

# Combinatória

Fábio Botler  
Maurício Collares  
Taísa Martins  
Walner Mendonça  
Rob Morris  
Guilherme Mota



33<sup>o</sup> Colóquio  
Brasileiro de  
Matemática

# Combinatória

## **Combinatória**

Primeira impressão, julho de 2021

Copyright © 2021 Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

**ISBN** 978-65-89124-53-5

**MSC** (2020) Primary: 05D40, Secondary: 05D05, 05D10, 05C35, 05C40, 05C65

**Coordenação Geral**

Carolina Araujo

**Produção** Books in Bytes

**Capa** Izabella Freitas & Jack Salvador

**Realização da Editora do IMPA**

**IMPA**

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

[www.impa.br](http://www.impa.br)

[editora@impa.br](mailto:editora@impa.br)

# Sumário

---

<b>Apresentação</b>	<b>1</b>
<b>Prefácio</b>	<b>2</b>
<b>I Uma Introdução à Combinatória</b>	<b>6</b>
<b>1 Princípios e Técnicas Básicas</b>	<b>7</b>
1.1 Princípio da Casa dos Pombos . . . . .	7
1.2 Contagem dupla . . . . .	10
1.3 Princípio da indução matemática . . . . .	12
1.4 Princípio da Inclusão-Exclusão . . . . .	16
1.5 Exercícios . . . . .	20
<b>2 Teoria dos Grafos</b>	<b>22</b>
2.1 Fundamentos . . . . .	23
2.2 Árvores . . . . .	27
2.3 Grafos bipartidos . . . . .	32
2.4 Coloração de vértices . . . . .	35
2.5 Emparelhamentos . . . . .	40
2.6 Ciclos Hamiltonianos . . . . .	42
2.7 Trilhas Eulerianas . . . . .	44
2.8 Exercícios . . . . .	45

<b>3</b>	<b>Teoria Extremal dos Grafos</b>	<b>47</b>
3.1	Teorema de Turán . . . . .	49
3.2	Números extremais de grafos bipartidos . . . . .	52
3.3	Supersaturação e Estabilidade . . . . .	59
3.4	Teorema de Erdős e Stone . . . . .	63
3.5	Exercícios . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Teoria de Ramsey</b>	<b>66</b>
4.1	Números de Ramsey . . . . .	68
4.2	Teoria de Ramsey infinita . . . . .	72
4.3	Teoria de Ramsey em grafos . . . . .	73
4.4	O Problema do Final Feliz . . . . .	77
4.5	Exercícios . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Método Probabilístico</b>	<b>82</b>
5.1	Fundamentos . . . . .	83
5.2	Prova probabilística . . . . .	85
5.3	Método do Primeiro Momento . . . . .	87
5.4	Sorteios de grafos . . . . .	93
5.5	Método da Alteração . . . . .	95
5.6	Método do Segundo Momento . . . . .	98
5.7	Método da Concentração . . . . .	103
5.8	Exercícios . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Grafos Aleatórios</b>	<b>109</b>
6.1	Triângulos em $G(n, p)$ . . . . .	110
6.2	Números extremais de ciclos pares . . . . .	112
6.3	Conexidade de $G(n, p)$ . . . . .	113
6.4	Limiares . . . . .	115
6.5	Subgrafos pequenos . . . . .	117
6.6	Teoria de Ramsey em $G(n, p)$ . . . . .	119
6.7	Exercícios . . . . .	124
<b>II</b>	<b>Tópicos Avançados</b>	<b>126</b>
<b>7</b>	<b>Teoria Extremal dos Conjuntos</b>	<b>127</b>
7.1	Anticadeias e sistemas de Bollobás . . . . .	128
7.2	Famílias intersectantes . . . . .	132

7.3	Álgebra Linear e famílias intersectantes . . . . .	136
7.4	Teorema de Kruskal e Katona . . . . .	143
7.5	Exercícios . . . . .	149
<b>8</b>	<b>Teoria Extremal dos Grafos</b>	<b>152</b>
8.1	Teorema de Erdős e Stone . . . . .	152
8.2	Estabilidade . . . . .	157
8.3	Problema de Turán para hipergrafos . . . . .	161
8.4	Supersaturação para hipergrafos . . . . .	165
8.5	Teorema de Andrásfai, Erdős e Sós . . . . .	167
8.6	Limiares cromáticos . . . . .	170
8.7	Números extremais de ciclos pares . . . . .	172
8.8	Construções de grafos sem $C_4$ . . . . .	178
8.9	Exercícios . . . . .	179
<b>9</b>	<b>Teoria de Ramsey</b>	<b>182</b>
9.1	Teoria de Ramsey Aditiva . . . . .	182
9.2	Números de Ramsey para grafos . . . . .	189
9.3	Números de Ramsey para hipergrafos . . . . .	195
9.4	Exercícios . . . . .	204
<b>10</b>	<b>Método Probabilístico</b>	<b>206</b>
10.1	Lema Local de Lovász . . . . .	206
10.2	As desigualdades de Janson . . . . .	215
10.3	Escolha Aleatória Dependente . . . . .	224
10.4	Exercícios . . . . .	232
<b>11</b>	<b>Método da Regularidade</b>	<b>233</b>
11.1	Lema da Regularidade de Szemerédi . . . . .	234
11.2	Lemas de imersão e contagem . . . . .	236
11.3	Aplicações . . . . .	241
11.4	Demonstração do Lema da Regularidade . . . . .	252
11.5	Exercícios . . . . .	257
<b>12</b>	<b>Método dos Contêineres</b>	<b>259</b>
12.1	Conjuntos independentes em grafos . . . . .	260
12.2	Aplicações em grafos . . . . .	266
12.3	Conjuntos independentes em hipergrafos . . . . .	271
12.4	Aplicações em hipergrafos . . . . .	274

12.5 Caso geral do Lema de Contêineres . . . . .	284
12.6 Demonstrações dos lemas . . . . .	286
12.7 Exercícios . . . . .	289

<b>Bibliografia</b>	<b>292</b>
---------------------	------------

<b>Índice de Notações</b>	<b>301</b>
---------------------------	------------

<b>Índice de Autores</b>	<b>302</b>
--------------------------	------------

<b>Índice Remissivo</b>	<b>303</b>
-------------------------	------------

# Apresentação

---

Endre Szemerédi, ao receber o Prêmio Abel em 2012, afirmou que considerava seu prêmio como um “reconhecimento das áreas de matemática discreta e teoria da computação”. Este ano, László Lovász e Avi Wigderson foram os laureados do Prêmio Abel, pelas suas contribuições à consolidação da matemática discreta e da teoria da computação como “disciplinas centrais da matemática moderna”. Essas premiações são indicações claras de que a matemática discreta e a teoria da computação devem estar presentes nos currículos atuais de matemática.

Neste livro, o leitor encontrará uma belíssima introdução à área de matemática discreta, com foco em duas de suas áreas mais maduras e mais ativas: a combinatória extremal e a combinatória probabilística. Trata-se de áreas cujo criador mais célebre foi Paul Erdős, e que foram moldadas por, entre outros, Szemerédi, Lovász e Wigderson. Pode-se também dizer que são subáreas da combinatória assintótica, por tratarem frequentemente de objetos de grandes proporções.

O leitor é apresentado, inicialmente, aos princípios básicos da combinatória, como o princípio da casa dos pombos e a contagem dupla. A jornada, que começa assim inocentemente, passa por vários tópicos clássicos e essenciais da área, mas rapidamente chega a tópicos modernos, como o *método da regularidade* de Szemerédi e o *método dos contêineres*, que são de grande abrangência e fazem parte do ferramental essencial de todo pesquisador interessado em combinatória assintótica.

Os autores selecionaram os tópicos desenvolvidos neste livro de forma que o leitor, após o estudo deste material, não só conhecerá os fundamentos da combinatória assintótica, mas terá também sua sensibilidade desenvolvida e refinada para



apreciar os avanços que ainda estão por vir.

Escreveram este livro jovens doutores e professores, talentosos e enérgicos, e um jovem professor titular, que despontou na comunidade internacional de combinatória de forma espetacular, com uma série de contribuições surpreendentes e profundas, que marcadamente avançaram o estado da arte. Cabe mencionar que o método dos contêineres, abordado no último capítulo deste livro, é uma de suas contribuições. Com certeza, o leitor não poderia ter condutores melhores que os autores deste livro para adentrar as áreas de combinatória extremal e combinatória probabilística.

Este livro é uma excelente adição à literatura matemática em português. Assim como os autores, acredito que entre seus leitores surgirão entusiastas, que se tornarão pesquisadores dedicados à combinatória e que contribuirão com resultados de impacto.

Yoshiharu Kohayakawa  
Universidade de São Paulo  
São Paulo, 29 de junho de 2021

# Prefácio

---

A Combinatória pode ser definida de forma simplista como a arte de contar, enumerar, ordenar, construir e analisar objetos matemáticos discretos. No entanto, ela é muito mais que isso, sendo um ramo da matemática com aplicações tanto na ciência da computação quanto em diversas áreas da matemática. Assim, preferimos descrevê-la como um conjunto de técnicas e estratégias para lidar com estruturas discretas. Além disso, uma característica fundamental da Combinatória é a sua ênfase em problemas de fácil formulação (até auto-contidos) mas desafiadores.

Outra característica notável da Combinatória é a sua relativa “juventude”. Apesar de cálculos de natureza discreta fazerem parte de toda a matemática, antes do século XX tais tópicos eram desenvolvidos de maneira desconexa, na medida em que certos objetos eram utilizados em áreas como Análise e Topologia<sup>1</sup>. A Combinatória como uma área da matemática propriamente dita surgiu primariamente devido aos trabalhos da escola húngara, liderada por Paul Erdős e seus colaboradores, e pelo desenvolvimento da computação teórica. Uma parte substancial do material apresentado neste livro foi desenvolvida nos últimos 50 anos, e várias das provas que veremos foram publicadas na última década.

Assim, jovens estudantes e pesquisadores têm hoje uma rara oportunidade de contribuir com as bases fundamentais de uma área da matemática. Ao mesmo tempo em que pesquisadores de Combinatória vêm sendo condecorados com grandes distinções, como os Prêmios Abel de 2012 e 2021, é quase certo que outros resultados gerais e fundamentais (como os recentes resultados que veremos nos Capítulos 11 e 12) serão descobertos nas próximas décadas, talvez pelo público-alvo deste livro.

Nas últimas décadas, contribuições fundamentais para a Combinatória foram obtidas no Brasil. Preparamos este livro como um convite para a área, com o

---

<sup>1</sup>O nome “Análise Combinatória” vem dessa época e precede o desenvolvimento sistemático da Combinatória. A área se desenvolveu muito desde então, e o nome preferido por pesquisadores da área é simplesmente “Combinatória”.

objetivo maior de atrair mais pessoas para contribuir com a Combinatória em nosso país e a ambição de que muitos outros desenvolvimentos importantes originem-se aqui. Por isso, a primeira decisão tomada a respeito do presente livro foi fazê-lo em português.

## Como usar este livro

Este texto foi inicialmente elaborado para servir de base para o curso “Introdução à Combinatória Extremal”, ministrado no 33<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, em 2021, e aproveitamos a oportunidade para produzir uma literatura robusta e sem pré-requisitos que sirva como um guia para a organização e criação de cursos de Combinatória no país, em nível de graduação e pós-graduação.

Neste livro, buscamos fornecer um conteúdo autocontido para que alunos interessados em Combinatória tenham um material cuidadosamente organizado para guiar seus estudos. Para facilitar o entendimento dos assuntos apresentados, fornecemos diversos exercícios, permitindo que os alunos aperfeiçoem e testem seus conhecimentos durante o aprendizado. Em particular, sugerimos aos leitores que não mergulhem em uma demonstração imediatamente após ler um enunciado: gastar alguns minutos para tentar desenvolver sua própria prova (discutindo com colegas se possível) levará a um maior aproveitamento da demonstração que incluímos no texto.

Este livro está dividido em duas partes, cada uma com 6 capítulos. A Parte I contém conteúdo para um curso de Introdução à Combinatória, tanto para a graduação quanto para a pós-graduação. O leitor será introduzido às técnicas básicas no Capítulo 1, passando por grafos, que são estruturas importantíssimas tanto do ponto de vista teórico como prático, no Capítulo 2. No Capítulo 3, apresentamos a Combinatória Extremal que, dito de forma simples, estuda o tamanho máximo ou mínimo que estruturas matemáticas que contêm dadas propriedades podem ter. No Capítulo 4, introduzimos a Teoria de Ramsey, que estuda a existência de certas subestruturas em estruturas suficientemente grandes. Nos Capítulos 5 e 6, o leitor terá contato com dois assuntos fascinantes: o *Método Probabilístico*, que nos permite mostrar que objetos matemáticos existem, mesmo que não saibamos como construí-los; e grafos aleatórios, que são estruturas interessantes por si só e nos permitem explorar o comportamento típico de um grafo, o que os faz úteis em inúmeras aplicações.

Na Parte II revisitamos os temas apresentados na Parte I, apresentando resultados e técnicas mais profundas e avançadas. Essa parte contém resultados que

podem ser incorporados a um curso introdutório caso haja tempo, mas seu conteúdo foi pensado para ser utilizado em um curso avançado de Combinatória na pós-graduação, ou como material de aprofundamento aos alunos interessados. Nos Capítulos 7 e 8, nos aprofundamos na Combinatória Extremal, estudando problemas, respectivamente, em conjuntos e em grafos; no Capítulo 9, nos aprofundamos na Teoria de Ramsey, com problemas em Teoria de Ramsey Aditiva, uma área bastante íntima da Teoria dos Números, e variações importantes dos problemas vistos no Capítulo 4. No Capítulo 10, apresentamos três técnicas probabilísticas mais avançadas: o Lema Local de Lovász, a Escolha Aleatória Dependente, e as desigualdades de Janson. Finalmente, os Capítulos 11 e 12 apresentam resultados descobertos nas últimas décadas, e que revolucionaram a Combinatória: o Método da Regularidade e o Método dos Contêineres. Tais métodos se tornaram parte do ferramental indispensável a um pesquisador em Combinatória, fornecendo provas curtas e elegantes para problemas que ficaram em aberto por muito tempo.

## E depois?

Para nós, fazer Combinatória é uma atividade divertida, e esperamos que este livro seja capaz de transmitir tal prazer. Essa diversão se deve sobretudo ao fato da Combinatória ser uma área altamente colaborativa, ambiente que esperamos que os leitores consigam reproduzir ao discutir os resultados e resolver os exercícios.

Como comentamos anteriormente, Combinatória é uma área de certa forma jovem. Por isso, depois de estudar este livro, acreditamos que você estará apto a colaborar não só em exercícios, mas também em problemas de pesquisa nas subáreas que cobrimos. O principal recurso para acompanhar tais áreas de pesquisa de perto é o arXiv, onde pesquisadores enviam versões pré-revisão dos seus artigos. Leitores interessados comprovarão, após estudar este livro, que (propositalmente) uma parte considerável dos artigos publicados na seção de Combinatória do arXiv, acessível em <https://arxiv.org/list/math.CO/new>, trata de tópicos que discutimos no texto.

Desejamos a todos uma boa diversão!

Fábio Botler  
Maurício Collares  
Taísa Martins  
Walner Mendonça  
Rob Morris  
Guilherme Mota

## **Parte I**

# **Uma Introdução à Combinatória**

# 1

# *Princípios e técnicas básicas em Combinatória*

---

Neste capítulo introduzimos, através de exemplos, algumas ferramentas fundamentais para a Combinatória. Tais ferramentas, apesar de simples, formarão a base para provar uma grande quantidade de resultados nos capítulos seguintes. A familiaridade com tais métodos permitirá introduzir conceitos e argumentos mais elaborados no resto do livro.

Começamos com o Princípio da Casa dos Pombos, seguido de uma explicação sobre a contagem dupla, uma observação simples, mas indispensável. Ademais, introduzimos os princípios da indução matemática e da inclusão-exclusão.

## 1.1 Princípio da Casa dos Pombos

O Princípio da Casa dos Pombos talvez seja o princípio mais básico em combinatória e basicamente traduz o senso comum: se há  $n + 1$  pombos a serem distribuídos em  $n$  casas, então há pelo menos uma casa com pelo menos dois pombos. Alternativamente, se há  $n$  bolas rotuladas com os elementos de  $\{1, \dots, r\}$  e  $n > r$ , então há duas bolas com o mesmo rótulo. De forma geral, o Princípio da Casa dos Pom-

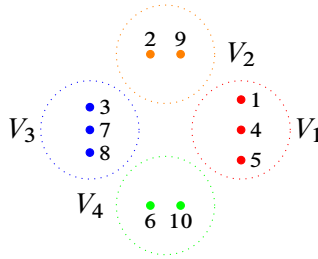


Figura 1.1: Uma partição pode ser vista como uma coloração.

bos diz respeito a partições de conjuntos. Uma *partição* de um conjunto  $V$  é uma família  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  de subconjuntos de  $V$ , as *partes* ou *classes* da partição, tal que cada elemento de  $V$  está em exatamente um elemento da partição, i.e., para todo  $u \in V$ , existe um único  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $u \in V_i$ .

Neste livro, denotamos por  $\mathbb{N}$  o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$  dos inteiros positivos, e dado  $n \in \mathbb{N}$  denotamos por  $[n]$  o conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Uma outra forma de interpretarmos partições é como uma *coloração*, como na Figura 1.1. Dado um inteiro positivo  $r$ , uma  $r$ -*coloração* é uma função  $c: V \rightarrow [r]$  que atribui uma cor (em  $[r]$ ) para cada elemento de  $V$ . Assim, a partição acima pode ser definida como uma  $r$ -coloração  $c$  tal que para cada  $v$ , o valor de  $c(v)$  é exatamente o índice da parte que contém  $v$ .

Mais formalmente, o Princípio da Casa dos Pombos diz que se temos  $n$  elementos particionados em  $r$  partes com  $r < n$ , então uma dessas partes possui mais do que um elemento. Não é difícil ver que podemos ir um pouco mais longe: certamente há uma dessas partes que possui pelo menos  $\lceil n/r \rceil$  elementos. E, de uma forma um pouco mais ousada, o leitor pode verificar que se  $a_1, \dots, a_r$  são inteiros não negativos tais que  $a_1 + \dots + a_r < n$ , então em toda partição de  $[n]$  em  $r$  partes, existe alguma parte  $i$  com mais de  $a_i$  elementos.

No restante desta seção, vemos alguns exemplos interessantes de aplicação do Princípio da Casa dos Pombos.

Seja  $A \subseteq [n]$ . Dizemos que  $A$  é *livre de soma* se, para quaisquer  $x, y \in A$ , temos  $x + y \notin A$ . Um exemplo de conjunto finito livre de soma é o conjunto  $I$  dos números ímpares em  $[n]$ . Note que  $|I| = \lceil n/2 \rceil$ . O exemplo seguinte é uma aplicação do Princípio da Casa dos Pombos, mostrando que o conjunto dos números ímpares é um conjunto livre de soma de tamanho máximo em  $[n]$ . Sugerimos que o leitor tente provar todos os resultados deste capítulo antes de ler as soluções.

**Exemplo 1.1.1.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $A \subseteq [n]$  é livre de soma, então  $|A| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

*Demonstração.* Seja  $A \subseteq [n]$ . Vamos provar que se  $|A| > \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , então  $A$  não é livre de soma. Seja  $m = \max A$  e

$$B = \{m - a : a \in A\} \setminus \{0\}.$$

Note que  $|A| = |B| + 1$  e  $B \subseteq [n]$ . Assim, como  $|A| \geq \lceil n/2 \rceil + 1$ , temos que

$$|A| + |B| \geq 2\lceil n/2 \rceil + 1 \geq n + 1 > n$$

e, portanto, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe  $b \in A \cap B$ . Como  $b \in B$ , existe  $a \in A$  tal que  $b = m - a$ . Como  $a, b, m \in A$  e  $a + b = m$ , o conjunto  $A$  não é livre de soma, como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que um conjunto  $A \subseteq [n]$  é *livre de divisores* se não há par  $x, y \in A$  tal que  $x$  seja divisor de  $y$ .

**Exemplo 1.1.2.** Se  $A \subseteq [2n]$  é um conjunto livre de divisores, então  $|A| \leq n$ .

*Demonstração.* Para cada número ímpar  $m \in [2n]$ , considere uma caixa com rótulo  $m$ . Escreva cada número  $x \in A$  na forma  $x = 2^k m$ , em que  $m$  é um número ímpar, e coloque  $x$  na caixa rotulada com o número  $m$ . Note que há  $n$  caixas, e suponha que  $|A| > n$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, dois elementos de  $A$ , digamos  $x$  e  $y$  com  $x < y$ , foram colocados na mesma caixa, digamos  $m$ . Como  $x$  e  $y$  estão na caixa  $m$ , então temos  $x = 2^k m$  e  $y = 2^\ell m$ . Como  $x < y$ , então  $k < \ell$ . Portanto  $x$  divide  $y$ , uma contradição.  $\square$

O Exemplo 1.1.2 é justo no sentido de que o conjunto  $\{n + 1, \dots, 2n\} \subseteq [2n]$  é um conjunto de tamanho precisamente  $n$  e livre de divisores.

Como um exemplo final do Princípio da Casa dos Pombos, suponha que você foi convidado para a festa de aniversário de Roberto, que é bastante popular. Ao chegar na festa, você nota que há seis convidados na festa (você e cinco outros).

**Exemplo 1.1.3.** Dos seis convidados da festa, há três convidados que se conhecem mutuamente, ou três que não se conhecem mutuamente.

*Demonstração.* Pelo Princípio da Casa dos Pombos, uma das seguintes situações ocorre: (1) você conhece pelo menos três convidados na festa; ou (2) você não conhece pelo menos três convidados na festa.



Por simetria, podemos supor que acontece (1), e sejam Luiz, Pedro, e Letícia os três convidados que você conhece. Se pelo menos dois deles se conhecem, digamos Luiz e Pedro, então, você, Luiz e Pedro formam um conjunto de três pessoas que se conhecem. Caso contrário, Luiz, Pedro, e Letícia formam um conjunto de três pessoas que não se conhecem.  $\square$

Problemas como o apresentado no Exemplo 1.1.3 fazem parte de uma área de pesquisa conhecida como *Teoria de Ramsey*, que é aprofundada nos Capítulos 4 e 9.

## 1.2 Contagem dupla

Contagem dupla é uma técnica de prova matemática que consiste em definir e contar um determinado valor de duas formas diferentes. Para  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \geq 0$ , escrevemos  $\binom{n}{k}$  para denotar a quantidade de subconjuntos de  $[n]$  de tamanho  $k$ . Também escreveremos  $\binom{X}{k}$  para denotar a família de todos os subconjuntos de  $X$  de tamanho  $k$ . Tal notação é justificada pela igualdade trivial  $|\binom{X}{k}| = \binom{|X|}{k}$ .

O seguinte exemplo ilustra como podemos fazer uma contagem dupla.

**Exemplo 1.2.1.**  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

*Demonstração.* Iremos contar a quantidade de subconjuntos  $A \subseteq [n]$  de dois modos. Primeiro, como cada elemento  $i \in [n]$  está ou não está em  $A$ , existem  $2^n$  escolhas para  $A$ . Por outro lado, existem exatamente  $\binom{n}{k}$  subconjuntos de  $[n]$  de tamanho  $k$ . Como cada subconjunto de  $[n]$  tem tamanho  $k$  para algum  $0 \leq k \leq n$ , o número de subconjuntos de  $[n]$  é  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ . Como os dois números obtidos contam a mesma coisa, eles são iguais.  $\square$

O próximo exemplo é muito útil. Ele é conhecido como *relação de Stifel* ou *regra de Pascal*.

**Exemplo 1.2.2.** Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$  com  $k \leq n$ . Então

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

*Demonstração.* Ambos os lados contam a quantidade de subconjuntos de tamanho  $k+1$  contidos em  $[n+1]$ . O lado esquerdo o faz diretamente, enquanto que o lado direito divide tais conjuntos em duas classes: a dos que contêm o elemento  $n+1$  (e  $k$  outros elementos quaisquer) e a dos que não contêm tal elemento.  $\square$

A seguinte identidade, em que aplicaremos a contagem dupla, é conhecida como *Convolução de Vandermonde*. O caso  $m = 1$  da mesma é corresponde ao Exemplo 1.2.2.

**Exemplo 1.2.3.** Sejam  $m, n, k \in \mathbb{N}$  com  $k \leq m + n$ . Então

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

*Demonstração.* Seja  $S$  um conjunto de  $m$  bolas pretas e  $n$  bolas brancas. Contamos a quantidade de subconjuntos de  $S$  de tamanho  $k$  de dois modos. Primeiro, por definição, há  $\binom{m+n}{k}$  formas de selecionar  $k$  bolas de  $S$ . Agora, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ , há exatamente  $\binom{m}{i}$  maneiras de selecionar  $i$  bolas brancas, e exatamente  $\binom{n}{k-i}$  maneiras de selecionar  $k-i$  bolas pretas de  $S$ .<sup>1</sup> Como cada conjunto de  $k$  bolas de  $S$  contém  $i$  bolas pretas para algum  $i \in \{0, \dots, k\}$ , a identidade segue.  $\square$

Para o próximo exemplo, iremos definir um *grafo*  $G$ , que é uma estrutura composta por um conjunto de *vértices*  $V(G)$  e um conjunto  $E(G)$  de pares não ordenados de vértices, chamado de conjunto de *arestas* de  $G$ . Escrevemos  $e(G)$  para denotar o número de arestas de  $G$ , e para cada vértice  $v \in V(G)$  denotamos por  $d_G(v)$  (chamado o *grau* de  $v$ ) o número de arestas de  $G$  que contêm  $v$ .

**Lema 1.2.4** (Lema dos apertos de mão). *Dado um grafo  $G$ , temos*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G).$$

*Demonstração.* Contamos de dois modos os pares  $(v, e)$  nos quais  $v$  é um vértice de  $G$  e  $e$  é uma aresta de  $G$  que contém  $v$ . Como cada aresta é um conjunto de dois vértices, existem exatamente  $2e(G)$  tais pares. Por outro lado, cada vértice está contido em exatamente  $d_G(v)$  pares, e o lema segue.  $\square$

Uma consequência do lema do aperto de mão é o *Lema de Sperner*. Considere um triângulo  $ABC$  e uma triangulação  $T$  de  $ABC$ . Uma *coloração de Sperner* (ver Figura 1.2) de  $T$  é uma coloração dos vértices de  $T$  com as cores 1, 2 e 3 de tal forma que (i)  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão coloridos respectivamente com as cores 1, 2 e 3; e (ii) se um vértice  $u$  está em uma lateral  $XY$ , com  $X, Y \in \{A, B, C\}$ , então  $u$  está

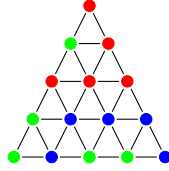


Figura 1.2: Uma coloração de Sperner.

colorido com a cor de  $X$  ou de  $Y$ . Finalmente, dizemos que uma face triangular de  $T$  é *tricolor* se cada um de seus vértices possui uma cor diferente.

**Lema 1.2.5.** *Seja  $T$  uma triangulação de um triângulo  $ABC$ . Toda coloração de Sperner de  $T$  possui uma face triangular tricolor.*

*Demonstração.* Definimos um grafo  $G$  cujos vértices são as faces de  $T$ , incluindo a face externa, e cujas arestas são os pares de faces  $\{u, v\}$  cuja interseção contém vértices de cores 1 e 2. Afirmamos que a face externa tem grau ímpar. Isso segue da coloração ser Sperner, pois há uma quantidade ímpar de mudanças de cores ao longo da aresta  $AB$  e, além disso, as únicas faces de  $T$  que podem formar arestas em  $G$  com a face externa são faces que possuem uma aresta ao longo da aresta  $AB$ .

Agora, segue do lema do aperto de mão que  $G$  tem um número par de vértices de grau ímpar e, portanto, pelo menos um dos triângulos de  $T$  tem grau ímpar. Para completar a prova, note que todo triângulo de  $T$  tem grau 0, 1 ou 2, e um triângulo de grau 1 necessariamente tem exatamente um vértice de cada cor, como queríamos.  $\square$

Vale comentar que se pode mostrar que o Lema 1.2.5 é equivalente ao teorema do ponto fixo de Brouwer.

## 1.3 Princípio da indução matemática

O princípio da indução matemática é uma técnica para provar resultados matemáticos que nos permite provar que uma determinada afirmação é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Princípio da indução matemática:** Seja  $A \subseteq \mathbb{N}$  tal que (i)  $1 \in A$ ; e (ii) para todo  $n \in A$ , temos  $n + 1 \in A$ . Então  $A = \mathbb{N}$ .

<sup>1</sup>Se  $k > n$ , então  $[n]$  não admite subconjunto de tamanho  $k$ , implicando em  $\binom{n}{k} = 0$ .

Note que 1 pode ser substituído por qualquer inteiro  $m$  no item (i) (em particular, 0 ou qualquer número negativo), se quisermos provar que  $A$  é o conjunto dos inteiros maiores ou iguais a  $m$ .

O item (i) é chamado de *caso base*, enquanto o item (ii) é chamado de *passo indutivo*. A suposição que  $n \in A$  é conhecida como *hipótese de indução*. Aplicar indução matemática a um problema consiste em definir um conjunto especial de inteiros e provar que tal conjunto satisfaz as propriedades (i) e (ii).

O princípio da indução pode ser usado, em particular, para se provar inúmeras igualdades e desigualdades clássicas. Por exemplo:

**Proposição 1.3.1** (Desigualdade de Bernoulli). *Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $x > -1$ , então*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \quad (1.1)$$

*Demonstração.* Fixe  $x > -1$ , e seja  $A$  o conjunto dos inteiros positivos para os quais a desigualdade (1.1) é satisfeita. A prova segue por indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , então temos  $(1 + x)^1 = 1 + x$  e, portanto,  $1 \in A$ . Suponha que  $n \geq 2$ , e que  $n - 1 \in A$ , isto é, que  $(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)x$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &= (1 + x)^{n-1}(1 + x) \\ &\geq (1 + (n - 1)x)(1 + x) \\ &= 1 + x + (n - 1)x + (n - 1)x^2 \\ &\geq 1 + nx \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade, foi utilizada a hipótese de indução e a hipótese  $x > -1$ , e na última usamos que  $n \geq 1$  e que  $x^2 \geq 0$ . Pelo princípio da indução matemática, segue que  $A = \mathbb{N}$ , como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

Neste livro, convencionaremos que  $0^0 = 1$ . Tal convenção faz sentido combinatorial, pois  $m^n$  conta a quantidade de funções  $f: [n] \rightarrow [m]$  e existe uma única função  $f: \emptyset \rightarrow \emptyset$ . Além disso, ela faz com que o teorema abaixo não precise de casos particulares.

**Proposição 1.3.2** (Teorema binomial). *Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $x, y \in \mathbb{R}$ , então*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Fixe  $x, y \in \mathbb{R}$ , e seja  $A$  o conjunto de inteiros positivos que satisfazem a igualdade (1.2). Se  $n = 1$ , então  $(x + y)^1 = x + y$  e, portanto,  $1 \in A$ , visto que  $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ . Suponha que  $n \geq 1$  e  $n \in A$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} (x + y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k y^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}, \end{aligned}$$

em que no primeiro passo usamos a hipótese de indução e no último usamos o Exemplo 1.2.2. Pelo princípio de indução matemática, segue que  $A = \mathbb{N}$ , como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

*Outra demonstração, com contagem dupla.* Podemos expandir  $(x + y)^n$  como uma soma de termos usando a propriedade distributiva. Tal expansão é obtida considerando todos os  $2^n$  modos de seleccionar  $x$  ou  $y$  de cada um dos  $n$  fatores do produto. Desses  $2^n$  termos, em  $\binom{n}{k}$  deles escolhemos o termo  $x$  exatamente  $k$  vezes; cada um dos termos resultantes é igual a  $x^k y^{n-k}$ .  $\square$

Às vezes o passo indutivo requer uma hipótese de indução mais forte.

**Princípio da indução matemática forte:** Seja  $A \subseteq \mathbb{N}$  tal que se  $k \in A$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  com  $k < n$ , temos  $n \in A$ . Então  $A = \mathbb{N}$ .

Note que o caso base está implícito no princípio da indução forte. Isto é, para  $n = 1$ , não há número  $k \in \mathbb{N}$  com  $k < n$ . Assim, neste caso, a hipótese de indução não nos dá nenhuma informação, e temos que provar que  $1 \in A$  sem assumir nada. A prova do seguinte fato básico faz uso da indução forte.

**Exemplo 1.3.3.** Todo inteiro maior que 1 é o produto de um ou mais números primos.

*Demonstração.* Seja  $\mathbb{P}$  o conjunto de todos os números primos e seja  $A \subseteq \mathbb{N}$  o conjunto dos números que são produtos de primos. Seja  $n \in \mathbb{N}$ , e suponha que todo  $k \in \mathbb{N}$  com  $2 \leq k < n$  está em  $A$ .

Se  $n$  é primo, então  $n$  é claramente um produto de primos e, portanto,  $n \in A$ . Em particular,  $2 \in A$ . Então podemos supor que  $n$  não é primo. Logo,  $n = k \cdot \ell$  com  $k, \ell < n$ . Pela hipótese de indução, temos que  $k$  e  $\ell$  podem ser escritos como produtos de primos, digamos  $k = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p}$  e  $\ell = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p}$ . Mas isso implica que

$$n = k \cdot \ell = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p + b_p}$$

e, então,  $n \in A$ . Pelo princípio de indução matemática forte, segue que  $A$  é o conjunto dos inteiros maiores ou iguais a 2, como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

Para ver que o princípio da indução matemática pode ser aplicado a outros objetos matemáticos, vamos dar um exemplo envolvendo grafos. Dizemos que um grafo  $G$  é *conexo* se para cada subconjunto próprio  $A \subseteq V(G)$  (isto é, com  $A \neq \emptyset$  e  $A \neq V(G)$ ) existe pelo menos uma aresta de  $G$  entre  $A$  e  $V(G) \setminus A$ .

**Proposição 1.3.4.** *Se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices, então  $e(G) \geq n - 1$ .*

*Demonstração.* Se um grafo  $G$  tem somente um vértice, então o resultado vale trivialmente. Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices e suponha que todo grafo conexo com  $1 \leq k < n$  vértices possui pelo menos  $k - 1$  arestas.

Se  $d_G(v) \geq 2$  para todo vértice  $v \in V(G)$ , então, pelo lema do aperto de mão (Lema 1.2.4), sabemos que

$$2e(G) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 2n.$$

Assim, temos que  $e(G) \geq n$ , provando o resultado. Podemos, então, assumir que  $G$  contém pelo menos um vértice  $v$  de grau 1. Seja  $G'$  o grafo obtido de  $G$  removendo-se o vértice  $v$  e a (única) aresta  $uv$  que contém  $v$ .

Afirmamos que  $G'$  é conexo. Se  $G'$  não for conexo, há um subconjunto próprio  $A \subset V(G')$  para o qual não há arestas de  $G'$  entre  $A$  e  $V(G') \setminus A$ , e suponha (sem perda de generalidade) que  $u \in A$ . Então  $B := A \cup \{v\}$  é um subconjunto próprio de  $V(G)$  e não há arestas em  $G$  entre  $B$  e  $V(G) \setminus B$ , visto que os vértices  $u$  e  $v$  estão ambos em  $B$ . Mas então  $G$  não seria conexo, contradizendo a hipótese. Assim, concluímos que  $G'$  é de fato conexo.

Como  $G'$  é conexo e tem  $n - 1$  vértices, pela hipótese de indução, temos  $e(G') \geq n - 2$ . Portanto, temos que  $e(G) = e(G') + 1 \geq n - 1$ . Pelo princípio da indução matemática, segue que a afirmação vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

## 1.4 Princípio da Inclusão-Exclusão

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , sabemos que o tamanho da união  $|A \cup B|$  é no máximo  $|A| + |B|$ . Isso acontece pelo fato de cada elemento de  $|A \cup B|$  ser contado pelo menos uma vez em  $|A| + |B|$ . Mais geralmente, temos a seguinte desigualdade conhecida como *Cota da união*.

**Proposição 1.4.1** (Cota da união). *Dados conjuntos finitos  $A_1, \dots, A_n$ , temos*

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{k=1}^n |A_i|.$$

*Demonstração.* Cada elemento que está na união dos  $n$  conjuntos está em algum dos conjuntos  $A_i$  e, portanto, está contado pelo menos uma vez na soma do lado direito.  $\square$

Sendo um pouco mais cuidadoso, podemos ver que (para dois conjuntos) cada elemento da interseção  $A \cap B$  é contado exatamente duas vezes em  $|A| + |B|$ , e os demais elementos de  $A \cup B$  são contados exatamente uma vez. Assim, podemos ser mais precisos e dizer que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Subtraímos  $|A \cap B|$  para compensar os elementos que foram contados duas vezes em  $|A| + |B|$ .

Analogamente, para calcular a união de três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  a partir da soma  $|A| + |B| + |C|$ , podemos remover o tamanho das interseções dois a dois  $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$ , mas note que os elementos em  $A \cap B \cap C$ , que foram contados três vezes em  $|A| + |B| + |C|$ , foram também descontados três vezes em  $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$ . Assim, temos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

como simbolizado na Figura 1.3.

O princípio da inclusão-exclusão é uma generalização dessa ideia que nos permite calcular o tamanho da união de uma quantidade arbitrária de conjuntos finitos.

**Proposição 1.4.2** (Princípio da inclusão-exclusão). *Dados conjuntos finitos  $A_1, \dots, A_n$ , temos*

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{S \subseteq [n], |S|=k} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|.$$

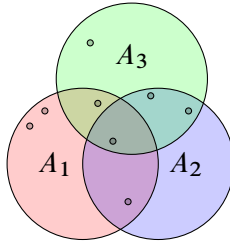


Figura 1.3: Inclusão-exclusão para três conjuntos.

*Demonstração.* A prova usa contagem dupla; mais precisamente, para cada elemento  $v$  que é contado uma vez no lado esquerdo da igualdade no enunciado, iremos contar quantas vezes  $v$  é contado do lado direito. Para fazê-lo, seja

$$T = \{i \in [n] : v \in A_i\}$$

e suponha que  $|T| = m \geq 1$ . Então

$$v \in \bigcap_{i \in S} A_i \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq T,$$

e, portanto,  $v$  é contado exatamente

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m}{k} = 1 - (1-1)^m = 1$$

vez, em que a penúltima desigualdade segue da Proposição 1.3.2 e a última segue de  $m \geq 1$ .  $\square$

O princípio da inclusão-exclusão é a base de muitos dos crivos usados em teoria dos números. Um exemplo simples em teoria dos números é o clássico teorema de Euler abaixo. A função totiente de Euler  $\varphi$  é definida de modo que  $\varphi(n)$  é a quantidade de inteiros  $i \in [n]$  tais que  $i$  e  $n$  são primos entre si.

**Teorema 1.4.3.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

em que o produto é tomado no conjunto dos primos  $p$  que dividem  $n$ .



*Demonstração.* Seja  $\{p_1, \dots, p_k\}$  o conjunto de primos que dividem  $n$ . Para cada  $i \in [k]$ , defina

$$A_i = \{m \in [n] : p_i \mid m\}.$$

Um número  $x \in [n]$  é tal que  $x$  e  $n$  são primos entre si se e somente se  $x$  não está contido em nenhum dos conjuntos  $A_i$ . Logo, pelo princípio da inclusão-exclusão, temos

$$n - \varphi(n) = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{|S|=k} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|.$$

Como cada primo  $p_i$  divide  $n$ , segue que

$$\left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = n \cdot \prod_{p \in S} \frac{1}{p}$$

para todo  $S \subset \{p_1, \dots, p_k\}$ . Portanto, temos

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{|S|=k} \prod_{p \in S} \frac{1}{p} = \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

como afirmado. □

O princípio da inclusão-exclusão também tem muitas aplicações em Combinatória, como no estudo de *permutações*, que são ordenações lineares dos elementos de um conjunto. Formalmente, uma permutação de um conjunto  $S$  com  $n$  elementos é uma função bijetiva  $f: [n] \rightarrow S$ . Não é difícil ver que existem precisamente  $n!$  permutações de um conjunto  $S$  com  $n$  elementos.

Para se acostumar com tal definição, vamos usá-la para provar o seguinte fato simples, mas importante (que *não* é a definição de  $\binom{n}{k}$  no nosso livro).

#### Exemplo 1.4.4.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Demonstração.* Iremos contar a quantidade de permutações  $f: [n] \rightarrow [n]$  de dois modos. Por um lado, escolhendo  $f(i)$  sequencialmente para  $i = 1, \dots, n$ , existem  $n!$  permutações de  $[n]$ . Por outro lado, podemos primeiro escolher as imagens dos elementos de  $S = \{1, \dots, k\}$  e depois as imagens dos elementos restantes. Há  $\binom{n}{k}$  maneiras de escolher o conjunto  $T$  que será imagem de  $S$ ; fixado isso, há  $k!$

modos de escolher as imagens de cada um dos elementos de  $S$  (em  $T$ ) e  $(n - k)!$  de escolher as imagens dos elementos de  $[n] \setminus S$ . Segue que

$$n! = \binom{n}{k} k! (n - k)!,$$

como afirmado. □

Dizemos que uma permutação de  $[n]$  *fixa* um elemento  $i \in [n]$  se  $f(i) = i$ , ou seja, se  $i$  aparece em sua posição original. Uma permutação de  $[n]$  na qual nenhum elemento é fixado é chamada de *desarranjo*.

O seguinte resultado determina (assintoticamente) a probabilidade de que uma permutação aleatória de  $[n]$  seja um desarranjo.

**Proposição 1.4.5.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $a(n)$  a quantidade de desarranjos de  $[n]$ . Então*

$$\frac{a(n)}{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Vamos determinar exatamente a quantidade de desarranjos de  $[n]$ . Para cada  $i \in [n]$ , seja  $A_i$  o conjunto de permutações de  $[n]$  que fixam  $i$ . Note que  $|A_i| = (n - 1)!$  e, mais geralmente, para todo  $k$  e todo  $S \subseteq [n]$  de tamanho  $k$ , temos

$$\left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = (n - k)!,$$

pois os elementos de  $S$  estão fixos, e os  $n - k$  demais elementos podem ser permutados livremente. Como uma permutação de  $[n]$  é um desarranjo se e somente se não está em nenhum dos  $A_i$ , temos pelo princípio da inclusão-exclusão que

$$n! - a(n) = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)!$$

Pelo Exemplo 1.4.4, obtemos

$$\frac{a(n)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , como afirmado. □

## 1.5 Exercícios

**Exercício 1.5.1.** Mostre que qualquer subconjunto  $A \subset [2n]$  de tamanho  $n + 1$  contém dois números coprimos.

**Exercício 1.5.2.** Seja  $\mathcal{A}$  uma família de subconjuntos de  $[n]$  tal que  $A \cap B \neq \emptyset$  para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ . Conclua que  $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$ .

**Exercício 1.5.3.** Prove as igualdades abaixo (idealmente usando contagem dupla):

$$(a) \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m};$$

$$(b) \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.$$

$$(c) \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1};$$

**Exercício 1.5.4.** Seja  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ . Prove que existe um intervalo  $I \subseteq [n]$  tal que  $\sum_{i \in I} a_i$  é divisível por  $n$ .

**Exercício 1.5.5.** Prove que todo conjunto de  $2^n + 1$  vetores em  $\mathbb{Z}^n$  (ou seja, vetores da forma  $(a_1, \dots, a_n)$  com  $a_i \in \mathbb{Z}$ ) contém um par de pontos distintos cuja média possui coordenadas inteiras.

**Exercício 1.5.6.** Seja  $G$  um grafo. Mostre que existem dois vértices  $u, v \in V(G)$  com  $d_G(u) = d_G(v)$ .

**Exercício 1.5.7.** Dados 5 pontos em uma esfera, mostre que existe um hemisfério fechado (isto é, incluindo o ‘equador’) contendo pelo menos 4 deles.

**Exercício 1.5.8.** Mostre que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , existem infinitos múltiplos de  $n$  formados por apenas os dígitos 0 e 1.

**Exercício 1.5.9.** Sejam  $g_1(x), \dots, g_k(x)$  funções reais limitadas e  $f(x)$  uma outra função real. Suponha que existem constantes positivas  $\varepsilon$  e  $\delta$  tais que se  $f(x) - f(y) > \varepsilon$ , então  $\max_{i \in [k]} (g_i(x) - g_i(y)) > \delta$ . Prove que  $f$  também é limitada.

**Exercício 1.5.10.** Prove que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $13^n$  pode ser escrito como a soma de dois quadrados.

**Exercício 1.5.11.** Dados  $m, k \in \mathbb{N}$ , mostre que existem inteiros  $s \geq 1$  e  $a_k > a_{k-1} > \dots > a_s \geq s$  tais que

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_s}{s}. \quad (1.3)$$

Mostre também que tais inteiros  $s$  e  $a_k, \dots, a_s$  são únicos.

**Exercício 1.5.12.** Sejam  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ , e suponha que o polinômio

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

é tal que  $p(k) \in \mathbb{Z}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Prove que existem  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$  tais que

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i \binom{x}{i},$$

em que  $\binom{x}{0}$  é a função constante igual a 1 e, para  $k \geq 1$ ,

$$\binom{x}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - i).$$

[Dica: Considere o polinômio  $q(x) = p(x+1) - p(x)$ . Use o Exercício 1.5.3(c) e que dois polinômios de grau  $n$  são iguais se coincidem em  $n+1$  pontos.]

