



## **ACADEMIA CLÍNICA DO SABER – VESTIBULANDO**

**RESOLUÇÃO DOS TESTES DE MATEMÁTICA DA  
UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
2008 Á 2019**

**O SABER NÃO OCUPA LUGAR**

---

**A REPETIÇÃO É A MÃE DAS CIENCIAS**

***UM GUIA DE PREPARAÇÃO***

**Pedro Rafael Afonso**

---

## QUEM SOMOS / NOSSA MISSÃO

**ACADEMIA CLÍNICA DO SABER** é um centro de Preparatório que tem como missão oferecer orientações, habilidades e conhecimentos que permitem que nossos estudantes superem os desafios e melhorem o seu desempenho em uma academia cada vez mais desafiador.

Alguns dos serviços oferecido pela **ACADEMIA CLÍNICA DO SABER**:

✚ **EXPLICAÇÃO:** Orientação com qualidade para diversos cursos, tanto do Ensino Médio como Superior.

✚ **PREPARATÓRIO:** Preparação com qualidade para admissão em diversas universidades e cursos.

Temos Professores de qualidade e capacitados para leccionar. Professores Licenciado em diversas áreas.

## PREFÁCIO

### PARA O ESTUDANTE,

O propósito deste manual é de ajudar os estudantes na resolução dos exercícios dos testes de matemática na área de engenharias. Portanto, recomendamos a utilizar o seu maior tempo em resolver os exercícios.

Quando se resolve um exercício, se aprende muito mais do que só se lê a resolução. É bem sabido que, a prática leva a perfeição. Onde verdadeira aprendizagem requer uma participação activa de sua parte.

Utilize este manual como incentivo para resolver problemas, não como uma forma de evitar a sua resolução.

As suas críticas, sugestão ou dificuldades que tenha encontrado na hora da resolução, pedimos que entre em contacto connosco urgentemente, afim de aperfeiçoamento do manual e suas ideias são fundamentais para o nosso trabalho.

Contactos: 938-979-070 / 940-553-898

E-mail: [academia.clinicadosaber@gmail.com](mailto:academia.clinicadosaber@gmail.com)

1) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 - \sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha$$

Resp: A) 2 B) 0 C)  $2 \sin^2 \alpha$  D)  $\frac{1}{2} \cos^2 \alpha$  E) 1 F)  $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

G)  $\cos 2\alpha$  H) outro

Resolução:

$$2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 - (\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha)$$

Aplicando a transformação:  $a^8 + b^8 = (a^4 + b^4)^2 - 2a^4 b^4$  na segunda expressão, fica:

$$\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)^2 - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$$

Aplicando novamente a transformação:  $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2$ ; fica:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \text{ Substituindo fica:}$$

$$\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha]^2 - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$$

Obs.:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = [1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha]^2 - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$ , Voltando na expressão inicial, vem:

$$2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 - ([1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha]^2 - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha)$$

Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$$2(1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha \cos^4 \alpha) - ((1 - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha) - 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha)$$

Eliminando os parênteses:

$$2 - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha - 1 + 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 4\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha + 2\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$$

Reduzindo os termos semelhantes:

$$= 1 \text{ Resposta: 1, Línea E}$$

2) (Exame 2019/2008) simplifique a expressão:

$$(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$$

Resp: A)  $\sin^2 2\alpha$  B) 1 C) 0 D)  $\cos^2 2\alpha$  E)  $\frac{1}{2} \cos^2 \alpha$  F)  $2 \cos^2 \alpha$  G)  $\sin \alpha \cos \alpha$

H) outro

Resolução:

$$[(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)][(1 - \sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha - \cos \alpha)]$$

Multiplicando termo à termos os dois produtos em parentes rectos fica:

$$(sen\alpha + cos\alpha - 1 + sen^2\alpha + sen\alpha cos\alpha - sen\alpha + sen\alpha cos\alpha + cos^2\alpha - cos\alpha) \times$$

$$(1 + sen\alpha - cos\alpha - sen\alpha - sen^2\alpha + sen\alpha cos\alpha + cos\alpha + sen\alpha cos\alpha - cos^2\alpha)$$

Reduzindo os termos semelhantes, fica:

$$(2sen\alpha cos\alpha + sen^2\alpha + cos^2\alpha - 1)(2sen\alpha cos\alpha - sen^2\alpha - cos^2\alpha + 1)$$

$$[2sen\alpha cos\alpha + (sen^2\alpha + cos^2\alpha) - 1][2sen\alpha cos\alpha - (sen^2\alpha + cos^2\alpha) + 1]$$

$$\text{Obs.: } (sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$(2sen\alpha cos\alpha + 1 - 1)(2sen\alpha cos\alpha - 1 + 1)$$

$$(2sen\alpha cos\alpha)(2sen\alpha cos\alpha); \quad \text{obs: } 2sen\alpha cos\alpha = sen2\alpha$$

$$(sen2\alpha)(sen2\alpha) = sen^2 2\alpha, \text{ Línea A)}$$

3) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:  $\frac{1-sen^6\alpha - cos^6\alpha}{1-sen^4\alpha - cos^4\alpha}$

Resp: A)  $tg^2\alpha$  B) 1 C)  $\frac{1}{2}$  D)  $\frac{3}{2}$  E)  $sen^2\alpha$  F)  $2sec^2\alpha$  G)  $sen^2 2\alpha$  H) outro

Resolução:

$$\frac{1-(sen^6\alpha + cos^6\alpha)}{1-(sen^4\alpha + cos^4\alpha)}$$

Aplicando as transformações:

$$a^6 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 - 2a^3b^3 \quad e \quad a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = (sen^3\alpha + cos^3\alpha)^2 - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

Sabe-se que:  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ , então:

$$sen^3\alpha + cos^3\alpha = (sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha cos\alpha + cos^2\alpha)$$

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = [(sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha cos\alpha + cos^2\alpha)]^2 - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = [(sen\alpha + cos\alpha)(1 - sen\alpha cos\alpha)]^2 - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = (sen\alpha + cos\alpha)^2(1 - sen\alpha cos\alpha)^2 - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$$= (1 + 2sen\alpha cos\alpha)(1 - 2sen\alpha cos\alpha + sen^2\alpha cos^2\alpha) - 2sen^3\alpha cos^3\alpha.$$

Desenvolvendo o producto em parenteses:

$$= 1 - 2sen\alpha cos\alpha + sen^2\alpha cos^2\alpha + 2sen\alpha cos\alpha - 4sen^2\alpha cos^2\alpha + 2sen^3\alpha cos^3\alpha - 2sen^3\alpha cos^3\alpha$$

Reduzindo os termos semelhante:

$$sen^6\alpha + cos^6\alpha = 1 - 3sen^2\alpha cos^2\alpha$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

Obs.:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

Voltando na expressão inicial, temos:

$$\frac{1 - (1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{1 - (1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}, \text{ Eliminando os parênteses fica:}$$

$$\frac{1 - 1 + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 1 + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{3\cancel{\sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha}{2\cancel{\sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha} = \frac{3}{2}, \text{ Línea D)}$$

4) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$\sin 3\alpha \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cos^3 \alpha$$

Resp:

A)  $\cos^3 2\alpha$  B) 1 C) 0 D)  $\frac{1}{2} \sin^3 2\alpha$  E)  $\cos^2 \alpha$  F)  $2\sin^2 \alpha$  G)  $\sin \alpha \cos \alpha$  H) outro

Resolução:

sabe-se que:  $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$  e  $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

$(3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)\sin^3 \alpha + (4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha)\cos^3 \alpha$  eliminando os parenteses, vem:

$3\sin^4 \alpha - 4\sin^6 \alpha + 4\cos^6 \alpha - 3\cos^4 \alpha \rightarrow$  Agrupando

$(3\sin^4 \alpha - 3\cos^4 \alpha) + (-4\sin^6 \alpha + 4\cos^6 \alpha)$  factorizando os termos comuns, vem:

$3(\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) - 4(\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha)$

Sabe-se que:  $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$  e  $a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$

$3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4(\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha)(\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha)$

Note que:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)$

$3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4[(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)] \times [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)]$

$3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)[(1 + \sin \alpha \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)]$

$3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 4(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$

Factorizando a expressão  $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$ , temos:

$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)[3 - 4(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)] \rightarrow$

$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(3 - 4 + 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$  factorizando os sinais, temos:

$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(-1 + 2^2(\sin \alpha \cos \alpha)^2) \rightarrow$

$[-(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)][-(1 - (2\sin \alpha \cos \alpha)^2)]$

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)[-(1 - (2\sin \alpha \cos \alpha)^2)] ,$$

Note:  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$  e  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

$$\cos 2\alpha(1 - \sin^2 2\alpha) , \text{ sabe-se que : } 1 - \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha \times \cos^2 2\alpha = \cos^3 2\alpha , \text{ Línea A)}$$

**5)** (Exame 2019/2008). Simplifique a expressão:

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1} + \sqrt[4]{x} \left( \frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1} - \sqrt{x} \right)}}{x - \sqrt{x^3}}$$

Resp: A)  $\sqrt{x}$  B) 1 C)  $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$  D)  $\frac{1}{x}$  E)  $\sqrt[4]{x} - 1$

F)  $\frac{x}{\sqrt{x}-1}$  G)  $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}$  H) outro

Resolução: *Igualando os índices de todos os radicais com denominador 4, vem:*

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1} + \sqrt[4]{x} \left( \frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1} - \sqrt{x^2} \right)}}{\sqrt[4]{x^4} - \sqrt[4]{x^6}}$$

Fazendo:  $\sqrt[4]{x} = t$  , Temos:

$$= \frac{\sqrt{\frac{t^3-1}{t-1} + t \left( \frac{t^3+1}{t+1} - t^2 \right)}}{t^4 - t^6} = \frac{\sqrt{\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1} + t \left[ \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - t^2 \right]}}{t^4(1-t^2)} = \frac{\sqrt{t^2+t+1+t(t^2-t+1-t^2)}}{t^4(1-t^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{t^2+2t+1}(-t+1)}{t^4(1-t^2)} = -\frac{\sqrt{(t+1)^2}(t-1)}{-t^4(t^2-1)} = \frac{(t+1)(t-1)}{t^4(t^2-1)} = \frac{\cancel{(t^2-1)}}{t^4(\cancel{t^2-1})} = \frac{1}{t^4}$$

Voltando, temos:  $\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^4} = \frac{1}{x}$  . Resposta:  $\frac{1}{x}$  , Línea D)

**6)** (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$\sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}} + \sqrt{3ab} - \sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}} - \sqrt{3ab} \quad \forall 3b > a^3 > 0$$

Resp: A)  $\frac{\sqrt{6ab}}{a}$  B)  $\sqrt{2} a$  C)  $\frac{\sqrt{6ab}}{b}$  D)  $\frac{b}{2}$  E)  $\frac{2a}{\sqrt{b}}$  F)  $\frac{b}{\sqrt{2} a}$  G)  $2 \sqrt{ab}$

H) outro

Resolução:

$$\text{Fazendo: } A = \sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}} + \sqrt{3ab} - \sqrt{\frac{a^3+3b}{2a}} - \sqrt{3ab} / ( )^2$$

Sabe-se que:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , Aplicando temos:

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{2a} + \sqrt{3ab} + \frac{a^3-3b}{2a} - \sqrt{3ab} - 2\sqrt{\left(\frac{a^3+3b}{2a} + \sqrt{3ab}\right)\left(\frac{a^3+3b}{2a} - \sqrt{3ab}\right)}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b+a^3-3b}{2a} - 2\sqrt{\left(\frac{a^3+3b}{2a}\right)^2 - (\sqrt{3ab})^2}$$

$$A^2 = \frac{2a^3+6b}{2a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6+6a^3b+9b^2}{4a^2} - 3ab\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6+6a^3b+9b^2-12a^3b}{4a^2}\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\left[\frac{a^6-6a^3b+9b^2}{4a^2}\right]}$$

$$A^2 = \frac{a^3+3b}{a} - 2\sqrt{\frac{(a^3-3b)^2}{4a^2}} = \frac{a^3+3b}{a} - 2\frac{\sqrt{(a^3-3b)^2}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{a^3+3b}{a} - \frac{2(a^3-3b)}{2a} =$$

$$\frac{a^3+3b}{a} - \frac{(a^3-3b)}{a}$$

pela condição dada,  $3b > a^3 > 0$ ,  $|(a^3 - 3b)| = 3b - a^3$

$$A^2 = \frac{a^3+3b-(3b-a^3)}{a} = \frac{a^3+3b-3b+a^3}{a} = \frac{2a^3}{a} = 2a^2$$

$$A^2 = 2a^2, A = \sqrt{2} a. \text{ Resposta: } \sqrt{2} a, \text{ Línea B)}$$

7) (Exame 2019/2008) Simplifique a expressão:

$$\frac{1 - \frac{1+xy}{1+\sqrt[3]{xy}}}{\sqrt{xy}(1-\sqrt[3]{xy}) - \frac{(1-xy)(\sqrt[3]{xy}-1)}{1+\sqrt{xy}}} \quad \forall xy \geq 0, e xy \neq 1$$

Resp: A)  $xy$  B) 1 C) 0 D)  $2\sqrt{xy}$  E)  $1 - \sqrt{xy}$

F)  $1 + \sqrt[3]{xy}$  G)  $\sqrt[3]{xy}$  H) outro

Resolução:

$$\frac{\frac{1+\sqrt[3]{xy}-(1-xy)}{1+\sqrt[3]{xy}}}{\sqrt{xy}(1-\sqrt[3]{xy}) - \frac{(1-xy)(\sqrt[3]{xy}-1)}{1+\sqrt{xy}}} = \frac{\frac{1+\sqrt[6]{(xy)^2}-(1-xy)}{1+\sqrt[6]{(xy)^2}}}{\frac{\sqrt[6]{(xy)^3}\left(1-\sqrt[6]{(xy)^2}\right)\left(1+\sqrt[6]{(xy)^3}\right)-(1-xy)\left(\sqrt[6]{(xy)^2}-1\right)}{1+\sqrt[6]{(xy)^3}}}$$

Supondo que:  $\sqrt[6]{xy} = t, xy = t^6$



$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1+t^2-(1-t^6)}{1+t^2}}{\frac{t^3(1-t^2)(1+t^3)-(1-t^6)(t^2-1)}{1+t^3}} = \frac{\frac{1+t^2-1+t^6}{1+t^2}}{\frac{t^3(1-t^2)(1+t^3)+(1-t^6)(1-t^2)}{1+t^3}} = \frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{\frac{(1-t^2)(t^3+t^6+1-t^6)}{1+t^3}} = \\ & \frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{\frac{(1-t^2)(1+t^3)}{1+t^3}} \\ & = \frac{\frac{t^2(t^4+1)}{1+t^2}}{1-t^2} = \frac{t^2(t^4+1)}{(1+t^2)(1-t^2)} = \frac{t^2(t^4+1)}{1-t^4}, \text{ pela condição dada: } xy \geq 0, |-t^4| = t^4, \text{ temos:} \\ & = \frac{t^2(t^4+1)}{1-t^4} = t^2, \text{ voltando, temos:} \\ & \sqrt[6]{xy} = t, (\sqrt[6]{xy})^2 = \sqrt[3]{xy} \cdot \text{R: } \sqrt[3]{xy}, \text{ Línea G)} \end{aligned}$$

**8)** (Exame 2019/2008) Resolva a inequação:  $\log_2 |x^2 - x| < 1$

Resp: A)  $] -1; 1[ \cup ] 1; 2[$  B)  $] -1; 0[ \cup ] 0; 1[ \cup ] 1; 2[$  C)  $] -\infty; 0[ \cup ] 1; 2[$

D)  $] 0; 1[ \cup ] 2; +\infty[$  E)  $] 0; 1[ \cup ] 1; +\infty[$

F)  $] -1; 0[ \cup ] 1; 2[$  G)  $] -\infty; -1[ \cup ] 0; 1[ \cup ] 2; +\infty[$  H) *outro*

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular, temos:

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x^2 - x \geq 0 \\ -(x^2 - x) & \text{se } x^2 - x < 0 \end{cases}$$

A inequação é válida em dois sentidos:

$$\begin{aligned} I) & \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x > 0 \\ \log_2 x^2 - x < 1 \end{cases} & II) & \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ -(x^2 - x) > 0 / \times (-1) \\ \log_2 -(x^2 - x) < 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x-1) > 0 \\ \log_2 x^2 - x < \log_2 2 \end{cases} & & \begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x(x-1) < 0 \\ \log_2 (-x^2 + x) < \log_2 2 \end{cases} \\ & \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x-1) > 0 \\ x^2 - x < 2 \end{cases} & & \begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x(x-1) < 0 \\ -x^2 + x < 2 \end{cases} \\ & \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x-1) > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} & & \begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x(x-1) > 0 \\ x^2 - x + 2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

I.1)  $x(x - 1) \geq 0$  (inequação do 2º grau)

II.1)  $x(x - 1) < 0$  (Inequação Do 2º grau)

I.2, II.2  $x(x - 1) > 0$  (inequação do 2º grau)

Aplicando a lei do anulamento do produto para achar as raízes das três inequações acima obtemos: ( $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ )

$x$	$-\infty$	<b>0</b>	<b>1</b>	$+\infty$
I.1) $x(x - 1) \geq 0$ ( $a > 0$ )	■ +	O	- O	■ +
II.1) $x(x - 1) < 0$ ( $a > 0$ )		+	O ■ -	O +
I.2, II.2 $x(x - 1) > 0$ ( $a > 0$ )	■ +	O	-	O ■ +

I.1)  $x(x - 1) \geq 0 \rightarrow x \in ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

II.1)  $x(x - 1) < 0 \rightarrow x \in ]0; 1[$

I.2, II.2  $x(x - 1) > 0 \rightarrow x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$

I.3)  $x^2 - x - 2 < 0$  (inequação do 2º grau)

Aplicando Vieth para achar as raízes da inequação, temos:

$x_1 = 2$  e  $x_2 = -1$

$x$	$-\infty$	$-1$	<b>2</b>	$+\infty$
$x^2 - x - 2 < 0$	+	O ■ -	O	+

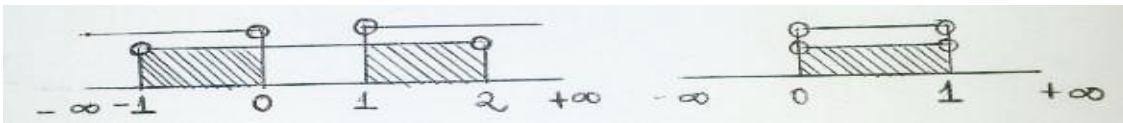
I.3)  $x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow x \in ]-1; 2[$

II.3)  $x^2 - x + 2 > 0$  (inequação do 2º grau)

Aplicando a fórmula resolvente:  $a = 1, b = -1, c = 2$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = -7 \rightarrow \Delta < 0$ , Não existe  $x_1$  e  $x_2$

$$I) \begin{cases} x \in ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[ \\ x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[ \\ x \in ]-1; 2[ \end{cases} \quad II) \begin{cases} x \in ]0; 1[ \\ x \in ]0; 1[ \end{cases}$$



$$S(I) = ]-1; 0[ \cup ]1; 2[$$

$$S(II) = ]0; 1[$$

$$S = S(I) \cup S(II) = ]-1; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; 2[ , \text{Linha B)}$$

9) (Exame 2019/2008) Resolva a inequação:

$$\log_{3x+4} x^2 < 1$$

$$\text{Resp: A) } ]-\infty; -\frac{4}{3}[ \cup ]-1; 0[ \cup ]4; +\infty[ \quad B) ]-1; 0[ \cup ]1; 4[$$

$$C) ]-1; 12[ \cup ]1; 4[ \quad D) ]-\frac{4}{3}; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; 4[$$

$$E) ]-\frac{4}{3}; -1[ \cup ]0; 4[ \quad F) ]-\frac{4}{3}; -1[ \cup ]-1; 0[ \cup ]0; 4[$$

$$G) ]-1; 0[ \cup ]0; 1[ \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$\log_{3x+4} x^2 < 1 \rightarrow \log_{(3x+4)}(3x+4)$$

A inequação será válida nas seguintes condições:

$$I) \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 < 3x+4 \end{cases} \quad II) \begin{cases} 0 < 3x+4 < 1 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 > 3x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < 3x+4 < 1 \\ 3x+4 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$I.1) \text{ e } II.3) \quad x^2 > 0 \rightarrow x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$I.2) \text{ e } II.2) \quad 3x+4 > 0 \rightarrow x > -\frac{4}{3} \rightarrow x \in ]-\frac{4}{3}; +\infty[$$

$$II.1) \quad 0 < 3x+4 < 1; 3x+4 > 0 \text{ e } 3x+4 < 1$$

$$3x+4 > 0 \rightarrow x > -\frac{4}{3} \rightarrow x \in ]-\frac{4}{3}; +\infty[$$

$$3x + 4 < 1 \rightarrow x < -1 \rightarrow x \in ]-\infty; -1[$$

Solução verdadeira:



$$\text{II.1) } x \in \left] -\frac{4}{3}; -1 \right[$$

$$\text{I.3) } x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ (pelo método de vieth } x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -1)$$

$$\text{II.4) } x^2 - 3x - 4 > 0 \text{ (pelo método de vieth } x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -1)$$

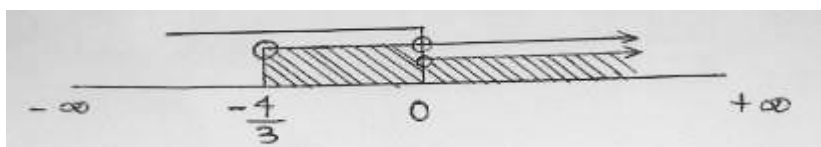
$a > 0$	$-\infty$	$-1$	$4$	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4 < 0$		+	O	+
$x^2 - 3x - 4 > 0$		+	O	+

$$\text{I.3) } x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow x \in ]-1; 4[$$

$$\text{II.4) } x^2 - 3x - 4 > 0 \rightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup ]4; +\infty[$$

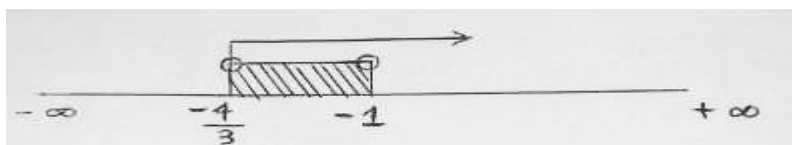
$$\text{I) } \left\{ \begin{array}{l} x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[ \\ x \in \left] -\frac{4}{3}; +\infty[ \right. \\ x \in ]-1; 4[ \end{array} \right\} \quad \text{II) } \left\{ \begin{array}{l} x \in \left] -\frac{4}{3}; -1[ \right. \\ x \in \left] -\frac{4}{3}; +\infty[ \right. \\ x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[ \\ x \in ]-\infty; -1[ \cup ]4; +\infty[ \end{array} \right\}$$

Intersecção I.1) e I.2) :



$$\text{I.4) } x \in \left] -\frac{4}{3}; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

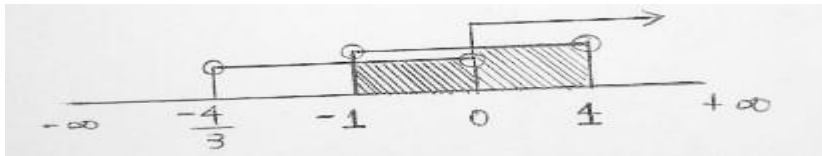
Intersecção II .1) e II.2)



$$\text{II.5) } x \in \left] -\frac{4}{3}; -1[$$

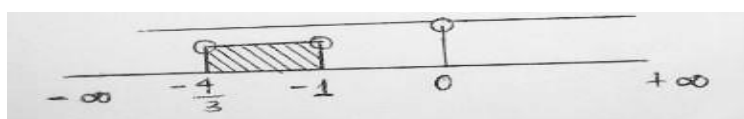
$$I) \left\{ \begin{array}{l} x \in \left] -\frac{4}{3}; 0[ \cup ] 0; +\infty[ \\ x \in ] -1; 4[ \end{array} \right\} \quad II) \left\{ \begin{array}{l} x \in \left] -\frac{4}{3}; -1[ \\ x \in ] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[ \\ x \in ] -\infty; -1[ \cup ] 4; +\infty[ \end{array} \right\}$$

Intersecção I.4) e I.3):



$$S(I) = ] -1; 0[ \cup ] 0; 4[$$

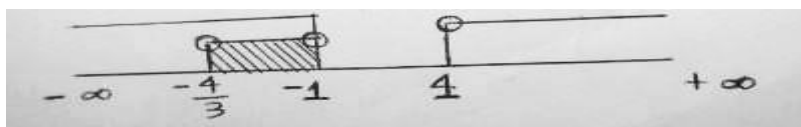
Intersecção II.5) e II.3):



$$II.6) \quad x \in \left] -\frac{4}{3}; -1[ \right.$$

$$II) \left\{ \begin{array}{l} x \in \left] -\frac{4}{3}; -1[ \\ x \in ] -\infty; -1[ \cup ] 4; +\infty[ \end{array} \right\}$$

Intersecção II.4) e II.6) :



$$S(II) = \left] -\frac{4}{3}; -1[ \right.$$

A solução geral da inequação será:  $S = S(I) \cup S(II)$

$$S = \left] -\frac{4}{3}; -1[ \cup ] -1; 0[ \cup ] 0; 4[ , \text{Línea F)}$$

**10)** (Exame 2019/2008 – Variante 1E): Resolva a inequação:

$$x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{Resp: A) } \left] 0; \frac{1}{8} \right] \cup [1; +\infty[ \quad B) ] 0; 1[ \cup ] 2; +\infty[ \quad C) \left] 0; \frac{1}{8} \right[ \cup ] 1; 2[$$

$$D) ] 0; 1[ \cup ] 1; +\infty[ \quad E) \left] \frac{1}{8}; 1 \right[ \cup ] 1; 2[ \quad F) \left] \frac{1}{8}; 1 \right] \cup ] 2; +\infty[$$

$$G) ] 0; 1[ \cup ] 1; 2[ \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0 \rightarrow x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \frac{1}{x}$$

$$x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > x^{-1} \text{ (Inequação exponencial)}$$

A inequação será válida em dois sentidos :

$$\text{I)} \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 0 \\ 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1 \end{cases}$$

$$\text{I.3)} 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1 \text{ (inequação logarítmica)}$$

Multiplicando por (-1) todos os termos da inequação, vem:

$$\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 < 1 \rightarrow \log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 < 0$$

$$\text{Fazendo: } \log_2 x = t, \quad t^2 + 2t - 3 < 0 \text{ (inequação do 2º grau)}$$

Resolvendo pelo método de Vieth para encontrarmos as raízes, achamos:

$$t_1 = 1 \text{ e } t_2 = -3$$

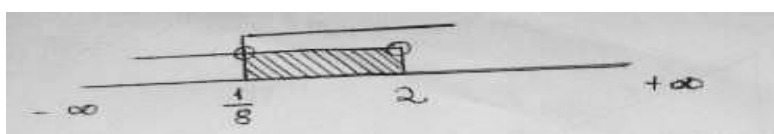
$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$+\infty$
$t^2 + 2t - 3 < 0$	+	O	O	+

$$t \in ]-3; 1[ \text{ ou } t > -3 \text{ e } t < 1, \text{ Voltando na suposição:}$$

$$t > -3 \rightarrow \log_2 x > -3 \rightarrow \log_2 x > \log_2 2^{-3} \rightarrow x > 2^{-3} \rightarrow x > \frac{1}{8}$$

$$t < 1 \rightarrow \log_2 x < 1 \rightarrow \log_2 x < \log_2 2 \rightarrow x < 2$$

$$\text{Intercedendo as desigualdades: } x > \frac{1}{8} \text{ e } x < 2$$



$$\text{I.3)} x \in \left] \frac{1}{8}; 2 \right[$$

$$\text{II.3)} 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1 \text{ (inequação logarítmica)}$$

Multiplicando por (-1) todos os termos da inequação, vem:

$$\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 > 1 \rightarrow \log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 > 0$$

$$\text{Fazendo: } \log_2 x = t, \quad t^2 + 2t - 3 > 0 \text{ (inequação do 2º grau)}$$

Resolvendo pelo método de Vieth para encontrarmos as raízes, achamos:

$$t_1 = 1 \text{ e } t_2 = -3$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$+\infty$
$t^2 + 2t - 3 > 0$	$+$	$0$	$-$	$0$

$t \in ]-\infty; -3[ \cup ]1; +\infty[$  ou  $t < -3$  e  $t > 1$ , Voltando na suposição:

$$t < -3 \rightarrow \log_2 x < -3 \rightarrow \log_2 x < \log_2 2^{-3} \rightarrow x < 2^{-3} \rightarrow x < \frac{1}{8}$$

$$t > 1 \rightarrow \log_2 x > 1 \rightarrow \log_2 x > \log_2 2 \rightarrow x > 2$$

$$\text{II.3) } x \in ]-\infty; \frac{1}{8}[ \cup ]1; +\infty[$$

$$\text{I) } \begin{cases} ]1; +\infty[ \\ ]0; +\infty[ \\ ]\frac{1}{8}; 2[ \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} ]0; 1[ \\ ]0; +\infty[ \\ ]-\infty; \frac{1}{8}[ \cup ]2; +\infty[ \end{cases}$$

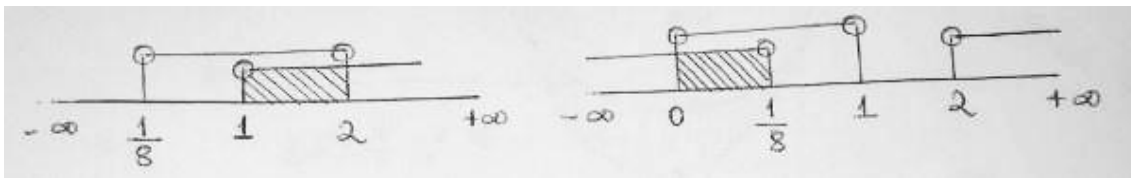
Interceder aos intervalos:  $]1; +\infty[ \cap ]0; +\infty[ = ]1; +\infty[$

Interceder os intervalos:  $]0; +\infty[ \cap ]0; 1[ = ]0; 1[$

$$\text{I) } \begin{cases} ]1; +\infty[ \\ ]\frac{1}{8}; 2[ \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} ]0; 1[ \\ ]-\infty; \frac{1}{8}[ \cup ]2; +\infty[ \end{cases}$$

Intercedendo finalmente as duas soluções de cada sistema, vem:



$$S_1 = ]1; 2[$$

$$S_2 = ]0; \frac{1}{8}[$$

A solução da inequação será:  $S = S_1 \cup S_2$

$$S = ]0; \frac{1}{8}[ \cup ]1; 2[ \text{ , Línea C)}$$

**11)** (Exame 2019) O valor de  $\text{sen} \left( 2\alpha + \frac{5\pi}{4} \right)$  dado que  $\text{tg} \alpha = \frac{2}{3}$  é:

$$\text{Resp: A) } \frac{7\sqrt{7}}{6} \quad \text{B) } -\frac{17\sqrt{2}}{26} \quad \text{C) } -\frac{17\sqrt{3}}{13} \quad \text{D) } \frac{17\sqrt{2}}{26} \quad \text{E) } \frac{17\sqrt{2}}{13}$$

Resolução:

Sabe-se que:

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$ , então:

$$\text{sen}\left(2\alpha + \frac{5\pi}{4}\right) = \text{sen}2\alpha \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cos2\alpha$$

$$\text{sen}\left(2\alpha + \frac{5\pi}{4}\right) = \text{sen}2\alpha \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos2\alpha$$

$$\text{sen}\left(2\alpha + \frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\text{sen}2\alpha + \cos2\alpha) (*)$$

Sabe-se que:

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{\text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} \rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{13}{9}} = \frac{4}{13} \rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{4}{13} \rightarrow$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \text{tg}^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{13}{9}} = \frac{9}{13} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{13} \rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Sabe-se também que:

$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha \cos\alpha \rightarrow \text{sen}2\alpha = 2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13} (**)$$

