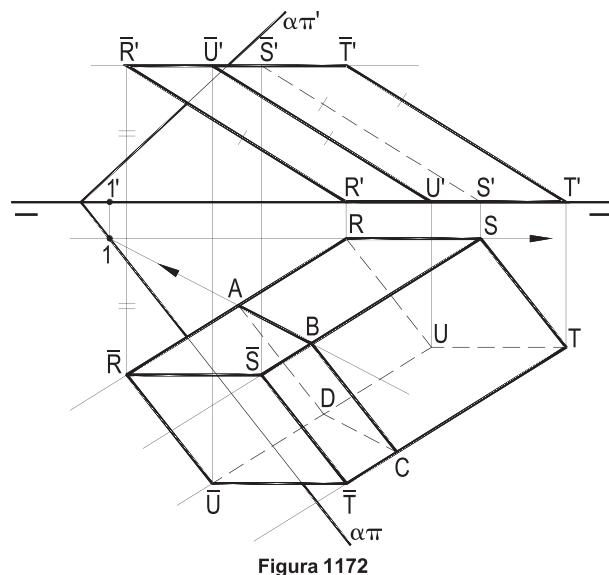


Figura 1172

# CAPÍTULO XV

## CORPOS REDONDOS

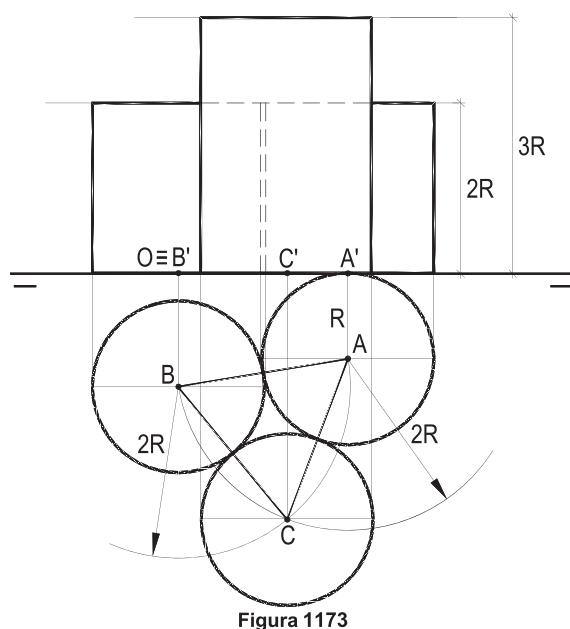
Neste capítulo vão listados problemas referentes a cilindros, troncos de cilindros, cones, troncos de cone, esferas e suas partes (cunhas, setores e segmentos), tratando-os isoladamente, ou combinando-os entre si e com poliedros.

São abordadas suas construções e seções planas neles produzidas e, como as circunferências de círculo estão muito presentes, é conveniente a revisão das construções de elipses, projeções habituais dessas circunferências, a partir de seus eixos ou de um par de diâmetros conjugados, assim como do traçado de tangentes a essas curvas, tal como detalhado no livro *Cônicas*, deste autor.

**980 – Três cilindros circulares retos, tangentes dois a dois, situados no primeiro diedro, têm bases iguais, em  $(\pi)$ , a primeira com centro no ponto (A), dado por sua projeção horizontal A e tangente à linha de terra e a segunda com centro num ponto (B) de  $(\pi')$ . Desenhe suas projeções, sabendo que os dois primeiros cilindros são equiláteros e que a altura do terceiro vale o triplo dos raios dos cilindros.**

Resolução: Desenhada a base do primeiro cilindro, com raio igual ao seu diâmetro  $2R$  e centro A, obtém-se B, na abscissa nula, e, com a construção do triângulo equilátero ABC, em  $(\pi)$ , marca-se C, centro da base inferior do outro cilindro.

E, conhecidas suas alturas, respectivamente iguais a  $2R$ ,  $2R$ , e  $3R$ , fica simples (Figura 1173) obter as projeções verticais dos três cilindros: três retângulos com essas alturas e todos com bases medindo  $2R$ .



**981 – Um cilindro de revolução, situado inteiramente no primeiro diedro, apoia-se por uma geratriz no plano horizontal ( $\theta$ ) e tem uma de suas bases no plano ( $\alpha$ ), tendo em comum com ( $\pi'$ ) apenas o ponto (J). A segunda base pertence ao plano ( $\beta$ ), paralelo a ( $\alpha$ ), tocando o plano frontal ( $\gamma$ ) num ponto (K).**

Pede-se desenhar as projeções do cilindro, considerando transparente os planos, que são, todos, dados por seus traços.

Resolução: Tendo apenas um ponto em ( $\pi'$ ) e uma geratriz em ( $\theta$ ), com bases verticais, o contorno da projeção horizontal do cilindro há de ser um retângulo, limitado por  $\alpha\pi$  e por  $\beta\pi$ , com um vértice J em  $\pi'\pi$  e outro, K, em  $\gamma\pi$ .

Das elipses iguais, bases da projeção vertical, conhece-se os dois eixos, o que simplifica suas construções (Figura 1174).

