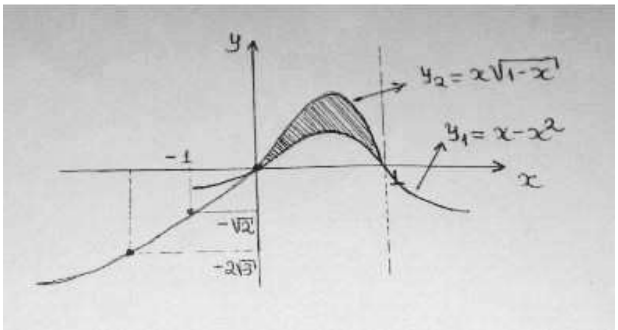
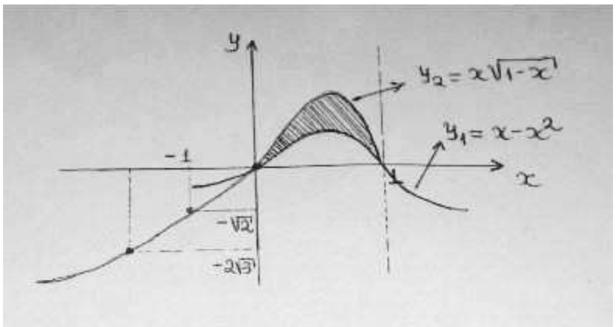
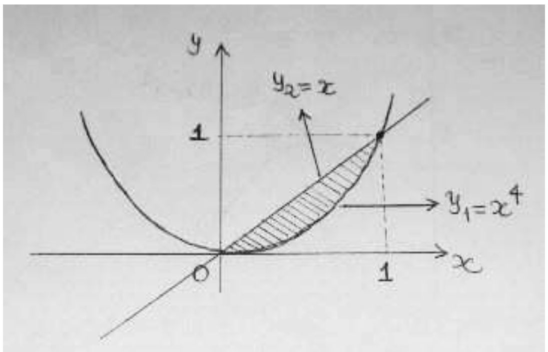
ACADEMIA CLÍNICA DO SABER &
DEPARTAMENTO DE SUPERAÇÃO ACADÉMICO

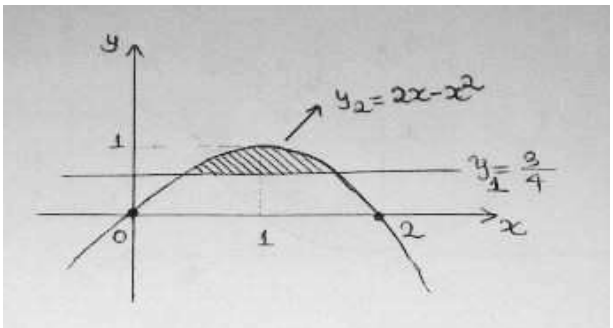
MANUAL DE RESOLUÇÃO DE TESTES DE CÁLCULOS DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS-UAN -2014 -2019

- **FACULDADE DE CIÊNCIAS**
- **FACULDADE DE ENGENHARIA**









PEDRO RAFAEL AFONSO – LUANDA / CACUACO / CIMANGOLA

QUEM SOMOS / NOSSA MISSÃO

ACADEMIA CLÍNICA DO SABER é um centro de Preparatório que tem como missão oferecer orientações, habilidades e conhecimentos que permitem que nossos estudantes superem os desafios e melhorarem o seu desempenho em qualquer instituição de ensino quer seja do ensino médio ou privado.

Alguns dos serviços oferecido pela **ACADEMIA CLÍNICA DO SABER:**

- **EXPLICAÇÃO:** Orientação com qualidade para diversos cursos, tanto do Ensino Médio como Superior.

- **PREPARATÓRIO:** Preparação com qualidade, eficiência para admissão em diversas universidades e cursos.

Professores responsáveis da Academia:

Pedro Rafael Afonso – Física (Lic. em Geofísica, Faculdade de ciências)

Garcia Luvualo – Matemática (ISCED de Luanda)

Alexandre João Emanuel – Programação (Estudante do ISPIL)

1. Integração directa

1.1 – Regras principais para a integração

a) Se $F'(x) = f(x), então$, $\int f(x)dx = F(x) + C$
   Onde C é uma constante arbitrária

2) $\int Af(x) = A \int f(x)\, dx, onde\ A$ é $um\ constante (A \neq 0)$

3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x) dx$

4) se $\int f(x)dx = F(x) + C\ e\ u = \varphi(x)$ é $diferencial$, $então$

$\int f(u) = F(u) + C$

Em particular ,

$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (a \neq 0)$

Tabela de integrais imediatas

I. $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

III. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\, arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (a \neq 0)$

IV. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \quad (a \neq 0)$

V. $\int \frac{dx}{a^2-x} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c \quad (a \neq 0)$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c \quad (a \neq 0)$

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c = -arcos\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (a > 0)$

VIII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0)$; $\int e^x dx = e^x + c$

IX. $\int \sin x\, dx = -cosx + c$; $\int \cos x\, dx = senx + c$

X. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$; $\int \frac{dx}{sen^2 x} = -cotgx + c$;