**Exercício 1.5.13.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $s \in \mathbb{R}$ . Mostre que, se  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  são tais que  $x_1 + \dots + x_n = s$ , então

$$\sum_{i=1}^n \binom{x_i}{2} \geq n \cdot \binom{s/n}{2},$$

usando o binomial definido para valores reais dado no Exercício 1.5.12. Em outras palavras, se a soma de  $n$  números é fixa, o somatório do lado esquerdo é minimizado quando eles são todos iguais.

[Dica: Escreva  $z_i = x_i - s/n$ .]

# 2

## Teoria dos Grafos

---

Grafos são estruturas essenciais para o estudo de diversos problemas teóricos e práticos, e possuem várias aplicações em Ciência da Computação. Neste capítulo, investigamos diversos problemas sobre grafos e apresentamos diversos resultados clássicos.

Acredita-se que a Teoria dos Grafos teve início na cidade de Königsberg, na antiga Prússia. Euler (1741)<sup>1</sup> resolveu um problema matemático que intrigava a população local: havia na cidade duas ilhas conectadas entre si e a outras partes da cidade através de sete pontes (veja a Figura 2.1 com a configuração das pontes feita por Euler). A pergunta que intrigava a população local dizia respeito à possibilidade de atravessar todas as sete pontes, começando de qualquer lugar, de forma a passar exatamente uma vez por cada ponte. Euler deu uma resposta negativa para essa pergunta, mostrando que não é possível efetuar o trajeto proposto.

Para resolver o problema, Euler modelou as partes de terra e as pontes como um objeto matemático que hoje é conhecido como *grafo* e analisou as propriedades da estrutura desse objeto. Estudaremos a prova dada por Euler na Seção 2.7.

Neste capítulo, apresentamos muitas das propriedades fundamentais de grafos, e introduzimos uma gama de técnicas e estratégias úteis para entender suas

---

<sup>1</sup>Apesar de publicado em 1741, o artigo foi escrito em 1735. Além de ser o primeiro artigo de Teoria dos Grafos, este é considerado também o primeiro artigo de Topologia.

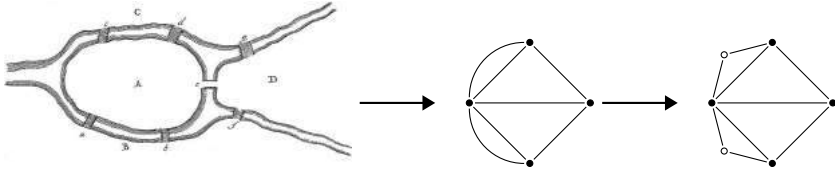


Figura 2.1: As sete pontes de Königsberg.

propriedades. Começamos com algumas definições simples, mas essenciais.

## 2.1 Fundamentos

Um *grafo*  $G$  é uma estrutura composta por um conjunto de *vértices*  $V(G)$  e um conjunto  $E(G)$  de pares de vértices, chamado de conjunto de *arestas* de  $G$ . Escrevemos  $v(G)$  e  $e(G)$ , respectivamente, para  $|V(G)|$  e  $|E(G)|$ .

Muitas vezes, representaremos uma aresta  $e = \{u, v\}$  simplesmente como  $uv$ , e dizemos que os vértices  $u$  e  $v$  são *vizinhos* ou que são vértices *adjacentes*.

O *grau* de um vértice  $v$  de um grafo  $G$ , denotado por  $d_G(v)$ , é a quantidade de vizinhos do vértice  $v$ . Já o conjunto dos vizinhos de  $v$ , a *vizinhança* de  $v$ , é denotado por  $N_G(v)$ . Quando estiver claro a que grafos estamos nos referindo, omitiremos os subíndices. Lembre que vimos no Capítulo 1 o seguinte fato básico, que relaciona os graus de um grafo com seu número de arestas.

**Lema 2.1.1** (Lema dos apertos de mão). *Dado um grafo  $G$ , temos*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G).$$

Os dois grafos mais simples são o *grafo completo*, em que todos os pares de vértices são arestas, e o *grafo vazio*, que não tem nenhuma aresta. O grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ . Tais grafos não são particularmente interessantes por si só, mas se tornam interessantes quando tentamos encontrá-los dentro de grafos maiores (e mais complicados). Para realizar essa tarefa, precisamos do conceito de *subgrafo*.

Um grafo  $H$  é *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Dizemos também que  $G$  *contém*  $H$ , e escrevemos  $H \subset G$  para denotar essa relação. Dado um conjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$  de um grafo  $G$ , o subgrafo de  $G$  *induzido por*  $X$ , denotado por  $G[X]$ , é o subgrafo  $H \subset G$  com conjunto de

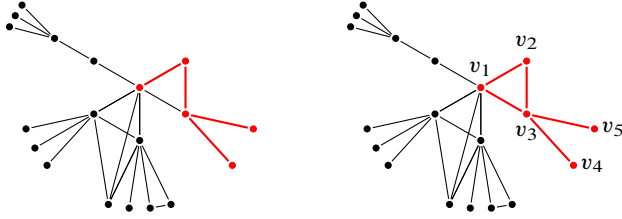


Figura 2.2: Um subgrafo não induzido (esquerda) e o subgrafo induzido por  $\{v_1, \dots, v_5\}$  (direita).

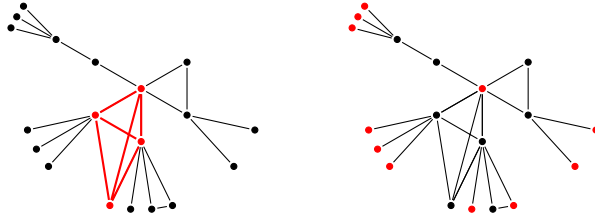


Figura 2.3: Uma clique de tamanho 4 (esquerda) e um conjunto independente (direita).

vértices  $V(H) = X$  e conjunto de arestas  $E(H) = \{uv \in E(G) : u, v \in X\}$  (veja a Figura 2.2).

Se  $X$  é um subconjunto de vértices de  $G$ , escrevemos  $e_G(X)$  para denotar  $e(G[X])$ , o número de arestas de  $G$  inteiramente contidas em  $X$ . Dizemos que  $X$  é uma *clique* de  $G$  se  $G[X]$  é um grafo completo, e que  $X$  é um *conjunto independente* de  $G$  se  $G[X]$  é um grafo vazio. Em outras palavras, um conjunto independente em  $G$  é um conjunto  $X$  para o qual  $e(G[X]) = 0$ . Dado um grafo  $G$ , o tamanho do maior conjunto independente de  $G$  é chamado de *número de independência*, e é denotado por  $\alpha(G)$ . A Figura 2.3 ilustra esses conceitos.

Definimos o *grau máximo* de um grafo  $G$  como

$$\Delta(G) = \max \{d(v) : v \in V(G)\},$$

e o *grau mínimo* de  $G$  como

$$\delta(G) = \min \{d(v) : v \in V(G)\}.$$

A seguinte proposição fornece limitantes para  $\alpha(G)$  em termos dos graus máximo e mínimo de  $G$ .

**Proposição 2.1.2.** *Para todo grafo  $G$ , temos*

$$\frac{v(G)}{\Delta(G) + 1} \leq \alpha(G) \leq \frac{e(G)}{\delta(G)}.$$

*Demonstração.* Seja  $X$  um conjunto independente maximal de  $G$ , isto é, todo conjunto de vértices que tem  $X$  como subconjunto próprio não é um conjunto independente. Vamos fazer uma contagem dupla na quantidade de arestas entre  $X$  e  $V(G) \setminus X$ . Pela maximalidade de  $X$ , todo vértice de  $V(G) \setminus X$  tem pelo menos um vizinho em  $X$ . Por outro lado, todo vértice de  $X$  tem no máximo  $\Delta(G)$  vizinhos em  $V(G) \setminus X$ . Logo,

$$v(G) - |X| = |V(G) \setminus X| \leq \sum_{v \in X} d_G(v) \leq |X| \cdot \Delta(G).$$

Portanto,  $v(G) \leq |X|(\Delta(G) + 1)$ , de onde concluímos que

$$\alpha(G) \geq |X| \geq \frac{v(G)}{\Delta(G) + 1}.$$

Para provar o limitante superior para  $\alpha(G)$ , considere um conjunto independente máximo  $Y$  de  $G$  e observe que

$$\alpha(G) \cdot \delta(G) = \sum_{v \in Y} \delta(G) \leq \sum_{v \in Y} d_G(v) \leq e(G),$$

visto que toda aresta de  $G$  é contada no máximo uma vez em  $\sum_{v \in Y} d_G(v)$ .  $\square$

Talvez surpreendentemente, ambos os limitantes na Proposição 2.1.2 são justos. De fato, o grafo  $G$  formado pela união disjunta de  $n/(k+1)$  grafos completos com  $k+1$  vértices é um grafo com  $n$  vértices tal que  $\Delta(G) = k$  e  $\alpha(G) = n/(k+1)$ , e o grafo que consiste de todas as arestas entre um conjunto de tamanho  $k \leq n/2$  e um conjunto de tamanho  $n-k$  tem  $\delta(G) = k$ ,  $e(G) = k(n-k)$  e  $\alpha(G) = n-k$ . Note que, por simetria, resultados análogos valem para o tamanho da maior clique de  $G$ .

Outros dois grafos muito simples são o caminho e o ciclo. Um *caminho* de comprimento  $k$  é um grafo  $P$  para o qual há uma ordenação  $(v_0, \dots, v_k)$  de seus vértices tal que

$$E(P) = \{v_{i-1}v_i : 1 \leq i \leq k\}.$$



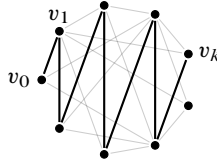


Figura 2.4: Uma cópia de um caminho num grafo.

Muitas vezes representamos um caminho pela sequência de vértices  $(v_0, \dots, v_k)$ , em que escrevemos simplesmente  $P = (v_0, \dots, v_k)$  para representar o caminho. A Figura 2.4 dá um exemplo de um caminho em um grafo.

Dados  $u, v \in V(G)$ , a *distância* de  $u$  a  $v$  em  $G$ , denotada por  $\text{dist}_G(u, v)$ , é o comprimento do caminho mais curto entre  $u$  a  $v$ , ou  $\infty$  caso não exista caminho ligando  $u$  e  $v$ . Em particular,  $\text{dist}_G(v, v) = 0$ .

Um conceito relacionado é o de passeio. Um *passeio* num grafo  $G$  é uma sequência de vértices  $(v_0, \dots, v_k)$  de  $G$  tal que  $v_{i-1}v_i$  é uma aresta de  $G$  para  $1 \leq i \leq k$ . Note que, ao contrário da definição de caminho, um passeio pode usar um vértice de  $G$  mais de uma vez.

**Observação 2.1.3.** *Dados dois vértices  $u$  e  $v$  de um grafo  $G$ , existe um caminho ligando  $u$  a  $v$  se e somente se existe um passeio ligando  $u$  a  $v$ .*

*Demonstração.* Todo caminho é um passeio, de modo que basta provar uma das implicações. Suponha que existe passeio ligando  $u$  a  $v$ , e considere o conjunto  $A$  de todos os passeios com essa propriedade. Seja  $P = (v_0, \dots, v_k)$  um menor passeio de  $A$ . Então  $P$  é um caminho, pois se  $v_i = v_j$  com  $i < j$ , então  $P' = (v_0, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k)$  é um passeio com menos vértices.  $\square$

Se  $k \geq 3$ , o *ciclo* de comprimento  $k$ , denotado por  $C_k$ , é um grafo obtido a partir de um caminho  $(v_1, \dots, v_k)$  pela adição da aresta  $v_1v_k$ , como na Figura 2.5. O comprimento do menor ciclo de  $G$  é chamado de *cintura* de  $G$ , e é denotado por  $g(G)$ . A seguinte proposição relaciona o grau mínimo ao comprimento do maior ciclo de  $G$ .

**Proposição 2.1.4.** *Se  $G$  é um grafo com  $\delta(G) \geq 2$ , então  $G$  contém um ciclo de comprimento pelo menos  $\delta(G) + 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $P = (v_1, \dots, v_k)$  um caminho maximal em  $G$ . Note que como  $P$  é maximal, todos os vizinhos de  $v_k$  estão em  $P$ . Caso contrário teríamos um caminho mais longo que  $P$  (e contendo  $P$ ). Agora, seja  $i$  o me-

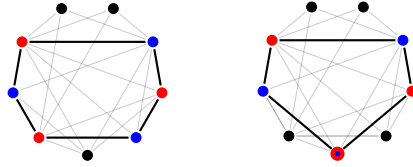


Figura 2.5: Um ciclo par e um ciclo ímpar num grafo.

nor índice tal que  $v_i v_k \in E(G)$ . Como  $d(v) \geq \delta(G)$ , concluímos que  $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$  é um ciclo com pelo menos  $\delta(G) + 1$  arestas.  $\square$

O limitante na Proposição 2.1.4 também é justo, e pelo mesmo exemplo dado anteriormente: o grafo  $G$  formado por  $n/(k+1)$  grafos completos disjuntos com  $k+1$  vértices é um grafo com  $\delta(G) = k$  e não contém ciclos (nem mesmo caminhos) de comprimento maior do que  $k+1$ .

## 2.2 Árvores

Lembre-se do Capítulo 1 que um grafo é *conexo* se e somente se para todo subconjunto próprio  $A \subsetneq V(G)$  não vazio existe pelo menos uma aresta de  $G$  entre  $A$  e  $V(G) \setminus A$ . Tal definição é motivada pelo seguinte fato simples.

**Lema 2.2.1.** *Um grafo  $G$  é conexo se e somente se para todo par de vértices  $u, v \in V(G)$  existe um caminho entre  $u$  e  $v$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $G$  não é conexo, e seja  $\emptyset \neq A \subsetneq V(G)$  tal que não há arestas entre  $A$  e  $V(G) \setminus A$ . Então para todo  $u \in A$  e todo  $v \in V(G) \setminus A$  não há caminho entre  $u$  e  $v$ .

Agora suponha que  $G$  é conexo. Para cada  $u \in V(G)$ , considere o conjunto  $A(u)$  dos vértices  $w \in V(G)$  tais que existe um caminho (possivelmente de comprimento 0) em  $G$  entre  $u$  e  $w$ . Se  $A(u) = V(G)$  para todo  $u \in V(G)$ , então existe um caminho entre quaisquer dois vértices. Do contrário, existe  $u \in V(G)$  tal que  $A(u) \neq V(G)$ , e toda aresta  $vw$  com  $v \in A(u)$  tem também  $w \in A(u)$ . Como  $u \in A(u)$ , o conjunto  $A = A(u)$  contradiz a definição de conexidade.  $\square$

Pela Observação 2.1.3, o Lema 2.2.1 também é verdadeiro se substituirmos a palavra “caminho” por “passeio”.

Uma *componente conexa* de um grafo  $G$  é um subgrafo conexo aresta maximal de  $G$ , i.e., um subgrafo de  $G$  que é maximal em termos de arestas com respeito à

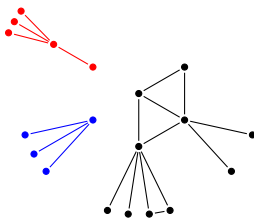


Figura 2.6: Um grafo desconexo com três componentes conexas.

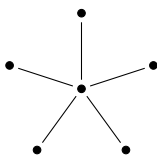


Figura 2.7: Uma estrela de ordem 6.

propriedade de ser conexo. Observe que o conjunto  $A(u)$  definido na prova acima é exatamente o conjunto de vértices da componente de  $G$  contendo  $u$ . Um grafo que não é conexo é dito ser *desconexo*, como ilustrado na Figura 2.6.

No Capítulo 1, também provamos (veja a Proposição 1.3.4) o seguinte fato sobre o número mínimo de arestas num grafo conexo.

**Lema 2.2.2.** *Se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices, então  $e(G) \geq n - 1$ .*

A cota do Lema 2.2.2 é justa, pois um caminho com  $n$  vértices é conexo e tem  $n - 1$  arestas. Outro exemplo é a *estrela* de ordem  $n$  (veja Figura 2.7), o grafo em que todas as arestas são incidentes a um único vértice de grau  $n - 1$ . Na verdade, a desigualdade é justa para uma grande família de grafos, as *árvores*, definidas a seguir, em que dizemos que um grafo é *acíclico* se não contém ciclos.

**Definição 2.2.3.** Uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo.

Nosso objetivo nessa seção é mostrar que as árvores são exatamente os grafos conexos com  $e(G) = v(G) - 1$ . O primeiro passo é a seguinte proposição.

**Proposição 2.2.4.** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices. Se  $e(G) = n - 1$ , então  $G$  é acíclico.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices e exatamente  $n - 1$  arestas, e suponha que  $C \subset G$  é um ciclo. Considere o grafo  $G'$  obtido de  $G$  através da remoção de uma aresta  $e$  do ciclo  $C$ .

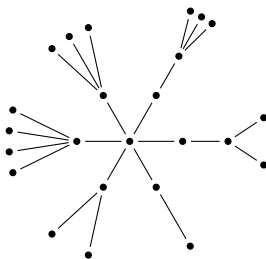


Figura 2.8: Uma árvore.

Afirmamos que  $G'$  é conexo. De fato, isso segue do Lema 2.2.1, pois, para qualquer caminho  $P$  de  $G$  que use a aresta  $e$ , podemos “dar a volta” no ciclo  $C$  para obter um passeio de  $G'$  com as mesmas extremidades de  $P$  que evita o uso de  $e$ . Mas, então,  $G'$  tem  $n$  vértices e  $n - 2$  arestas, contradizendo o Lema 2.2.2.  $\square$

O seguinte lema é simples, mas muito útil. Um vértice  $v$  em uma árvore  $G$  é chamado de *folha* se  $d_G(v) = 1$ .

**Lema 2.2.5.** *Toda árvore com  $n \geq 2$  vértices tem pelo menos duas folhas.*

*Demonstração.* Seja  $G$  uma árvore com  $n$  vértices e seja  $P = (v_1, \dots, v_k)$  o maior caminho de  $G$ . Por maximalidade,  $v_1$  e  $v_k$  não tem vizinhos fora de  $P$ . Além disso,  $v_2$  e  $v_{k-1}$  são os únicos vizinhos de  $v_1$  e  $v_k$  (respectivamente) em  $P$ , pois  $G$  é acíclico. Então  $d_G(v_1) = d_G(v_k) = 1$ , como queríamos.  $\square$

Para cada  $v \in V(G)$ , escrevemos  $G - v$  para o grafo obtido de  $G$  pela remoção do vértice  $v$  e de todas as arestas incidentes a ele. Folhas são úteis pelo seguinte motivo.

**Lema 2.2.6.** *Se  $G$  é uma árvore e  $v$  é uma folha de  $G$ , então  $G - v$  é uma árvore.*

*Demonstração.* Se  $G$  é uma árvore, então  $G$  é acíclico e conexo por definição. Assim,  $G - v$  é acíclico, de modo que basta mostrar que  $G - v$  é conexo. Já provamos isso durante a demonstração da Proposição 1.3.4, mas iremos dar outra prova: para quaisquer  $u, w \in V(G - v)$ , o Lema 2.2.1 nos dá um caminho  $P$  de  $G$  ligando  $u$  a  $w$ . Como  $d_G(v) = 1$ , o vértice  $v$  é extremidade de todo caminho que o contém e, portanto,  $P$  não contém  $v$ . Logo,  $G - v$  é conexo pelo Lema 2.2.1.  $\square$

Podemos então deduzir a seguinte proposição.

**Proposição 2.2.7.** *Seja  $G$  uma árvore com  $n$  vértices. Então  $e(G) = n - 1$ .*

*Demonstração.* Vamos provar o resultado por indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , então o resultado é válido, pois não há arestas. Suponha então que  $n \geq 2$ , e que toda árvore com  $k < n$  vértices tem exatamente  $k - 1$  arestas.

Seja  $G$  uma árvore com  $n$  vértices. Pelo Lema 2.2.5,  $G$  tem uma folha  $v$ , e pelo Lema 2.2.6 o grafo  $G' = G - v$  é uma árvore com  $n - 1$  vértices. Pela hipótese de indução,  $G'$  tem exatamente  $n - 2$  arestas. Logo, como  $d_G(v) = 1$ , temos que  $G$  tem exatamente  $n - 1$  arestas.  $\square$

O seguinte corolário segue diretamente das Proposições 2.2.4 e 2.2.7.

**Corolário 2.2.8.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices.  $G$  é uma árvore se e somente se  $G$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas.*

A proposição a seguir garante que grafos acíclicos com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas são conexos. Essa proposição pode ser provada nas mesmas linhas da prova apresentada para a Proposição 2.2.7, mas apresentamos aqui outra prova.

**Proposição 2.2.9.** *Seja  $G$  um grafo acíclico com  $n$  vértices. Se  $e(G) = n - 1$ , então  $G$  é conexo.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo acíclico com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas. Suponha por contradição que  $G$  não seja conexo. Como  $G$  não é conexo, existe uma partição de  $V(G)$  em componentes conexas  $G_1, \dots, G_k$ , em que  $k \geq 2$ . Observe que cada componente conexa  $G_i$  é um grafo acíclico e conexo, e então  $e(G_i) = v(G_i) - 1$ , pela Proposição 2.2.7. Portanto,

$$e(G) = \sum_{i=1}^k (v(G_i) - 1) = n - k \leq n - 2,$$

em que a última desigualdade segue de  $k \geq 2$  e do fato de  $n = \sum_{i=1}^k v(G_i)$ . Mas, como  $e(G) = n - 1$ , pela Proposição 2.2.7, temos uma contradição.  $\square$

Usando os resultados e métodos desta seção, é possível provar o seguinte resultado, que fornece várias caracterizações diferentes para árvores.

**Teorema 2.2.10.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a)  $G$  é uma árvore.

- (b)  $G$  é um grafo conexo aresta minimal.
- (c)  $G$  é um grafo acíclico aresta maximal.
- (d)  $G$  é conexo e  $e(G) = n - 1$ .
- (e)  $G$  é acíclico e  $e(G) = n - 1$ .
- (f) Entre quaisquer dois vértices de  $G$  existe exatamente um único caminho.

Deixamos a prova desse teorema como exercício.

### 2.2.1 Árvores geradoras

Um subgrafo  $H \subset G$  é um *subgrafo gerador* de  $G$  se  $V(H) = V(G)$ . Uma *árvore geradora* de um grafo  $G$  é um subgrafo gerador de  $G$  que é uma árvore. Terminamos esta seção com o seguinte resultado.

**Teorema 2.2.11.** *Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

Daremos duas provas desse fato fundamental. Passemos à primeira (e mais simples) das nossas duas provas do Teorema 2.2.11.

*Demonstração do Teorema 2.2.11.* Enquanto for possível remover uma aresta de  $G$  sem torná-lo desconexo, faça-o. O grafo resultante  $H$  é conexo aresta minimal e  $V(H) = V(G)$  por definição. Assim, pelo Teorema 2.2.10,  $H$  é uma árvore geradora de  $G$ . □

Nossa segunda prova de Teorema 2.2.11 será um pouco mais complicada, mas conterà algumas ideias novas úteis. Note que, pelo Lema 2.1.1, o *grau médio* (isto é, a média dos graus) de um grafo  $G$  é igual a  $2e(G)/v(G)$ . Usaremos o seguinte lema, que afirma que  $G$  contém um subgrafo com grau mínimo pelo menos metade do grau médio.

**Lema 2.2.12.** *Todo grafo  $G$  com pelo menos uma aresta contém um subgrafo  $H$  com*

$$\delta(H) > \frac{e(G)}{v(G)}.$$

*Demonstração.* A ideia é simplesmente remover vértices de grau mínimo de  $G$  até que a condição de grau mínimo desejada seja satisfeita. Iremos mostrar que

tal procedimento não pode remover todos os vértices. Mais precisamente, defina uma sequência de grafos

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_{m-1} \supset G_m = H$$

tal que, para cada  $i \in [m]$ , o grafo  $G_i$  é obtido a partir de  $G_{i-1}$  pela remoção de um vértice de grau no máximo  $e(G)/v(G)$  no grafo  $G_{i-1}$ . O processo termina com um grafo  $H = G_m$ . Se  $m < v(G)$ , então  $\delta(H) > e(G)/v(G)$ , como desejado.

Suponha que  $m = v(G)$ . Para cada  $i \in [m]$ , seja  $v_i$  o vértice removido no passo  $i$ , de modo que  $G_i = G_{i-1} - v_i$ . Como  $v_i$  tem grau no máximo  $e(G)/v(G)$  em  $G_{i-1}$  e todas as arestas de  $G$  são removidas em algum passo, temos que

$$e(G) = \sum_{i=1}^m d_{G_{i-1}}(v_i) \leq (v(G) - 1) \cdot \frac{e(G)}{v(G)} < e(G),$$

pois o passo  $m$  remove o último vértice e, portanto, não remove arestas. Isso é um absurdo.  $\square$

Agora, podemos dar nossa segunda prova do Teorema 2.2.11.

*Demonstração alternativa do Teorema 2.2.11.* Suponha, por contradição, que o enunciado não vale, e seja  $G$  um contraexemplo aresta minimal. Assim,  $G$  é um grafo conexo que não possui árvore geradora, e todo subgrafo conexo próprio de  $G$  possui árvore geradora.

Defina  $n = v(G)$ . Pelo Lema 2.2.2, temos  $e(G) \geq n - 1$ . Suponha primeiro que  $e(G) = n - 1$ . Então  $G$  é acíclico, pela Proposição 2.2.4 e, portanto, é uma árvore. Nesse caso,  $G$  é uma árvore geradora de si mesmo.

Por outro lado, se  $e(G) \geq n$ , então pelo Lema 2.2.12  $G$  possui um subgrafo  $H$  com  $\delta(H) > 1$ . Como  $\delta(H)$  é um inteiro, temos que  $\delta(H) \geq 2$ , de modo que  $H$  contém um ciclo  $C$  pela Proposição 2.1.4. Como  $C$  também é um ciclo em  $G$ , existe um subgrafo  $G' \subset G$  conexo com  $V(G) = V(G')$  e  $e(G') < e(G)$ . Pela minimalidade de  $G$ , o grafo  $G'$  contém uma árvore geradora  $T'$ , que também é uma árvore geradora de  $G$ .  $\square$

## 2.3 Grafos bipartidos

Um grafo  $G$  é *bipartido* se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos  $X$  e  $Y$  de modo que  $X$  e  $Y$  são conjuntos independentes. Lembrando do Capítulo 1

e da Seção 2.1, significa que  $X \cup Y = V(G)$  e  $X \cap Y = \emptyset$  e toda aresta de  $G$  tem um extremo (isto é, um dos seus vértices) em  $X$  e outro em  $Y$ . Dizemos que  $(X, Y)$  é uma *bipartição* de  $G$ .

Se um grafo  $G$  contém todas as arestas entre  $X$  e  $Y$ , dizemos que  $G$  é *bipartido completo*. Chamamos  $X$  e  $Y$  de *partes* (ou *classes*) de  $G$ , e denotamos por  $K_{s,t}$  o grafo bipartido completo com partes de tamanho  $s$  e  $t$ .

Um outro exemplo simples de um grafo bipartido é um ciclo par (isto é, um ciclo com um número par de vértices). Árvores também são grafos bipartidos, como mostra a seguinte proposição.

**Proposição 2.3.1.** *Se  $G$  é uma árvore, então  $G$  é bipartido.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.2.10, dado um par de vértices  $u, w$ , existe um único caminho em  $G$  ligando  $u$  a  $w$ . Seja  $\text{dist}(u, w)$  o comprimento de tal caminho.

Fixe  $u \in V(G)$ , e defina  $X$  como o conjunto dos vértices  $v \in V(G)$  tais que  $\text{dist}(u, v)$  é par. Afirmamos que  $X$  e  $Y$  são conjuntos independentes de  $G$ . De fato, se  $vw \in E(G)$ , então  $|\text{dist}(u, v) - \text{dist}(u, w)| = 1$  e, portanto,  $\text{dist}(u, v)$  e  $\text{dist}(u, w)$  têm paridades diferentes, de modo que pertencem a diferentes partes. Logo,  $G$  é bipartido.  $\square$

A família de grafos bipartidos é maior que a família das árvores, pois inclui (por exemplo) ciclos pares e grafos bipartidos completos. Por outro lado, tal família não contém nenhum ciclo ímpar, como pode facilmente ser verificado. A seguinte proposição mostra, talvez surpreendentemente, que não há outras obstruções para um grafo ser bipartido.

**Proposição 2.3.2.** *Se  $G$  é um grafo que não contém ciclos ímpares, então  $G$  é bipartido.*

*Demonstração.* Podemos supor que  $G$  é conexo, pois se cada componente conexa de  $G$  fosse um grafo bipartido,  $G$  também seria. Assim, seja  $T$  uma árvore geradora de  $G$  e  $(X, Y)$  a bipartição de  $T$  dada pela Proposição 2.3.1. Sejam  $x$  e  $y$  dois vértices da mesma parte, e  $P$  um caminho de comprimento par (portanto com quantidade ímpar de vértices) em  $T$  ligando  $x$  e  $y$ . Se existisse  $xy \in E(G) \setminus E(T)$ , tal aresta fecharia um ciclo ímpar com  $P$ , uma contradição. Assim,  $(X, Y)$  é uma bipartição de  $G$ .  $\square$

Como ciclos ímpares não são grafos bipartidos, a Proposição 2.3.2 caracteriza a família de grafos bipartidos.



**Corolário 2.3.3.** *Um grafo  $G$  é bipartido se e somente se  $G$  não contém ciclos ímpares.*

Frequentemente é mais fácil trabalhar com grafos bipartidos do que com grafos gerais. Por esse motivo, o seguinte resultado é muito útil. Ele mostra que todo grafo possui um subgrafo bipartido com pelo menos a metade de suas arestas.

**Proposição 2.3.4.** *Todo grafo  $G$  possui um subgrafo bipartido  $H$  tal que*

$$e(H) \geq \frac{e(G)}{2}.$$

*Demonstração.* Sejam  $X, Y$  dois conjuntos disjuntos com  $X \cup Y = V(G)$  que maximizam o número de arestas de  $G$  com um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ . Seja  $H \subset G$  o grafo bipartido tal que  $V(H) = V(G)$  e  $E(H) = (X \times Y) \cap E(G)$ . Afirmamos que

$$d_H(v) \geq \frac{d_G(v)}{2}$$

para todo  $v \in V(G)$ . De fato, suponha sem perda de generalidade que  $v \in X$ . Se  $v$  tivesse mais vizinhos (em  $G$ ) em  $X$  que em  $Y$ , poderíamos mover  $v$  para  $Y$  e o subgrafo bipartido  $H'$  correspondente ao novo par  $(X, Y)$  teria mais arestas que  $H$ . Pelo Lema 2.1.1, temos que

$$2e(H) = \sum_{v \in V(G)} d_H(v) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)}{2} = e(G)$$

como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

Note que um grafo bipartido completo com  $n/2$  vértices em cada parte possui exatamente  $n^2/4$  arestas. O resultado a seguir mostra que esse é o número máximo de arestas em um grafo bipartido.

**Proposição 2.3.5.** *Se  $G$  é um grafo bipartido com  $n$  vértices, então  $G$  tem no máximo  $n^2/4$  arestas.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo bipartido com  $n$  vértices, e seja  $(X, Y)$  uma bipartição de  $G$  com  $|X| = x$  e  $|Y| = y$ . Como  $G$  é bipartido, temos

$$e(G) \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{n^2}{4},$$

em que a segunda desigualdade é consequência de  $(x-y)^2 \geq 0$ .  $\square$

## 2.4 Coloração de vértices

Uma *coloração* dos vértices de um grafo  $G$  é uma função

$$c: V(G) \rightarrow [k]$$

que associa, dentre  $k$  “cores”, uma cor para cada um dos vértices de  $G$ . Se temos  $c(v) \neq c(w)$  para toda aresta  $vw \in E(G)$ , então dizemos que a coloração  $c$  é *própria*. Cada conjunto  $c^{-1}(i)$  é chamado de uma *classe de cor*. Dizemos que uma coloração própria com  $k$  cores é uma  $k$ -*coloração* de  $G$ , e dizemos que um grafo é  $k$ -*colorível* se admite uma  $k$ -coloração.

O *número cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , é a menor quantidade  $k$  de cores para o qual  $G$  é  $k$ -colorível. Note que  $\chi(G) \leq v(G)$  para todo grafo  $G$ , pois podemos colorir cada vértice com uma cor diferente. Considerando o outro caso extremo, temos o seguinte fato.

**Fato 2.4.1.** *Um grafo  $G$  é bipartido se e somente se  $\chi(G) \leq 2$ .*

*Demonstração.* Para ver isso, observe que uma 2-coloração  $c$  de  $G$  é uma partição de  $V(G)$  em dois conjuntos independentes  $X = c^{-1}(1)$  e  $Y = c^{-1}(2)$ . Reciprocamente, dada uma bipartição  $(X, Y)$ , podemos obter uma 2-coloração pintando os vértices de  $X$  com a cor 1 e os de  $Y$  com a cor 2.  $\square$

Quando estamos lidando com 2-colorações, frequentemente chamamos as cores 1 e 2 de vermelho e azul. É fácil verificar se  $\chi(G) \leq 2$ : basta tentar colorir um vértice de vermelho, seus vizinhos de azul, e assim por diante, alternando as cores. Um conflito de cores implica na existência de um ciclo ímpar, o que mostra que  $G$  não é bipartido, pelo Corolário 2.3.3. Para  $k \geq 3$ , no entanto, determinar se  $\chi(G) \leq k$  é um problema computacionalmente difícil. Ao invés de tentar determinar  $\chi(G)$  exatamente, vamos provar limitantes superiores e inferiores, e estudar classes especiais de grafos para os quais seja possível calcular o número cromático de forma exata.

Começaremos com uma cota inferior simples. Denote por  $\omega(G)$  o tamanho da maior clique contida em  $G$ , isto é, o número de vértices do maior subgrafo completo de  $G$ .

**Fato 2.4.2.** *Para todo  $G$ , vale que  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .*

*Demonstração.* Numa coloração própria de  $G$ , cada vértice da clique precisa receber uma cor diferente. Assim, se  $K_k \subset G$ , então  $G$  não é  $(k - 1)$ -colorível e, portanto,  $\chi(G) \geq k$ .  $\square$

Note que esse limitante não é justo: existem grafos  $G$  no quais  $\chi(G)$  é maior que  $\omega(G)$ ; por exemplo, o ciclo ímpar  $C_{2k+1}$  para o qual temos

$$\chi(C_{2k+1}) = 3 \quad \text{e} \quad \omega(C_{2k+1}) = 2.$$

Na verdade, como veremos no Capítulo 5, existem grafos sem triângulos com número cromático arbitrariamente grande.

Uma cota inferior simples para o número cromático de um grafo arbitrário  $G$  é dada pelo lema abaixo. Lembre-se que  $\alpha(G)$  é o número de independência de  $G$ , isto é, o tamanho do maior conjunto  $X \subseteq V(G)$  com  $e(G[X]) = 0$ .

**Lema 2.4.3.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Então*

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}.$$

*Demonstração.* Fixe uma coloração dos vértices de  $G$  com  $k = \chi(G)$  cores e sejam  $X_1, \dots, X_k \subseteq V(G)$  as classes de cores. Como cada  $X_i$  é um conjunto independente em  $G$ , temos

$$n = \sum_{i=1}^k |X_i| \leq \sum_{i=1}^k \alpha(G) = \chi(G) \alpha(G),$$

como afirmado. □

Dependendo do grafo, tal cota está longe de ser justa. Por exemplo, adicionando  $n/2$  vértices de grau 0 ao grafo completo de tamanho  $n/2$ , obtemos um grafo  $G$  com  $\chi(G) = n/2$  e  $n/\alpha(G) = 2$ . No entanto, iremos mostrar no Capítulo 10 que o Lema 2.4.3 é justo para “a maioria” dos grafos com  $n$  vértices.

Um dos limitantes superiores mais simples para  $\chi(G)$  é dado pela proposição abaixo, lembrando que  $\Delta(G)$  denota o grau máximo de  $G$ .

**Proposição 2.4.4.** *Para todo grafo  $G$ , temos que  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

*Demonstração.* Iremos colorir os vértices de  $G$  através de um algoritmo guloso, isto é, um algoritmo que faz escolhas sem se preocupar com os passos futuros. Mais precisamente, seja  $k = \Delta(G) + 1$ . Defina uma coloração  $c: V(G) \rightarrow [k]$  do seguinte modo: sequencialmente, para cada vértice  $v \in V(G)$ , escolha para  $c(v)$  uma cor em  $[k]$  diferente da cor de todos os vizinhos coloridos de  $v$ . Como  $v$  tem no máximo  $\Delta(G) = k - 1$  vizinhos, isso sempre é possível. Por construção, temos  $c(u) \neq c(v)$  para toda aresta  $uv \in E(G)$  e, portanto,  $c$  é uma  $k$ -coloração de  $G$ . □

O limitante dado pela Proposição 2.4.4 nem sempre é bom; por exemplo, se  $G$  é um grafo bipartido com pelo menos uma aresta, então  $\chi(G) = 2$ , mas  $\Delta(G)$  pode variar de 1 a  $n - 1$ . Existem, no entanto, grafos para os quais a cota é justa. Ciclos ímpares satisfazem

$$\Delta(C_{2k+1}) = 2 \quad \text{e} \quad \chi(C_{2k+1}) = 2$$

e grafos completos são tais que

$$\Delta(K_n) = n - 1 \quad \text{e} \quad \chi(K_n) = n.$$

Brooks (1941) mostrou que tais exemplos são os únicos grafos conexos para os quais o limitante da Proposição 2.4.4 é justo.

**Teorema 2.4.5** (Teorema de Brooks, 1941). *Se  $G$  é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

Há diversas provas do Teorema 2.4.5 (veja, por exemplo, (Cranston e Rabern 2015)). A prova que apresentaremos foi feita por Lovász (1975). Tal prova não é longa, mas é mais difícil que as provas que vimos até agora, de modo que começaremos dando uma visão geral do método usado.

O primeiro passo é mostrar que é suficiente considerar um grafo  $k$ -regular, isto é, um grafo em que todo vértice tem grau  $k = \Delta(G)$ . De fato, se existir um vértice  $v$  com  $d_G(v) < k$ , podemos removê-lo e usar indução para concluir que  $G - v$  admite uma  $k$ -coloração. Como  $d_G(v) < k$ , existe uma cor disponível para  $v$ , de modo que podemos estender a  $k$ -coloração do grafo  $G - v$  para o grafo  $G$ .

Em seguida, note que podemos assumir que  $k \geq 3$ , pois um grafo conexo 1-regular é uma única aresta e um grafo conexo 2-regular conexo é um ciclo (por hipótese, um ciclo par), e tais grafos satisfazem a conclusão desejada.

Para o próximo passo, diremos que  $v \in V(G)$  é um *vértice de corte* de um grafo conexo  $G$  se o grafo  $G - v$  não é conexo. Suponha que  $G$  tem um vértice de corte  $v$ , e sejam  $H_1, \dots, H_s$  as componentes conexas de  $G - v$ . Por indução no número de vértices, para todo  $i \in [s]$  existe uma  $k$ -coloração do grafo

$$G_i = G[V(H_i) \cup \{v\}],$$

visto que, como  $v$  tem menos de  $k$  vizinhos em  $H_i$ , o grafo  $G_i$  não é nem um grafo completo nem um ciclo ímpar. Podemos renomear as cores em cada uma das  $k$  colorações de modo que  $v$  receba a mesma cor em todas elas e obter uma  $k$ -coloração de  $G$ .

Chegamos à ideia chave. Suponha que exista um caminho  $(u, v, w)$  em  $G$  tal que  $uw \notin E(G)$ , e o grafo  $G - u - w$  (o subgrafo de  $G$  induzido pelo conjunto  $V(G) \setminus \{u, w\}$ ) é conexo. Podemos colorir  $G$  gulosamente do seguinte modo: pintamos  $u$  e  $w$  com a mesma cor, e colorimos os demais vértices começando do mais distante a  $v$  (ou seja, ordem decrescente de distância a  $v$ ). Desse modo, para todo vértice  $z \neq v$ , na vez de  $z$  ser colorido, pelo menos um dos vizinhos de  $z$  ainda não foi colorido e, portanto, existe cor disponível para  $z$ . Além disso,  $v$  tem dois vizinhos com a mesma cor e, portanto, também há uma cor disponível para  $v$ .

Assim, reduzimos o problema original ao seguinte lema.

**Lema 2.4.6.** *Seja  $G$  um grafo conexo sem vértices de corte tal que  $\delta(G) \geq 3$ . Se  $G$  não é completo, então  $G$  possui um caminho  $(u, v, w)$  com  $uw \notin E(G)$  tal que  $G - u - w$  é conexo.*

Para provar o Lema 2.4.6, precisaremos do conceito de um *bloco* de um grafo  $G$ , que é um subgrafo maximal de  $G$  sem vértices de corte. Observe que dois blocos distintos de  $G$  se intersectam em no máximo um vértice, pois do contrário a união dos dois blocos não conteria vértices de corte. Além disso, se definimos um grafo  $H$  cujos vértices correspondem aos blocos de  $G$  e cujas arestas correspondem a pares de blocos que se intersectam, tal grafo é acíclico, pois se existisse um ciclo em  $H$ , a união dos blocos de  $G$  correspondentes aos vértices do ciclo formaria um subgrafo de  $G$  sem vértices de corte. Em particular, se  $G$  é conexo, mas tem um vértice de corte, então  $H$  é uma árvore com pelo menos dois vértices e, portanto, tem pelo menos duas folhas pelo Lema 2.2.5. Tendo tal fato, podemos provar o lema.

*Demonstração do Lema 2.4.6.* Seja  $G$  um grafo conexo que não é completo. Então existe um caminho  $(x, y, z)$  com  $xz \notin E(G)$  (veja o Exercício 2.8.2). Se  $G - x - z$  for conexo, então  $(x, y, z)$  é um caminho com as propriedades do lema. Então podemos supor que  $G - x$  é conexo e  $z$  é um vértice de corte de  $G - x$ .

Sejam  $B$  e  $B'$  blocos do grafo  $G - x$  correspondentes a folhas do grafo  $H$ . Então cada um de  $B$  e  $B'$  intersecta exatamente um outro bloco de  $G$ . Sejam  $u \in B \cap N(x)$  e  $w \in B' \cap N(x)$  que não sejam vértices de corte de  $G - x$  tais que  $uw \notin E(G)$  (tais vértices existem, pois do contrário um dos vértices que liga  $B$  ou  $B'$  ao resto de  $G - x$  seria um vértice de corte).

Afirmamos que  $G - u - w$  é conexo. Para ver isso, lembre que nem  $u$  nem  $w$  são vértices de corte de  $G - x$ , e note que  $u$  não é um vértice de corte de  $B$  (pois  $B$  é um bloco), e similarmente  $w$  não é vértice de corte de  $B'$ . Além disso, como  $\delta(G) \geq 3$ , o vértice  $x$  tem um vizinho em  $G - u - w$ .

Tomando  $v = x$ , obtemos o caminho  $(u, v, w)$  desejado. □

A prova do Teorema de Brooks segue dos argumentos acima. Em todo caso, vamos repetir os passos com calma.

*Demonstração do Teorema 2.4.5.* Seja  $G$  um contraexemplo mínimo para o enunciado, e seja  $\Delta(G) = k$ . Se  $k = 2$ , então  $G$  é um caminho ou um ciclo. Como  $G$  não é um ciclo ímpar, temos  $\chi(G) \leq 2$ , uma contradição. Então podemos supor que  $k \geq 3$ . No que segue, fazemos algumas afirmações a respeito de  $G$ .

**Afirmativa 2.4.7.**  $G$  é  $k$ -regular.

*Demonstração.* Suponha que existe  $v \in V(G)$  com  $d_G(v) < k$ , e defina  $H = G - v$ . Afiramos que  $\chi(H) \leq k$ .

Suponha primeiro que  $H$  é um ciclo ímpar ou grafo completo. Pela conexidade de  $G$ ,  $v$  tem algum vizinho  $w$  em  $V(H)$ . Logo,  $d_H(w) < k$ . Como  $H$  é regular, temos que  $\Delta(H) < k$  e, portanto,  $\chi(H) \leq k$  pela Proposição 2.4.4. Por outro lado, se  $H$  não for um ciclo ímpar nem um grafo completo, então pela minimalidade de  $G$  temos  $\chi(H) \leq k$ . Em ambos os casos, temos  $\chi(H) \leq k$ , como afirmado.

Seja  $c$  uma  $k$ -coloração de  $H$ , e note que

$$S := \{c(w) : w \in N_G(v)\} \neq [k],$$

pois  $d_G(v) < k$ . Podemos então definir uma  $k$ -coloração  $c'$  de  $G$  dada por  $c'(w) = c(w)$  para todo  $w \in V(H)$ , e escolhendo  $c'(v) \in [k] \setminus S$ . Isso é uma contradição, e, portanto,  $G$  é  $k$ -regular como afirmado.  $\square$

**Afirmativa 2.4.8.**  $G$  não possui vértice de corte.

*Demonstração.* Suponha que  $G$  possui um vértice de corte  $v$  e sejam  $H_1, \dots, H_s$  as componentes conexas de  $G - v$ . Para cada  $i = 1, \dots, s$ , tome

$$G_i = G[V(H_i) \cup \{v\}].$$

Como  $d_G(v) = k$ ,  $s \geq 2$  e  $v$  tem pelo menos um vizinho em  $V(H_i)$  para cada  $i \in [s]$ , obtemos que  $d_{G_i}(v) < k$  e, portanto,  $G_i$  não é nem um ciclo nem um grafo completo. Logo, pela minimalidade de  $G$ , temos  $\chi(G_i) \leq k$ .