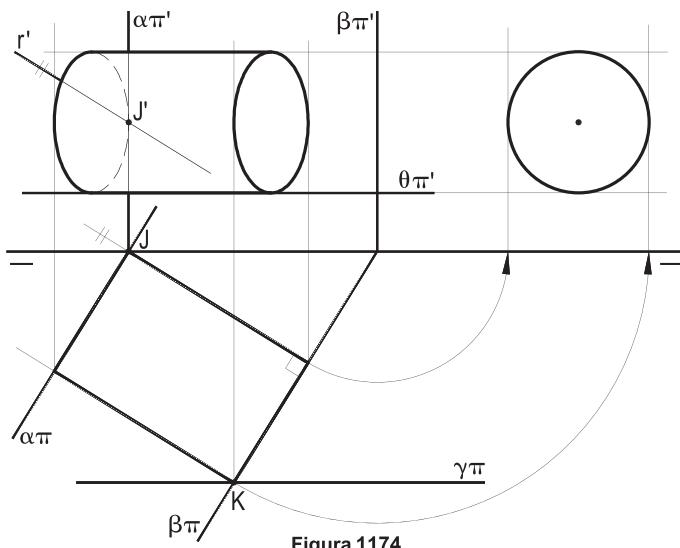


Figura 1174

**982 – Construir as projeções do cone de revolução, cuja base é tangente às retas fronto-horizontais ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas por suas projeções, sabendo que seu vértice ( $V$ ) pertence a ( $\pi$ ) e a ( $\pi''$ ).**

Resolução: Numa vista lateral, obtém-se a V.G. do raio R da base do cone, metade da distância entre ( $r$ )<sub>1</sub> e ( $s$ )<sub>1</sub> e, com a perpendicular ( $M$ )<sub>1</sub>(V)<sub>1</sub>, a posição de seu vértice, que, alçado para a abscissa nula, permite desenhar as duas projeções do sólido, sendo as projeções da base do cone definidas por seus dois eixos (A)(B) e (C)(D) (Figura 1175) e as tangentes a elas por V e por V', dando os contornos.

A vista lateral auxilia a determinação da visibilidade.

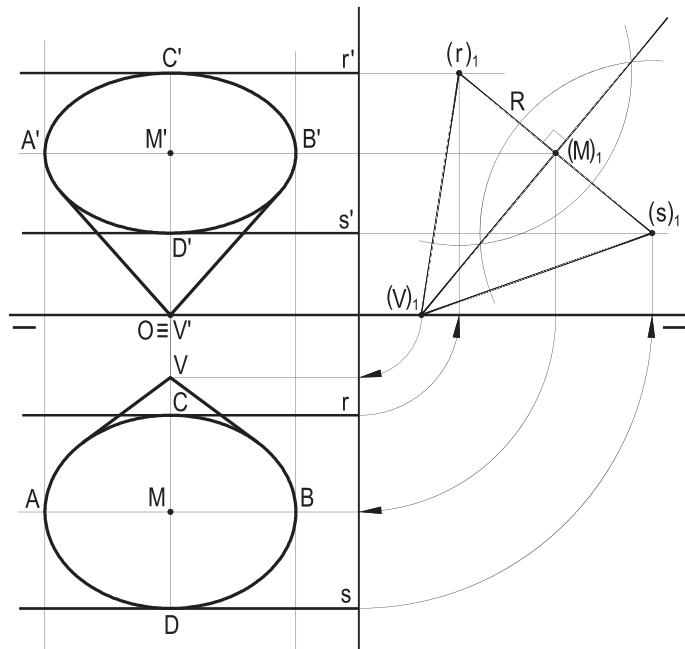


Figura 1175

**983 – Um cone circular oblíquo tem sua base em ( $\beta_{13}$ ), com centro no ponto (J), do qual se dá a projeção horizontal.**

Sabendo que essa base tangencia ( $\pi'\pi$ ) e que o vértice (V) do cone pertence a ( $\pi$ ), com abscissa e afastamento iguais ao dobro da abscissa de (J), pede-se construir as projeções do cone, assumindo ser transparente o bissetor.

Resolução: A determinação da base é imediata, por se conhecer seu centro (J) e seu raio R, numa vista lateral.

E, com o dobro da abscissa de (J), define-se a do vértice (V) do cone, tanto quanto sua posição.

Assim, marcado o vértice (V) e de posse dos eixos (A)(B) e (C)(D) das elipses, bases de suas projeções, as tangentes a elas de V' e de V completam as projeções do cone (Figura 1176).

**984 – Um cone circular oblíquo de vértice (V) e base (c), pertencente a ( $\pi'$ ), é secionado pelo plano frontal ( $\theta$ ).**

Dados  $\theta\pi$ , c', V' e V, pede-se construir as projeções do tronco de cone que ( $\theta$ ) produz no cone.

Resolução: As tangentes de V' a c' dão forma ao contorno da projeção vertical do tronco, que contará com duas bases circulares, enquanto a horizontal, simplificada, corresponde a um trapézio escaleno (Figura 1177).