XI. $\int \frac{dx}{senx} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c = \ln|cossecx - cotgx| + c$

XII. $\int \frac{dx}{cosx} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c = \ln|tgx + secx| + c$

5. Cálculo de integrais definidas através de indefinidas

5-1.Fórmula de Newton –Leibniz

Se $F'(x) = f(x)$, temos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ex. Achar a integral $\int_{-1}^{3} x^4 dx$

Resolução

$$\int_{-1}^{3} x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1}\Big|_{-1}^{3} = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{244}{5}$$

5.2 . Áreas de figuras planas

1º) área de coordenadas cartesianas. Se uma curva contínua é dada em coordenadas cartesianas pela equação $y = f(x)[f(x) \geq 0]$, a área do trapézio mistilíneo , limitado por esta curva, por duas verticias nos pontos$x = a \; e \; x = b$ e pelo segmento do eixo das abcissas $a \leq x \leq b$ é determinada pela fórmula:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ex: calcular a área da figura limitada pela parábola $y = \frac{x^2}{2}$, pelas rectas $x = 1 \; e \; x = 3$ e pelo eixo das abcisssas.

Resolução :

$$A = \int_1^3 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6}\Big|_1^3 = \frac{1}{6}(3^3 - 1^3) = \frac{13}{3}\ u^2$$

1) (Exame 2019) A área limitada pelas curvas $x + y = 2y^2$ e $y = x^3$ é:
$A)$ 0,5 $B) \frac{7}{12}$ $C)$ 1 $D) \frac{11}{4}$ $E)$ 0,45

Resolução:

1º) Passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$x + y = 2y^2 \rightarrow x = 2y^2 - y$, $y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

Fazendo: $x = x \rightarrow 2y^2 - y = \sqrt[3]{y} \rightarrow 2y^2 - y - \sqrt[3]{y} = 0$ (*)

Supondo que: $\sqrt[3]{y} = t \rightarrow y = t^3$, Colocando na equação (*), vem:

$2t^6 - t^3 - t = 0 \rightarrow t(2t^5 - t^2 - 1) = 0 \rightarrow t_1 = 0$ e

$2t^5 - t^2 - 1 = 0$, Considerando que $P(t) = 2t^5 - t^2 - 1$, pelo teorema do resto : Se $t = 1$

$P(1) = 2(1)^5 - (1)^2 - 1 \rightarrow P(1) = 0$

$t_2 = 1$ é uma das raízes da equação

Voltando na suposição:

$y = t^3$ se $t_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0,\ se\ t_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1$

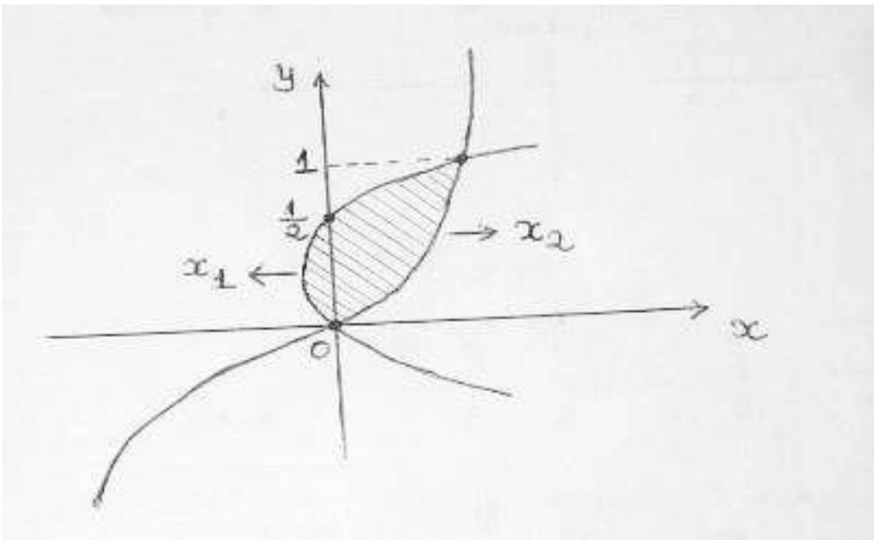
2º) construir o gráfico:

$x = 2y^2 - y$ $(Parábola)$

$ox: y = 0$ $, x = 0$ $, oy: x = 0 , y = 0\ e\ y = \frac{1}{2}$

$y = x^3$ (Parábola cúbica)

Intersecta o eixo das ordenadas e das abcissas na origem $(0; 0)$



3º) Calcular a área: Vamos integrar em relação ao eixo oy

$$A = \int_a^b (x_2 - x_1)dy$$

$A = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{y} - (2y^2 - y)\right) dy = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - 2y^2 + y)\ dy\ A =$

$\int_0^1 y^{\frac{1}{3}} dy - 2\int_0^1 y^2 d\,y + \int_0^1 y\ dy = \left(\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - 2\left(\frac{1}{3}\right)(y^3)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} + \left(\frac{1}{2}\right)(y^2)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$A = \frac{3}{4}\left[\left(1^{\frac{4}{3}}\right) - \left(0^{\frac{4}{3}}\right)\right] - \frac{2}{3}\ [(1^3) - (0^3)] + \frac{1}{2}\ [(1^2) - (0^2)]$

$A = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{9-8+6}{12} \rightarrow A = \frac{7}{12}$ $,Línea\ B)$