Agora, para cada  $i \in [s]$ , seja  $c_i$  uma  $k$ -coloração de  $G_i$  tal que  $c_i(v) = 1$ , e defina uma  $k$ -coloração  $c$  de  $G$  dada por  $c(w) = c_i(w)$  para todo  $u \in V(H_i)$  e todo  $i \in [s]$ . Como  $v$  é o único vértice em mais de um  $H_i$ , fixando  $c_i(v) = 1$  para todo  $i \in [s]$ , a função  $c$  está bem definida. Como cada aresta de  $G$  está em um dos grafos  $H_i$ , a coloração  $c$  é de fato uma  $k$ -coloração de  $G$ . Isso contradiz nossa escolha de  $G$ , o que implica que  $G$  não possui vértice de corte, como afirmado.  $\square$

Para completar a prova, aplicaremos o Lema 2.4.6 a  $G$  e depois faremos uma coloração gulosa como esboçado anteriormente. Para fazê-lo, observe que  $G$  satisfaz as condições do lema:  $G$  é conexo, não é completo, e pelas Afirmativas 2.4.7 e 2.4.8, é  $k$ -regular para algum  $k \geq 3$ , não contendo vértices de corte. Logo, pelo Lema 2.4.6, existe caminho  $(u, v, w)$  em  $G$  tal que  $uw \notin E(G)$  e  $G - u - w$  é conexo.

Iremos definir uma  $k$ -coloração  $c: V(G) \rightarrow [k]$  de  $G$ . Pinte os vértices  $u$  e  $w$  com a cor 1, e os demais vértices de  $G$  gulosamente em ordem decrescente de  $\text{dist}_G(v, x)$ . Como cada vértice  $x \in V(G) \setminus \{v\}$  tem um vizinho mais perto de  $v$  que si próprio, obtemos que no máximo  $k - 1$  vizinhos de  $x$  são coloridos antes de  $x$ . Logo, há uma cor disponível para  $x$ . Finalmente, como  $u$  e  $w$  são ambos vizinhos de  $v$  e têm mesma cor, existe cor disponível para colorir  $v$ .

Assim, obtemos uma  $k$ -coloração de  $G$ , contradizendo nossa hipótese de que existia um contraexemplo, provando o teorema.  $\square$

## 2.5 Emparelhamentos

Um *emparelhamento*  $M$  em um grafo  $G$  é um conjunto de arestas de  $G$  disjuntas par a par. Em outras palavras, não há duas arestas de  $M$  incidentes a um mesmo vértice, de modo que um grafo com conjunto de arestas  $M$  tem grau máximo limitado superiormente por 1. Dizemos que um emparelhamento  $M$  *satura* um conjunto  $X \subseteq V(G)$  se cada vértice de  $X$  é incidente a uma aresta de  $M$ . Um emparelhamento em  $G$  é dito *perfeito* se satura  $V(G)$ .

### 2.5.1 Teorema de Hall

Quando um grafo  $G$  admite um emparelhamento perfeito? Iremos considerar tal problema em grafos bipartidos, caso em que ele é um pouco mais simples. Seja  $(X, Y)$  uma bipartição de  $G$ , de modo que  $X$  e  $Y$  são conjuntos independentes. Se  $G$  contém um emparelhamento perfeito  $M$ , então  $|X| = |Y|$ , pois cada aresta de  $G$  (e, portanto, de  $M$ ) tem um extremo em  $X$  e um em  $Y$ . Pelo mesmo motivo, precisamos ter

$$\left| \bigcup_{v \in S} N_G(v) \right| \geq |S|$$

para todo  $S \subseteq X$ . De fato, escreva  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ . Cada elemento de  $S$  corresponde a uma aresta distinta de  $M$ , e as extremidades dessas arestas que estão em  $Y$  formam  $|S|$  vértices distintos de  $N_G(S)$ .

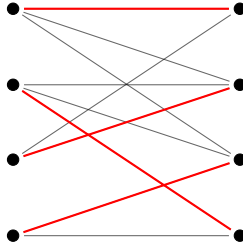


Figura 2.9: Um emparelhamento perfeito em um grafo.

O famoso Teorema de Hall, também conhecido como teorema do “casamento” de Hall, mostra que a condição claramente necessária, hoje conhecida como *condição de Hall*, é também suficiente.

**Teorema 2.5.1** (Hall, 1935). *Seja  $G$  um grafo bipartido com bipartição  $(X, Y)$ . O grafo  $G$  contém um emparelhamento que satura  $X$  se e somente se*

$$|N_G(S)| \geq |S|$$

para todo  $S \subseteq X$ .

Note que se  $|X| = |Y|$ , então um emparelhamento satura  $X$  se e somente se satura  $Y$  e, portanto, o Teorema de Hall fornece uma condição necessária e suficiente para que um grafo bipartido admita um emparelhamento perfeito.

*Demonstração do Teorema 2.5.1.* Primeiramente, como observamos, é verdade que se  $G$  contém um emparelhamento perfeito, então a condição de Hall é satisfeita. Vamos mostrar por indução em  $|X|$  que a condição de Hall é suficiente para a existência de um emparelhamento que cobre  $X$ . Dado que o resultado para  $|X| = 1$  segue da condição de Hall, assumimos que  $|X| = n \geq 2$ .

Suponha que o resultado é válido para todo grafo bipartido  $H$  com bipartição  $(A, B)$  em que  $|A| < |X|$ . Seja  $xy \in E(G)$  com  $x \in X$  e  $y \in Y$ , e considere o subgrafo  $H = G - x - y$ . Se  $|N_H(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X \setminus \{x\}$ , então pela hipótese de indução,  $H$  contém um emparelhamento  $M$  que cobre  $X \setminus \{x\}$ . Logo,  $M \cup \{xy\}$  é um emparelhamento de  $G$  que cobre  $X$ . Assim, podemos assumir que existe  $S \subseteq X \setminus \{x\}$  tal que  $|N_H(S)| \leq |S| - 1$ . Isso implica que  $|N_G(S)| \leq |N_H(S)| + 1 \leq |S|$ , e que  $S \neq \emptyset$ . Mas, pela condição de Hall em  $G$ , temos que  $|N_G(S)| \geq |S|$ . Logo,  $|N_G(S)| = |S|$ .

Considere o grafo  $G' = G[S \cup N_G(S)]$ . Afirmamos que  $G'$  satisfaz a condição de Hall. Com efeito, para todo  $T \subseteq S$ , temos  $|N_{G'}(T)| = |N_G(T)| \geq |T|$ , em



que a primeira igualdade decorre de  $N_G(T) \subseteq N_G(S)$ , e a segunda da hipótese da condição de Hall. Pela hipótese de indução,  $G'$  contém um emparelhamento  $M'$  que cobre  $S$ .

Seja  $G''$  o subgrafo de  $G$  induzido pelo conjunto  $(X \setminus S) \cup (Y \setminus N_G(S))$ . Afirmamos que  $G''$  também satisfaz a condição de Hall. De fato, para todo  $T \subseteq X \setminus S$ , temos  $|N_G(S \cup T)| \geq |S \cup T| = |S| + |T| = |N_G(S)| + |T|$ . Como  $N_G(S \cup T) = N_G(S) \cup N_{G''}(T)$ , temos que

$$|N_{G''}(T)| = |N_G(S \cup T)| - |N_G(S)| \geq |T|.$$

Pela hipótese de indução,  $G''$  contém um emparelhamento  $M''$  que cobre  $X \setminus S$ . Logo,  $M' \cup M''$  é um emparelhamento que cobre  $X$ , como queríamos.  $\square$

## 2.6 Ciclos Hamiltonianos

Um *ciclo hamiltoniano* em um grafo  $G$  é um ciclo que contém todos os vértices de  $G$ . Dizemos que  $G$  é *hamiltoniano* se  $G$  contém um ciclo hamiltoniano. O problema de decidir se um grafo é hamiltoniano é um problema computacionalmente difícil, de modo que é pouco provável que haja uma caracterização simples para esses grafos. Assim, nesta seção, apresentamos condições suficientes para que um grafo contenha um ciclo hamiltoniano.

Uma pergunta natural inicial é a seguinte: quão grande  $e(G)$  precisa ser para que  $G$  seja hamiltoniano? Ao pensarmos um pouco, no entanto, vemos que tal questão não é tão interessante assim, pois o grafo formado adicionando-se uma aresta ao grafo completo  $K_{n-1}$  não é hamiltoniano e tem quase  $\binom{n}{2}$  arestas (veja o Exercício 2.8.14).

Uma versão melhor da pergunta acima é a seguinte: O quão grande  $\delta(G)$  precisa ser para garantir que  $G$  é hamiltoniano? Claramente  $\delta(G) \geq 2$  para todo grafo hamiltoniano  $G$ , mas isso está longe de ser suficiente. De fato, o grafo formado pela união de dois subgrafos completos com  $(n+1)/2$  vértices que se intersectam em exatamente um vértice satisfaz  $\delta(G) = (n-1)/2$ , mas não possui ciclo hamiltoniano.

O seguinte teorema de Dirac mostra que o exemplo acima é extremal, no sentido de que qualquer grafo com grau mínimo maior que o do exemplo é necessariamente hamiltoniano.

**Teorema 2.6.1** (Teorema de Dirac, 1952). *Seja  $G$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices. Se  $\delta(G) \geq n/2$ , então  $G$  é hamiltoniano.*

A prova que daremos desse resultado usa uma técnica importante, chamada de *rotações de Pósa*, introduzida por Pósa em 1962. A ideia é a seguinte: tentamos encontrar um caminho maximal em  $P$  e obter um ciclo com a mesma quantidade de vértices de  $P$ . Se conseguirmos, então das duas uma: ou encontramos um ciclo hamiltoniano, ou existe uma aresta ligando um vértice do ciclo a um vértice de fora do ciclo, o que permitiria estender  $P$  a um caminho maior, uma contradição.

Para transformar um caminho  $P = (v_1, \dots, v_k)$  em  $G$  num ciclo, a ideia é encontrar  $i$  tal que  $v_1 v_{i+1}$  e  $v_i v_k$  sejam ambas arestas de  $G$ . Vamos mostrar que isso é sempre verdade sob a condição  $\delta(G) \geq n/2$ , usando o Princípio da Casa dos Pombos. Com isso, encontraremos um ciclo  $(v_1, \dots, v_i, v_k, \dots, v_{i+1}, v_1)$  como afirmado (veja a Figura 2.10).

*Demonstração do Teorema 2.6.1.* Seja  $G$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices e  $\delta(G) \geq n/2$ . Note que  $G$  é conexo; de fato, pelo Princípio da Casa dos Pombos, qualquer par de vértices que não é uma aresta em  $G$  tem um vizinho comum.

Seja  $P = (v_1, \dots, v_k)$  um caminho de comprimento máximo em  $G$ , o que implica que todos os vizinhos de  $v_1$  e  $v_k$  pertencem a  $P$ . Como  $d(v_1) + d(v_k) \geq n$ , deduz-se do Princípio da Casa dos Pombos que existe uma aresta  $v_i v_{i+1}$  de  $P$  tal que  $v_{i+1} \in N(v_1)$  e  $v_i \in N(v_k)$ . De fato, se  $E(G)$  contiver no máximo uma aresta de cada par do conjunto

$$\left\{ \{v_1 v_{i+1}, v_i v_k\} : i \in [k-1] \right\},$$

então temos  $d(v_1) + d(v_k) \leq k-1 < n$ . Logo, existe  $i$  com a propriedade acima. Se  $i \in \{1, k-1\}$ , então  $v_1 v_k \in E(G)$  e, portanto,  $(v_1, \dots, v_k, v_1)$  é um ciclo. Do contrário, se  $2 \leq i \leq k-2$ , então

$$C = (v_1, v_2, \dots, v_i, v_k, v_{k-1}, \dots, v_{i+1}, v_1)$$

é um ciclo que contém todos os vértices de  $P$ , como pode ser observado na Figura 2.10. Como  $G$  é conexo, se há um vértice em  $V(G)$  que não está em  $C$ , então existe uma aresta  $xv_j$  com  $x \notin V(C)$ , mas isso implica na existência de um caminho maior que  $P$  em  $G$ , uma contradição à maximalidade de  $P$ . Logo,  $G$  é hamiltoniano.  $\square$

Na verdade, a demonstração que fizemos prova um resultado mais forte, provado pela primeira vez por Ore.

**Teorema 2.6.2** (Ore, 1960). *Seja  $G$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices. Se para todo par de vértices não adjacentes  $\{u, v\}$  vale que  $d(u) + d(v) \geq n$ , então  $G$  é hamiltoniano.*

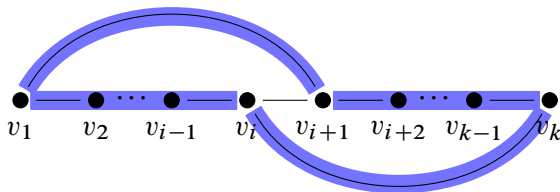


Figura 2.10: Ciclo  $C = (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, u)$ .

Pósa provou uma versão ainda mais forte do resultado acima. Deixamos a demonstração como um desafio.

**Teorema 2.6.3** (Pósa, 1962). *Seja  $G$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices e sejam  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  os graus dos vértices de  $G$ . Se  $d_k > k$  para todo  $k < n/2$ , então  $G$  é hamiltoniano.*

## 2.7 Trilhas Eulerianas

Voltemos agora para o início da Teoria dos Grafos, quando Euler resolveu o que hoje é conhecido como o Problema das Sete Pontes de Königsberg. Relembrando, havia na cidade duas ilhas que se conectavam entre si e com outras partes da cidade através de sete pontes, e os habitantes estavam interessados em decidir sobre a possibilidade de atravessar as sete pontes passando exatamente uma vez por cada ponte. Antes de mostrarmos um resultado que permite resolver esse problema, precisamos introduzir alguns conceitos.

Dado um grafo  $G$ , uma *trilha* de  $G$  é uma sequência de vértices  $(v_1, \dots, v_k)$  tal que  $v_i v_{i+1} \in E(G)$  para todo  $1 \leq i \leq k-1$  e todas essas arestas são distintas (pode haver repetição de vértices). Uma trilha é dita *fechada* se tem comprimento não nulo e um mesmo vértice é a origem e o término da trilha.

Em homenagem a Euler, uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo  $G$  é chamada de *trilha euleriana*. Um grafo  $G$  é dito *euleriano* se  $G$  contém uma trilha euleriana fechada. O seguinte resultado fornece uma condição necessária e suficiente para que um grafo conexo seja euleriano.

**Teorema 2.7.1.** *Um grafo conexo  $G$  é euleriano se e somente se todos os vértices de  $G$  têm grau par.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo que contém uma trilha Euleriana fechada  $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ , em que  $v_{k+1} = v_1$ . Para todo vértice interno  $v_i$  da trilha, as arestas  $v_{i-1}v_i$  e  $v_iv_{i+1}$  contribuem com duas unidades para o grau de  $v_i$ . Ademais, para  $v_1$ , que é o extremo inicial e final da trilha, as arestas  $v_1v_2$  e  $v_kv_1$  contribuem com duas unidades para o grau de  $v_1$ . Portanto, todo vértice de  $G$  tem grau par.

Agora suponha que todos os vértices de  $G$  têm grau par. Considere uma trilha  $T$  de  $G$  com a maior quantidade de arestas dentre todas as trilhas possíveis. Seja  $v_1$  o vértice inicial de  $T$ . Primeiramente vamos provar a seguinte afirmativa.

**Afirmativa 2.7.2.** *A trilha  $T$  é fechada.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $T = (v_1, \dots, v_k)$  termina em um vértice  $v_k \neq v_1$ . Assim, existe uma quantidade ímpar de arestas de  $T$  que incidem em  $v_k$ . Porém, como  $d(v_k)$  é par, existe pelo menos uma aresta  $v_kw$  incidente a  $v_k$  que não está em  $T$ . Assim, a trilha  $T' = (v_1, \dots, v_k, w)$  formada por  $T$  seguida do vértice  $w$  forma uma trilha com mais arestas que  $T$ , uma contradição com a escolha de  $T$ .  $\square$

Resta mostrar que a trilha  $T$  é Euleriana. Assuma por contradição que  $T$  não é Euleriana, i.e.,  $T$  não contém todas as arestas do grafo  $G$ . Seja  $T = (v_1, \dots, v_k, v_1)$ . Como  $G$  é conexo, existe uma aresta  $v_iw \in E(G)$  que não está em  $T$ . Mas perceba que a trilha

$$T' = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, w)$$

é uma trilha que contém todas as arestas de  $T$  e a aresta  $v_iw$ , uma contradição, uma vez que  $T$  tem a maior quantidade possível de arestas dentre todas as trilhas de  $G$ .  $\square$

## 2.8 Exercícios

**Exercício 2.8.1.** Mostre que um grafo e seu complemento não podem ser ambos desconexos.

**Exercício 2.8.2.** Mostre que se  $G$  é um grafo conexo, então ou  $G$  é completo ou existe caminho  $(x, y, z)$  de  $G$  com  $xz \notin E(G)$ .

**Exercício 2.8.3.** Mostre que  $e(G) \geq \binom{x(G)}{2}$ .

**Exercício 2.8.4.** Mostre que se  $G$  é um grafo com pelo menos  $v(G)$  arestas, então  $G$  possui um ciclo.

**Exercício 2.8.5.** Mostre que quaisquer dois caminhos mais longos de um grafo conexo possuem um vértice em comum.

**Exercício 2.8.6.** Mostre que  $v$  é um vértice de corte de uma árvore se e somente se não é uma folha.

**Exercício 2.8.7.** Prove que uma árvore  $T$  tem ao menos  $\Delta(T)$  folhas.

**Exercício 2.8.8.** Sejam  $T_1, \dots, T_k$  subárvores de uma árvore  $T$  tais que quaisquer duas possuem um vértice em comum. Mostre que existe um vértice comum a todas as  $T_i$ .

**Exercício 2.8.9.** Mostre que se  $G$  é bipartido, então  $G$  tem um emparelhamento com pelo menos  $e(G)/\Delta(G)$  arestas.

**Exercício 2.8.10.** Prove que se  $G$  é um grafo bipartido regular, com bipartição  $(X, Y)$ , então  $|X| = |Y|$ .

**Exercício 2.8.11.** Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Prove que todo grafo bipartido  $k$ -regular admite um emparelhamento perfeito.

**Exercício 2.8.12.** Seja  $G$  um grafo bipartido com bipartição  $(X, Y)$ . Prove que se para algum  $k \in \mathbb{N}$  vale que  $|N_G(S)| \geq |S| - k$  para todo  $S \subseteq X$ , então  $G$  contém um emparelhamento com  $|X| - k$  arestas.

**Exercício 2.8.13.** Mostre que todo grafo com  $n$  vértices e pelo menos  $\binom{n-1}{2} + 1$  arestas é conexo.

**Exercício 2.8.14.** Mostre que se  $G$  é um grafo com  $e(G) \geq \binom{n}{2} - n + 3$ , então  $G$  contém um ciclo hamiltoniano.

**Exercício 2.8.15.** Seja  $k \in \mathbb{N}$  e seja  $T$  uma árvore com  $k + 1$  vértices. Prove que se  $G$  é um grafo com  $\delta(G) \geq k$ , então  $T \subset G$ .

**Exercício 2.8.16.** Prove que se  $G$  é um grafo conexo, então  $G$  possui um caminho de comprimento

$$k = \min \{2\delta(G), n - 1\}.$$

# 3

## Teoria Extremal dos Grafos

---

Qual o maior número de arestas que podemos ter em um grafo com  $n$  vértices que evita alguma determinada estrutura? Essa é a pergunta central da Teoria Extremal dos Grafos, que iremos estudar neste capítulo. Por exemplo, como vimos no Capítulo 2, o maior número de arestas em um grafo acíclico com  $n$  vértices é  $n - 1$ , enquanto que se proibirmos apenas ciclos ímpares tal número é  $n^2/4$ . De fato, qualquer subgrafo acíclico maximal  $G$  é uma árvore e, portanto, tem  $n - 1$  arestas pela Proposição 2.2.7, enquanto que um grafo sem ciclos ímpares é bipartido pela Proposição 2.3.2, tendo assim no máximo  $n^2/4$  arestas. Neste capítulo, estudaremos o problema de proibir um único grafo  $H$ .

Dados grafos  $G$  e  $H$ , lembre-se do Capítulo 2 que  $H$  é um subgrafo de  $G$ , denotado por  $H \subset G$ , se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Geralmente, dizemos que  $G$  contém uma cópia de  $H$  se há um subgrafo  $H' \subset G$  isomorfo<sup>1</sup> a  $H$ . Enfatizamos que a distinção entre esses dois conceitos não é importante para nós, de modo que escreveremos também  $H \subset G$  para indicar que  $G$  contém uma cópia de  $H$ .

Dizemos que  $G$  é  $H$ -livre, livre de  $H$  ou sem  $H$  se  $G$  não contém uma cópia

---

<sup>1</sup>Dois grafos são isomorfos se existe uma bijeção  $\varphi: V(H) \rightarrow V(H')$  entre seus conjuntos de vértices tal que  $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H')$  se e somente se  $uv \in E(H)$ . Intuitivamente, isso significa que podemos mudar os rótulos dos vértices de  $H'$  para obter exatamente o grafo  $H$ .

de  $H$ . Por exemplo, todo grafo bipartido é  $K_3$ -livre (pelo Corolário 2.3.3), um grafo  $G$  tem grau máximo menor que  $d$  se e somente se é  $K_{1,d}$ -livre, e um grafo com  $n$  vértices é  $C_n$ -livre se e somente se não contém um ciclo hamiltoniano.

A Teoria Extremal dos Grafos busca calcular, para cada  $H$ , o maior número de arestas em um grafo  $H$ -livre com  $n$  vértices, que denotamos por  $\text{ex}(n, H)$ . Mais formalmente, definimos o *número extremal* de  $H$  por

$$\text{ex}(n, H) = \max \{e(G) : v(G) = n, G \text{ é } H\text{-livre}\}$$

Também estamos interessados em determinar a família de grafos que maximiza este número de arestas. Um grafo  $H$ -livre  $G$  com precisamente  $\text{ex}(n, H)$  arestas é dito  *$H$ -extremal*.

Primeiramente, vamos provar o Teorema de Mantel (1907), que determina o número extremal de  $K_3$  e também o (único, nesse caso) grafo extremal.

**Teorema 3.0.1** (Mantel, 1907). *Seja  $n \in \mathbb{N}$ , e seja  $G$  um grafo  $K_3$ -livre com  $n$  vértices. Então*

$$e(G) \leq \frac{n^2}{4}.$$

*Além disso,  $e(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$  se e somente se  $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ .*

*Demonstração.* A prova será por indução em  $n$ . Para  $n = 1$  e  $n = 2$ , o resultado vale trivialmente. Seja  $G$  um grafo  $K_3$ -livre com  $n \geq 3$  vértices, e suponha que o resultado vale para todo grafo com  $n - 2$  vértices.

Seja  $uv \in E(G)$ , e defina  $G' = G - u - v$ , o subgrafo de  $G$  induzido pelo conjunto  $V(G) \setminus \{u, v\}$ . Observe que  $G'$  é  $K_3$ -livre e, portanto, pela hipótese de indução,

$$e(G') \leq \frac{(n-2)^2}{4}.$$

Visto que  $G$  é  $K_3$ -livre, todo vértice  $w \in V(G')$  tem no máximo um vizinho no conjunto  $\{u, v\}$ , e portanto

$$e(G) \leq e(G') + n - 1 \leq \frac{(n-2)^2}{4} + n - 1 = \frac{n^2}{4}, \quad (3.1)$$

concluindo a primeira parte do teorema.

Quando  $n$  é par,  $e(G) = n^2/4$  ocorre se e somente se as duas desigualdades em (3.1) são justas (são igualdades), o que implica que cada vértice de  $G'$  é adjacente a exatamente um vértice de  $\{u, v\}$  e, pela hipótese de indução,  $G' = K_{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1}$ . Portanto,  $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ , como desejado. O caso em que  $n$  é ímpar é análogo.  $\square$

O grafo  $K_3$  é chamado de *triângulo*, e grafos  $K_3$ -livres são frequentemente chamados de *livres de triângulos*. Note que o Teorema de Mantel determina o número extremal do triângulo, isto é, o número máximo de arestas de um grafo livre de triângulos.

**Corolário 3.0.2.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\text{ex}(n, K_3) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Há muitos outros modos de provar o Teorema de Mantel. Encorajamos o(a) leitor(a) a tentar encontrar sua própria prova do resultado!

### 3.1 Teorema de Turán

Nesta seção, apresentamos o Teorema de Turán (1941), que generaliza o Teorema de Mantel para grafos livres de  $K_{k+1}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Para enunciar o resultado, precisaremos definir o (único, novamente) grafo extremal, conhecido como grafo de Turán. Para tal, observe que  $K_{k+1}$  não está contido em nenhum grafo com  $\chi(G) \leq k$ . Com efeito, tais grafos  $G$ , que são chamados de *k-partidos*, admitem uma partição

$$V(G) = A_1 \cup \dots \cup A_k$$

dos seus vértices tal que  $A_i$  é um conjunto independente em  $G$  para cada  $i \in [k]$ .

Se há  $K_{k+1} \subset G$ , então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, há dois vértices do  $K_{k+1}$  em um dos conjuntos  $A_i$ , uma contradição, pois não há arestas em  $A_i$ .

Dizemos que um grafo  $G$  é *k-partido completo* se é *k-partido* com partes  $A_1, \dots, A_k$  e

$$E(G) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} \{uv : u \in A_i, v \in A_j\},$$

isto é, se  $G$  contém todas as arestas entre vértices de partes diferentes da partição.

O *grafo de Turán*  $T_k(n)$  é o grafo *k-partido completo* com o maior número de arestas possível. Escrevemos  $t_k(n)$  para denotar o número de arestas de  $T_k(n)$ .

Se  $n$  é múltiplo de  $k$ , todas as partes do grafo de Turán tem exatamente  $n/k$  arestas<sup>2</sup>, portanto

$$t_k(n) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2},$$

---

<sup>2</sup>Do contrário, mover um vértice da maior parte para a menor parte nos permitiria construir outro grafo *k-partido* com mais arestas.



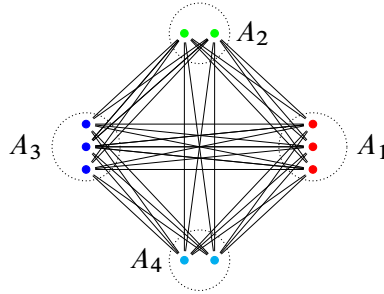


Figura 3.1: Uma representação do grafo  $T_4(10)$ .

como pode ser visto pelo lema dos apertos de mão (Lema 1.2.4). No caso geral, todas as partes do grafo de Turán têm tamanho  $\lfloor n/k \rfloor$  ou  $\lceil n/k \rceil$  e, portanto,  $t_k(n)$  é aproximadamente  $(1 - 1/k)(n^2/2)$  (veja o Exercício 3.5.1 para uma versão precisa de tal afirmação). Note em particular que  $t_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil = \text{ex}(n, K_3)$ .

O Teorema de Turán afirma que o grafo de Turán  $T_k(n)$  é o único grafo extremal  $K_{k+1}$ -livre com  $n$  vértices.

**Teorema 3.1.1** (Turán, 1941). *Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$  e seja  $G$  um grafo  $K_{k+1}$ -livre com  $n$  vértices. Então*

$$e(G) \leq t_k(n).$$

*Além disso,  $e(G) = t_k(n)$  se e somente se  $G = T_k(n)$ .*

Iremos dar duas demonstrações para o Teorema 3.1.1. A primeira é uma generalização da prova do Teorema 3.0.1 que vimos anteriormente.

*Demonstração.* Usaremos indução em  $n$ . Para  $n \leq k$ , o resultado é verdadeiro, pois todo grafo com  $n$  vértices é  $K_{k+1}$ -livre e  $T_k(n)$  é  $K_n$ , o grafo completo com  $n$  vértices. Assim, seja  $G$  um grafo  $K_{k+1}$ -livre maximal (isto é, tal que a adição de qualquer aresta em  $G$  criaria uma cópia de  $K_{k+1}$ ), e suponha que o resultado é verdadeiro para grafos com  $n - k$  vértices.

Seja  $A$  uma clique de tamanho  $k$  em  $G$ , que existe pela maximalidade de  $G$ , e seja  $G'$  o subgrafo de  $G$  induzido pelo conjunto  $V(G) \setminus A$ . Note que  $G'$  é  $K_{k+1}$ -livre e tem  $n - k$  vértices e, portanto, pela hipótese de indução,

$$e(G') \leq t_k(n - k).$$

Além disso, como  $G$  é  $K_{k+1}$ -livre, todo vértice  $w \in V(G')$  tem no máximo  $k - 1$  vizinhos no conjunto  $A$ , e portanto

$$e(G) \leq e(G') + (n - k)(k - 1) + \binom{k}{2}.$$

Afirmamos que

$$t_k(n) = t_k(n - k) + (n - k)(k - 1) + \binom{k}{2}, \quad (3.2)$$

o que implicará  $e(G) \leq t_k(n)$ . Verificar (3.2) manualmente é uma tarefa entediante, mas felizmente há um modo simples de deduzi-la. O grafo  $k$ -partido completo obtido adicionando-se um vértice a cada parte de  $T_k(n - k)$  é exatamente o grafo  $T_k(n)$ . Nesse grafo, cada vértice de  $T_k(n - k)$  é adjacente a exatamente  $k - 1$  dos vértices adicionados, de onde decorre (3.2).

Combinando as três igualdades acima, temos

$$e(G) \leq t_k(n - k) + (n - k)(k - 1) + \binom{k}{2} = t_k(n),$$

como gostaríamos. Se  $e(G) = t_k(n)$ , todas as desigualdades são justas. Assim, cada vértice de  $G'$  é adjacente a  $k - 1$  vértices de  $A$ , e a hipótese de indução permite concluir que  $G' = T_k(n - k)$ . Concluimos que  $G = T_k(n)$ , como afirmado.  $\square$

A segunda prova que veremos prova o seguinte fortalecimento do Teorema de Turán.

**Teorema 3.1.2 (Erdős).** *Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$ , e seja  $G$  um grafo  $K_{k+1}$ -livre com  $n$  vértices. Então existe um grafo  $k$ -partido  $H$  com  $V(H) = V(G)$  e*

$$d_H(v) \geq d_G(v)$$

para todo  $v \in V(G)$ .

Note que a conclusão do Teorema 3.1.2 implica que  $e(G) \leq t_k(n)$ , pois  $T_k(n)$  é o grafo  $k$ -partido com o maior número de arestas possível. Ressaltamos também que se pode deduzir da prova a seguir que  $T_k(n)$  é o único grafo  $K_{k+1}$ -extremal, mas deixaremos os detalhes a cargo do(a) leitor(a).

A prova usa um procedimento conhecido como *simetrização de Zykov*. Em linhas gerais, a ideia é que se  $uv \notin E(G)$  e  $d_G(u) \geq d_G(v)$ , então apagar as arestas incidentes a  $v$  e conectar  $v$  aos vizinhos de  $u$  não cria um  $K_{k+1}$ , e não diminui o número de arestas incidentes a nenhum vértice.

*Demonstração do Teorema 3.1.2.* Usaremos indução em  $k$ . O teorema é trivialmente verdadeiro se  $k = 1$ , pois um grafo sem  $K_2$  é vazio. Seja  $k \geq 2$  e suponha que o resultado vale para  $k - 1$ . Seja  $G$  um grafo  $K_{k+1}$ -livre com  $n$  vértices, e seja  $u \in V(G)$  um vértice de grau máximo.

Note que  $N_G(u)$  induz um subgrafo  $K_k$ -livre  $G' \subset G$ , e que

$$d_G(v) \leq d_{G'}(v) + |A|$$

para todo  $v \in V(G')$ , em que  $A = V(G) \setminus N(u)$ . Pela hipótese de indução, existe um grafo  $(k - 1)$ -partido  $H'$ , com  $V(H') = V(G')$ , tal que  $d_{H'}(v) \geq d_{G'}(v)$ , e então

$$d_G(v) \leq d_{H'}(v) + |A|,$$

para todo  $v \in V(G')$ .

Agora, seja  $H$  o grafo obtido de  $H'$  pela adição dos vértices em  $A$  e pela adição de todas as arestas que ligam vértices em  $A$  a vértices em  $V(H')$ . Como  $H'$  é  $(k - 1)$ -partido, o grafo  $H$  é  $k$ -partido. Como  $u$  é um vértice com grau máximo em  $G$ , então

$$d_H(v) = \Delta(G) \geq d_G(v)$$

para todo  $v \in A$ . Além disso,

$$d_H(v) = d_{H'}(v) + |A| \geq d_G(v)$$

para todo  $v \in V(G')$ , como afirmado. □

Veremos uma terceira prova do Teorema de Turán no Capítulo 5.

## 3.2 Números extremais de grafos bipartidos

Até então, estudamos o problema extremal apenas para uma família muito particular de grafos, os grafos completos. Iremos agora considerar grafos mais gerais. Em particular, iremos considerar a seguinte questão.

Para quais grafos  $H$  existe  $c = c(H)$  tal que  $\text{ex}(n, H) \geq cn^2$  para todo  $n \geq 2$ ?

Todos os grafos de Turán  $T_k(n)$  têm pelo menos  $n^2/4$  arestas, de modo que tal família inclui todos os  $K_{k+1}$  com  $k \geq 2$ . Mais geralmente, o limitante inferior

$$\text{ex}(n, H) \geq \frac{n^2}{4}$$

vale para todo grafo não bipartido  $H$ , pois se  $\chi(H) \geq 3$  então nenhum grafo bipartido completo contém  $H$  como subgrafo. Assim, somos naturalmente levados a estudar os números extremais de grafos bipartidos.

Um dos grafos bipartidos ‘interessantes’ mais simples é  $C_4$ , o ciclo de comprimento 4. O seguinte limitante superior foi provado por Erdős (1938).

**Teorema 3.2.1** (Erdős (ibid.)). *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$\text{ex}(n, C_4) \leq n^{3/2}.$$

*Demonstração.* A ideia para provar esse resultado é contar cerejas, onde uma *cereja* nada mais é que um caminho  $(u, v, w)$  de comprimento 2 em  $G$ . Em particular, dizemos que o vértice  $v$  é o *centro* da cereja  $(u, v, w)$  e  $u$  e  $w$  são as *folhas* de  $(u, v, w)$ .

Seja  $G$  um grafo  $C_4$ -livre. O número de cerejas centradas em  $v$  é precisamente  $\binom{d_G(v)}{2}$ . Assim, o número total de cerejas em  $G$  é

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}.$$

O somatório é minimizado no caso em que todos os graus são iguais (Exercício 1.5.13). Usando o Lema 2.1.1, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \geq n \cdot \binom{2e(G)/n}{2} \geq \frac{e(G)^2}{n}$$

Agora observe que dado um par  $\{u, w\}$ , se  $u$  e  $w$  são as duas folhas de duas cerejas distintas, então  $G$  possui um  $C_4$ . Portanto, como  $G$  é  $C_4$ -livre, o número total de cerejas é no máximo  $\binom{n}{2}$ . Assim, obtemos

$$\frac{e(G)^2}{n} \leq \binom{n}{2},$$

e, consequentemente  $e(G) \leq n^{3/2}$ , como queríamos. □

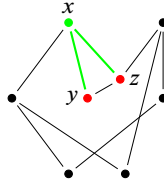


Figura 3.2: Uma cópia de uma cereja em um grafo.

Note que  $C_4 = K_{2,2}$ , o grafo bipartido completo com dois vértices em cada parte. Kővári, T. Sós e Turán (1954) generalizaram o Teorema 3.2.1 para um grafo bipartido completo arbitrário. A demonstração é quase a mesma, exceto que desta vez contaremos um tipo diferente de cereja.

**Teorema 3.2.2** (Kővári, T. Sós e Turán (ibid.)). *Sejam  $s, t \in \mathbb{N}$  com  $s \leq t$ . Existe  $C = C(s, t) > 0$  tal que*

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq Cn^{2-1/s}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo  $K_{s,t}$ -livre com  $n$  vértices; iremos contar  $s$ -cerezjas, isto é, cópias de  $K_{1,s}$  em  $G$ .

Primeiramente, observe que o número de cópias de  $K_{1,s}$  centradas em  $v$  é precisamente  $\binom{d_G(v)}{s}$ . Assim, o número total de  $s$ -cerezjas em  $G$  é

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s}.$$

A função  $\binom{x}{s}$  é convexa para  $x \geq s - 1$  e, portanto, a soma acima é minimizada quando todos os graus são iguais<sup>3</sup>. Usando o Lema 2.1.1, decorre que

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \geq n \cdot \binom{2e(G)/n}{s} \geq n \cdot \left( \frac{2e(G)}{sn} \right)^s.$$

Agora observe que dado um conjunto  $S \subseteq V(G)$  com  $|S| = s$ , se  $S$  é o conjunto de folhas de  $t$  cópias distintas de  $K_{1,s}$ , então  $K_{s,t} \subset G$ . Portanto, como

<sup>3</sup>Veremos uma prova disso no Teorema 5.3.12.

$G$  é  $K_{s,t}$ -livre, o número total de  $s$ -cerejas é no máximo

$$(t-1) \binom{n}{s}.$$

Assim, obtemos

$$n \cdot \left( \frac{2e(G)}{sn} \right)^s \leq (t-1) \binom{n}{s}.$$

Consequentemente, temos  $e(G) \leq Cn^{2-1/s}$  para algum  $C = C(s, t)$ , como queríamos.  $\square$

Mostramos que  $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$  quando  $n \rightarrow \infty$  (isto é,  $\text{ex}(n, H)/n^2 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ) sempre que  $H$  é um grafo bipartido completo. Apesar de a primeira vista parecer demasiadamente específico, tal resultado é suficiente para responder a pergunta do início da seção.

**Corolário 3.2.3.** *Seja  $H$  um grafo. Então  $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$  se e somente se  $H$  é bipartido.*

*Demonstração.* Já observamos que  $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$  para todo grafo não bipartido, pois  $H$  não está contido em nenhum grafo bipartido completo. Por outro lado, se  $H$  for bipartido com  $t$  vértices, então  $H \subset K_{t,t}$  e, portanto, pelo Teorema 3.2.2, existe  $C > 0$  com<sup>4</sup>

$$\text{ex}(n, H) \leq \text{ex}(n, K_{t,t}) \leq Cn^{2-1/t},$$

de modo que  $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$  quando  $n \rightarrow \infty$ , como gostaríamos.  $\square$

É extremamente difícil determinar a taxa de crescimento de  $\text{ex}(n, H)$  quando  $H$  é bipartido: a resposta não é conhecida nem no caso  $H = C_8$ ! Iremos discutir tal questão mais a fundo no Capítulo 8.

---

<sup>4</sup>Observe que se  $H$  e  $H'$  são grafos tais que  $H \subset H'$ , então todo grafo  $G$  que é  $H$ -livre é também  $H'$ -livre. Logo, se  $\mathcal{F}_n(H)$  denota o conjunto dos grafos com  $n$  vértices que são  $H$ -livres, temos que  $\mathcal{F}_n(H) \subseteq \mathcal{F}_n(H')$ . Isso implica que  $\text{ex}(n, H) \leq \text{ex}(n, H')$ .

### 3.2.1 Números extremais de árvores

Tendo determinado para quais grafos o número  $\text{ex}(n, H)$  é quadrático (a maior taxa de crescimento possível), uma pergunta natural é: o quão pequeno  $\text{ex}(n, H)$  pode ser? Se  $e(H) \leq 1$ , então temos  $\text{ex}(n, H) = 0$  para todo  $n \geq v(H)$ , mas se  $e(H) \geq 2$ , então

$$\text{ex}(n, H) \geq \frac{n-1}{2},$$

pois um emparelhamento não contém um caminho de comprimento 2 e um emparelhamento com duas arestas não está contido numa estrela. Isso motiva a seguinte pergunta:

Para quais grafos  $H$  existe  $C > 0$  tal que  $\text{ex}(n, H) \leq Cn$ ?

Não iremos conseguir resolver tal questão completamente nesta seção; a resposta completa terá que esperar até que desenvolvamos ferramentas probabilísticas no Capítulo 5 e, portanto, será apresentada apenas no Capítulo 6. No entanto, iremos provar o seguinte teorema, que fornece uma grande família de grafos com números extremais lineares.

**Teorema 3.2.4.** *Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$ , e seja  $T$  uma árvore com  $k + 1$  vértices. Então*

$$\text{ex}(n, T) \leq (k-1)n.$$

O passo chave para provar o Teorema 3.2.4 é o seguinte lema.

**Lema 3.2.5.** *Seja  $k \in \mathbb{N}$  e seja  $T$  uma árvore com  $k + 1$  vértices. Se  $G$  é um grafo com  $\delta(G) \geq k$ , então  $T \subset G$ .*

*Demonstração.* A prova será por indução em  $k$ . Se  $k = 1$ , então  $T$  é necessariamente um caminho de comprimento 1 e, portanto,  $T$  está contida em todo grafo com pelo menos uma aresta, como desejado. Seja  $T$  uma árvore com  $k + 1 \geq 3$  vértices, seja  $G$  um grafo com  $\delta(G) \geq k$ , e suponha que o lema é verdadeiro para  $k - 1$ .

Primeiramente, como  $T$  é uma árvore com pelo menos dois vértices, ela contém uma folha pelo Lema 2.2.5. Pelo Lema 2.2.6,  $T' = T - x$  é uma árvore com  $k$  vértices. Assim, pela hipótese de indução,  $T' \subset G$ . Mais precisamente, existe uma função injetiva  $\varphi: V(T') \rightarrow V(G)$  tal que para todo  $ab \in E(T')$  vale que  $\varphi(a)\varphi(b) \in E(G)$ .

Agora, seja  $y$  o único vizinho de  $x$  na árvore  $T$ , e seja  $u = \varphi(y) \in V(G)$ . Como  $d_G(u) \geq \delta(G) \geq k$ , decorre que  $u$  tem um vizinho  $v$  em  $G$  que não está na

imagem de  $\varphi$ . Como  $xy$  é a única aresta de  $T$  que não está em  $T'$ , obtemos uma cópia de  $T$  em  $G$  se estendermos  $\varphi$  mapeando  $x$  a  $v$ , como queríamos.  $\square$

Lembre-se do Lema 2.2.12 que todo grafo  $G$  contém um subgrafo de grau mínimo pelo menos metade do grau médio de  $G$ . Usaremos esse fato, juntamente com o Lema 3.2.5, para cotar  $\text{ex}(n, T)$ .

*Demonstração do Teorema 3.2.4.* Suponha, por contradição, que existe um grafo  $G$  com  $e(G) > (k - 1)n$  que é  $T$ -livre. Pelo Lema 2.2.12, existe  $H \subset G$  com

$$\delta(H) > \frac{e(G)}{v(G)} = k - 1,$$

e portanto  $\delta(H) \geq k$ , visto que  $\delta(H)$  é um inteiro. Pelo Lema 3.2.5, temos que  $T \subset H \subset G$ , como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

Não se espera que o limitante da Teorema 3.2.4 seja justo para qualquer árvore  $T$ . Pelo contrário, Erdős e T. Sós conjecturaram em 1963 (ver (Erdős 1964)) que o limitante fornecido pelo Teorema 3.2.4 pode ser melhorado por um fator de 2.

**Conjectura 3.2.6** (Erdős–Sós, 1963). *Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$ , e seja  $T$  uma árvore com  $k + 1$  vértices. Então*

$$\text{ex}(n, T) \leq \frac{(k - 1)n}{2}.$$

Se verdadeiro, tal resultado seria justo para toda árvore  $T$ , pois se  $n$  é múltiplo de  $k$  e  $G$  é uma união de cópias disjuntas de  $K_k$ , então  $e(G) = (k - 1)n/2$  e  $G$  não contém nenhuma árvore com  $k + 1$  vértices.

Na década de 90, Ajtai, Komlós, Simonovits e Szemerédi anunciaram a solução da Conjectura 3.2.6 para  $k$  suficientemente grande. No entanto, mais de 30 anos depois, a prova ainda não foi publicada.

Neste ponto, temos somente ferramentas disponíveis para provar a Conjectura 3.2.6 para caminhos. Seja  $P_k$  o caminho com  $k$  arestas (portanto  $k + 1$  vértices). Erdős e Gallai (1959) provaram o teorema abaixo.

**Teorema 3.2.7** (Erdős e Gallai (ibid.)). *Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$ . Então*

$$\text{ex}(n, P_k) = \frac{(k - 1)n}{2},$$

Iremos precisar do seguinte lema, cuja prova faz uso de um método conhecido como *método da rotação-extensão de Pósa*, que tem muitas outras aplicações em Teoria dos Grafos.