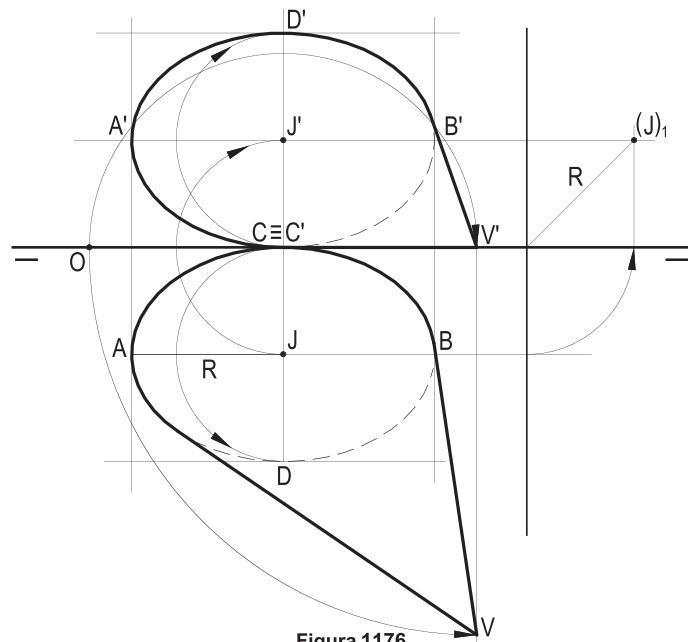


Figura 1176

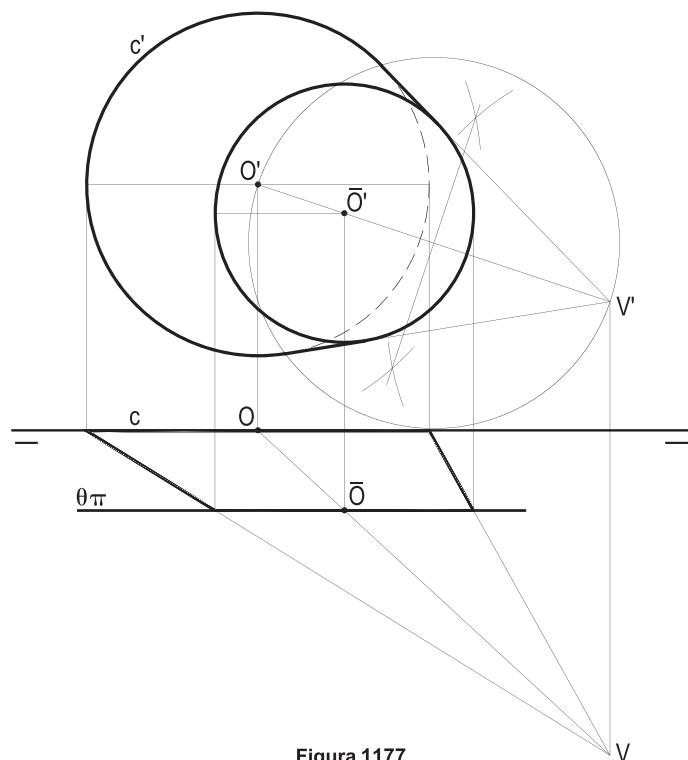


Figura 1177

Em cada uma das épuras seguintes, são dadas, por suas duas projeções, um corpo redondo, devidamente especificado, e uma reta ( $r$ ), a ele secante. Pede-se as projeções dos pontos (A) e (B), traços de ( $r$ ) na superfície do sólido.

Resoluções: Tal como utilizado nas interseções de retas com superfícies de poliedros, antes detalhadas, para o caso dos corpos redondos, deve-se utilizar um plano projetante ( $\gamma$ ), que contenha ( $r$ ), determinar sua interseção com o sólido e buscar os pontos (A) e (B) comuns a esta seção e à reta ( $r$ ), dada.