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \rightarrow \cos2\alpha = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{5}{13} (***)$$

Substituindo (\*\*) e (\*\*\*) em (\*), vem:

$$\text{sen}\left(2\alpha + \frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) = -\frac{17\sqrt{2}}{26}, \text{Linha B)}$$



- 12)** (Exame 2019) A área limitada pelas curvas  $x + y = 2y^2$  e  $y = x^3$  é: A) 0,5 B)  $\frac{7}{12}$  C) 1 D)  $\frac{11}{4}$  E) 0,45

Resolução:

1º) Passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$$x + y = 2y^2 \rightarrow x = 2y^2 - y, \quad y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$\text{Fazendo: } x = x \rightarrow 2y^2 - y = \sqrt[3]{y} \rightarrow 2y^2 - y - \sqrt[3]{y} = 0 (*)$$

Supondo que:  $\sqrt[3]{y} = t \rightarrow y = t^3$ , Colocando na equação (\*), vem:

$$2t^6 - t^3 - t = 0 \rightarrow t(2t^5 - t^2 - 1) = 0 \rightarrow t_1 = 0 \text{ e}$$

$2t^5 - t^2 - 1 = 0$ , Considerando que  $P(t) = 2t^5 - t^2 - 1$ , pelo teorema do resto : Se  $t = 1$

$$P(1) = 2(1)^5 - (1)^2 - 1 \rightarrow P(1) = 0$$

$t_2 = 1$  é uma das raízes da equação

Voltando na suposição:

$$y = t^3 \text{ se } t_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0, \text{ se } t_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1$$

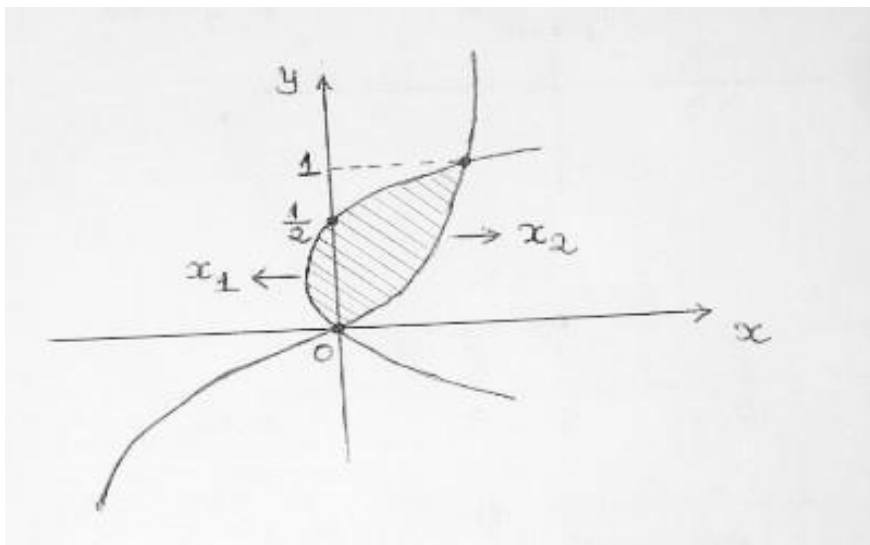
2º) construir o gráfico:

$$x = 2y^2 - y \text{ (Parábola)}$$

$$ox: y = 0, x = 0, oy: x = 0, y = 0 \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

$$y = x^3 \text{ (Parábola cúbica)}$$

Intersecta o eixo das ordenadas e das abscissas na origem (0; 0)



3º) Calcular a área: Vamos integrar em relação ao eixo  $oy$

$$A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - (2y^2 - y)) dy = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - 2y^2 + y) dy \quad A =$$

$$\int_0^1 y^{\frac{1}{3}} dy - 2 \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 y dy = \left( \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right) \Big|_0^1 - 2 \left( \frac{1}{3} \right) (y^3) \Big|_0^1 + \left( \frac{1}{2} \right) (y^2) \Big|_0^1$$

$$A = \frac{3}{4} \left[ \left( 1^{\frac{4}{3}} \right) - \left( 0^{\frac{4}{3}} \right) \right] - \frac{2}{3} [(1^3) - (0^3)] + \frac{1}{2} [(1^2) - (0^2)]$$

$$A = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{9-8+6}{12} \rightarrow A = \frac{7}{12} \quad , \text{Línea B})$$

**13)** (Exame 2019) A área limitada pelas curvas  $x + y^2 - 4 = 0$  e  $x + y = 2$  é: A) 2,3 B) 2,5 C) 2 D) 0,5 E)  $\frac{9}{2}$

Resolução:

1º) passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$$x + y^2 - 4 = 0 \rightarrow x = 4 - y^2 \text{ e } x + y = 2 \rightarrow x = 2 - y$$

$$\text{Fazendo: } x = x \rightarrow 4 - y^2 = 2 - y \rightarrow y^2 - y - 2 = 0$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1) = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0 \rightarrow y_1 = 2 \text{ e } y_2 = -1$$

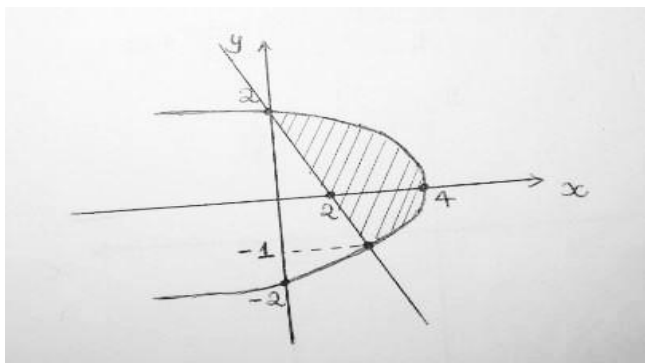
2º) Passo: construir o gráfico:

$$x + y^2 - 4 = 0 \text{ (Parábola)}$$

$$ox: y = 0, x = 4; oy: x = 0, y = \pm 2$$

$$x + y = 2 \text{ (Recta)}$$

$$ox: y = 0, x = 2; oy: x = 0, y = 2$$



3º) Passo: Calcular a área (Vamos integrar em relação ao eixo  $oy$ )

$$A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$$

$$A = \int_{-1}^2 ((4 - y^2) - (2 - y)) dy = \int_{-1}^2 (4 - y^2 - 2 + y) dy$$

$$A = \int_{-1}^2 (2 + y - y^2) dy = 2 \int_{-1}^2 dy + \int_{-1}^2 y dy - \int_{-1}^2 y^2 dy$$

$$A = 2(y)_{-1}^2 + \frac{1}{2}(y^2)_{-1}^2 - \frac{1}{3}(y^3)_{-1}^2$$

$$A = 2(2 - (-1)) + \frac{1}{2} [(2^2) - ((-1)^2)] - \frac{1}{3} [(2^3) - ((-1)^3)]$$

$$A = 6 + \frac{3}{2} - 3 \rightarrow A = \frac{9}{2}, \text{ Línea E)}$$

**14)** (Exame – 2019): Dado um plano  $\pi: x - 4y + 5z + 3 = 0$ , um plano que contém o ponto  $A(2; 0; 1)$  e é paralelo a  $\pi$  é:

Resp: A)  $x + 3y - z - 1 = 0$  B)  $6x - 6y + 5z - 17 = 0$

C)  $x - 4y + 5z - 7 = 0$  D)  $y + 5z - 5 = 0$

E)  $-3x + y + 5z + 1 = 0$

Resolução:

A equação de um plano é:  $\pi': ax + by + cz + d = 0$

Onde:  $v' = (a; b; c)$  é o vector director do plano  $\pi'$

O vector director do plano  $\pi$  é:  $v = (1; -4; 5)$

O plano  $\pi$  é paralelo ao plano  $\pi'$  ( $\pi' \parallel \pi$ ), Logo terão o mesmo vector director, ou seja:

$$v' = v = (1; -4; 5)$$

$$v' = (1; -4; 5) = (a; b; c)$$

Teremos:  $\pi': x - 4y + 5z + d = 0$

Falta encontrar o parâmetro ( $d$ )

Como o plano  $\pi'$  contém o ponto  $A(2; 0; 1)$  temos:

$$2 - 4(0) + 5(1) + d = 0$$

$$2 + 5 + d = 0$$

$$d = -7$$

Finalmente temos:  $\pi': x - 4y + 5z - 7 = 0$ , Línea C)

**15)** (Exame 2019 – Variante 8E):

O valor de  $\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right)$  se  $\cotg\alpha = \frac{1}{2}$  é:

Resolução:  $\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right) = ?$  se  $\cotg\alpha = \frac{1}{2}$

OBS.:  $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$$\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right) = \cos 2\alpha \cdot \cos \frac{7\pi}{4} - \sin 2\alpha \cdot \sin \frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin 2\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$$

Sabe-se que que:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{e} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) (*)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Substituindo em (\*):

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right) + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \left(\frac{-3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \left(\frac{1}{5}\right) \right]$$

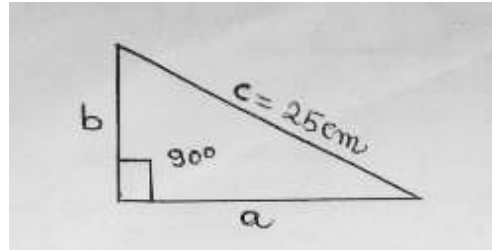
$$\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

- 16)** (Exame – 2019 – segunda chamada): Em um triângulo rectângulo, a hipotenusa mede 25 cm e a soma dos catetos é 35 cm. Determina a medida de cada cateto

Resolução:

$$c = 25 \text{ cm}$$

$$a + b = 35 \text{ cm}, b = 35 \text{ cm} - a$$



Condição de existência:  $a < 25 \text{ cm}$  e  $b < 25 \text{ cm}$

Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \rightarrow a^2 + (35 - a)^2 = (25)^2 \rightarrow a^2 + 1225 - 70a + a^2 = 625 \\ 2a^2 - 70a + 1225 - 625 &= 0 \rightarrow 2a^2 - 70a + 600 = 0 \quad \div (2) \\ a^2 - 35a + 300 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-35)^2 - 4(1)(300)$$

$$\Delta = 1225 - 1200$$

$$\Delta = 25$$

$$a_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow a_{1/2} = \frac{-(-35) \pm \sqrt{25}}{2(1)} \rightarrow a_{1/2} = \frac{35 \pm 5}{2}$$

$$a_1 = \frac{35+5}{2} \rightarrow a_1 = \frac{40}{2} \rightarrow a_1 = 20 \text{ cm}$$

$$a_2 = \frac{35-5}{2} \rightarrow a_2 = \frac{30}{2} \rightarrow a_2 = 10 \text{ cm}$$

$$b = 35 \text{ cm} - a$$

$$\text{se } a = 20 \text{ cm} \rightarrow b = 15 \text{ cm}$$

$$\text{se } a = 10 \text{ cm} \rightarrow b = 25 \text{ cm (não satisfaz a condição)}$$

Logo os catetos do triângulo são: 20 cm e 15 cm

17) (Exame 2019) calcular a área limitada pela curva

$$x + y^2 = 0 \text{ e a recta } x + y = 0$$

Resp: A) 2,25 B) 2,5 C) 0,5 D) 2 E) outro

Resolução:

1º) Achar os pontos de intersecção entre a curva e a recta

$$x + y^2 = 0 \rightarrow x = -y^2 \text{ e } x + y = 0 \rightarrow x = -y, \text{ fazendo: } x = x$$

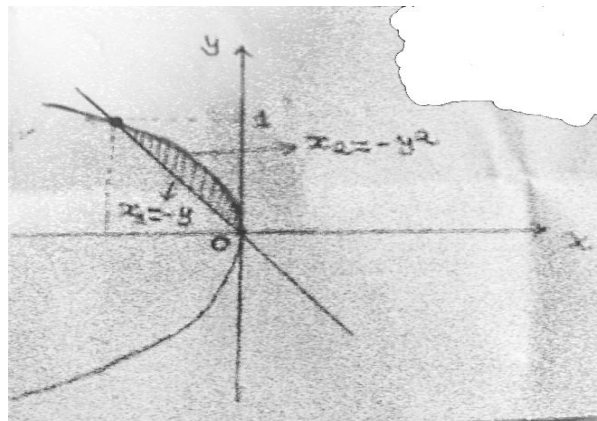
$$-y^2 = -y \rightarrow y^2 - y = 0 \rightarrow y(y - 1) = 0 \rightarrow y_1 = 0 \text{ e } y_2 = 1$$

2º) Construir o gráfico:

$$x + y^2 = 0 \text{ (função par)}$$

$$ox: y = 0 \rightarrow x = 0, (0; 0) ; \quad oy: x = 0 \rightarrow y = 0, (0; 0)$$

$$x + y = 0 \rightarrow y = -x \text{ (função ímpar, recta que passa na origem)}$$



3º) Passo: calcular a área:  $A = \int_a^b (x_2 - x_1) dy$ , integrando em relação ao eixo  $oy$

$$A = \int_0^1 [-y^2 - (-y)] dy = \int_0^1 (y - y^2) dy = \int_0^1 y dy - \int_0^1 y^2 dy, \text{ integrando:}$$

$$A = \frac{1}{2} (y^2)_0^1 - \frac{1}{3} (y^3)_0^1 = \frac{1}{2} [(1)^2 - (0)^2] - \frac{1}{3} [(1)^3 - (0)^3] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{6}, \text{ Línea E)}$$

**18)** (Exame 2019) Simplificar a expressão:

$$\left[ \frac{(x + \sqrt[3]{2ax^2})(2a + \sqrt[3]{4a^2x})^{-1} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - (2a)^{-\frac{1}{3}} \right]^{-6}$$

Resp:

A)  $12a^2x^2$  B)  $15a^2x^4$  C)  $16\frac{a^4}{x^2}$  D)  $10\frac{a^2}{x^4}$  E)  $12\frac{a^3}{x^2}$  F)  $10\frac{a^2}{x^2}$  G)  $16a^4x^2$  H) *outro*

Resolução:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{((\sqrt[3]{x})^3 + \sqrt[3]{2ax^2})(\sqrt[3]{2a})^3 + \sqrt[3]{4a^2x})^{-1} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} = \left[ \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a})}{(\sqrt[3]{2a})^3 + \sqrt[3]{4a^2x})^1} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} \\ & \left[ \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a})}{\sqrt[3]{4a^2}(\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{x})} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} = \left[ \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{4a^2}} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} = \left[ \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[3]{4a^2}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} \\ & \left[ \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - (\sqrt[3]{2a})^2}{\sqrt[3]{4a^2}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} = \left[ \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a})}{\sqrt[3]{4a^2}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} \\ & \left[ \frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a})}{\sqrt[3]{4a^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2a}} \right]^{-6} = \left[ \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{4a^2}} \right]^{-6} = \left[ \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4a^2}} \right]^{-6} = \left[ \frac{\sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[3]{x}} \right]^6 = \frac{(\sqrt[3]{4a^2})^6}{(\sqrt[3]{x})^6} \end{aligned}$$

Simplificando os expoentes temos finalmente:  $\frac{16a^4}{x^2}$ , Linha C)

**19)** (Exame 2018) Resolva a equação:

$$tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + cotg^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 4tgx$$

Resp: A)  $x = \pi k$  B)  $x = \pi k - \frac{\pi}{4}$  C)  $x = \pi k - \frac{\pi}{2}$  D)  $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$

E)  $x = \pi k + \frac{\pi}{4}$  F)  $x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$  G)  $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$  H) *outro*

Resolução:

Obs.:

$$tg^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}, cotg^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}, tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Voltando na expressão inicial:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - 2 = 4 \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ achando o denominador comum vem:}$$

$$\frac{1-2\cancel{\cos x} + \cos^2 x + 1 + 2\cancel{\cos x} + \cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{4 \operatorname{sen} x}{\cos x},$$

reduzindo os termos semelhantes:

$$\frac{4\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{4 \operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \cos^3 x = \operatorname{sen}^3 x \rightarrow \operatorname{sen}^3 x = \cos^3 x$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por  $\cos^3 x$ , fica:

$$\operatorname{tg}^3 x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt[3]{1} \rightarrow \operatorname{tg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(1), \text{ o arco cujo tangente vale } 1 \text{ é: } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Expressão geral para as tangentes:  $x = \alpha + \pi k$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Condição de existência:

$$1 + \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq -1 \rightarrow x \neq \pi + 2\pi k$$

$$1 - \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq 1 \rightarrow x \neq 2\pi k$$

$$\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

A solução  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  satisfaz a condição de existência, logo:

$$S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \right\} k \in \mathbb{Z}, \text{ Línea E)}$$

20)(Exame 2018) Resolver a equação:

$$(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 + \operatorname{tg} x = 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\text{Resp: A) } x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{B) } x = \pi k - \frac{\pi}{4} \quad \text{C) } x = 2\pi k - \frac{\pi}{4} \quad \text{D) } x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{E) } x = \frac{\pi k}{4} - \frac{\pi}{8} \quad \text{F) } x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8} \quad \text{G) } x = \pi k + \frac{\pi}{2} \quad \text{H) outro}$$

Resolução:

Desenvolvendo o quadrado da diferença do primeiro termo:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x + \operatorname{tg} x = 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) - 2\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{tg} x = 2\operatorname{sen}^2 x \quad (2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x)$$



$$1 - 2\operatorname{sen} x \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 - \cos 2x$$

$$-2\operatorname{sen} x \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\cos 2x$$

Factorizando a expressão  $\operatorname{sen} x$

$$\operatorname{sen} x \left( -2\cos x + \frac{1}{\cos x} \right) = -\cos 2x \rightarrow \operatorname{sen} x \left( \frac{-2\cos^2 x + 1}{\cos x} \right) = -\cos 2x$$

$$\operatorname{sen} x \left( \frac{1 - 2\cos^2 x}{\cos x} \right) = -\cos 2x$$

$$-\operatorname{sen} x \left( \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} \right) = -\cos 2x$$

Sabe-se que:  $(2\cos^2 x - 1 = \cos 2x)$

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos 2x}{\cos x} - \cos 2x = 0 \quad (\text{Factorizando a expressão } \cos 2x)$$

$$\cos 2x \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1 \right) = 0 \rightarrow \cos 2x \left( \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x} \right) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$$\cos 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = \cos 0 \rightarrow \left( \alpha = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \rightarrow \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \left( \frac{\cos x}{\cos x} \right) \rightarrow \operatorname{tg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (1) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Condição de existência:

$$\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

As soluções  $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$  e  $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k$  Satisfazem a condição de existência. Como a solução  $x_2$  está contida na solução  $x_1$ , a solução da equação será:

$$S = \left\{ x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \right\}, \text{ Línea A)$$

21)(Exame 2018) Resolva a seguinte inequação:

$$|2x - 6| + |x| \leq 4 - x$$

Resp: A)  $]1; 15[$  B)  $[-1; 10]$  C)  $[1; 5]$  D)  $[10; -5]$  E)  $] -1; 25[$   
F)  $[-5; 2[$  G)  $[-1; 4]$  H) *outro*

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular:

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } 2x - 6 \geq 0 \\ -(2x - 6) & \text{se } 2x - 6 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Somando as expressões por meio da tabela:

$x$	0	3	
$ 2x - 6 $	$-2x + 6$	$-2x + 6$	$2x + 6$
$ x $	$-x$	$x$	$x$
$+S$	$-3x + 6$	$-x + 6$	$3x - 6$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = ]-\infty; 0[; -3x + 6 \leq 4 - x \\ I = [0; 3]; -x + 6 \leq 4 - x \\ I = [3; +\infty[; 3x - 6 \leq 4 - x \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I = ]-\infty; 0[; x \geq 1 \\ I = [0; 3]; 6 \leq 4 \\ I = [3; +\infty[; x \leq \frac{5}{2} \end{array} \right\}$$

$I = ]-\infty; 0[; x \geq 1$  (1 não pertence ao intervalo  $I$ , logo  $x \geq 1$  não é uma das soluções da inequação)

$I = [0; 3]; 6 \leq 4$  (esta desigualdade é falsa,  $6 > 4$ , logo neste intervalo não temos soluções)

$I = [3; +\infty[; x \leq \frac{5}{2}$  ( $\frac{5}{2}$  não pertence ao intervalo  $I$ , logo  $x \leq \frac{5}{2}$ ) não é uma das soluções da equação

A solução da inequação é:

$S = \{\emptyset\}$ , Línea H)

22) (Exame 2018) Seja  $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$  calcular  $f'(\frac{\pi}{12})$

Resp: A)  $-1$  B)  $0$  C)  $1$  D)  $\frac{1}{2}$  E)  $2$  F)  $-\pi$

Resolução:

Sabe-se que:  $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$  e  $(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$

$$f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$f(x) = (\sin^2 x - \cos^2 x) = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

Nota que:  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$f(x) = -\cos 2x$$

Derivando, teremos:

$$f'(x) = -(-2\sin 2x) = 2 \sin 2x$$

Achando a derivada no ponto  $x = \frac{\pi}{12}$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(2 \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1, \text{ Línea C)}$$

23) (Exame 2018) Dado o sistema:  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$  se adicionarmos ao sistema a equação:  $5x + y + \alpha z = \beta$ , obtemos o sistema seguinte:

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 5x + y + \alpha z = \beta \end{cases}$ , os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para que este sistema compatível indeterminado são:

Resolução:

Formando uma matriz A e uma matriz B, calculando os seus respectivos determinantes aplicando o método de crammer, teremos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (\alpha - 10 + 6) - (15 - 1 + 4\alpha) = \alpha - 4 - 14 - 4\alpha \rightarrow \Delta = -3\alpha - 18$$

Se  $\Delta = 0$  o sistema torna-se compatível indeterminado, ou seja:

$$-3\alpha - 18 = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{18}{3} \rightarrow \alpha = -6$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = (-2\beta + 6 + \alpha) - (-1 + 4\alpha + 3\beta), \alpha = -6$$

$$\Delta_1 = (-2\beta + 6 - 6) - (-1 + 4(-6) + 3\beta) \rightarrow \Delta_1 = -2\beta + 25 - 3\beta \rightarrow$$

$\Delta_1 = -5\beta + 25 = 0$ ,  $\Delta_1 = 0$  o sistema torna-se compatível indeterminado

$$-5\beta + 25 = 0 \rightarrow -5\beta = -25 \rightarrow \beta = \frac{25}{5} \rightarrow \beta = 5$$

Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são:  $S = \{ \alpha = -6; \beta = 5 \}$

24) (Exame 2018) Resolva a equação:

$$\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3)$$

Resp: A)  $-\frac{3}{2}$  B)  $\frac{3}{2}$  C)  $\frac{3}{4}$  D)  $-3$  E)  $-\frac{4}{3}$  F)  $\frac{4}{3}$  G)  $-\frac{3}{4}$  H) *outro*

Resolução:

$$\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3), \text{ Simplificando as bases:}$$

$$5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 \rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0 \quad (a = 4, b = -5, c = -6)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)} = \frac{5 \pm 11}{8}$$

$$x_1 = \frac{5+11}{8} = \frac{16}{8} \rightarrow x_1 = 2 ; x_2 = \frac{5-11}{8} = -\frac{6}{8} \rightarrow x_2 = -\frac{3}{4}$$

Verificação para  $x_1 = 2$

$$\log_{(2+3)}(5(2)^2 - 7(2) - 9) = \log_{(2+3)}((2)^2 - 2(2) - 3)$$

$\log_{(5)}(-3) = \log_{(2)}(-3)$ , O logaritmando não pode ser negativo, logo  $x_1 = 2$  não é solução da equação

Verificação para  $x_2 = -\frac{3}{4}$

$$\log_{(-\frac{3}{4}+3)}\left(5\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 7\left(-\frac{3}{4}\right) - 9\right) = \log_{(-\frac{3}{4}+3)}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) - 3\right)$$

$$\log_{(\frac{9}{4})}\left(-\frac{15}{16}\right) = \log_{(\frac{9}{4})}\left(-\frac{15}{16}\right), \text{ como o logaritmando não pode ser negativo, } x_2 = -\frac{3}{4},$$

Também não é solução da equação. A solução da equação é:  $S = \{\emptyset\}$ , Línea H)

25) (Exame 2018) calcular a área da figura limitada pelas linhas:

$$y = \frac{7}{9}x^2 + 1; y = \frac{5}{9}x^2 + 3$$

Resp: A) 4 B) 7 C) 6 D) 5 E) 9 F) 10 G) 8 H) *outro*

Resolução:

1º passo: Achar a intersecção entre as curvas:

$$\text{Fazendo } y = y \rightarrow \frac{7}{9}x^2 + 1 = \frac{5}{9}x^2 + 3 \rightarrow 7x^2 + 9 = 5x^2 + 27$$

$$7x^2 + 9 = 5x^2 + 27 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$$

2º) Passo: construir o gráfico:

$$y = \frac{7}{9} x^2 + 1 \text{ (Parábola)}$$

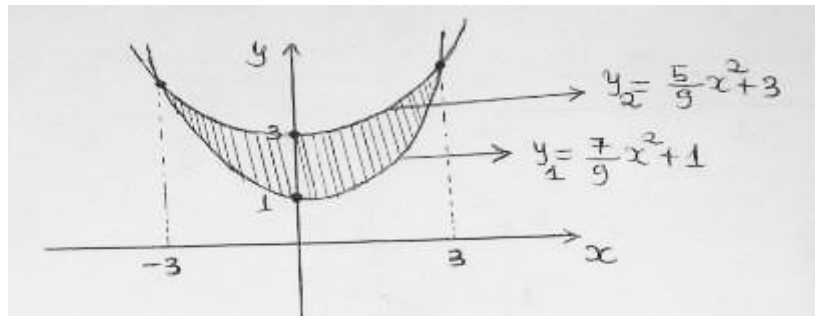
ox:  $y = 0 \rightarrow \nexists$  intersecção com o eixo ox

oy:  $x = 0, y = 1$

$$y = \frac{5}{9} x^2 + 3 \text{ (Parábola)}$$

ox:  $y = 0 \rightarrow \nexists$  intersecção com o eixo ox

oy:  $x = 0, y = 3$



3º) Passo: Calcular a área (Vamos integrar em relação ao eixo ox)

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_{-3}^3 \left( \frac{5}{9} x^2 + 3 - \left( \frac{7}{9} x^2 + 1 \right) \right) dx =$$

$$A = \int_{-3}^3 \left( \frac{5}{9} x^2 + 3 - \frac{7}{9} x^2 - 1 \right) dx = \int_{-3}^3 \left( 2 - \frac{2x^2}{9} \right) dx$$

$$\text{Obs.: } \int_{-a}^a f(x) = 2 \int_0^a f(x)$$

$$A = 2 \int_0^3 \left( 2 - \frac{2x^2}{9} \right) dx = 2 \left[ 2 \int_0^3 dx - \frac{2}{9} \int_0^3 x^2 dx \right]$$

$$A = 2 \left[ (2x)_0^3 - \frac{2}{9} \left( \frac{1}{3} \right) (x^3)_0^3 \right]$$

$$A = 2 \left[ (2x)_0^3 - \frac{2}{27} (x^3)_0^3 \right]$$

$$A = 2 \left[ 2(3 - 0) - \frac{2}{27} (3^3 - 0^3) \right] = 2(6 - 2)$$

$$A = 8, \text{ Línea G}$$

26) (Exame -2018) Resolva a equação:

$$\operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x + 4 (\operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{tg} x - 1)$$

Resp: A)  $x = \pi k$  B)  $x = \pi k - \frac{\pi}{3}$  C)  $x = \pi k - \frac{\pi}{3}$  D)  $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$

E)  $x = \pi k + \frac{\pi}{4}$  F)  $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{3}$  G)  $x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$  H) *outro*

Resolução:

Obs.:  $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$  e  $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos^2 x + 4 \left( \operatorname{sen} x - \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1 \right) = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos^2 x + 4 \left( \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x + \operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x} \right) = 0$$

$$2 \cos x (\operatorname{sen} x - \cos x) + 4 \left[ \frac{(\operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x) + (\operatorname{sen} x - \cos x)}{\cos x} \right] = 0$$

$$2 \cos x (\operatorname{sen} x - \cos x) + 4 \left[ \frac{\cos x (\operatorname{sen} x - \cos x) + (\operatorname{sen} x - \cos x)}{\cos x} \right] = 0$$

Factorizando a expressão:  $(\operatorname{sen} x - \cos x)$

$$(\operatorname{sen} x - \cos x) \left[ 2 \cos x + 4 \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right) \right] = 0 \rightarrow$$

$$(\operatorname{sen} x - \cos x) \left[ \frac{2 \cos^2 x + 4 \cos x + 4}{\cos x} \right] = 0$$

Aplicando o anulamento do produto, temos:

$$(\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \text{ e } \left[ \frac{2 \cos^2 x + 4 \cos x + 4}{\cos x} \right] = 0 \text{ (Equação fraccionária)}$$

$(\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$  (dividindo ambos membros por  $\cos x$ ), vem:

$$\operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(1), \text{ o arco cujo tangente equivale a 1 é } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Fórmulas das tangentes:  $x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$$\left[ \frac{2 \cos^2 x + 4 \cos x + 4}{\cos x} \right] = 0, 2 \cos^2 x + 4 \cos x + 4 = 0 \text{ e } \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2 \cos^2 x + 4 \cos x + 4 = 0 \text{ (dividir todos os termos da equação por 2)}$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x + 2 = 0$$

fazendo  $\cos x = t$  onde  $t \in [-1; 1]$

$$t^2 + 2t + 2 = 0 \quad (a = 1; b = 2; c = 2)$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(2) \rightarrow \Delta = -4 \rightarrow \nexists t$$

A solução  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ , satisfaz a condição, logo a solução da equação é:

$$S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ Línea E)}$$

27) (Exame 2017) Resolver :

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3$$

Resp: A)  $\left[\frac{3}{7}; 1\right[$  B)  $]-\infty; \frac{3}{7}]$  C)  $\left[\frac{3}{7}; 1\right[ \cup ]3; +\infty[$  D)  $\left[\frac{3}{7}; 3\right[$  E)  $\left[\frac{2}{7}; +\infty\right[$   
F)  $\left[\frac{3}{7}; 1\right[ \cup ]3; +\infty[$  G)  $]3; +\infty[$  H) *outro*

Resolução:

Pela propriedade de uma expressão modular temos:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Formando um sistema de inequações para as duas expressões, temos:

$$\text{I) } \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-2-1} \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+2-1} \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-3} - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+1} - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x+9}{x-3} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ \frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x+9}{x-3} \geq 0 \quad (\text{inequação racional fraccionária})$$

$$x + 9 = 0 \rightarrow x = -9 \text{ e } x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

	$-\infty$	$-9$	$3$	$+\infty$
$x + 9 = 0$		$-$	$0$	$+$
$x - 3 \neq 0$		$-$	$-$	$+$
$s$		$+$	$-$	$+$

$$x \in ]-\infty; -9] \cup ]3; +\infty[$$

$$\frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$7x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{7} \text{ e } -x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

	$-\infty$	$\frac{3}{7}$	1	$+\infty$
$7x - 3 = 0$	-	0	+	+
$-x + 1 \neq 0$	+	+	-	-
$s$	-	+	-	-

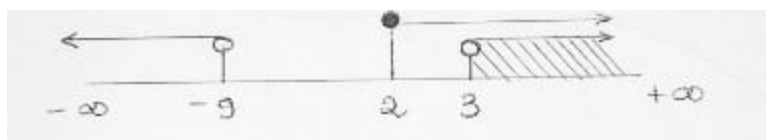
$$x \in \left[\frac{3}{7}; 1\right[$$

Voltando nos sistemas de inequações I) e II) temos:

$$\text{I)} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \in ]-\infty; -9] \cup ]3; +\infty[ \end{array} \right\}$$

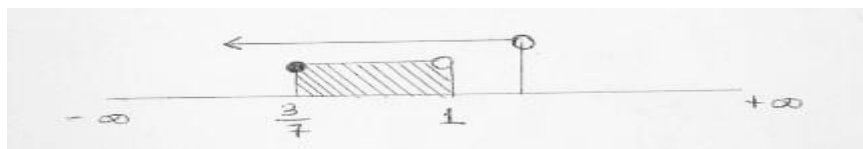
$$\text{II)} \left\{ \begin{array}{l} x < 2 \\ x \in \left[\frac{3}{7}; 1\right[ \end{array} \right\}$$