2) (Exame 2019) A área limitada pelas curvas $x + y^2 - 4 = 0$ e $x + y = 2$ é: $A)$ 2,3 $B)$2,5 $C)$ 2 $D)$0,5 $E)$ $\frac{9}{2}$

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$x + y^2 - 4 = 0 \rightarrow x = 4 - y^2\ e\ \ x + y = 2 \rightarrow x = 2 - y$

Fazendo: $x = x \rightarrow 4 - y^2 = 2 - y \rightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) = 0$

$(y-2)(y+1) = 0 \rightarrow y_1 = 2\ e\ y_2 = -1$

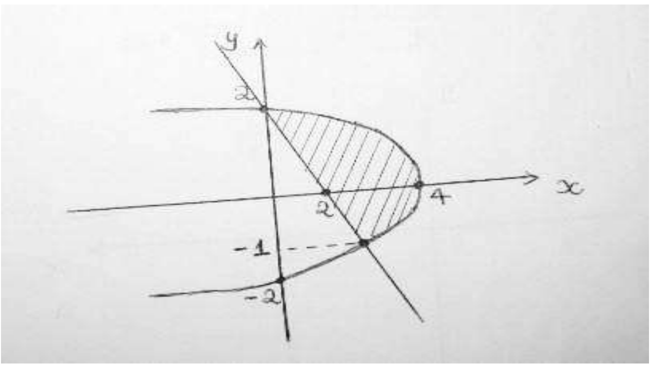
2º) Passo: construir o gráfico:

$x + y^2 - 4 = 0$ (Parábola)

$ox: y = 0\ , x = 4\ ; oy: x = 0\ , y = \pm 2$

$x + y = 2$ (Recta)

$ox: y = 0\ , x = 2\ ; oy: x = 0\ , y = 2$



3º) Passo: Calcular a área (Vamos integrar em relação ao eixo oy)

$A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$

$A = \int_{-1}^{2} \big((4 - y^2) - (2 - y)\big) dy = \int_{-1}^{2} (4 - y^2 - 2 + y)\, dy$

$A = \int_{-1}^{2} (2 + y - y^2)\, dy = 2\int_{-1}^{2} dy + \int_{-1}^{2} y\, dy - \int_{-1}^{2} y^2 dy$

$A = 2\,(y)\Big|_{-1}^{2} + \frac{1}{2}\,(y^2)\Big|_{-1}^{2} - \frac{1}{3}\,(y^3)\Big|_{-1}^{2}$

$A = 2\big(2 - (-1)\big) + \frac{1}{2}\,[(2^2) - ((-1)^2)] - \frac{1}{3}\,[(2^3) - ((-1)^3)]$

$A = 6 + \frac{3}{2} - 3 \rightarrow A = \frac{9}{2}$, Línea E)

3) (Exame 2019) calcular a área limitada pela curva

$x + y^2 = 0$ e a recta $x + y = 0$

Resp: $A)$ 2,25 $B)$ 2,5 $C)$ 0,5 $D)$ 2 $E)$ $outro$

Resolução:

1º) Achar os pontos de intersecção entre a curva e a recta

$x + y^2 = 0 \rightarrow x = -y^2 \quad e\; x + y = 0 \rightarrow x = -y$, fazendo: $x = x$

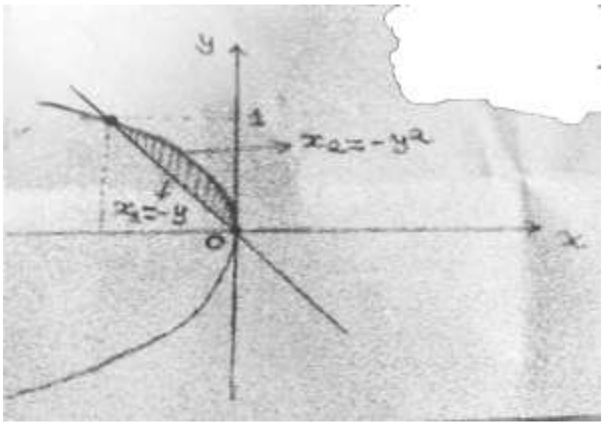
$-y^2 = -y \rightarrow y^2 - y = 0 \rightarrow y(y-1) = 0 \rightarrow y_1 = 0 \;\; e\; y_2 = 1$

2º) Construir o gráfico:

$x + y^2 = 0$ (função par)

ox: $y = 0 \rightarrow x = 0$, $(0;0)$; oy: $x = 0 \rightarrow y = 0$, $(0;0)$

$x + y = 0 \rightarrow y = -x$ (função ímpar, recta que passa na origem)



3º) Passo: calcular a área: $A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$, integrando em relação ao eixo oy

$A = \int_0^1 [-y^2 - (-y)]dy = \int_o^1 (y - y^2)dy = \int_0^1 ydy - \int_0^1 y^2\, dy$, integrando:

$A = \frac{1}{2}(y^2)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \frac{1}{3}\,(y^3)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{1}{2}\,[(1)^2 - (0)^2] - \frac{1}{3}\,[(1)^3 - (0)^3] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$A = \frac{1}{6}$, Línea E)

4) (Exame 2018) calcular a área da figura limitada pelas linhas:

$y = \frac{7}{9}\,x^2 + 1; y = \frac{5}{9}\,x^2 + 3$

Resp: $A)\ 4\ \ B)\ 7\ \ C)\ 6\ \ D)\ 5\ \ E)\ 9\ \ F)\ 10\ \ G)\ 8\ \ H)\ outro$

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$Fazendo\ y = y\ \rightarrow \frac{7}{9}\,x^2 + 1 = \frac{5}{9}\,x^2 + 3\ \rightarrow 7x^2 + 9 = 5x^2 + 27$

$7x^2 + 9 = 5x^2 + 27 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$

2º) Passo: construir o gráfico:

$y = \frac{7}{9}\,x^2 + 1$ (Parábola)

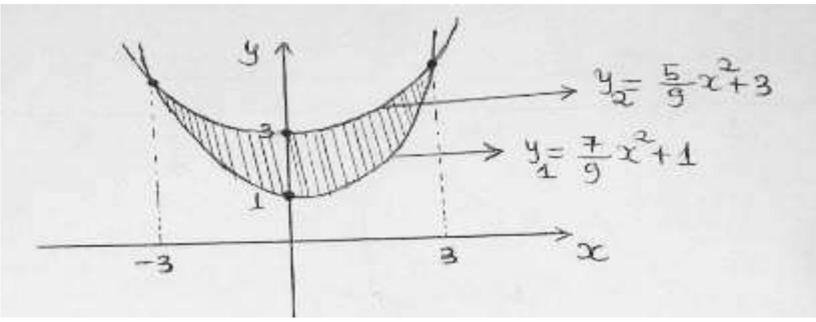
$ox: y = 0\ \rightarrow\ \nexists\ intersecção\ com\ o\ eixo\ ox$

$oy: x = 0\ , y = 1$

$y = \frac{5}{9}\,x^2 + 3$ (Parábola)

$ox: y = 0\ \rightarrow\ \nexists\ intersecção\ com\ o\ eixo\ ox$

$oy: x = 0\ , y = 3$



3º) Passo: Calcular a área (Vamos integrar em relação ao eixo ox)

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

$A = \int_{-3}^{3} \left(\frac{5}{9}\, x^2 + 3 - \left(\frac{7}{9}\, x^2 \ + 1\right)\right) dx =$

$A = \int_{-3}^{3} \left(\frac{5}{9}\, x^2 + 3 - \frac{7}{9}\, x^2 \ - 1\right) dx = \int_{-3}^{3} \left(2 - \frac{2x^2}{9}\right) dx$

Obs.: $\int_{-a}^{a} f(x) = 2 \ \int_0^a f(x)$

$A = 2 \ \int_0^3 \left(2 - \frac{2x^2}{9}\right) dx = 2\left[2\int_0^3 dx - \frac{2}{9} \ \int_0^3 x^2 dx\right]$

$A = 2 \ \left[(2x)_0^3 - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)(x^3)_0^3\right]$

$A = 2 \ \left[(2x)_0^3 - \frac{2}{27}\ (x^3)_0^3\right]$

$A = 2\left[2(3-0) - \frac{2}{27} \ \ (3^3 - 0^3)\right] = 2(\ 6 - 2)$

$A = 8$, Línea G

5) (Exame 2017) A área limitada pelas curvas $y = x - x^2 \ e \ y = x\sqrt{1-x}$ é

A) 0,5 B) 0,1 C) 1 D) 6 E) 0,45 F) 10 G) 0,75 H) outro

Resolução:

1º) passo : Achar os pontos de intersecção entre as curvas:

$y = y \ \rightarrow x - x^2 = x\sqrt{1-x}$

$x - x^2 - x\sqrt{1-x} = 0 \ \rightarrow x\left(\ 1 - x + \ \sqrt{1-x}\right) = 0$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$x_1 = 0 \ e \left(\ 1 - x + \ \sqrt{1-x}\right) = 0$

$\left(\ 1 - x + \ \sqrt{1-x}\right) = 0 \ \rightarrow \ \left(\ \sqrt{1-x}\right) = x - 1 \ \rightarrow$

$(\sqrt{1-x})^2 = \ (x-1)^2 \rightarrow 1 - x = \ x^2 - 2x + 1 \rightarrow \ x^2 - x = 0$

$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \ \rightarrow \ x_2 = 0 \ e \ x_3 = 1$

Limites de integração em relação ao eixo ox : $0 \leq x \ \leq 1$

2º) Passo: Traçar o gráfico para visualizar a área a calcular:

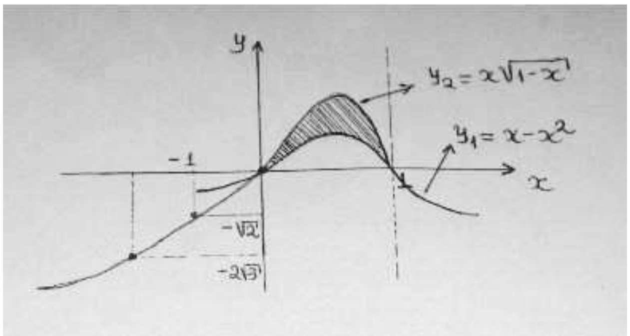
$y = x - x^2$, $ox: y = 0$, $x - x^2 = 0, x = 0$ e $x = 1$