**Lema 3.2.8.** *Todo grafo conexo com  $n$  vértices contém um caminho de comprimento*

$$k = \min \{2\delta(G), n - 1\}.$$

*Demonstração.* Seja  $P = (v_0, \dots, v_\ell)$  um caminho de comprimento máximo em  $G$ , e note que  $N_G(v_0)$  e  $N_G(v_\ell)$  estão ambos contidos em  $V(P)$ . Afirmamos que se  $\ell < k \leq 2\delta(G)$ , então existe um ciclo em  $G$  com o mesmo conjunto de vértices que  $P$ . Para ver isso, basta encontrar alguma aresta  $v_{i-1}v_i \in P$  tal que  $v_0$  é adjacente a  $v_i$  e  $v_{i-1}$  é adjacente a  $v_\ell$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, temos

$$\{v_0v_i, v_{i-1}v_\ell\} \subset E(G)$$

para algum  $i \in [\ell]$ , pois caso contrário teríamos

$$2\delta(G) \leq d_G(v_0) + d_G(v_\ell) \leq \ell < 2\delta(G),$$

um absurdo. Assim,

$$C = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_\ell, v_{\ell-1}, \dots, v_i, v_0)$$

é um ciclo que contém todos os vértices de  $P$ .

Como  $G$  é conexo, se há vértice em  $V(G)$  que não está em  $C$ , então existe aresta entre  $C$  e  $V(G) \setminus C$ . Isso leva à existência de um caminho maior que  $P$  em  $G$ , uma contradição com a maximalidade de  $P$ .  $\square$

Podemos agora determinar o número extremal de caminhos.

*Demonstração do Teorema 3.2.7.* A prova segue por indução em  $n$ . Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices livre de  $P_k$ . Se  $n \leq k$ , então

$$e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(k-1)}{2},$$

como gostaríamos de demonstrar. Assim, assuma que  $n \geq k + 1$  e suponha que o resultado é válido para grafos com menos que  $n$  vértices.

Primeiramente, suponha que  $G$  não é conexo, e sejam  $G_1, \dots, G_r$  as componentes de  $G$ . Como  $G$  é  $P_k$ -livre, então  $G_i$  é  $P_k$ -livre para todo  $i \in [r]$ . Então, pela hipótese de indução temos que

$$e(G) = \sum_{i=1}^r e(G_i) \leq \frac{(k-1)}{2} \sum_{i=1}^r v(G_i) = \frac{(k-1)}{2} n. \quad (3.3)$$

Como  $n \geq k + 1$ , decorre do Lema 3.2.8 que se  $\delta(G) \geq k/2$ , então  $P_k \subset G$ . Por outro lado, se  $\delta(G) < k/2$ , então existe um vértice  $u \in V(G)$  de grau no máximo  $(k - 1)/2$ . Seja  $G' = G - u$  e note que  $G'$  é  $P_k$ -livre. Pela hipótese de indução, temos

$$e(G) \leq e(G') + \frac{(k - 1)}{2} \leq \frac{(k - 1)n}{2},$$

como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

Vale ressaltar que a prova do Teorema 3.2.7 pode ser adaptada para mostrar que o único grafo  $P_k$ -extremal é formado por cópias disjuntas de  $K_k$ . Deixamos os detalhes a cargo do(a) leitor(a).

### 3.3 Supersaturação e Estabilidade

Uma vez que sabemos o número extremal de um grafo  $H$  (por exemplo, um grafo completo), surgem duas outras perguntas:

- (a) O que podemos dizer sobre a estrutura de grafos  $H$ -livres com  $\text{ex}(n, H) - t$  arestas?
- (b) Quantas cópias de  $H$  existem em um grafo com  $\text{ex}(n, H) + t$  arestas?

Nesta seção, veremos a resposta para essas perguntas no caso de grafos completos.

Respostas para a pergunta (a) são conhecidas como *teoremas de estabilidade*. Grosso modo, elas dizem que se  $t$  não é muito grande, então  $G$  é “similar” a um dos grafos  $H$ -extremais. Resultados desse tipo remontam ao trabalho de Erdős e Simonovits (ver (Simonovits 1968)). Por exemplo, quando  $H = K_3$ , provaremos o seguinte teorema de estabilidade.

**Teorema 3.3.1.** *Sejam  $n, t \in \mathbb{N}$  e seja  $G$  um grafo livre de triângulos com  $n$  vértices. Se*

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t,$$

*então  $G$  contém um subgrafo bipartido com pelo menos  $e(G) - t$  arestas.*

Respostas para a pergunta (b) são conhecidas como *teoremas de supersaturação*. Esses resultados são ainda mais antigos que resultados de estabilidade, tendo suas origens num resultado (não publicado) de Rademacher, que provou em 1941 que se  $e(G) > n^2/4$ , então  $G$  contém  $\lfloor n/2 \rfloor$  triângulos (veja o Exercício 3.5.5). Tal resultado foi posteriormente generalizado por Erdős e muitos outros autores. No caso  $H = K_3$ , iremos provar o seguinte teorema de supersaturação.

**Teorema 3.3.2.** *Sejam  $n, t \in \mathbb{N}$  e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Se*

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t,$$

*então  $G$  contém pelo menos  $tn/3$  triângulos.*

Note que o Teorema 3.3.2 não está muito longe de ser ótimo, pois se adicionamos  $t$  arestas ao grafo de Turán  $T_2(n)$ , obtemos um grafo com cerca de  $tn/2$  triângulos.

Ambos os teoremas acima são corolários do seguinte limitante decorrente de um resultado de Füredi (2015). Dizemos que  $G$  é  $t$ -longe de ser bipartido se  $e(G') \leq e(G) - t$  para todo subgrafo bipartido  $G'$  de  $G$  (isto é, se precisamos remover pelo menos  $t$  arestas de  $G$  para obter um grafo bipartido). Por outro lado, dizemos que  $G$  é  $t$ -próximo de ser bipartido se existe subgrafo gerador bipartido  $G' \subset G$  com  $e(G') \geq e(G) - t$ .

**Teorema 3.3.3.** *Sejam  $n, t \in \mathbb{N}$ , e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Se  $G$  é  $t$ -longe de ser bipartido, então há pelo menos*

$$\frac{n}{6} \left( e(G) + t - \frac{n^2}{4} \right)$$

*triângulos em  $G$ .*

*Demonstração.* Para cada vértice  $u \in V(G)$ , defina  $B_u = N_G(u)$  e  $A_u = V(G) \setminus B_u$ . Primeiramente, observe que

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u), \quad (3.4)$$

em que  $k_3(G)$  denota o número de triângulos em  $G$  (e  $e(B_u)$  denota  $e(G[B_u])$ ). Com efeito, toda aresta dentro de  $B_u$  forma um triângulo com o vértice  $u$ , e cada triângulo é contado uma vez para cada um de seus três vértices.

Em seguida, observe que

$$e(A_u) + e(B_u) \geq t \quad (3.5)$$

para cada  $u \in V(G)$ , pois caso contrário poderíamos obter um subgrafo bipartido de  $G$  removendo menos de  $t$  arestas, contradizendo o fato de  $G$  ser  $t$ -longe de ser bipartido.

Finalmente, observe que

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = 2e(A_u) + e(A_u, B_u), \quad (3.6)$$

em que  $e(A_u, B_u)$  denota o número de arestas com uma extremidade em  $A_u$  e a outra em  $B_u$ . Isso é verdadeiro, pois cada aresta inteiramente contida em  $A_u$  é contada duas vezes no somatório, e cada aresta entre  $A_u$  e  $B_u$  é contada uma vez.

Iremos agora combinar as simples observações (3.4), (3.5) e (3.6). Para fazê-lo note que, como  $e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u)$ , temos por (3.6) que

$$e(B_u) \geq e(G) + e(A_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v).$$

Usando (3.5), decorre que

$$2 \cdot e(B_u) \geq e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d_G(v),$$

e, portanto, usando (3.4), obtemos

$$k_3(G) \geq \frac{1}{6} \sum_{u \in V(G)} \left( e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d_G(v) \right). \quad (3.7)$$

Para completar a demonstração, observe que, contando o número de triplas  $(u, v, w)$  tais que  $uv \notin E(G)$  (o que também ocorre se  $u = v$ ) e  $vw \in E(G)$  de dois modos diferentes,

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v)(n - d_G(v)) \geq \frac{n^3}{4}, \quad (3.8)$$

em que a última desigualdade decorre da função  $x(n - x)$  ser maximizada em  $x = n/2$ . O resultado segue de (3.7) e (3.8).  $\square$

Vejam rapidamente que o Teorema 3.3.3 de fato implica os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2.

*Demonstração do Teorema 3.3.1.* Pelo Teorema 3.3.3, se  $G$  está  $(t + 1)$ -longe de ser bipartido e  $e(G) \geq n^2/4 - t$ , então  $G$  contém pelo menos

$$\frac{n}{6} \left( e(G) + t + 1 - \frac{n^2}{4} \right) > 0$$

triângulos. Logo, se  $G$  é livre de triângulos e  $e(G) \geq n^2/4 - t$ , então  $G$  está  $t$ -próximo de ser bipartido e, portanto, contém um subgrafo bipartido  $G' \subset G$  com  $e(G') \geq e(G) - t$ , como gostaríamos  $\square$

*Demonstração do Teorema 3.3.2.* Se  $e(G) \geq n^2/4 + t$ , então  $G$  está  $t$ -longe de ser bipartido pelo Teorema de Mantel (Teorema 3.0.1). Pelo Teorema 3.3.3, concluimos que  $G$  contém pelo menos

$$\frac{n}{6} \left( e(G) + t - \frac{n^2}{4} \right) \geq \frac{tn}{3}$$

triângulos, como afirmado.  $\square$

Ideias similares podem ser aplicadas para grafos completos maiores. Apesar de resultados de estabilidade mais fracos serem conhecidos há décadas, o seguinte teorema de estabilidade foi provado apenas recentemente por Füredi (2015).

**Teorema 3.3.4.** *Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $t \geq 0$ , e seja  $G$  um grafo  $K_{k+1}$ -livre com  $n$  vértices. Se*

$$e(G) \geq t_k(n) - t,$$

*então  $G$  contém um subgrafo gerador  $k$ -partido com pelo menos  $e(G) - t$  arestas.*

*Demonstração.* A prova será por indução em  $k$ . O teorema é trivialmente verdade para  $k = 1$ , pois nesse caso  $e(G) = 0$ . Seja  $k \geq 2$ , suponha que o resultado vale para  $k - 1$ , e seja  $G$  um grafo  $K_{k+1}$ -livre com  $n$  vértices tal que

$$e(G) \geq t_k(n) - t.$$

Defina  $d = \Delta(G)$ , e seja  $u \in V(G)$  um vértice de grau  $d$ . Defina também  $B = N_G(u)$  e  $G' = G[B]$ . Note que  $G'$  é  $K_k$ -livre, pois  $G$  é  $K_{k+1}$ -livre. Pelo Teorema de Turán (Teorema 3.1.1), concluimos que  $e(G') \leq t_{k-1}(d)$  e definindo

$$t' = t_{k-1}(d) - e(G'),$$

temos que  $t' \geq 0$ . Decorre da hipótese de indução que existe  $H' \subset G'$  com

$$e(H') \geq e(G') - t',$$

tal que  $H'$  é  $(k - 1)$ -partido. Iremos mostrar que o grafo  $k$ -partido  $H \subset G$  obtido através da adição a  $H'$ , de todas as arestas de  $G$  entre  $B$  e  $A := V(G) \setminus B$ , tem pelo menos  $e(G) - t$  arestas.

Para fazê-lo, precisamos cotar o número de arestas contidas em  $A$ . A observação chave (já vista na demonstração do Teorema 3.3.3) é que

$$\sum_{v \in A} d(v) = 2e(A) + e(A, B),$$

em que  $e(A, B)$  denota o número de arestas com uma extremidade em  $A$  e a outra em  $B$ .

Como  $d = \Delta(G)$  e  $e(G) = e(A) + e(A, B) + e(G')$ , temos

$$d(n - d) \geq \sum_{v \in A} d(v) = e(G) + e(A) - e(G'). \quad (3.9)$$

Agora, observe que

$$t_k(n) \geq t_{k-1}(d) + d(n - d), \quad (3.10)$$

pois existe um grafo  $k$ -partido com quantidade de arestas igual ao lado direito de (3.10). Assim, lembrando que

$$e(G) \geq t_k(n) - t \quad \text{e} \quad e(G') = t_{k-1}(d) - t',$$

deduzimos que

$$e(G) - e(G') \geq d(n - d) - t + t'.$$

Juntamente com (3.9), concluímos que  $e(A) \leq t - t'$ . Logo, o grafo  $k$ -partido  $H$  obtido adicionando-se a  $H$  todas as arestas de  $G$  entre  $A$  e  $B$  contém

$$e(H) \geq e(G) - e(A) - t' \geq e(G) - t$$

arestas, como gostaríamos. □

Resultados de supersaturação e estabilidade valem também para grafos gerais  $H$  (mas com limitantes piores). Iremos retornar a esse assunto no Capítulo 8.

### 3.4 Teorema de Erdős e Stone

Para concluir o capítulo, iremos enunciar um resultado que é frequentemente chamado de “teorema fundamental da Teoria Extremal dos Grafos”. Tal teorema, provado por Erdős e Stone (1946), determina assintoticamente o número extremal de todo grafo  $H$  não bipartido. Abaixo, o termo  $o(1)$  denota uma função que tende a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 3.4.1** (Erdős e Stone, 1946). *Seja  $H$  um grafo não vazio. Então*

$$\text{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \frac{n^2}{2}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

O limitante inferior do teorema de Erdős e Stone é imediato: basta considerar o grafo de Turán  $T_k(n)$  com  $k = \chi(H) - 1$ . Como  $T_k(n)$  é  $k$ -partido, e  $H$  não é (pela definição de  $\chi(H)$ ), decorre que  $H$  não é um subgrafo de  $T_k(n)$ . Além disso,

$$t_k(n) \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} - n$$

(veja o Exercício 3.5.1). Note que tal limitante inferior é trivial quando  $H$  é bipartido, mas nesse caso já mostramos no Corolário 3.2.3 que  $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$ .

A prova do limitante superior do Teorema 3.4.1 é muito mais complicada e está fora do escopo deste capítulo. Veremos tal prova no Capítulo 8, e outra prova no Capítulo 11.

## 3.5 Exercícios

**Exercício 3.5.1.** Mostre que, para todo  $n, k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} - n \leq t_k(n) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}.$$

**Exercício 3.5.2.** Apresente uma prova alternativa do Teorema de Mantel, considerando um conjunto independente  $A$  de tamanho máximo em um grafo livre de triângulos e a soma dos graus dos vértices que não estão em  $A$ .

**Exercício 3.5.3.** Mostre que se  $G$  é um grafo com  $2k + 1$  vértices, então  $P_k \subset G$  ou o complemento de  $G$  contém um triângulo.

**Exercício 3.5.4.** Mostre que se  $T$  é uma árvore com  $k$  vértices e  $G$  é um grafo com  $2k - 1$  vértices, então ou  $T \subset G$  ou o complemento de  $G$  contém um triângulo.

**Exercício 3.5.5.** Mostre que se  $e(G) > n^2/4$ , então  $G$  contém pelo menos  $\lfloor n/2 \rfloor$  triângulos.

**Exercício 3.5.6.** Prove o seguinte teorema de supersaturação fraca: se

$$e(G) \geq 2 \cdot \text{ex}(n, H),$$

então  $G$  contém pelo menos  $\text{ex}(n, H)$  cópias de  $H$ .

**Exercício 3.5.7.** Prove que se  $k$  é uma constante suficientemente grande, e

$$e(G) \geq k \cdot n^{3/2},$$

então  $G$  contém pelo menos  $k^4 n^2$  cópias de  $C_4$ .

**Exercício 3.5.8.** Fixe  $k \in \mathbb{N}$ , e seja  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Mostre que todo  $G$  com  $n$  vértices e  $e(G) \geq n^2/4$  possui um subgrafo  $H$  com pelo menos  $k$  vértices e

$$\delta(H) \geq \frac{v(H)}{2}.$$

**Exercício 3.5.9.** Mostre que

$$\text{ex}(n, C_5) \leq \frac{n^2}{4}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  grande o suficiente.



# 4

## Teoria de Ramsey

---

Neste capítulo, vamos estudar  $k$ -colorações (não necessariamente próprias) das arestas de um grafo completo  $K_n$ , isto é, funções

$$\chi: E(K_n) \rightarrow \{1, \dots, k\}.$$

Por simplicidade, no caso de 2-colorações, dizemos que as cores utilizadas são *vermelho* e *azul*. Note que podemos associar qualquer 2-coloração de um  $K_n$  a um grafo  $G$  em  $n$  vértices, em que  $E(G)$  são as arestas de  $K_n$  com a cor vermelha. Desta forma, tal coloração é apenas uma outra maneira de olhar para um grafo. Estamos interessados em estruturas monocromáticas que podem ser encontradas em *qualquer* coloração com um número fixo de cores.

Um exemplo simples é o seguinte fato, que já vimos no Exemplo 1.1.3.

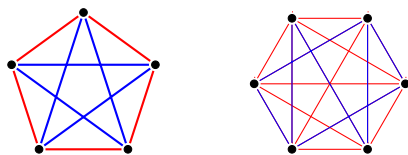


Figura 4.1: 2-colorações de  $K_5$  e  $K_6$ .

**Fato 4.0.1.** *Toda 2-coloração das arestas de  $K_6$  possui um triângulo ( $K_3$ ) monocromático.*

*Demonstração.* Seja  $v$  um vértice de  $K_6$ , e considere as cores das 5 arestas que são incidentes a  $v$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos três delas possuem uma mesma cor. Suponha, sem perda de generalidade, que essa cor seja a cor vermelha. Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  os vizinhos vermelhos de  $v$  (ou seja, as arestas  $vx$ ,  $vy$  e  $vz$  são todas vermelhas). Se qualquer uma das arestas  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  for vermelha, então temos um triângulo vermelho induzido pelo vértices da aresta vermelha e  $v$ . Caso contrário,  $xyz$  é um triângulo azul, o que conclui a prova.  $\square$

A ideia da demonstração anterior, apesar de simples, vai nos levar longe; o próximo passo é encontrar grafos completos monocromáticos maiores em colorações arbitrárias. O seguinte teorema foi primeiramente provado por Ramsey (1930).

**Teorema 4.0.2** (Ramsey (ibid.)). *Para todo  $k, r \in \mathbb{N}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que vale o seguinte. Toda  $r$ -coloração das arestas de  $K_n$  possui uma cópia monocromática de  $K_k$ .*

*Demonstração.* Novamente, vamos começar escolhendo um vértice de  $A_0 := V(K_n)$ ; dessa vez vamos chamá-lo de  $v_1$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe uma cor  $c_1 \in [r]$  tal que  $v_1$  é incidente a pelo menos  $(n-1)/r$  arestas de cor  $c_1$ . Seja

$$A_1 := \{u \in V(K_n) : \chi(v_1u) = c_1\}$$

o conjunto dos extremos diferente de  $v_1$  dessas arestas, então  $|A_1| \geq (n-1)/r$ .

Agora escolha um vértice  $v_2 \in A_1$  e repita o processo. Obtemos uma cor  $c_2$  e um conjunto

$$A_2 := \{u \in A_1 : \chi(v_2u) = c_2\}$$

de tamanho pelo menos  $(|A_1| - 1)/r$ . Repetindo esta operação, obtemos uma sequência de vértices  $v_1, \dots, v_t$ , cores  $c_1, \dots, c_t \in [r]$  e conjuntos  $A_0 \supset \dots \supset A_t$  tais que

$$v_i \in A_{i-1} \quad \text{e} \quad \chi(v_iu) = c_i$$

para todo  $1 \leq i \leq t$  e todo  $u \in A_i$ . Em particular,  $\chi(v_i v_j) = c_i$  para todo  $1 \leq i < j \leq t$ .

Agora, se  $n$  é suficientemente grande, então podemos continuar esse processo até  $t > r(k-1)$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, há uma cor  $c \in [r]$  que aparece pelo menos  $k$  vezes na sequência  $(c_1, \dots, c_t)$ . Seja  $A = \{v_i : c_i = c\}$ , observe que  $\chi(xy) = c$  para todo  $x, y \in A$ . Então  $A$  é uma clique monocromática de tamanho pelo menos  $k$ , como desejado.  $\square$

## 4.1 Números de Ramsey

O Teorema 4.0.2 naturalmente leva à pergunta de encontrar o menor  $n$  com a propriedade estudada. Para isso, definimos o seguinte.

**Definição 4.1.1.** O *número de Ramsey*  $R(k)$  é o menor  $n \in \mathbb{N}$  tal que toda 2-coloração das arestas de  $K_n$  contém uma cópia monocromática de  $K_k$ .

Segue do Fato 4.0.1 que  $R(3) \leq 6$ , e do Teorema 4.0.2 que  $R(k) < \infty$ . Além disso, pode-se ler a partir da prova que de fato  $R(k) \leq 4^k$ . A seguinte melhoria foi dada por Erdős e Szekeres (1935).

**Teorema 4.1.2** (Erdős e Szekeres (ibid.)). *Para todo  $k \geq 1$ ,*

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}.$$

A ideia principal desse resultado é provar um teorema mais geral por indução. A seguinte notação será útil: dados grafos  $G$ ,  $H_1$  e  $H_2$ , escrevemos

$$G \rightarrow (H_1, H_2)$$

se toda coloração das arestas de  $G$  com as cores azul e vermelha contém uma cópia vermelha de  $H_1$  ou uma cópia azul de  $H_2$ . Agora, para cada  $s, t \in \mathbb{N}$ , defina

$$R(s, t) := \min \{n \in \mathbb{N} : K_n \rightarrow (K_s, K_t)\},$$

então em particular  $R(k) = R(k, k)$ . O passo principal é o seguinte lema.

**Lema 4.1.3.**

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$$

para todo  $s, t \geq 2$ .

*Demonstração.* Seja  $\chi$  uma coloração de  $E(K_n)$  com as cores azul e vermelha, em que  $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$ , e seja  $v$  um vértice de  $K_n$ . Pelo princípio da casa dos pombos, existem pelo menos  $R(s-1, t)$  arestas vermelhas, ou pelo menos  $R(s, t-1)$  arestas azuis, incidentes a  $v$ .

Suponha que existem pelo menos  $R(s-1, t)$  arestas vermelhas incidentes a  $v$ , e seja

$$N_R(v) = \{u \in V(K_n) : \chi(uv) \text{ é vermelho}\}$$

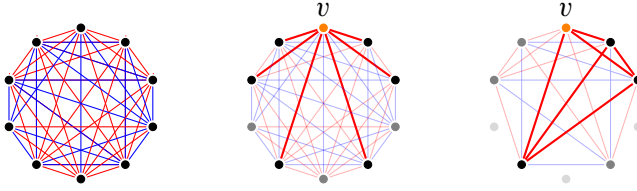


Figura 4.2: O argumento do Lema 4.1.3.

a vizinhança vermelha de  $v$ . Pela definição de  $R(s-1, t)$ , a coloração do subgrafo induzido por  $N_R(v)$  contém uma cópia vermelha de  $K_{s-1}$  ou uma cópia azul de  $K_t$ . Portanto, se não temos cópia azul de  $K_t$ ,  $v$  e uma cópia vermelha de  $K_{s-1}$  em  $N_R(v)$  formam juntos uma cópia vermelha de  $K_s$ . Logo, temos uma cópia vermelha de  $K_s$  ou uma azul de  $K_t$ .

Similarmente, se existirem pelo menos  $R(s, t-1)$  arestas azuis incidentes a  $v$ , então a vizinhança azul  $N_B(v)$  de  $v$  contém uma cópia vermelha de  $K_s$  ou uma cópia azul de  $K_{t-1}$ . Como  $v$  e uma cópia azul de  $K_{t-1}$  em  $N_B(v)$  formam juntos um  $K_t$  azul, terminamos a prova do lema.  $\square$

Com o Lema 4.1.3, conseguimos provar o seguinte resultado, que implica Teorema 4.1.2 colocando-se  $s = t$ .

**Teorema 4.1.4** (Erdős e Szekeres (ibid.)).

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

para todo  $s, t \geq 1$ .

*Demonstração.* Vamos provar o limitante superior apresentado por indução em  $s+t$ . Observe primeiramente que  $R(s, 1) = R(1, t) = 1$ , de forma que o resultado vale quando  $\min\{s, t\} = 1$ . Agora, se  $\min\{s, t\} \geq 2$  então, pelo Lema 4.1.3 e pela hipótese de indução, temos que

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1},$$

em que usamos o Exemplo 1.2.2 no último passo. Assim, obtemos o resultado desejado.  $\square$

Observe que o Teorema 4.1.4 também implica que

$$R(3, k) \leq \binom{k+1}{2}.$$

Retornaremos para o problema de estimar  $R(3, k)$  nos Capítulos 5, 9 e 10.

Vamos agora focar em provar limitantes inferiores para  $R(k)$ . É surpreendentemente difícil *construir* colorações que não possuem cópias monocromáticas de grandes cliques; a primeira coloração explícita provando um limitante inferior superpolinomial para  $R(k)$  foi descoberta por Frankl e Wilson (1981). No entanto, Erdős (1947) encontrou uma prova (não construtiva) chocantemente simples de um limitante inferior *exponencial* para  $R(k)$ .

**Teorema 4.1.5** (Erdős (ibid.)).

$$R(k) \geq 2^{k/2}$$

para todo  $k \geq 5$ .

*Demonstração.* Observe que existem  $2^{\binom{n}{2}}$  formas de colorir as arestas de um  $K_n$  com duas cores. Nós vamos mostrar que o número de colorações “ruins”, ou seja, colorações com pelo menos uma clique monocromática de tamanho  $k$ , é estritamente menor que o número total de 2-colorações do  $K_n$ . Dessa forma, há pelo menos uma coloração “boa”, i.e., que não possui nenhuma clique monocromática de tamanho  $k$ .

Para cotar o número de colorações ruins, considere  $S \subset V(K_n)$  uma  $k$ -clique (uma clique de tamanho  $k$ ), e observe que existem  $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1}$  maneiras de colorir as arestas de  $K_n$  com duas cores de forma que  $S$  induz uma cópia monocromática de  $K_k$ . Pela cota da união, há no máximo

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} \leq 2^{\binom{n}{2} + 1} \left( \frac{en}{k} \cdot 2^{-(k-1)/2} \right)^k \leq 2^{\binom{n}{2} + 1} \left( \frac{e\sqrt{2}}{k} \right)^k < 2^{\binom{n}{2}}$$

colorações ruins, em que o penúltimo passo vale para  $n \leq 2^{k/2}$ , e o último passo vale para  $k \geq 5$ . Assim, concluímos que existem mais 2-colorações das arestas de  $K_n$  do que colorações que são ruins e, portanto, existe uma coloração boa como dito.  $\square$

Tal prova foi uma das primeiras aplicações do que hoje é conhecido como *Método Probabilístico*. Na linguagem da probabilidade, a prova pode ser descrita de forma mais sucinta: simplesmente colorimos de forma aleatória! O cálculo exibido na prova acima mostra que (para uma coloração escolhida uniformemente ao acaso) o número esperado de  $k$ -cliques monocromáticas é menor que 1 e, portanto, a probabilidade de uma coloração aleatória ser boa é estritamente positiva. Nos Capítulos 5 e 10, veremos que tal ponto de vista é muito poderoso, e possui diversas aplicações.

Tomando-se  $k - 1$  cliques vermelhas de tamanho  $k - 1$  conectadas por arestas azuis (um grafo de Turán), mostra-se que  $R(k) > (k - 1)^2$ . Não é trivial melhorar substancialmente tal limitante. Dada a abundância de colorações boas, talvez seja surpreendente a dificuldade que temos para construí-las explicitamente. A construção de Frankl e Wilson (1981), que nos dá um limitante inferior superpolinomial para  $R(k)$ , é a seguinte: sejam  $m$  um inteiro positivo e  $q$  uma potência de primo tais que  $m \geq q^2 - 1$ . Seja  $G$  o grafo completo com conjunto de vértices  $\binom{[m]}{q^2-1}$ , e considere a coloração  $\chi$  de  $G$  na qual o conjunto de arestas vermelhas é

$$\{ST : |S \cap T| \equiv -1 \pmod{q}\}.$$

É possível mostrar que tal coloração não possui cliques monocromáticas com mais que  $\binom{m}{q-1}$  vértices, mas esta não é uma tarefa fácil.

O limitante superior para  $R(k)$  foi melhorado pela primeira vez por Thomason (1988) (por um fator de  $\sqrt{k}$ ), e, então, por Conlon (2009a) (por um fator superpolinomial). O método de Conlon foi recentemente otimizado por Sah (2020), que provou um limitante superior da forma

$$R(k) \leq k^{-c \log k} \cdot 4^k$$

para algum  $c > 0$ . Por outro lado, o limitante inferior, que segue da prova de Erdős (com um cálculo mais cuidadoso) só foi melhorado por um fator de dois! Veremos uma prova desse limitante inferior no Capítulo 10.

Quando permitimos mais de duas cores, a situação fica ainda pior. O número de Ramsey para  $r$  cores,  $R_r(k)$ , é o menor  $n \in \mathbb{N}$  tal que toda  $r$ -coloração das arestas de  $K_n$  contém uma cópia monocromática de  $K_k$ . Mesmo quando  $k = 3$ , o melhor limitante superior conhecido é superexponencial em  $r$ .

**Teorema 4.1.6.** *Para todo  $r \geq 2$ ,*

$$2^r \leq R_r(3) \leq 3 \cdot r!.$$

*Demonstração.* Para o limitante superior, simplesmente aplicamos o método de Erdős e Szekeres. Lembre que  $R_2(3) \leq 6$ , portanto, o limitante superior proposto vale quando  $r = 2$ . Se  $r \geq 3$ , então defina  $n = 3 \cdot r!$  e escolha um vértice arbitrário em uma  $r$ -coloração  $\chi$  de  $E(K_n)$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe uma cor  $c \in [r]$  tal que o conjunto

$$A = \{u \in V(K_n) : \chi(uv) = c\}$$

tem pelo menos  $3 \cdot (r - 1)!$  elementos. Agora, ou  $v$  está contido em um triângulo monocromático de cor  $c$ , ou  $\chi$  usa apenas  $r - 1$  cores no conjunto  $A$  e, portanto, pela hipótese de indução, contém um triângulo monocromático, como desejado.

Para o limitante inferior, também usamos indução. O limitante apresentado é claramente válido para  $r = 1$ , então suponha que  $r \geq 2$  e seja  $\chi'$  uma  $(r - 1)$ -coloração de  $E(K_{n/2})$  sem triângulo monocromático, em que  $n = 2^r$ . Para obter uma  $r$ -coloração  $\chi$  de  $E(K_n)$ , divida o conjunto de vértices em dois conjuntos de tamanho  $n/2$ . Colora as arestas induzidas por cada um desses conjuntos segundo a coloração  $\chi'$  e use uma nova cor para as arestas entre esses conjuntos. Como as arestas da nova cor formam um grafo bipartido, não há triângulos monocromáticos em  $\chi$ , como requerido.  $\square$

O limitante inferior apresentado no Teorema 4.1.6 ainda pode ser melhorado um pouco (veja os exercícios), mas o seguinte problema de Erdős continua em aberto.

**Problema 4.1.7.** Existe  $C > 0$  tal que

$$R_r(3) \leq 2^{C^r}$$

para todo  $r \in \mathbb{N}$ ?

## 4.2 Teoria de Ramsey infinita

Podemos considerar um grafo infinito com conjunto de vértices  $\mathbb{N}$  e conjunto de arestas  $\binom{\mathbb{N}}{2}$ . Mostramos na seção anterior que uma  $r$ -coloração arbitrária desse grafo contém cliques monocromáticas arbitrariamente grandes: para achar uma clique de tamanho  $k$ , olhe para os primeiros  $R_r(k)$  vértices. Na verdade, uma ligeira modificação da prova nos dá algo ainda maior: uma clique monocromática infinita!

**Teorema 4.2.1.** *Toda  $r$ -coloração de  $\binom{\mathbb{N}}{2}$  contém uma clique monocromática infinita.*

A prova é muito semelhante à do Teorema 4.0.2.

*Demonstração.* Seja  $A_0 = \mathbb{N}$  e  $v_1 \in A_0$  um vértice arbitrário em  $A_0$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos (infinito), existe uma cor  $c_1 \in [r]$  tal que  $v_1$  é incidente em um número infinito de arestas da cor  $c_1$ . Seja

$$A_1 := \{u \in A_0 : \chi(v_1 u) = c_1\}$$

o conjunto dos extremos diferentes de  $v_1$  dessas arestas, então  $A_1$  é infinito.

Agora escolha um vértice  $v_2 \in A_1$  e repita o processo. Obtemos uma cor  $c_2$  e um conjunto infinito

$$A_2 := \{u \in A_1 : \chi(v_2 u) = c_2\}.$$

Iterando, obtemos uma sequência infinita de vértices  $v_1, v_2, \dots$ , cores  $c_1, c_2, \dots$  e conjuntos  $\mathbb{N} = A_0 \supset A_1 \supset \dots$ , de modo que

$$v_i \in A_{i-1} \quad \text{e} \quad \chi(v_i u) = c_i$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$  e todo  $u \in A_i$ . Em particular,  $\chi(v_i v_j) = c_i$  para todo  $i < j$ .

Agora, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe uma cor  $c \in [r]$  que aparece uma quantidade infinita de vezes na sequência  $c_1, c_2, \dots$  e, portanto, o conjunto  $A = \{v_i : c_i = c\}$  é uma clique monocromática infinita.  $\square$

## 4.3 Teoria de Ramsey em grafos

Lembre-se que escrevemos  $G \rightarrow (H_1, H_2)$  para denotar que toda coloração das arestas de  $G$  com as cores azul e vermelha contém uma cópia vermelha de  $H_1$  ou uma cópia azul de  $H_2$ . Nesta seção, vamos estudar os números de Ramsey para grafos não necessariamente completos, definidos a seguir.

**Definição 4.3.1.** O número de Ramsey de  $H_1$  versus  $H_2$  é definido como

$$r(H_1, H_2) = \min \{n \in \mathbb{N} : K_n \rightarrow (H_1, H_2)\}.$$



Vamos começar com um exemplo simples: o triângulo versus o caminho. Lembre-se de que  $P_k$  denota o caminho com  $k$  arestas.

**Teorema 4.3.2.**

$$r(K_3, P_k) = 2k + 1$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Para provar que  $r(K_3, P_k) > 2k$ , podemos construir uma coloração de  $K_n$  que não contenha  $K_3$  vermelho nem  $P_k$  azul. Para isso, defina  $n = 2k$  e considere a coloração de  $E(K_n)$  em que as arestas azuis induzem dois grafos completos disjuntos de tamanho  $k$ . O grafo das arestas vermelhas é bipartido, portanto não contém triângulo e, como  $P_k$  tem  $k + 1$  vértices, ele não tem como estar contido em nenhuma das componentes azuis.

Para o limitante superior, defina  $n = 2k + 1$  e seja  $\chi$  uma coloração de  $E(K_n)$  com as cores azul e vermelha. Seja  $P$  um caminho azul maximal de comprimento  $t$  em  $\chi$ . Assuma que  $t < k$ , caso contrário, temos um  $P_k$  azul. Seja  $U$  o conjunto de vértices que não estão em  $P$ , e seja  $u$  um dos extremos de  $P$ .

Como  $P$  é maximal, todas as arestas entre  $u$  e  $U$  são vermelhas. Logo,  $u$  está contido em um triângulo vermelho ou  $U$  é uma clique azul. Além disso,  $|U| \geq k + 1$ , uma vez que  $t < k$  e, portanto, o grafo induzido por  $U$  contém um  $P_k$  azul.  $\square$

Usando o Lema 3.2.5 do capítulo anterior, podemos generalizar o Teorema 4.3.2 para árvores arbitrárias de  $k$  arestas.

**Teorema 4.3.3.** *Seja  $k \in \mathbb{N}$  e seja  $T$  uma árvore com  $k$  arestas. Então*

$$r(K_3, T) = 2k + 1.$$

*Demonstração.* O limitante inferior segue da mesma construção da prova do Teorema 4.3.2: considere a coloração em que as arestas azuis induzem dois  $K_k$ s disjuntos. Como  $T$  tem  $k + 1$  vértices,  $T$  não está contida em nenhuma das componentes azuis.

Para o limitante superior, defina  $n = 2k + 1$  e seja  $\chi$  uma coloração de  $E(K_n)$  com as cores azul e vermelha. Se existir um vértice  $v$  com grau vermelho pelo menos  $k + 1$ , então,  $v$  está contido em um triângulo vermelho ou a vizinhança vermelha de  $v$  é uma clique azul de tamanho pelo menos  $k + 1$ , que contém uma cópia azul de  $T$ .

Por outro lado, se cada vértice tem grau vermelho no máximo  $k$ , então o grafo  $G_B$  induzido pelas arestas em azul tem grau mínimo pelo menos  $k$ . Pelo Lema 3.2.5, temos que  $T \subset G_B$ , como desejado.  $\square$

Uma indução simples agora nos permite estender este resultado para grafos completos maiores e obter o seguinte teorema de Chvátal (1977):

**Teorema 4.3.4.** *Seja  $k, s \in \mathbb{N}$ , e seja  $T$  uma árvore com  $k$  arestas. Então*

$$r(K_{s+1}, T) = sk + 1.$$

*Demonstração.* Para provar o limitante inferior, considere a coloração de  $E(K_{sk})$  na qual as arestas azuis induzem  $s$  grafos completos disjuntos cada um com  $k$  vértices. O grafo induzido pelas arestas vermelhas é então um grafo  $s$ -partido e, portanto, não contém  $K_{s+1}$ . Como  $T$  tem  $k + 1$  vértices,  $T$  não está contida em nenhuma das componentes azuis.

Para o limitante superior, aplicaremos indução em  $s$ . Seja  $n = sk + 1$  e seja  $\chi$  uma coloração de  $E(K_n)$  com as cores azul e vermelha. Se existir um vértice  $v$  com grau vermelho pelo menos  $(s - 1)k + 1$ , então, pela hipótese de indução, a vizinhança vermelha de  $v$  contém uma cópia vermelha de  $K_s$  ou uma cópia azul de  $T$ . Como um  $K_s$  vermelho na vizinhança vermelha de  $v$  junto com  $v$  forma um  $K_{s+1}$  vermelho, terminamos este caso.

Por outro lado, se todo vértice tem grau vermelho no máximo  $(s - 1)k$ , então o grafo azul  $G_B$  tem grau mínimo pelo menos  $k$ . Pelo Lema 3.2.5, temos que  $T \subset G_B$ , como desejado.  $\square$

Quando  $H_1 = H_2$ , escrevemos  $G \rightarrow H$  ao invés de  $G \rightarrow (H, H)$ , e  $r(H)$  ao invés de  $r(H, H)$ . No Capítulo 10, discutimos um método que permite provar limitantes superiores razoavelmente bons em  $r(H)$  para muitos grafos esparsos  $H$ , e no Teorema 11.3.12 mostraremos que grafos de grau limitado têm número de Ramsey linear. Por enquanto, vamos nos contentar com o seguinte teorema clássico de Gerencsér e Gyárfás (1967).

**Teorema 4.3.5.**

$$r(P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Para o limitante inferior, defina  $n = \lceil 3k/2 \rceil - 1$ , e considere a coloração de  $E(K_n)$  em que as arestas azuis induzem um grafo completo com  $k$  vértices. Seja  $A$  o conjunto de vértices desse grafo completo, e seja  $B = A^c$ , então  $|B| < k/2$ . Observe que em quaisquer dois vértices consecutivos de um caminho vermelho  $P$ , pelo menos um deles está em  $B$  e, portanto,  $P$  tem no máximo  $2|B| < k$  arestas.

Para o limitante superior, vamos provar um resultado mais geral por indução: se  $k \geq \ell \geq 1$  e  $n \geq k + \lceil \ell/2 \rceil$ , então

$$K_n \rightarrow (P_k, P_\ell).$$

Se  $\ell \leq 3$ , então é fácil provar o limitante (simplesmente pegue um caminho vermelho maximal  $P$  e observe que ambos os pontos extremos enviam apenas arestas azuis para o conjunto  $U = V(P)^c$ ). Portanto, seja  $k \geq \ell \geq 4$  e defina  $n = k + \lceil \ell/2 \rceil$ . Começamos supondo que  $k > \ell$ . Seja  $\chi$  uma coloração com as cores azul e vermelha de  $K_n$ . Observe que, pela hipótese de indução para  $(k-1, \ell)$ , existe uma cópia vermelha de  $P_{k-1}$  em  $\chi$ .

Seja  $P = v_1 \cdots v_k$  um caminho vermelho de comprimento  $k-1$  e seja  $U = V(P)^c$ , então  $|U| = \lceil \ell/2 \rceil$ . Podemos assumir que todas as arestas entre os conjuntos  $\{v_1, v_k\}$  e  $U$  são azuis e também pelo menos uma das arestas entre o conjunto  $\{v_i, v_{i+1}\}$  e  $u$  é azul para cada  $u \in U$ , pois, caso contrário, temos uma cópia vermelha de  $P_k$ .

Agora, sejam  $Q_1$  e  $Q_2$  caminhos azuis (vértice-disjuntos) de comprimento ímpar cujos vértices alternam entre  $U$  e o conjunto  $\{v_2, \dots, v_k\}$ . Adicionalmente, vamos assumir que  $Q_1$  é maximal e, dado  $Q_1$ ,  $Q_2$  também é maximal. Observe que cada um desses caminhos tem exatamente um extremo em  $U$  (uma vez que seu comprimento é ímpar); seja  $x$  o extremo de  $Q_1$  em  $U$  e seja  $y$  o extremo de  $Q_2$  em  $U$ .

Suponha primeiro que  $Q_1 \cup Q_2$  cobre  $U$ . Então o caminho azul obtido de  $Q_1 \cup Q_2$  adicionando as arestas  $xv_1$  e  $v_1y$  tem  $2|U| + 1 \geq \ell + 1$  vértices e, portanto, contém uma cópia azul de  $P_\ell$ . Portanto, podemos assumir que existe um vértice  $z \in U$ , que não está contido em  $Q_1$  e nem em  $Q_2$ . Usaremos esse vértice para encontrar uma contradição com a maximalidade de  $Q_1$  ou  $Q_2$ .

Para fazer isso, observe primeiro que  $v_k \in Q_1$ , pois caso contrário  $Q_1$  poderia ser estendido adicionando as arestas  $xv_k$  e  $v_kz$ . Em seguida, observe que  $Q_1 \cup Q_2$  contém no máximo  $|U| - 1 < (k-1)/2$  vértices de  $P$  e, portanto, existe  $i \in \{2, \dots, k-2\}$  tal que  $v_i, v_{i+1} \notin Q_1 \cup Q_2$ . Agora, como para cada  $u \in \{x, y, z\}$ , pelo menos uma das arestas  $v_iu$  e  $v_{i+1}u$  é azul, concluímos que  $v_i$  ou  $v_{i+1}$  envia duas arestas azuis para o conjunto  $\{x, y, z\}$ , e essas arestas podem ser usadas para estender  $Q_1$  ou  $Q_2$ . Essa contradição completa o passo indutivo quando  $k > \ell$ .

Quando  $k = \ell$ , a situação é um pouco mais delicada. Observe primeiramente que, pela hipótese de indução para  $(k, k-1)$  (e usando simetria para trocar as cores), existe novamente um caminho vermelho de comprimento  $k-1$ . Podemos, portanto, definir  $Q_1$  e  $Q_2$  como antes, mas se  $k$  for ímpar, então  $Q_1 \cup Q_2$  poderia intersectar  $V(P)$  no conjunto  $\{v_3, v_5, \dots, v_k\}$ , que tem tamanho  $(k-1)/2$ .

Para evitar isso, seria suficiente escolher  $Q_1$  de forma que contenha  $v_2$  ou  $v_4$ ; podemos fazer isso a não ser que todas as arestas entre  $\{v_2, v_4\}$  e  $U$  sejam vermelhas. Quando esse é o caso, se houver uma aresta vermelha  $u_1u_2$  em  $U$ , então  $v_1v_2u_1u_2v_4 \cdots v_k$  é uma cópia vermelha de  $P_k$ . Por outro lado, se  $U$  é uma clique azul, então adicionando as três arestas  $\{xz, zv_1, v_1y\}$  a  $Q_1 \cup Q_2$ , obtemos um caminho azul de comprimento  $k$ , como desejado.  $\square$

## 4.4 O Problema do Final Feliz

Nesta última seção, consideramos um dos problemas que originalmente motivaram o estudo da Teoria de Ramsey. O problema foi proposto por Esther Klein, uma jovem húngara, no início da década de 1930.

**Problema 4.4.1.** Existe  $n = n(k)$  tal que qualquer conjunto de  $n$  pontos no plano, em que quaisquer três pontos não são colineares, contém um subconjunto de  $k$  pontos em posição convexa?

“Em posição convexa” significa que todos os pontos estão na região delimitada pela envoltória convexa dos pontos; em outras palavras, os pontos são os vértices de algum polígono convexo. Esther Klein resolveu o caso  $k = 4$ , que enunciamos abaixo, e propôs o caso geral para seu grupo de amigos, que incluía um jovem Paul Erdős, e um outro jovem matemático chamado George Szekeres.