Interceder as duas soluções do sistema I) , temos:



$$S_1 = ]3; +\infty[$$

Interceder as duas soluções do sistema II), temos:



$$S_2 = \left[\frac{3}{7}; 1\right[$$

A solução da inequação é:  $S = S_1 \cup S_2$

$$S = \left[\frac{3}{7}; 1\right[ \cup ]3; +\infty[ \text{ , Línea C)}$$



28 (Exame 2017) A área limitada pelas curvas  $y = x - x^2$  e  $y = x\sqrt{1-x}$  é

- A) 0,5    B) 0,1    C) 1    D) 6    E) 0,45    F) 10    G) 0,75    H) outro

Resolução:

1º passo : Achar os pontos de intersecção entre as curvas:

$$y = y \rightarrow x - x^2 = x\sqrt{1-x}$$

$$x - x^2 - x\sqrt{1-x} = 0 \rightarrow x(1 - x + \sqrt{1-x}) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$$x_1 = 0 \text{ e } (1 - x + \sqrt{1-x}) = 0$$

$$(1 - x + \sqrt{1-x}) = 0 \rightarrow (\sqrt{1-x}) = x - 1 \rightarrow$$

$$(\sqrt{1-x})^2 = (x - 1)^2 \rightarrow 1 - x = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - x = 0$$

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x_2 = 0 \text{ e } x_3 = 1$$

Limites de integração em relação ao eixo  $ox$  :  $0 \leq x \leq 1$

2º Passo: Traçar o gráfico para visualizar a área a calcular:

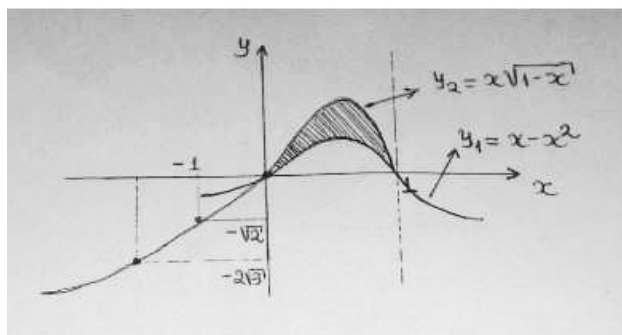
$$y = x - x^2, ox: y = 0, x - x^2 = 0, x = 0 \text{ e } x = 1$$

$$y = x - x^2, oy: x = 0, y = 0$$

$$y = x\sqrt{1-x} \quad Df = ]-\infty; 1]$$

$$ox: y = 0, x\sqrt{1-x} = 0, x = 0 \text{ e } x = 1$$

$$oy: x = 0; y = 0$$



3º) Passo : calcular a área:

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_0^1 [x\sqrt{1-x} - (x - x^2)] dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx - \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \quad , \text{fazendo: } \sqrt{1-x} = t ,$$

$$1 - x = t^2 \rightarrow x = 1 - t^2, dx = -2t dt$$

$$I_1 = \int_0^1 (1 - t^2)t(-2t) dt = \int_0^1 (t^2 - 1) 2t^2 dt = 2 \int_0^1 (t^4 - t^2) dt$$

$$I_1 = 2 \left[ \int_0^1 t^4 dt - \int_0^1 t^2 dt \right] = 2 \left[ \left( \frac{1}{5} t^5 \right) \frac{1}{0} - \left( \frac{1}{3} t^3 \right) \frac{1}{0} \right]$$

$$I_1 = 2 \left[ \left( \frac{1}{5} (\sqrt{1-x})^5 \right) \frac{1}{0} - \left( \frac{1}{3} (\sqrt{1-x})^3 \right) \frac{1}{0} \right]$$

$$I_1 = 2 \left[ \frac{1}{5} \left( (\sqrt{1-1})^5 - (\sqrt{1-0})^5 \right) - \frac{1}{3} \left( (\sqrt{1-1})^3 - (\sqrt{1-0})^3 \right) \right]$$

$$I_1 = \frac{4}{15}$$

$$I_2 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \left( \frac{x^2}{2} \right) \frac{1}{0} - \left( \frac{x^3}{3} \right) \frac{1}{0}$$

$$I_2 = \left[ \left( \frac{1^2}{2} \right) - \left( \frac{0^2}{2} \right) \right] - \left[ \left( \frac{1^3}{3} \right) - \left( \frac{0^3}{3} \right) \right] = \frac{1}{6}$$

A área finalmente será:  $A = I_1 - I_2$

$$A = \frac{4}{15} - \frac{1}{6} \rightarrow A = \frac{1}{10} \rightarrow A = 0,1 u^2 , \text{ Linea B)}$$

29 (Exame 2017) Simplifica a expressão:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2(\alpha - 270^\circ)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos}^2(\alpha - 270^\circ)(1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha)$$

$$\text{Resp: A) } \sqrt{2} \cos(\alpha + 15^\circ) \quad \text{B) } \sqrt{3} \operatorname{sen}^2(\alpha + 270^\circ) \quad \text{C) } \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha + 225^\circ)$$

$$\text{D) } \sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ) \quad \text{E) } \operatorname{cotg}(\alpha + 75^\circ) \quad \text{F) } \sqrt{2} \cos(\alpha + 215^\circ)$$

$$\text{G) } \sqrt{3} \operatorname{sen}(2\alpha + 85^\circ) \quad \text{H) } \textit{outro}$$

Resolução:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sena} \times \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} b \times \operatorname{cos} a$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - 270^\circ) = \operatorname{sena} \operatorname{cos} 270^\circ - \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{cos}(a - b) = \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b + \operatorname{sena} \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{cos}(\alpha - 270^\circ) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} 270^\circ + \operatorname{sena} \operatorname{sen} 270^\circ = -\operatorname{sen} \alpha$$

Voltando na expressão inicial :

$$\operatorname{sena} \operatorname{cos}^2 \alpha \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha}\right) + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \left(1 + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\right)$$

$$\operatorname{sena} \operatorname{cos}^2 \alpha \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha}\right) + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha$$

$$\text{Nota que : } \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Nota que: } \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{cos} \left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \alpha + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \operatorname{cos} \left(\frac{\alpha - \alpha - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cos} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ), \text{ Línea D)}$$

30 (Exame 2017) Resolva a equação:  $\frac{x-2}{|x-2|} \leq 4 - x^2$

Resp: A)  $(-1; \infty)$  B)  $[0; 2[$  C)  $[-\sqrt{5}; 2[$  D)  $\left(-2; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

E)  $[2; 5[ \cup (4; \infty)$  F)  $(4; \infty)$  G)  $\left]-4; \frac{1}{4}\right]$  H) *outro*

Resolução:

Pela condição de uma expressão modular, temos:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

A inequação será válida em dois sentidos:

$$I) \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x-2}{x-2} \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} x < 2 \\ \frac{x-2}{-(x-2)} \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 1 \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -1 \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x^2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x^2 \leq 3 \quad (x^2 = 3, x = \pm \sqrt{3})$$

$a > 0$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 \leq 3$	+	0	-	+

$$x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

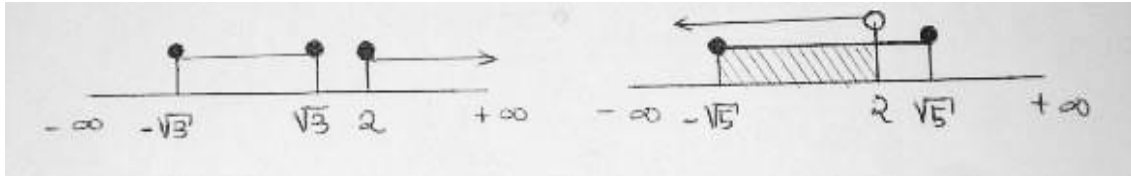
$$x^2 \leq 5 \quad (x^2 = 5, x = \pm \sqrt{5})$$

$a > 0$	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x^2 \leq 5$	+	0	-	+

$$x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$$

$$I) \left\{ x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \right\}$$

$$II) \left\{ x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \right\}$$



$$S(I) = \{\emptyset\}$$

$$S(II) = [-\sqrt{5}; 2[$$

A solução geral da inequação será:  $S = S(I) \cup S(II)$

$$S = [-\sqrt{5}; 2[, \text{Linha C})$$

31)(Exame 2017) Simplifique a expressão:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) \operatorname{sen}^3(\pi - 2\alpha) - \cos(6\alpha - \pi) \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$$

Resp: A)  $\cos^3 4\alpha$  B)  $\operatorname{sen} 2\alpha$  C)  $\cos 6\alpha$  D)  $\operatorname{sen}^2 3\alpha$  E)  $\operatorname{sen}^3 3\alpha$

F)  $\operatorname{sen} 2\alpha \cos 4\alpha$  G)  $\cos^2 2\alpha \operatorname{sen} \alpha$  H) *outro*

Resolução:

Aplicando as fórmulas:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) \cos 6\alpha + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) \operatorname{sen} 6\alpha = \operatorname{sen} 6\alpha$$

$$\cos(6\alpha - \pi) = \cos 6\alpha \cos \pi + \operatorname{sen} 6\alpha \operatorname{sen} \pi = -\cos 6\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha) = \operatorname{sen} \pi \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos \pi = \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos \frac{\pi}{2} = \cos 2\alpha$$

Voltando na expressão inicial, temos:

$$\operatorname{sen} 6\alpha \operatorname{sen}^3 2\alpha + \cos 6\alpha \cos^3 2\alpha$$

$$(\operatorname{sen} 6\alpha \operatorname{sen} 2\alpha) \operatorname{sen}^2 2\alpha + (\cos 6\alpha \cos 2\alpha) \cos^2 2\alpha (*)$$

Aplicando as fórmulas:

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \rightarrow \operatorname{sen} 6\alpha \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2} \rightarrow \cos 6\alpha \cos 2\alpha = \frac{\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{2}$$

Voltando em (\*), temos:

$$\left(\frac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}^2 2\alpha + \left(\frac{\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{2}\right) \cos^2 2\alpha$$

Multiplicando os termos fora dos parênteses e mantendo o denominador:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2 2\alpha \cos 4\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha \cos 8\alpha + \cos^2 2\alpha \cos 4\alpha + \cos^2 2\alpha \cos 8\alpha}{2}\right)$$

$$\left[\frac{(\operatorname{sen}^2 2\alpha \cos 4\alpha + \cos^2 2\alpha \cos 4\alpha) + (\cos^2 2\alpha \cos 8\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha \cos 8\alpha)}{2}\right]$$

$$\left[\frac{\cos 4\alpha (\operatorname{sen}^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) + \cos 8\alpha (\cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha)}{2}\right] (**)$$

$$\text{Sabe-se que: } \cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \operatorname{sen}^2 4\alpha$$

Voltando em (\*\*), temos:

$$\left[\frac{\cos 4\alpha + (\cos^2 4\alpha - \operatorname{sen}^2 4\alpha) \cos 4\alpha}{2}\right] = \left[\frac{\cos 4\alpha + \cos^3 4\alpha - \cos 4\alpha \operatorname{sen}^2 4\alpha}{2}\right]$$

$$\left[\frac{(\cos 4\alpha - \cos 4\alpha \operatorname{sen}^2 4\alpha) + \cos^3 4\alpha}{2}\right] = \left[\frac{\cos 4\alpha (1 - \operatorname{sen}^2 4\alpha) + \cos^3 4\alpha}{2}\right] (***)$$

$$\text{sabe-se que: } 1 - \operatorname{sen}^2 4\alpha = \cos^2 4\alpha$$

Voltando em (\*\*\*) , finalmente temos:

$$\left[\frac{\cos 4\alpha (\cos^2 4\alpha) + \cos^3 4\alpha}{2}\right] = \left(\frac{\cos^3 4\alpha + \cos^3 4\alpha}{2}\right) = \left(\frac{2\cos^3 4\alpha}{2}\right)$$

$$= \cos^3 4\alpha, \text{ Línea A}$$

32) (Exame 2017) *Resolva inequação:*

$$(|x| - 1)(2x^2 + x - 1) \leq 1$$

Resp: A)  $[-1; 1]$  B)  $\{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  C)  $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$  D)  $(0; 1)$  E)  $[0; 1]$

F)  $\left[-1; \frac{1}{4}\right]$  G)  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  H) *outro*

Resolução:

Aplicando a lei do anulamento do produto para encontrar as raízes da inequação:

$$(|x| - 1) = 0 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

$$(2x^2 + x - 1) = 0 \quad (a = 2; b = 1; c = -1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm 3}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \text{ e } x_4 = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$
$( x  - 1) = 0$	+	O	-	O	+
$(2x^2 + x - 1)$	+	O	-	O	+
$S$	+	+	-	+	+

$$S = \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right], \text{ Línea B)}$$

33) (Exame 2017) *Resolva inequação:*  $\frac{x+1}{|x-1|} + \frac{1-2x}{x-1} \geq 0$ 

Resp: A)  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$  B)  $[2; \infty[$  C)  $\left[\frac{1}{2}; 1\right[ \cup (1; \infty)$

D)  $\left[\frac{1}{2}; 2\right[$  E)  $[0; 1[ \cup ]1; 2]$  F)  $]1; 2]$  G)  $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$  H) *outro*

Resolução:

Pela condição da expressão modular, teremos:

$$|x - 1| = \left\{ \begin{array}{l} x - 1 \text{ se } x - 1 > 0 \\ -(x - 1) \text{ se } x - 1 < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 \text{ se } x > 1 \\ -(x - 1) \text{ se } x < 1 \end{array} \right\}$$

A inequação será válida nas seguintes condições:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ \frac{x+1}{x-1} + \frac{1-2x}{x-1} \geq 0 \end{array} \right\} & \text{II)} \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ -\frac{x-1}{x-1} + \frac{1-2x}{x-1} \geq 0 \end{array} \right\} \\ \text{I)} \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ \frac{-x+2}{x-1} \geq 0 \end{array} \right\} & \text{II)} \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ \frac{-3x}{x-1} \geq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Multiplicando as segundas equações dos dois sistemas por (-1), temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ \frac{x-2}{x-1} \leq 0 \end{array} \right\} \qquad \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ \frac{3x}{x-1} \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{I.2)} \frac{x-2}{x-1} \leq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad e \quad x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x - 1$		-	+	+
$x - 2$		-	-	0
$S$		+	-	+

$$\text{I.2)} \quad x \in ]1; 2]$$

$$\text{II.2)} \frac{3x}{x-1} \leq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$3x = 0 \rightarrow x = 0 \quad e \quad x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - 1$		-	+	+
$x - 2$		-	-	0
$S$		+	-	+

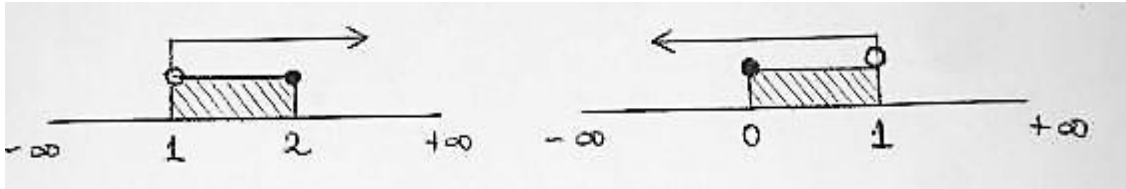


II.2)  $x \in [0; 1[$

$$I) \left\{ \begin{array}{l} ]1; +\infty[ \\ x \in ]1; 2] \end{array} \right\}$$

$$II) \left\{ \begin{array}{l} ]-\infty; 1[ \\ x \in [0; 1[ \end{array} \right\}$$

Intercedendo as soluções dos dois sistemas:



$$S(I) = x \in ]1; 2]$$

$$S(II) = x \in [0; 1[$$

A solução da inequação será:  $S = S(I) \cup S(II)$

$$S = [0; 1[ \cup ]1; 2], \text{ Línea E)}$$

34) (Exame 2017) Simplifique a expressão:

$$\cot g(270^\circ - 2\alpha) + \cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)$$

Resp: A)  $\cot g 2\alpha$  B)  $2 \operatorname{tg} 4\alpha$  C)  $\operatorname{tg}^2 3\alpha$  D)  $\operatorname{tg} 2\alpha \cot g 2\alpha$

E)  $\cot g 6\alpha$  F)  $\cot g 4\alpha$  G)  $3 \operatorname{tg} 6\alpha$  H) outro

Resolução:

$$\cot(270^\circ - 2\alpha) + [\cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)]$$

Aplicando a fórmula:

$$\cot g(a - b) = \frac{\cot g a \cot g b + 1}{\cot g b - \cot g a}$$

$$\cot g(270^\circ - 2\alpha) = \frac{\cot g 270^\circ \cot g + 1}{\cot g 2\alpha - \cot g 270^\circ} = \frac{1}{\cot g 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\cot g a + \cot g b = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

$$[\cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)] = \frac{\operatorname{sen}(210^\circ - 2\alpha + 150^\circ - 2\alpha)}{\operatorname{sen}(210^\circ - 2\alpha) \operatorname{sen}(150^\circ - 2\alpha)}$$

$$[\cot g(210^\circ - 2\alpha) + \cot g(150^\circ - 2\alpha)] = \frac{\operatorname{sen}(360^\circ - 4\alpha)}{\operatorname{sen}(210^\circ - 2\alpha) \operatorname{sen}(150^\circ - 2\alpha)} (*)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(360^\circ - 4\alpha) = \operatorname{sen}360^\circ \cos4\alpha - \operatorname{sen}4\alpha \cos360^\circ = -\operatorname{sen}4\alpha$$

$$\operatorname{sen}a \operatorname{sen}b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(210^\circ - 2\alpha)\operatorname{sen}(150^\circ - 2\alpha) = \frac{\cos60^\circ - \cos(360^\circ - 4\alpha)}{2}$$

$$\text{Sabe-se que: } \cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen}a \operatorname{sen}b$$

$$\cos(360^\circ - 4\alpha) = \cos 360^\circ \cos4\alpha + \operatorname{sen}360^\circ \operatorname{sen}4\alpha = \cos4\alpha$$

Então:

$$\operatorname{sen}(210^\circ - 2\alpha)\operatorname{sen}(150^\circ - 2\alpha) = \frac{\frac{1}{2} - \cos 4\alpha}{2} = \frac{1 - 2\cos4\alpha}{4}$$

Voltando em (\*), temos:

$$[\cotg(210^\circ - 2\alpha) + \cotg(150^\circ - 2\alpha)] = \frac{-\operatorname{sen}4\alpha}{\frac{1 - 2\cos4\alpha}{4}} = -\frac{4 \operatorname{sen}4\alpha}{1 - 2\cos4\alpha}$$

Voltando na expressão inicial e achando o denominador comum, teremos:

$$\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos2\alpha} - \frac{4 \operatorname{sen}4\alpha}{1 - 2\cos4\alpha} = \frac{\operatorname{sen}2\alpha - 2\operatorname{sen}2\alpha \cos4\alpha - 4\operatorname{sen}4\alpha \cos2\alpha}{\cos2\alpha (1 - 2\cos4\alpha)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}2\alpha - 2\operatorname{sen}2\alpha \cos4\alpha - 2\operatorname{sen}4\alpha \cos2\alpha - 2\operatorname{sen}4\alpha \cos2\alpha}{\cos2\alpha - 2\cos4\alpha \cos2\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}2\alpha - 2(\operatorname{sen}4\alpha \cos2\alpha + \operatorname{sen}2\alpha \cos4\alpha) - 2\operatorname{sen}4\alpha \cos2\alpha}{\cos2\alpha - 2\cos4\alpha \cos2\alpha} (**)$$

Sabe-se que :

$$\operatorname{sen}a \cos b = \frac{\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)}{2}$$

$$2\operatorname{sen}4\alpha \cos2\alpha = \operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}6\alpha$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

$$2\cos4\alpha \cos2\alpha = \cos2\alpha + \cos6\alpha$$

$$(\operatorname{sen}4\alpha \cos2\alpha + \operatorname{sen}2\alpha \cos4\alpha) = \operatorname{sen}6\alpha$$

Voltando em (\*\*), temos:

$$\frac{\cancel{\text{sen}2\alpha} - 2\text{sen}6\alpha - (\cancel{\text{sen}2\alpha} + \text{sen}6\alpha)}{\cos2\alpha - (\cos2\alpha + \cos6\alpha)} = \frac{\cancel{\text{sen}2\alpha} - 2\text{sen}6\alpha - \cancel{\text{sen}2\alpha} - \text{sen}6\alpha}{\cos2\alpha - \cos2\alpha - \cos6\alpha} =$$

$$= \frac{3\text{sen}6\alpha}{-\cos6\alpha} = 3 \text{tg}6\alpha, \text{ Línea G}$$

35)(Exame 2017) Resolver :

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3$$

Resp:

A)  $\left[\frac{3}{7}; 1\right[$  B)  $]-\infty; \frac{3}{7}]$  C)  $\left[\frac{3}{7}; 1\right[ \cup ]3; +\infty[$  D)  $\left[\frac{3}{7}; 3\right[$  E)  $\left]\frac{2}{7}; +\infty\right[$   
 F)  $\left]\frac{3}{7}, 1\right[ \cup ]3; +\infty[$  G)  $]3; +\infty[$  H) *outro*

Resolução:

Pela propriedade de uma expressão modular temos:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Formando um sistema de inequações para as duas expressões, temos:

$$\text{I) } \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-2-1} \geq 3 \end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+2-1} \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{4x}{x-3} - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 \\ \frac{4x}{-x+1} - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x+9}{x-3} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 \\ \frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x+9}{x-3} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$x+9=0 \rightarrow x=-9 \text{ e } x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

	$-\infty$	$-9$	$3$	$+\infty$
$x+9=0$		— 0 +		+
$x-3 \neq 0$		—	—	+
$S$		+	—	+

$$x \in ]-\infty; -9] \cup ]3; +\infty[$$

$$\frac{7x-3}{-x+1} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$7x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{7} \text{ e } -x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

	$-\infty$	$\frac{3}{7}$	1	$+\infty$
$7x - 3 = 0$	-	0	+	+
$-x + 1 \neq 0$	+	+	-	-
$S$	-	+	-	-

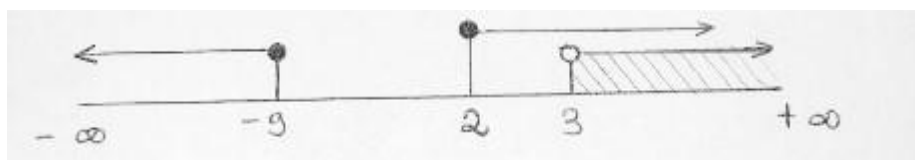
$$x \in \left[\frac{3}{7}; 1\right[$$

Voltando nos sistemas de inequações I) e II) temos:

$$\text{I)} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \in ]-\infty; -9] \cup ]3; +\infty[ \end{array} \right\}$$

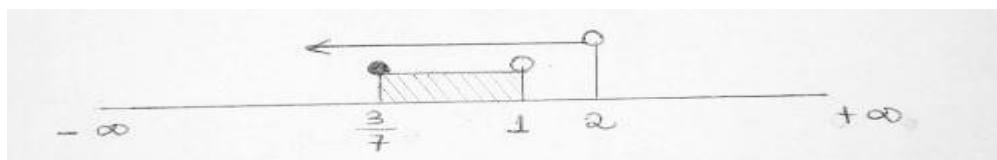
$$\text{II)} \left\{ \begin{array}{l} x < 2 \\ x \in \left[\frac{3}{7}; 1\right[ \end{array} \right\}$$

Interceder as duas soluções do sistema I) , temos:



$$S_1 = ]3; +\infty[$$

Interceder as duas soluções do sistema II), temos:



$$S_2 = \left[\frac{3}{7}; 1\right[$$

A solução da inequação é:  $S = S_1 \cup S_2$

$$S = \left[\frac{3}{7}; 1\right[ \cup ]3; +\infty[ , \text{Linha C)}$$

36)(Exame 2016) A área da região limitada pelo gráfico da função

$$y = \frac{|x|}{1+x^2}, \text{ o eixo } ox \text{ e as rectas } x = -2 \text{ e } x = 1 \text{ é:}$$

- A)  $\ln 10 u^2$    B)  $\frac{\ln 10}{3} u^2$    C)  $\ln\left(\frac{2}{3}\right) u^2$    D)  $\arctg 2 u^2$    E)  $\arctg\left(\frac{5}{2}\right) u^2$   
 F)  $\arctg(10) u^2$    G) *outro*

Resolução:

$$1^\circ \text{ passo: } y = \frac{|x|}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} ; \text{ se } x \geq 0 \\ -\frac{x}{1+x^2} \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

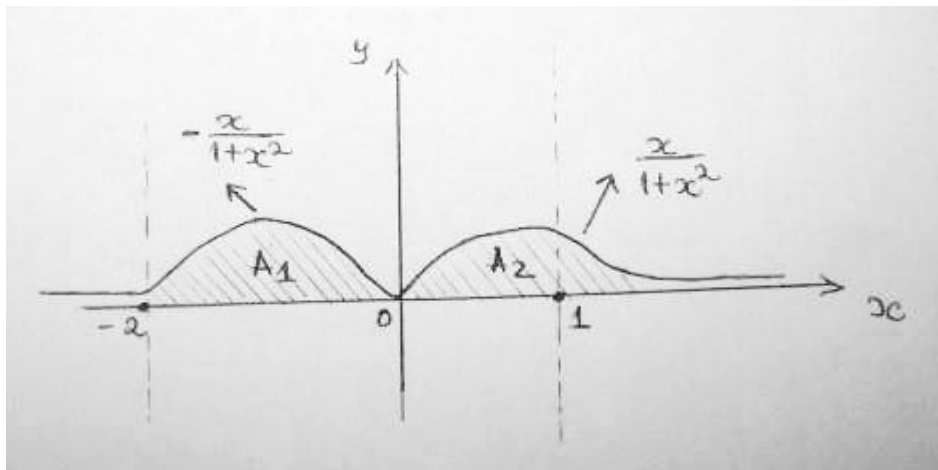
2º) Passo: Achar os interceptos e construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os seus limites de integração:

$$y = \frac{x}{1+x^2}, \text{ ox: } y = 0, x = 0 ; \text{ oy: } x = 0, y = 0 \text{ (} f(x) \text{ passa na origem)}$$

$$\forall x \geq 0; x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$$

$$y = -\frac{x}{1+x^2}, \text{ ox: } y = 0, x = 0 ; \text{ oy: } x = 0, y = 0 \text{ (} f(x) \text{ passa na origem)}$$

$$\forall x < 0; x \rightarrow -\infty; y \rightarrow 0$$



3º) Passo: calcular a área:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_{-2}^0 -\frac{x dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_{-2}^0 =$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} [\ln(1 + 0^2) - \ln(1 + (-2)^2)] \rightarrow A_1 = \frac{\ln 5}{2}$$

$$A_2 = \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1$$

$$A_2 = \frac{1}{2} [\ln(1 + 1^2) - \ln(1 + (0)^2)] \rightarrow A_2 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{Então a área será: } A = A_1 + A_2 = \frac{\ln 5}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} (\ln 5 + \ln 2)$$

$$A = \frac{1}{2} \ln(5 \times 2) \rightarrow A = \frac{1}{2} \ln 10, \text{ Línea H)}$$

37)(Exame 2016) A área limitada pela curva  $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$  e as rectas  $y = 0$

e  $x = 1$  é:

A)  $\frac{\pi}{4}$  B)  $\frac{3\pi}{4}$  C)  $\frac{5\pi}{3}$  D)  $\frac{\pi}{6}$  E)  $\pi$  F) 3 G) 6 H) outro

Resolução:

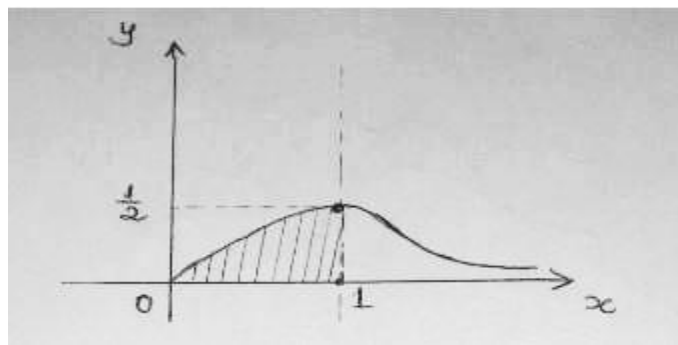
1º) Passo: Achar o domínio, os interceptos e construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os seus limites de integração:

$$D_f = [0; +\infty[$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}, \text{ ox: } y = 0, x = 0; \text{ oy: } x = 0, y = 0 \text{ (} f(x) \text{ passa na origem)}$$

$$\forall x \geq 0; x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$$

$$\text{se } x = 1, y = \frac{1}{2}, \text{ se } x = 0, y = 0$$



2º) Passo: calcular a área

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx, \text{ fazendo: } x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$$

Trocando os limites de integração em relação a t:

se  $x = 1 \rightarrow t = 1$ , se  $x = 0 \rightarrow t = 0$

$$A = \int_0^1 \frac{t(2t)dt}{1+(t^2)^3} = 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+(t^3)^2},$$

supondo novamente que:  $t^3 = y \rightarrow 3t^2 dt = dy \rightarrow t^2 dt = \frac{dy}{3}$

Trocando os limites de integração em relação:

se  $t = 1 \rightarrow y = 1$ , se  $t = 0 \rightarrow y = 0$

$$A = 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{1+t^2} \right) \left( \frac{dy}{3} \right) = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dy}{1+t^2} = \frac{2}{3} \operatorname{artg}(y) \Big|_0^1$$

$$A = \frac{2}{3} \left( \operatorname{arct}(1) - \operatorname{arctg}(0) \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right)$$

$$A = \frac{\pi}{6}, \text{ Línea D)}$$

38) ( Exame 2016 ) A solução da inequação  $\log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)} \left( \frac{x-1}{2} \right) \geq 0$  é:

Resp:  $[3, +\infty [$  B)  $\left] \frac{1-\sqrt{21}}{2}, 0 \right[$  U  $\left] 1, \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[$  C)  $\left] 1, \frac{1}{2} \right[$  U  $[2, 3 + \sqrt{3} [$   
 D)  $\left] 1, \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[$  U  $[3, +\infty [$  E)  $[-3, 2] \cup \sqrt{5}, 6 + \sqrt{2}]$   
 F)  $]-\infty, 0 \cup \sqrt{3}, 5 \cup [8 - \sqrt{3}, +\infty [$  G) Outro

Resolução:

$$\log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)} \left( \frac{x-1}{2} \right) \geq 0 \rightarrow \log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)} \left( \frac{x-1}{2} \right) \geq \log_{\left(\frac{x^2-x}{5}\right)} 1$$

A inequação tem sentido quando:

$$\text{I) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} > 0 \\ \left( \frac{x^2-x}{5} \right) > 0 \\ \left( \frac{x^2-x}{5} \right) > 0 (\text{base}) \\ \left( \frac{x-1}{2} \right) \geq 1 \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \text{II) } \left\{ \begin{array}{l} 0 < \left( \frac{x^2-x}{5} \right) < 1 \\ \left( \frac{x^2-x}{5} \right) > 0 \\ \left( \frac{x-1}{2} \right) > 0 \\ \left( \frac{x-1}{2} \right) \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ x^2 - x > 0 \\ x \geq 3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{x^2-x}{5} \right) > 0 \text{ e } \left( \frac{x^2-x}{5} \right) < 1 \\ x^2 - x > 0 \\ x > 1 \\ x \leq 3 \end{array} \right\}$$

Resolução das inequações por parte:

I.2) e II.2)  $x^2 - x > 0 \rightarrow x(x - 1) > 0$  ( $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ )

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	<div>+</div>	0	- 0	<div>+</div>

I.2) e II.2)  $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$

II.)  $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0$  e  $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1$

1º)  $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) > 0 \rightarrow x^2 - x > 0 \rightarrow x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$