$y = x - x^2, oy: x = 0$, $y = 0$

$y = x\sqrt{1-x}$ $\quad Df = \ ]-\infty; 1\ ]$

$ox: y = 0$, $x\sqrt{1-x} = 0$, $x = 0$ e $x = 1$

$oy: x = 0$; $y = 0$



3º) Passo : calcular a área:

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)\ dx$

$A = \int_0^1 \left[x\sqrt{1-x} - (x - x^2)\right]dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\ dx - \int_0^1 (x - x^2)dx$

$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\ dx$, fazendo: $\sqrt{1-x} = t$,

$1 - x = t^2 \rightarrow x = 1 - t^2, dx = -2t\ dt$

$I_1 = \int_0^1 (1 - t^2)t(-2t)\ dt = \int_0^1 (t^2 - 1)\ 2t^2\ dt = 2\int_0^1 (t^4 - t^2)dt$

$I_1 = 2\ \left[\int_0^1 t^4\ dt - \int_0^1 t^2 dt\right] = 2\ \left[\left(\frac{1}{5}\ t^5\right) \begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left(\frac{1}{3}\ t^3\right) \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right]$

$I_1 = 2\ \left[\left(\frac{1}{5}\ (\sqrt{1-x})^5\right) \begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left(\frac{1}{3}\ (\sqrt{1-x})^3\right) \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right]$

$I_1 = 2\left[\frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{1-1}\right)^5 - \left(\sqrt{1-0}\right)^5\right) - \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{1-1}\right)^3 - \left(\sqrt{1-0}\right)^3\right)\right]$

$I_1 = \frac{4}{15}$

$I_2 = \int_0^1 (x - x^2)dx \; = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left(\frac{x^3}{3}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$I_2 = \left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{6}$

A área finalmente será: $A = I_1 - I_2$

$A = \frac{4}{15} - \frac{1}{6} \rightarrow A = \frac{1}{10} \rightarrow A = 0{,}1\,u^2$, Linea B)

6) (Exame 2016) A área da região limitada pelo gráfico da função $y = \frac{|x|}{1+x^2}$ $, o\ eixo\ ox\ e\ as\ rectas\ x = -2\ e\ x = 1$ é:

$A)\ \ln 10\, u^2$ $B)\ \frac{ln10}{3} u^2$ $C)\ \ln\left(\frac{2}{3}\right) u^2$ $D)\ arctg\ 2\, u^2$ $E)\ arctg\ \left(\frac{5}{2}\right) u^2$

$F)\ arctg\ (10) u^2$ $G) outro$

Resolução:

1º) passo: $y = \frac{|x|}{1+x^2} = \begin{Bmatrix} \frac{x}{1+x^2}\ ; se\ x \geq 0 \\ -\frac{x}{1+x^2}\ \ se\ x < 0 \end{Bmatrix}$

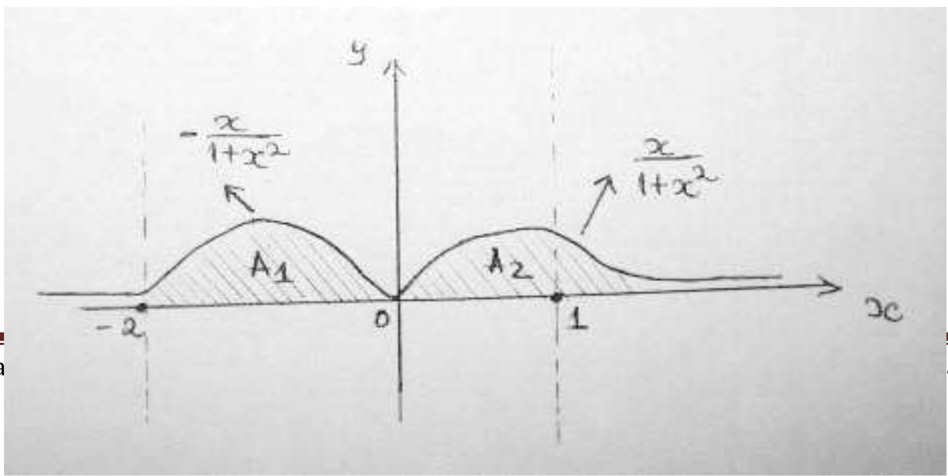
2º) Passo: Achar os interceptos e construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os seus limites de integração:

$y = \frac{x}{1+x^2}, ox{:}\, y = 0\ , x = 0\ ; oy{:}\, x = 0, y = 0\ (f(x) passa\ na\ origem)$

$\forall x \geq 0;\ x \rightarrow +\infty\ , y \rightarrow 0$

$y = -\frac{x}{1+x^2}, ox{:}\, y = 0\ , x = 0\ ; oy{:}\, x = 0, y = 0\ (f(x) passa\ na\ origem)$

$\forall\ x < 0; x \rightarrow\ -\infty\ ; y \rightarrow 0$



3º) Passo: calcular a área:

$A = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_{-2}^{0} -\frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} =$

$A_1 = -\frac{1}{2}\,[\ln(1+0^2) - \ln(1+(-2)^2)] \rightarrow A_1 = \frac{\ln 5}{2}$