**Fato 4.4.2.** *Qualquer conjunto de 5 pontos no plano tais que quaisquer três pontos não são colineares contém 4 pontos em posição convexa.*

*Demonstração.* Considere a envoltória convexa dos 5 pontos. Se pelo menos 4 desses pontos estiverem na sua fronteira, então já temos 4 pontos em posição convexa. Portanto, assuma que  $\{x, y, z\}$  é o conjunto de vértices da envoltória convexa. Seja  $L$  a reta que passa pelos outros dois pontos  $u$  e  $v$  (que se encontram dentro da envoltória convexa). Sem perda de generalidade,  $L$  passa pelas arestas  $xy$  e  $xz$ . Mas, então,  $\{u, v, y, z\}$  é um conjunto de quatro pontos em posição convexa, conforme queríamos.  $\square$

A fim de responder à pergunta de Klein, Erdős e Szekeres redescobriram o teorema de Ramsey, que (sem o conhecimento deles) havia sido provado apenas alguns anos antes. Na verdade, eles precisavam de uma generalização do Teorema 4.0.2 (que também foi provado por Ramsey) para conjuntos de tamanho  $s$ .

Dada uma  $r$ -coloração dos subconjuntos de  $[n] = \{1, \dots, n\}$  de tamanho  $s$ ,

$$\chi: \binom{[n]}{s} \rightarrow \{1, \dots, r\},$$

dizemos que um conjunto  $A \subseteq [n]$  é monocromático se  $\chi$  é constante nos subconjuntos de  $A$  de tamanho  $s$ .

**Teorema 4.4.3.** *Para todo  $k, r, s \in \mathbb{N}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que o seguinte vale. Toda  $r$ -coloração dos  $s$ -subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  contém um conjunto monocromático de tamanho  $k$ .*

*Demonstração.* A prova será por indução em  $s$ , observando que o caso  $s = 1$  é apenas o Princípio da Casa dos Pombos, e o caso  $s = 2$  é o Teorema 4.0.2. Seja

$$\chi: \binom{[n]}{s} \rightarrow \{1, \dots, r\}$$

uma  $r$ -coloração dos  $s$ -subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$ , e seja  $v_1 \in A_0 := [n]$  um vértice. Defina uma  $r$ -coloração  $\chi_1$  dos  $(s-1)$ -subconjuntos de  $A_0 \setminus \{v_1\}$  como

$$\chi_1(S) = \chi(S \cup \{v_1\})$$

para cada  $S \subset A_0 \setminus \{v_1\}$  com  $|S| = s-1$ . Pela hipótese de indução, para cada  $m_1 \in \mathbb{N}$ , se  $n$  é suficientemente grande, então existe um conjunto monocromático  $A_1 \subset A_0 \setminus \{v_1\}$  de tamanho  $m_1$  na coloração  $\chi_1$ .

Agora escolhemos um vértice  $v_2 \in A_1$  e repetimos o argumento acima. Para ser mais preciso, definimos uma  $r$ -coloração  $\chi_2$  dos  $(s-1)$ -subconjuntos de  $A_1 \setminus \{v_2\}$  como

$$\chi_2(S) = \chi(S \cup \{v_2\})$$

para cada  $S \subset A_1 \setminus \{v_2\}$  com  $|S| = s-1$ . Pela hipótese de indução, para cada  $m_2 \in \mathbb{N}$ , se  $m_1$  for suficientemente grande, então existe um conjunto monocromático  $A_2 \subset A_1 \setminus \{v_2\}$  de tamanho  $m_2$  na coloração  $\chi_2$ .

Iterando esse processo, obtemos uma sequência de vértices  $v_1, \dots, v_t$ , cores  $c_1, \dots, c_t \in [r]$  e conjuntos  $A_0 \supset \dots \supset A_t$  tais que

$$v_i \in A_{i-1} \quad \text{e} \quad \chi(S \cup \{v_i\}) = c_i$$

para todo  $1 \leq i \leq t$  e todo  $S \subset A_i$  com  $|S| = s-1$ . Em particular, e crucialmente, temos  $\chi(S) = c_j$  para todo  $S \subset \{v_1, \dots, v_t\}$  com  $|S| = s$  e  $\min\{i : v_i \in S\} = j$ .

Agora, se  $n$  é suficientemente grande, podemos continuar esse processo até  $t > r(k-1)$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, há uma cor  $c \in [r]$  que aparece pelo menos  $k$  vezes na sequência  $(c_1, \dots, c_t)$ . Defina  $A = \{v_i : c_i = c\}$  e observe que  $\chi(S) = c$  para cada  $S \subset A$  com  $|S| = s$ . Logo,  $A$  induz um grafo completo monocromático de tamanho pelo menos  $k$ .  $\square$

O limitante obtido pela prova acima é extremamente grande e está longe de ser o melhor possível; na Seção 9.3, veremos uma prova de um limitante muito melhor.

Usando o Teorema 4.4.3, Erdős e Szekeres (1935) foram capazes de responder à pergunta de Klein, provando o seguinte teorema.

**Teorema 4.4.4.** *Existe  $n = n(k)$  tal que qualquer conjunto de  $n$  pontos no plano, com quaisquer três pontos não colineares, contém um subconjunto de  $k$  pontos em posição convexa.*

*Demonstração.* Dado um conjunto  $A$  de  $n$  pontos no plano, com quaisquer três pontos não colineares, podemos definir uma coloração  $\chi$  com as cores azul e vermelha dos 4-subconjuntos de  $A$  da seguinte maneira:  $\chi(S)$  é vermelho se e somente se os pontos de  $S$  estiverem em posição convexa. Pelo teorema de Ramsey para 4-conjuntos (Teorema 4.4.3), existe um subconjunto monocromático  $B$  de tamanho  $k$ .

Vamos supor que  $B$  seja vermelho. Então, os pontos de  $B$  devem estar em posição convexa, já que um ponto estritamente dentro da envoltória convexa de  $B$  está contido em um triângulo com vértices em  $B$  e, portanto, em um 4-subconjunto azul de  $B$ . Por outro lado, se  $B$  é azul e  $k \geq 5$ , então obtemos uma contradição, pois pelo Fato 4.4.2 quaisquer cinco pontos contêm um conjunto de 4 vértices vermelho.  $\square$

Além da prova apresentada, Erdős e Szekeres (ibid.) deram uma segunda prova (mais geométrica) do Teorema 4.4.4, que deu um limitante muito melhor. Em particular, eles mostraram que a menor função  $n(k)$  tal que a conclusão se mantém satisfaz

$$2^{k-2} + 1 \leq n(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1,$$

e conjecturaram que o limitante inferior corresponde ao verdadeiro valor de  $n(k)$ . Por mais de 60 anos não houve nenhum progresso nesse problema (em 1998, o limitante superior foi finalmente melhorado em 1!), mas em uma descoberta recente,

Suk (2016) mostrou que

$$n(k) = 2^{k+o(k)}.$$

Erdős e Szekeres também usaram seu método para provar o seguinte teorema.

**Teorema 4.4.5.** *Qualquer sequência de  $k^2 + 1$  números reais contém uma subsequência monótona de comprimento  $k + 1$ .*

Observe que o limitante  $k^2 + 1$  é o melhor possível (considere  $k$  cópias adequadamente deslocadas de uma sequência monótona). Erdős e Szekeres provaram esse resultado usando indução; a bela prova apresentada a seguir foi descoberta por Seidenberg (1959).

*Demonstração.* Seja  $n = k^2 + 1$  e seja  $(a_1, \dots, a_n)$  uma sequência de números reais. Para cada  $i \in [n]$ , defina  $x_i$  como o comprimento da subsequência crescente mais longa terminando em  $a_i$ . Seja  $y_i$  o comprimento da subsequência decrescente mais longa terminando em  $a_i$ .

Afirmamos que os pares  $(x_i, y_i)$  são todos diferentes. Para ver isso, observe que se  $i < j$  e  $a_i \leq a_j$ , então  $x_i < x_j$ , já que podemos adicionar  $a_j$  à subsequência crescente de comprimento  $x_i$  terminando em  $a_i$ . Da mesma forma, se  $i < j$  e  $a_i \geq a_j$ , então  $y_i < y_j$ . Segue que se  $i < j$ , então  $x_i < x_j$  ou  $y_i < y_j$ . Em particular, temos  $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ .

Agora, existem apenas  $k^2$  pares  $(x_i, y_i)$  com  $\max\{x_i, y_i\} \leq k$ , então pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe  $i \in [n]$  com  $\max\{x_i, y_i\} \geq k + 1$ , como desejado.  $\square$

O Problema 4.4.1 foi posteriormente chamado de “problema do final feliz” por Paul Erdős, porque levou ao casamento de George Szekeres e Esther Klein. Eles foram casados por mais de 65 anos e morreram em 2005, com uma hora de diferença entre si, com 94 e 95 anos.

## 4.5 Exercícios

**Exercício 4.5.1.** Mostre que  $R(3) = 6$ ,  $R(3, 4) \leq 9$ , e  $R(4, 4) \leq 18$ .

**Exercício 4.5.2.** Mostre que  $r(K_3, C_4) = 7$ , e  $r(K_3, C_5) = 9$ .

**Exercício 4.5.3.** Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices tal que  $G \not\rightarrow K_3$ . Qual o maior número possível de arestas de  $G$ ?

**Exercício 4.5.4.** Mostre que  $R_r(3) \geq 5^{r/2}$ .

**Exercício 4.5.5.** Defina o *número tamanho Ramsey* de um grafo  $H$  como sendo

$$\hat{r}(H) := \min \{e(G) : G \rightarrow H\}.$$

Prove que

$$\hat{r}(K_t) = \binom{R(t)}{2},$$

para todo  $t \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 4.5.6.** Seja  $C(s)$  o menor  $n$  tal que todo grafo conexo com  $n$  vértices tem, como um subgrafo *induzido*, um grafo completo  $K_s$ , uma estrela  $K_{1,s}$  ou um caminho  $P_s$  de comprimento  $s$ . Mostre que  $C(s) \leq R(s)^s$ , em que  $R(s)$  é o número de Ramsey de  $s$ .

**Exercício 4.5.7.** Prove o teorema de Schur: toda  $r$ -coloração  $\chi: \mathbb{N} \rightarrow [r]$  dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação  $x + y = z$ .

**Exercício 4.5.8.** Mostre que existe um conjunto infinito  $S$  de inteiros positivos tal que a soma de quaisquer dois elementos distintos de  $S$  possui um número par de fatores primos distintos.

**Exercício 4.5.9.** Prove que toda 2-coloração de  $E(K_n)$  contém pelo menos

$$\frac{1}{4} \binom{n}{3} - n^2$$

triângulos monocromáticos.

**Exercício 4.5.10.** Toda 2-coloração dos subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$  contém um subconjunto monocromático infinito?



# 5

## *Método Probabilístico*

---

Existem grafos sem triângulos com número cromático tão grande quanto se queira? Esse problema, proposto por Blanche Descartes, atraiu muitos matemáticos em combinatória. Vários dos problemas em combinatória, assim como o problema de Descartes, envolvem construir objetos com certas propriedades específicas. Em geral, tais construções podem requerer muita criatividade e podem ser extremamente difíceis.

Contudo, Erdős e Rényi, paradoxalmente, resolveram inúmeros desses problemas simplesmente mostrando que muitas vezes basta tomarmos um objeto aleatório dentre uma coleção grande de objetos com boas propriedades e mostrar que, com probabilidade positiva, tal objeto aleatório terá as propriedades que desejamos. Com tal ideia simples e paradoxal, eles foram os responsáveis por introduzir o Método Probabilístico.

Hoje esse método consiste de diversas ferramentas e paradigmas e ainda é uma poderosa técnica na resolução de muitos problemas da área. Neste capítulo, veremos várias aplicações do Método Probabilístico. Dentre elas, veremos como podemos construir de forma aleatória grafos sem triângulos com número cromático grande.

## 5.1 Fundamentos

Nesta seção, introduziremos alguns conceitos básicos de probabilidade discreta que serão úteis no restante do livro. Muitas das definições seguintes são simplificações de conceitos mais gerais em espaços de probabilidades. O leitor mais familiarizado não terá dificuldade em reconhecê-los e poderá saltar para próxima seção sem muitas dificuldades. Para auxiliar o leitor menos experiente a fixar as noções introduzidas nesta seção, cada conceito introduzido será acompanhado de um exemplo envolvendo experimentos de probabilidade comuns, como a rolagem de um dado, o lançamento de uma moeda, ou o saque de uma carta de um baralho.

Um *espaço de probabilidade* consiste de um par  $(\Omega, \mathbb{P})$ , em que  $\Omega$  é um conjunto finito<sup>1</sup> e  $\mathbb{P}: \Omega \rightarrow [0, 1]$  é uma função tal que  $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$ . Dizemos que o conjunto  $\Omega$  é o *espaço amostral* e a função  $\mathbb{P}$  é a *função massa de probabilidade* ou *distribuição* do espaço de probabilidade em questão. Referimos aos subconjuntos de  $\Omega$  como *eventos*. Para cada evento  $A \subseteq \Omega$  não vazio, definimos a probabilidade do evento  $A$  como  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$ . No caso do evento vazio, definimos  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

O leitor não deve ter muitas dificuldades em provar as seguintes propriedades válidas para qualquer espaço de probabilidade finito. Tais propriedades podem facilmente serem provadas usando os resultados do Capítulo 1.

**Proposição 5.1.1.** *As seguintes propriedades valem para todo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathbb{P})$ .*

1. *Para todo  $A \subseteq \Omega$ , temos  $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .*
2. **(Monotonicidade)** *Se  $A \subseteq B \subseteq \Omega$ , então  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .*
3. **(Inclusão-exclusão)** *Para todo  $A, B \subseteq \Omega$ , temos*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

4. **(Cota da união)** *Para todo  $A_1, \dots, A_k \subseteq \Omega$ , temos*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i).$$

---

<sup>1</sup>Neste livro, todos os espaços de probabilidade são finitos. Vale ressaltar, contudo, que é possível definir espaços de probabilidades mais gerais (veja (Franco 2021)).

Uma distribuição  $\mathbb{P}$  é dita *uniforme* sobre  $\Omega$  se para cada  $\omega \in \Omega$ , temos  $\mathbb{P}(\omega) = 1/|\Omega|$ . Neste caso, temos  $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega|$ , para todo evento  $A \subseteq \Omega$ . Dado um conjunto  $\Omega$ , dizemos um elemento de  $\Omega$  é escolhido *uniformemente ao acaso* quando tal escolha é feita de acordo com a distribuição uniforme sobre  $\Omega$ . Isto é, tal elemento é sorteado dentre todos os elementos  $\Omega$  com a mesma probabilidade. O seguinte exemplo ilustra as noções desenvolvidas até então.

**Exemplo 5.1.2.** Considere o experimento no qual rolamos um dado comum de seis faces. Neste exemplo, o espaço amostral  $\Omega$  consiste dos possíveis resultados do experimento, isto é, os possíveis números obtidos ao lançarmos o dado:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . A função massa de probabilidade  $\mathbb{P}$ , nesse caso, é uniforme; para cada  $\omega \in \Omega$ , temos  $\mathbb{P}(\omega) = 1/6$ .

Considere o evento  $A$  no qual obtemos um número ímpar no experimento. Isto é,  $A = \{1, 3, 5\}$ . Temos que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(5) = 1/2.$$

Agora considere o evento  $B$  no qual obtemos um número primo no experimento. Nesse caso, também temos  $\mathbb{P}(B) = 1/2$ . Por fim, a probabilidade de obtermos um número primo ímpar é igual à  $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$ .

**Definição 5.1.3.** Dizemos que dois eventos  $A$  e  $B$  são *independentes* se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

No nosso exemplo da rolagem de um dado, temos que os eventos  $A$  e  $B$  correspondentes ao resultado ser um número ímpar e primo, respectivamente, não são independentes, pois  $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$ , enquanto que  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 1/4$ . Por outro lado, considere o evento  $C$  correspondente ao resultado do experimento ser um número menor que 3. Note que  $\mathbb{P}(C) = 1/3$ . Temos que os eventos  $A$  e  $C$  são independentes, pois

$$\mathbb{P}(A \cap C) = 1/6 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C).$$

**Definição 5.1.4.** Dizemos que  $n \geq 2$  eventos  $A_1, \dots, A_n$  são *dois a dois independentes* se todo par de eventos  $A_i$  e  $A_j$ , com  $1 \leq i < j \leq n$ , forem independentes. Ademais, dizemos que tais eventos são *mutuamente independentes* se para toda subcoleção de eventos  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ , com  $k \leq n$  e  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , temos

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Note que quaisquer eventos mutuamente independentes são dois a dois independentes. A recíproca não é válida em geral, como podemos ver com o seguinte exemplo.

**Exemplo 5.1.5.** Suponha que lançamos uma moeda honesta duas vezes seguidas. Seja  $\Omega$  o espaço amostral deste experimento, i.e.,  $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$ , em que  $C$  e  $K$  simbolizam, respectivamente, que obtivemos cara e coroa no lançamento da moeda. Considere os eventos

$$X = \{CC, CK\}, \quad Y = \{CC, KC\} \quad \text{e} \quad Z = \{CC, KK\}.$$

Isto é, o evento  $X$  corresponde a obtermos cara no primeiro lançamento, o evento  $Y$  corresponde a obtermos cara no segundo lançamento, e o evento  $Z$  corresponde a obtermos o mesmo resultado nos dois lançamentos. Em particular, temos

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(Z) = 1/2.$$

Note que  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são dois a dois independentes, pois

$$\mathbb{P}(X \cap Y) = \mathbb{P}(X \cap Z) = \mathbb{P}(Y \cap Z) = \frac{1}{4}.$$

Por outro lado, eles não são mutuamente independentes, pois

$$\mathbb{P}(X \cap Y \cap Z) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)\mathbb{P}(Z).$$

## 5.2 Prova probabilística

Se um evento ocorre com probabilidade positiva, então tal evento é não vazio. Essa observação extremamente simples é a ideia por trás do *Método Probabilístico*. A dificuldade numa prova probabilística, contudo, reside em determinar um espaço de probabilidade adequado para o problema que queremos atacar. Veremos a seguir alguns exemplos que ilustram isso muito bem.

Começaremos revisitando um teorema de Erdős sobre números de Ramsey, que vimos no Capítulo 4. Lembre-se que  $R(k)$  é o menor  $n$  tal que toda 2-coloração das arestas de  $K_n$  contém uma cópia monocromática de  $K_k$ .

**Teorema 5.2.1** (Erdős, 1947). *Para todo  $k \geq 3$  inteiro, temos  $R(k) > 2^{k/2}$ .*

*Demonstração.* Seja  $n = 2^{k/2}$ . Mostraremos que existe uma 2-coloração das arestas de  $K_n$  sem cliques monocromáticos de tamanho  $k$ . Para tal, pinte cada aresta de  $K_n$  de azul ou vermelho de forma aleatória e independente com probabilidade  $1/2$ . Para cada clique  $A \subseteq V(K_n)$  com  $k$  vértices, temos que a probabilidade de  $A$  ser monocromática vermelha é  $2^{-\binom{k}{2}}$ . Analogamente,  $A$  é monocromática azul com probabilidade  $2^{-\binom{k}{2}}$ . Segue, pela cota da união, que a probabilidade de existir uma clique monocromática  $A$  de tamanho  $k$  em  $K_n$  é no máximo

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-k(k-1)/2} = \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1.$$

Logo, existe uma 2-coloração de  $K_n$  sem cliques de tamanho  $k$  monocromáticos.  $\square$

Um *hipergrafo  $k$ -uniforme*  $\mathcal{H}$  é uma estrutura composta por um conjunto de vértices  $V(\mathcal{H})$  e uma família  $E(\mathcal{H})$  de conjuntos com exatamente  $k$  vértices, que chamamos de *arestas*. Em particular, um hipergrafo 2-uniforme é exatamente um grafo.

Dizemos que um hipergrafo  $\mathcal{H}$  é *bicolorível* se for possível colorir os vértices de  $\mathcal{H}$  com duas cores de forma que nenhuma aresta  $A \in \mathcal{H}$  seja monocromática (i.e., existem dois vértices em  $A$  de cores distintas).

**Teorema 5.2.2** (Erdős, 1963). *Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo  $k$ -uniforme com  $m$  arestas. Se  $m < 2^{k-1}$ , então  $\mathcal{H}$  é bicolorível.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{H}$  como no enunciado. Pinte cada vértice de  $\mathcal{H}$  de azul ou de vermelho de forma aleatória e independente com probabilidade  $1/2$ . Temos que a probabilidade de uma aresta  $A$  ser monocromática é igual a  $2^{-k+1}$ . Logo, pela cota da união, a probabilidade de existir uma aresta  $A \in E(\mathcal{H})$  monocromática é no máximo  $m/2^{k-1}$ , o que é estritamente menor que 1. Logo, existe uma 2-coloração dos vértices de  $\mathcal{H}$  na qual nenhuma aresta é monocromática e, portanto,  $\mathcal{H}$  é bicolorível.  $\square$

Um *torneio*  $T$  é uma estrutura composta por um conjunto de vértices  $V(T)$  e um conjunto  $E(T)$  de pares *ordenados* de vértices, tal que para todo  $u, v \in V(T)$  com  $u \neq v$ , temos que exatamente um entre  $(u, v)$  e  $(v, u)$  pertence à  $E(T)$ . O nome *torneio* vem da ideia de que  $T$  pode representar uma competição entre jogadores, de modo que para cada par de jogadores distintos  $u$  e  $v$ , ou  $u$  ganha de  $v$  ou  $v$  ganha de  $u$ .

Dado um conjunto  $S \subseteq V(T)$  e um vértice  $u \in V(T)$ , escrevemos  $u \rightarrow S$  se  $(u, v) \in E(T)$ , para todo  $v \in S$ . Do contrário, escrevemos  $u \not\rightarrow S$ . Dizemos que um torneio  $T$  tem a *propriedade*  $\mathcal{T}_k$  se para todo conjunto  $S \subseteq V(T)$  de  $k$  elementos, existe  $u \in V(T) \setminus S$  tal que  $u \rightarrow S$ . Isto é, para cada conjunto  $S$  de  $k$  jogadores, existe um outro jogador que venceu todos os jogadores em  $S$ .

**Teorema 5.2.3** (Erdős, 1963). *Se  $n \geq k^2 2^{k+1}$ , então existe um torneio  $T$  com  $n$  vértices que tem a propriedade  $\mathcal{T}_k$ .*

*Demonstração.* Considere um torneio aleatório  $T$  com  $n$  vértices, i.e., para cada par de vértices  $\{u, v\}$ , escolhemos de forma independente e uniformemente ao caso um entre  $(u, v)$  ou  $(v, u)$  para ser uma aresta de  $T$ .

Agora considere um conjunto  $S \subseteq V(T)$  com  $|S| = k$ . Note que para todo  $u \in V(T) \setminus S$ , temos que

$$\mathbb{P}(u \rightarrow S) = 2^{-k}.$$

Seja  $A_S$  o evento “para todo  $u \in V(T) \setminus S$ , temos  $u \not\rightarrow S$ ”. Segue que

$$\mathbb{P}(A_S) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{u \in V(T) \setminus S} \{u \not\rightarrow S\}\right) = \prod_{u \in V(T) \setminus S} \mathbb{P}(u \not\rightarrow S) = (1 - 2^{-k})^{n-k}$$

pois os eventos  $\{u \not\rightarrow S\}$  são mutuamente independentes. Segue da cota da união que a probabilidade de que  $A_S$  ocorra, para algum  $S \subseteq V(T)$  com  $|S| = k$ , é no máximo

$$\sum_{|S|=k} \mathbb{P}(A_S) = \binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-(n-k)/2^k} \leq n^k e^{-n/2^k},$$

em que usamos a desigualdade  $1 + x \leq e^x$ , válida para todo número real  $x$ . Em particular, para  $n \geq k^2 2^{k+1}$ , temos que o último termo na desigualdade acima é estritamente menor que 1. Logo, com probabilidade positiva, nenhum dos eventos  $A_S$  ocorrem e, portanto, existe um torneio  $T$  com  $n$  vértices tendo a propriedade  $\mathcal{T}_k$ .  $\square$

## 5.3 Método do Primeiro Momento

Uma *variável aleatória*  $X$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathbb{P})$  é simplesmente uma função real  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado um número real  $x \in \mathbb{R}$ , denotamos por

$\{X \geq x\}$  o evento  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\}$  e denotamos por  $\mathbb{P}(X \geq x)$  a probabilidade de tal evento. Similarmente, definimos  $\mathbb{P}(X \leq x)$ ,  $\mathbb{P}(X < x)$ ,  $\mathbb{P}(X > x)$  e  $\mathbb{P}(X = x)$ .

**Definição 5.3.1.** Definimos a *esperança* ou *média* (ou ainda o *valor esperado* ou *primeiro momento*) de  $X$  como

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega).$$

Se  $X$  é uma variável aleatória inteira não negativa, então podemos escrever a esperança de  $X$  da seguinte forma:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k).$$

Como muitas das variáveis aleatórias citadas neste livro são inteiras não negativas, frequentemente usaremos a última igualdade para calcular a esperança de tais variáveis aleatórias.

Um exemplo bastante simples de variável aleatória, que usaremos em vários pontos deste livro, são as variáveis aleatórias indicadoras de um evento.

**Exemplo 5.3.2.** Dado um evento  $A \subseteq \Omega$ , definimos a *variável indicadora* do evento  $A$  como a variável aleatória  $\mathbb{1}_A$  tal que para cada  $\omega \in \Omega$ , temos

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que  $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ .

Dizemos que uma variável aleatória  $X$  tem *distribuição de Bernoulli* com parâmetro  $p$  se  $\mathbb{P}(X = 1) = p$  e  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ . Note que  $\mathbb{E}[X] = p$ . Em particular, variáveis indicadoras têm distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p = \mathbb{P}(A)$ .

Veremos em muitas aplicações que a esperança de variáveis aleatórias é em geral simples de ser calculada. A razão por trás disso é que a esperança é um *operador linear*, como podemos ver na seguinte proposição.

**Proposição 5.3.3.** Para quaisquer duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  e quaisquer números reais  $a$  e  $b$ , temos que

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Deixamos a prova da Proposição 5.3.3 como exercício.

Podemos definir independência também para variáveis aleatórias.

**Definição 5.3.4.** Dizemos que  $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são variáveis aleatórias *independentes* se, para quaisquer  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , os eventos  $\{X_i = x_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) são mutuamente independentes.

Outra propriedade da esperança é dada pela proposição abaixo.

**Proposição 5.3.5.** Se  $X_1$  e  $X_2$  são variáveis aleatórias independentes, então

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2].$$

Também deixamos a prova da Proposição 5.3.5 a cargo do leitor.

O conceito de independência pode ser usado para definir a seguinte classe, extremamente útil, de variáveis aleatórias.

**Definição 5.3.6.** Definimos a *variável aleatória binomial* com parâmetros  $(n, p)$  como sendo a variável

$$X = X_1 + \dots + X_n,$$

em que  $X_1, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ .

Observe que se  $X$  é uma variável aleatória binomial com parâmetros  $(n, p)$ , então

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = pn,$$

pela linearidade da média.

Uma prova usando o *Método do Primeiro Momento* consiste em calcular a esperança de uma variável aleatória adequada, concluindo então que com probabilidade positiva, deve existir um elemento do espaço amostral cuja a variável é tão grande quanto a sua média. Tal princípio é sumarizado na seguinte proposição, cuja a prova deixaremos para o leitor.

**Proposição 5.3.7.** Seja  $X$  uma variável aleatória. Se  $\mathbb{E}[X] \geq t$ , então

$$\mathbb{P}(X \geq t) > 0.$$

Vejamos a seguir como podemos usar o Método do Primeiro Momento para provar resultados em combinatória.



**Teorema 5.3.8.** *Todo grafo  $G$  possui um subgrafo bipartido  $H \subseteq G$  tal que*

$$e(H) \geq \frac{e(G)}{2}.$$

*Demonstração.* Considere um conjunto aleatório  $A \subseteq V(G)$  obtido escolhendo cada vértice  $v \in V(G)$  de forma aleatória e independente com probabilidade  $1/2$ . Seja  $B = V(G) \setminus A$  e considere o subgrafo bipartido  $H = G[A, B]$  com conjunto de arestas  $E(H) = \{uv \in E(G) : u \in A, v \in B\}$ .

Para cada aresta  $uv \in E(G)$ , considere a variável aleatória  $X_{uv}$  indicadora do evento  $\{uv \in E(H)\}$ . Note que

$$\mathbb{E}[X_{uv}] = \mathbb{P}(uv \in E(H)) = \frac{1}{2},$$

uma vez que  $uv \in E(H)$  se, e somente se,  $u \in A$  e  $v \in B$  (o que ocorre com probabilidade  $1/4$ ) ou  $v \in A$  e  $u \in B$  (o que também ocorre com probabilidade  $1/4$ ). Pela linearidade da média, temos que

$$\mathbb{E}[e(H)] = \mathbb{E}\left[\sum_{uv \in E(G)} X_{uv}\right] = \sum_{uv \in E(G)} \mathbb{E}[X_{uv}] = \frac{e(G)}{2}$$

Segue da Proposição 5.3.7 que existe  $H \subseteq G$  bipartido com  $e(H) \geq e(G)/2$ .  $\square$

Uma *caminho hamiltoniano* em um torneio  $T$  é uma sequência de  $n = |V(T)|$  vértices  $(v_1, \dots, v_n)$  com  $(v_i, v_{i+1}) \in E(T)$ , para todo  $i \in [n-1]$ .

**Teorema 5.3.9** (Szele). *Existe um torneio com  $n$  vértices contendo pelo menos  $n!/2^{n-1}$  caminhos hamiltonianos.*

*Demonstração.* Considere um torneio aleatório  $T$  com  $n$  vértices como na prova do Teorema 5.2.3. Seja  $X$  o número de caminhos hamiltonianos em  $T$ . Para cada permutação  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ , seja  $X_\sigma$  a variável indicadora para o evento “ $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  é um caminho hamiltoniano em  $T$ ”.

Note que  $\mathbb{E}[X_\sigma] = 2^{-n+1}$ , pois a probabilidade de  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  ser um caminho hamiltoniano em  $T$  é  $2^{-n+1}$ . Segue, então, que  $X = \sum_{\sigma} X_\sigma$ . Portanto

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\sigma} \mathbb{E}[X_\sigma] = \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

Consequentemente, existe um torneio com  $n$  vértices contendo pelo menos  $n!/2^{n-1}$  caminhos hamiltonianos.  $\square$

Lembre-se que um conjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}$  é dito *livre de soma* se não existem três elementos  $x, y, z \in A$  tais que  $x + y = z$ . De forma análoga, definimos conjuntos livres de soma em  $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$  considerando a soma módulo  $p$ .

**Teorema 5.3.10 (Erdős).** *Se  $A$  é um conjunto de  $n$  inteiros positivos, então existe  $B \subseteq A$  tal que  $|B| > n/3$  e  $B$  é livre de soma.*

*Demonstração.* Tome um número primo  $p$  da forma  $p = 3k + 2$  suficientemente grande tal que  $p > 2 \cdot \max A$ . Seja  $\mathbb{Z}_p^* := \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  e considere

$$C = \{i \in \mathbb{N} : k < i \leq 2k + 1\}.$$

Temos que  $|C| = k + 1 > (p - 1)/3$ . Ademais, note que  $C$  é livre de soma em  $\mathbb{Z}_p$ .

Considere agora um elemento  $t \in \mathbb{Z}_p^*$  escolhido uniformemente ao acaso. Seja  $Y = tA \pmod{p}$ . Note que, para todo  $a \in \mathbb{Z}_p^*$ , temos que  $\mathbb{P}(a \in Y) = |A|/(p - 1)$ . Consequentemente,

$$\mathbb{E}[|Y \cap C|] = \sum_{x \in C} \mathbb{P}(x \in Y) = \frac{|A||C|}{p - 1} > \frac{|A|}{3}.$$

Logo, existe  $t_0 \in \mathbb{Z}_p^*$  tal que  $Y_0 \equiv t_0 A \pmod{p}$  tem mais que  $|A|/3$  elementos em  $C$ . Seja

$$B = \{a \in A : t_0 a \in C \pmod{p}\}.$$

Segue que  $B$  é soma livre. De fato, do contrário, se houvesse  $x, y, z \in B$  tais que  $x + y = z$ , então teríamos que  $t_0 x + t_0 y \equiv t_0 z \pmod{p}$ , contradizendo o fato de que  $C$  é livre de soma em  $\mathbb{Z}_p$ . Ademais,  $|B| = |Y_0 \cap C| > |A|/3$ .  $\square$

Uma aplicação típica do Método Probabilístico consiste em sortear uma instância (entrada) aleatória para um algoritmo que nos retorna algo que estejamos procurando. Enquanto que em muitas das situações é difícil determinar qual é a instância ótima para o algoritmo, determinando a esperança de uma instância aleatória, que pode ser uma tarefa bem mais simples. Veremos isso na nossa próxima aplicação.

**Teorema 5.3.11.** *Para todo grafo  $G$ , temos*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d(v)}.$$

*Demonstração.* Seja  $n = v(G)$ . Considere uma função  $\sigma: V(G) \rightarrow [n]$  escolhida uniformemente ao caso dentre todas  $n!$  funções bijetivas de  $V(G)$  para  $[n]$ . Pense em  $\sigma$  como uma *ordenação* aleatória dos vértices de  $G$ . Seja

$$A = \{v \in V(G) : \sigma(v) < \min \sigma(N(v))\}.$$

Isto é,  $A$  contém os vértices de  $G$  os quais aparecem antes de seus vizinhos na ordenação  $\sigma$ . Note que  $A$  é um conjunto independente em  $G$ . De fato, se  $uv$  fosse uma aresta em  $G[A]$  e, digamos,  $\sigma(u) < \sigma(v)$ , então  $v$  não deveria pertencer a  $A$ .

Agora, para cada  $v \in V(G)$ , temos que

$$\mathbb{P}(v \in A) = \frac{1}{1 + d(v)}.$$

Logo

$$\mathbb{E}[|A|] = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d(v)}.$$

Portanto, existe um conjunto independente de tamanho afirmado. □

Finalizamos a seção com uma propriedade útil da esperança. Dizemos que uma função diferenciável  $f$  é *convexa* se seu gráfico está “acima” de todas as suas retas tangentes. Formalmente,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$  vale que a reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $x_0$ , que denotaremos por  $L_{x_0}(x)$ , é tal que  $f(x) \geq L_{x_0}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 5.3.12** (Desigualdade de Jensen). *Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa e  $X$  uma variável aleatória finita tomando valores reais. Então*

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

*Demonstração.* Tome  $x_0 = \mathbb{E}[X]$ . Observe que como esperança é um operador linear e  $L_{x_0}(x)$  é uma função afim (isto é, da forma  $ax + b$ ), vale que  $\mathbb{E}[L_{x_0}(X)] = L_{x_0}(\mathbb{E}[X])$ . Assim, pela definição de convexidade,

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq \mathbb{E}[L_{x_0}(X)] = L_{x_0}(\mathbb{E}[X]) = f(\mathbb{E}[X]),$$

em que usamos  $L_{x_0}(x_0) = f(x_0)$  por definição de reta tangente. Isso conclui a prova. □

O seguinte caso particular da desigualdade de Jensen é de suma importância. Sejam  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Defina uma variável aleatória  $X$  escolhendo  $i \in [n]$  uniformemente ao acaso e colocando  $X = x_i$ . A desigualdade de Jensen permite concluir que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]) = f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Isto é, sujeito a  $\sum_{i=1}^n x_i = S$ , uma soma da forma  $\sum_{i=1}^n f(x_i)$  é minimizada quando todos os  $x_i$  são iguais à média  $(S/n)$ .

## 5.4 Sorteios de grafos

Muitos dos problemas que podem ser resolvidos pelo Método Probabilístico consistem em tomar um grafo aleatório. Nesta seção, iremos introduzir o modelo de grafo aleatório de Erdős e Rényi que será bastante frequente no livro daqui em diante.

**Definição 5.4.1.** Dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $p \in [0, 1]$ , definimos  $G(n, p)$  como o grafo aleatório com  $n$  vértices obtido ao adicionarmos uma aresta entre cada par de vértices  $u, v \in V(G(n, p))$  de forma aleatória e independente com probabilidade  $p$ .

Note que  $G(n, p)$  não é exatamente um grafo, mas uma distribuição dentre todos os grafos com  $n$  vértices. Um evento nesta distribuição corresponde, então, a uma coleção de grafos.

Em nossas aplicações,  $p = p(n)$  será tipicamente uma função de  $n$ . Dizemos que um evento em  $G(n, p)$  ocorre com *alta probabilidade* se a probabilidade de tal evento (na distribuição  $G(n, p)$ ) converge para 1 quando  $n \rightarrow \infty$ .

O seguinte teorema nos dá um limitante para o número de independência de  $G(n, p)$ . Veremos na Seção 5.6 que tal limitante pode ser melhorado no caso  $p = 1/2$ .

**Teorema 5.4.2.** *Seja  $p = p(n) \in (0, 1)$ . Então*

$$\alpha(G(n, p)) \leq \frac{2 \log n}{p}$$

*com alta probabilidade.*

*Demonstração.* Seja  $G = G(n, p)$ . Note que a probabilidade de um dado conjunto  $S \subseteq V(G)$  de tamanho  $k$  formar um conjunto independente em  $G$  é

$$\mathbb{P}(e(G[S]) = 0) = (1 - p)^{\binom{k}{2}}.$$

Logo, pela cota da união, temos que

$$\mathbb{P}(\alpha(G(n, p)) \geq k) \leq \binom{n}{k} (1 - p)^{\binom{k}{2}} \leq \left( \frac{en}{k} \cdot e^{-p(k-1)/2} \right)^k.$$

Agora, se  $pk \geq 2 \log n$ , então

$$\frac{en}{k} \cdot e^{-p(k-1)/2} \leq \frac{5}{k}$$

e portanto,

$$\mathbb{P}(\alpha(G(n, p)) \geq k) \leq \left( \frac{5}{k} \right)^k \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , como desejado.  $\square$

Usando o Teorema 5.4.2, podemos deduzir o seguinte limitante para número cromático de um grafo aleatório.

**Corolário 5.4.3.** *Seja  $p = p(n) \in (0, 1)$ . Então*

$$\chi(G(n, p)) \geq \frac{pn}{2 \log n}$$

*com alta probabilidade.*

*Demonstração.* Lembre-se do Capítulo 2 (Lema 2.4.3) que, para qualquer grafo  $G$  com  $n$  vértices,

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n.$$

Aplicando isso a  $G(n, p)$ , e usando o Teorema 5.4.2, segue que

$$\chi(G(n, p)) \geq \frac{n}{\alpha(G(n, p))} \geq \frac{pn}{2 \log n}$$

com alta probabilidade, como desejado.  $\square$

## 5.5 Método da Alteração

Muitas das vezes, uma construção aleatória não nos dá diretamente o exemplo que procuramos para resolver um problema. Contudo, podemos partir de uma construção aleatória e mostrar que com probabilidade positiva, tal construção possui propriedades satisfatórias. Em seguida, podemos tomar uma instância de tal construção e alterá-la um pouco a fim de obtermos o exemplo desejado. Tal paradigma é comumente chamado de *Método da Alteração*.

Vejamos com o exemplo a seguir como o Método da Alteração pode ser usado.

**Teorema 5.5.1.** *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices e grau médio  $d$ , então*

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}.$$

*Demonstração.* Sejam  $m = e(G)$  e  $p \in [0, 1]$  um parâmetro a ser escolhido posteriormente. Considere um conjunto aleatório  $A \subseteq V(G)$  obtido escolhendo cada vértice  $v$  de  $G$  com probabilidade  $p$  de forma independente. Em particular, temos que  $\mathbb{E}[|A|] = np$ .

Agora, para cada  $uv \in E(G)$ , temos que

$$\mathbb{P}(uv \in E(G[A])) = \mathbb{P}(u \in A)\mathbb{P}(v \in A) = p^2.$$

Consequentemente,

$$\mathbb{E}[e(G[A])] = p^2 e(G) = \frac{p^2 nd}{2}.$$

Logo,

$$\mathbb{E}[|A| - e(G[A])] = pn \left(1 - \frac{pd}{2}\right).$$

Segue que existe um conjunto  $A \subseteq V(G)$  para o qual

$$|A| - e(G[A]) \geq pn \left(1 - \frac{pd}{2}\right).$$

Um simples cálculo mostra que o valor de  $p$  que maximiza o lado direito da equação acima é  $p = 1/d$ , obtendo

$$|A| - e(G[A]) \geq \frac{n}{2d}.$$

Por fim, removendo um vértice de  $A$  para cada aresta de  $G$  contida em  $A$ , obtemos um conjunto independente de tamanho pelo menos  $n/(2d)$ , como desejado.  $\square$

A prova do teorema acima ilustra uma típica aplicação do Método da Alteração. Nesse exemplo, podemos ver que não é suficiente tomar um conjunto de vértices aleatório  $A \subseteq G$ , pois existe uma chance de  $A$  não ser independente. Contudo, se  $A$  tipicamente não contiver muitas arestas, podemos remover de  $A$  poucos vértices destruindo todas as arestas dentro de  $A$ , obtendo um conjunto independente no final. Agora, não é claro de início com qual probabilidade devemos escolher os vértices de  $A$  e precisamos otimizar o valor de  $p$ .

Vejamos agora uma aplicação apresentada por Erdős que mostra que existem grafos sem ciclos pequenos e com número cromático tão grande quanto se queira. Lembre-se que  $g(G)$  denota a cintura do grafo  $G$ , isto é, o tamanho do menor ciclo contido em  $G$ .

**Teorema 5.5.2** (Erdős). *Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe um grafo  $G$  com*

$$\chi(G) \geq k \quad e \quad g(G) \geq k.$$

Em particular, existem grafos sem triângulos com número cromático tão grande quanto se queira, resolvendo o problema mencionado no início do capítulo. Para provarmos o Teorema 5.5.2, precisaremos do seguinte ingrediente que também será essencial em muitas outras provas daqui para frente.

**Proposição 5.5.3** (Desigualdade de Markov). *Se  $X$  é uma variável aleatória não negativa e  $\lambda > 0$ , então*

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}.$$

*Demonstração.* Seja  $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq \lambda\}$ . Temos que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega) \geq \sum_{\omega \in A} \lambda \cdot \mathbb{P}(\omega) = \lambda \cdot \mathbb{P}(A).$$

Como  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq \lambda)$ , temos provado a desigualdade.  $\square$

*Demonstração do Teorema 5.5.2.* Fixe  $k \in \mathbb{N}$  e considere o grafo aleatório  $G(n, p)$  com  $p = n^{-1+\varepsilon}$ , em que  $\varepsilon = 1/k$ . Seja  $X$  o número de ciclos de tamanho no máximo  $k-1$  em  $G(n, p)$ . Por definição de ciclo, existem no máximo  $n^i$  ciclos de tamanho  $i$  contidos em  $K_n$ . Segue, então, que

$$\mathbb{E}[X] \leq \sum_{i=3}^{k-1} n^i p^i = \sum_{i=3}^{k-1} n^{\varepsilon i} < k n^{\varepsilon(k-1)} = o(n).$$

Pela desigualdade de Markov, temos que

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2}{n} \cdot \mathbb{E}[X] = o(1).$$

Logo, com alta probabilidade,  $G(n, p)$  tem no máximo  $n/2$  ciclos de tamanho menor que  $k$ .

Agora, pelo Teorema 5.4.2, temos que  $\alpha(G(n, p)) \leq (2 \log n)/p$ , com alta probabilidade. Então, existe um grafo  $G'$  com  $n$  vértices e no máximo  $n/2$  ciclos de tamanho menor que  $k$ , tal que  $\alpha(G') \leq 2n^{1-\varepsilon} \log n$ .

Removendo no máximo  $n/2$  vértices de  $G'$  (possivelmente um vértice para cada ciclo de tamanho menor que  $k$ ), obtemos um grafo  $G$  com  $v(G) \geq n/2$ ,  $g(G) \geq k$  e  $\alpha(G) \leq \alpha(G') \leq 2n^{1-\varepsilon} \log n$ . Em particular, segue do Lema 2.4.3 que

$$\chi(G) \geq \frac{v(G)}{\alpha(G)} \geq \frac{n^\varepsilon}{4 \log n}.$$

Tomando  $n$  suficientemente grande, temos  $\chi(G) \geq k$ , como desejado.  $\square$

Vejam agora como podemos usar  $G(n, p)$  para determinar cotas para os *números de Ramsey assimétricos*. Lembre-se que  $R(3, k)$  é o menor  $n$  tal que toda 2-coloração das arestas de  $K_n$  contém uma cópia monocromática vermelha de  $K_3$  ou uma cópia monocromática azul de  $K_k$ . Equivalentemente,  $R(3, k)$  é o menor  $n$  tal que todo grafo  $G$  com  $n$  vértices e livre de triângulos satisfaz  $\alpha(G) \geq k$ .

**Teorema 5.5.4.** *Existe  $c > 0$  tal que*

$$R(3, k) \geq \left( \frac{ck}{\log k} \right)^{3/2},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Seja  $n = \left( \frac{k}{4 \log k} \right)^{3/2}$ . Mostraremos que existe um grafo  $G$  com  $n/2$  vértices que é livre de triângulos e satisfaz  $\alpha(G) < k$ .

Considere  $G(n, p)$  com  $p = n^{-2/3}$  e note que  $pk = 4 \log k$ . Pelo Teorema 5.4.2, temos que com alta probabilidade,

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n}{p} < k,$$



uma vez que  $n < k^2$  e, portanto,  $\log n < 2 \log k$ .