2º)  $\left(\frac{x^2-x}{5}\right) < 1 \rightarrow x^2 - x - 5 < 0$  ( $a = 1; b = -1; c = -5$ )

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	$+\infty$
$x^2-x$	+	0	-	0

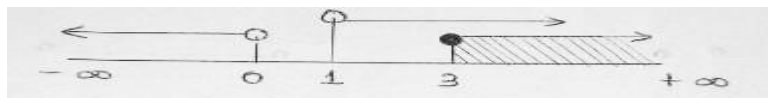
$x \in \left] \frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right[$ , Agora vamos encontrar uma solução única, intercedendo:

$$]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[ \cap \left] \frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right[ = \left] \frac{1 - \sqrt{21}}{2}; 0[ \cup ]1; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right[$$

Colocando nos sistemas de inequações, temos:

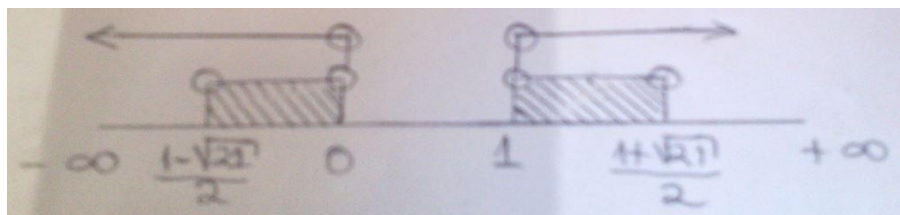
$$I) \left\{ \begin{array}{l} ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[ \\ [3; +\infty[ \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left] \frac{1 - \sqrt{21}}{2}; 0[ \cup ]1; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right[ \\ ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[ \\ ]1; +\infty[ \\ ]-\infty, 3] \end{array} \right\}$$

Intercedendo todas as soluções do sistema I), temos:



$$S_1 = [3; +\infty[$$

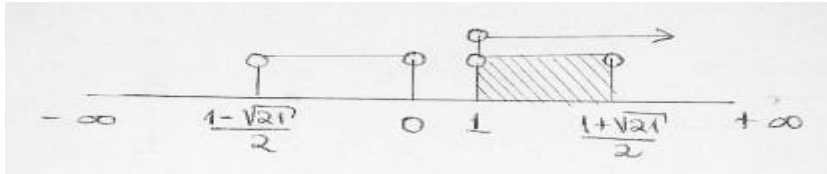
Intercedendo a 1º a 2º solução do sistema II), temos:





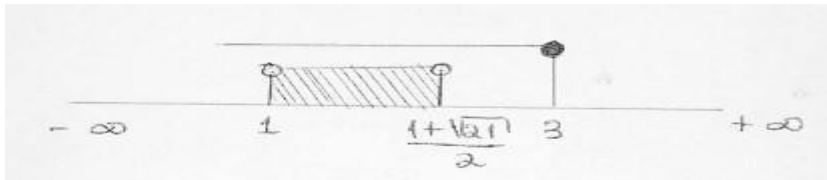
$$x \in \left] \frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0 \right[ \cup \left] 1; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[ \rightarrow II) \left\{ \begin{array}{l} \left] \frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0 \right[ \cup \left] 1; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[ \\ \left] 1; +\infty \right[ \\ \left] -\infty, 3 \right] \end{array} \right\}$$

$$\text{Intercedendo no sistema II) : } \left] \frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0 \right[ \cup \left] 1; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[ \cap \left] 1; +\infty \right[$$



$$x \in \left] 1; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[ \rightarrow II) \left\{ \begin{array}{l} \left] 1; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[ \\ \left] -\infty, 3 \right] \end{array} \right\},$$

Intercedendo finalmente as duas últimas soluções do sistema II), temos:



$$S_2 = \left] 1; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[$$

A solução da inequação é:  $S = S_1 \cup S_2$

$$S = \left] 1; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right[ \cup [3; +\infty[, \text{Línea D})$$

39) (Exame 2016) Seja  $f(x) = \frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$ , Calcule  $f'(0)$

A)  $-2 \ln 3$  B)  $-$

$\frac{1}{3} \ln 2$  C)  $\frac{1}{2} \ln 3$  D)  $2 \log 3$  E)  $-3 \log 2$  F)  $3 \ln 2$  G) 1 H) *outro*

Resolução:

Aplicando da derivada do cociente:

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Derivando a função temos:

$$f'(x) = \frac{(2^{2x})' \sqrt{2-2^{2x}} - (2^{2x})(\sqrt{2-2^{2x}})'}{(\sqrt{2-2^{2x}})^2} (*)$$

Sabe-se que:

$$\text{se } y = a^x \rightarrow y' = (x)' a^x \ln a$$

$$\text{se } y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Voltando em (\*), temos:

$$f'(x) = \frac{(2 \cdot 2^x \ln 2) \sqrt{2-2^{2x}} - (2^{2x}) \frac{(2-2^{2x})}{2 \left( \sqrt{2-2^{2x}} \right)}}{(\sqrt{2-2^{2x}})^2} = \frac{(4 \cdot 2^x \ln 2)(2-2^{2x}) - 2^{2x} (-2 \cdot 2^{2x} \ln 2)}{2 \left( \sqrt{2-2^{2x}} \right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4 \cdot 2^x \ln 2)(2-2^{2x}) + 2 \cdot 2^{2x} (2^{2x} \ln 2)}{2 \left( \sqrt{2-2^{2x}} \right) (\sqrt{2-2^{2x}})^2}, \text{ factorizando } 2 \cdot 2^{2x} \ln 2, \text{ temos:}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2^{2x} \ln 2 [2(2-2^{2x}) + 2^{2x}]}{2 (\sqrt{2-2^{2x}})^3}, \text{ desfazendo o produto e reduzindo os termos semelhantes, fica:}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2^{2x} \ln 2 (4-2^{2x})}{2 (\sqrt{2-2^{2x}})^3}, \text{ substituindo o ponto } x = 0$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 2^{2 \times 0} \ln 2 (3-2^{2 \times 0})}{2 (\sqrt{2-2^{2 \times 0}})^3} = \frac{2 \ln 2 (3)}{2} = \frac{(2 \times 3) \ln 2}{2} = \frac{6 \ln 2}{2}$$

$$f'(0) = 3 \ln 2, \text{ Línea F)}$$

40) (Exame 2016 ) Resolva a equação :

$$\operatorname{tg}(x+1) \cotg(2x+3) = 0$$

Resp:

$$x = \frac{\pi k}{2} - 3 \quad B) x = \frac{\pi k}{2} + 2 \quad C) x = 2\pi k + 1 \quad D) x = 2\pi k - 2 \quad E) x = \pi k + 1$$

$$F) x = \pi k - 2 \quad G) x = 4\pi k - 1 \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$\operatorname{tg}(x+1) \cotg(2x+3) = 0 \rightarrow \operatorname{tg}(x+1) \frac{1}{\operatorname{tg}(2x+3)} = 1 \rightarrow \operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3)$$

$$\operatorname{tg}(2x+3) = \operatorname{tg}(x+1)$$

A equação torna-se mais simples Aplicando o seguinte conceito:

$$\text{Se } \operatorname{tga} = \operatorname{tgb} \rightarrow a = b + \pi k$$

$$\operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3) \rightarrow 2x+3 = x+1 + \pi k \rightarrow 2x-x = 1-3 + \pi k \rightarrow$$

$$x = -2 + \pi k \rightarrow x = \pi k - 2$$

CE: condição de existência:

$$\operatorname{tg}(2x+3) \neq 0 \rightarrow 2x+3 \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow x \neq \frac{\pi k - 3}{2}$$

A solução  $x = \pi k - 2$  satisfaz a condição de existência, logo, a solução da equação é:

$$S = \{x = \pi k - 2\}, \text{ Línea F)}$$

41) (Exame 2016) Seja  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ , Calcule  $f'(2)$

A)  $-\frac{1}{20}$  B)  $\frac{1}{10}$  C)  $\frac{2}{3}$  D)  $\frac{2}{5}$  E) 1 F) 0 G)  $\frac{1}{30}$

Resolução:

Transformando todos os radicais em potência:

$$f(x) = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}},$$

Aplicando a derivada do cociente:  $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , Temos:

$$f'(x) = \frac{\left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}\right]' (x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}\right] \left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]'}{\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]^2}$$

Aplicando a derivada da potência no numerador: se  $y = u^n \rightarrow y' = n u^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{5}(x-1)^{-\frac{4}{5}}\right] (x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{5}}\right] \left[\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\right]}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Transformando todas as potenciais em radicais, temos:

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{(x-1)^4}}\right] [\sqrt[3]{x-1}] - [\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1}] \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Substituindo o ponto  $x = 2$

$$f'(2) = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{2-1}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{(2-1)^4}}\right] [\sqrt[3]{2-1}] - [\sqrt{2-1} + \sqrt[5]{2-1}] \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-1)^2}}\right]}{\sqrt[3]{(2-1)^2}}$$

$$f'(2) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - (2)\left(\frac{1}{3}\right)}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{15+6-20}{30} = \frac{1}{30}$$

$$f'(2) = \frac{1}{30}, \text{ Línea G)}$$

42) (Exame 2016) Seja  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}$ , calcule  $f'(1)$

A)  $\frac{6}{5}$  B)  $\frac{7}{6}$  C)  $\frac{8}{7}$  D)  $\frac{6}{7}$  E)  $\frac{5}{6}$  F) 1 G)  $\frac{7}{8}$  H) outro

Resolução:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}} \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}$$

Para derivar aplicar a fórmula: se  $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = \frac{\left[ x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}} \right]'}{2\sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}}, \text{ Aplicando a derivar da potência:}$$

$$y = u^n \rightarrow y' = n u^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{2x + \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}}}{6\sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{6x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{x^2 - 1 + (x)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{6x\sqrt[3]{x^2} + 1}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}}, \text{ Substituindo o}$$

ponto  $x = 1$

$$f'(1) = \frac{6(1)\sqrt[3]{(1)^2} + 1}{6\sqrt[3]{(1)^2}\sqrt{(1)^2 - 1 + \sqrt[3]{1}}} = \frac{7}{6} \rightarrow f'(1) = \frac{7}{6}, \text{ Línea B)}$$

43) (Exame 2016) A área da região compreendida entre a curva  $y = 2x^2 - 2x - 1$  e as rectas  $x = 1$  e  $x = 10$  e o eixo  $ox$  é:

Resp: A)  $\left(\frac{13\sqrt{2}}{9} - 4\right)u^2$  B)  $28u^2$  C)  $12u^2$  D)  $2016u^2$  E)  $\frac{\sqrt{2}}{6}u^2$  F)  $57u^2\sqrt{2}u^2$  G) outro

Resolução:

$$\text{A área da figura será: } A = \int_1^{10} (2x^2 - 2x - 1) dx$$

$$A = 2 \int_1^{10} x^2 dx - 2 \int_1^{10} x dx - \int_1^{10} dx, \text{ Integrando temos:}$$

$$A = \frac{2}{3} (x^3)_1^{10} - 2 \left(\frac{1}{2}\right) (x^2)_1^{10} - (x)_1^{10} = \frac{2}{3} (x^3)_1^{10} - (x^2)_1^{10} - (x)_1^{10}$$

$$A = \frac{2}{3} [(10)^3 - (1)^3] - [(10)^2 - (1)^2] - (10 - 1)$$

$$A = (666 - 99 - 9) \rightarrow A = 558 u^2, \text{ Línea G}$$

44) (Exame 2016) A área da região compreendida entre o eixo OX e o gráfico da função:  $f(x) = x e^{2x}$  entre  $-1 < x < 1$ , é:

Resp:

A)  $\frac{e^4+2e^2}{4e^2} u^2$  B)  $\frac{e^4-1}{4e^2} u^2$  C)  $\frac{e^{-4}+2e^2}{4e^2} u^2$  D)  $\frac{e^4+2e^2-3}{e^2} u^2$  E)  $\frac{e^4-e^2-3}{4e^2} u^2$   
 F)  $\frac{e^4+2e^2-3}{4e^2} u^2$  G) *outro*

Resolução:

A área da região será:  $A = \int_{-1}^1 x e^{2x} dx$ , Sabe-se que:  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

$A = \int_{-1}^1 x e^{2x} dx = 2 \int_0^1 x e^{2x} dx$ , Integrando por parte:

$$A = 2 \left[ (u v) \Big|_0^1 - \int_0^1 v du \right]$$

$$u = x \rightarrow du = dx ; v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$A = 2 \left[ \left( \frac{1}{2} x e^{2x} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \right] = 2 \left[ \frac{1}{2} \{ x e^{2x} \} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} (e^{2x}) \Big|_0^1 \right],$$

Substituindo os limites de integração vem:

$$A = 2 \left[ \frac{1}{2} \{ 1 \times e^{2(1)} - (0 \times e^{2(0)}) \} - \frac{1}{4} \{ (e^{2(1)}) - (e^{2(0)}) \} \right]$$

$$A = 2 \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \right) \rightarrow A = \left( \frac{e^2+1}{2} \right) u^2, \text{ Línea G)}$$

45) (Exame 2015) Simplifique a expressão:  $\frac{\text{sen}(2a)+\text{sen}(5a)-\text{sen}(3a)}{\cos(a)+1-2\text{sen}^2(2a)}$

Resolução:  $\frac{\text{sen}(2a)+[\text{sen}(5a)-\text{sen}(3a)]}{\cos(a)+1-2\text{sen}^2(2a)}$

Nota que:

$$\text{sen}(2a) = 2 \text{ sen } a \cos a$$

$$\text{sen}^2 2a = \frac{1}{2} (1 - \cos 4a) \rightarrow 1 - 2\text{sen}^2 2a = \cos 4a$$

$$\text{sen}(5a) - \text{sen}(3a) = 2\text{sen} \left( \frac{5a-3a}{2} \right) \cos \left( \frac{5a+3a}{2} \right) = 2 \text{ sen } a \cos 4a$$

Voltando na expressão inicial:

$$\frac{2 \text{ sen } a \cos a + 2 \text{ sen } a \cos 4a}{\cos(a) + \cos 4a} = \frac{2 \text{ sen } a (\cos a + \cos 4a)}{[\cos(a) + \cos 4a]} = 2 \text{ sen } a$$

46) (Exame 2015): Resolver a inequação:  $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$

Resp: A)  $x \in ]-\infty; 1,5]$  B)  $x \in [1,5; 2[$  C)  $x \in ]2; +\infty[$   
 D)  $x \in ]-\infty; 1,5] \cup ]2; +\infty[$  E)  $x \in ]-\infty; 2[$  F)  $x \in [1,5; +\infty[$   
 G)  $x \in ]2; 3[$  H) *outro*

Resolução:

Pela definição do módulo:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$\text{I) } \begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{x-3}{x^2-5x+6} \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} x < 3 \\ \frac{-x+3}{x^2-5x+6} \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{x-3}{x^2-5x+6} - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ \frac{-x+3}{x^2-5x+6} - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{x-3-2x^2+10x-12}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ \frac{-x+3-2x^2+10x-12}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{-2x^2+11x-15}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ \frac{-2x^2+9x-9}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases}$$

Multiplicando as segundas equações dos dois sistemas de inequações por (-1), as desigualdades invertem-se fica:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ \frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases}$$

I.2)

$$\frac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6} \leq 0 \text{ (Inequação racional fraccionária)}$$

$$2x^2 - 11x + 15 = 0 \text{ Pelo método de Vieth: } x = \frac{5}{2} \text{ e } x = 3$$

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \text{ Pelo método de Vieth: } x = 2 \text{ e } x = 3$$

$x$	$-\infty$	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$2x^2 - 11x + 15$	+	+	-	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	-	-	+	+
$S$	+	-	+	+	+

$$\text{I.2) } x \in \left] 2; \frac{5}{2} \right]$$

$$\text{II.2) } \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6} \geq 0 \text{ (inequação racional fraccionária)}$$

$$2x^2 - 9x + 9 = 0 \text{ Pelo método de Vieth } x = \frac{3}{2} \text{ e } x = 3$$

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \text{ Pelo método de Vieth: } x = 2 \text{ e } x = 3$$

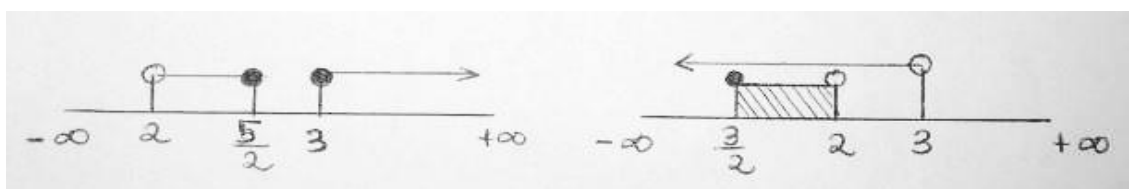
$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x^2 - 11x + 15$	+	-	-	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	-	+	+
$S$	+	-	+	+	+

$$\text{II.2) } x \in \left[ \frac{3}{2}; 2 \right[$$

$$\text{I) } \left\{ \begin{array}{l} [3; +\infty[ \\ x \in \left] 2; \frac{5}{2} \right] \end{array} \right\}$$

$$\text{II) } \left\{ \begin{array}{l} ]-\infty; 3[ \\ x \in \left[ \frac{3}{2}; 2 \right[ \end{array} \right\}$$

Achando a intersecção das soluções de cada sistema:



$$S(I) = \emptyset$$

$$S(II) = \left[ \frac{3}{2}; 2 \right[$$

A solução do sistema será:  $S = S(I) \cup S(II)$

$$S = \left[ \frac{3}{2}; 2 \right[ \text{ ou } S = [1,5; 2[, \text{ Línea B)}$$

47) (Exame 2015) Achar a equação da circunferência que passa pela origem e tem o centro em ponto  $(6; -8)$

Resp: A)  $x^2 + y^2 = 36$     B)  $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$

C)  $x^2 + y^2 = 64$     D)  $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 10$

E)  $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 4$     F)  $(x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 4$

G)  $x^2 + y^2 = 4$     H) *outro*

Resolução:

A equação de uma circunferência é:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

O centro é ponto  $P(6; -8)$ ,  $\alpha = 6$  e  $\beta = -8$

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = R^2$$

Quando passa pela origem temos:  $A(0; 0)$

Vamos determinar o raio da circunferência:

$$R = d_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$R = \sqrt{(6 - 0)^2 + (-8 - 0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

A equação da circunferência será:

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = (10)^2 \rightarrow (x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100, \text{ linea B)}$$

48) (Exame 2015) Calcular a área da figura limitada pelas linhas:

$$y = x^4; y = x$$

Resp: A)  $\frac{1}{5}$     B)  $\frac{2}{5}$     C)  $\frac{1}{2}$     D)  $\frac{3}{5}$     E)  $\frac{7}{10}$     F)  $\frac{4}{5}$     G)  $\frac{3}{10}$     H) *outro*

Resolução:

1º) Passo: Achar a intersecção entre as linhas:

$$y = y \rightarrow x^4 = x = 0 \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$x(x^3 - 1) = 0$ , pelo anulamento do produto, temos:

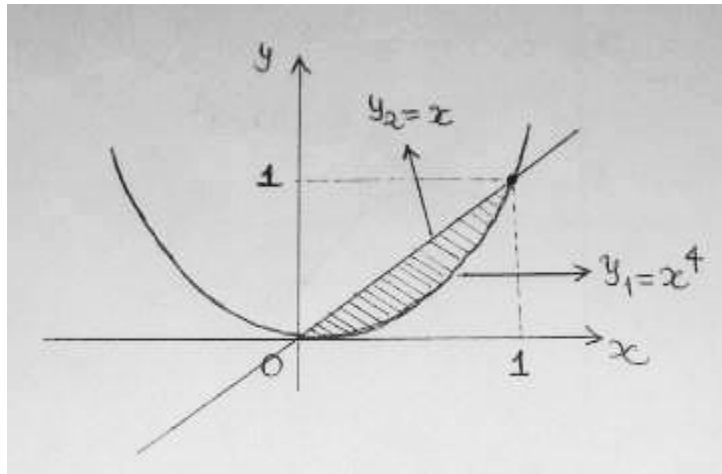
$$x = 0 \quad \text{e} \quad x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1$$

2º) Passo: construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os limites de integração:



$y = x^4$  (função par),  $ox: y = 0 ; x = 0$ ,  $oy: x = 0$  e  $y = 0$

$y = x$  (função ímpar),  $ox: y = 0 ; x = 0$ ,  $oy: x = 0 ; y = 0$



3º) Passo: calcular a área

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_0^1 (x - x^4) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^4 dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 - \left(\frac{x^5}{5}\right)_0^1$$

$$A = \left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1^5}{5}\right) - \left(\frac{0^5}{5}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \rightarrow A = \frac{3}{10}, \text{ Línea G)}$$

49) (Exame 2015) Resolva a equação:

$$\frac{\cot 2x}{\cot x} + \frac{\cot x}{\cot 2x} + 2 = 0$$

Resp: A)  $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}$     B)  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$     C)  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$

D)  $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$     E)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$     F)  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

G)  $x = x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$     H) *outro*

Resolução:

$$\frac{\cot 2x}{\cot x} + \frac{\cot x}{\cot 2x} + 2 = 0, \text{ Achando o denominador comum :}$$

$$\frac{\cot g^2 2x + \cot g^2 x + 2 \cot g 2x \cot g x}{\cot g 2x \cot g x} = 0 \rightarrow \frac{\cot g^2 2x + 2 \cot g 2x \cot g x + \cot g^2 x}{\cot g 2x \cot g x} = 0$$

$$\text{Obs.: } \cot^2 2x + 2\cot 2x \cot x + \cot^2 x = (\cot 2x + \cot x)^2$$

$$\frac{(\cot 2x + \cot x)^2}{\cot 2x \cot x} = 0 \text{ (equação racional fraccionária)}$$

$$(\cot 2x + \cot x)^2 = 0 \text{ e } \cot 2x \cot x \neq 0$$

$$(\cot 2x + \cot x)^2 = 0 \rightarrow \cot 2x + \cot x = 0 (*)$$

$$\text{Sabe-se que: } \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

Substituindo em (\*), temos:

$$\frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} + \cot x = 0, \text{ achando o denominador comum, fica:}$$

$$\frac{3\cot^2 x - 1}{2\cot x} = 0$$

$$3\cot^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cot x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cot x = \cot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \cot x = -\cot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

Condição de existência:

$$\cot x \neq 0 \rightarrow x \neq \pi k$$

$$\cot 2x \neq 0 \rightarrow 2x \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}$$

As soluções  $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$  e  $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$  satisfazem a condição de existência, logo a solução da equação é:

$$S = \left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \right\}, \text{ Línea C}$$

50) (Exame 2015) Resolva a equação:

$$\cot gx - \operatorname{tg} x = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{0,5 \operatorname{sen} 2x}$$

Resp: A)  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$     B)  $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$     C)  $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$

D)  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$     E)  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$     F)  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

G)  $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$     H) *outro*

Resolução:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x} \rightarrow \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x \cos x} - \frac{2(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} 2x} = 0$$

OBs:  $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \rightarrow \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$

$$\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}} - \frac{2(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} 2x} = 0$$

$$\frac{2(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{2(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} 2x} = 0, \text{ factorizando } 2(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$2(\cos x - \operatorname{sen} x) \left( \frac{\cos x + \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} 2x} \right) = 0$$

Anulando os produtos temos:

$$2(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0, \cos x + \operatorname{sen} x - 1 = 0, \operatorname{sen} 2x \neq 0$$

$$2(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \text{ (dividir por } \cos x) \rightarrow \operatorname{tg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(1), \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\cos x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \cos x + \operatorname{sen} x = 1, \text{ Elevar ambos membros } ( )^2$$

$$1 + 2 \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(0), \alpha = 0^\circ$$

$$2x = \pi k \rightarrow x = \frac{\pi k}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2x \neq 0 \rightarrow 2x \neq \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}$$

A solução  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  satisfaz e a solução  $x = \frac{\pi k}{2}$  não satisfaz, logo a

solução da equação é:  $S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$ , Línea F)

51) (Exame 2015) calcular a área da figura limitada pelas linhas

$$y = \frac{1}{x^2}; y = 0 : x = 0,5 \text{ e } x = 2,5$$

Resp: A) 1,5 B) 1,6 C) 1,4 D) 1,8 E) 2,0 F) 1,9 G) 1,7 H) outro

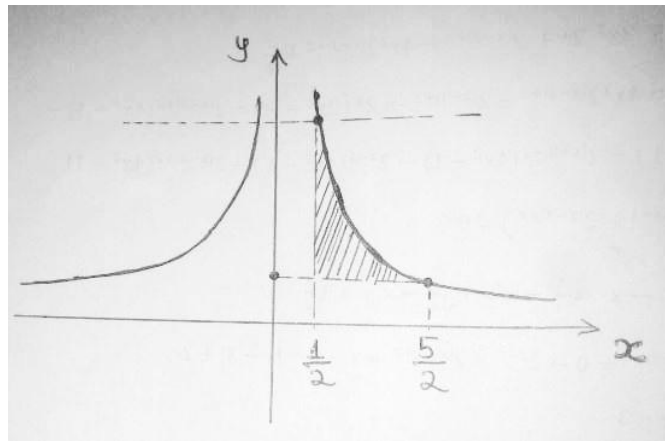
Resolução:

1º) construir o gráfico para visualiza a área a calcular e os limites de integração:

$$y = \frac{1}{x^2} \text{ (Função par) }, x = 0,5 \rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ e } x = 2,5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Quando  $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$

$$\text{se } x = 0,5, y = 4; \text{ se } x = 2,5, y = \frac{4}{25}$$



2º) Passo: calcular a área:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} = -\left(\frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = -\left(\frac{2}{5} - 2\right)$$

$$A = -\left(-\frac{8}{5}\right) \rightarrow A = 1,6 \text{ Línea B)}$$

52) (Exame 2015) Encontre a função  $F(x)$  cujo gráfico passa pelo ponto  $M(3; -2)$  e  $F'(x) = 4x^2 + 9x^{-2}$

$$\text{Resp: A) } x + 1 \quad \text{B) } \frac{4x}{3} + x + 10 \quad \text{C) } \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \quad \text{D) } 4x^3 - \frac{9}{x^3}$$

$$\text{E) } \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{x} - 35 \quad \text{F) } \frac{x^{-1}}{2} + x^{-2} - 3 \quad \text{G) } 3x + x^2 + 2 \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução :

Vamos encontrar a primitiva de  $F'(x)$  aplicando integral indefinida:

$$F(x) = I = \int F'(x) dx$$

$$I = \int (4x^2 + 9x^{-2}) dx = \int 4x^2 dx + \int 9x^{-2} dx = 4 \int x^2 dx + 9 \int x^{-2} dx$$

$$I = \frac{4}{3} x^3 - \frac{9}{x} + c \rightarrow F(x) = \frac{4}{3} x^3 - \frac{9}{x} + c$$

Vamos achar a constante  $c$  :

Como o gráfico de  $F(x)$  passa pelo ponto  $M(3; -2)$ , então:

$$F(x) = \frac{4}{3} x^3 - \frac{9}{x} + c \rightarrow$$

$$-2 = \frac{4}{3} (3)^3 - \frac{9}{3} + c \rightarrow -2 = 33 + c \rightarrow c = -35$$

Então a função  $F(x)$  procurada será:

$$F(x) = \frac{4}{3} x^3 - \frac{9}{x} - 35, \text{ Línea E)}$$

53) (Exame 2015) Simplificar a expressão:

$$36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}$$

Resp: A) 0 B) 1 C) 25 D) -1 E) 49 F) 4 G) 24 H) outro

Resolução:

$$36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36} \rightarrow (6^2)^{\log_6 5} + 10 \cdot 10^{-\log 2} - 3^{\log_{(3^2)}(36)} \rightarrow$$

$$6^{2\log_6 5} + 10 \cdot 10^{\log(2^{-1})} - 3^{\frac{1}{2}\log_3 36} \rightarrow 6^{\log_6(5^2)} + 10 \cdot 10^{\log(\frac{1}{2})} - 3^{\log_3\left(36^{\frac{1}{2}}\right)} \rightarrow$$

$$6^{\log_6 25} + 10 \cdot 10^{\log(\frac{1}{2})} - 3^{\log_3(\sqrt{36})} \rightarrow 6^{\log_6 25} + 10 \cdot 10^{\log(\frac{1}{2})} - 3^{\log_3(6)} (*)$$

Nota que:  $6^{\log_6 25} = 25$  ;  $10^{\log(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$  ;  $3^{\log_3(6)} = 6$  , substituindo em (\*):

$$25 + 10\left(\frac{1}{2}\right) - 6 \rightarrow 25 + 5 - 6 \rightarrow 25 - 10 = 24, \text{ Línea G)}$$

54) (Exame 2015) Resolva a inequação:  $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$

Resp: A) (0; 10) B) [-1; 0[ C) ]-1; 1] D) [2,5 ; 7,5] E) (0; 1)

F) (-1,5 ; 2) G)  $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$

Resolução:

$$5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}} \rightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 + 5 < 5 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}, \text{ Fazendo: } 5^{\sqrt{x}} = t, \text{ temos:}$$

$$\text{Condição de existência: } x \geq 0 \rightarrow S_1 = [0; +\infty[$$

$$t^2 + 5 < 5t + t \rightarrow t^2 + 5 < 6t \rightarrow t^2 - 6t + 5 < 0 \quad (\text{inequação do 2º grau})$$

$$(a = 1; b = -6; c = 5)$$

Aplicando a fórmula resolvente, temos:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = \frac{6+4}{2} \rightarrow t_1 = 5 \quad ; \quad t_2 = \frac{6-4}{2} \rightarrow t_2 = 1$$

$t$	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$t^2 - 6t + 5 < 0$	+	0	0	+

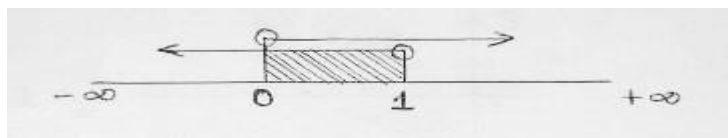
$$t \in [1; 5] \text{ ou } 1 < t < 5 \text{ ou ainda } t > 1 \text{ e } t < 5$$

Voltando na suposição:

$$\left\{ \begin{array}{l} t > 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} > 1 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} > 5^0 \rightarrow \sqrt{x} > 0 \rightarrow (\sqrt{x})^2 > 0^2 \rightarrow x > 0 \rightarrow x \in ]0; \infty[ \\ t < 5 \rightarrow 5^{\sqrt{x}} < 5^1 \rightarrow \sqrt{x} < 1 \rightarrow (\sqrt{x})^2 < (1)^2 \rightarrow x < 1 \rightarrow x \in ]-\infty; 1[ \end{array} \right\}$$

$$\text{A solução do sistema de inequação é: } S_2 = x \in ]0; \infty[ \cap x \in ]-\infty; 1[ = ]0; 1[$$

$$\text{A solução da inequação é: } S = S_1 \cap S_2$$



$$S = (0; 1), \text{ Línea E)}$$

55) (Exame 2015) A equação  $x^2 - 2x + c = 0$  tem raízes  $x_1$  e  $x_2$  que gozam à condição  $7x_2 - 4x_1 = 47$ . Determine o valor de  $c$ .