$A_2 = \int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$

$A_2 = \frac{1}{2}\,[\ln(1+1^2) - \ln(1+(0)^2)] \rightarrow A_2 = \frac{\ln 2}{2}$

Então a área cera: $A = A_1 + A_2 = \frac{\ln 5}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\,(\ln 5 + \ln 2\,)$

$A = \frac{1}{2}\ln(5 \times 2) \rightarrow A = \frac{1}{2}\ln 10$, Línea H)

7) (Exame 2016) A área limitada pela curva $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$ e as rectas $y = 0$ e $x = 1$ é:

A) $\frac{\pi}{4}$ $B)\ \frac{3\pi}{4}$ $C)\ \frac{5\pi}{3}$ $D)\ \frac{\pi}{6}$ $E)\ \pi$ $F)\ 3$ $G)\ 6$ $H)\ outro$

Resolução:

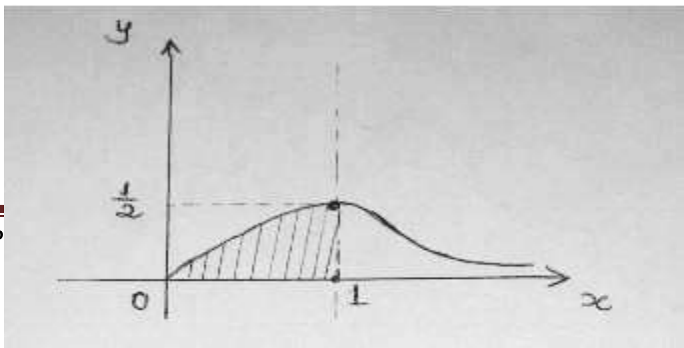
1º) Passo: Achar o domínio, os interceptos e construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os seus limites de integração:

$D_f = [0;\ +\infty[$

$y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}, ox: y = 0\ , x = 0\ ; oy: x = 0, y = 0\ (f(x) passa\ na\ origem)$

$\forall x \geq 0;\ x \rightarrow +\infty\ , y \rightarrow 0$

$se\ x = 1\ , y = \frac{1}{2}\ , se\ x = 0\ , y = 0$



2º) Passo: calcular a área

$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$, $fazendo: x = t^2 \rightarrow dx = 2\ t\ dt$

$Trocando\ os\ limites\ de\ integração\ em\ relação\ a\ t$:

$se\ x = 1 \rightarrow t = 1, se\ x = 0 \rightarrow t = 0$

$A = \int_0^1 \frac{t(2t)dt}{1+(t^2)^3} = 2\ \int_0^1 \frac{t^2dt}{1+(t^3)^2}$,

$supondo\ novamente\ que: t^3 = y\ \rightarrow 3t^2dt = dy\ \rightarrow\ t^2dt = \frac{dy}{3}$

$Trocando\ os\ limites\ de\ integração\ em\ relação$:

$se\ t = 1 \rightarrow y = 1, se\ t = 0 \rightarrow y = 0$

$A = 2\ \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\left(\frac{dy}{3}\right) = \frac{2}{3}\ \int_0^1 \frac{dy}{1+t^2} = \frac{2}{3}\ artg(y)\ \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$A = \frac{2}{3}\ \left(\ arct\ (1) - arctg(0)\right) = \frac{2}{3}\ \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$

$A = \frac{\pi}{6}$, Línea D)

8) (Exame 2016) A área da região compreendida entre a curva $y = 2x^2 - 2x - 1$ e as rectas $x = 1\ e\ x = 10\ e\ o\ eixo\ ox$ é:

Resp: $A)\ \left(\frac{13\sqrt{2}}{9} - 4\right)u^2\ B)\ 28u^2\ \ C)\ 12\ u^2\ D)\ 2016\ u^2\ \ E)\frac{\sqrt{2}}{6}\ u^2\ \ F)\ 57\ u^2\ \sqrt{2}\ u^2\ \ G)\ outro$

Resolução:

A área da figura será: $A = \int_1^{10}(2x^2 - 2x - 1)\ dx$

$A = 2\int_1^{10} x^2dx - 2\int_1^{10} x\ dx - \int_1^{10} dx$, Integrando temos:

$A = \frac{2}{3}\ (x^3)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} - 2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} - (x)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} = \frac{2}{3}\ (x^3)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} - (x^2)\begin{matrix}10\\1\end{matrix} - (x)\begin{matrix}10\\1\end{matrix}$

$A = \frac{2}{3}\ [(10)^3 - (1)^3] - [(10)^2 - (1)^2] - (10 - 1)$

$A = (666 - 99 - 9) \rightarrow A = 558\ u^2$, Línea G

9) (Exame 2016) A área da região compreendida entre o eixo OX e o gráfico da função: $f(x) = x\,e^{2x}$ entre $-1 < x < 1$, é:

Resp:

$A)\ \frac{e^4+2e^2}{4e^2}u^2\ \ B)\ \frac{e^4-1}{4e^2}\ u^2\ \ C)\ \frac{e^{-4}+2e^2}{4e^2}\ u^2\ \ D)\ \frac{e^4+2e^2-3}{e^2}\ u^2\ \ E)\ \frac{e^4-e^2-3}{4e^2}\ u^2$