Agora, seja  $X$  o número de triângulos em  $G(n, p)$ . Temos que

$$\mathbb{E}[X] = p^3 \binom{n}{3} \leq \frac{p^3 n^3}{6} = \frac{n}{6}.$$

Logo, pela desigualdade de Markov,

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2}{n} \cdot \mathbb{E}[X] \leq \frac{1}{3}.$$

Segue que existe um grafo  $G'$  com  $n$  vértices,  $\alpha(G') < k$ , que contém no máximo  $n/2$  triângulos. Removendo no máximo  $n/2$  vértices de  $G'$  (um para cada triângulo), obtemos um grafo  $G$  como desejado.  $\square$

## 5.6 Método do Segundo Momento

Veremos que em algumas aplicações não será suficiente apenas calcular a esperança de uma variável aleatória. Teremos também que provar que com alta probabilidade a variável aleatória é concentrada em torno da sua média. Existem diversos métodos para provarmos a concentração de uma variável aleatória. Um dos métodos mais básicos consiste em estimar o *segundo momento*, como veremos nesta seção.

**Definição 5.6.1.** A *variância* de uma variável aleatória  $X$  é definida por

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Ademais, definimos o *desvio padrão* de  $X$  como o número  $\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

Note que também podemos calcular a variância de uma variável aleatória usando a seguinte fórmula:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Tal fórmula segue da definição de  $\text{Var}(X)$  usando a linearidade da esperança. Além disso, também como consequência da linearidade da esperança, vale, para toda constante  $c \in \mathbb{R}$ , que

$$\text{Var}(c \cdot X) = c^2 \cdot \text{Var}(X). \quad (5.1)$$

Finalmente, temos, como consequência da Proposição 5.3.5, que a seguinte proposição é verdadeira. Deixamos a prova a cargo do leitor.

**Proposição 5.6.2.** *Se  $X_1, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes, então*

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Um importante uso da variância é a desigualdade de Chebyshev, que enunciamos abaixo.

**Proposição 5.6.3** (Desigualdade de Chebyshev). *Se  $X$  é uma variável aleatória e  $\lambda > 0$ , então*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}.$$

*Demonstração.* Basta aplicarmos a desigualdade de Markov:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) = \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \lambda^2\right) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}.$$

□

Em particular, se tomarmos  $\lambda = t \cdot \sigma(X)$  para  $t > 0$ , temos a seguinte formulação da desigualdade de Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \cdot \sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Em outras palavras, com probabilidade  $1 - t^{-2}$ , temos que  $X$  está a distância no máximo  $t\sigma(X)$  da sua esperança. Isto justifica o termo *desvio padrão* para  $\sigma(X)$ , pois  $\sigma(X)$  quantifica com certa precisão o quanto  $X$  se *desvia* da sua esperança.

Vejamos a seguir uma aplicação da desigualdade de Chebyshev em um problema de combinatória. Dado um conjunto  $A \subseteq \mathbb{N}$ , denotamos por  $\Sigma(A)$  o conjunto de todos os números que podem ser obtidos ao somarmos elementos distintos<sup>2</sup> de  $A$ . Note que  $|\Sigma(A)| \leq 2^{|A|}$ . Dizemos que um conjunto  $A$  *tem somas distintas* se  $|\Sigma(A)| = 2^{|A|}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $f(n)$  o tamanho do maior conjunto contido em  $[n]$  que tem somas distintas. É fácil ver que  $f(n) \geq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ ; basta considerar o conjunto  $A = \{2^i : 0 \leq i \leq \log_2 n\}$ . O seguinte teorema mostra que tal limitante é quase ótimo.

**Teorema 5.6.4.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$f(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1).$$

---

<sup>2</sup>A soma dos elementos do conjunto vazio é 0.

*Demonstração.* Considere um conjunto  $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq [n]$  de somas distintas contido em  $[n]$ . Sejam  $X_1, \dots, X_m$  variáveis aleatórias independentes, todas com distribuição de Bernoulli com parâmetro  $1/2$ , de modo que  $\text{Var}(X_i) = 1/4$  para todo  $i \in [m]$ . Considere a variável aleatória  $X = a_1 X_1 + \dots + a_m X_m$ . Temos que

$$\mu := \mathbb{E}[X] = \frac{a_1 + \dots + a_m}{2}.$$

Concluimos de (5.1) e da Proposição 5.6.2 que

$$\text{Var}(X) = \frac{a_1^2 + \dots + a_m^2}{4} \leq \frac{n^2 m}{4}.$$

Seja  $t > 1$  constante. Pela desigualdade de Chebyshev, temos

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq \frac{tn\sqrt{m}}{2}\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| < \frac{tn\sqrt{m}}{2}\right) \geq 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Por outro lado, como  $A$  é um conjunto de somas distintas, segue que, para todo  $x \in \mathbb{N}$ , temos  $\mathbb{P}(X = x)$  igual a zero ou igual a  $2^{-m}$ . Logo

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| < \frac{tn\sqrt{m}}{2}\right) \leq \frac{tn\sqrt{m} + 1}{2^m}.$$

Concluimos que

$$n \geq \frac{2^m(1 - t^{-2}) - 1}{t\sqrt{m}} = \Omega\left(\frac{2^m}{\sqrt{m}}\right).$$

Disso, obtemos que

$$m \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 m + O(1).$$

Como  $m \leq n$ , obtemos o resultado desejado. □

Em muitas das aplicações desigualdade de Chebyshev, a variável aleatória em questão é uma soma de variáveis aleatórias indicadoras. Neste caso, podemos formular um critério bastante simples para concluir a concentração da variável em torno da média.

Considere  $t$  eventos  $A_1, \dots, A_t$  em um mesmo espaço de probabilidade e seja  $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ , para cada  $i \in [t]$ . Seja

$$X = X_1 + \dots + X_t.$$

Note que se  $A_i$  e  $A_j$  são independentes, então

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j].$$

Iremos escrever  $i \sim j$  se  $i \neq j$  e  $A_i$  e  $A_j$  não são independentes. Segue que

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t (\mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]) \\ &\leq \sum_{i=1}^t \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &= \mathbb{E}[X] + \Delta, \end{aligned}$$

em que

$$\Delta := \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

Consequentemente, obtemos o seguinte corolário da desigualdade de Chebyshev.

**Proposição 5.6.5.** *Sejam  $A_1, \dots, A_t$  eventos em um mesmo espaço de probabilidade e  $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ , e defina*

$$X = X_1 + \dots + X_t.$$

*Se  $\mathbb{E}[X] \rightarrow \infty$  e  $\Delta = o(\mathbb{E}[X]^2)$ , então com alta probabilidade, temos  $X > 0$ .*

*Demonstração.* De fato, pela desigualdade de Chebyshev, temos que

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \frac{\mathbb{E}[X]}{2}\right) \leq \frac{4 \cdot \text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2}. \quad (5.2)$$

Por outro lado, as hipóteses do enunciado implicam que

$$\frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}[X]} + \frac{\Delta}{\mathbb{E}[X]^2} = o(1).$$

Logo, o lado direito de (5.2) tende a zero, provando o resultado desejado.  $\square$

A seguinte aplicação da desigualdade de Chebyshev mostra que quase todo grafo com  $n$  vértices tem número de independência aproximadamente  $2 \log_2 n$ .

**Teorema 5.6.6.** *Com alta probabilidade, temos*

$$\alpha(G(n, 1/2)) = (2 + o(1)) \log_2 n.$$

*Demonstração.* Seja  $G = G(n, 1/2)$ . Fixe  $k \in [n]$ . Para cada  $S \subseteq V(G)$  com  $|S| = k$ , seja  $X_S$  a variável aleatória indicadora para o evento  $e(G[S]) = 0$ . Considere

$$X = \sum_{S \in \binom{V(G)}{k}} X_S.$$

Temos que

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Observe que  $\alpha(G) \geq k$  se, e somente se,  $X > 0$ . A fim de concluir o teorema, será suficiente mostrarmos que para todo  $\varepsilon > 0$ , com alta probabilidade, temos

- (i)  $X = 0$ , para  $k > (2 + \varepsilon) \log_2 n$  e
- (ii)  $X > 0$ , para  $k < (2 - \varepsilon) \log_2 n$ .

O item (i) segue da desigualdade de Markov, pois se  $k > (2 + \varepsilon) \log_2 n$ , então

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \leq \left(n 2^{-(k-1)/2}\right)^k \leq n^{-\varepsilon k/3} = o(1).$$

Para o item (ii), usaremos Proposição 5.6.5. Note que se  $k < (2 - \varepsilon) \log_2 n$ , então  $\mathbb{E}[X] \rightarrow \infty$ . Agora, temos que

$$\Delta = \sum_{S \sim T} \mathbb{P}(X_S X_T \geq 1),$$

em que  $S \sim T$  indica que o somatório é para todos os pares de conjuntos  $S, T \in \binom{V(G)}{k}$  com  $2 \leq |S \cap T| \leq k-1$ . Calculando  $\Delta$ , temos

$$\Delta = \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k-i} \binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2} - 2\binom{k}{2}} = \mathbb{E}[X]^2 \cdot \sum_{i=2}^{k-1} g(i),$$

em que

$$g(i) = \frac{\binom{n-k}{k-i} \binom{k}{i}}{\binom{n}{k}} \cdot 2^{\binom{i}{2}}.$$

Deixaremos para o leitor verificar<sup>3</sup> que para todo  $2 \leq i \leq k-1$ , temos  $g(i) = o(n^{-1})$ . Logo

$$\frac{\Delta}{\mathbb{E}[X]^2} = o(kn^{-1}) = o(1).$$

Segue da Proposição 5.6.5 que, com alta probabilidade, temos  $X > 0$ . □

Com uma prova análoga à do Corolário 5.4.3, deduzimos do Teorema 5.6.6 que

$$\chi(G(n, 1/2)) \leq \left( \frac{1}{2} + o(1) \right) \cdot \frac{n}{\log_2 n}.$$

Veremos no Capítulo 10 que, surpreendentemente, esse limitante é assintoticamente justo.

## 5.7 Método da Concentração

A seguinte desigualdade nos dá uma concentração em torno da média para variáveis aleatórias binomiais com probabilidade mais alta do que a desigualdade de Chebyshev. Tal concentração em torno da média é tão forte que nos permite que várias variáveis sejam concentradas ao mesmo tempo, como veremos em algumas aplicações.

**Proposição 5.7.1** (Desigualdade de Chernoff). *Se  $\varepsilon \in (0, 1]$  e  $X$  é uma variável aleatória binomial com média  $\mu$ , então*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon \mu) \leq 2e^{-\varepsilon^2 \mu/3}.$$

---

<sup>3</sup>Sugestão: Limite  $g(2)$ ,  $g(k-1)$  e, para todo  $2 \leq i \leq \frac{k}{2}$ , os quocientes  $\frac{g(i+1)}{g(i)}$  e  $\frac{g(k-i)}{g(k-i+1)}$ .

A prova da desigualdade de Chernoff está, contudo, além dos propósitos deste livro, e indicamos ao leitor (Janson, Łuczak e Ruciński 2000) para uma prova detalhada e generalizações.

Nesta seção, veremos uma aplicação um pouco avançada que ilustra o poder da desigualdade de Chernoff. Veremos também ao longo do livro a desigualdade de Chernoff sendo usada em várias outras ocasiões.

Lembre-se que, para dois grafos  $G$  e  $H$ , escrevemos  $G \rightarrow H$  se para toda 2-coloração das arestas de  $G$  existe uma cópia monocromática de  $H$ . O *número tamanho Ramsey* de  $H$  é definido como

$$\hat{r}(H) = \min\{e(G) : G \rightarrow H\}.$$

A nossa aplicação da desigualdade de Chernoff é um teorema de Beck (1983b), que afirma que caminhos possuem número tamanho Ramsey linear. A prova que apresentaremos é devida a Dudek e Prałat (2015).

**Teorema 5.7.2** (Beck, 1983). *Existe  $C > 0$  tal que*

$$\hat{r}(P_k) \leq Ck,$$

*para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

A ideia da prova do Teorema 5.7.2 é mostrar que, com alta probabilidade, o grafo aleatório  $G = G(n, p)$  com  $n = O(k)$  e  $p = c/n$  satisfaz  $G \rightarrow P_k$  para algum  $c > 0$ . Como  $G$  tipicamente tem no máximo  $pn^2 = O(k)$  arestas, isto será suficiente para concluir o teorema. Primeiramente, iremos provar que, com alta probabilidade, existe uma aresta entre qualquer par de conjuntos disjuntos  $X, Y \subseteq V(G)$  suficientemente grandes. Em seguida, mostraremos que é possível particionar  $V(G)$  em quatro conjuntos  $V(G) = A \cup B \cup X \cup Y$  de modo que  $A$  e  $B$  formam, respectivamente, um caminho azul e vermelho; e  $X$  e  $Y$  têm o mesmo tamanho e não há arestas entre eles. Consequentemente, não podemos ter  $X$  e  $Y$  grandes. Logo, um dos caminhos  $A$  ou  $B$  deverá ser grande suficiente para conter um  $P_k$ .

Para formalizarmos essa ideia da prova do Teorema 5.7.2, precisaremos provar dois lemas usando a desigualdade de Chernoff.

**Lema 5.7.3.** *Seja  $c > 0$ , e considere o grafo aleatório  $G(n, p)$  com  $p = c/n$ . Temos*

$$\mathbb{P}\left(e(G(n, p)) \geq pn^2\right) \leq e^{-cn/8}.$$

*Demonstração.* Observe que  $e(G(n, p))$  é uma variável aleatória binomial com média  $\mu = p\binom{n}{2}$ . Então, pela desigualdade de Chernoff,

$$\mathbb{P}\left(e(G(n, p)) \geq pn^2\right) \leq 2e^{-\mu/3} \leq e^{-pn^2/8} = e^{-cn/8},$$

como afirmamos.  $\square$

Dado conjuntos disjuntos  $X, Y \subseteq V(G)$  num grafo  $G$ , escrevemos  $e(X, Y)$  para o número de arestas de  $G$  com um vértice em  $X$  e o outro em  $Y$ .

**Lema 5.7.4.** *Seja  $c > 0$  e considere o grafo aleatório  $G(n, p)$  com  $p = c/n$ . Com alta probabilidade,*

$$e(X, Y) \geq 1$$

para todo  $X, Y \subseteq V(G(n, p))$  disjuntos com  $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-1/2}n$ .

*Demonstração.* Observe que, se  $X, Y \subseteq V(G)$  são disjuntos, então  $e(X, Y)$  é uma variável aleatória binomial com média  $\mu = p|X||Y|$ . Pela desigualdade de Chernoff, se  $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-1/2}n$ , então

$$\mathbb{P}(e(X, Y) = 0) \leq 2e^{-p|X||Y|/4} \leq e^{-2n}.$$

em que usamos que  $p|X||Y| \geq 9c^{-1}pn^2 = 9n$ .

Somando, para todas as escolhas de  $X$  e  $Y$ , que são no máximo  $4^n$ , a probabilidade de existirem  $X$  e  $Y$  subconjuntos de  $V(G)$  com pelo menos  $3c^{-1/2}n$  vértices cada e tais que  $e(X, Y) = 0$  é no máximo  $4^n e^{-2n} = o(1)$ .  $\square$

*Demonstração do Teorema 5.7.2.* Sejam  $a$  e  $c$  constantes positivas suficientemente grandes. Tome  $n = ak$  e  $C = ac$ . Aplicando Lema 5.7.4 com  $p = c/n$ , temos que existe um grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $e(G) \leq pn^2 = Ck$  tal que  $e(X, Y) \geq 1$  para quaisquer  $X, Y \subseteq V(G)$  disjuntos com  $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-1/2}n$ . Mostraremos que  $G \rightarrow P_k$ . Para isso, suponha, por absurdo, que  $G$  admite uma 2-coloração de suas arestas que não contém  $P_k$  monocromático.

Iremos descrever um algoritmo que nos produzirá uma partição de  $V(G)$  em três conjuntos  $V(G) = A \cup X \cup Y$ , na qual os vértices de  $A$  (podendo  $A$  ser vazio) formarão um caminho monocromático azul e todas as arestas de  $G$  entre  $X$  e  $Y$  serão vermelhas. Além disso, ao final do algoritmo, teremos  $|X| = |Y| \geq k(a-1)/2$ .

Inicialmente, tomamos  $A = X = \emptyset$  e  $Y = V(G)$ . O algoritmo, conhecido como *busca em profundidade*, consistirá de vários passos. Num passo genérico do algoritmo, fazemos o seguinte:



- Se  $A$  for vazio, então movemos um vértice  $u$  qualquer de  $Y$  para  $A$ .
- Se  $A$  não for vazio, seja  $v \in A$  o último vértice adicionado à  $A$  ( $v$  corresponde a uma extremidade do caminho monocromático azul representado por  $A$ ). Se existir algum vértice  $u \in Y$  tal que  $uv$  é uma aresta azul em  $G$ , então movemos  $u$  de  $Y$  para  $A$ . Se tal vértice não existir, movemos  $v$  de  $A$  para  $X$ .

O algoritmo consiste de efetuar passos como descrito acima, quantas vezes for necessário, até que  $|X| = |Y|$ .

Perceba que os vértices de  $A$  (na ordem em que foram adicionados) formam um caminho azul. Assim, por hipótese,  $|A| \leq k$ . Além disso, as arestas entre  $X$  e  $Y$  são todas vermelhas. Note que, em cada passo do algoritmo,  $|Y| - |X|$  diminui em uma unidade. Como inicialmente temos  $|Y| - |X| = n$ , em algum passo do algoritmo teremos  $|X| = |Y|$ . Como

$$|X| + |Y| = n - |A| \geq k(a - 1),$$

obtemos a partição desejada.

Invertendo o papel das cores, o mesmo algoritmo nos dá uma partição  $V(G) = A' \cup X' \cup Y'$  tal que os vértices de  $A'$  formam um caminho monocromático vermelho, todas as arestas de  $G$  entre  $X'$  e  $Y'$  são azuis e  $|X'| = |Y'| \geq k(a - 1)/2$ . Para prosseguir, definiremos as famílias

$$\mathcal{P}_1 = \{(X, X'), (Y, Y')\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 = \{(X, Y'), (Y, X')\},$$

que satisfazem a seguinte propriedade.

**Afirmativa 5.7.5.** *Existe um  $i \in \{1, 2\}$  tal que*

$$|U \cap W| \geq \frac{k(a - 3)}{4}$$

para todo  $(U, W) \in \mathcal{P}_i$ .

*Demonstração.* A prova será por contradição. Suponha, sem perda de generalidade<sup>4</sup>, que  $|X \cap X'|$  e  $|X \cap Y'|$  são ambos menores que  $k(a - 3)/4$ . Então,

$$\frac{k(a - 3)}{2} > |X \cap X'| + |X \cap Y'| \geq |X| - |A'| \geq \frac{k(a - 3)}{2},$$

um absurdo. □

---

<sup>4</sup>Qualquer escolha de pares  $p_1 \in \mathcal{P}_1$  e  $p_2 \in \mathcal{P}_2$  tem exatamente um conjunto que figura em ambos  $(X, \text{ nesse caso})$ .

Pela afirmativa, podemos supor, permutando  $X'$  e  $Y'$  se necessário, que  $X \cap X'$  e  $Y \cap Y'$  são dois subconjuntos de  $V(G)$  de tamanho  $k(a-3)/4$ . Não há arestas entre eles, pois não há arestas azuis entre  $X$  e  $Y$  e não há arestas vermelhas entre  $X'$  e  $Y'$ . Além disso,

$$\frac{k(a-3)}{4} \geq 3c^{-1/2} \cdot n,$$

pois  $c$  é suficientemente grande e  $k = n/a$ . Mas isso contradiz a definição de  $G$  (ver Lema 5.7.4), provando o teorema.  $\square$

Sabe-se que, para  $k$  suficientemente grande,

$$\left(\frac{15}{4} - o(1)\right) \cdot k \leq \hat{r}(P_k) \leq 74k,$$

em que o limitante inferior deve-se à Bal e DeBiasio (2020) e o superior, a Dudek e Prałat (2017). É um problema em aberto determinar  $\hat{r}(P_k)$  assintoticamente.

## 5.8 Exercícios

**Exercício 5.8.1.** Considere  $n$  vetores  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ , todos com  $|v_i| = 1$ . Mostre que existem  $a_1, \dots, a_n \in \{-1, +1\}$  tais que

$$|a_1 v_1 + \dots + a_n v_n| \leq \sqrt{n}.$$

Mostre também que o mesmo resultado vale se revertermos o sinal da desigualdade acima.

**Exercício 5.8.2.** Use Teorema 5.3.11 para provar o Teorema de Turán: se um grafo  $G$  com  $n$  vértices é livre de  $K_r$ , então

$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

**Exercício 5.8.3** (Shearer). Seja  $G$  um grafo livre de triângulos. Mostre que

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{1 + d(v) + d_2(v)},$$

em que  $d_2(v)$  denota o número de vértices a distância 2 de  $v$ .

**Exercício 5.8.4** (Desigualdade de Chantelli). Seja  $X$  uma variável aleatória com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ . Mostre que

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + t\sigma) \leq \frac{1}{1 + t^2}.$$

[Dica: aplique a desigualdade de Markov para a variável aleatória  $(X - s)^2$ , com alguma escolha ótima de  $s \leq \mu$ .]

**Exercício 5.8.5.** Mostre que para todo  $k, r \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta > 0$  tal que o seguinte vale para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices tal que

$$e(G) > (1 - \delta) \binom{n}{2},$$

então, em cada  $r$ -coloração de  $E(G)$ , há pelo menos  $\delta n^k$  cópias monocromáticas de  $K_k$ .

**Exercício 5.8.6.** Prove que

$$R(4, k) \geq \left( \frac{ck}{\log k} \right)^2$$

para alguma constante  $c > 0$ .

**Exercício 5.8.7.** Dizemos que um grafo  $G$  contém uma *subdivisão* de  $K_k$  se  $G$  contém  $k$  vértices  $v_1, \dots, v_k$  e  $\binom{k}{2}$  caminhos internamente disjuntos ligando cada par de vértices  $v_i v_j$ .

Hajós conjecturou que se  $\chi(G) \geq k$ , então  $G$  contém uma subdivisão de  $K_k$ . Mostre que quase todo grafo é um contraexemplo para a conjectura de Hajós.

# 6

## Grafos Aleatórios

---

No capítulo anterior, apresentamos o grafo aleatório de Erdős e Rényi  $G(n, p)$  e vimos como ele pode ser usado para provar limitantes inferiores para números de Ramsey e para demonstrar a existência de objetos contraintuitivos, como grafos com cintura e número cromático altos. Neste capítulo, vamos estudar  $G(n, p)$  por si só, como um objeto matemático com propriedades bonitas e surpreendentes que irão, por sua vez, sugerir mais aplicações.

Para começar, vamos relembrar a definição de  $G(n, p)$ .

**Definição 6.0.1.** O grafo aleatório de Erdős e Rényi  $G(n, p)$  é obtido do grafo completo  $K_n$  ao mantermos cada aresta independentemente ao acaso com probabilidade  $p$ .

Observe que  $G(n, p)$  não é de fato um grafo; é uma distribuição de probabilidade sobre a família de todos os grafos com  $n$  vértices. Todas as afirmações que fizermos sobre  $G(n, p)$  serão, portanto, a cerca da probabilidade de certos eventos. Enfatizamos aqui que, ao longo deste capítulo, assumiremos que  $p = p(n)$  é uma função de  $n$ .

Começamos fazendo uma pergunta muito simples e básica: qual é a probabilidade de  $G(n, p)$  conter um triângulo? Isso nos levará à importante noção de *limiar*.

## 6.1 Triângulos em $G(n, p)$

Não é tão simples calcular a probabilidade do evento  $\{K_3 \subset G(n, p)\}$ , porque os triângulos em  $K_n$  se sobrepõem, o que cria uma estrutura complexa de dependências. Como no Capítulo 5, a estratégia que usaremos para superar este obstáculo será baseada em definir uma variável aleatória adequada, e calcular sua esperança. Vamos, então, usar a desigualdade de Markov ou a desigualdade de Chebyshev para completar a prova, dependendo do contexto.

Uma aplicação típica dessa estratégia implica no seguinte limitante para a probabilidade do evento no qual  $G(n, p)$  contém um triângulo.

**Teorema 6.1.1.** *Se  $p \ll 1/n$ , então*

$$\mathbb{P}(K_3 \subset G(n, p)) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Seja  $X$  a variável aleatória que conta o número de triângulos em  $G(n, p)$ , e observe que

$$\mathbb{P}(K_3 \subset G(n, p)) = \mathbb{P}(X \geq 1).$$

Agora, há  $\binom{n}{3}$  triângulos em  $K_n$ , e cada triângulo está contido em  $G(n, p)$  com probabilidade  $p^3$ , então, pela linearidade da esperança, temos

$$\mathbb{E}[X] = p^3 \binom{n}{3} \leq (pn)^3 \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela desigualdade de Markov, segue que

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , como afirmado. □

A seguir, provamos um limitante superior correspondente usando a desigualdade de Chebyshev.

**Teorema 6.1.2.** *Se  $p \gg 1/n$ , então*

$$\mathbb{P}(K_3 \subset G(n, p)) \rightarrow 1$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Seja  $X$  a variável aleatória que conta o número de triângulos em  $G(n, p)$ , e observe que agora temos

$$\mathbb{E}[X] = p^3 \binom{n}{3} \geq \left(\frac{pn}{3}\right)^3 \rightarrow \infty$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Para deduzir que o evento  $\{X \geq 1\}$  ocorre com alta probabilidade, vamos precisar limitar a variância de  $X$ . Para isso, note que

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{S \in \mathcal{T}} \sum_{T \in \mathcal{T}} \mathbb{P}(S \cup T \subset G(n, p)),$$

em que  $\mathcal{T}$  denota a coleção de todos os triângulos em  $K_n$ . Particionando a soma de acordo com a interseção de  $S$  e  $T$ , segue que

$$\mathbb{E}[X^2] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 + p^5 n^4.$$

De fato, a soma dos termos com  $S = T$  é exatamente  $\mathbb{E}[X]$ ; os pares  $(S, T)$  que são aresta-disjuntos contribuem com no máximo  $\mathbb{E}[X]^2$ , uma vez que neste caso os eventos  $\{S \subset G(n, p)\}$  e  $\{T \subset G(n, p)\}$  são independentes; e finalmente, os pares  $(S, T)$  que se intersectam em exatamente uma aresta contribuem no máximo  $p^5 n^4$ , uma vez que neste caso,  $S \cup T$  é um grafo com quatro vértices e cinco arestas. Portanto

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[X] + p^5 n^4 \ll \mathbb{E}[X]^2,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uma vez que  $\mathbb{E}[X] \gg 1$  e  $pn^2 \gg 1$ . Pela desigualdade de Chebyshev, segue que

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}[X]/2) \leq \frac{4 \cdot \text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , como afirmado.  $\square$

Dizemos que  $1/n$  é um *limiar* para o evento  $\{K_3 \subset G(n, p)\}$ , o que significa que se  $p \gg 1/n$ , então o evento acontece com alta probabilidade; enquanto que se  $p \ll 1/n$ , então o evento falha com alta probabilidade. Vamos discutir esse fenômeno com mais detalhes na Seção 6.4.

É simples generalizar os Teoremas 6.1.1 e 6.1.2 para cliques, e para vários outros grafos “balanceados”. Faremos isso no Teorema 6.5.2.

O leitor deve estar se perguntando se é ou não provável que  $G(n, p)$  contenha um triângulo quando  $p = c/n$  para alguma constante  $c > 0$ . Esse é de fato um problema interessante; iremos mostrar no Capítulo 10 que tal probabilidade converge para  $f(c) \in (0, 1)$ , para uma função  $f$  (explícita).

## 6.2 Números extremais de ciclos pares

Lembre-se do Capítulo 3 que  $\text{ex}(n, H) = O(n)$  para todo grafo acíclico  $H$ . De fato, qualquer grafo acíclico está contido em uma árvore, e nós provamos que  $\text{ex}(n, T) \leq (k-2)n$  para todas as árvores com  $k$  vértices. Usando o método da alteração, introduzido no capítulo anterior, deduziremos que, de fato, temos  $\text{ex}(n, H) = O(n)$  se e somente se  $H$  é acíclico.

O passo chave é o seguinte teorema. Note que o limitante dado no teorema seguinte é trivial quando  $k$  é ímpar, uma vez que nesse caso temos  $\text{ex}(n, C_k) \geq n^2/4$ , como pode ser observado tomando um grafo bipartido completo e balanceado. Contudo, quando  $k$  é par, não temos essa construção simples.

**Teorema 6.2.1.** *Para cada  $k \geq 3$ , temos*

$$\text{ex}(n, C_k) \geq n^{1+1/k},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Tome  $p = 8 \cdot n^{-1+1/k}$ , e denote por  $X$  o número de cópias de  $C_k$  em  $G(n, p)$ . Há no máximo  $n^k$  cópias de  $C_k$  em  $K_n$ , e cada cópia é contida em  $G(n, p)$  com probabilidade  $p^k$ . Então, pela linearidade da esperança, temos que

$$\mathbb{E}[X] \leq p^k n^k = 2^{3k} n,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela desigualdade de Markov, segue que

$$\mathbb{P}(X \geq 2^{4k} n) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{2^{4k} n} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Agora, pela desigualdade de Chernoff, temos

$$\mathbb{P}\left(e(G(n, p)) \leq pn^2/4\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Segue, então, que existe um grafo  $G'$  com  $n$  vértices e com pelo menos  $pn^2/4$  arestas que contém no máximo  $2^{4k}n$  cópias de  $C_k$ . Note que, uma vez que  $n$  é suficientemente grande, temos  $2^{4k}n < pn^2/8$ . Então, removendo uma aresta de cada cópia de  $C_k$  em  $G'$ , nós obtemos um grafo  $G$  com  $n$  vértices, livre de  $C_k$ , e tal que

$$e(G) \geq \frac{pn^2}{8} = n^{1+1/k},$$

como afirmado. □

O seguinte corolário é uma fácil consequência do Teorema 6.2.1.

**Corolário 6.2.2.**  $\text{ex}(n, H) = O(n)$  se e somente se  $H$  é acíclico.

*Demonstração.* Observe, primeiramente, que se  $H$  é acíclico, então  $H$  está contido em uma árvore com  $k = v(H)$  vértices. Portanto, pelo Teorema 3.2.4, temos que  $\text{ex}(n, H) \leq (k - 2)n$ . Por outro lado, se  $H$  contém um ciclo  $C_k$ , então, pelo Teorema 6.2.1, temos que

$$\text{ex}(n, H) \geq \text{ex}(n, C_k) \geq n^{1+1/k},$$

para todo  $n$  suficientemente grande. □

Reforçamos que o limitante no Teorema 6.2.1 pode ser melhorado um pouco com um cálculo mais cuidadoso. Construções explícitas que dão limitantes inferiores melhores são conhecidas para  $C_4$ ,  $C_6$  e  $C_{10}$ , mas, para todos os outros ciclos pares, o melhor limitante inferior conhecido para os seus números extremais foi obtido por meio do Método Probabilístico.

## 6.3 Conexidade de $G(n, p)$

Outra propriedade básica de um grafo é a conexidade. Gostaríamos de investigar a probabilidade de  $G(n, p)$  ser conexo. Nesse caso, não é tão fácil adivinhar a variável aleatória correta para estimarmos. Contudo, com a escolha correta, podemos determinar se  $G(n, p)$  é tipicamente conexo ou não, desde que  $p$  não pertença a um intervalo específico extremamente pequeno.

**Teorema 6.3.1.** *Para toda constante  $\varepsilon > 0$ , temos*

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ é conexo}) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } p \leq \frac{(1 - \varepsilon) \log n}{n}, \\ 1, & \text{se } p \geq \frac{(1 + \varepsilon) \log n}{n}, \end{cases}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Denote por  $X$  o número de vértices isolados de  $G(n, p)$ , isto é, o número de vértices sem vizinhos. Vamos usar a desigualdade de Chebyshev para mostrar que se  $p \leq (1 - \varepsilon) \log(n)/n$ , então com alta probabilidade  $X \neq 0$  e, portanto,  $G(n, p)$  não é conexo.



Para isso, observe primeiramente que se  $p \leq (1 - \varepsilon) \log(n)/n$ , então quando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{E}[X] = n(1 - p)^{n-1} \geq \frac{ne^{-pn}}{2} \rightarrow \infty.$$

Aqui, usamos o fato que  $e^{-x} = 1 - x + O(x^2)$  quando  $x \rightarrow 0$ . Agora, observe que se  $u \neq v$ , então a probabilidade de que  $u$  e  $v$  sejam ambos isolados é  $(1 - p)^{2n-3}$ , e consequentemente,

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X] + n(n-1)(1-p)^{2n-3} = \mathbb{E}[X] + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{1-p} \cdot \mathbb{E}[X]^2.$$

Segue que  $\text{Var}(X) \ll \mathbb{E}[X]^2$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ é conexo}) \leq \mathbb{P}(X \neq 0) \leq \frac{4 \cdot \text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \rightarrow 0,$$

como desejado.

Agora, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , denote por  $Y_k$  o número de componentes de  $G(n, p)$  com exatamente  $k$  vértices. Vamos mostrar que se  $p \geq (1 + \varepsilon) \log(n)/n$ , então com alta probabilidade  $Y_k = 0$ , para todo  $1 \leq k \leq n/2$ ; e portanto,  $G(n, p)$  é conexo.

Para isso, observe que

$$\mathbb{E}[Y_k] \leq \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} \leq \left( \frac{en}{k} \cdot e^{-p(n-k)} \right)^k,$$

uma vez que se  $S$  é o conjunto de vértices de uma componente de  $G(n, p)$ , então não há arestas de  $G(n, p)$  entre  $S$  e  $V(G(n, p)) \setminus S$ . Observe que se  $p \geq (1 + \varepsilon) \log(n)/n$ , então

$$\frac{en}{k} \cdot e^{-p(n-k)} \leq \frac{e^{pk+1}}{k} \cdot n^{-\varepsilon} \leq n^{-\varepsilon/2}$$

para todo  $1 \leq k \leq n/2$ . Finalmente, pela desigualdade de Markov, temos

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ não é conexo}) \leq \sum_{k=1}^{n/2} \mathbb{E}[Y_k] \leq \sum_{k=1}^{n/2} n^{-\varepsilon k/2} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , como desejado. □

Dizemos que  $p_c = \log(n)/n$  é um *limiar súbito* para conexidade, o que significa que a probabilidade de  $G(n, p)$  ser conexo muda abruptamente de  $o(1)$  para  $1 - o(1)$  enquanto aumentamos o parâmetro  $p$  de  $(1 - \varepsilon)p_c$  para  $(1 + \varepsilon)p_c$ . Surpreendentemente, existem limiares súbitos para diversos outros eventos em  $G(n, p)$ . Determinar tais existências e suas localizações são questões centrais no estudo de grafos aleatórios.

O leitor mais atento deve ter notado que, ao examinar a prova do Teorema 6.3.1 cuidadosamente, podemos deduzir o seguinte resultado ainda mais preciso.

**Teorema 6.3.2.** *Para qualquer função  $\omega(n) \gg 1$ ,*

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ é conexo}) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } p \leq \frac{\log n - \omega(n)}{n}, \\ 1, & \text{se } p \geq \frac{\log n + \omega(n)}{n}, \end{cases}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

De fato, para provar que, com alta probabilidade,  $G(n, p)$  é conexo, nós só precisamos assumir que  $ne^{-pn} \rightarrow 0$ ; e para provar que não é conexo, precisamos de  $ne^{-pn} \rightarrow \infty$ . Curiosamente, se  $ne^{-pn} = \Theta(1)$ , então  $G(n, p)$  é conexo com probabilidade afastada de 0 e 1. Essa região é conhecida como a *janela crítica* para o evento no qual  $G(n, p)$  é conexo.

## 6.4 Limiares

Provamos nas seções anteriores a existência de limiares para o evento no qual  $G(n, p)$  contém triângulos e para o evento no qual  $G(n, p)$  é conexo. Nesta seção, iremos provar um teorema clássico de Bollobás e Thomason (1987) que mostra que limiares são, de fato, extremamente comuns. Primeiro, precisamos dar uma definição precisa de limiar.

**Definição 6.4.1.** Uma função  $p_c = p_c(n)$  é um limiar para a família de grafos  $\mathcal{A}$  se

$$\mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{A}) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{para todo } p \ll p_c, \\ 1, & \text{para todo } p \gg p_c, \end{cases}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Provamos na Seção 6.1 que  $p_c(n) = 1/n$  é um limiar para a família  $\{G : K_3 \subset G\}$  e na Seção 6.3 que  $p_c(n) = \log(n)/n$  é um limiar para a família  $\{G : G \text{ é conexo}\}$ . Essas duas famílias têm uma propriedade útil: se adicionarmos uma aresta a um grafo dessas duas famílias, o grafo resultante ainda pertence à mesma família. Dizemos que famílias de grafos com essa propriedade são *crescentes*.

**Definição 6.4.2.** Denote por  $\mathcal{G}$  a coleção de todos os grafos, e  $\mathcal{G}_n$  a coleção dos grafos com  $n$  vértices. Uma família  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{G}_n$  é *crescente* se  $G \in \mathcal{A}_n$  e  $G \subset H \subset K_n$  implicam que  $H \in \mathcal{A}_n$ . Uma família  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$  é crescente se  $\mathcal{A}_n := \mathcal{A} \cap \mathcal{G}_n$  é crescente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dizemos que uma família de grafos  $\mathcal{A}$  é *não trivial* se  $\mathcal{A}_n \not\subset \{\emptyset, \mathcal{G}_n\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. O seguinte teorema foi provado por Bollobás e Thomason (1987).

**Teorema 6.4.3.** *Toda família não trivial e crescente de grafos possui um limiar.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{A}$  uma família crescente de grafos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina

$$f_n(p) := \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{A}).$$

Note que  $f_n$  é uma função contínua não decrescente com  $f_n(0) = 0$  (uma vez que  $\mathcal{A}_n \neq \mathcal{G}_n$ ) e  $f_n(1) = 1$  (uma vez que  $\mathcal{A}_n \neq \emptyset$ ). Isto nos permite definir, para cada  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,

$$p_n(\varepsilon) := \inf \{p \in [0, 1] : f_n(p) = \varepsilon\}.$$

Afirmamos que, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $C(\varepsilon) > 0$  tal que

$$p_n(1 - \varepsilon) \leq C(\varepsilon) \cdot p_n(\varepsilon). \quad (6.1)$$

Para provar isto, seja  $p = p_n(\varepsilon)$  e considere  $k$  cópias independentes  $G_1, \dots, G_k$  de  $G(n, p)$ . Tome  $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$ , isto é,  $G$  é o grafo com  $n$  vértices e com conjunto de arestas  $E(G_1) \cup \dots \cup E(G_k)$ . Note que se  $G_i \in \mathcal{A}_n$  para algum  $i \in [k]$ , então  $G \in \mathcal{A}_n$ , uma vez que  $\mathcal{A}$  é crescente. Segue que

$$\mathbb{P}(G \notin \mathcal{A}_k) \leq \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(G_i \notin \mathcal{A}_k) = (1 - \varepsilon)^k \leq \varepsilon$$

se  $k = k(\varepsilon)$  é suficientemente grande. Para completar a prova, observe que  $G$  tem a mesma distribuição que  $G(n, q)$ , em que

$$q = 1 - (1 - p)^k \leq kp,$$

e, portanto, (6.1) vale com  $C(\varepsilon) = k$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, segue que  $p_n(1/2)$  é um limiar para  $\mathcal{A}$ , como desejado.  $\square$

Acontece que a maioria das famílias crescentes de grafos têm de fato um limiar súbito; esse fato, entretanto, é muito mais difícil de provar. As principais exceções para essa regra geral são as famílias da forma  $\{G : H \subset G\}$ , para algum grafo  $H$  fixado.

## 6.5 Subgrafos pequenos

Nesta seção, vamos determinar o limiar para o evento “ $G(n, p)$  contém uma cópia de  $H$ ” para um grafo arbitrário  $H$ . Um primeiro palpite natural para esse limiar é  $n^{-v(H)/e(H)}$ , uma vez que se  $X_H$  denota o número de cópias de  $H$  em  $G(n, p)$ , então

$$\mathbb{E}[X_H] = O(p^{e(H)} n^{v(H)}) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $p \ll n^{-v(H)/e(H)}$ . No entanto, após pensar um pouco mais, fica claro que esse limiar pode algumas vezes ser muito menor. De fato, essa é uma fácil consequência do seguinte lema, que generaliza o Teorema 6.1.1.

**Lema 6.5.1.** *Sejam  $F$  e  $H$  grafos tais que  $F \subset H$  e  $e(F) \geq 1$ . Se  $p \ll n^{-v(F)/e(F)}$ , então*

$$\mathbb{P}(H \subset G(n, p)) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Seja  $X_F$  a variável aleatória que conta o número de cópias de  $F$  em  $G(n, p)$ , e observe que

$$\mathbb{P}(H \subset G(n, p)) \leq \mathbb{P}(X_F \geq 1),$$

uma vez que se há zero cópias de  $F$  em  $G(n, p)$ , então  $H \not\subset G(n, p)$ .

Há  $O(n^{v(F)})$  cópias de  $F$  em  $K_n$ , e cada cópia está contida em  $G(n, p)$  com probabilidade  $p^{e(F)}$ , então, pela linearidade da esperança, temos

$$\mathbb{E}[X_F] = O(p^{e(F)} n^{v(F)}) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uma vez que  $p \ll n^{-v(F)/e(F)}$ . Pela desigualdade de Markov, segue que

$$\mathbb{P}(X_F \geq 1) \leq \mathbb{E}[X_F] \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , como desejado.  $\square$

Segue do Lema 6.5.1 que existem grafos cujos limiares não é  $n^{-v(H)/e(H)}$ . Por exemplo, se  $H$  é composto de uma clique pequena  $F$  e um caminho longo, ligados em um único vértice, então  $e(H)/v(H) \approx 1$  (uma vez que o caminho é longo) mas  $e(F)/v(F) = (v(F) - 1)/2$ .

Para cada grafo  $H$  com  $e(H) \geq 1$ , defina

$$m(H) = \max \left\{ \frac{e(F)}{v(F)} : F \subset H, v(F) \geq 1 \right\}.$$

Pelo Lema 6.5.1, temos

$$\mathbb{P}(H \subset G(n, p)) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$  para toda função  $p \ll n^{-1/m(H)}$ .

De fato, o limiar para  $H$  é  $n^{-1/m(H)}$ , para todo grafo  $H$ , mas a prova desse fato foge do escopo deste capítulo. Iremos provar tal afirmação para a classe dos grafos *balanceados*, aqueles grafos  $H$  que satisfazem  $m(H) = \frac{e(H)}{v(H)}$  (isto é,  $H$  é pelo menos tão denso quanto qualquer um de seus subgrafos).

**Teorema 6.5.2.** *Seja  $H$  um grafo balanceado. Se  $p \gg n^{-1/m(H)}$ , então*

$$\mathbb{P}(H \subset G(n, p)) \rightarrow 1$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Se  $X_H$  é a variável aleatória que conta o número de cópias de  $H$  em  $G(n, p)$ , então

$$\mathbb{E}[X_H] = \Theta(p^{e(H)} n^{v(H)}) \rightarrow \infty$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uma vez que  $p \gg n^{-v(H)/e(H)} = n^{-1/m(H)}$ . Para deduzir que o evento  $\{X_H \geq 1\}$  ocorre com alta probabilidade, precisamos limitar a variância de  $X_H$ . Para isso, repetimos o cálculo na prova do Teorema 6.1.2, exceto que agora temos que lidar com modos mais complicados de duas cópias de  $H$  se intersectarem. Para sermos precisos, escrevemos

$$\mathbb{E}[X_H^2] = \sum_{S \in \mathcal{T}} \sum_{T \in \mathcal{T}} \mathbb{P}(S \cup T \subset G(n, p)),$$

em que  $\mathcal{T}$  é agora a coleção de todas as cópias de  $H$  em  $K_n$ , e particionamos a soma de acordo com a interseção  $H' = S \cap T$ . Segue que

$$\mathbb{E}[X_H^2] \leq \mathbb{E}[X_H] + \mathbb{E}[X_H]^2 + \sum_{H' \subsetneq H} p^{2e(H)-e(H')} n^{2v(H)-v(H')}, \quad (6.2)$$

em que a soma é sobre subgrafos  $H' \subset H$  com  $e(H') \geq 1$  e  $H' \neq H$ . Isso vale porque a soma sobre os termos com  $S = T$  é exatamente  $\mathbb{E}[X_H]$ , e os pares  $(S, T)$  que são disjuntos nas arestas contribuem com no máximo  $\mathbb{E}[X_H]^2$ , uma vez que neste caso os eventos  $\{S \subset G(n, p)\}$  e  $\{T \subset G(n, p)\}$  são independentes. Para interseções não triviais, os números de arestas e vértices de  $S \cup T$  seguem do princípio da inclusão-exclusão.