Resp: A) 20 B) -15 C) 0 D) 1 E) 10 F) -1 G) -5 H) outro

Resolução:

$$7x_2 - 4x_1 = 47 \quad (*)$$

Pela fórmula de composição de uma equação quadrática:

$$x^2 - sx + p = 0 \text{ onde } s = x_1 + x_2 \text{ e } p = x_1 \times x_2, \text{ na equação dada: } x^2 - 2x + c = 0$$

$$s = 2 \text{ e } p = c$$

$$s = x_1 + x_2 = 2 \rightarrow x_1 + x_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2 - x_2 \quad (**)$$

$$p = x_1 \times x_2 \rightarrow x_1 \times x_2 = c \quad (***)$$

Substituindo a equação (\*\*) em (\*) temos:

$$7x_2 - 4x_1 = 47 \rightarrow 7x_2 - 4(2 - x_2) = 47 \rightarrow 7x_2 - 8 + 4x_2 = 47 \rightarrow$$

$$11x_2 = 47 + 8 \rightarrow 11x_2 = 55 \rightarrow x_2 = \frac{55}{11} \rightarrow x_2 = 5$$

Substituindo  $x_2 = 5$  na equação (\*\*) para encontrar  $x_1$  temos:

$$x_1 = 2 - x_2 \rightarrow x_1 = 2 - 5 \rightarrow x_1 = -3$$

Pela equação (\*\*\*) sabe-se que:  $x_1 \times x_2 = c$

$$(-3) \times (5) = c \rightarrow c = -15, \text{ Línea B)}$$

56) (Exame 2015) para qual valor de  $x$  a função:  $y = \sqrt[4]{10+x} - \sqrt{2-x}$  seja positiva:

Resp:

A)  $(-1; 1)$  B)  $[0; 2]$  C)  $[-5; 0]$  D)  $(-2; 3)$  E)  $]-1; 2]$  F)  $-5$  G)  $4$  H) *outro*

Resolução:

Condição de existência:

$$10 + x \geq 0 \rightarrow x \geq -10 \rightarrow x \in [-10; +\infty[$$

$$2 - x \geq 0 \text{ (multiplicando pela constante -1 )};$$

$$x - 2 \leq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow x \in ]-\infty; 2]$$

A solução verdadeira da condição de existência é:

$$S_1 = x \in [-10; +\infty[ \cap x \in ]-\infty; 2] \rightarrow S_1 = [-10; 2]$$

O valor de  $x$  na função será positivo se:

$$\sqrt[4]{10+x} > \sqrt{2-x} \text{ (inequação irracional)}$$

Elevando ambos os membros da desigualdade a quarta:  $(\quad)^4$ , temos:

$$(\sqrt[4]{10+x})^4 > (\sqrt{2-x})^2 \rightarrow 10+x > (2-x)^2 \rightarrow 10+x > 4-4x+x^2 \rightarrow$$

$$10+x > 4-4x+x^2 \rightarrow x^2-5x-6 < 0, \text{ pelo método de vieth, temos:}$$

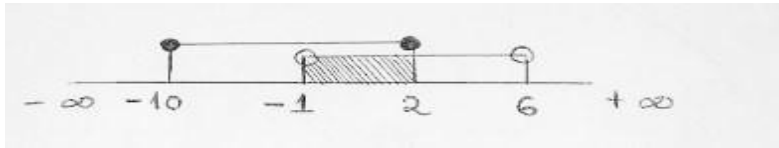
$$x^2-5x-6 = (x-6)(x+1) < 0 \rightarrow (x_1 = 6 \text{ e } x_2 = -1)$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$6$	$+\infty$
$x^2 - 5x - 6 < 0 \text{ (} a > 0 \text{)}$	+	0	-	+

A solução da inequação do 2º grau é:  $S_2 = ]-1; 6[$

O valor de  $x$  na função para que seja positiva, é encontrado, fazendo:

$$S = S_1 \cap S_2$$



$$S = ]-1; 2], \text{ Línea E)}$$

57) (Exame 2015) calcule a área limitada pelas linhas  $y = 2x - x^2$ ;  $y = \frac{3}{4}$

Resp: A)  $\frac{1}{3}$  B)  $\frac{1}{6}$  C)  $\frac{5}{6}$  D)  $\frac{1}{2}$  E) 1 F)  $\frac{2}{3}$  G)  $\frac{7}{6}$  G) *outro*

Resolução:

1º) Achar a intersecção entre as linhas fazendo:  $y = y$

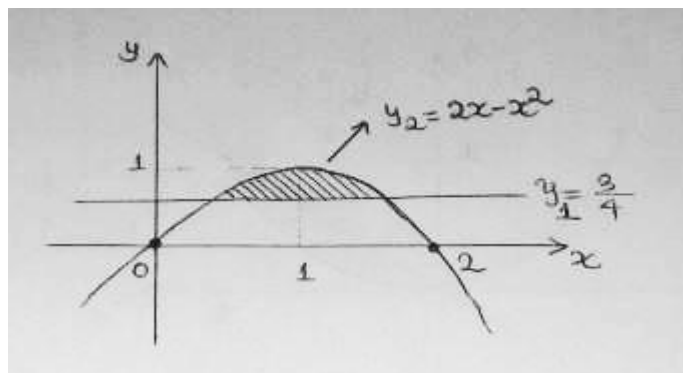
$2x - x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow 8x - 4x^2 - 3 = 0$ , Multiplicando pela constante (-1), temos.

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow (2x - 1)(2x - 3) = 0 \rightarrow \left(x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{3}{2}\right)$$

2º) Construir o gráfico:

$$y = 2x - x^2, \text{ ox: } y = 0, x = 0 \text{ e } x = \frac{1}{2}; \text{ oy: } x = 0 \text{ e } y = 0$$

$$y = \frac{3}{4} \text{ (Recta horizontal)}$$



3º) Calcular a área:

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[ 2x - x^2 - \left(\frac{3}{4}\right) \right] dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (8x - 4x^2 - 3) dx$$

$$A = \frac{1}{4} \left[ 8 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x dx - 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 dx - 3 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx \right], \text{ Integrando, temos: } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$



$$A = \frac{1}{4} \left[ 8 \cdot \frac{1}{2} (x^2)^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \frac{1}{3} (x)^{\frac{3}{2}} - 3 (x)^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$A = \frac{1}{4} \left[ 4 \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right\} - \frac{4}{3} \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^3 - \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right\} - 3 \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[ 8 - \frac{13}{3} - 3 \right]$$

$$A = \frac{2}{3}, \text{ Línea F)}$$

58) (Exame 2014) Resolva a equação:

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1$$

Resp: A)  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = 2 + \sqrt{3}$ ,  $x_4 = 2 - \sqrt{3}$

B)  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $x_3 = 2 + \sqrt{3}$ ,  $x_4 = 2 - \sqrt{3}$

C)  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = 3 + \sqrt{2}$ ,  $x_4 = 3 - \sqrt{2}$

D)  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = 2 + \sqrt{3}$ ,  $x_4 = 2 - \sqrt{3}$

E)  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $x_3 = 3 + 2$ ,  $x_4 = 3 - \sqrt{2}$

F)  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = 3 + \sqrt{2}$ ,  $x_4 = 3 - \sqrt{2}$

G)  $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ ,  $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ ,  $x_3 = 3 + \sqrt{2}$ ,  $x_4 = 3 - \sqrt{2}$

Res.:  $p(x) = 4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1$  (Teorema do resto)

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ isto quer dizer } x_1$$

$= \frac{1}{2}$  é uma das raízes do polinómio

$$x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow D(x) = x - \frac{1}{2} \text{ (Método dos coeficientes indeterminados)}$$

$$p(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$gr(Q(x)) = gr(P(x)) - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = (x - 1/2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = ax^4 + x^3\left(b - \frac{a}{2}\right) + x^2\left(c - \frac{b}{2}\right) + x\left(d - \frac{c}{2}\right) - \frac{d}{2}$$

$$a = 4, \quad b - \frac{a}{2} = -16 \rightarrow b = -14, \quad c - \frac{b}{2} = 3 \rightarrow c = -4, \\ d - \frac{c}{2} = 4 \rightarrow d = 2$$

$$gr(R(x)) = gr(D(x)) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Substituindo os coeficientes encontrados no Q(x) temos:

$$\left(x - 1/2\right)(4x^3 - 14x^2 - 4x + 2) = 0, \quad x_1 = 1/2 \text{ e } 4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$p(x)_1 = 4x^3 - 14x^2 - 4x + 2$$

$$p(-1/2)_1 = 4(-1/2)^3 - 14(-1/2)^2 - 4(-1/2) + 2$$

$$p(-1/2)_1 = 0, \text{ isto quer dizer } x_2$$

$$= -1/2 \text{ é uma das raízes do polinómio}$$

$$x + 1/2 = 0 \rightarrow D(x)_1 = x + 1/2$$

$$p(x)_1 = D(x)_1 \cdot Q(x)_1 + R(x)_1$$

$$gr(Q(x)_1) = 3 - 1 = 2, \quad gr(R(x)_1) = 1 - 1 = 0$$

$$4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = \left(x + 1/2\right)(a_1x^2 + b_1x + c_1)$$

$$4x^3 - 14x^2 - 4x + 2 = ax^3 + x^2\left(b_1 + \frac{a_1}{2}\right) + x\left(c_1 + \frac{b_1}{2}\right) + \frac{c_1}{2}$$

$$a_1 = 4, \quad b_1 + \frac{a_1}{2} = -14 \rightarrow b_1 = -16, \quad c_1 + \frac{b_1}{2} = -4 \rightarrow c_1 = 4$$

Substituindo os coeficientes encontrados no  $Q(x)_1$ , temos:

$$p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 16x + 4) = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2} \text{ e } 4x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$4x^2 - 16x + 4 = 0, \quad \Delta = 192, \quad x_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{192}}{8} = \frac{16 \pm 16\sqrt{3}}{8}$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{3} \text{ e } x_4 = 2 - \sqrt{3}$$

$$S: \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\right)$$

59)(Exame 2014) Resolva a equação:

$$\operatorname{sen} 2x + 2\cot gx = 3$$

Resp: A)  $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$  B)  $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$  C)  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

D)  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$  E)  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$  F)  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  G)  $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

H) *outro*

Resolução:

$$2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cot gx = 3$$

Sabe-se que:  $\operatorname{sen} x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$ ,  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$ ,  $\cot gx = \frac{1}{tgx}$

$$2 \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} \times \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} + \frac{2}{tgx} = 3 \rightarrow \frac{2tgx}{1+tg^2x} + \frac{2}{tgx} = 3$$

$$\frac{2tg^2x+2+2tg^2x}{tgx+tg^3x} = 3 \rightarrow \frac{4tg^2x+2}{tgx+tg^3x} = 3 \rightarrow 4tg^2x+2 = 3tgx+3tg^3x$$

$$3tg^3x - 4tg^2x + 3tgx - 2 = 0, \text{ fazendo: } tgx = t$$

$$3t^3 - 4t^2 + 3t - 2 = 0$$

Decompondo e factorizando os termos:

$$3t^3 - 3t^2 - t^2 + 2t + t - 2 = 0$$

$$(3t^3 - 3t^2) + (-t^2 + t) + (2t - 2) = 0$$

$$3t^2(t - 1) - t(t - 1) + 2(t - 1) = 0$$

$(t - 1)(3t^2 - t + 2) = 0$  , Aplicando o anulamento do produto:

$$(t - 1) = 0 \text{ e } (3t^2 - t + 2) = 0$$

$$(t - 1) = 0 \rightarrow t_1 = 1$$

$$3t^2 - t + 2 = 0 \text{ ( } \Delta < 0, \nexists t \text{ )}$$

Voltando na suposição:

$$tgx = t \rightarrow tgx = 1 \rightarrow tgx = tg(1), \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Condição de existência:

$$tgx \neq 0 \rightarrow x \neq \pi k$$

A solução  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  Satisfaz a condição de existência, o logo:

$$S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \right\}, \text{ Línea F}$$

60) (Exame 2014) A recta que passa pelo ponto  $P(1; 5; 2)$  e é paralela ao vector  $\vec{v} = (4; 3; 7)$ , tem como equação paramétrica:

A)  $x - 3 = 2t; y - 5 = t \text{ e } z - 1 = 7t$  B)  $x - 2 = 2t; y - 3 = t \text{ e } z - 7 = 7t$

C)  $x - 1 = 4t; y - 5 = 3t \text{ e } z - 2 = 7t$  D)  $x - 8 = 5t; y - 15 = 3t \text{ e } z - 11 = 17t$

E)  $x - 7 = 5t; y - 1 = 3t \text{ e } z - 18 = 17t$  F)  $x - 4 = 5t; y - 6 = 3t \text{ e } z - 8 = 17t$

G)  $x - 8 = 11t; y - 15 = 7t \text{ e } z - 11 = 3t$  H) *outro*

Resolução:

A equação paramétrica de uma recta que passa pelo ponto  $P(x_1; y_1; z_1)$  e é paralela ao vector  $\vec{v} = (a; b; c)$  tem como equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \text{ em que no ponto } P(1; 5; 2), x_1 = 1; y_1 = 5 \text{ e } z_1 = 2$$

E no vector  $\vec{v} = (4; 3; 7)$ ,  $a = 4$ ;  $b = 3$  e  $c = 7$ , Substituindo temos:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 5 + 3t \\ z = 2 + 7t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 4t \\ y - 5 = 3t \\ z - 2 = 7t \end{cases};$$

$x - 1 = 4t$ ;  $y - 5 = 3t$  e  $z - 2 = 7t$ , *Linea C*

61) (Exame 2014) Calcular a área da figura limitada pelas linhas

$$y = x^3; y = 1; x = 2$$

Resp: A) 2,25 B) 2 C) 2,75 D) 2,35 E) 2,5 F) 2,65 G) 3 H) *outro*

Resolução:

1º passo: Achar a intersecção entre as líneas:

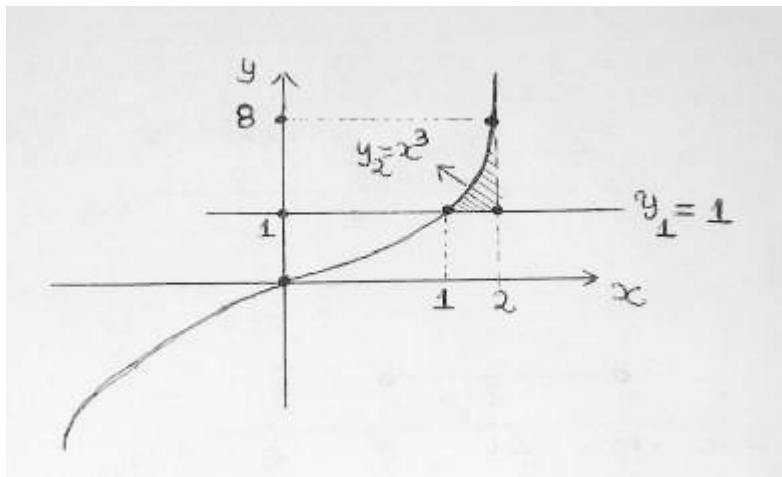
$$y = y \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1, \text{ se } x = 1, y = 1$$

$$\text{se } x = 2 \rightarrow y = (2)^3 \rightarrow y = 8$$

2º Passo: construir o gráfico para visualizar a área a calcular e os limites de integração:

$$y = x^3 (\text{parábola cúbica})$$

$$y = 1 (\text{recta horizontal}), x = 2 (\text{recta vertical})$$



3º Passo calcular a área:

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_1^2 (x^3 - 1) dx = \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)_1^2 - (x)_1^2$$

$$A = \frac{1}{4} [(2)^4 - (1)^4] - (2 - 1) = \frac{15}{4} - 1 = \frac{11}{4} \rightarrow A = 2,75 \text{ line C)}$$

62) (Exame 2013) simplifique a expressão:

$$\sqrt{(\sqrt{a} + 2)^2 - 8\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a} - 2)^2 + 8\sqrt{a}} \quad , \quad 0 \leq a \leq 4$$

Resolução:

Desenvolvendo os quadrados da soma vem:

$$\sqrt{a + 4\sqrt{a} + 4 - 8\sqrt{a}} + \sqrt{a - 4\sqrt{a} + 4 + 8\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a - 4\sqrt{a} + 4} + \sqrt{a + 4\sqrt{a} + 4}$$

$$\sqrt{(\sqrt{a})^2 - 2(2\sqrt{a}) + 2^2} + \sqrt{(\sqrt{a})^2 + 2(2\sqrt{a}) + 2^2}$$

$$\text{Nota que: } x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

$$\sqrt{(\sqrt{a} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a} + 2)^2}$$

$$\text{Pela condição: } 0 \leq a \leq 4 ; |\sqrt{a} - 2| = (2 - \sqrt{a})$$

$$\sqrt{(2 - \sqrt{a})^2} + \sqrt{(\sqrt{a} + 2)^2}$$

$$2 - \sqrt{a} + \sqrt{a} + 2 = 4$$

63) (Exame 2013) Resolva a equação:  $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$

$$\text{Resp: A) } x_1 = 9 \text{ B) } x_2 = \frac{1}{9} \text{ C) } x_1 = 9 ; x_2 = \frac{1}{9} \text{ D) } x_1 = \frac{1}{3} ; x_2 = 9$$

$$\text{E) } x_1 = 3 ; x_2 = \frac{1}{9} \text{ F) } x_1 = \frac{1}{3} \text{ G) } x_1 = 0 \text{ H) outro}$$

Resolução:

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162 \rightarrow 3^{(\log_3 x)^2} + x^{\log_3 x} = 162$$

$$\text{Fazendo: } \log_3 x = t \rightarrow x = 3^t$$

$$\text{Condição de existência: } (x > 0 \text{ e } 0 < x \neq 1)$$

$$3^{t^2} + (3^t)^t = 162 \rightarrow 3^{t^2} + 3^{t^2} = 162 \rightarrow 2 \cdot 3^{t^2} = 162 \rightarrow 3^{t^2} = \frac{162}{2} \rightarrow 3^{t^2} = 81$$

$$3^{t^2} = 3^4 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = \pm\sqrt{4} \rightarrow t = \pm 2 \rightarrow t_1 = 2 \text{ e } t_2 = -2$$

Voltando na suposição:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_3 x = 2 \rightarrow x_1 = 3^2 \rightarrow x_1 = 9 \\ \log_3 x = -2 \rightarrow x_2 = 3^{-2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{3^2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{9} \end{array} \right\}$$

A solução  $x_1 = 9$  e  $x_2 = \frac{1}{9}$  satisfazem a condição logo:

$$S = \left\{ x_1 = 9 ; x_2 = \frac{1}{9} \right\}, \text{ Línea C)}$$

64) (Exame 2013) Simplifique a expressão:

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5} \quad \text{se } -4 \leq a \leq -3$$

Resp:

$$A) 1 \quad B) 2\sqrt{a+4} \quad C) \sqrt{a+4} \quad D) 4 \quad E) 2 + \sqrt{a+4} \quad F) 1 - \sqrt{a+4} \quad G) 2 \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

Fazendo:  $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5}$ , elevando ao quadrado, temos:

$$A^2 = \left( \sqrt{a + 2\sqrt{a+4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a+4} + 5} \right)^2$$

$$A^2 = a + 2\sqrt{a+4} + 5 + 2\sqrt{(a + 2\sqrt{a+4} + 5)(a - 2\sqrt{a+4} + 5)} + a - 2\sqrt{a+4} + 5$$

$$A^2 =$$

$$2a + 10 +$$

$$2\sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a+4} + 5a + 2a\sqrt{a+4} - 4(a+4) + 10\sqrt{a+4} + 5a - 10\sqrt{a+4} + 25}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 10a - 4(a+4) + 25}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 10a - 4a + 25 - 16} = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 6a + 9}$$

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{a^2 + 6a + 9}$$

Nota:  $a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$  (quadrado da soma)

$$A^2 = 2a + 10 + 2\sqrt{(a + 3)^2} \quad (*)$$

Pela condição:  $-4 \leq a \leq -3$  ;  $\sqrt{(a + 3)^2} = -(a + 3)$ , substituindo em (\*), temos:

$$A^2 = 2a + 10 - 2(a + 3) = 2a + 10 - 2a - 6 = 4 \rightarrow A^2 = 4 \rightarrow A = \sqrt{4} \rightarrow$$

$$A = 2, \text{ Línea G}$$

65) (Exame 2013) Resolva a equação:

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} (4 - 5\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x) = 0$$

Resp: A)  $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$ ;  $x_2 = \pi k$  B)  $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$  C)  $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ;  $x_2 = \pi k$

D)  $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$  E)  $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$ ;  $x_2 = 2\pi k$  F)  $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$  G)  $x_1 = \pi k$  H) *outro*

Resolução:

Condição de existência:

$$\operatorname{sen} x \geq 0 \rightarrow 0^\circ + 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k \rightarrow 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$$

$\sqrt{\operatorname{sen} x} (4 - 5\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x) = 0$ , aplicando a lei do anulamento do produto:

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} = 0 \rightarrow (\sqrt{\operatorname{sen} x})^2 = (0)^2 \rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \quad (\alpha = 0^\circ)$$

, caso particular de equações do tipo  $\operatorname{sen} x$ ,  $x = \alpha + \pi k \rightarrow x_2 = \pi k$

$$(4 - 5\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 4 - 5\cos x - 2(1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow$$

$$4 - 5\cos x - 2 + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Fazendo:  $\cos x = t$ ,  $t \in [-1; 1]$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \text{ (equação do 2º; } a = 2; b = -5; c = 2)$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{5-3}{4} \rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \text{ (satisfaz); } t_2 = \frac{5+3}{4} \rightarrow t_2 = 2 \text{ (não satisfaz)}$$

A única raiz que pertence no intervalo de  $[-1; 1]$  é  $t_1 = \frac{1}{2}$

Voltando na suposição:

$$\cos x = t_2 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}\right)$$

Formula dos cossenos:  $x = \pm \alpha + 2\pi k$

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ ou } -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \cup \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

A solução  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$  não satisfaz a condição de existência, logo a solução verdadeira da equação é:  $S = \left\{x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; x_2 = \pi k\right\}$ , Línea C)



66)(Exame 2012) Simplifique a expressão:

$$\left(a^{1/3} + b + \frac{4b^2 - a^{2/3}}{\sqrt[3]{a-b}}\right) : \left(\frac{a^{1/3}}{\sqrt[3]{a^2-b^2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a-b}}\right)$$

Resp: A)  $\sqrt[3]{a^2} - b^2$  B)  $b(\sqrt[3]{a^2} - b^2)$  C)  $b(b + \sqrt[3]{a})$  D)  $\sqrt[3]{a^2} + b^2$

E)  $\sqrt[3]{a}(b - \sqrt[3]{a})$  F)  $\frac{a^{1/3}}{\sqrt[3]{a+b}}$  G)  $\frac{\sqrt[3]{a-b}}{b}$  H) *outro*

Resolução:

$$\left(\sqrt[3]{a} + b + \frac{4b^2 - \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a-b}}\right) : \left[\frac{\sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})} - \frac{2}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a-b}}\right]$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b}) + 4b^2 - \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a-b}}\right] : \left[\frac{\sqrt[3]{a} - 2(\sqrt[3]{a-b}) + \sqrt[3]{a+b}}{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})}\right] = \\ & \left[\frac{\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{a-b^2} + 4b^2 - \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a-b}}\right] \left[\frac{\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} + 2b + \sqrt[3]{a+b}}{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})}\right] = \\ & \left[\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a-b}}\right] : \left[\frac{3b}{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})}\right] = \\ & \left[\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a-b}}\right] \times \left[\frac{(\sqrt[3]{a-b})(\sqrt[3]{a+b})}{3b}\right] = b(\sqrt[3]{a} + b) \end{aligned}$$

67) (Exame 2010/2012) Ache a solução da equação:

$$x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$$

Resp: A)  $x_1 = \frac{1}{2} \cup x_2 \in [3; +\infty[$  B)  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}; x_3 = 3$

C)  $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 3$  D)  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \cup x_2 \in [3; 4]$

E)  $x_1 = -\frac{1}{2} \cup x_2 \in [-3; 3]$  F)  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \cup x_2 \in [3; +\infty]$

G)  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$  H) *outro*

Resolução:

$$2x^2 \cdot 2^x + 2^{|x-3|+2} = 4x^2 2^{|x-3|+2} + \frac{2^x}{2}$$

$$\begin{aligned}
2x^2 \cdot 2^x - \frac{2^x}{2} &= 4x^2 2^{|x-3|+2} - 2^{|x-3|+2} \rightarrow 2^x \left( 2x^2 - \frac{1}{2} \right) \\
&= 2^{|x-3|+2} (4x^2 - 1) \rightarrow \\
\rightarrow \frac{2^x}{2} (4x^2 - 1) &= 2^{|x-3|+2} (4x^2 - 1) \rightarrow \\
2^{x-1} (4x^2 - 1) - 2^{|x-3|+2} (4x^2 - 1) &= 0 \\
(4x^2 - 1)(2^{x-1} - 2^{|x-3|+2}) &= 0 \\
4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \\
2^{x-1} - 2^{|x-3|+2} = 0 \rightarrow 2^{x-1} &= 2^{|x-3|+2} \rightarrow x - 1 = |x - 3| + 2 \\
|x - 3| = x - 3
\end{aligned}$$

*condição de existência da expressão modular:*

$$|x - 3| = (x - 3 \text{ se } x - 3 \geq 0, x - 3 \text{ se } x \geq 3) \text{ e } (-x + 3 \text{ se } x - 3 < 0, -x + 3 \text{ se } x < 3)$$

1º)  $x - 3 = x - 3$ , é válida a desigualdade  $x \geq 3$ , ( $x \geq 3$  é uma das soluções)

2º)  $x - 3 = -x + 3 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x_3 = 3$  (pela CE  $3 < 3$  não satisfaz)

$$S: \left\{ \pm \frac{1}{2}; \cup x \in [3; +\infty[ \right\}, \text{ Línea F}$$

68) (Exame 2011/ 2012) Determine a equação da circunferência com o centro sobre  $ox$  e que passa pelos pontos  $A(3; 2)$  e  $B(-1; 6)$

$$\text{Resp: A) } (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 32 \quad \text{B) } x^2 + (y + 2)^2 = 40$$

$$\text{C) } (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 52 \quad \text{D) } (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

$$\text{E) } (x + 3)^2 + y^2 = 40 \quad \text{F) } (x - 3)^2 + y^2 = 4$$

$$\text{G) } x^2 + (y - 6)^2 = 25 \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução:

Equação geral da circunferência:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \rightarrow \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

$$\text{Centro : } C = \left(-\frac{D}{2} ; -\frac{E}{2}\right)$$

Como o centro está sobre o eixo  $ox$ , uma das suas coordenadas do centro é nula, ou seja:  $E = 0$

$$C = \left(-\frac{D}{2} ; 0\right)$$

$$A(3; 2) \rightarrow 3^2 + 2^2 + 3D + 0 \times 2 = 0 \rightarrow 13 + 3D + F = 0 \text{ (I)}$$

$$B(-1; 6) \rightarrow (-1)^2 + 6^2 - D + 0 \times 6 = 0 \rightarrow 37 - D + F = 0 \text{ (II)}$$

Formando um sistema de duas equações a duas incógnitas com as equações (I) e (II), vem:

$$\begin{cases} 13 + 3D + F = 0 \\ 37 - D + F = 0 \end{cases}, \text{ multiplicando a 1ª por } (-1)$$

$$\begin{cases} -13 - 3D - F = 0 \\ 37 - D + F = 0 \end{cases}, \text{ Resolvendo pelo método de redução temos:}$$

$$24 - 4D = 0 \rightarrow D = \frac{24}{4} \rightarrow D = 6$$

$$\text{II) } 37 - 6 + F = 0 \rightarrow F = -31$$

A equação da circunferência será:

$$\left(x + \frac{6}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{0}{2}\right)^2 = \frac{(6)^2 + (0)^2 - 4(-31)}{4}$$

$$(x + 3)^2 + y^2 = 40, \text{ Línea E)}$$

69) (Exame 2012) Determinar a distância do ponto

$$P(1; 2) \text{ à recta } y = -2x - 1$$

Resp: A)  $3\sqrt{2}$  B)  $2\sqrt{3}$  C)  $\sqrt{5}$  D)  $\sqrt{6}$  E) 2,5 F) 3 G) 2 H) outro

Resolução:

$$P(1; 2), x_0 = 1 \text{ e } y_0 = 2$$

A distância de um ponto à uma recta é determinada pela expressão:

$$d_{P,r} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

na recta  $y = -2x - 1 \rightarrow 2x + y + 1 = 0$  ( $a = 2; b = 1$  e  $c = 1$ )

$$d_{P,r} = \frac{2(1) + 1(2) + 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow d_{P,r} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} \rightarrow d_{P,r} = \sqrt{5}, \text{ Línea C)}$$

70) (Exame 2012) Resolva a equação:

$$\log_{25} x = 0,25^{\log 2} \cdot 0,4^{\log 2} - 81^{0,5 \log_9 7} + 5^{\log_{25} 49}$$

Resp: A)  $x = 25$  B)  $x = 2$  C)  $x = 5$  D)  $x = 7$  E)  $x = 9$  F)  $x = \frac{1}{5}$  G)  $x = 1$  H) *outro*

Resolução:

Condição de existência: ( $x > 0$ )

$$\log_{25} x = (0,25 \times 0,4)^{\log 2} - (3^4)^{\frac{1}{2} \log_{(3^2)} 7} + 5^{\log_{(5^2)} (7^2)}$$

$$\log_{25} x = (0,1)^{\log 2} - (3^4)^{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \log_3 7} + 5^{(2)\left(\frac{1}{2}\right) \log_5 7}$$

$$\log_{25} x = (10^{-1})^{\log 2} - (3^4)^{\left(\frac{1}{4}\right) \log_3 7} + 5^{\log_5 7}$$

$$\log_{25} x = 10^{\log(2^{-1})} - 3^{\log_3 7} + 5^{\log_5 7}$$

$$\log_{25} x = 2^{-1} - 7 + 7 \rightarrow \log_{25} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 25^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \sqrt{25} \rightarrow x = 5$$

$S = \{x = 5\}$ , Línea C

71) (Exame 2008/ 2012) Resolva a equação:

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\text{Resp: A) } x = \frac{\pi k}{2} \cup x = \frac{2\pi k}{3} \quad \text{B) } \frac{\pi k}{3} \quad \text{C) } x = \frac{\pi k}{6} \cup x = \frac{2\pi k}{5}$$

$$\text{D) } x = \frac{\pi k}{3} \cup x = \frac{\pi k}{5} \quad \text{E) } x = \frac{\pi k}{6} \quad \text{F) } x = \frac{3\pi k}{5} \quad \text{G) } x = \frac{2\pi k}{5} \cup x = \frac{2\pi k}{3}$$

H) *outro*

Resolução:

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0, \text{ fazendo } \cos x = t, \text{ onde } t \in [-1; 1]$$

$$8t^4 - 8t^2 - t + 1 = 0 \rightarrow 8t^2(t^2 - 1) - (t - 1) = 0$$

$$8t^2(t - 1)(t + 1) - (t - 1) = 0 \rightarrow (t - 1)(8t^3 + 8t^2 - 1) = 0$$

$$t - 1 = 0 \rightarrow t_1 = 1 \text{ e } 8t^3 + 8t^2 - 1 = 0$$

$$8t^3 + 8t^2 - 1 = 0$$

Considerando que:  $P(t) = 8t^3 + 8t^2 - 1$  onde  $p(t)$  é um polinómio

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$$

$t_2 = -\frac{1}{2}$  anula o polinómio, logo é uma das raízes da equação

Resolvendo pelo método de chaves onde  $P(t) = 8t^3 + 8t^2 - 1$

$$D(t) = x + \frac{1}{2} \text{ Obtemos:}$$

$$p(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)(8t^2 + 4t - 2) \text{ , anulando os produtos, temos:}$$

$$t_2 = -\frac{1}{2} \text{ e } 8t^2 + 4t - 2 = 0$$

$8t^2 + 4t - 2 = 0$  , Dividindo todos os termos da equação por dois vem:

$$4t^2 + 2t - 1 = 0 \text{ (} a = 4, b = 2, c = -1 \text{)}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{5})}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ e } t_4 = \frac{-(\sqrt{5}+1)}{4}$$

A solução da equação do 4º é:

$$S = \left\{ t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}, t_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ e } t_4 = \frac{-(\sqrt{5}+1)}{4} \right\}$$

Voltando na suposição:

$$\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \cos(1) \rightarrow x_1 = 2\pi k$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \cos x \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Fórmula geral dos cossenos: } x = \pm \alpha + 2\pi k \rightarrow x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \rightarrow x_3 = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) + 2\pi k$$

$$\cos x = \frac{-(\sqrt{5}+1)}{4} \rightarrow \cos x = \cos\left[\frac{-(\sqrt{5}+1)}{4}\right] \rightarrow x_4 = \arccos\left[\frac{-(\sqrt{5}+1)}{4}\right] + 2\pi k$$

A solução da inequação é:

$$S = \left\{ x_1 = 2\pi k \cup x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \cup x_3 = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) + 2\pi k \cup x_4 = \arccos\left[\frac{-(\sqrt{5}+1)}{4}\right] + 2\pi k \right\}, \text{ Línea H}$$

72)(Exame 2011) Compor a equação da circunferência que passa pelos pontos  $A(2; 0)$  e  $B(5; 0)$  e toca o eixo  $oy$ .