**985 – Cilindro de revolução**

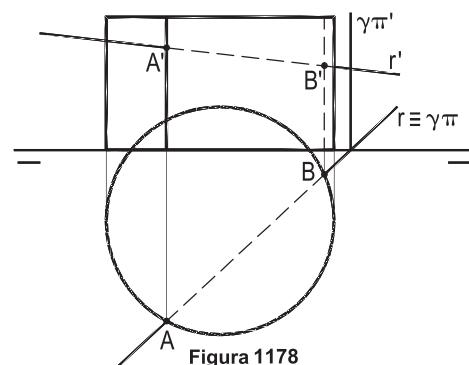


Figura 1178

**986 – Cilindro circular oblíquo**

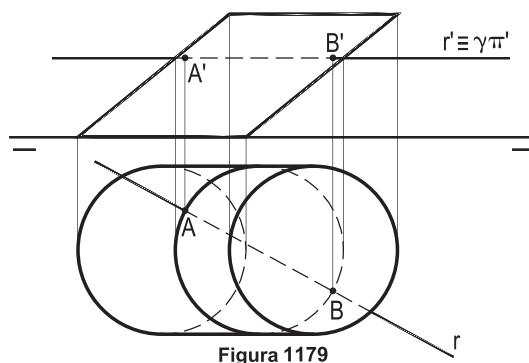


Figura 1179

**987 – Cone de revolução**

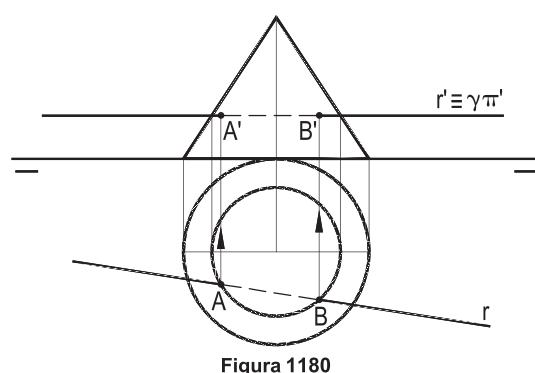


Figura 1180

**988 – Cone de revolução. ( $r \equiv (E)(F)$ )**

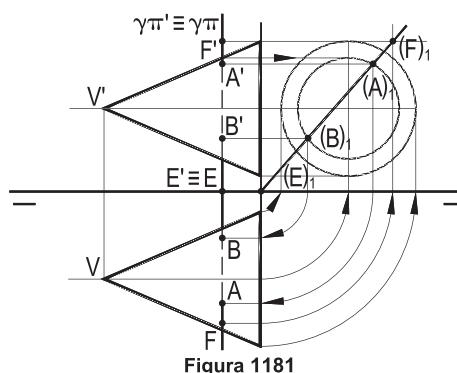


Figura 1181

**989 – Tronco de cone circular oblíquo**

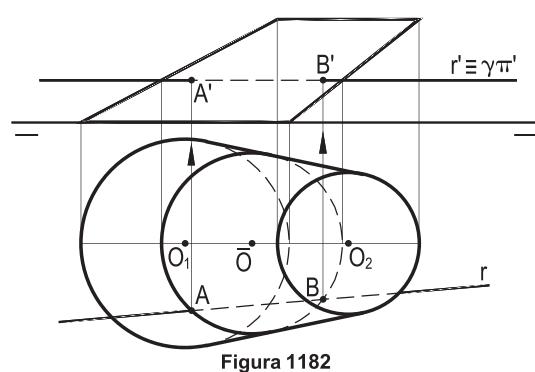


Figura 1182

**990 – Hemisfério (O)**

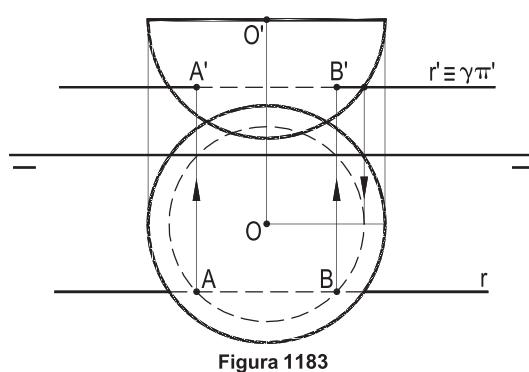


Figura 1183

991 – Esfera

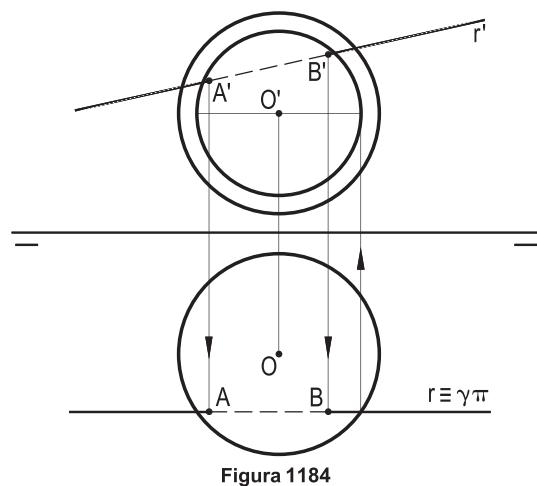


Figura 1184

992 – Cone circular oblíquo

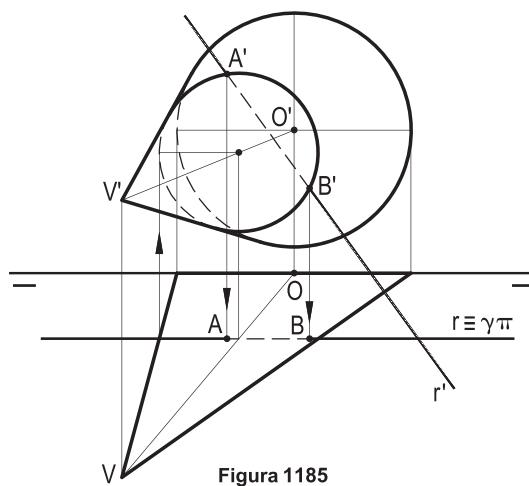


Figura 1185

993 – Cilindro circular oblíquo

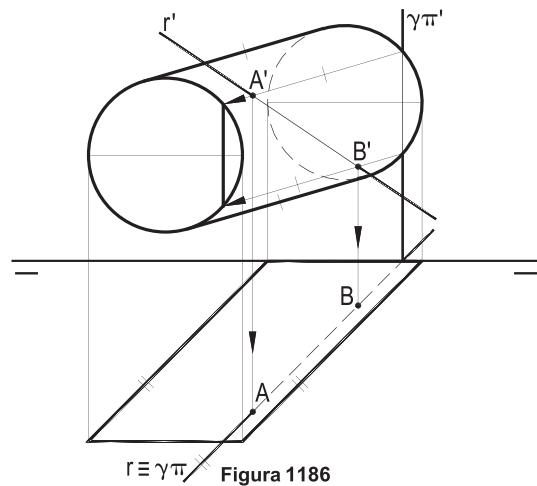


Figura 1186

994 – Cone de revolução

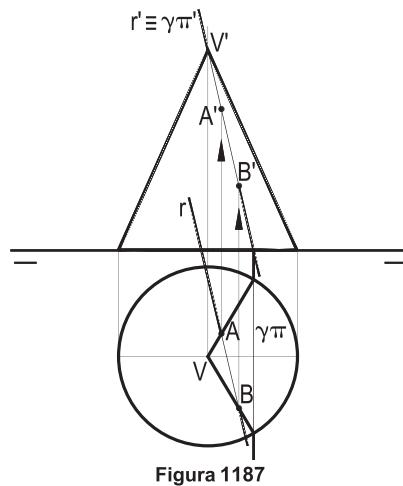


Figura 1187

995 – Semi-hemisfério (O)