Como  $H$  é balanceado, vale que  $e(H')/v(H') \leq e(H)/v(H) = m(H)$  para todo  $H' \subset H$  com  $e(H') \geq 1$ . Assim, temos

$$p^{-e(H')} n^{-v(H')} \leq (p \cdot n^{v(H)/e(H)})^{-e(H')} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uma vez que  $p \gg n^{-v(H)/e(H)}$ . Segue, usando (6.2), que

$$\text{Var}(X_H) = \mathbb{E}[X_H^2] - \mathbb{E}[X_H]^2 \leq \mathbb{E}[X_H] + o(\mathbb{E}[X_H]^2) = o(\mathbb{E}[X_H]^2)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uma vez que  $\mathbb{E}[X_H] \gg 1$ . Pela desigualdade de Chebyshev, obtemos

$$\mathbb{P}(X_H = 0) \leq \mathbb{P}(X_H \leq \mathbb{E}[X_H]/2) \leq \frac{4 \cdot \text{Var}(X_H)}{\mathbb{E}[X_H]^2} \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , e então, com alta probabilidade, existe uma cópia de  $H$  em  $G(n, p)$ , como desejado.  $\square$

## 6.6 Teoria de Ramsey em $G(n, p)$

Para finalizar o capítulo, vamos apresentar uma aplicação de grafos aleatórios em Teoria de Ramsey. Lembre-se do Capítulo 4 que escrevemos  $G \rightarrow H$  se toda 2-coloração das arestas de  $G$  contém uma cópia monocromática de  $H$ . O seguinte teorema foi provado por Folkman (1970).

**Teorema 6.6.1.** *Existe um grafo  $G$  livre de  $K_4$  tal que  $G \rightarrow K_3$ .*

Vamos provar o Teorema 6.6.1 usando o grafo aleatório  $G(n, p)$ . Essa prova foi descoberta por Frankl e Rödl (1986), sendo um dos primeiros exemplos importantes do que hoje é uma grande área de pesquisa em combinatória: o estudo de resultados extremais em grafos aleatórios.

Frankl e Rödl provaram o seguinte teorema.

**Teorema 6.6.2.** *Seja  $p \geq n^{-1/2+c}$  para alguma constante  $c > 0$ . Com alta probabilidade, toda 2-coloração das arestas de  $G(n, p)$  contém pelo menos*

$$\left(\frac{1}{4} + o(1)\right)p^3 \binom{n}{3}$$

*triângulos monocromáticos.*

Para provar o Teorema 6.6.2, vamos precisar de algumas propriedades simples de  $G(n, p)$ . A primeira é uma versão mais forte do Teorema 6.1.2, mas segue da mesma prova.

**Lema 6.6.3.** *Se  $p \gg 1/n$ , então com alta probabilidade,  $G(n, p)$  contém*

$$p^3 \binom{n}{3} + o(p^3 n^3)$$

*triângulos.*

*Demonstração.* Lembre-se da prova do Teorema 6.1.2 que se  $X$  denota o número de triângulos em  $G(n, p)$ , então

$$\mathbb{E}[X] = \Theta(p^3 n^3) \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = o(\mathbb{E}[X]^2).$$

Pela desigualdade de Chebyshev, segue que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}[X]) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}[X]^2} \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, o lema segue. □

Lembre-se que o Teorema 5.4.2 essencialmente diz que se  $pk \geq 2 \log n$ , então todo conjunto com  $k$  vértices de  $G(n, p)$  contém pelo menos uma aresta. A segunda propriedade que precisaremos para provar Teorema 6.6.2 é uma variante desse fato que diz que se  $k$  é um pouco maior, então todo conjunto com  $k$  vértices de  $G(n, p)$  contém aproximadamente o número esperado de arestas.

Dado um conjunto  $S$  de vértices de  $G(n, p)$ , vamos escrever  $e(S)$  para o número de arestas de  $G(n, p)$  contidas em  $S$ .

**Lema 6.6.4.** *Seja  $pk \gg \log n$ . Com alta probabilidade,*

$$e(S) = p \binom{k}{2} + o(pk^2)$$

para todo conjunto  $S$  contendo de vértices  $G(n, p)$  de tamanho  $k$ .

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , denote por  $X_k(\varepsilon)$  o número de conjuntos com  $k$  vértices tais que

$$\left| e(S) - p \binom{k}{2} \right| \geq \varepsilon pk^2.$$

Pela desigualdade de Chernoff, temos

$$\mathbb{P} \left( \left| e(S) - p \binom{k}{2} \right| \geq \varepsilon pk^2 \right) \leq \exp(-\varepsilon^2 pk^2) \leq n^{-2k},$$

uma vez que  $pk \gg \log n$ . Pela linearidade da esperança, segue que

$$\mathbb{E}[X_k(\varepsilon)] \leq \binom{n}{k} n^{-2k} \leq n^{-k}.$$

Finalmente, pela desigualdade de Markov, segue que com alta probabilidade, temos  $X_k(\varepsilon) = 0$ ; como desejado.  $\square$

Finalmente, precisamos das seguintes propriedades simples.

**Lema 6.6.5.** *Seja  $p^2n \gg \log n$ , então com alta probabilidade*

$$d(v) = pn + o(pn) \quad e \quad |N(u) \cap N(v)| \leq 3p^2n$$

para todos  $u, v \in V(G(n, p))$  com  $u \neq v$ .

*Demonstração.* Os limitantes para  $d(v)$  seguem da desigualdade de Chernoff, que implica que, para todo  $\varepsilon > 0$  fixado, temos

$$\mathbb{P}(|d(v) - p(n-1)| > \varepsilon pn) \leq \exp(-\varepsilon^2 pn) \ll \frac{1}{n},$$

uma vez que  $pn \gg \log n$ .



Para limitar o tamanho da vizinhança comum, observe que

$$\mathbb{P}(|N(u) \cap N(v)| \geq k) \leq \binom{n-2}{k} p^{2k} \leq \left(\frac{ep^2n}{k}\right)^k \leq \left(\frac{e}{3}\right)^k \ll \frac{1}{n^2}$$

se  $k = 3p^2n \gg \log n$ . Pela cota da união, a probabilidade total de falha é  $o(1)$ , como queríamos.  $\square$

Vamos precisar da seguinte consequência simples desses lemas.

**Lema 6.6.6.** *Se  $p \geq n^{-1/2+c}$  para alguma constante  $c > 0$ , então vale o seguinte com alta probabilidade. Para todo vértice  $v \in V(G(n, p))$  e todo subconjunto  $S \subset N(v)$ ,*

$$e(S) = p \binom{|S|}{2} + o(p^3n^2).$$

*Demonstração.* Observe primeiramente que  $p^2n \gg \log n$ . Em particular, o Lema 6.6.5 nos dá que com alta probabilidade, todo vértice de  $G(n, p)$  tem grau  $pn + o(pn)$ . Suponha que  $S \subset N(v)$  é tal que  $p|S| \gg \log n$ . Nesse caso, segue diretamente do Lema 6.6.4 e de  $|S| \leq 2pn$  que

$$e(S) = p \binom{|S|}{2} + o(p^3n^2),$$

Agora, suponha que  $S \subseteq N(v)$  é tal que  $p|S| = O(\log n)$ . Uma vez que  $p \geq n^{-1/2+c}$ , segue que  $|S| = o(pn)$ . Afirmamos que  $e(S) = o(p^3n^2)$ . De fato, tome um conjunto arbitrário  $T \supset S$  com  $|T| = o(pn)$  e  $p|T| \gg \log n$ . Aplicando o Lema 6.6.4 a  $T$ , temos que

$$e(S) \leq e(T) = p \binom{|T|}{2} + o(p|T|^2) \leq p|T|^2 = o(p^3n^2),$$

como afirmado.  $\square$

Podemos agora deduzir o teorema de Frankl e Rödl.

*Demonstração do Teorema 6.6.2.* Seja  $\chi$  uma 2-coloração das arestas de  $G(n, p)$ . Para  $i = 1, 2$ , definimos  $G_i$  como o grafo formado pelas arestas da cor  $i$ , e escrevemos  $d_i(v)$  e  $N_i(v)$  para o grau e a vizinhança do vértice  $v$  em  $G_i$ , respectivamente.

Vamos também escrever  $t(i)$  para o número de triângulos em  $G_i$  e  $s(i)$  para o número de triângulos não monocromáticos em  $G(n, p)$  com exatamente duas arestas em  $G_i$ .

Afirmamos que, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , vale com alta probabilidade que

$$\sum_v p \binom{d_i(v)}{2} = 3 \cdot t(i) + s(i) + o(p^3 n^3). \quad (6.3)$$

Isso decorre do Lema 6.6.6 somando sobre  $v$  o número de arestas de  $G(n, p)$  na vizinhança de  $v$  em  $G_i$ , e observando que cada triângulo em  $G_i$  é contado três vezes, e cada triângulo com exatamente duas arestas em  $G_i$  é contado uma vez.

Aplicando o Lema 6.6.6 três vezes (com  $S = N(v)$ ,  $S = N_1(v)$  e  $S = N_2(v)$ ), há

$$p \cdot \left( \binom{d_1(v) + d_2(v)}{2} - \binom{d_1(v)}{2} - \binom{d_2(v)}{2} \right) + o(p^3 n^2)$$

arestas de  $G(n, p)$  entre as vizinhanças de  $v$  em  $G_1$  e  $G_2$ . Simplificando os binomiais, somando sobre  $v$  e observando que cada triângulo não monocromático é contado exatamente duas vezes, segue que

$$\sum_v p \cdot d_1(v) d_2(v) = 2(s(1) + s(2)) + o(p^3 n^3). \quad (6.4)$$

Combinando (6.3) e (6.4), obtemos que

$$0 \leq \frac{p}{2} \cdot \sum_v (d_1(v) - d_2(v))^2 = 3(t(1) + t(2)) - (s(1) + s(2)) + o(p^3 n^3). \quad (6.5)$$

Além disso,

$$t(1) + t(2) + s(1) + s(2) = p^3 \binom{n}{3} + o(p^3 n^3),$$

pelo Lema 6.6.3, uma vez que o lado esquerdo da equação é exatamente o número de triângulos em  $G(n, p)$ . Somando com (6.5), obtemos que

$$4(t(1) + t(2)) \geq p^3 \binom{n}{3} + o(p^3 n^3),$$

e, então,  $\chi$  contém

$$t(1) + t(2) \geq \frac{1}{4} \cdot p^3 \binom{n}{3} + o(p^3 n^3)$$

triângulos monocromáticos, como desejado.  $\square$

Podemos agora deduzir facilmente o teorema de Folkman.

*Demonstração do Teorema 6.6.1.* Seja  $p = n^{-1/2+c}$ , em que  $c$  é uma constante positiva suficientemente pequena. Pela desigualdade de Markov, com probabilidade pelo menos  $1/2$ , há no máximo

$$2 \cdot p^6 \binom{n}{4} \leq p^6 n^4 = n^{1+6c}$$

cópias de  $K_4$  em  $G(n, p)$ . Além disso, pelo Lema 6.6.5 e pelo Teorema 6.6.2, temos que, com alta probabilidade, toda aresta de  $G(n, p)$  pertence a no máximo  $3p^2 n \leq n^{3c}$  triângulos e toda 2-coloração das arestas de  $G(n, p)$  contém pelo menos

$$\left(\frac{1}{4} + o(1)\right) p^3 \binom{n}{3} \geq n^{3/2}$$

triângulos monocromáticos. Segue que existe um grafo  $G'$  com  $n$  vértices com essas três propriedades.

Removendo uma aresta de cada cópia de  $K_4$  em  $G'$ , obtemos um grafo  $G$  livre de  $K_4$ . Além disso, como removemos no máximo  $n^{1+6c}$  arestas, e cada uma dessas arestas destruiu no máximo  $n^{3c}$  triângulos, segue que toda 2-coloração das arestas de  $G$  contém pelo menos

$$n^{3/2} - n^{1+9c} \geq 1$$

triângulos monocromáticos. Segue que  $G \rightarrow K_3$ , como desejado.  $\square$

## 6.7 Exercícios

**Exercício 6.7.1.** Seja  $s \geq 2$  e  $\varepsilon > 0$ . Prove que existe  $t$  tal que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \geq n^{2-1/s-\varepsilon}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

**Exercício 6.7.2.** Seja  $\mathcal{A}$  uma família crescente de grafos. Prove que a função

$$f(p) = \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{A})$$

é crescente em  $p$ .

**Exercício 6.7.3.** Mostre, para cada  $d \in \mathbb{N}$  e qualquer função  $\omega(n) \gg 1$ , que

$$\mathbb{P}(\delta(G(n, p)) \geq d) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq \frac{\log n + (d-1) \log \log n - \omega(n)}{n} \\ 1 & \text{se } p \geq \frac{\log n + (d-1) \log \log n + \omega(n)}{n} \end{cases}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercício 6.7.4.** Para cada  $d \geq 2$ , mostre que se  $p \ll n^{-2/(d+1)}$ , então, com alta probabilidade, existe um grafo  $d$ -regular  $H$  com  $n$  vértices que não está contido em  $G(n, p)$ .

**Exercício 6.7.5.** Mostre que se  $p \ll 1/n$ , então  $G(n, p)$  é acíclico com alta probabilidade.

**Exercício 6.7.6.** Denote por  $C(G)$  o maior número de vértices em uma componente de um grafo  $G$ . Mostre que se  $p \ll 1/n$ , então

$$C(G(n, p)) \leq \log n$$

com alta probabilidade. Mostre também, para cada  $\varepsilon > 0$ , que se  $p \gg 1/n$  então

$$C(G(n, p)) \geq (1 - \varepsilon)n$$

com alta probabilidade.

# **Parte II**

## **Tópicos Avançados**

# 7

## Teoria Extremal dos Conjuntos

---

Nesse capítulo, estamos interessados em problemas extremais relacionados a conjuntos. De forma geral, vamos nos perguntar qual o menor ou maior tamanho que um conjunto ou família de conjuntos pode ter satisfazendo certas propriedades. Já vimos alguns desses problemas no Capítulo 1 (veja os Exemplos 1.1.1 e 1.1.2). Denotamos por  $2^{[n]}$  todos os subconjuntos de  $[n] = \{1, \dots, n\}$  e  $\binom{[n]}{k}$  todos os subconjuntos de  $[n]$  de tamanho  $k$ . Para aquecer, vamos começar com um exemplo simples.

Dizemos que uma família de conjuntos  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  é *intersectante* se  $A \cap B \neq \emptyset$  para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ . Qual o tamanho máximo de uma família intersectante? Não é difícil pensar em um exemplo em que  $\mathcal{A}$  possui cardinalidade  $2^{n-1}$  e de fato esse é o maior tamanho possível que  $\mathcal{A}$  pode ter.

**Proposição 7.0.1.** *Se  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  é intersectante, então  $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$ .*

*Demonstração.* Se  $A \in \mathcal{A}$ , então  $A^c \notin \mathcal{A}$ . Portanto, dentre todos os pares  $(A, A^c)$  apenas um dos elementos pode pertencer a  $\mathcal{A}$ . Como os pares  $(A, A^c)$  formam uma partição (com  $2^{n-1}$  partes) do conjunto dos subconjuntos de  $[n]$ , pelo Princípio da Casa dos Pombos, segue que  $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$ , como desejado.  $\square$

## 7.1 Anticadeias e sistemas de Bollobás

Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  uma família de conjuntos. Dizemos que  $\mathcal{A}$  é uma *anticadeia*<sup>1</sup> se não existem  $A, B \in \mathcal{A}$ , com  $A \neq B$ , tais que  $A \subseteq B$ . Por exemplo,  $\mathcal{A} = \emptyset$  e  $\mathcal{A} = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$  são anticadeias. É possível encontrarmos exemplos maiores?

Naturalmente, podemos nos perguntar qual o menor ou maior tamanho possível de uma anticadeia. Como  $\mathcal{A} = \emptyset$  é uma anticadeia, então o mais interessante desses problemas é decidir quão grande uma anticadeia pode ser.

De forma mais geral, para cada  $k \in [n]$ , a família  $\mathcal{A}_k = \{S \subseteq [n] : |S| = k\}$ , também é uma anticadeia, uma vez que um conjunto não pode estar contido propriamente em um outro conjunto de mesma cardinalidade. Observe que  $|\mathcal{A}_k| = \binom{n}{k}$ . Logo, existe uma anticadeia  $\mathcal{A}$  tal que  $|\mathcal{A}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ . O Teorema de Sperner nos mostra que isso é justamente o melhor que podemos esperar.

**Teorema 7.1.1** (Sperner, 1928). *Se  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  é uma anticadeia, então*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Ao invés de provar o Teorema de Sperner, vamos ver um resultado mais preciso sobre anticadeias dado por Lubell (1966) que implica o Teorema de Sperner. O mesmo resultado de Lubell foi descoberto de forma independente por Yamamoto (1954), Mešalkin (1963) e Bollobás (1965) e por isso é conhecido como a *desigualdade LYMB*.

**Lema 7.1.2** (Desigualdade LYMB). *Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  uma anticadeia. Então*

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1. \quad (7.1)$$

Observe que o Teorema de Sperner (Teorema 7.1.1) é uma consequência direta da desigualdade LYMB, uma vez que o valor  $\binom{n}{k}$  é maximizado quando  $k = \lfloor n/2 \rfloor$ . Dessa forma, temos

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1} \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1$$

<sup>1</sup>A título de curiosidade, o nome anticadeia vem da teoria de conjuntos parcialmente ordenados.

o que implica  $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

*Prova da desigualdade LYMB.* A ideia da prova consiste em associar os conjuntos de  $\mathcal{A}$  com permutações do conjunto  $[n]$  e usar contagem dupla para obter a desigualdade desejada (parecido com o que foi feito no Teorema 3.2.1).

Seja  $\pi \in S_n$  e  $A \in \mathcal{A}$ . Dizemos

$$(\pi, A) \text{ é compatível} \quad \Leftrightarrow \quad A = \{\pi(1), \dots, \pi(|A|)\}.$$

No que segue, contamos o número de pares compatíveis de duas formas. Fixado  $A \in \mathcal{A}$ , existem  $|A|!(n - |A|)!$  permutações que formam pares compatíveis com  $A$ . Portanto, existem exatamente

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)!$$

pares  $(\pi, A)$  compatíveis.

Por outro lado, dada uma permutação  $\pi$ , se  $(\pi, A)$  e  $(\pi, B)$  são pares compatíveis, então vamos mostrar que  $A = B$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $|A| \leq |B|$ . Pela definição de par compatível, temos que  $A = \{\pi(1), \dots, \pi(|A|)\}$  e  $B = \{\pi(1), \dots, \pi(|B|)\}$ . Então,  $A \subseteq B$ . Como  $\mathcal{A}$  é uma anticadeia, temos que  $A = B$ . Portanto, cada permutação forma um par compatível com no máximo um conjunto de  $\mathcal{A}$ . Logo, existem no máximo  $n!$  pares compatíveis. Dessa forma, temos que

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! \leq n!, \quad (7.2)$$

como desejado. □

Dizemos que uma família  $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)_{i \in [m]}\}$  de pares de conjuntos finitos é um *sistema de Bollobás* se  $\mathcal{F}$  satisfaz:

- i.  $A_i \cap B_i = \emptyset$  para todo  $i$ ,
- ii.  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  para todo  $i \neq j$ .

O Teorema de Bollobás apresentado a seguir é um dos pilares da teoria extremal de conjuntos, implicando a desigualdade LYMB e, consequentemente, o teorema de Sperner.



**Teorema 7.1.3** (Bollobás, 1965). *Se  $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)_{i \in [m]}\}$  é um sistema de Bollobás, então*

$$\sum_{i \in [m]} \left( \frac{|A_i| + |B_i|}{|A_i|} \right)^{-1} \leq 1 \quad (7.3)$$

Para ver que o Teorema 7.1.3 implica a desigualdade LYMB, basta, dada  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  uma anticadeia, tomar  $B_i = [n] \setminus A_i$ . O Teorema 7.1.3 também é conhecido como o *Teorema de Bollobás das duas famílias*. Vamos apresentar a demonstração feita por Katona (1974), que segue uma ideia similar a da desigualdade LYMB.

*Demonstração.* Suponha, sem perda de generalidade, que

$$[n] = \bigcup_{i \in [m]} (A_i \cup B_i).$$

A ideia da prova consiste em associar os elementos de  $\mathcal{F}$  com permutações do conjunto  $[n]$  e usar contagem dupla para obter a desigualdade desejada.

Seja  $\pi \in S_n$  e  $(A_i, B_i) \in \mathcal{F}$ . Escrevemos  $A_i <_{\pi} B_i$  se todos os elementos de  $\pi(A_i)$  precederem os elementos de  $\pi(B_i)$ , ou seja, se  $\max_{a \in A_i} \pi(a) < \min_{b \in B_i} \pi(b)$ . Dizemos

$$(\pi, (A_i, B_i)) \text{ é compatível} \quad \Leftrightarrow \quad A_i <_{\pi} B_i.$$

Fixado um par  $(A_i, B_i) \in \mathcal{F}$  com  $|A_i| = a_i$  e  $|B_i| = b_i$ , observe que existem

$$\binom{n}{a_i + b_i} \cdot a_i! \cdot b_i! \cdot (n - a_i - b_i)!$$

permutações que formam pares compatíveis com  $(A_i, B_i)$ . Isso ocorre pois temos  $\binom{n}{a_i + b_i}$  possíveis escolhas de posição para os elementos de  $A_i \cup B_i$ , e  $a_i!$ ,  $b_i!$  e  $(n - a_i - b_i)!$  maneiras de permutar os elementos de  $A_i$ ,  $B_i$  e  $[n] \setminus (A_i \cup B_i)$ , respectivamente.

Por outro lado, fixe uma permutação  $\pi$ , e note que no máximo um par  $(A_i, B_i) \in \mathcal{F}$  é compatível com  $\pi$ . Para ver isso, suponha por contradição que  $\pi$  é compatível com  $(A_i, B_i)$  e  $(A_j, B_j)$  com  $i \neq j$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\max_{a \in A_i} \pi(a) \leq \max_{a \in A_j} \pi(a)$ . Como  $\mathcal{F}$  é um sistema de Bollobás, temos  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ . Logo,  $\min_{b \in B_j} \pi(b) \leq \max_{a \in A_i} \pi(a)$ . Portanto,

$\min_{b \in B_j} \pi(b) \leq \max_{a \in A_j} \pi(a)$ , uma contradição com  $(\pi, (A_j, B_j))$  ser compatível.

Dessa forma, concluímos que

$$\sum_{i \in [m]} n! \cdot \frac{a_i! \cdot b_i!}{(a_i + b_i)!} \leq \sum_{\pi \in S_n} 1 = n!,$$

como desejado. □

Um caso especial do Teorema de Bollobás é quando todos os conjuntos  $A_i$  possuem uma mesma cardinalidade  $a$  e todos os conjuntos  $B_i$  possuem uma mesma cardinalidade  $b$ :

**Teorema 7.1.4** (Bollobás). *Seja  $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)_{i \in [m]}\}$  uma família de pares de conjuntos satisfazendo:*

- i.  $|A_i| = a$  e  $|B_i| = b$  para todo  $i$ ,
- ii.  $A_i \cap B_i = \emptyset$  para todo  $i$ ,
- iii.  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  para todo  $i \neq j$ .

Então,

$$m \leq \binom{a+b}{a}.$$

O Teorema 7.1.4 possui diversas extensões e generalizações. Para terminar esta seção, vamos enunciar (sem demonstrar) duas generalizações clássicas.

**Teorema 7.1.5** (Frankl, 1982; Kalai, 1984). *Seja  $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)_{i \in [m]}\}$  uma família de pares de conjuntos satisfazendo:*

- i.  $|A_i| \leq a$  e  $|B_i| \leq b$  para todo  $i$ ,
- ii.  $A_i \cap B_i = \emptyset$  para todo  $i$ ,
- iii.  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  para todo  $i < j$ .

Então,

$$m \leq \binom{a+b}{a}.$$

**Teorema 7.1.6** (Füredi, 1984). *Seja  $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)_{i \in [m]}\}$  uma família de pares de conjuntos satisfazendo:*

- i.  $|A_i| = a$  e  $|B_i| = b$  para todo  $i$ ,
- ii.  $|A_i \cap B_i| \leq s$  para todo  $i$ ,
- iii.  $|A_i \cap B_j| > s$  para todo  $i \neq j$ .

Então,

$$m \leq \binom{a+b-2s}{a-s}.$$

O Teorema 7.1.5 também é conhecido como a *versão enviesada do Teorema de Bollobás das duas famílias*.

## 7.2 Famílias intersectantes

Vimos na introdução que uma família de conjuntos  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  é intersectante se  $A \cap B \neq \emptyset$  para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ . Além disso, também vimos na Proposição 7.0.1 que o tamanho máximo de uma família intersectante  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  é  $2^{n-1}$ .

O que será que acontece se fixamos o tamanho dos conjuntos de  $\mathcal{A}$ ? Ou seja, se  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$  é intersectante, qual o maior tamanho de  $\mathcal{A}$ ? Para evitar trivialidades, vamos assumir que  $n \geq 2k$ , pois caso contrário quaisquer dois conjuntos de tamanho  $k$  teriam interseção não vazia.

Podemos obter uma família  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$  intersectante tomando todos os subconjuntos de  $[n]$  de tamanho  $k$  contendo o elemento 1. Nesse caso,  $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1}$ . Será que podemos encontrar um exemplo ainda maior? O resultado a seguir, encontrado por Erdős, Ko e Rado (1961) (obtido em 1938 mas publicado 23 anos depois!), responde a essa pergunta.

**Teorema 7.2.1** (Erdős, Ko, e Rado, 1938). *Se  $n \geq 2k$  e  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$  é intersectante, então*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

No que segue, apresentamos a demonstração feita por Katona (1972). A ideia é similar às demonstrações do Teorema de Bollobás das duas famílias e da desigualdade de LYMB. Porém, nesse caso, vamos associar os elementos de  $\mathcal{A}$  com

*permutações circulares*<sup>2</sup> de tamanho  $n$ , e usar contagem dupla para obter a desigualdade desejada. O segredo de cada um desses resultados reside justamente em encontrar a maneira certa de associar esses conjuntos. Como você associaria conjuntos de  $\mathcal{A}$  com permutações circulares de tamanho  $n$ ?

*Demonstração.* Sejam  $A \in \mathcal{A}$  e  $\pi: \mathbb{Z}_n \rightarrow [n]$  uma permutação circular de tamanho  $n$ . Escrevemos que  $(\pi, A)$  é *compatível* se os elementos de  $A$  aparecem de forma consecutiva (como um intervalo) em  $\pi$ , isto é, se existe  $i \in \mathbb{Z}_n$  tal que  $A = \{\pi(i+1), \dots, \pi(i+k)\}$ .

Fixado um conjunto  $A \in \mathcal{A}$ , existem  $k!(n-k)!$  permutações circulares  $\pi$  que formam um par compatível com  $A$ . Para uma permutação circular  $\pi$  fixa, temos a seguinte afirmação:

**Afirmativa 7.2.2.** *Dada uma permutação circular  $\pi$ , no máximo  $k$  conjuntos de  $\mathcal{A}$  formam pares compatíveis com  $\pi$ .*

*Demonstração.* Seja  $(\pi, A_0)$  um par compatível. Vamos supor sem perda de generalidade que  $A_0 = \{\pi(0), \dots, \pi(k-1)\}$ . Para todo conjunto  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $(\pi, A)$  é compatível, temos que  $A = \{\pi(\ell), \dots, \pi(\ell+k-1)\}$  para algum  $\ell \in \mathbb{Z}_n$ . Se  $A = \{\pi(\ell), \dots, \pi(\ell+k-1)\}$ , definimos  $i(A) := \ell$ .

Como  $\mathcal{A}$  é intersectante, todo conjunto  $A \in \mathcal{A}$  que forma um par compatível com  $\pi$  deve possuir interseção não vazia com  $A_0$ . Portanto, para todo par  $(\pi, A)$  compatível, temos que

$$i(A) \in \{-k+1, \dots, k-1\}.$$

Logo, no máximo  $2k-1$  conjuntos de  $\mathcal{A}$  formam pares compatíveis com  $\pi$ .

A fim de melhorar esse limitante para  $k$ , vamos usar o princípio da casa dos pombos e o fato de que  $n \geq 2k$ . Para tal, observe que no máximo um conjunto de  $\mathcal{A}$  é tal que  $i(A) \in \{\ell, \ell+k\}$ . Isso ocorre pois, caso contrário, o limitante  $n \geq 2k$  implica que tais conjuntos seriam disjuntos. Como

$$\{-k+1, \dots, k-1\} = \{0\} \cup \{-k+1, 1\} \cup \dots \cup \{-1, k-1\},$$

no máximo  $k$  dos conjuntos podem formar pares compatíveis com  $\pi$ , como desejado.  $\square$

---

<sup>2</sup>Uma permutação circular de tamanho  $n$  é uma bijeção  $\pi: \mathbb{Z}_n \rightarrow [n]$ , onde duas permutações circulares  $\pi$  e  $\pi'$  são consideradas iguais se elas são ‘rotações’ uma da outra, isto é, se existe  $y \in \mathbb{Z}_n$  tal que  $\pi(x) = \pi'(x+y)$  para todo  $x \in \mathbb{Z}_n$ . Observe que existem exatamente  $(n-1)!$  permutações circulares de tamanho  $n$ .

Como existem  $(n - 1)!$  permutações circulares de tamanho  $n$ , obtemos que

$$|\mathcal{A}| \cdot k!(n - k)! \leq (n - 1)! \cdot k$$

como queríamos mostrar.  $\square$

Dados inteiros positivos  $n$  e  $k$ , o *grafo de Kneser*  $K(n, k)$  é definido como o grafo cujo conjunto de vértices é igual a  $\binom{[n]}{k}$  e dois vértices são adjacentes se seus conjuntos correspondentes são disjuntos. Um conjunto independente no grafo de Kneser corresponde justamente a uma família intersectante. Dessa forma, o Teorema 7.2.1 afirma que  $\alpha(K(n, k)) = \binom{n-1}{k-1}$  para  $n \geq 2k$ . Os grafos de Kneser possuem diversas propriedades interessantes: são grafos  $\binom{n-k}{k}$  regulares, de número cromático  $n - 2k + 2$  quando  $n \geq 2k$  e sem cliques de tamanho  $n/k + 1$ .

Uma direção natural é investigar o tamanho de famílias de conjuntos quando elas são forçadas a terem interseções maiores entre seus conjuntos. Dizemos que  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  é  $\ell$ -*intersectante* se  $|A \cap B| \geq \ell$  para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ . De forma semelhante à família intersectante, poderíamos esperar que se  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  é  $\ell$ -intersectante, então  $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-\ell}$ . Porém, ao caracterizar as famílias  $\ell$ -intersectante extremas, Katona (1964) mostrou que esse não é o caso.

**Teorema 7.2.3** (Katona, 1964). *Seja  $\ell \geq 2$ , e seja  $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$  uma família  $\ell$ -intersectante de tamanho máximo. Se  $n + \ell$  é par, ou seja,  $n + \ell = 2k$ , então*

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq [n] : |A| \geq k\}.$$

*Já se  $n + \ell$  é ímpar, ou seja,  $n + \ell = 2k + 1$ , então*

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq [n] : |A \cap X| \geq k\}$$

*para algum  $X \in \binom{[n]}{n-1}$ .*

Já no caso em que  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$  é  $\ell$ -intersectante, Erdős, Ko e Rado mostraram que, para  $n$  suficientemente grande, o resultado da família 1-intersectante de fato generaliza. Porém, o resultado não é verdadeiro para todo valor de  $n$ . Para uma caracterização das famílias extremas e para outros resultados de famílias intersectantes, consulte o *survey* de Borg (2012).

**Teorema 7.2.4** (Erdős, Ko, e Rado, 1961). *Dados  $k, \ell \in \mathbb{N}$  com  $k > \ell \geq 2$ , o seguinte vale para todo  $n$  suficientemente grande. Se  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$  é  $\ell$ -intersectante, então*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-\ell}{k-\ell}.$$

Seja  $L \subseteq [n]$  um conjunto de tamanho  $\ell$  e seja

$$\mathcal{A}_L := \left\{ A \subseteq \binom{[n]}{k} : L \subseteq A \right\}.$$

Observe que  $|\mathcal{A}_L| = \binom{n-\ell}{k-\ell}$ . Portanto, as famílias  $\mathcal{A}_L$  são exemplos de famílias extremais.

A ideia da demonstração consiste em provar um resultado de estabilidade (como visto no Capítulo 3) bem forte:

Ou  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_L$  para algum  $L \in \binom{[n]}{\ell}$  ou  $\mathcal{A}$  tem tamanho  $O(n^{k-\ell-1})$ .

*Demonstração.* Vamos assumir, sem perda de generalidade, que  $\mathcal{A}$  é uma família  $\ell$ -intersectante maximal. Se  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_L$  para algum  $L \in \binom{[n]}{\ell}$ , então  $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-\ell}{k-\ell}$ . Portanto, vamos assumir que  $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{A}_L$  para todo  $L \in \binom{[n]}{\ell}$ .

Como  $\mathcal{A}$  é maximal, temos que existem  $A, B \in \mathcal{A}$  tais que  $|A \cap B| = \ell$  (veja Exercício 7.5.7). Seja  $L = A \cap B$ . Como  $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{A}_L$ , existe  $C \in \mathcal{A}$  tal que  $L \not\subseteq C$ .

Seja  $X := A \cup B \cup C$ . Considere  $D \in \mathcal{A}$  e observe que

$$D \cap X = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C).$$

Como  $\mathcal{A}$  é  $\ell$ -intersectante, temos  $|D \cap A| \geq \ell$ . Vamos supor que  $|D \cap X| = \ell$ . Nesse caso,  $D \cap A = D \cap B$  e portanto  $D \cap A \subseteq A \cap B$  (Lembre que  $A \cap B = L$ ). Como  $|D \cap A| = \ell$  concluímos que  $D \cap A = L$ . Observe que isso implica em  $L \subseteq C$ , uma contradição com a escolha de  $C$ , uma vez que  $D \cap A = D \cap C$  e  $D \cap C \subseteq C$ . Portanto, para todo conjunto  $D \in \mathcal{A}$ , temos que  $|D \cap X| \geq \ell + 1$ .

Assim, concluímos que todo conjunto  $A \in \mathcal{A}$  é tal que  $A = (A \cap X) \cup (A \setminus X)$  com  $|A| = k$  e  $|A \cap X| \geq \ell + 1$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &\leq \sum_{s=\ell+1}^k \binom{|X|}{s} \binom{n-|X|}{k-s} \\ &< 2^{3k} \cdot \binom{n}{k-(\ell+1)} \end{aligned}$$

que é um polinômio de grau  $k - (\ell + 1)$  em  $n$ . Como  $\binom{n-\ell}{k-\ell}$  é um polinômio de grau  $k - \ell$  em  $n$ , temos que, para  $n$  suficientemente grande,  $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-\ell}{k-\ell}$ .  $\square$

### 7.3 Álgebra Linear e famílias intersectantes

Nessa seção usaremos uma poderosa ferramenta: a Álgebra Linear. Uma aplicação típica de Álgebra Linear em combinatória é da seguinte forma: se queremos um limitante superior no tamanho de um determinado conjunto de objetos, associamos os objetos a elementos de um espaço vetorial  $V$  de certa dimensão e mostramos que o conjunto de objetos correspondente é linearmente independente. Como o tamanho do maior conjunto linearmente independente é igual a dimensão de  $V$ , concluímos que o tamanho do conjunto inicial é menor ou igual à dimensão de  $V$ .

Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  uma família intersectante. O que acontece com o maior tamanho possível de  $\mathcal{A}$  se ao invés de exigirmos que a interseção entre quaisquer dois conjuntos distintos tenha um tamanho mínimo, pedíssemos que a interseção sempre fosse ímpar?

Vamos começar com dois problemas clássicos. Duas cidades, *Parzópolis* e *Imparzópolis*, possuem uma população de  $n$  habitantes que adoram formar diferentes clubes. Para limitar o número de clubes possíveis, a tola prefeitura de Parzópolis estabeleceu as seguintes regras:

- Todo clube deve ter um número par de membros;
- Dois clubes não podem possuir exatamente os mesmos membros;
- Quaisquer dois clubes devem ter um número par de membros em comum.

Enquanto a esperta prefeitura de Imparzópolis estabeleceu as seguintes regras:

- Todo clube deve ter um número ímpar de membros;
- Quaisquer dois clubes devem ter um número par de membros em comum.

Quantos clubes podem ser formados em Parzópolis? E em Imparzópolis?

Deixamos como exercício observar que em Parzópolis podem ser formados até  $2^{n/2}$  clubes (se  $n$  for par). A seguir, veremos que no máximo  $n$  clubes podem ser criados em Imparzópolis. Qual seria um exemplo com exatamente  $n$  clubes?

**Proposição 7.3.1.** *Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ . Se  $|A|$  é ímpar para todo  $A \in \mathcal{A}$  e  $|A \cap B|$  é par para todo  $A, B \in \mathcal{A}$  com  $A \neq B$ , então  $|\mathcal{A}| \leq n$ .*

*Demonstração.* A ideia da prova é mapear os conjuntos de  $\mathcal{A}$  no espaço vetorial  $\mathbb{Z}_2^n$  da maneira mais simples possível: mapeando  $A$  para o seu *vetor característico*

$\chi^A \in \mathbb{Z}_2^n$ , ou seja,

$$\chi_i^A = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in A, \\ 0 & \text{se } i \notin A. \end{cases}$$

Observe que, nesse cenário, as condições “ $|A|$  é ímpar” e “ $|A \cap B|$  é par” se traduzem para “ $\chi^A \cdot \chi^A = 1$ ” e “ $\chi^A \cdot \chi^B = 0$ ”, respectivamente, em que, para  $v, w \in \mathbb{Z}_2^n$ ,

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^n v_i w_i \in \mathbb{Z}_2,$$

em analogia com o produto escalar usual.

Seguindo o argumento típico de Álgebra Linear, vamos mostrar que o conjunto  $X = \{\chi^A : A \in \mathcal{A}\}$  é linearmente independente. Para tal, considere uma combinação linear dos vetores de  $X$  que leve ao vetor zero. Ou seja,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \alpha_A \chi^A = 0 \quad (7.4)$$

em que  $\alpha_A \in \mathbb{Z}_2$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Seja  $B \in \mathcal{A}$ . Aplicando o produto escalar com  $\chi^B$  em ambos os lados da Equação (7.4) e usando a hipótese, obtemos  $\alpha_B \chi^B \cdot \chi^B = 0$ , o que implica  $\alpha_B = 0$ . Como a escolha de  $B \in \mathcal{A}$  foi arbitrária, concluímos que  $\alpha_A = 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Logo,  $X$  é um conjunto linearmente independente. Além disso, como a dimensão de  $\mathbb{Z}_2^n$  é igual a  $n$ , temos  $|\mathcal{A}| = |X| \leq n$ , como desejado.  $\square$

A mesma conclusão vale se trocarmos as palavras par e ímpar na Proposição 7.3.1 (veja o Exercício 7.5.6).

Observe que, na Proposição 7.3.1, pedimos que  $|A| \equiv 1 \pmod{2}$  e  $|A \cap B| \equiv 0 \pmod{2}$ . Naturalmente, perguntamos se é possível provar limitantes similares se impusermos restrições módulo  $k$  para  $k \neq 2$ . A resposta de, certa forma, é sim quando  $k$  é primo (e quando  $k$  é uma potência de primo, mas não vamos provar isso), como provado por Deza, Frankl e Singhi (1983).

Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  e seja  $L \subseteq \mathbb{Z}$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  é  $L$ -*intersectante* se  $|A \cap B| \in L$  para qualquer par de conjuntos distintos  $A, B \in \mathcal{A}$ . Quando  $L \subseteq \mathbb{Z}_p$ , a mesma definição se aplica, mas nesse caso  $|A \cap B|$  é interpretado como um elemento de  $\mathbb{Z}_p$ . Observe que, nessa definição, não falamos nada do tamanho de cada conjunto de  $\mathcal{A}$ .



**Teorema 7.3.2** (Deza, Frankl e Singhi, 1983). *Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ . Seja  $p$  um número primo, e seja  $L \subseteq \mathbb{Z}_p$  com  $|L| = s$ . Se  $\mathcal{A}$  é  $L$ -intersectante (mod  $p$ ) e  $|A| \notin L$  (mod  $p$ ) para todo  $A \in \mathcal{A}$ , então*

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}.$$

A ideia da prova é associar os conjuntos de  $\mathcal{A}$  a uma família  $\mathcal{F}$  de polinômios de modo que  $\mathcal{F}$  é linearmente independente em um espaço vetorial. Uma ferramenta muito útil para controlar a dimensão de um espaço de polinômios é a operação de *multilinearização* de um polinômio definida a seguir.

Seja  $f(x_1, \dots, x_n)$  um polinômio com coeficientes em  $\mathbb{Z}_p$ . Definimos  $\bar{f}$  como o polinômio obtido de  $f$  trocando  $x_i^j$  por  $x_i$  para todo  $j > 1$ . Por exemplo,

$$f = x_1^4 + 3x_1^2x_2x_3^2 + 5x_3^5 \quad \Rightarrow \quad \bar{f} = x_1 + 3x_1x_2x_3 + 5x_3.$$

A linearização se mostra muito útil uma vez que  $f(x) = \bar{f}(x)$  para todo  $x \in \{0, 1\}^n$ .

*Demonstração.* Para cada  $A \in \mathcal{A}$  desejamos encontrar polinômios  $f_A: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Z}_p$  linearmente independentes, ou seja, queremos encontrar polinômios tais que  $\sum_{A \in \mathcal{A}} c_A f_A = 0$  se e somente se  $c_A = 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

Observe que dados polinômios  $f_A$  quaisquer, se para cada  $A \in \mathcal{A}$  existir um vetor  $y_A \in \mathbb{Z}_p^n$  tal que  $f_A(y_A) \neq 0$  e  $f_A(y_B) = 0$  para  $A \neq B$ , então os polinômios  $f_A$  são independentes. Isso ocorre pois ao avaliar cada  $y_A$  em  $\sum_{A \in \mathcal{A}} c_A f_A = 0$ , concluímos que  $c_A = 0$ . Logo, para cada  $A \in \mathcal{A}$  definimos

$$f_A(x) = \prod_{\ell \in L} \left( \sum_{i \in A} x_i - \ell \right).$$

Note que

$$f_A(\chi^B) = \prod_{\ell \in L} (|A \cap B| - \ell) \quad \begin{cases} \equiv 0 \pmod{p} & \text{se } A \neq B \\ \not\equiv 0 \pmod{p} & \text{se } A = B. \end{cases}$$

Portanto, o conjunto  $\mathcal{F} = \{f_A : A \in \mathcal{A}\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{Z}_p$ . Esses polinômios se encontram no espaço de polinômios multilineares de grau no

máximo  $|L|$ . Tal espaço é gerado pelos monômios  $x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$  em que  $p_i \geq 0$  e  $\sum_{i \in [n]} p_i \leq |L|$ . Portanto, a dimensão desse espaço é igual a

$$\sum_{d=0}^{|L|} \binom{n+d-1}{d}.$$

Com um espaço dessa dimensão obtemos um limitante que não é tão bom quanto queríamos. Para reduzir a dimensão, vamos fazer uso da operação de multilinearização:

Seja  $\mathcal{F}' = \{\overline{f_A} : A \in \mathcal{A}\}$ . Como  $\chi^A \in \{0, 1\}^n$  temos que  $f_A(\chi^B) = \overline{f_A}(\chi^B)$  para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ . Portanto, assim como  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}'$  também é um conjunto linearmente independente de polinômios. Além disso, o espaço gerado por  $\mathcal{F}'$  corresponde ao espaço gerado por monômios  $x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$  em que  $p_i \in \{0, 1\}$  e  $\sum_{i \in [n]} p_i \leq |L|$ . Tal espaço tem dimensão  $\sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$ , como desejado.  $\square$

O Teorema 7.3.2 é conhecido, por razões históricas (veja o Teorema 7.3.3), como a *desigualdade de Frankl e Wilson modular*. Note que, no caso em que  $p = 2$  e  $L = \{0\} \subseteq \mathbb{Z}_2$ , a desigualdade de Frankl e Wilson modular implica que  $|\mathcal{A}| \leq n + 1$ , um limitante uma unidade maior do que o limitante obtido na Proposição 7.3.1.

Um corolário do Teorema 7.3.2 é que, para  $L \subseteq \mathbb{Z}$ , se  $\mathcal{A}$  é  $L$ -intersectante e  $|A| \notin L$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ , então a mesma conclusão segue. Na verdade, uma versão mais forte (sem a condição  $|A| \notin L$ ) desse corolário é verdade. Essa versão mais forte foi provada por Frankl e Wilson (1981) e motivou o nome do Teorema 7.3.2.

**Teorema 7.3.3** (Frankl e Wilson, 1981). *Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  e seja  $L \subseteq \mathbb{Z}$  com  $|L| = s$ . Se  $\mathcal{A}$  é  $L$ -intersectante, então*

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}.$$

O Teorema 7.3.3 pode ser provado seguindo a mesma ideia do Teorema 7.3.2 (veja o Exercício 7.5.10). Frankl e Wilson também investigaram famílias de subconjuntos de  $[n]$  de tamanho fixo em cenários similares:

**Teorema 7.3.4** (Frankl e Wilson, 1981). *Seja  $p$  um número primo. Seja  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$  e seja  $L \subseteq \mathbb{Z}_p$  com  $|L| = s \leq k$ . Se  $\mathcal{A}$  é  $L$ -intersectante (mod  $p$ ) e  $k \notin L$*

(mod  $p$ ), então

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{s}.$$

Uma consequência imediata do Teorema 7.3.4 (escolhendo  $p > k$ ) é o Teorema 7.3.5. Ele também pode ser provado seguindo a mesma ideia do Teorema 7.3.2.