Resp: A)  $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{8})^2 = 9$  B)  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{10})^2 = 8$

C)  $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 = \frac{49}{4}$  D)  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{10})^2 = 12$

E)  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8$  F)  $(x - 3)^2 + (y \pm \sqrt{8})^2 = 11$

G)  $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = 12$  H) *outro*

Resolução:

A equação de uma circunferência é:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$A(2; 0) \rightarrow (2 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = R^2,$$

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$$4 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = R^2 \quad (*)$$

$$B(5; 0) \rightarrow (5 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = R^2$$

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$$25 - 10\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = R^2 \quad (**)$$

Igualando as equações (\*) e (\*\*), vem:

$$4 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 25 - 10\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \rightarrow 6\alpha = 21 \rightarrow \alpha = \frac{7}{2}$$

Quando toca o eixo  $oy$  uma das coordenadas do centro é nula:  $(0; \beta)$

$$(0; \beta) \rightarrow (0 - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 = R^2 \rightarrow \alpha^2 = R^2 \rightarrow R^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 = \frac{49}{4}$$

$$4 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = R^2 \quad (*), R^2 = \frac{49}{4} \text{ e } \alpha = \frac{7}{2}$$

$$4 - 4\left(\frac{7}{2}\right) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \beta^2 = \frac{49}{4} \rightarrow \beta^2 = 10 \rightarrow \beta = \pm\sqrt{10}$$

Então, a equação da circunferência será:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 = \frac{49}{4}, \text{ Línea C)}$$

73) (Exame 2011) Compor a equação da circunferência que passa pelo ponto  $A(2; 1)$  toca o eixo de coordenadas.

Resp: A)  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$  ou  $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$

B)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$  ou  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

C)  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$  ou  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

D)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  ou  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

E)  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 8$  F)  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$

G)  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$  H) *outro*

Resolução:

A equação de uma circunferência é:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$A(2; 1) \rightarrow (2 - \alpha)^2 + (1 - \beta)^2 = R^2,$$

Desenvolvendo os quadrados da soma, vem:

$$4 - 4\alpha + \alpha^2 + 1 - 2\beta + \beta^2 = R^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 2\beta + 5 = R^2 \quad (*)$$

I) Quando toca o eixo de coordenadas:

I.1) Quando toca o eixo OX:  $(\alpha; 0)$

$$(\alpha; 0) \rightarrow (\alpha - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = R^2 \rightarrow \beta^2 = R^2 \quad (**)$$

I.2) Quando toca o eixo OY:  $(0; \beta)$

$$(0; \beta) \rightarrow (0 - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 = R^2 \rightarrow \alpha^2 = R^2 \quad (***)$$

Igualando as equações (\*\*) e (\*\*\*), vem:

$$\alpha^2 = \beta^2 = R^2 \rightarrow |\alpha| = |\beta| = |R|$$

Pela equação (\*), temos:

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha + 5 = \alpha^2 \rightarrow$$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \rightarrow (\alpha - 5)(\alpha - 1) = 0$$

Pela lei do anulamento do produto:

$$(\alpha - 5) = 0 \rightarrow \alpha_1 = 5, \quad (\alpha - 1) = 0 \rightarrow \alpha_2 = 1$$

$\alpha_1 = 5 \rightarrow \beta_1 = 5$  e  $R_1 = 5$ , A equação da circunferência será:

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = R_1^2 \rightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$\alpha_2 = 1 \rightarrow \beta_2 = 1$  e  $R_2 = 1$ , A equação da circunferência será:

$$(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 = R_2^2 \rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

A equação da circunferência pedida será:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ ou } (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25, \text{ Línea B)}$$

74) Compor a equação da esfera que passa pelo ponto  $A(1; -1; 4)$  e toca os planos de coordenadas

Resp: A)  $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$

B)  $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 11$

C)  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 6$

D)  $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$

E)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 8$

F)  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 9$

G)  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

H) *outro*

Resolução:

A equação de uma esfera é dada pela fórmula:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$$

$$A(1; -1; 4) \rightarrow (1 - \alpha)^2 + (-1 - \beta)^2 + (4 - \gamma)^2 = R^2$$



Desenvolvendo os quadrados da soma, fica:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha + 2\beta - 8\gamma + 18 = R^2 \quad (*)$$

I) Quando toca o plano coordenado  $oxy$ :  $(\alpha; \beta; 0)$

$$(\alpha; \beta; 0) \rightarrow (\alpha - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 + (0 - \gamma)^2 = R^2 \rightarrow \gamma^2 = R^2$$

I) Quando toca o plano coordenado  $oyz$ :  $(0; \beta; \gamma)$

$$II) (0; \beta; \gamma) \rightarrow (0 - \alpha)^2 + (\beta - \beta)^2 + (\gamma - \gamma)^2 = R^2 \rightarrow \alpha^2 = R^2$$

III) Quando toca o plano coordenado  $oxz$ :  $(\alpha; 0; \gamma)$

$$(\alpha; 0; \gamma) \rightarrow (\alpha - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 + (\gamma - \gamma)^2 = R^2 \rightarrow \beta^2 = R^2$$

Igualando as equações obtidas em I) II) e III) , vem:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = R^2 \rightarrow |\alpha| = |\beta| = |\gamma| = R$$

$$\alpha = -\beta = \gamma = R$$

Pela equação (\*), temos:

$$\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha - 8\alpha + 18 = \alpha^2 \rightarrow 2\alpha^2 - 12\alpha + 18 = 0$$

Dividindo toda a equação por dois (2) , vem:

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \rightarrow (\alpha - 3)^2 = 0 \rightarrow \alpha = 3$$

$$se \alpha = 3 \rightarrow \beta = -3, \gamma = 3, R = 3$$

A equação da esfera pedida será:

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9, \text{ Línea A)}$$

75) (Exame 2011) Simplifique a expressão trigonométrica:

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) tg(\pi + \alpha)$$

$$\text{Resp: A) } -1 \quad B) \frac{1}{2} \quad C) \frac{1}{\sin \alpha} \quad D) 1 \quad E) -\sin \alpha \quad F) \text{ outro}$$

Resolução:

Sabe-se que:

$$tg a tg b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)}, \text{ Então:}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) tg(\pi + \alpha) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \pi - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \pi + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \pi - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \pi + \alpha\right)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = -1, \text{ Línea A)}$$

76) (Exame 2011) Resolver a equação:

$$i z^2 + 5 z - 6 i = 0$$

Resp: A)  $z_1 = 3i$ ;  $z_2 = -2i$  B)  $z_1 = 3i$ ;  $z_2 = 2i$  C)  $z_1 = -3i$ ;  $z_2 = 2i$

D)  $z_1 = -3i$ ;  $z_2 = -2i$  E)  $z_1 = 3$ ;  $z_2 = 2i$  F)  $z_1 = 3i$ ;  $z_2 = 2$

G)  $z_1 = 3$ ;  $z_2 = -2i$  H) *outro*

Resolução:

$$i z^2 + 5 z - 6 i = 0 \text{ (Equação complexa do 2º grau)}$$

Aplicando a fórmula resolvente:  $a = i$ ;  $b = 5$  e  $c = -6i$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (5)^2 - 4(i)(-6i) \rightarrow \Delta = 25 + 24 i^2$$

No conjunto dos números completos  $i^2 = -1$

$$\Delta = 25 + 24(-1) \rightarrow \Delta = 25 - 24 \rightarrow \Delta = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow z = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2i} = \frac{-5 \pm 1}{2i}$$

$$z_2 = \frac{-5+1}{2i} = -\frac{4}{2i} = -\frac{2}{i} = \frac{(-1)2}{i} \rightarrow z_2 = \frac{2i^2}{i} \rightarrow z_2 = 2i$$

$$z_1 = \frac{-5-1}{2i} = -\frac{6}{2i} = -\frac{3}{i} = \frac{(-1)3}{i} \rightarrow z_1 = \frac{3i^2}{i} \rightarrow z_1 = 3i$$

A solução da equação é:  $S = \{z_1 = 3i; z_2 = 2i\}$ , Línea B)

$$77) \text{ (Exame 2011) Calcular: } \int_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$$

Resp: A) 16 B) 10 C) 9 D) 15 E) 8 F) 12 G) 5 H) *outro*

Resolução:

Racionalizando o denominar da integral:

$$I = \int_{-1}^{15} \frac{[\sqrt{x+10} + \sqrt{x+1}] dx}{[(\sqrt{x+10} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+10} + \sqrt{x+1})]} = \int_{-1}^{15} \frac{[\sqrt{x+10} + \sqrt{x+1}] dx}{[(\sqrt{x+10})^2 - (\sqrt{x+1})^2]}$$

$$I = \int_{-1}^{15} \frac{(\sqrt{x+10} + \sqrt{x+1})}{x+10-x-1} = \int_{-1}^{15} \frac{(\sqrt{x+10} + \sqrt{x+1})}{9}$$

$$I = \frac{1}{9} \left[ \int_{-1}^{15} \sqrt{x+10} \, dx + \int_{-1}^{15} \sqrt{x+1} \, dx \right]$$

$$I = \frac{1}{9} \left[ \int_{-1}^{15} (x+10)^{\frac{1}{2}} \, dx + \int_{-1}^{15} (x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx \right], \text{ Integrando:}$$

$$I = \frac{1}{9} \left[ \left( \frac{(x+10)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{15} + \left( \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{15} \right] = \frac{1}{9} \left[ \frac{2}{3} \left( (x+10)^{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{15} + \frac{2}{3} \left( (x+1)^{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^{15} \right]$$

$$I = \frac{1}{9} \left[ \frac{2}{3} \left( \sqrt{(x+10)^3} \right)_{-1}^{15} + \frac{2}{3} \left( \sqrt{(x+1)^3} \right)_{-1}^{15} \right]$$

$$I = \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} \left[ \left( \sqrt{(15+10)^3} - \sqrt{(-1+10)^3} \right) + \left( \sqrt{(15+1)^3} - \sqrt{(-1+1)^3} \right) \right]$$

$$I = \frac{2}{27} (125 - 27 + 64 - 0) = \frac{2}{27} (162)$$

$$I = 12, \text{ Línea F)}$$

78)(Exame 2011/ 2010) Resolva a inequação:

$$2\cos x(\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5$$

$$\text{Resp: A) } \left] 2\pi n - \frac{\pi}{4}; 2\pi n + \frac{\pi}{4} \right[$$

$$B) \left] 2\pi n - \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right[$$

$$C) \left] \pi n - \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + \pi n \right[$$

$$D) \left] -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right[$$

$$E) \left] \pi n - \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4} + \pi n \right[ \cup \left] \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right[$$

$$F) \left] \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \right[ \quad G) \left] \pi n + \frac{\pi}{6}; \pi n + \frac{\pi}{2} \right[ \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$2\cos x(\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5$$

$$2\cos x(\cos x - \sqrt{8} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}) < 5 \rightarrow 2\cos x \left( \frac{\cos^2 x - \sqrt{8} \operatorname{sen} x}{\cos x} \right) < 5$$

$$2(\cos^2 x - \sqrt{8} \operatorname{sen} x) < 5 \quad \text{CE: } \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\text{Nota que: } \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x - \sqrt{8} \operatorname{sen} x) < 5 \rightarrow 2 - 2\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{8} \operatorname{sen} x - 3 < 0$$

Multiplicando todos os termos da inequação por (-1), vem:

$$2\text{sen}^2x + 2\sqrt{8}\text{sen}x + 3 > 0 \quad , \text{fazendo } \text{sen}x = t, t \in [-1; 1]$$

$$2t^2 + 2\sqrt{8}t + 3 > 0 \quad (\text{inequação do 2º grau, } a = 2; b = 2\sqrt{8}; c = 3)$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2\sqrt{8}) \pm \sqrt{(2\sqrt{8})^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{-2\sqrt{8} \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{-4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$t_1 = \frac{-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{4} \rightarrow t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; t_2 = \frac{-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{4} \rightarrow t_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$t$	$-\infty$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$			
$2t^2 + 2\sqrt{8}t + 3 > 0$		<div>+</div>	<div>0</div>	<div>-</div>	<div>0</div>	<div>+</div>	

$$t \in ]-\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{2}[ \cup ]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty[ \quad \text{ou } t < -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ e } t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left[ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ não pertence a } [-1; 1] \text{ e } -\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1] \right]$$

Voltando na suposição:

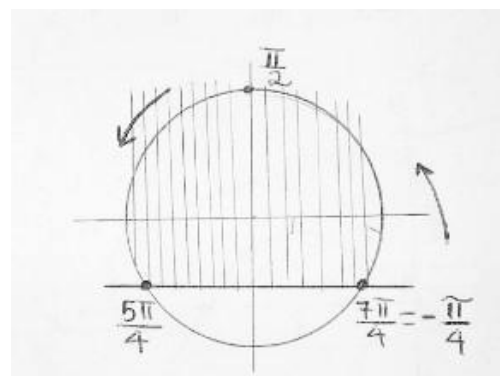
$$\text{sen}x = t \rightarrow \text{sen}x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\text{sen}x = \text{sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow$$

$$\text{sen}x = -\text{sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ de acordo o ciclo}$$

Trigonométrico, a solução da inequação é:

$$S = \left] -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right[ \quad , \text{Línea D)}$$



79) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$$\sqrt{3}(\cos x)^{-2} < 4 \tan x$$

$$\text{Resp: A) } \left] \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right[ \quad \text{B) } \left] \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right[ \quad \text{C) } \left] \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[$$

$$\text{D) } \left] \frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right[ \quad \text{E) } \left] \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right[ \quad \text{F) } \left] \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right[$$

$$\text{G) } \left] \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \right[ \quad \text{H) outro}$$

Resolução:

$$\sqrt{3} \frac{1}{\cos^2 x} < 4 \operatorname{tg} x$$

Nota que:  $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$ , Assim teremos:

$$\sqrt{3} (\operatorname{tg}^2 x + 1) < 4 \operatorname{tg} x \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} < 4 \operatorname{tg} x, \text{ Agrupando;}$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0; \text{ supondo que } \operatorname{tg} x = t$$

$$\sqrt{3} t^2 - 4t + \sqrt{3} < 0; \text{ usando a fórmula resolvente, temos:}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(\sqrt{3})(\sqrt{3})}}{2(\sqrt{3})} = \frac{4 \pm 2}{2\sqrt{3}}$$

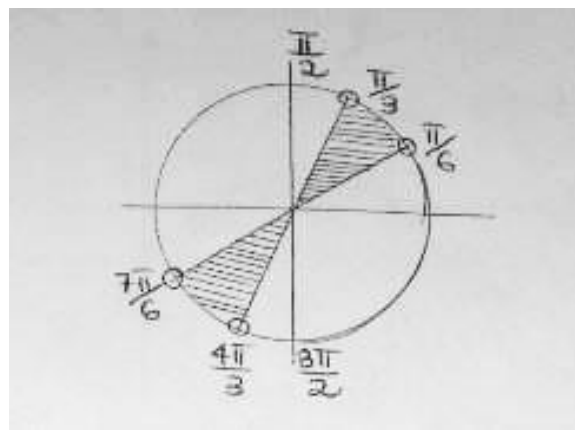
$$t_1 = \sqrt{3}; t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$t$	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\sqrt{3} t^2 - 4t + \sqrt{3} < 0$	+	0	- 0	+

$$t \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3} \right[ \text{ ou } t > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } t < \sqrt{3}$$

Voltando na suposição :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x > \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \operatorname{tg} x < \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x < \operatorname{tg} (\sqrt{3}) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\}$$



De acordo o trigonométrico a solução da inequação é a área de intersecção sombreada no Iº quadrante ou seja:

$$S = x \in \left] \frac{\pi}{6} + \pi k ; \frac{\pi}{3} + \pi k \right[ , \text{Línea A})$$

80) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$$2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x < 0$$

$$\text{Resp: A) } \left] \frac{\pi}{2} (4n - 1); 2\pi n \right[ \quad \text{B) } \left] \frac{\pi}{4} (2n - 1); \frac{\pi n}{2} \right[$$

$$\text{C) } \left] \frac{\pi}{8} (4n - 1); \frac{\pi n}{2} \right[ \quad \text{D) } \left] \frac{\pi}{4} (2n - 1); \frac{\pi}{6} (3n - 1) \right[ \cup \left] \frac{\pi}{6} (3n - 1); \frac{\pi n}{2} \right[$$

$$\text{E) } \left] \frac{\pi}{3} (3n - 1); \frac{\pi}{4} (4n - 1) \right[ \cup \left] \frac{\pi}{4} (2n - 1); \pi n \right[$$

$$\text{F) } \left] \frac{\pi}{3} (3n - 1); \pi n \right[ \quad \text{G) } \left] \frac{\pi}{4} (2n - 1); \frac{\pi}{8} (4n - 1) \right[ \cup \left] \frac{\pi}{8} (4n - 1); \frac{\pi n}{2} \right[$$

H) *outro*

Resolução:

$$2 + \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} < 0 \rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 2x + 2 \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} 2x} < 0, \text{fazendo } \operatorname{tg} 2x = t$$

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{t} < 0 \rightarrow \frac{(t+1)^2}{t} < 0 \text{ (Inequação racional fraccionária)}$$

$$t + 1 = 0 \rightarrow t = -1 \text{ e } t \neq 0$$

$t$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$t + 1$	+	0	-	+
$t$	+	-	+	+

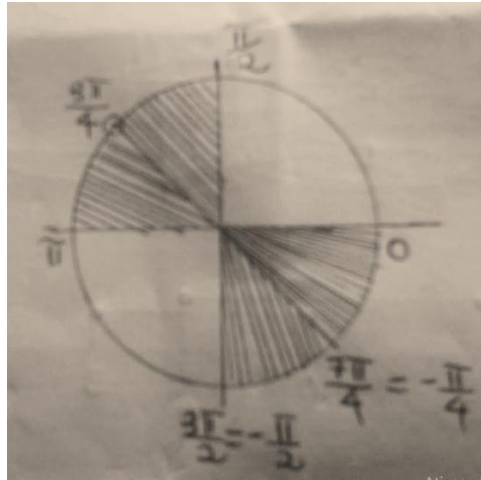
$$t \in [-1; 0] \text{ ou } t > -1 \text{ e } t < 0$$

Voltando na suposição:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x > -1 \rightarrow \operatorname{tg} x > \operatorname{tg}(-1) \rightarrow \operatorname{tg} x > -\operatorname{tg}(1) \rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x < 0 \rightarrow \operatorname{tg} x < \operatorname{tg}(0) \rightarrow \alpha = 0^\circ \end{array} \right.$$

Obs.:  $\operatorname{tg} x < 0$  (os valores da tangente que são menores que zero encontram-se no IIº quadrante e no IVº quando. Isto quer dizer que a

intersecção da desigualdade  $\operatorname{tg} x < 0$  e  $\operatorname{tg} 2x > -1$ , pode ocorrer somente no IIº e no IVº Q



Conforme o ciclo trigonométrico, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + \pi k < 2x < -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ -\frac{\pi}{4} + \pi k < 2x < 0 + \pi k \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi k}{2} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{4}(2k-1) < x < \frac{\pi}{8}(4k-1) \\ \frac{\pi}{8}(4k-1) < x < \frac{\pi k}{2} \end{array} \right\}, \text{ A solução da inequação será:}$$

$$S = \left] \frac{\pi}{4}(2k-1); \frac{\pi}{8}(4k-1) \right[ \cup \left] \frac{\pi}{8}(4k-1); \frac{\pi k}{2} \right[ \text{ se } k = n$$

$$S = \left] \frac{\pi}{4}(2n-1); \frac{\pi}{8}(4n-1) \right[ \cup \left] \frac{\pi}{8}(4n-1); \frac{\pi n}{2} \right[ , \text{ Línea G)}$$

81) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$$\operatorname{sen} 4x + \cos 4x \cot g 2x > 1$$

$$\text{Resp: A) } \left] 2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n \right[ \quad \text{B) } \left] \pi n; \pi n + \frac{\pi}{4} \right[ \quad \text{C) } \left] 2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n \right[$$

$$\text{D) } \left] \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8}; \frac{\pi n}{2} \right[ \quad \text{E) } \left] \pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n \right[ \quad \text{F) } \left] \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + n\pi \right[$$

$$\text{G) } \left] \pi n; \pi n + \frac{\pi}{2} \right[ ; \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução:

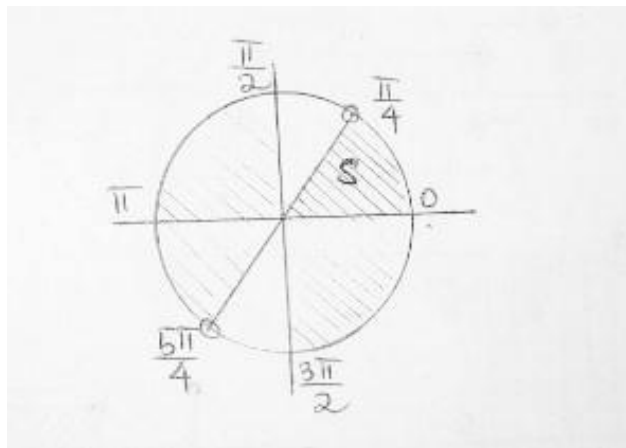
$$\operatorname{sen} 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} > 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 2x + \cos 4x \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} > 1 \quad (*)$$

$$\text{Nota que: } \cos(4x - 2x) = \cos 2x = \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 2x + \cos 4x \cos 2x$$

Voltando em (\*), temos:

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} > 1 \rightarrow \cotg 2x > 1 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} > 1, \text{ Multiplicar por } (\operatorname{tg} 2x)$$

$$\operatorname{tg} 2x < 1 \quad (\operatorname{tg} x < \operatorname{tg}(1) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4})$$



Conforme o ciclo trigonométrico:

$$0 + k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + k\pi$$

A solução da inequação é:

$$S = \left] \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + k\pi \right[ \text{ se } n = k, S = \left] \frac{n\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + n\pi \right[ , \text{ Línea F)}$$

82) (Exame 2011) Resolver a inequação:

$$(\cos x - \operatorname{sen} x) \sqrt{3x - x^2} \geq 0$$

$$\text{Resp: A) } \left[ 0; \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{B) } \left[ 0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \{3\} \quad \text{C) } \left[ 0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \{3\} \quad \text{D) } \left[ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{E) } \left[ 0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{F) } \left[ 0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}; 3 \right] \quad \text{G) } [0; 3] \quad \text{H) } \textit{outro}$$

Resolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x - \operatorname{sen} x \geq 0 \\ 3x - x^2 \geq 0 \end{array} \right\} ; \text{ sabe-se que } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0 ; (*)$$

$$\text{sabe-se que: } \cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$



$$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Voltando em (\*):

$$-2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \quad (\text{Multiplicar todos os termos por } -1), \text{ vem:}$$

$$2 \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \rightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$

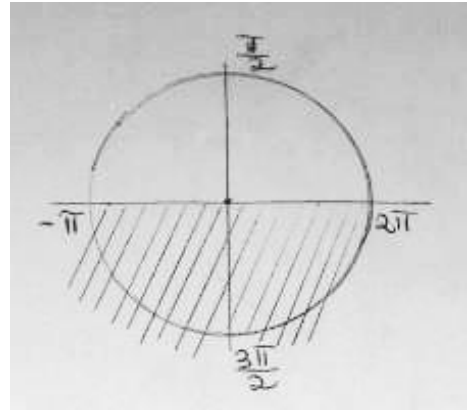
Conforme o ciclo

Trigonométrico, temos:

$$-\pi + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 0 + 2k\pi$$

$$-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$S_1 = x \in -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$



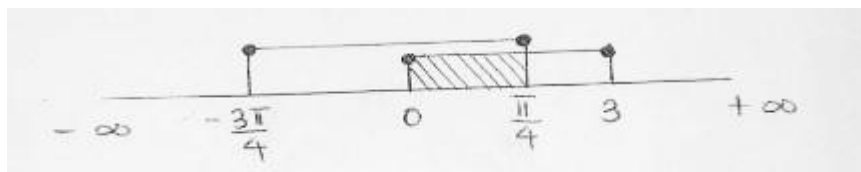
$3x - x^2 \geq 0$ , multiplicar por  $-1$  e fatorizar  $x$ , temos:

$$x^2 - 3x \leq 0 \rightarrow x(x - 3x) \leq 0 \quad (x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 3)$$

$t$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
$x^2 - 3x \leq 0$	+	0	0	+

$$S_2 = x \in [0; 3]$$

A solução da inequação é:  $S = S_1 \cap S_2$



$$S = \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \{3\}; \text{ Línea C}$$

83) (Exame 2011) Resolver a equação:  $iz^2 - z + 2i = 0$

Resp: A)  $z_1 = 2$ ;  $z_2 = -i$  B)  $z_1 = 2i$ ;  $z_2 = -i$  C)  $z_1 = 2i$ ;  $z_2 = i$

D)  $z_1 = -2i$ ;  $z_2 = -i$  E)  $z_1 = 2$ ;  $z_2 = i$  F)  $z_1 = 2i$ ;  $z_2 = 1$  G)  $z_1 = -2i$ ;  $z_2 = i$  H) outro

Resolução:

$$iz^2 - z + 2i = 0 \text{ (equação complexa do 2º grau; } a = i; b = -1; c = 2i \text{)}$$

Aplicando a fórmula resolvente, temos:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(i)(2i)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8i^2}}{2i}, \text{ sabe-se que: } i^2 = -1$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-8(-1)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2i} = \frac{1 \pm 3}{2i}$$

$$z_1 = \frac{1+3}{2i} = \frac{4}{2i} = \frac{2}{i} = \left(\frac{2}{i}\right) \left(\frac{i}{i}\right) = \frac{2i}{i^2} = \frac{2i}{(-1)} \rightarrow z_1 = -2i$$

$$z_2 = \frac{1-3}{2i} = -\frac{2}{2i} = (-1) \frac{1}{i} = (-1) \left(\frac{1}{i}\right) \rightarrow z_2 = i$$

A solução da equação é:  $S = \{z_1 = -2i \text{ e } z_2 = i\}$ , Línea G

84) (Exame 2011) Calcular  $\int_0^\pi (\cos x)^4 dx$

Resp: A)  $\frac{5\pi}{9}$  B)  $\frac{3\pi}{8}$  C)  $\frac{2\pi}{7}$  D)  $\frac{5\pi}{8}$  E)  $\frac{4\pi}{9}$  F)  $\frac{\pi}{2}$  G)  $\frac{3\pi}{7}$  H) outro

Resolução:

$$I = \int_0^\pi (\cos x)^4 dx = \int_0^\pi (\cos^2 x) (\cos^2 x) dx$$

$$\text{Sabe-se que: } \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$I = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2x)\right) \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2x)\right) dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$I = \frac{1}{4} \left[ \int_0^\pi dx + 2 \int_0^\pi \cos 2x dx + \int_0^\pi \cos^2 2x dx \right]$$

$$\text{Sabe-se que: } \cos^2 2x = \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)$$

$$I = \frac{1}{4} \left[ \int_0^\pi dx + 2 \int_0^\pi \cos 2x dx + \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) dx \right]$$

$$I = \frac{1}{4} \left[ \int_0^\pi dx + 2 \int_0^\pi \cos 2x dx + \frac{1}{2} \left( \int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos 4x dx \right) \right]$$

Integrando todas as expressões temos:

$$I = \frac{1}{4} \left[ (x)_0^\pi + 2 \left(\frac{1}{2}\right) (\sin 2x)_0^\pi + \frac{1}{2} \left\{ (x)_0^\pi + \frac{1}{4} (\cos 4x)_0^\pi \right\} \right]$$

$$I = \frac{1}{4} \left[ (\pi - 0) + (\sin 2\pi - \sin 0) + \frac{1}{2} \left\{ (\pi - 0) + \frac{1}{4} (\cos 4\pi - \cos 0) \right\} \right]$$

$$I = \frac{1}{4} \left( \pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{8} \rightarrow I = \frac{3\pi}{8}, \text{ Línea B)}$$

85) (Exame 2011) Resolva a inequação logarítmica:

$$\log_{\frac{1}{8}}(3-x) < \log_{\frac{1}{8}} 5$$

Resp: A)  $x \in ]0; 2[$  B)  $x \in ]-\infty, -2[$  C)  $x \in ]2; 0[$  D) *não tem soluções*  
E)  $] -2; +\infty[$  F) *outro*

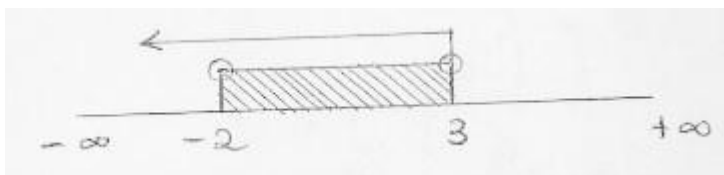
Resolução:

Condição de existência:  $3 - x > 0 \rightarrow x < 3 \rightarrow S_1 = x \in ]-\infty; 3[$

$\log_{\frac{1}{8}}(3-x) < \log_{\frac{1}{8}} 5$ , Simplificando as bases temos:

$$3 - x < 5 \rightarrow x > -5 + 3 \rightarrow x > -2 \rightarrow S_2 = x \in ]-2; +\infty[$$

A solução da inequação logarítmica é:  $S = S_1 \cap S_2$



$S = ]-2; 3[$ , Línea F)

86) (Exame 2011) Resolva a equação algébrica:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = 4$$

Resp: A)  $x = 6 \cup x = 4$  B) *não tem soluções* C)  $x = 2$  D)  $x = 4$   
E)  $x = 6 \cup x = 14$  F) *outro*

Resolução:

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$$(\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5})^2 = (4)^2 \rightarrow x - 3 + 2\sqrt{(x-3)(x+5)} + x + 5 = 16 \rightarrow$$

$$2\sqrt{x^2 + 2x - 15} + 2x + 2 = 16, \text{ dividindo todos os termos da equação por } (2)$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 15} + x + 1 = 8 \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 7 - x, \text{ elevando mais ao quadrado:}$$

$$(\sqrt{x^2 + 2x - 15})^2 = (7 - x)^2 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 49 - 14x + x^2$$

$$2x + 14x = 49 + 15 \rightarrow 16x = 64 \rightarrow x = \frac{64}{16} \rightarrow x = 4$$

Verificação:  $x = 4$

$$\sqrt{4-3} + \sqrt{4+5} = 4$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{9} = 4$$

$$1 + 3 = 4$$

$$4 = 4$$

A solução da equação é:  $S = \{x = 4\}$ , Línea D

87) (Exame 2011) Os três pontos  $A(2; 1); B(3; -1); C(-4; 0)$  são vértices do trapézio isóceles ABCD. Achar as coordenadas do ponto D se  $AB \parallel CD$

Resp: A) (1,5 ; 5,5) B) (-1,5 ; -5,5) C) (-1,2 ; -5,4) D) (-1,4 ; -5,2)

E) (1,5 ; -5,5) F) (-1,1 ; -5,6) G) (-1,8 ; -5,2) H) outro

Resolução.