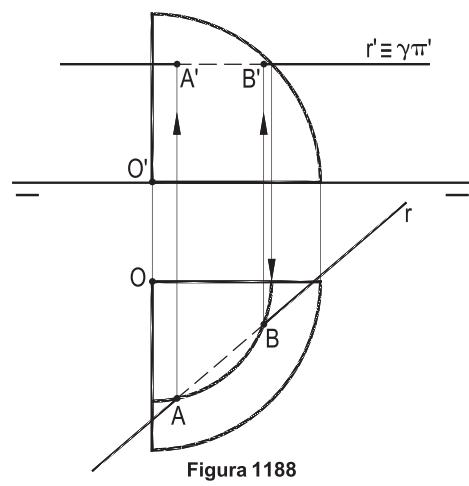


Figura 1188

996 – Esfera (O)

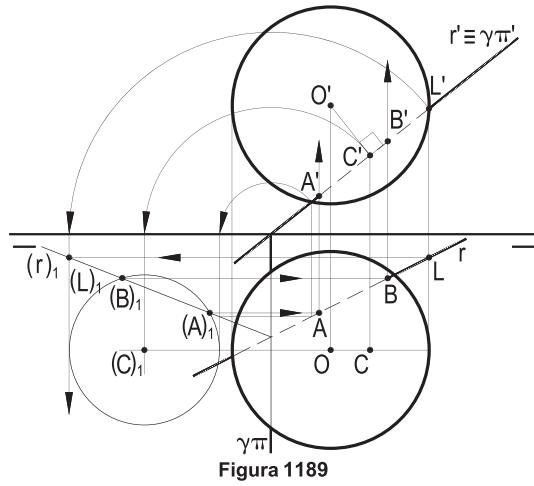


Figura 1189

**997** – Uma esfera de diâmetro  $(A)(B)$ , dada por suas projeções, é seccionada pelos planos de perfil  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , dados por seus traços. Retirados os dois segmentos esféricos de uma base, formados no exterior do intervalo entre os dois planos, considere dois cones de revolução, com bases nas seções assim produzidas, ambos exteriores ao segmento esférico remanescente, o da esquerda com altura igual ao raio da esfera e o outro com altura dobro do primeiro. Pede-se desenhar as projeções do sólido assim formado.

Resolução: Imediata a construção da esfera, dada por seu diâmetro  $(A)(B)$ , de topo. Simples a determinação dos vértices ( $V$ ) e ( $J$ ) dos dois cones de revolução, aproveitando a fronto-horizontal ( $r$ ), conduzida pelo ponto ( $O$ ), médio de  $(A)(B)$  (Figura 1190).

Particulares, os dados proporcionam contornos iguais para as duas projeções do sólido.

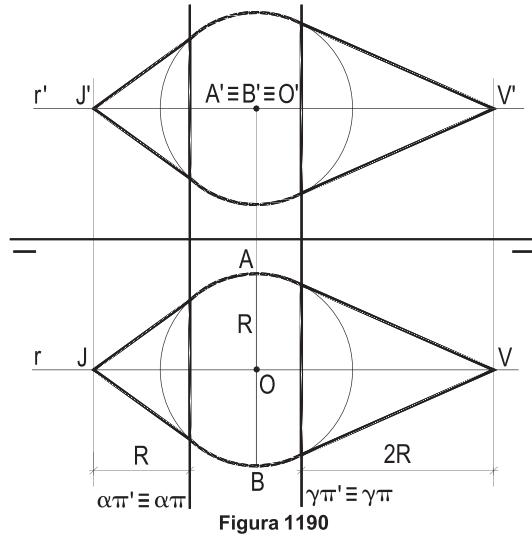


Figura 1190

**998** – Um cubo está apoiado por uma face  $(X)(Y)(Z)(W)$  no plano  $(\alpha)$ , dado por seus traços, situando-se no primeiro diedro. Sabendo que os pontos  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  e  $(D)$ , dados por suas projeções horizontais, pertencem, respectivamente, às arestas  $(X)(Y)$ ,  $(Y)(Z)$ ,  $(Z)(W)$  e  $(W)(X)$ , pede-se apresentar, sem construir o cubo, as projeções das esferas  $(i)$  e  $(c)$ , respectivamente, inscrita e circunscrita ao cubo, admitindo ser transparente a maior.

Resolução: Marcados os pontos  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  e  $(D)$  em  $(\alpha)$ , com seu rebatimento sobre  $(\pi)$ , pode-se construir o quadrado face do cubo, cujos lados passam por cada um desses pontos, pelo traçado das semicircunferências de diâmetros  $(A)_1(B)_1$  e  $(C)_1(D)_1$  e pela união de seus pontos médios  $(M)_1$  e  $(N)_1$ , proporcionando a diagonal  $(Y)_1(W)_1$  do quadrado (Figura 1191), tal como detalhado em *Geometria Plana* (Capítulo XX, número 93).