$F)\ \frac{e^4+2e^2-3}{4e^2}\ u^2\ \ G)\ outro$

Resolução:

A área da região será: $A = \int_{-1}^{1} xe^{2x}dx$, Sabe-se que: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

$A = \int_{-1}^{1} xe^{2x}dx = 2\int_0^1 xe^{2x}dx$, Integrando por parte:

$A = 2\left[(u\,v)_0^1 - \int_0^1 v\,du\right]$

$u = x \to du = dx\,; v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\,e^{2x}$

$A = 2\left[\left(\frac{1}{2}x\,e^{2x}\right)_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx\right] = 2\left[\frac{1}{2}\,\{x\,e^{2x}\}_0^1 - \frac{1}{4}\,(e^{2x})_0^1\right]$,

Substituindo os limites de integração vem:

$A = 2\left[\frac{1}{2}\left\{1\times\ e^{2(1)} - (0\times e^{2(0)}\right\} - \frac{1}{4}\left\{\left(e^{2(1)}\right) - \left(e^{2(0)}\right)\right\}\right]$

$A = 2\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4}\right) \to A = \left(\frac{e^2+1}{2}\right)\ u^2$, Línea G)

10) (Exame 2015) Calcular a área da figura limitada pelas linhas:

$y = x^4\,; y = x$

Resp: $A)\frac{1}{5}\quad B)\frac{2}{5}\quad C)\frac{1}{2}\ \ D)\frac{3}{5}\ \ E)\frac{7}{10}\quad F)\frac{4}{5}\quad G)\frac{3}{10}\quad H)\ outro$

Resolução:

1º) Passo: Achar a intersecção entre as linhas:

$y = y \ \to\ x^4 = x = 0\ \to x^4 - x = 0 \to x(x^3-1) = 0$

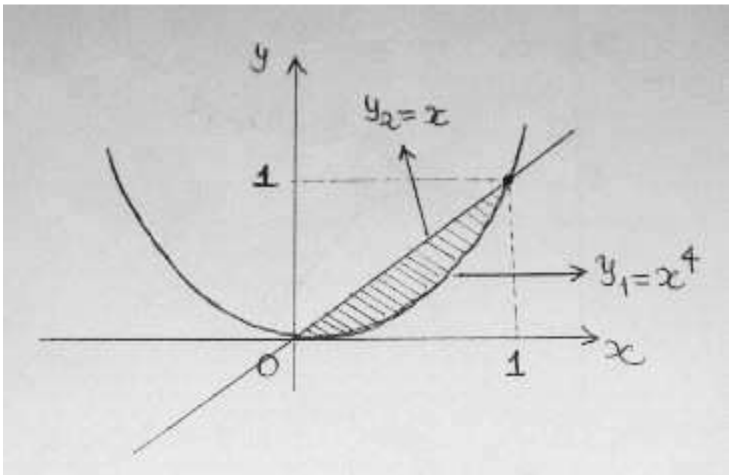
$x(x^3-1) = 0$, pelo anulamento do produto, temos:

$x = 0 \quad\ e\quad x^3 - 1 = 0\ \to\ x^3 = 1 \to x = \sqrt[3]{1}\ \to x = 1$

2º) Passo: construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os limites de integração:

$y = x^4$ (função par), $ox{:}\,y = 0\,; x = 0\ ,\ oy{:}\,x = 0\ e\ y = 0$

$y = x$ (função ímpar), $ox{:}\,y = 0\,; x = 0\ \ ,oy{:}\,x = 0\,; y = 0$



3º) Passo: calcular a área

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

$A = \int_0^1 (x - x^4)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 x^4dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left(\frac{x^5}{5}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$A = \left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1^5}{5}\right) - \left(\frac{0^5}{5}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \rightarrow A = \frac{3}{10}$, Línea G)

11) (Exame 2015) calcular a área da figura limitada pelas linhas

$y = \frac{1}{x^2}$; $y = 0 : x = 0{,}5\ e\ x = 2{,}5$

Resp: $A)$ 1,5 $B)$ 1,6 $C)$ 1,4 $D)$ 1,8 $E)$ 2,0 $F)$ 1,9 $G)$ 1,7 $H)\ outro$

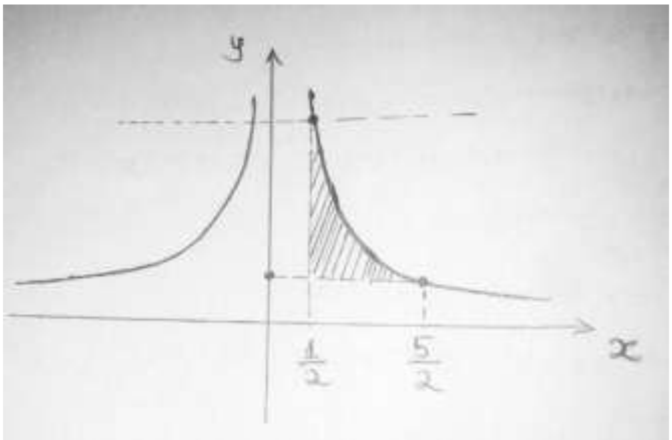
Resolução:

1º) construir o gráfico para visualiza a área a calcular e os limites de integração:

$y = \frac{1}{x^2}$ (Função par) , $x = 0{,}5 \rightarrow x = \frac{1}{2}\ e\ x = 2{,}5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

Quando $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$

$se\ x = 0{,}5$, $y = 4$; $se\ x = 2{,}5$, $y = \frac{4}{25}$



2º) Passo: calcular a área:

$A = \int_a^b f(x)dx$

$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} = -\left(\frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = -\left(\frac{2}{5} - 2\right)$

$A = -\left(-\frac{8}{5}\right) \rightarrow A = 1{,}6$ Línea B)

12) (Exame 2015) calcule a área limitada pelas linhas $y = 2x - x^2; y = \frac{3}{4}$

Resp: $A)\frac{1}{3}\ \ B)\frac{1}{6}\ \ C)\frac{5}{6}\ \ D)\frac{1}{2}\ \ E)\ 1\ \ F)\frac{2}{3}\ \ G)\frac{7}{6}\ \ G)\ outro$

Resolução:

1º) Achar a intersecção entre as linhas fazendo: $y = y$

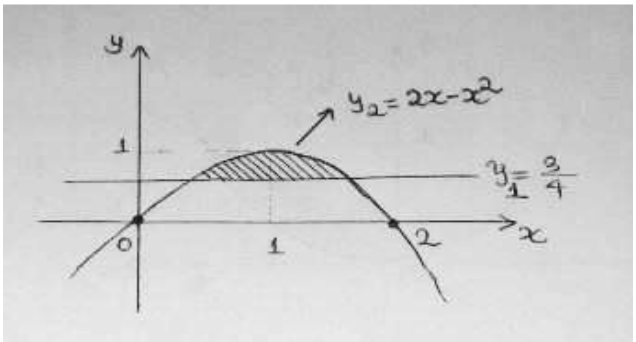
$2x - x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow 8x - 4x^2 - 3 = 0$, Multiplicando pela constante (-1), temos.

$4x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow (2x-1)(2x-3) = 0 \rightarrow \left(x_1 = \frac{1}{2}\ \ e\ x_2 = \frac{3}{2}\right)$

2º) Construir o gráfico:

$y = 2x - x^2, ox: y = 0\ , x = 0\ e\ x = \frac{1}{2}\ ; oy: x = 0\ e\ y = 0$

$y = \frac{3}{4}(Recta\ horizontal)$



3º) Calcular a área:

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[2x - x^2 - \left(\frac{3}{4}\right)\right] dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (8x - 4x^2 - 3)dx$

$A = \frac{1}{4} \left[8 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x\, dx - 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 dx - 3 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx\right]$, Integrando, temos: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$A = \frac{1}{4} \left[8.\frac{1}{2}\, (x^2)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - 4\,.\frac{1}{3}\, (x)^3\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - 3\, (x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\right] =$

$A = \frac{1}{4} \left[4\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} - \frac{4}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} - 3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[8 - \frac{13}{3} - 3\right]$

$A = \frac{2}{3}$, Línea F)

13) (Exame 2014) Calcular a área da figura limitada pelas linhas

$y = x^3\ ; y = 1\ ; x = 2$

Resp: $A)\ 2{,}25\quad B)\ 2\quad C)\ 2{,}75\quad D)\ 2{,}35\quad E)\ 2{,}5\quad F)\ 2{,}65\quad G)\ 3\quad H)\ outro$

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as líneas:

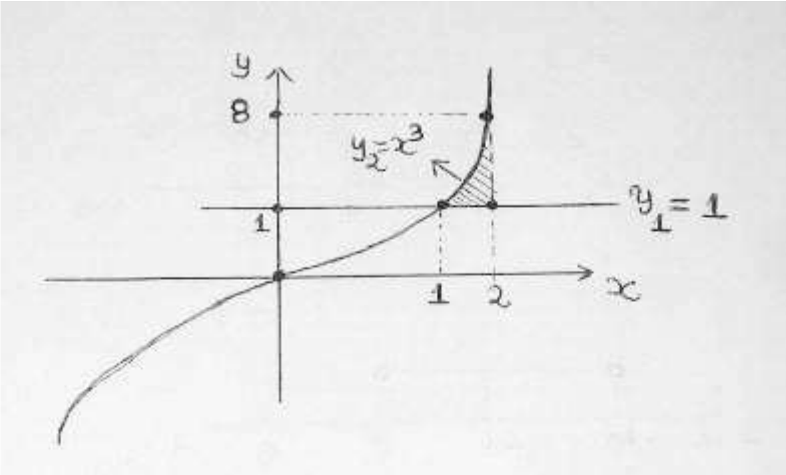
$y = y \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1\, , se\ x = 1\, , y = 1$

$se\ x = 2 \rightarrow y = (2)^3 \rightarrow y = 8$

2º) Passo: construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os limites de integração:

$y = x^3(\ parábola\ cúbica)$

$y = 1(recta\ horizontal), x = 2\ (recta\ vertical)$



3º) Passo calcular a área:

$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

$A = \int_1^2 (x^3 - 1)dx = \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)_1^2 - (x)_1^2$

$A = \frac{1}{4}[(2)^4 - (1)^4] - (2-1) = \frac{15}{4} - 1 = \frac{11}{4} \rightarrow A = 2{,}75\ \ line\ C)$