É fácil notar a partir da figura que:

$d_{AC} = d_{BD}$  e os declives das rectas

Que passa pontos  $AB$  e  $CD$

Serão iguais ou seja:  $m_{AB} = m_{CD}$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_A)^2} \text{ e } d_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$$

Se  $d_{AC} = d_{BD}$ , teremos:

$$\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}, \text{ Elevando ao quadrado temos:}$$

$$(-4 - 2)^2 + (0 - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y + 1)^2$$

$$37 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y - 27 = 0 \text{ (I)}$$

A equação da recta que passa pelos Pontos:  $A(2; 1); B(3; -1)$  é:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} \rightarrow \frac{x - 2}{2 - 3} = \frac{y - 1}{1 - (-1)} \rightarrow 2x - 4 = -y + 3 \rightarrow 2x + y - 5 = 0 \text{ (r}_1\text{)}$$

O declive da recta  $r_1$  é:  $m_{AB} = -\frac{2}{1} \rightarrow m_{AB} = -2$

A equação da recta que passa pelos pontos:  $C(-4; 0)$  e  $D$  é:

$$y - y_1 = m_{BC}(x - x_1) \rightarrow y - 0 = m_{BC}(x + 4)$$

$$y = m_{BC}(x + 4) \text{ (r}_2\text{)}$$

Como  $r_1 \parallel r_2 \rightarrow m_{BC} = -2$

$y = -2(x + 4) \rightarrow y = -2x - 8$  (II), substituindo (II) em (I), temos:

$$x^2 + (-2x - 8)^2 - 6x + 2(-2x - 8) - 27 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 32x + 64 - 6x - 4x - 16 - 27 = 0 \rightarrow 5x^2 + 22x + 21 = 0$$

Pelo método de Vieth:  $5x^2 + 22x + 21 = (5x + 7)(x + 3) = 0$

$$(5x + 7)(x + 3) = 0 \rightarrow 5x + 7 = 0 \text{ e } x + 3 = 0$$

$$5x + 7 = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{5} \rightarrow x_1 = -1,4; x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3$$

$$\text{Para } x_1 = -1,4 \rightarrow y = -2(-1,4) - 8 \rightarrow y_1 = -5,2 \quad P_1(-1,4; -5,2)$$

$$\text{Para } x_2 = -3 \rightarrow y = -2(-3) - 8 \rightarrow y_2 = -2 \quad P_2(-3; -2)$$

As coordenadas do ponto D são:  $(-1,4; -5,2)$ , Línea D

88)(Exame 2011) Calcular:  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{9+16x}}$

Resp: A)  $\frac{11}{96}$  B)  $\frac{13}{96}$  C)  $\frac{15}{92}$  E)  $\frac{11}{95}$  F)  $\frac{13}{95}$  G)  $\frac{13}{92}$  H) *outro*

Resolução:

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{9+16x}}$$

Fazendo:

$$\sqrt{9+16x} = t \rightarrow 9+16x = t^2 \rightarrow x = \frac{t^2-9}{16} (*)$$

Derivando ambos membros da igualdade (\*), temos:

$$(x)' dx = \left(\frac{t^2-9}{16}\right)' dt \rightarrow dx = \frac{2tdt}{16} \rightarrow dx = \frac{tdt}{8},$$

Mudando os limites de integração temos em função da nova variável

$$: \sqrt{9+16x} = t$$

$$\text{se } x = 1 \rightarrow t = \sqrt{9+16(1)} \rightarrow t = 5$$

$$\text{se } x = 0 \rightarrow t = \sqrt{9+16(0)} \rightarrow t = 3$$

Novos limites de integração:  $3 \leq t \leq 5$

Substituindo devidamente na integral, temos:

$$I = \int_3^5 \left(\frac{t^2-9}{16}\right) \frac{tdt}{8} = \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8}\right) \int_3^5 (t^2-9) dt = \frac{1}{128} \left[ \int_3^5 t^2 dt - 9 \int_3^5 dt \right]$$

Integrando pela fórmula da potência:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$I = \frac{1}{128} \left[ \frac{1}{3} (t^3) \Big|_3^5 - 9 (t) \Big|_3^5 \right] = \frac{1}{128} \left[ \frac{1}{3} (\{5^3\} - \{3^3\}) - 9(5-3) \right]$$

$$I = \frac{1}{128} \left[ \frac{1}{3} (125-27) - 18 \right] = \frac{1}{128} \left( \frac{44}{3} \right) = \frac{44}{384} : \left( \frac{4}{4} \right) = \frac{11}{96}$$

$$I = \frac{11}{96}, \text{ Línea A}$$

89)(Exame 2011) Calcular:  $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^3}$

Resp: A)  $\frac{1}{9}$  B)  $\frac{3}{8}$  C)  $\frac{5}{8}$  D)  $\frac{1}{8}$  E)  $\frac{2}{9}$  F)  $\frac{4}{9}$  G)  $\frac{1}{2}$  H) *outro*

Resolução:

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^3}$$

Fazendo:  $x + 1 = t \rightarrow x = t - 1$ , derivando ambos os membros:

$$(x)' dx = (t - 1)' dt \rightarrow dx = dt$$

Trocando os limites de integração em função da nova variável, temos:

$$x + 1 = t$$

$$\text{se } x = 1 \rightarrow t = 1 + 1 \rightarrow t = 2$$

$$\text{se } x = 0 \rightarrow t = 0 + 1 \rightarrow t = 1$$

Novos limites de integração:  $1 \leq t \leq 2$

Substituindo devidamente na integral, temos:

$$I = \int_1^2 \frac{(t-1)dt}{t^3} = \int_1^2 \frac{tdt}{t^3} - \int_1^2 \frac{dt}{t^3} \rightarrow I = \int_1^2 \frac{dt}{t^2} - \int_1^2 t^{-3} dt$$

$$I = \int_1^2 t^{-2} dt - \int_1^2 t^{-3} dt, \text{ integrando com a fórmula: } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$I = - (t^{-1})_1^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) (t^{-2})_1^2 = -\left(\frac{1}{t}\right)_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t^2}\right)_1^0$$

$$I = -\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right)\right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{(2^2)}\right) - \left(\frac{1}{(1^2)}\right)\right] = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$I = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \rightarrow I = \frac{1}{8}, \text{ Línea D)}$$

90) (Exame 2010) Simplifica a expressão:

$$\left(\frac{7}{b^{1/6} + 7} + \frac{b^{1/3} + 34}{b^{1/3} - 49} - \frac{7}{b^{1/6} + 7}\right) \left(\frac{b^{1/3} - 14b^{1/6} + 49}{(b^{1/6} + 8)(b^{1/6} - 8)}\right)$$

Resp: A)  $b^{1/6} - 7$  B)  $\frac{b^{1/6}+7}{b^{1/6}-7}$  C)  $\frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7}$  D) 0 E) 1 F) *outro*

Resolução:

Transformando todas as expressões com expoentes fraccionários em radicais, vem:

$$\left(\frac{7}{\sqrt[6]{b} + 7} + \frac{\sqrt[3]{b} + 34}{\sqrt[3]{b} - 49} - \frac{7}{\sqrt[6]{b} + 7}\right) \left(\frac{\sqrt[3]{b} - 14\sqrt[6]{b} + 49}{(\sqrt[6]{b} + 8)(\sqrt[6]{b} - 8)}\right),$$

achando um mínimo múltiplo comum para todos os radicais ( neste 6 é o denominador comum para todos os radicais), vem:

$$\left( \frac{7}{\sqrt[6]{b}+7} + \frac{\sqrt[6]{b^2+34}}{\sqrt[6]{b^2-49}} - \frac{7}{\sqrt[6]{b}-7} \right) \left( \frac{\sqrt[6]{b^2-14}(\sqrt[6]{b})+49}{(\sqrt[6]{b}+8)(\sqrt[6]{b}-8)} \right), \text{ Fazendo: } \sqrt[6]{b} = t$$

$$\left( \frac{7}{t+7} + \frac{t^2+34}{t^2-49} - \frac{7}{t-7} \right) \left( \frac{t^2-14t+49}{(t+8)(t-8)} \right) = \left[ \frac{7(t-7)+t^2+34-7(t+7)}{t^2-49} \right] \left[ \frac{(t-7)^2}{(t+8)(t-8)} \right]$$

$$= \left[ \frac{7t-49+t^2+34-7t-49}{t^2-49} \right] \left[ \frac{(t-7)^2}{(t+8)(t-8)} \right] = \left[ \frac{t^2-64}{t^2-49} \right] \left[ \frac{(t-7)^2}{(t+8)(t-8)} \right] = \left[ \frac{t-7}{t+7} \right], \text{ Voltando, temos:}$$

$$= \left( \frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7} \right). \text{Resposta: } \left( \frac{b^{1/6}-7}{b^{1/6}+7} \right), \text{ Línea C)}$$

91)(Exame 2010) Simplifica a expressão:

$$\left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \left[ \frac{\sqrt[3]{m^4} - n^3 + n^2\sqrt[3]{m} - mn}{mn^{-1} + n - n^4m^{-1} - n^2} \right]$$

Resp: A)  $\frac{m^2}{n}$  B)  $mn$  C)  $2mn^2$  D)  $\frac{m}{n^2}$  E)  $\frac{1}{2} m^2n$

F)  $-2mn$  G)  $\frac{n}{m}$  H) *outro*

Resolução:

$$\left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \left[ \frac{(\sqrt[3]{m^4} + n^2\sqrt[3]{m}) - (n^3 + mn)}{\frac{m+n^2}{n} - \left( \frac{n^4+mn^2}{m} \right)} \right]$$

$$= \left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \left[ \frac{\sqrt[3]{m}(m+n^2) - n(n^2+nm)}{m^3+mn^2-n^5-mn^3} \right] (mn)$$

$$= \left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \left[ \frac{(m+n^2)(\sqrt[3]{m}-n)}{m(m+n^2)-n^3(n^2+m)} \right] (mn)$$

$$= \left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \left[ \frac{(m+n^2)(\sqrt[3]{m}-n)}{(m+n^2)(m-n^3)} \right] (mn)$$

$$= \left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \left[ \frac{(\sqrt[3]{m}-n)}{(m-n^3)} \right] (mn) =$$

$$= \left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \left[ \frac{(\sqrt[3]{m}-n)}{(\sqrt[3]{m^3}-n^3)} \right] (mn)$$

$$= (\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2) \left[ \frac{(\sqrt[3]{m-n})}{(\sqrt[3]{m-n})(\sqrt[3]{m^2+n\sqrt[3]{m}+n^2})} \right] (mn) = mn$$

Resposta:  $mn$  , Línea B

92) (Exame 2010) Ache a solução da equação:

$$3^x \cdot 8^{x/x+2} = 6$$

Resp: A)  $x_1 = 1$  ;  $x_2 = 2 \log_3 2$  B)  $x_1 = 1$  C)  $x_1 = 1$  ;  $x_2 = 2 \log_3 6$  ; D)  $x_1 = -2 \log_3 2$  E)  $x_1 = 1$  ;  $x_2 = -2 \log_3 2$

F)  $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 2 \log_3 6$  G)  $x_1 = 1$  ;  $x_2 = -2 \log_3 6$  H) *outro*

Resolução:

$$3^x \cdot (2^3)^{x/x+2} = 3 \cdot 2 \rightarrow 3^x \cdot 2^{3x/x+2} = 3 \cdot 2 \rightarrow \frac{3^x}{3} = \frac{2}{2^{3x/x+2}}$$

$$3^{x-1} = 2^{1-3x/x+2} \rightarrow 3^{x-1} = 2^{2-2x/x+2}$$

Aplicando logaritmo natural em ambos membros da igualdade ( $\ln$ ), fica:

$$\ln 3^{x-1} = \ln 2^{2-2x/x+2} \rightarrow (x-1) \ln 3 = \frac{(2-2x)}{x+2} \ln 2$$

$$(x-1) \ln 3 = \frac{-2(x-1) \ln 2}{x+2} \rightarrow (x-1) \ln 3 + \frac{2(x-1)}{x+2} \ln 2 = 0$$

$$(x-1) \left[ \ln 3 + \frac{2 \ln 2}{x+2} \right] = 0 \rightarrow x-1 = 0 \text{ e } \left[ \ln 3 + \frac{2 \ln 2}{x+2} \right] = 0$$

$$x-1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$$

$$\left[ \ln 3 + \frac{2 \ln 2}{x+2} \right] = 0$$

$$\rightarrow x \ln 3 + 2 \ln 3 + 2 \ln 2 = 0 \rightarrow x \ln 3 + \ln 3^2 + \ln 2^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x \ln 3 + \ln 9 + \ln 4 = 0 \rightarrow x \ln 3 + \ln 36 = 0 \rightarrow x \ln 4 = -\ln 36$$

$$x \ln 3 = -\ln 36 \rightarrow x = -\frac{\ln 36}{\ln 3} \rightarrow x = -\log_3 36 \rightarrow x = -(\log_3 6^2)$$

$$x = -2(\log_3 3 \cdot 2) \rightarrow x = -2(\log_3 3 + \log_3 2) \rightarrow x_2 = -2(1 + \log_3 2)$$

$$x_2 = -2(\log_3 3 + \log_3 2) = -2 \log_3 (3 \cdot 2)$$

$$x_2 = -2 \log_3 6$$



S:  $(1; -2 \log_3 6)$  , Línea G

93) (Exame 2010) Resolva a equação:

$$\log_{0,5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$$

Resp: A)  $x_1 = 1; x_2 = 4; x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  B)  $x_1 = 1; x_2 = 4$

C)  $x_1 = 4; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  D)  $x_1 = 1; x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

E)  $x_1 = 1; x_2 = 4; x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  F)  $x_1 = 4; x_2 = \sqrt{2};$

G)  $x_1 = 1; x_2 = \sqrt{2}; x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  H) *outro*

Resolução:

*condição de existência:  $(x > 0 \text{ e } 0 < x \neq 1)$*

$$2 \log_{\frac{x}{2}}(x) - 14.3 \log_{16x} x + 40 \log_{4x} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$2 \log_{\frac{x}{2}}(x) - 42 \log_{16x} x + \frac{40}{2} \log_{4x} x = 0$$

$$2 \log_{\frac{x}{2}}(x) - 42 \log_{16x} x + 20 \log_{4x} x = 0$$

*Fazendo a mudança de base em todos os termos da equação, vem:*

$$\frac{2}{\log_{\frac{x}{2}} x} - \frac{42}{\log_x 16x} + \frac{20}{\log_x 4x} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{2}{(\log_x x - \log_x 2)} - \frac{42}{(\log_x 16 + \log_x x)} + \frac{20}{\log_x 4 + \log_x x} = 0/:2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{(1 - \log_x 2)} - \frac{21}{(\log_x 2^4 + 1)} + \frac{10}{(\log_x 2^2 + 1)} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{(1 - \log_x 2)} - \frac{21}{(4 \log_x 2 + 1)} + \frac{10}{(2 \log_x 2 + 1)} = 0$$

*Fazendo mudança de base outra vez, vem:*

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\log_2 x}\right)} - \frac{21}{\left(\frac{4}{\log_2 x} + 1\right)} + \frac{10}{\left(\frac{2}{\log_2 x} + 1\right)} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\log_2 x}{(\log_2 x - 1)} - \frac{21 \log_2 x}{(4 + \log_2 x)} + \frac{10 \log_2 x}{(2 + \log_2 x)} = 0,$$

fazendo:  $\log_2 x = t$ , vem:

$$\frac{t}{(t - 1)} - \frac{21t}{(4 + t)} + \frac{10t}{(2 + t)} = 0 \rightarrow t \left( \frac{1}{t - 1} - \frac{21}{t + 4} + \frac{10}{2 + t} \right) = 0 \rightarrow$$

Aplicando a lei do anulamento do produto temos:  $t = 0$  e

$$\left( \frac{1}{t - 1} - \frac{21}{t + 4} + \frac{10}{2 + t} \right) = 0 \rightarrow \left( \frac{t + 4 - 21t + 21}{(t - 1)(t + 4)} + \frac{10}{2 + t} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\left( \frac{25 - 20t}{t^2 + 3t - 4} + \frac{10}{2 + t} \right) = 0 \rightarrow \left[ \frac{(25 - 20t)(2 + t) + 10t^2 + 30t - 40}{(t^2 - 3t - 4)(2 + t)} \right] \rightarrow$$

$$\left[ \frac{50 + 25t - 40t - 20t^2 + 10t^2 + 30t - 40}{(t^2 - 3t - 4)(2 + t)} \right] = 0 \rightarrow \left[ \frac{-10t^2 + 15t + 10}{(t^2 - 3t - 4)(2 + t)} \right] = 0 / \times (-1) \rightarrow$$

$$\left[ \frac{2t^2 - 3t - 2}{(t^2 - 3t - 4)(2 + t)} \right] = 0 \rightarrow$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \text{ e } (t^2 - 3t - 4)(2 + t) \neq 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} (t^2 - 3t - 4)(2 + t) \neq 0 \rightarrow \\ (t + 4)(t - 1)(2 + t) \neq 0 \rightarrow t \neq -4; t \neq 1 \text{ e } t \neq -2 \end{array} \right]$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2) \rightarrow \Delta = 25,$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \rightarrow t_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } t_2 = 2$$

os valores de  $t$  são:  $-\frac{1}{2}$ , 0 e 2

$$\log_2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\log_2 x = 0 \rightarrow x = 2^0 \rightarrow x_2 = 1$$

$$\log_2 x = 2 \rightarrow x = 2^2 \rightarrow x_3 = 4 \quad S: \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; 4 \right\}, \text{ Línea C)}$$

94) (Exame 2010) Escrever uma equação reduzida da recta perpendicular à recta da equação  $y = -3x + 7$  passando pelo ponto  $(0 ; 2)$

Resp: A)  $y = \frac{1}{3}x + 2$  B)  $y = -\frac{1}{3}x + 2$  C)  $y = 3x + 2$  D)  $y = 3x - 2$

E)  $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$  F)  $y = x + 2$  G)  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$  H) *outro*

Resolução:

A equação de uma recta que passa por um ponto é dada pela expressão:

$$y - y_0 = m(x - x_0), \text{ em que } x_0 = 0 \text{ e } y_0 = 2 ; y - 2 = m(x - 0) \rightarrow y - 2 = mx$$

Onde  $m$  é o declive ou coeficiente angular

Para que as rectas sejam perpendiculares é necessário que:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ , em que  $m_1$  é o declive da recta procurada e  $m_2$  é declive da recta dada.

$$m_2 = -\frac{a}{b}, \text{ pela equação : } y = -3x + 7 \rightarrow y + 3x - 7 = 0,$$

Na recta:  $a = 3, b = 1$

$$m_2 = -\frac{3}{1} \rightarrow m_2 = -3 ; m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow m_1(-3) = -1 \rightarrow m_1 = \frac{1}{3}$$

$$y - 2 = mx \rightarrow y - 2 = \frac{1}{3}x \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \text{ é a equação procurada ,}$$

Línea A)

95) (Exame 2010) Determinar uma equação de uma circunferência de centro  $(3 ; -2)$  tangente a recta  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ . R

$$\text{Resp: A) } (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9 \quad \text{B) } (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{25}$$

$$\text{C) } (x + 3)^2 - (y - 2)^2 = \frac{36}{25} \quad \text{D) } (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

$$\text{E) } (x - 3)^2 - (y + 2)^2 = \frac{49}{25} \quad \text{F) } (y + 2)^2 - (x - 3)^2 = \frac{36}{5}$$

$$\text{G) } (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{5} \quad \text{H) } \textit{outro}$$

Resolução:

C:  $(3; -2)$  A equação da circunferência é expressa pela equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \text{ em que o centro é } C: (x_0; y_0) \text{ e } R \text{ é o raio.}$$

Como C:  $(3; -2) \rightarrow x_0 = 3 \text{ e } y_0 = -2 ; \text{ teremos:}$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = R^2$$

Vamos determinar o raio da circunferência:

Como a circunferência é tangente a recta, a distância do centro à recta corresponde ao raio da circunferência. Vamos determinar a distância de um ponto (neste caso o ponto é o centro C: (3; -2)) a uma recta:

$$R = d_{P,r} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 2y = -x + 6 \rightarrow x + 2y - 6 = 0 \quad (a = 1, b = 2 \text{ e } c = -6), \text{ então:}$$

$$d_{P,r} = \frac{1(3) + 2(-2) - 6}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = -\frac{7}{\sqrt{5}} \rightarrow R = -\frac{7}{\sqrt{5}}, \text{ a equação da circunferência será:}$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \left(-\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{5} \text{ é a equação procurada, Línea G)}$$

96) (Exame 2010) Resolva a inequação:

$$(\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)\sqrt{5x - 4 - x^2} \geq 0$$

$$\text{Resp: A) } \left[1; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \{4\} \quad \text{B) } \left[1; \frac{5\pi}{4}\right[ \cup \{4\} \quad \text{C) } [1; 4] \quad \text{D) } \left[\frac{\pi}{4}; 1\right]$$

$$\text{E) } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[ \quad \text{F) } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup [3; 4] \quad \text{G) } \left[\frac{5\pi}{4}; 4\right] \quad \text{H) outro}$$

Resolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x \geq 0 \\ 5x - 4 - x^2 \geq 0 \end{array} \right\} ; \text{ sabe-se que } \operatorname{sen} x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0 ; (*)$$

$$\text{sabe-se que: } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2 \cos \left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Voltando em (\*):

$$-2 \cos \left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \quad (\text{Multiplicar todos os termos por } -1), \text{ vem:}$$

$$2 \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \rightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$

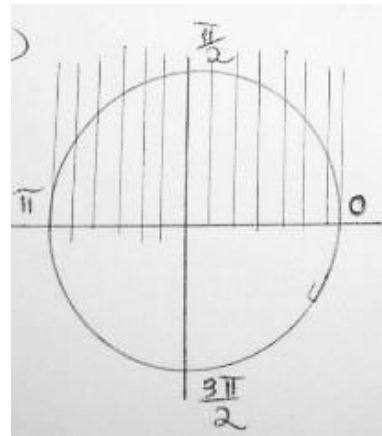
Conforme o ciclo

Trigonométrico, temos:

$$\pi + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 0 + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$S_1 = x \in \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$



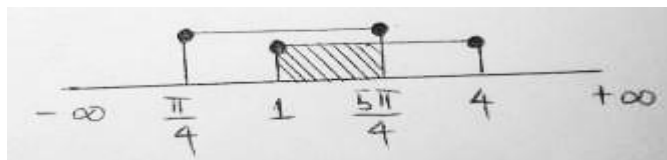
$5x - 4 - x^2 \geq 0$ , multiplicamos por  $-1$  e fatoramos  $x$ , temos:

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0 \rightarrow (x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 4)$$

$x$	$-\infty$	$1$	$4$	$+\infty$
$x^2 - 5x + 4 \leq 0$	$+$	$0$	$-$	$+$

$$S_2 = x \in [1; 4]$$

A solução da inequação é:  $S = S_1 \cap S_2$



$$S = \left[1; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \{4\}; \text{Línea A)}$$

97) (Exame 2010) Resolva a equação :

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$$

$$\text{Resp: A) } x_1 = 2 ; x_2 = 1 - \sqrt{33} ; x_3 = -8 \text{ B) } x_1 = 2 ; x_2 = 1 \pm \sqrt{33}$$

$$\text{C) } x_1 = 2 ; x_2 = 1 - \sqrt{3} \text{ D) } x_1 = 2 ; x_2 = -8$$

$$\text{E) } x_1 = 2 ; x_2 = 1 + \sqrt{33} ; x_3 = -8 \text{ F) } x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{33} ; x_2 = -8$$

$$\text{G) } x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{33} \text{ H) outro}$$

Resolução:

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$$

Condição de existência:

$$(4-x > 0 \rightarrow x < 4 \text{ e } x+6 > 0 \rightarrow x > -6, (x+2)^2 \rightarrow x \in \mathbb{R})$$

$$2 \times \left(\frac{3}{2}\right) \log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 3 = 3 \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}}(x+6), \text{ dividir todos os termos por (3):}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6) \rightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+2) - \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{1/4}(4-x)(x+6)$$

$$\log_{\frac{1}{4}}\frac{(x+2)}{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{4}}(4x+24-x^2-6x) \rightarrow \log_{\frac{1}{4}}4(x+2) = \log_{\frac{1}{4}}(-x^2-2x+24)$$

$$4(x+2) = (-x^2-2x+24) \rightarrow 4x+8 = -x^2-2x+24$$

$$x^2+6x-24+8=0 \rightarrow x^2+6x-16=0 \text{ (equação do 2º, } a=1; b=6; c=-16)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2-4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+10}{2} \rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{-6-10}{2} \rightarrow x_2 = -8$$

Como  $x_1 = 2$  é a única solução que satisfaz a condição de existência, temos:

$$S = \{x_1 = 2\}, \text{ Línea H)}$$

98) (Exame 2010) Resolva a inequação:

$$\text{sen}2x + 1 > 2\cos x + \text{sen}x$$

$$\text{Resp: A) } \left] \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right[ \quad \text{B) } \left] \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \right[$$

$$\text{C) } \left] -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k \right[ \quad \text{D) } \left] -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right[$$

$$\text{E) } \left] \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k \right[ \quad \text{F) } \left] -\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k \right[$$

$$\text{G) } \left] \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \right[ \quad \text{H) } \text{outro}$$

Resolução:

$$\text{sen}2x + 1 > 2\cos x + \text{sen}x \rightarrow 2\text{sen}x \cos x + 1 > 2\cos x + \text{sen}x$$

$$2\text{sen}x \cos x + 1 - 2\cos x - \text{sen}x > 0 \rightarrow (2\text{sen}x \cos x - 2\cos x) + (1 - \text{sen}x) > 0$$

$$2\cos x (\sin x - 1) - (\sin x - 1) > 0 \rightarrow (\sin x - 1)(2\cos x - 1) > 0$$

A inequação é válida nas seguintes condições:

$$\text{I) } \begin{cases} \sin x - 1 > 0 \\ 2\cos x - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} \sin x - 1 < 0 \\ 2\cos x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x > 0 \rightarrow S = \{\emptyset\} \\ \cos x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x < 1 \rightarrow x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\} \\ \cos x < \frac{1}{2} \rightarrow \cos x < \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

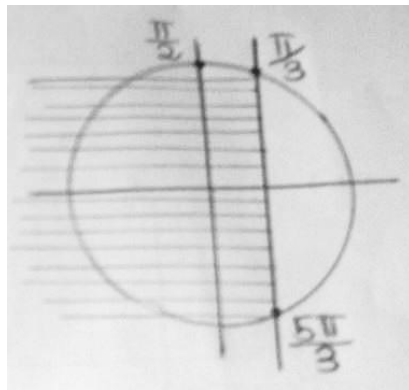
O sistema I) não tem solução, pois não há intersecção das desigualdades

No sistema II) temos:

Conforme o ciclo trigonométrico

Ao lado a solução da inequação

Trigonométrica será:



$$\left] \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \right[ , \text{Linha G)}$$

99) (Exame 2010) Simplificar a expressão:

$$\frac{\left( a^2 b \sqrt{b} - 6a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{4}} + 12ab \sqrt[3]{a} - 8ab^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}}}{ab \sqrt[3]{a} - 4ab^{\frac{3}{4}} + 4a^{\frac{2}{3}} \sqrt{b}}$$

Resp: A)  $\frac{1}{2}$  B)  $-2$  C)  $1,5$  D)  $-0,5$  E)  $1$  F)  $2$  G)  $-1$  H) *outro*

Resolução:

Transformando todas as potenciais em radicais, temos:

$$\frac{\left(a^2 b \sqrt{b} - 6 \sqrt[3]{a^5} \sqrt[4]{b^5} + 12 ab \sqrt[3]{a} - 8a \sqrt[4]{b^3}\right)^{\frac{2}{3}}}{ab \sqrt[3]{a} - 4a \sqrt[4]{b^3} + 4 \sqrt[3]{a^2} \sqrt{b}},$$

Achando um mmc para todos os radicais: (neste caso 12)

$$\frac{\left({}^{12}\sqrt{a^{24}} {}^{12}\sqrt{b^{12}} {}^{12}\sqrt{b^6} - 6 {}^{12}\sqrt{a^{20}} {}^{12}\sqrt{b^{15}} + 12 {}^{12}\sqrt{a^{12}} {}^{12}\sqrt{b^{12}} {}^{12}\sqrt{a^4} - 8 {}^{12}\sqrt{a^{12}} {}^{12}\sqrt{b^9}\right)^{\frac{2}{3}}}{{}^{12}\sqrt{a^{12}} {}^{12}\sqrt{b^{12}} {}^{12}\sqrt{a^4} - 4 {}^{12}\sqrt{a^{12}} {}^{12}\sqrt{b^9} + 4 {}^{12}\sqrt{a^8} {}^{12}\sqrt{b^6}}$$

$$\frac{\left({}^{12}\sqrt{a^{24}} {}^{12}\sqrt{b^{18}} - 6 {}^{12}\sqrt{a^{20}} {}^{12}\sqrt{b^{15}} + 12 {}^{12}\sqrt{a^{16}} {}^{12}\sqrt{b^{12}} - 8 {}^{12}\sqrt{a^{12}} {}^{12}\sqrt{b^9}\right)^{\frac{2}{3}}}{{}^{12}\sqrt{a^{16}} {}^{12}\sqrt{b^{12}} - 4 {}^{12}\sqrt{a^{12}} {}^{12}\sqrt{b^9} + 4 {}^{12}\sqrt{a^8} {}^{12}\sqrt{b^6}}$$

Supondo que:  ${}^{12}\sqrt{a} = x$  e  ${}^{12}\sqrt{b} = y$

$$\frac{(x^{24}y^{12} - 6x^{20}y^{15} + 12x^{16}y^{12} - 8x^{12}y^9)^{\frac{2}{3}}}{x^{16}y^{12} - 4x^{12}y^9 + 4x^8y^6}$$

Factorizando  $x^{12}y^9$  no numerador e  $x^8y^6$  no denominador, temos:

$$\frac{[x^{12}y^9(x^{12}y^3 - 6x^8y^6 + 12x^4y^3 - 8)]^{\frac{2}{3}}}{x^8y^6(x^8y^6 - 4x^4y^3 + 4)} \quad (*)$$

Nota que:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ e}$$

$$(xy - 2)^3 = x^{12}y^3 - 6x^8y^6 + 12x^4y^3 - 8 \text{ e}$$

$$x^8y^6 - 4x^4y^3 + 4 = (xy - 2)^2$$

Voltando em (\*):

$$\frac{[x^{12}y^9(xy-2)^3]^{\frac{2}{3}}}{x^8y^6(xy-2)^2}, \text{ Separando os expoentes do numerador temos:}$$

$$\frac{(x^{12})^{\frac{2}{3}} \cdot (y^9)^{\frac{2}{3}} \cdot (xy-2)^{\frac{2}{3}}}{x^8y^6(xy-2)^2} = \frac{x^8y^6(xy-2)^2}{x^8y^6(xy-2)^2} = 1, \text{ Línea E}$$

100) (Exame 2009) -Simplifique a expressão:

$$\frac{1 - (\log_a b)^3}{(\log_a b + \log_b a + 1) \left( \log_a \frac{a}{b} \right)}$$

Resp: A)  $\log_b a$  B)  $\log_b a + 1$  C)  $\sqrt{\log_a b}$  D)  $2 \log_b a$

E)  $1 - \log_a b$  F)  $\log_a^2 b$  G)  $\log_a b$  H) *outro*

Resolução:



obs: A expressão do numerador é uma diferença de cubos

$$\begin{aligned}
 a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
 &= \frac{(1 - \log_a b)[1 + \log_a b + (\log_a b)^2]}{\left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 1\right)(\log_a a - \log_a b)} \rightarrow \\
 &= \frac{(1 - \log_a b)[1 + \log_a b + (\log_a b)^2]}{\frac{[1 + \log_a b + (\log_a b)^2](1 - \log_a b)}{\log_a b}}, \text{ Simplificando vem:} \\
 &= \log_a b, \text{ Línea G}
 \end{aligned}$$

101) (Exame 2009) Resolva a inequação:  $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

Resp: A)  $]0; +\infty[$  B)  $[-12; -3] \cup ]0; +\infty[$

C)  $[-12; -3] \cup [4; +\infty[$  D)  $[4; +\infty[$  E)  $[-12; 4]$

F)  $[-12; 0[ \cup [4; +\infty[$  G)  $]0; 4[ \cup ]4; +\infty[$  H) *outro*

Resolução:

$$\text{Condição de existência CE: } \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 12 \geq 0 \text{ (inequação do 2º grau)}$$