Obtido o quadrado face do cubo, basta alçar seu centro ( $P$ ), traçar a perpendicular  $(P)(J)$  a  $(\alpha)$ , para localizar o centro ( $O$ ) das duas esferas pedidas, o que se consegue tornando  $(P)(J)$  horizontal e aplicando, em sua V.G., a distância  $a/2$  igual à metade da aresta do cubo (Figura 1193).

Obtida a V.G. da semidiagonal  $D/2$ , raio da esfera circunscrita ao cubo, pela utilização de sua escala gráfica (*Geometria Espacial*, número 112.2), as projeções pedidas são, então, circunferências com esses raios, concêntricas no ponto ( $O$ ) (Figura 1193).

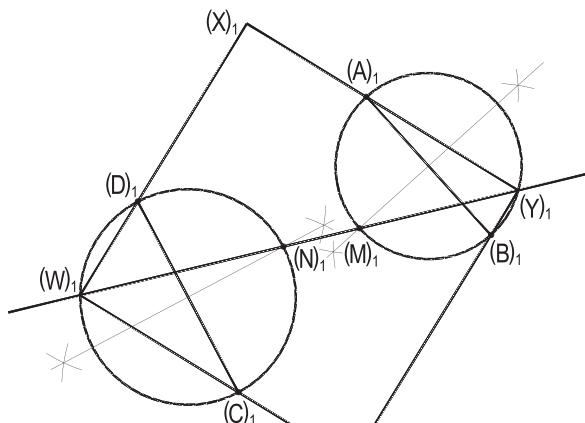


Figura 1191

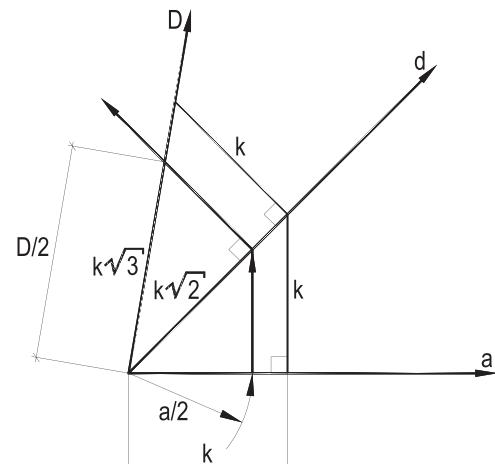


Figura 1192

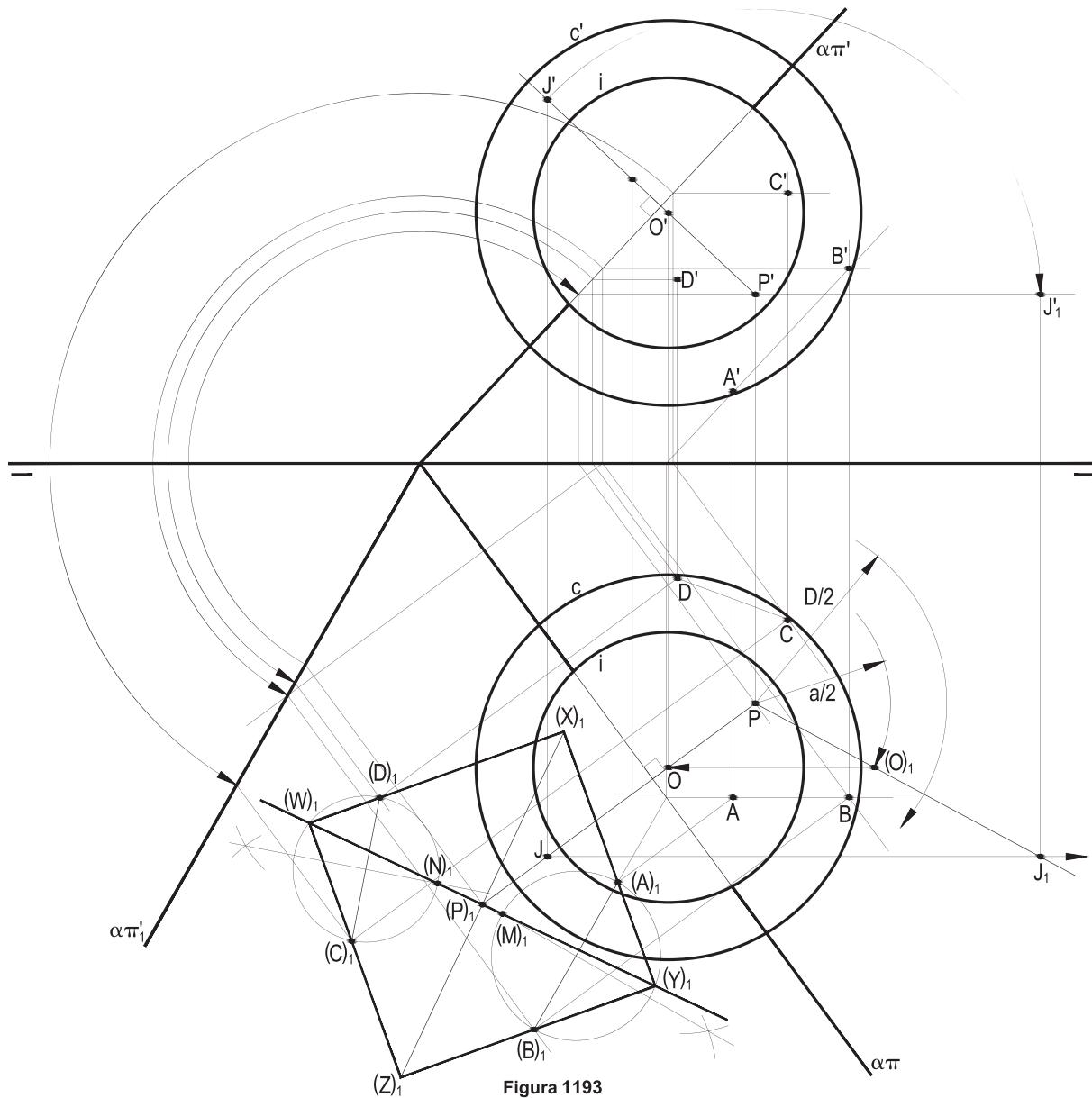


Figura 1193

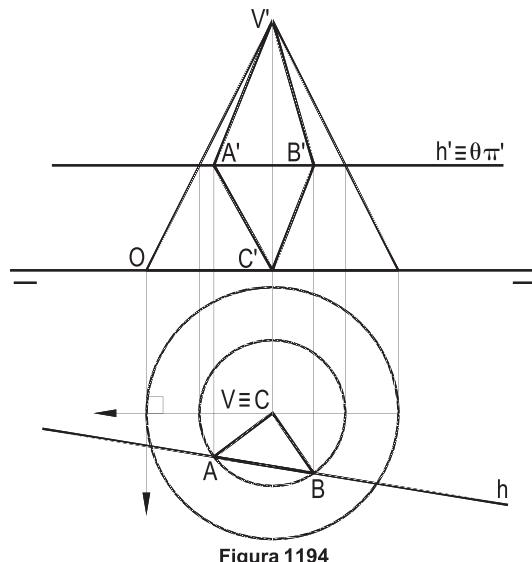
**999** – Construir as projeções do quadrilátero (V)(A)(C)(B), sendo (A) e (B) os traços da horizontal (h) na superfície do cone de revolução (V), transparente, cuja base, de centro (C), tangencia ( $\pi'$ ), sendo dadas as projeções do eixo (V)(O) e de reta (h).

Resolução: O plano horizontal ( $\theta$ ) que contém a reta (h) produz por seção no cone um círculo, que dá, em projeção horizontal, por corte, os vértices A e B – com ordens permutáveis – do quadrilátero pedido, cuja projeção horizontal reduz-se a um triângulo, por ser vertical a reta (V)(C) (Figura 1194).

**1000** – Um octaedro regular tem uma diagonal ( $J(S)$ ) vertical dada por suas projeções e uma das outras duas inclinada de  $75^\circ$  em relação a ( $\pi'$ ), tendo todas as suas faces transparentes.

Considerando a esfera inscrita no octaedro e as seis esferas iguais inscritas nos ângulos poliédricos formados por suas arestas em cada um de seus seis vértices e tangentes exteriormente àquela primeira esfera, inscrita no sólido, pede-se construir as projeções dessas sete esferas, todas, também, admitidas com superfícies transparentes.

Resolução: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 114.11) que o plano  $(\gamma)$ , mediador de duas arestas do octaedro regular, produz, por seção, um losango, cujas diagonais  $(J)(S)$  e  $(M)(N)$  valem, respectivamente, a diagonal e a aresta do sólido, que seu centro  $(O)$  é o centro da esfera inscrita no poliedro e que, então, o círculo  $(O)$  inscrito no losango é um círculo máximo da esfera inscrita no octaedro, trazendo tal seção, além disso, dois círculos menores, iguais, correspondentes a duas esferas menores, iguais, inscritas nos ângulos poliedrinos  $(J)$  e  $(S)$  do sólido e tangentes exteriormente à primeira esfera (Figura 1195).