Aplicando Vieth para achar as raízes da inequação:

$$x^2 - x - 12 = 0, x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0$$

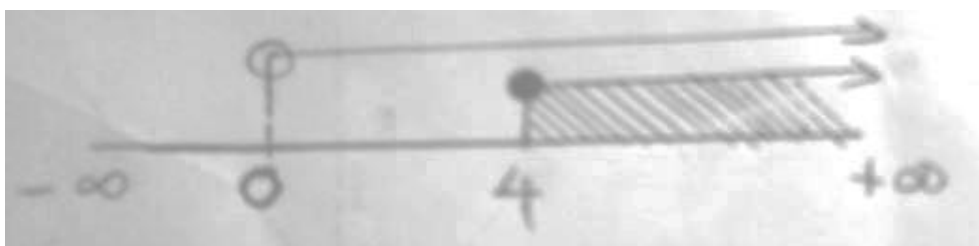
$$(x - 4)(x + 3) = 0, x - 4 = 0 \text{ e } x + 3 = 0 \rightarrow (x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -3)$$

$a > 0$	$-\infty$	$-3$	$4$	$+\infty$
$x^2 - x - 12 \geq 0$		$+$	$-$	$+$

$$x \in ]-\infty; -3] \cup [4; +\infty[$$

$$x > 0 \rightarrow x \in ]0; +\infty[$$

O conjunto verdadeiro da C.E é a intersecção dos dois intervalos numéricos



$$S_1 = [4; +\infty[$$

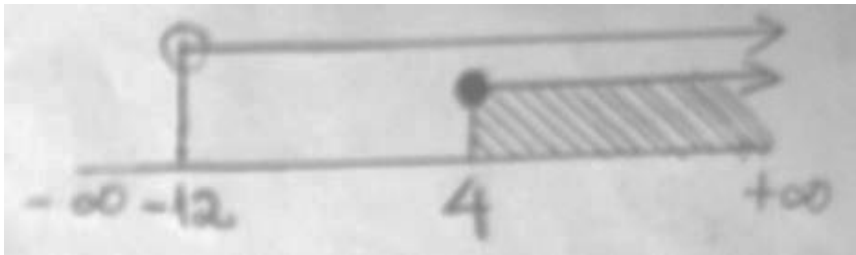
Resolvendo a inequação:  $(\quad)^2$

$$(\sqrt{x^2 - x - 12})^2 < (x)^2 \rightarrow x^2 - x - 12 < x^2$$

$$x^2 - x - 12 < x^2 \rightarrow x > -12$$

$$x > -12 \rightarrow x \in ]-12; +\infty[ ; \quad S_2 = ]-12; +\infty[$$

A solução verdade da inequação será:  $S = S_1 \cap S_2$



$$S = [4; +\infty[ , \text{Línea D}$$

102)

(Exame 2009 ) Resolva a

equação:

$$1 + \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x \quad R: x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Resolução:

$$\text{Sabe-se que: } a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \quad (*)$$

$$\text{Ou } a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2) \quad (**)$$

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^3 - 3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\text{Sabe-se que: } \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$$

Voltando na expressão inicial:

$$1 + (\operatorname{sen} x + \cos x)^3 - 3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x) = \frac{3}{2} (2\operatorname{sen} x \cos x)$$

$$[1^3 + (\operatorname{sen} x + \cos x)^3] - 3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x) = 3\operatorname{sen} x \cos x$$

Aplicando a fórmula (\*\*) para a expressão:  $[1^3 + (\operatorname{sen} x + \cos x)^3]$ , vem:

$$(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)[1^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x) + (\operatorname{sen} x + \cos x)^2] -$$

$$-3\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x) - 3\operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Factorizando a expressão  $3\text{sen}x \cos x$  no 2º e no 3º produto:

$$(1 + \text{sen}x + \cos x)[1^2 - (\text{sen}x + \cos x) + (\text{sen}x + \cos x)^2] \rightarrow \rightarrow$$

$$-3\text{sen}x \cos x (\text{sen}x + \cos x + 1) = 0$$

Factorizando a expressão :  $(1 + \text{sen}x + \cos x)$

$$(1 + \text{sen}x + \cos x)[1 - \text{sen}x - \cos x + \text{sen}^2x + 2\text{sen}x \cos x + \cos^2x - 3\text{sen}x \cos x] = 0$$

$$(1 + \text{sen}x + \cos x)(1 - \text{sen}x - \cos x + 1 + \text{sen}2x - 3\text{sen}x \cos x) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$$1^\circ) (1 + \text{sen}x + \cos x) = 0 \text{ e}$$

$$2^\circ) (1 - \text{sen}x - \cos x + 1 + \text{sen}2x - 3\text{sen}x \cos x) = 0$$

$$1^\circ) (1 + \text{sen}x + \cos x) = 0 \rightarrow \text{sen}x + \cos x = -1$$

$$\text{Obs.: } \cos x = \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{sen}x + \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$\text{Sabe-se que: } \text{sen}a + \text{sen}b = 2 \text{sen} \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$$

$$\text{sen}x + \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Voltando na expressão inicial:

$$\sqrt{2} \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \rightarrow \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\text{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \text{sen} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -\text{sen} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) ; \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Como  $\alpha < 0$  , a expressão geral para os senos é:

$$x = \pi k + (-1)^{k+1} \alpha$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \pi k + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4}$$

$$2^\circ) (1 - \text{sen}x - \cos x + 1 + \text{sen}2x - 3\text{sen}x \cos x) = 0$$

$$2 - \text{sen}x - \cos x + \text{sen}2x - 3\text{sen}x \cos x = 0 /(\text{multiplica por } 2)$$

$$4 - 2\operatorname{sen}x - 2\operatorname{cos}x + 2\operatorname{sen}2x - 3\operatorname{sen}2x = 0 \rightarrow$$

$4 - \operatorname{sen}2x = 2(\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x)$ , elevar ambos membros ao quadrado:

$$(4 - \operatorname{sen}2x)^2 = (2(\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x))^2$$

$$16 - 8\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}^2 2x = 4(\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x \operatorname{cos}x + \operatorname{cos}^2 x)$$

$$16 - 8\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}^2 2x = 4(1 + \operatorname{sen}2x)$$

$$16 - 8\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}^2 2x = 1 + 4\operatorname{sen}2x$$

$$\operatorname{sen}^2 2x + 4\operatorname{sen}2x + 12 = 0, \text{ Fazendo } \operatorname{sen}2x = t, t \in [-1; 1]$$

$$t^2 + 4t + 12 = 0, \Delta = (4)^2 - 4(1)(12) = -32 \rightarrow \Delta < 0 \nexists t_1 \text{ e } t_2$$

$$S = \left\{ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} \right\}$$

103) (Exame -2009) Simplifique a expressão:

$$(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} a) \log_b a - 1$$

Resolução:

$$\text{Obs.: } \log_x y = \frac{1}{\log_y x}$$

$$\left( \frac{1}{\log_b a} + \log_b a + 2 \right) \left( \log_a b - \frac{1}{\log_b ab} \right) \log_b a - 1$$

Achando o denominador comum no 1º produto e  $\log_y xy = \log_y x + \log_y y$

$$\frac{[(\log_b a)^2 + 2\log_b a + 1]}{\log_b a} \left[ \log_a b - \frac{1}{\log_b a + \log_b b} \right] \log_b a - 1$$

$$\text{Obs.: } x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \quad \text{e} \quad \log_b b = 1$$

$$\frac{(\log_b a + 1)^2}{\log_b a} \left( \log_a b - \frac{1}{\log_b a + 1} \right) \log_b a - 1$$

$$\frac{(\log_b a + 1)^2}{\log_b a} \frac{(\log_a b \cdot \log_b a + \log_a b - 1) \log_b a - 1}{(\log_b a + 1)}$$

$$(\log_b a + 1) \left( \frac{\log_b a}{\log_b a} + \log_a b - 1 \right) - 1$$

$$(\log_b a + 1)(1 + \log_a b - 1) - 1$$

$$(\log_b a + 1)(\log_a b) - 1$$

$$\log_a b \times \log_b a + \log_a b - 1$$

$$\frac{\log_b a}{\log_b a} + \log_a b - 1$$

$$1 + \log_a b - 1$$

$$= \log_a b$$

104) (Exame 2009) Resolva a equação:

$$3tg^2x + 4tgx + 4 \cot gx + 3 \cot g^2x + 2 = 0$$

$$\text{Resp: A) } \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad B) ) \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad C) ) \frac{\pi}{4} + \pi k \quad D) \pm) \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$E) \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \quad F) ) - \frac{\pi}{4} + \pi k \quad G) \pm \frac{3\pi}{4} + \pi k \quad H) \text{ outro}$$

Resolução:

$$3tg^2x + 4tgx + 4 \left( \frac{1}{tgx} \right) + 3 \frac{1}{tg^2x} + 2 = 0$$

$$\frac{3tg^4x + 4tg^3x + 4tgx + 3 + 2tg^2x}{tg^2x} = 0 \rightarrow \frac{3tg^4 + 4tg^3x + 2tg^2x + 4tgx + 3}{tg^2x} = 0$$

Fazendo:  $tgx = t$

$$\frac{3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3}{t^2} = 0 \text{ (equação racional fraccionária)}$$

$$3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0 \text{ e } t^2 \neq 0 \rightarrow t \neq 0$$

$$3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0 \text{ (equação racional)}$$

Considerando que  $P(t) = 3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0$ , se  $t = -1$

$$P(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 + 2(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0$$

$t = -1$  é uma das raízes da equação racional

Dividindo pelo método de chave, onde:

$$P(t) = 3t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 3 \text{ e } D(t) = t + 1 \text{ Obtemos:}$$

O quociente  $Q(t) = 3t^3 + t^2 + t + 1$  e o resto  $R(t) = 0$  então:

$$P(t) = D(t)Q(t) + R(t) = (t + 1)(3t^3 + t^2 + t + 1) = 0$$

Pelo anulamento do produto

$$t + 1 = 0 \rightarrow t = -1$$

$$3t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \text{ (A Equação não tem raízes reais)}$$

Voltando na suposição:

$$\operatorname{tg} x = t \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-1) \rightarrow \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(1), \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

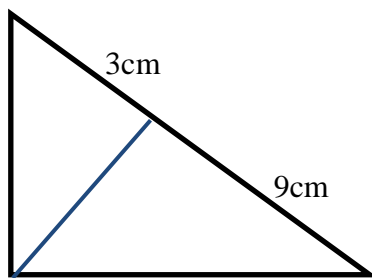
$$x = \alpha + \pi k \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k ; \text{CE: } \operatorname{tg} x \neq 0 \rightarrow x \neq \pi k$$

A solução da equação é:  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k \right\}$ , Línea F)

- 105) (Exame 2009) No triângulo rectangular a altura traçada de um vértice do ângulo recto divide a hipotenusa em segmentos 3 cm e 9 cm. Então os catetos do triângulo são:

Resp: A) 6 cm e 9 cm B) 9 cm e  $6\sqrt{3}$  cm C)  $3\sqrt{3}$  cm e 6 cm D)  $3\sqrt{3}$  cm e 9 cm  
E) 9 cm e 12 cm F) 6 cm e  $6\sqrt{3}$  cm

Resolução:



$$a = m + n \rightarrow a = 3 + 9 \rightarrow a = 12 \text{ cm}$$

$$c^2 = m a \rightarrow c^2 = 3 \times 12 \rightarrow c^2 = 36$$

$$c^2 = 36 \rightarrow c = \sqrt{36} \rightarrow c = 6 \text{ cm}$$

$$b^2 = n a \rightarrow b^2 = 9 \times 12 \rightarrow b^2 = 36 \times 3$$

$$b^2 = 36 \times 3 \rightarrow b = \sqrt{36} \times \sqrt{3}$$

$$b = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Os catetos dos triângulos são: 6 cm e  $6\sqrt{3}$  cm, Línea F)

- 106) (Exame 2009) A diagonal de um cubo é  $l$ . Então o volume do cubo é:

Resp: A)  $\frac{l^3}{3}$  B)  $\frac{l^3\sqrt{2}}{3}$  C)  $\frac{l^3\sqrt{3}}{9}$  D)  $\frac{l^3\sqrt{3}}{3}$  E)  $\frac{l^3\sqrt{2}}{9}$  F)  $\frac{l^3}{9}$

Resolução:

Fórmula do volume do cubo:  $V = a^3(*)$

Onde  $a$  é o cateto

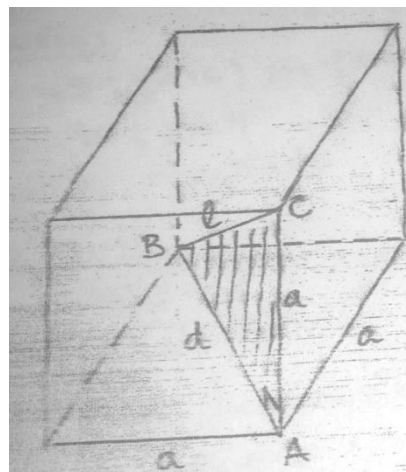
No triângulo rectângulo ABC,

Vem:

$$l^2 = a^2 + d^2 \quad (1)$$

E a diagonal do quadrado da

Base é:



$$d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d^2 = 2a^2 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$l^2 = a^2 + 2a^2 \rightarrow 3a^2 = l^2 \rightarrow$$

$$a^2 = \frac{l^2}{3} \rightarrow a = \frac{l}{\sqrt{3}} \rightarrow a = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Substituindo em (\*),vem:

$$V = \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{l^3\sqrt{3}}{27} = \frac{3l^3\sqrt{3}}{27} \rightarrow V = \frac{l^3\sqrt{3}}{9}, \text{ Línea C)}$$

107) (Exame 2009) o perímetro de um triângulo isósceles é igual à 90 cm e a sua altura é igual à 15 cm. Ache a área desse triângulo

Resp: A) 200  $cm^2$  B)  $30\sqrt{2} cm^2$  C) 420  $cm^2$  D) 300  $cm^2$  E)  $45\sqrt{3} cm^2$

F) outro

Resolução:

$$P = 90 \text{ cm} ; h = 15 \text{ cm} ; a = b$$

Conforme a figura; vem:  $c = 2m$

$$\rightarrow m = \frac{c}{2}$$

$$P = a + b + c \rightarrow P = 2a + c \rightarrow 2a + c = 90 \quad (1)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ATC

$$, \text{ vem: } a^2 = m^2 + h^2 \text{ e } m = \frac{c}{2}$$

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (15)^2 \rightarrow a^2 = \frac{c^2}{4} + (15)^2 \rightarrow 4a^2 = c^2 + 4 \times 225 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4a^2 = c^2 + 900 \quad (2)$$

Formando um sistema de equações , com as equações (1) e (2) , vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + c = 90 \rightarrow c = 90 - 2a \quad (*) \\ 4a^2 = c^2 + 900 \quad (**) \end{array} \right\}$$

Substituindo (\*) em (\*\*), vem:

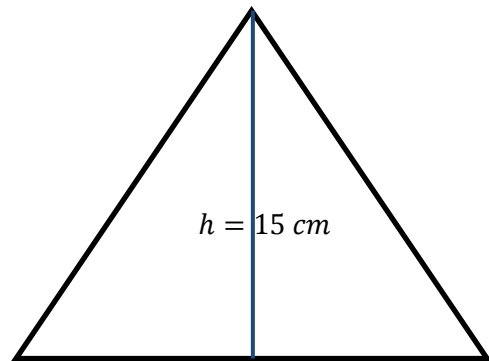
$$4a^2 = (90 - 2a)^2 + 900 \rightarrow 4a^2 = 8100 - 360a + 4a^2 + 900$$

$$360a = 9000 \rightarrow a = \frac{9000}{360} \rightarrow a = 25$$

$$a = 25 \text{ e } c = 90 - 2a \rightarrow c = 90 - 2(25) \rightarrow c = 90 - 50 \rightarrow c = 40$$

$$\text{A área do triângulo é: } A = \frac{1}{2} c h$$

$$A = \frac{1}{2} c h = \frac{1}{2} (40 \times 15) \rightarrow A = 300 \text{ cm}^2, \text{ Línea D}$$



- 108) (Exame 2009) No triângulo um lado é igual à 5 cm e dois ângulos adjacentes desse lado são respectivamente  $30^\circ$  e  $60^\circ$ . Então dois outros lados desse triângulo são:

Resp: A) 3 cm e 4 cm B) 2,5 cm e  $2,5\sqrt{2}$  cm C) 2,5 cm e  $2,5\sqrt{3}$  cm

D) 7 cm e  $2,5\sqrt{2}$  cm E) 2,5 cm e  $\sqrt{11}$  cm F) 4 cm e  $\sqrt{41}$  cm

Resolução:

O triângulo é retângulo em B

$$\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$$

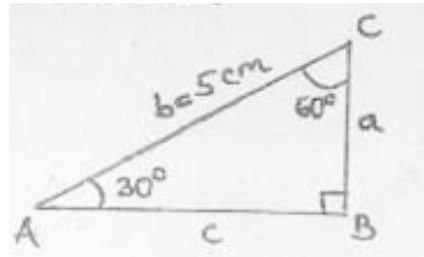
$$\text{sen}30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{5} \rightarrow a = 5 \text{ sen}30^\circ$$

$$a = 5 \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow a = 2,5 \text{ cm}$$

$$\text{sen}60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{5} \rightarrow c = 5 \text{ sen}60^\circ$$

$$c = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow c = 2,5\sqrt{3} \text{ cm}$$

A solução é:  $\{2,5 \text{ cm} ; 2,5\sqrt{3} \text{ cm}\}$ , Línea C)



- 109) (Exame 2009) A geratriz de um cone truncado é igual à  $2a$  e tem inclinação  $60^\circ$  em relação a maior base do cone. O raio de uma base desse cone é duas vezes maior do que o raio da outra base. Então os raios das bases são:

Resp: A)  $\frac{\sqrt{3}}{2} a$  e  $\sqrt{3} a$  B)  $\frac{1}{2} a$  e  $a$  C)  $\frac{\sqrt{2}}{2} a$  e  $a$  D)  $a$  e  $2a$

E)  $\sqrt{3} a$  e  $2\sqrt{3} a$  F)  $a$  e  $3a$

Resolução:

Conforme a figura ao lado, temos:

$$R = 2r$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{R}{2a}$$

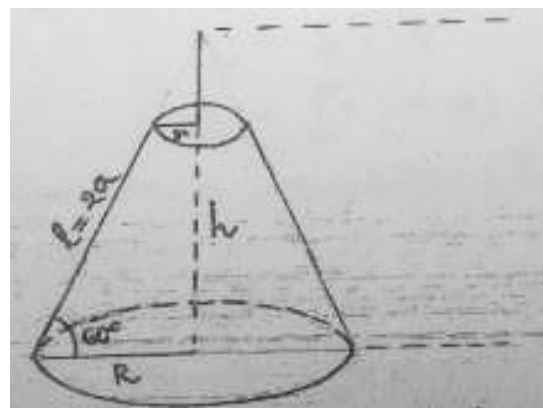
$$R = 2a \cos 60^\circ \rightarrow R = 2a \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$R = a$$

$$R = a \text{ e } R = 2r \rightarrow r = \frac{R}{2} \rightarrow r = \frac{a}{2}$$

Então, os raios das bases desses cones são:

$$S = \left\{ r = \frac{1}{2} a ; R = a \right\}, \text{ Línea B)}$$





110) (Exame 2009) Resolver a inequação:

$$x + 1 > \sqrt{x + 3}$$

Resp: A)  $[-1; +\infty[$  B)  $[1; +\infty[$  C)  $[-3; 2] \cup [1; +\infty[$  D)  $[-3; +\infty[$   
E)  $]1; +\infty[$  F)  $[-3; -2[ \cup [1; +\infty[$  G)  $] -1; 1[ \cup ]1; \infty[$  H) *outro*

Resolução:

$$\sqrt{x + 3} < x + 1$$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow x \in [-3; +\infty[ \\ x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \rightarrow x \in ]1; +\infty[ \end{cases}$$

O conjunto verdadeiro da condição de existência é:  $S_1 = ]1; +\infty[$

Resolvendo a inequação: elevando ambos membros da igualdade ao quadrado

$$(\sqrt{x + 3})^2 < (x + 1)^2 \rightarrow x + 3 < x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 + x - 2 > 0$$

Achando os zeros:  $x^2 + x - 2 > 0$  ( $a = 1; b = 1; c = -2$ )

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$		
$x^2 + x - 2 > 0$		<div>+</div>	<div>0</div>	<div>-</div>	<div>0</div>	<div>+</div>

$$s_2 = x \in ]-\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[$$

A solução da inequação é:  $S = S_1 \cap S_2$

$$S = ]1; +\infty[ \text{ , Línea E)}$$

111) (Exame 2009) Resolver a equação:

$$(\cos x - \sen x) \left( 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right) + 2 = 0$$

Resp: A)  $\frac{\pi}{3} + \pi k$  B)  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$  C)  $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$  D)  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

E)  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k$  F)  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$  G)  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$  H) *outro*

Resolução:

$$(\cos x - \sen x) \left( 2 \frac{\sen x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \right) + 2 = 0$$

Multiplicando todos os termos, vem:

$$\frac{2\operatorname{sen} x \cos x + \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 2 \cos x}{\cos x} = 0$$

$$2\operatorname{sen} x \cos x + 3\cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0 \text{ e}$$

$$\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\text{Sabe-se que: } \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2\operatorname{sen} x \cos x + 3\cos x - 2(1 - \cos^2 x) - \operatorname{sen} x = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x + 3\cos x - 2 + 2\cos^2 x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$(2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x) + (2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = 0$$

$$\operatorname{sen} x(2\cos x - 1) + (2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = 0$$

$$\text{Nota que: } (2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = (2\cos x - 1)(\cos x + 2)$$

$$\operatorname{sen} x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$$

$$\text{Factorizando: } (2\cos x - 1)$$

$$(2\cos x - 1)(\operatorname{sen} x + \cos x + 2) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto, temos:

$$(2\cos x - 1) = 0 \text{ e } (\operatorname{sen} x + \cos x + 2) = 0$$

$$(2\cos x - 1) = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Fórmula geral dos cossenos: } x = \pm \alpha + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$(\operatorname{sen} x + \cos x + 2) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = -(2 + \cos x), \text{ elevando ao quadrado}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 4 + 4\cos x + \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 4 + 4\cos x + \cos^2 x \rightarrow 2\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0$$

$$\text{Fazendo: } \cos x = t \rightarrow 2t^2 + 4t + 3 = 0 \text{ (} a = 2; b = 4; c = 3 \text{)}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(3) \rightarrow \Delta = -8 < 0 \nexists t$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ satisfaz a condição de existência } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ logo}$$

A solução da equação é:

$$S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}, \text{ Línea B)}$$

112) (Exame 2009) Simplificar a expressão:

$$a^{\frac{2}{\log_b a} + 1} \cdot b - 2 a^{\log_a b + 1} \cdot b^{\log_b a + 1} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b} + 1}$$

- A)  $ab(a + b)$  B)  $\frac{a-b}{ab}$  C)  $\frac{ab}{a+b}$  D)  $ab(a - b)$   
 E)  $\frac{(a-b)^2}{ab}$  F)  $ab(a - b)^2$   
 G)  $(a - b)^2$  H) *outro*

Resolução:

$$a \cdot a^{\frac{2}{\log_b a}} \cdot b - (2 a \cdot a^{\log_a b}) (b \cdot b^{\log_b a}) + a \cdot b \cdot b^{\frac{2}{\log_a b}}$$

$$\text{Mudanças de base: } \frac{1}{\log_b a} = \log_a b \quad e \quad \frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

$$a \cdot a^{2(\log_a b)} b - (2 a \cdot a^{\log_a b}) (b \cdot b^{\log_b a}) + a \cdot b \cdot b^{2(\log_b a)}$$

$$\text{Sabe-se que: } a^{\log_a b} = b \quad e \quad b^{\log_b a} = a \quad e \quad n \log_y x = \log_y x^n$$

$$a \cdot a^{(\log_a b^2)} b - (2 a \cdot b) (b \cdot a) + a \cdot b \cdot b^{(\log_b a^2)}$$

$$\text{Nota que: } a^{(\log_a b^2)} = b^2 \quad e \quad b^{(\log_b a^2)} = a^2$$

$$a b^2 b - 2 a^2 b^2 + a b a^2 = a b^3 - 2 a^2 b^2 + a^3 b$$

$$(a b^3 - a^2 b^2) + (a^3 b - a^2 b^2), \text{ factorizando:}$$

$$a b^2 (b - a) + a^2 b (a - b) = -a b^2 (a - b) + a^2 b (a - b)$$

Factorizando a expressão:  $(a - b)$ , temos:

$$(a - b)(a^2 b - a b^2), \text{ factorizando } ab \text{ no segundo produto, temos:}$$

$$ab(a - b)(a - b) = ab(a - b)^2, \text{ Línea F)}$$

113) (Exame 2009) Simplifique a expressão:

$$\frac{\left( 25^{\frac{1}{25 \log_{49} 25} + 2 \log_2 \log_2 a^{2 \log_a 4}} \right) \cdot 4^{\frac{2}{\log_3 4}} - a^2}{1 - a}$$

Resp: A)  $a - 1$  B)  $a$  C)  $a^2$  D)  $2a$  E)  $\sqrt{a}$  F)  $1 - a$  G)  $a + 1$  H) *outro*

Resolução:

$$\frac{\left( \frac{1}{25^{\frac{1}{2\log_7(7^2)}} + 2^{\log_2 \log_2 \log_2 a^{\log_a 4^2}}} \right) \cdot 4^{-2\log_4 3} - a^2}{1-a} =$$

$$\frac{\left( \frac{1}{25^{2\left(\frac{1}{2}\right)\log_7 2^5} + 2^{\log_2 \log_2 \log_2 a^{\log_a 4^2}}} \right) \cdot 4^{\log_4 3^{-2}} - a^2}{1-a}$$

$$\frac{\left( \frac{1}{25^{\frac{1}{\log_7 2^5} + 2^{\log_2 \log_2 \log_2 4^2}}} \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{\left( 25^{\log_{25} 7 + 2^{\log_2 \log_2 \log_2 (2)^4}} \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a}$$

$$\frac{\left( 7 + 2^{\log_2 \log_2 4} \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{\left( 7 + 2^{\log_2 \log_2 2^2} \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{\left( 7 + 2^{\log_2 2} \right) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a}$$

$$\frac{(7+2^1) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{(9) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{(3^2) \cdot 3^{-2} - a^2}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a ,$$

Línea G

114) (Exame 2009) Resolva a equação:

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x$$

Resp: A)  $2\pi k ; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$  B)  $2\pi k ; \frac{\pi}{6} + \pi k$  C)  $\pi k ; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$

D)  $\pi k ; \frac{\pi}{6} + \pi k$  E)  $2\pi k ; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$  F)  $\pi k ; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

G)  $\pi k ; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$  H) *outro*

Resolução:

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x \rightarrow$$

$$4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 3x = 4\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x$$

$$4\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x - 4\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x \rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x(4\operatorname{sen} x - 1)$$

Sabe-se que:  $\operatorname{sen}^2 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$

$$4\operatorname{sen}^2 x = (3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x)^2(4\operatorname{sen} x - 1) ,$$

Factorizando  $\operatorname{sen} x$  na segunda expressão:

$$4\text{sen}^2x = \text{sen}^2x(3 - 4\text{sen}^2x)^2(4\text{sen}x - 1),$$

$$4\text{sen}^2x - \text{sen}^2x(3 - 4\text{sen}^2x)^2(4\text{sen}x - 1) = 0$$

$$\text{sen}^2x[4 - (9 - 24\text{sen}^2x + 16\text{sen}^4x)(4\text{sen}x - 1)] = 0$$

$$\text{sen}^2x[4 - (36\text{sen}x - 9 - 96\text{sen}^3x + 24\text{sen}^2x + 64\text{sen}^5x - 16\text{sen}^4x)] = 0$$

$$\text{sen}^2x(4 - 36\text{sen}x + 9 + 96\text{sen}^3x - 24\text{sen}^2x - 64\text{sen}^5x + 16\text{sen}^4x)$$

$$\text{sen}^2x(-64\text{sen}^5x + 16\text{sen}^4x + 96\text{sen}^3x + 24\text{sen}^2x + 36\text{sen}x + 13) = 0$$

Multiplicar o segundo produto por (-1) temos:

$$\text{sen}^2x(64\text{sen}^5x - 16\text{sen}^4x - 96\text{sen}^3x + 24\text{sen}^2x + 36\text{sen}x - 13) = 0$$

Fazendo:  $\text{sen}x = t$

$$t^2(64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13) = 0, \text{ Anulando os produtos temos:}$$

$$t^2 = 0 \rightarrow t_1 = 0 \text{ (raiz dupla)}$$

$$64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13 = 0$$

Considerando que:  $p(t) = 64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13$  é um polinómio

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 64\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 96\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 36\left(\frac{1}{2}\right) - 13$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 1 - 12 + 6 + 18 - 13 \rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 0, t = \frac{1}{2} \text{ é uma das raízes da equação do } 5^\circ \text{ grau.}$$

Dividindo pelo método de chave, onde:

$$p(t) = 64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13 \text{ e } D(t) = t - \frac{1}{2}, \text{ Obtemos:}$$

$$Q(t) = 64t^4 + 16t^3 - 88t^2 - 20t + 26, R(t) = 0, p(t) = D(t) \cdot Q(t) + R(t)$$

$$p(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)(64t^4 + 16t^3 - 88t^2 - 20t + 26) = 0$$

Anulando o produto:

$$t - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow t_2 = \frac{1}{2}$$

$$64t^4 + 16t^3 - 88t^2 - 20t + 26 = 0 \text{ (A equação não tem raízes reais)}$$

Voltando na suposição:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}x = t_1 \rightarrow \text{sen}x = 0 \rightarrow \text{sen}x = \text{sen}(0) \rightarrow (\alpha = 0), x = \pi k \\ \text{sen}x = t_2 \rightarrow \text{sen}x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen}x = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{6}, \alpha > 0\right); x = (-1)^k \alpha + \pi k \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \pi k \\ x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \end{array} \right\} \text{ A solução da equação é:}$$

$$S = \left\{ \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \right\}, \text{ Línea F}$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

MANUAL DE RESOLUÇÃO DOS TESTES DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO - FACULDADE DE ENGENHARIA – EXAMES DE ADMISSÃO, ED. 2008 Á 2019.

### ENDEREÇO:

✚ **ACADEMIA 1:** LUANDA, MUNICIPIO DE CACUACO, NA PARAGEM DO BALUMUCA, QUASE AO PEDONAL (PONTE), JUNTO A ESTRADA PRINCIPAL DE CACUACO.

✚ **ACADEMIA 2:** BENGU, BAIRRO BANGUILA, SECTOR 2 AO LARGO DA IGREJA UNIVERSAL, CASA N.º 15-B

*FB.: Academia Clínica do Saber*

*Whatsapp: 938-979-070 // 940-553-898*

*Correio electrónico: [academia.clinicadosaber@gmail.com](mailto:academia.clinicadosaber@gmail.com)*

### PEDRO RAFAEL AFONSO

✚ **LICENCIADO:** EM GEOFÍSICA NA UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO, ANO 2013 – 2017.

✚ **PROFESSOR E ORIENTADOR:** PROFESSOR DE FÍSICA E MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO NO COLÉGIO ORIENTADOR NO CENTRO DE PREPARATÓRIO ACADEMIA CLÍNICA DO SABER

*Whatsapp: 938-979-070*

*Correio electrónico: [delarafapedro@gmail.com](mailto:delarafapedro@gmail.com)*

### ALEXANDRE JOÃO EMANUEL

✚ **UNIVERSITÁRIO:** NO INSTITUTO SUPERIOR POLITECNICO INTERCONTINENTAL DE LUANDA, ANO 2019.

✚ **PROFESSOR E ORIENTADOR:** PROFESSOR DE FUNDAMENTOS DE PROGRAMAÇÃO E PROGRAMAÇÃO I NO COLÉGIO POLIVALENTE 20 DE JUNHO. ORIENTADOR NO CENTRO DE PREPARATÓRIO ACADEMIA CLÍNICA DO SABER

*Whatsapp: 940-553-898*

*Correio electrónico: [alegria.alexandre2014@gmail.com](mailto:alegria.alexandre2014@gmail.com)*