**Figura 1194**

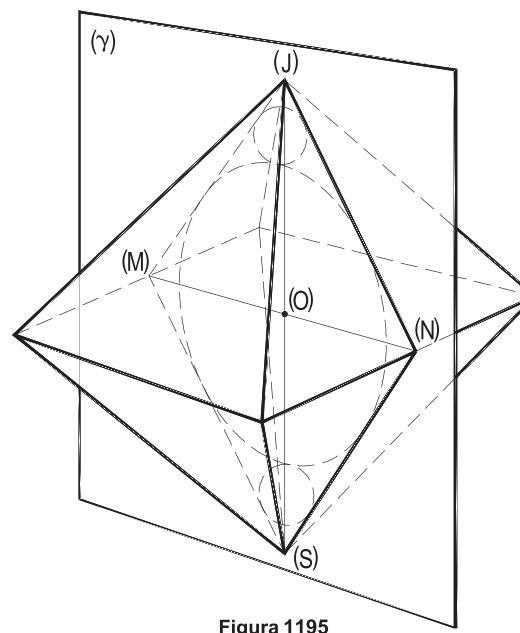
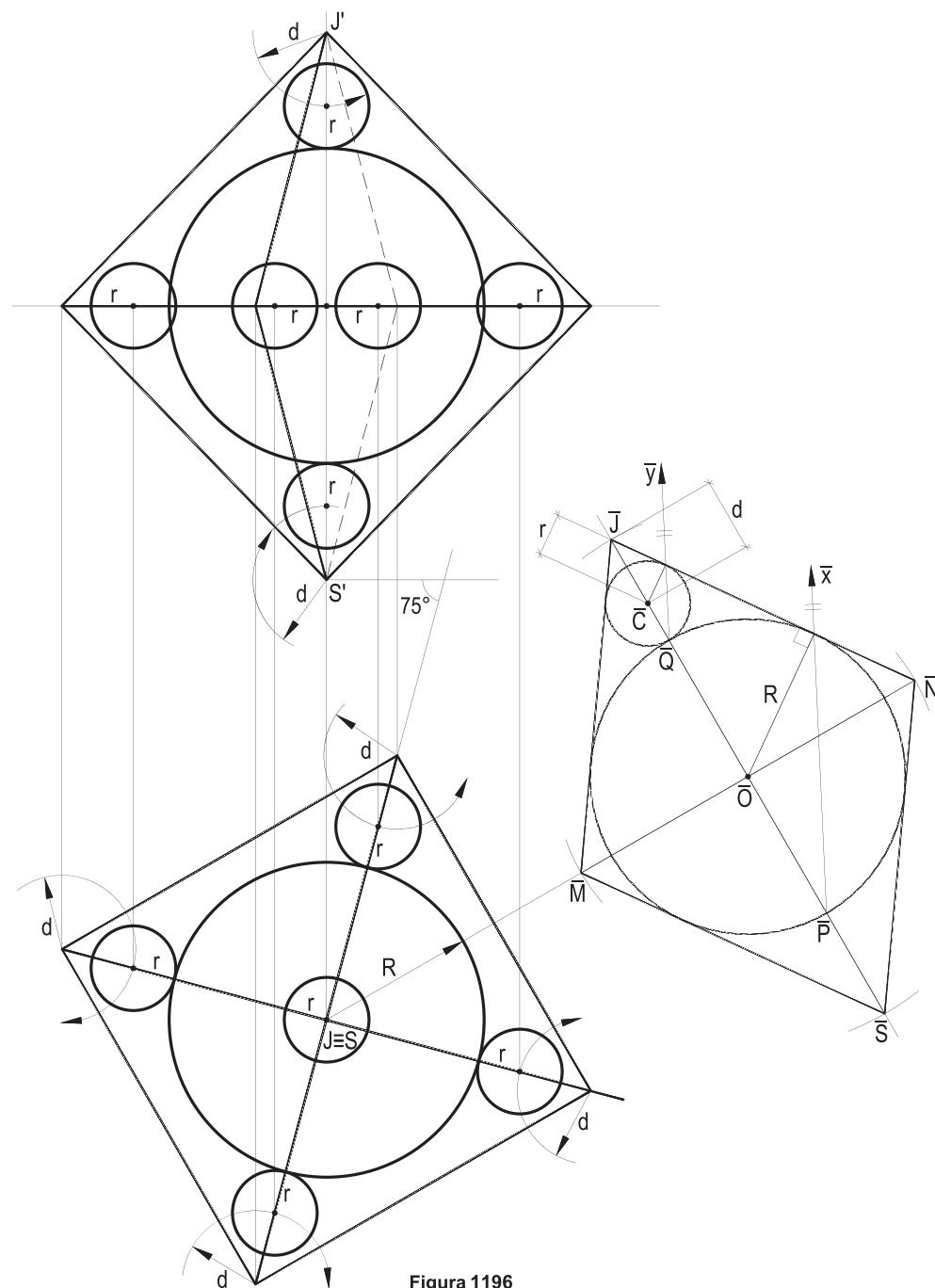


Figura 1195

Assim, obtidas as projeções do octaedro, imediatas, por sua posição particular, com auxílio de uma construção geométrica auxiliar (Figura 1196), o losango  $\overline{J}\overline{M}\overline{S}\overline{N}$ , de diagonais iguais à diagonal e à aresta do octaedro, obtém-se o raio  $R$  da esfera inscrita e, com uma simples homotetia de polo  $\overline{J}$ , as medidas  $r$  e  $d$ , respectivamente, do raio das seis esferas menores e das distâncias, iguais, é claro, do centro de cada uma ao vértice mais próximo do octaedro, com o que se completa a épura (Figura 1196).

Observe-se que a inexistência da linha de terra em nada importa na resolução da questão e que há uma segunda posição para o octaedro, tomando o ângulo de  $75^\circ$  no sentido oposto.





DADOS INTERNACIONAIS PARA CATALOGAÇÃO NA  
PUBLICAÇÃO (CIP)

---

A447g

Almeida, Célio Pinto de, 1937-  
Geometria Descritiva: 1000 Problemas Resolvidos /  
Célio Pinto de Almeida. – Rio de Janeiro :  
G. Ermakoff, 2022.  
352 p. : il. ; 28 cm.

ISBN - 978-65-87730-04-2  
1. Geometria Descritiva – Problemas, questões, exercícios.  
I. Título.

CDD - 516.6

---

ROBERTA MARIA DE O. V. DA COSTA BIBLIOTECÁRIA CRB7 N. 5587

Este livro foi composto na tipologia Minion pro em corpo 12,5/17,3, impresso em papel offset 90g/m<sup>2</sup>, na gráfica Santa Marta – São Paulo.