**Teorema 7.3.5** (Ray-Chaudhuri e Wilson, 1975). *Seja  $p$  um número primo. Seja  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$  e seja  $L \subseteq \mathbb{Z}$  com  $|L| = s$ . Se  $\mathcal{A}$  é  $L$ -intersectante e  $k \notin L$ , então*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{s}.$$

Observe que o limitante dado pelo Teorema 7.3.4 independe de  $k$ . Além disso, é importante que  $p$  seja um número primo. Caso contrário, existe uma construção de uma família de tamanho superpolinomial, dada por Grolmusz (2000). A condição  $|A| = k \notin L \pmod{p}$  também é necessária, pois caso contrário também existe uma família de tamanho assintoticamente maior que  $\binom{n}{s}$  que satisfaz todas as outras condições do teorema.

Por último, o limitante é essencialmente o melhor possível. Para tal considere

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \binom{[n]}{k} : [k-s] \subseteq A \right\}.$$

Seja  $L = \{k-s, \dots, k-1\}$ . Observe que para todos  $A, B \in \mathcal{A}$  distintos temos que  $|A \cap B| \in L$ . Escolhendo um primo  $p > k$ , a família satisfaz as hipóteses do teorema e é tal que

$$|\mathcal{A}| = \binom{n-(k-s)}{s} \approx \binom{n}{s}$$

quando  $n$  é suficientemente grande.

*Demonstração do Teorema 7.3.4.* Novamente vamos usar um argumento utilizando Álgebra Linear. Dessa vez, vamos combinar as ideias que usamos para demonstrar tanto a Proposição 7.3.1 quanto o Teorema 7.3.2.

Seja  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ . Começamos associando cada  $A_i \in \mathcal{A}$  a um vetor  $u^i \in \mathbb{Z}^m$  cuja  $j$ -ésima coordenada é dada por

$$u_j^i = \prod_{\ell \in L} |A_i \cap A_j| - \ell.$$

A princípio, os vetores  $u^i$  podem não parecer naturais, mas repare que na verdade  $u^i = (f_{A_1}(\chi^{A_i}), \dots, f_{A_m}(\chi^{A_i}))$  em que  $f_{A_1}, \dots, f_{A_m}$  são os polinômios usados na desigualdade modular de Frankl e Wilson, e  $\chi^{A_i}$  é o vetor característico do conjunto  $A_i$ .

Note que os vetores  $u^i, \dots, u^m$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{Z}_p$  e, portanto, sobre  $\mathbb{Q}$ . Para ver isso, observe que as condições “ $k \notin L \pmod{p}$ ” e “ $\mathcal{A}$  é  $L$ -intersectante  $\pmod{p}$ ” se traduzem para as afirmações “ $u_i^i \neq 0$ ” e “ $u_j^i = 0$ ” em  $\mathbb{Z}_p$ , respectivamente. Assim, a prova do teorema se reduz à seguinte afirmativa.

**Afirmativa 7.3.6.** *O subespaço gerado<sup>3</sup> por  $u^1, \dots, u^m$  tem dimensão no máximo  $\binom{n}{s}$ .*

Seja  $U \subseteq \mathbb{Q}^m$  o subespaço gerado por  $u^1, \dots, u^m$ . Olhando para o limitante da dimensão que desejamos, parece uma boa ideia encontrar mostrar que  $U$  está contido no subespaço  $W \subseteq \mathbb{Q}^m$  gerado por vetores (a escolher)  $w^1, \dots, w^B$  para  $B \in \binom{[n]}{s}$ . Como cada  $u_i$  é associado a um conjunto de  $\mathcal{A}$ , iremos associar a  $B \in \binom{[n]}{s}$  o vetor

$$w^B := (h(A_1, B), \dots, h(A_m, B))$$

em que  $h$  é uma função devidamente escolhida. Se mostrarmos isso, teremos que  $\dim U \leq \dim W \leq \binom{n}{s}$ , como estamos buscando.

Talvez a escolha mais natural para  $h$  seja  $h(A, B) = |A \cap B|$ . No entanto, nós vamos trabalhar com  $h(A, B) = \mathbb{1}_{B \subseteq A}$ , a função que indica se  $B$  está contido em  $A$  ou não, isto é,

$$\mathbb{1}_{B \subseteq A} := \begin{cases} 1 & \text{se } B \subseteq A, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração da Afirmativa 7.3.6.* Primeiramente, definimos, para cada  $B \subseteq [n]$  com  $|B| \leq s$ , o vetor

$$w^B := (\mathbb{1}_{B \subseteq A_1}, \dots, \mathbb{1}_{B \subseteq A_m}), \quad (7.5)$$

e  $W_i$  como o subespaço gerado pelos vetores  $w^B$  tais que  $|B| = i$ . Note que  $W_s = W$ . Para provar que os  $u^i$  estão em  $W$ , vamos decompô-los em vetores mais fáceis de serem manipulados. Para tal, defina

$$q(t) := \prod_{\ell \in L} (t - \ell)$$

<sup>3</sup>Ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares desses vetores.

e observe que  $u^i = (q(|A_i \cap A_1|), \dots, q(|A_i \cap A_m|))$ . Assim, existem  $c_0, \dots, c_s \in \mathbb{Q}$  tais que

$$q(t) = \sum_{j=0}^s c_j \binom{t}{j}$$

Em particular,

$$u^i = \sum_{j=0}^s c_j u^{i,j}, \quad \text{para} \quad u^{i,j} := \left( \binom{|A_i \cap A_1|}{j}, \dots, \binom{|A_i \cap A_m|}{j} \right). \quad (7.6)$$

Iremos agora mostrar que  $u^{i,j} \in W_j$  e que os espaços  $W_j$  estão aninhados, isto é,  $W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots \subseteq W_s$ . Por (7.6), isso implicará que  $u^i \in W_s = W$ , como afirmado.

**Afirmativa 7.3.7.** *Para todo  $i \in [m]$  e  $j \leq s$ , vale que  $u^{i,j} \in W_j$ .*

Para todo  $k \in [m]$ , temos que

$$\binom{|A_i \cap A_r|}{j} = \sum_{T \subseteq \binom{[n]}{j}} \mathbb{1}_{T \subseteq A_i} \cdot \mathbb{1}_{T \subseteq A_r}, \quad (7.7)$$

pois ambos os lados contam os subconjuntos de tamanho  $j$  contidos em  $A_i \cap A_r$ . Logo, pela definição de  $w^T$  em (7.5), temos que

$$u^{i,j} = \sum_{T \in \binom{[n]}{j}} \mathbb{1}_{T \subseteq A_i} \cdot w^T,$$

pois (7.7) diz que a  $r$ -ésima coordenada de cada um dos lados é igual para todo  $r \in [m]$ . Como  $w^T \in W_j$  para todo  $T$  com  $|T| = j$ , provamos a afirmativa.  $\square$

**Afirmativa 7.3.8.** *Para todo  $0 \leq j < s$ , vale que  $W_j \subseteq W_{j+1}$ .*

*Demonstração.* De fato, seja  $B \in \binom{[n]}{j}$ . Para  $r \in [m]$ , lembre-se que  $|A_r| = k \geq s$  e, portanto, se  $B \subset A_r$ , então existem precisamente  $k - j$  subconjuntos  $T$  tais que  $B \subseteq T \subseteq A_r$ . Logo,

$$(k - j) \cdot \mathbb{1}_{B \subseteq A_k} = \sum_{T \in \binom{[n]}{j+1}} \mathbb{1}_{B \subseteq T} \cdot \mathbb{1}_{T \subseteq A_k}, \quad (7.8)$$

pois ambos os lados são 0 se  $B \not\subseteq A_k$  e  $k - j$  se  $B \subseteq A_k$ . Mas então

$$(k - j) \cdot w^B = \sum_{T \in \binom{[n]}{j+1}} \mathbb{1}_{B \subseteq T} \cdot w^T,$$

pois (7.8) diz exatamente que a  $r$ -ésima coordenada de cada um dos lados é igual para todo  $r \in [m]$ . Assim, todo  $w^B$  com  $|B| = j$  é combinação linear de vetores de  $W_{j+1}$ , concluindo a prova da afirmativa.  $\square$

Assim, pelas afirmativas,  $u^i = u^{i,0} + \dots + u^{i,s} \in W_0 + \dots + W_s = W_s = W$ . Como os vetores  $u^1, \dots, u^m$  são linearmente independentes e  $W$  tem dimensão  $\binom{n}{s}$ , concluímos que  $m \leq \binom{n}{s}$ . Isso conclui a prova da Afirmativa 7.3.6 e, portanto, o Teorema 7.3.4 segue.  $\square$

## 7.4 Teorema de Kruskal e Katona

Dado  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ , definimos a *sombra* de  $\mathcal{A}$  como a família de todos os conjuntos de tamanho  $k - 1$  contidos em algum elemento de  $\mathcal{A}$ . Formalmente, temos

$$\partial\mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \binom{A}{k-1}$$

Não é difícil checar que também temos  $\partial\mathcal{A} = \{A \setminus \{v\} : v \in A \text{ e } A \in \mathcal{A}\}$ . Abaixo apresentamos dois exemplos com  $n = 6$  e  $r = 3$  para entendermos melhor esse conceito. Sejam

$$\mathcal{A}_1 = \{123, 456, 124, 256\} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_2 = \{123, 124, 134, 234\}$$

então

$$\partial\mathcal{A}_1 = \{12, 13, 23, 45, 46, 56, 14, 24, 25, 26\} \quad \text{e} \quad \partial\mathcal{A}_2 = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}.$$

Gostaríamos de entender o comportamento do tamanho da sombra de uma família  $\mathcal{A}$ . Claramente o tamanho da sombra  $\partial\mathcal{A}$  depende do tamanho de  $\mathcal{A}$ : se  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ , então  $\partial\mathcal{A} \subseteq \partial\mathcal{A}'$ . Faz sentido, então, fixar o tamanho de  $\mathcal{A}$  e perguntar o quão pequeno ou o quão grande a sombra de  $\mathcal{A}$  pode ser.

Naturalmente, como cada conjunto de tamanho  $k$  contém exatamente  $k$  subconjuntos de tamanho  $k - 1$ , segue que

$$|\partial\mathcal{A}| \leq k|\mathcal{A}|.$$

Não é difícil ver que o limitante acima é justo. Basta considerarmos uma família  $\mathcal{A}$  de conjuntos disjuntos de tamanho  $k$ . Consequentemente, o problema de maximização de  $|\partial\mathcal{F}|$  não se mostra muito interessante. Portanto, vamos estar interessados em saber o quão pequena a sombra de um determinado conjunto pode ser.

No exemplo inicial, vimos duas famílias  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  de tamanho 4 com sombras de tamanho 10 e 6, respectivamente. Intuitivamente,  $\mathcal{A}_2$  é melhor porque os termos estão “agrupados” juntos.

De forma geral, esperaríamos que, se tivéssemos  $|\mathcal{A}| = m = \binom{n'}{k}$ , a melhor escolha para  $\mathcal{A}$  de forma a minimizar o tamanho da sombra deveria ser  $\mathcal{A} = \binom{[n']}{k}$  com  $|\partial\mathcal{A}| = \binom{n'}{k-1}$ . Para outras escolhas de  $\mathcal{A}$ , talvez uma estratégia razoável seja encontrar o menor  $n'$  tal que  $|\mathcal{A}| \leq \binom{n'}{k}$ .

O Teorema de Kruskal e Katona afirma que a intuição acima é, de fato, correta e, além disso, determina o menor tamanho de uma sombra para todo  $k$  e  $m$ . Para enunciarmos o teorema, precisamos de uma definição motivada pela seguinte proposição.

**Proposição 7.4.1.** *Dados  $k, m \in \mathbb{N}$ , existem inteiros  $s \geq 1$  e  $a_k > a_{k-1} > \dots > a_s \geq s$  tais que*

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_s}{s}. \quad (7.9)$$

*Ademais, tais inteiros  $s$  e  $a_k, \dots, a_s$  são únicos.*

Dizemos que (7.9) é a *representação em  $k$ -cascata* de  $m$ . Ao longo desta seção, assumiremos que  $a_k, \dots, a_s$  são os inteiros associados à representação em  $k$ -cascata de  $m$ . O principal teorema desta seção é o seguinte.

**Teorema 7.4.2** (Kruskal, 1963; Katona, 1968). *Seja  $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ . Se  $|\mathcal{A}| = m$ , então*

$$|\partial\mathcal{A}| \geq \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \dots + \binom{a_s}{s-1}.$$

O limitante dado pelo Teorema de Kruskal e Katona é justo. Uma construção ótima segue da intuição mencionada anteriormente, contudo é mais fácil descrevê-la em termos da *ordem colexicográfica*.

Dados  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  de tamanho  $k$ , dizemos que  $A$  é menor que  $B$  na ordem colexicográfica, e escrevemos  $A < B$ , se

$$\max(A \triangle B) \in B,$$

em que  $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  denota a diferença simétrica entre  $A$  e  $B$ .

Informalmente, conjuntos com elementos maiores vêm depois na ordem colexicográfica. Por exemplo, na ordem colexicográfica, temos a seguinte ordenação dos conjuntos com 3 elementos:

$$123 < 124 < 134 < 234 < 125 < 135 < 235 < 145 < \dots$$

Repare que o segmento inicial de uma ordem colexicográfica com  $\binom{n'}{k}$  elementos é exatamente  $\binom{[n']}{k}$ . Seja  $\mathcal{C}(m, k)$  a família dos primeiros  $m$  conjuntos de tamanho  $k$  na ordem colexicográfica. A igualdade no limitante dado pelo Teorema de Kruskal e Katona pode ser obtida justamente tomando  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(m, k)$ .

O Teorema de Kruskal e Katona possui diversas aplicações. Porém, pode ser um pouco complicado, em termos de cálculos, lidar com representações em  $k$ -cascata. Felizmente, Lovász encontrou uma forma levemente mais fraca do Teorema de Kruskal e Katona que é muito mais amigável. Para apresentar essa versão, teremos que estender a nossa definição de coeficientes binomiais para números reais. Dados  $x \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1) \cdots (x-k+1)}{k!}.$$

Note que  $\binom{x}{k}$  é um polinômio de grau  $k$  estritamente crescente para  $x \geq k$ . Segue que, para todo  $m \in \mathbb{N}$ , existe um único valor  $x \geq k$  tal que  $\binom{x}{k} = m$ .

**Teorema 7.4.3** (Lovász, 1978). *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de conjuntos de tamanho  $k$ . Se  $|\mathcal{F}| = \binom{x}{k}$ , com  $x \geq k$ , então*

$$|\partial\mathcal{F}| \geq \binom{x}{k-1}.$$

Observe que quando  $m = \binom{n}{k}$ , para um inteiro  $n$ , o limitante do teorema de Lovász é compatível com o limitante do Teorema de Kruskal e Katona. Contudo, para  $\binom{n}{k} < m < \binom{n+1}{k}$ , o limitante do Teorema de Lovász é ligeiramente menor do que o de Kruskal e Katona.



Para provar o Teorema de Kruskal e Katona, vamos usar uma técnica conhecida como *compressão*, que é um poderoso método em combinatória extremal. Para usar esse método, começamos com um conjunto  $\mathcal{C}$  de objetos que acreditamos ser extremal. A ideia por trás da operação de compressão é tentar modificar o objeto inicial de modo a torná-lo cada vez mais próximo de um objeto contido em  $\mathcal{C}$  de uma forma válida. O objetivo, em geral, é que ao se comprimir um objeto diversas vezes, ele se torne um objeto contido em  $\mathcal{C}$  ou comparável a um objeto de  $\mathcal{C}$ . Se as operações de compressão aplicadas forem todas válidas, poderemos concluir que os objetos de  $\mathcal{C}$  de fato são extremais.

No caso do Teorema de Kruskal e Katona, temos que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(m, k)$ . Nosso objetivo inicial é construir um operador de compressão que nos permita comprimir de forma válida um conjunto inicial  $\mathcal{A}$  de modo que, ao aplicar a operação de compressão diversas vezes, cheguemos a  $\mathcal{C}(m, k)$  ou, a alguma família que consigamos relacionar com  $\mathcal{C}(m, k)$ .

Como podemos definir o nosso operador de compressão? Note que, na ordem colexicográfica, de certa forma, os conjuntos com elementos maiores vêm depois, e o exemplo que acreditamos ser extremal consiste nos primeiros  $m$  conjuntos dessa ordem. Uma possibilidade, então, é escolher um operador que permita a troca de elementos maiores por elementos menores.

Fixe dois inteiros distintos  $i$  e  $j$ . Dada uma família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  de tamanho  $k$ , o *operador de compressão*  $C_{i,j}$  produz uma nova família  $C_{i,j}(\mathcal{A}) = \{C_{i,j}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ , para a qual

$$C_{i,j}(A) = \begin{cases} (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} & \text{se } j \in A, i \notin A, \\ A & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dizemos que uma família  $\mathcal{A}$  é  $(i, j)$ -*comprimida* se  $C_{i,j}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ .

Informalmente, dada uma família  $\mathcal{A}$ , o operador de compressão  $C_{i,j}$  realiza a troca de  $j$  por  $i$  em cada conjunto  $A \in \mathcal{A}$  para o qual tal troca produz um conjunto que não está em  $\mathcal{A}$ .

A seguir, destacamos algumas propriedades chaves do operador de compressão definido. A primeira é o fato de que para qualquer família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$ , temos  $|C_{i,j}(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}|$ . E a segunda nos mostra que a operação de compressão se comporta bem com respeito às sombras, ou seja, a sombra de uma família comprimida está contida na compressão de sua sombra.

**Afirmativa 7.4.4.** *Para qualquer família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$ , temos que*

$$\partial C_{i,j}(\mathcal{A}) \subseteq C_{i,j}(\partial \mathcal{A}).$$

Em particular,  $|\partial C_{i,j}(\mathcal{A})| \leq |C_{i,j}(\partial \mathcal{A})|$ .

*Demonstração.* Suponha que  $B \in \partial C_{i,j}(\mathcal{A})$ . Logo,  $B = C_{i,j}(A) \setminus \{x\}$  para algum  $A \in \mathcal{A}$  e  $x \in C_{i,j}(A)$ . Uma simples análise de casos mostra que  $B \in C_{i,j}(\partial \mathcal{A})$ , o que implica a afirmação.  $\square$

Essas duas propriedades chaves nos mostram que a operação de compressão é sempre válida, pois a compressão de uma família de conjuntos não modifica o seu tamanho e o tamanho da sombra nunca aumenta.

Com esse operador de compressão em nossas mãos, vamos checar se ele de fato é capaz de levar qualquer família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de tamanho  $k$  em  $\mathcal{C}(m, k)$ .

Motivados pelo fato de que conjuntos com elementos maiores vêm depois na ordem colexicográfica, definimos o conceito de *compressão à esquerda* como segue. Dada uma família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$ , dizemos que  $\mathcal{A}$  está *comprimida à esquerda* se  $C_{i,j}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$  para todo  $i < j$ . Será que comprimir à esquerda é suficiente para o nosso objetivo?

Observe que, na ordem colexicográfica, os segmentos iniciais são comprimidos à esquerda, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a família

$$\mathcal{A} = \{123, 124, 125, 126\}$$

é um exemplo de família comprimida à esquerda, porém  $\mathcal{A}$  não é um segmento inicial. Concluimos que a compressão à esquerda não nos leva necessariamente a  $\mathcal{C}(m, k)$  a partir de uma família  $\mathcal{A}$  qualquer. O que podemos fazer?

Para provar o Teorema 7.4.2 vamos, ao invés de persistir com  $C_{i,j}$ , criar um operador de compressão mais “poderoso”. Sejam  $U$  e  $V$  dois subconjuntos de  $\mathbb{N}$  de tamanho  $s$  com  $U \cap V = \emptyset$ . Dada uma família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  de tamanho  $k$ , o *operador de compressão*  $C_{U,V}$  produz uma nova família  $C_{U,V}(\mathcal{A}) = \{C_{U,V}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ , para a qual

$$C_{U,V}(A) = \begin{cases} (A \setminus V) \cup U & \text{se } A \cap (U \cup V) = V, \\ A & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dizemos que  $\mathcal{A}$  é  $(U, V)$ -*comprimida* se  $C_{U,V}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ . Observe que o operador  $C_{U,V}$  nada mais é do que uma generalização do operador  $C_{i,j}$  uma vez que  $C_{i,j} = C_{U,V}$  para  $U = \{i\}$  e  $V = \{j\}$ .

Novamente concluímos que a compressão de uma família qualquer não altera o seu tamanho, ou seja,  $|C_{U,V}(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}|$ .

Seja  $\mathcal{B}$  uma família qualquer de tamanho  $|\mathcal{A}|$  formada por subconjuntos de  $\mathbb{N}$  com tamanho  $k$  e tal que  $\mathcal{B}$  é  $(U, V)$ -comprimida para todos  $U, V \subseteq \mathbb{N}$  disjuntos com  $|U| = |V|$  e  $\max V > \max U$ . Vamos ver que  $\mathcal{B} = \mathcal{C}(|\mathcal{A}|, k)$ .

**Lema 7.4.5.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma família de tamanho  $m$  formada por subconjuntos de  $\mathbb{N}$  com tamanho  $k$ . Temos que  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(m, k)$  se e somente se  $\mathcal{A}$  é  $(U, V)$ -comprimida para todo  $U, V \subseteq \mathbb{N}$  disjuntos com  $|U| = |V|$  e  $\max V > \max U$ .*

*Demonstração.* Se  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(m, k)$ , então claramente  $\mathcal{A}$  é  $(U, V)$ -comprimida para todo  $U, V \subseteq \mathbb{N}$  disjuntos com  $|U| = |V|$  e  $\max V > \max U$ . Suponha que  $\mathcal{A}$  é  $(U, V)$ -comprimida para todo  $U, V$ . Se  $\mathcal{A}$  não é um segmento inicial da ordem colexicográfica, então existe  $B \in \mathcal{A}$  e  $C \notin \mathcal{A}$  tal que  $C < B$ . Logo,  $\mathcal{A}$  não é  $(C \setminus B, B \setminus C)$ -comprimida, uma contradição.  $\square$

Para prosseguir, mostramos como podemos associar  $\mathcal{A}$  a  $|\mathcal{B}|$ .

**Lema 7.4.6.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma família de subconjuntos de tamanho  $k$  de  $\mathbb{N}$ . Existe uma família  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de tamanho  $k$  de  $\mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{B}$  é  $(U, V)$ -comprimida para todo  $U, V \subseteq \mathbb{N}$  disjuntos com  $|U| = |V|$  e  $\max V > \max U$ . Além disso,*

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}| \quad e \quad |\partial \mathcal{B}| \leq |\partial \mathcal{A}|. \quad (7.10)$$

*Demonstração.* Primeiramente, observe que  $\mathcal{A}$  satisfaz (7.10). Seja, então,  $\mathcal{B}$  uma família satisfazendo (7.10) e, sujeita a isso, que minimiza a soma

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{i \in B} 2^i. \quad (7.11)$$

Vamos mostrar que  $\mathcal{B}$  satisfaz as condições do lema. Se existir  $(U, V)$  tal que  $|U| = |V|$ ,  $\max V > \max U$  e  $C_{U,V}(\mathcal{B}) \neq \mathcal{B}$ , assumamos, sem perda de generalidade, que  $U$  é minimal.

Seja  $\mathcal{B}' = C_{U,V}(\mathcal{B})$ . Como  $U$  é minimal, temos que para todo  $u \in U$  e qualquer  $v \in V$  tal que  $v \neq \max V$ ,  $\mathcal{B}$  é  $(U \setminus \{u\}, V \setminus \{v\})$ -comprimida. Assim, podemos usar a seguinte afirmativa, que generaliza a Afirmativa 7.4.4. Desta vez, o comportamento da compressão é mais delicado.

**Afirmativa 7.4.7.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma família de subconjuntos de tamanho  $k$  de  $\mathbb{N}$ , e sejam  $U, V$  subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{N}$  com tamanho  $s$ . Suponha que para todo  $u \in U$  exista  $v \in V$  tal que  $\mathcal{A}$  é  $(U \setminus \{u\}, V \setminus \{v\})$ -comprimida. Então*

$$\partial C_{U,V}(\mathcal{A}) \subseteq C_{U,V}(\partial \mathcal{A}).$$

A prova da Afirmativa 7.4.7 é análoga à da Afirmativa 7.4.4, e a deixamos a cargo do leitor. Com ela, podemos concluir que a compressão  $C_{U,V}(\mathcal{B})$  é válida. Para terminar, note que  $\mathcal{B}'$  satisfaz (7.10) e a soma (7.11) em  $\mathcal{B}'$  é menor do que a soma em  $\mathcal{B}$ , uma contradição na minimalidade de  $\mathcal{B}$ .  $\square$

Estamos prontos para provar o Teorema 7.4.2.

*Demonstração do Teorema 7.4.2.* Juntando o Lema 7.4.5 com o Lema 7.4.6, concluímos que dada uma família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  com tamanho  $k$ , existe uma família  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  com tamanho  $k$  tal que  $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$  e  $|\partial\mathcal{A}| \geq |\partial\mathcal{B}| = |\partial\mathcal{C}(m, k)|$ , como desejado.  $\square$

Vale mencionar que Frankl (1984) apresentou uma prova alternativa do teorema de Kruskal e Katona que usa apenas os operadores  $C_{i,j}$ . Tal prova explora a ideia de que se comprimirmos inicialmente a família  $\mathcal{A}$  com os operadores  $C_{1,j}$ ,  $j > 1$ , obtemos uma família  $(1, j)$ -comprimida para todo  $j > 1$ . Essa família tem a propriedade de que o tamanho da sua sombra é determinado pela sombra dos conjuntos contendo o elemento 1 e, portanto, é suficiente estimarmos de forma apropriada a sombra de tais conjuntos.

## 7.5 Exercícios

**Exercício 7.5.1** (Frankl, 1986). Seja  $\mathcal{A}$  uma família de conjuntos de cardinalidade  $k$  na qual quaisquer três conjuntos  $A, B, C \in \mathcal{A}$ , temos que  $A \cap B \not\subset C$ . Mostre que

$$|\mathcal{A}| \leq 1 + \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}.$$

**Exercício 7.5.2.** Apresente uma prova probabilística do Teorema de Bollobás: Se  $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)_{i \in [m]}\}$  é um sistema de Bollobás, então

$$\sum_{i \in [m]} \left( \frac{|A_i| + |B_i|}{|A_i|} \right)^{-1} \leq 1 \quad (7.12)$$

**Exercício 7.5.3.** Mostre que se  $\mathcal{F} = \{(A_i, B_i)_{i \in [m]}\}$  é um sistema de Bollobás com  $\cup_{i \in [m]} (A_i \cup B_i) = [n]$ , então, para todo  $x \in [n]$ ,

$$\mathcal{F}_x := \{(A_i, B_i \setminus \{x\}) : (A_i, B_i) \in \mathcal{F}, x \notin A_i\}$$

é também um sistema de Bollobás. Use isso para apresentar uma prova por indução do Teorema de Bollobás.

**Exercício 7.5.4** (Tuza, 1985). Sejam  $A_1, \dots, A_m$  e  $B_1, \dots, B_m$  coleções de conjuntos tais que, para todo  $i \in [m]$ , temos  $A_i \cap B_i = \emptyset$ ; e para todo  $i \neq j$  temos que  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  ou  $A_j \cap B_i \neq \emptyset$  (ou ambos). Mostre que, para qualquer número real  $0 < p < 1$ , vale que

$$\sum_{i \in [m]} p^{|A_i|} (1-p)^{|B_i|} \leq 1.$$

**Exercício 7.5.5.** Seja  $n \leq 2k$  e considere uma família  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  de conjuntos de cardinalidade  $k$  tal que  $A \cup B \neq [n]$ , para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ . Mostre que

$$|\mathcal{A}| \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k}.$$

**Exercício 7.5.6.** Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ . Mostre que se  $|A|$  é par para todo  $A \in \mathcal{A}$  e  $|A \cap B|$  é ímpar para todo  $A, B \in \mathcal{A}$  distintos, então  $|\mathcal{A}| \leq n$ .

**Exercício 7.5.7.** Mostre que toda família  $\ell$ -intersectante maximal tem dois conjuntos com interseção de tamanho exatamente  $\ell$ .

**Exercício 7.5.8** (Desigualdade de Fisher). Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$ , e sejam  $A_1, \dots, A_m$  subconjuntos distintos de  $[n]$  tais que  $|A_i \cap A_j| = k$  para todo  $i \neq j$ . Prove que  $m \leq n$ .

**Exercício 7.5.9.** Seja  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$  um conjunto de pontos no plano que não estão todos contidos em uma mesma reta. Mostre que os pontos de  $P$  determinam pelo menos  $m$  retas.

**Exercício 7.5.10** (Frankl e Wilson, 1981). Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  e seja  $L \subseteq \mathbb{N}$  com  $|L| = s$ . Mostre que se  $\mathcal{A}$  é  $L$ -intersectante, então

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}.$$

[Dica: Considere os polinômios  $f_A(x) = \prod_{\ell \in L, \ell < |A|} (\sum_{i \in A} x_i - \ell)$  para cada  $A \in \mathcal{A}$ .]

**Exercício 7.5.11.** Seja  $\ell \geq 2$  e seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  uma família  $\ell$ -intersectante. Mostre que se  $n + \ell = 2k$ , então

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=k}^n \binom{n}{i}.$$

Observe que esse é exatamente o limitante de  $|\mathcal{A}|$  dado pelo Teorema 7.2.3.

[Dica: Considere o operador de compressão  $C_{i,j}$  descrito na Seção 7.4 e comprima  $\mathcal{A}$  à esquerda.]



# *Teoria Extremal dos Grafos*

---

Neste capítulo, apresentamos resultados mais avançados em Teoria Extremal dos Grafos. Em particular, provamos o Teorema de Erdős e Stone, que determina assintoticamente o número extremal de todo grafo  $H$  com  $\chi(H) \geq 3$ , bem como teoremas de supersaturação e estabilidade para grafos gerais. Também apresentamos o problema de Turán para hipergrafos, e provamos os teoremas de Andrásfai, Erdős e Sós e Thomassen sobre a estrutura de grafos livres de  $H$  com grau mínimo alto. Concluímos o capítulo com o teorema de Bondy e Simonovits sobre o número extremal de ciclos pares e descrevemos uma construção algébrica que fornece cotas inferiores para o número extremal de  $C_4$ .

## **8.1 Teorema de Erdős e Stone**

Nesta seção, apresentamos o resultado mais geral da Teoria Extremal dos Grafos, o Teorema de Erdős e Stone (1946), que generaliza o Teorema de Turán (Teorema 3.1.1).

Lembre-se que, dado um grafo  $H$ , denotamos por  $\chi(H)$  o número cromático de  $H$ , isto é, o menor número  $k$  tal que o conjunto de vértices de  $H$  pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes.

**Teorema 8.1.1** (Erdős e Stone, 1946). *Seja  $H$  um grafo com  $e(H) \geq 1$ . Então*

$$\text{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \frac{n^2}{2}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como notamos no Capítulo 3, o limitante inferior do Teorema 8.1.1 decorre de observar que  $H$  não está contido no grafo de Turán  $T_{r-1}(n)$ , em que  $\chi(H) = r$ . Logo, basta provarmos o limitante superior. A prova que daremos aqui é essencialmente uma generalização da prova do Teorema 3.2.2. No entanto, como o argumento é razoavelmente mais complicado no caso geral, daremos uma visão geral da prova antes de aprofundarmos nos detalhes.

A primeira observação é que se  $\chi(H) = r$ , então  $H$  é um subgrafo de algum grafo  $r$ -partido completo. Mais precisamente, para cada  $r, t \in \mathbb{N}$ , seja  $K_r(t)$  o grafo  $r$ -partido completo que possui  $t$  vértices em cada parte, e observe que  $H \subset K_r(t)$ , em que  $r = \chi(H)$  e  $t = v(H)$ . Assim, é suficiente mostrar o limitante superior do Teorema 8.1.1 no caso  $H = K_r(t)$ . Iremos fazê-lo por indução em  $r$ . No caso  $r = 2$ , o limitante afirmado é

$$\text{ex}(n, H) = o(n^2)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , o que é verdadeiro pelo Teorema 3.2.2. Suponha, por simplicidade, que  $r = 3$  e também que

$$e(G) \geq \left(\frac{1}{2} + \delta\right) \binom{n}{2}$$

para algum  $\delta > 0$  e  $n$  suficientemente grande (como função de  $\delta$  e  $t$ ). Afirmamos que  $K_3(t) \subset G$ .

Seja  $q = q(t, \delta)$  uma constante suficientemente grande. Pela hipótese de indução (isto é, pelo Teorema 3.2.2), existe uma cópia do grafo completo bipartido  $K_{q,q}$  em  $G$ . Denote sua bipartição por  $(A, B)$  e seja  $C = V(G) \setminus (A \cup B)$ . Iremos contar “cerejas” (cópias de  $K_{1,2t}$ ) entre  $A \cup B$  e  $C$ , mas desta vez será necessário garantir que cada cereja tenha  $t$  folhas em  $A$  e  $t$  folhas em  $B$ . Se encontrarmos  $t$  dessas cerejas com o mesmo conjunto de folhas, teremos a cópia de  $K_3(t)$  procurada.

Para cada  $v \in C$ , o número de cerejas centradas em  $v$  é estritamente positivo se e somente se  $v$  tenha pelo menos  $t$  vizinhos em  $A$  e em  $B$ . Logo, para obter



o resultado desejado, é suficiente mostrar que o número de vértices de  $C$  com tal propriedade tende a infinito quando  $n \rightarrow \infty$ . Com efeito, se não houvesse  $t$  cerejas com o mesmo conjunto de  $t$  folhas em  $A$  e em  $B$ , o número total de cerejas seria

$$(t-1) \binom{q}{t}^2,$$

que é limitado.

Ao tentar implementar a estratégia acima, nos deparamos com um problema: Como garantir que tais cerejas existam? Pensando um pouco, encontramos um problema ainda pior: para um  $K_{q,q}$  arbitrário, pode ocorrer que não exista nenhuma aresta de  $G$  entre  $A \cup B$  e  $C$ . Assim, teremos que escolher a cópia de  $K_{q,q}$  com cuidado.

Para tal, usaremos um truque muito útil (que inclusive já usamos nos Capítulos 2 e 3): iremos primeiro encontrar um subgrafo  $G'$  de  $G$  com grau mínimo alto. Fazendo o procedimento descrito acima em  $G'$ , a condição de grau mínimo poderá ser usada para limitar inferiormente o número de arestas entre  $A \cup B$  e  $C$ , para com isso contar o número de cerejas.

A discussão acima motiva o seguinte lema, que nos permite substituir a condição de grau médio do Teorema 8.1.1 por uma condição de grau mínimo ligeiramente mais fraca.

**Lema 8.1.2.** *Sejam  $c \in (0, 1)$  e  $\varepsilon > 0$ , e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Se*

$$e(G) \geq c \cdot \binom{n}{2},$$

*então  $G$  contém um subgrafo  $G'$  com*

$$v(G') \geq \varepsilon n \quad e \quad \delta(G') \geq (c - \varepsilon)v(G').$$

Como na prova do Lema 2.2.12, existe um método natural de atacar o problema: remover vértices de grau mínimo até chegarmos a um subgrafo  $G'$  com as propriedades desejadas.

*Demonstração.* Lembre-se que  $H - v$  denota o grafo obtido de  $H$  pela remoção do vértice  $v$ . Seja  $G = G_n \supset G_{n-1} \supset \cdots \supset G_t$  uma sequência obtida de tal modo:

- Se existe um vértice  $v_i \in V(G_i)$  com

$$d_{G_i}(v_i) < (c - \varepsilon)v(G_i),$$

então defina  $G_{i-1} = G_i - v_i$ ;

- Do contrário, se

$$\delta(G_i) \geq (c - \varepsilon)v(G_i).$$

então defina  $t = i$  e acabe a sequência.

Note que, para todo  $t \leq i \leq n$ , o grafo  $G_i$  tem exatamente  $i$  vértices. Se  $t < \varepsilon n$ , podemos limitar o número de arestas de  $G$  por

$$e(G) < \sum_{i=t+1}^n (c - \varepsilon)i + \binom{t}{2} \leq (c - \varepsilon)\binom{n}{2} + \varepsilon\binom{n}{2},$$

o que contradiz a hipótese de que  $e(G) \geq c\binom{n}{2}$ . Isso implica que o procedimento termina com  $t \geq \varepsilon n$ , como queríamos.  $\square$

Em seguida, iremos provar uma variação do Teorema 8.1.1, na qual substituímos a condição de grau médio por uma condição de grau mínimo, com o objetivo de aplicar tal resultado ao grafo  $G'$  dado pelo Lema 8.1.2.

**Lema 8.1.3.** *Para quaisquer  $r, t \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que vale o seguinte. Se  $n \geq n_0$  e  $G$  é um grafo com  $n$  vértices e*

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n, \quad (8.1)$$

então  $K_{r+1}(t) \subset G$ .

*Demonstração.* Iremos provar o lema por indução em  $r$ . Para o caso  $r = 1$ , temos do Teorema 3.2.2 que  $\text{ex}(n, K_{t,t}) = o(n^2)$ , e por hipótese  $G$  tem pelo menos  $\varepsilon n^2/2$  arestas. Assim, se  $n$  é grande o suficiente,  $K_{t,t} \subset G$ .

Seja  $r \geq 2$  e suponha que o resultado é válido para  $r - 1$ . Seja  $t \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , e escolha  $q \in \mathbb{N}$  com  $q \geq t/\varepsilon$ . Pela hipótese de indução, se  $n$  é suficientemente grande e vale (8.1), então  $K_r(q) \subset G$ .

Fixe uma cópia de  $K_r(q)$  em  $G$  com  $r$ -partição  $(A_1, \dots, A_r)$ , e defina  $A := A_1 \cup \dots \cup A_r$  e  $B := V(G) \setminus A$ . Defina também

$$X := \bigcap_{i=1}^r \{v \in B : |N(v) \cap A_i| \geq t\},$$

o conjunto de vértices de  $B$  que têm pelo menos  $t$  vizinhos em cada um dos  $A_i$ . Temos como objetivo mostrar que  $|X| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Para fazê-lo, iremos contar o número de arestas entre  $A$  e  $B$ . Pela definição de  $X$  e de  $|A| = qr$ , temos que

$$e(A, B) \leq |X| \cdot qr + (|B| - |X|)(q(r-1) + t - 1),$$

e, pela condição de grau mínimo em (8.1), temos que

$$e(A, B) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n \cdot qr - (qr)^2.$$

Manipulando a equação e observando que  $|B| \leq n$ , decorre que

$$\varepsilon q r n \leq (t-1)n + |X| \cdot (q-t+1) + (qr)^2.$$

Como  $q \geq t/\varepsilon$ , concluímos que  $|X| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , como afirmado.

Para finalizar a demonstração, escolha, para cada vértice  $v \in X$  e  $i \in [r]$ , um conjunto  $B_i(v) \subseteq N(v) \cap A_i$  de  $t$  elementos. Como cada vértice de  $x$  admite no máximo  $\binom{q}{t}^r = O(1)$  escolhas de conjuntos de  $x$  e  $|X| \rightarrow \infty$ , o Princípio da Casa dos Pombos garante a existência um conjunto  $B_{r+1} \subseteq X$  de tamanho  $t$  para os quais escolhemos a mesma sequência de conjuntos  $B_1, \dots, B_r$  (isto é,  $B_i(v) = B_i(w)$  para  $v, w \in B_{r+1}$  e  $i \in [r]$ ). Assim, encontramos um  $K_{r+1}(t)$  com partes  $B_1, \dots, B_{r+1}$ , como desejado.  $\square$

Combinando os Lemas 8.1.2 e 8.1.3, podemos demonstrar o Teorema 8.1.1.

*Demonstração do Teorema 8.1.1.* Seja  $r = \chi(H) - 1$ . O limitante inferior decorre de  $H \not\subset T_r(n)$ , de modo que basta provar o limitante superior. Para tal, escolha  $t = v(H)$  e considere um número  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno. Tome um  $n$  suficientemente grande e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices tal que

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + 2\varepsilon\right)\binom{n}{2}.$$

Pelo Lema 8.1.2, aplicado com  $c = 1 - 1/r + 2\varepsilon$ , existe um subgrafo  $G' \subset G$  com pelo menos  $\varepsilon n$  vértices e

$$\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)v(G').$$

Pelo Lema 8.1.3, tal subgrafo contém uma cópia de  $K_{r+1}(t)$ . Assim,  $H \subset K_{r+1}(t) \subset G' \subset G$ , como desejado.  $\square$

O Teorema 8.1.1 determina a ordem de crescimento do número extremal quando  $\chi(H) \geq 3$ . O problema de determinar  $\text{ex}(n, H)$  assintoticamente é muito mais complicado quando  $\chi(H) = 2$ . Não se conhece, por exemplo, a ordem de crescimento de  $\text{ex}(n, C_6)$ .

## 8.2 Estabilidade

Dizemos que um grafo  $G$  está  $t$ -próximo de ser  $r$ -partido se existe um subgrafo  $r$ -partido de  $G$  com pelo menos  $e(G) - t$  arestas. No Capítulo 3, provamos o seguinte teorema de estabilidade para cliques: Se  $G$  é um grafo livre de  $K_{r+1}$  com  $n$  vértices e pelo menos  $\text{ex}(n, K_{r+1}) - t$  arestas, então  $G$  está  $t$ -próximo de ser  $r$ -partido.

Nesta seção, consideraremos o problema de estabilidade para grafos gerais. O seguinte teorema é o principal resultado de tal tipo, conhecido como o Teorema de Estabilidade de Erdős e Simonovits.

**Teorema 8.2.1.** *Para todo grafo  $H$  com  $e(H) \geq 1$ , e todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que vale o seguinte. Se  $G$  é um grafo livre de  $H$  com  $n$  vértices e*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \binom{n}{2},$$

*então  $G$  está  $\varepsilon n^2$ -próximo de ser  $(\chi(H) - 1)$ -partido.*

O Teorema 8.2.1 será provado em sua generalidade no Capítulo 11. Nesta seção e na seguinte, iremos provar o teorema no caso  $\chi(H) = 3$ , além de considerar o caso em que  $H$  é o grafo completo de tamanho arbitrário, e esboçar dois modos de generalizar a prova. Para nos familiarizarmos com a estratégia de prova, iremos primeiro provar a seguinte variação do Teorema 3.3.4.

**Lema 8.2.2.** *Para todos  $r \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que vale o seguinte. Se  $G$  é um grafo livre de  $K_{r+1}$  com  $n$  vértices e*

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n,$$

*então existe uma partição  $V(G) = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_r$  tal que  $|A_0| \leq \varepsilon n$  e  $A_i$  é um conjunto independente para todo  $i \in [r]$ .*

*Demonstração.* Observe primeiro que se  $\delta > 0$  for suficientemente pequeno, então  $e(G) > t_{r-1}(n)$  e, portanto, o Teorema de Turán garante a existência de uma cópia de  $K_r$  em  $G$ . Seja então  $S$  uma clique de tamanho  $r$  em  $G$ , e observe que, como  $G$  é  $K_{r+1}$ -livre, cada vértice  $v \in V(G)$  é adjacente a no máximo  $r - 1$  vértices de  $A$ . Defina

$$X := \{v \in V(G) : |N_G(v) \cap A| \leq r - 2\},$$

e note que

$$e(A, B) \leq (r - 1)(n - r) - |X|$$

em que  $B = V(G) \setminus A$ , e que

$$e(A, B) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)rn - r(r - 1)$$

pela condição de grau mínimo em  $G$ . Decorre que

$$|X| \leq \delta rn.$$

Para cada vértice  $u \in A$ , defina

$$A_u = \{v \in V(G) \setminus X : uv \notin E(G)\}.$$

Afirmamos que  $A_u$  é um conjunto independente de  $G$ . De fato, se  $vw \in E(G)$  com  $v, w \in A_u$ , então

$$A \setminus \{u\} \subset N_G(v) \cap N_G(w),$$

pela definição de  $X$ , o que implicaria na existência de uma  $(r + 1)$ -clique. Como os conjuntos  $A_u$  formam uma partição de  $V(G) \setminus X$ , a partição  $X \cup \bigcup_{u \in A} A_u$  tem as propriedades postuladas.  $\square$

Note que a prova acima dá  $\delta = \varepsilon/r$ . A condição de grau mínimo do Lema 8.2.2 pode ser substituída por uma condição de grau médio por meio do seguinte lema.

**Lema 8.2.3.** *Seja  $r \in \mathbb{N}$  e  $\delta > 0$ , e seja  $n$  suficientemente grande. Se  $G$  é um grafo livre de  $K_{r+1}$  com  $n$  vértices e*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \binom{n}{2},$$

*então  $G$  contém um subgrafo  $G'$  com  $v(G') \geq (1 - \delta)n$  e*

$$\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)v(G').$$

*Demonstração.* Procedemos, como na prova do Lema 8.1.2, construindo uma sequência

$$G = G_n \supset G_{n-1} \supset \cdots \supset G_m$$

através da remoção, de  $G_i$ , de um vértice de grau menor que o grau mínimo desejado. Sendo preciso, seja  $c = 1 - 1/r$ ; caso exista um vértice  $v_i \in V(G_i)$  com

$$d_{G_i}(v_i) < (c - \delta)v(G_i),$$

então escolha um tal vértice e defina  $G_{i-1} = G_i - v_i$ ; caso contrário, defina  $m = i$  e acabe a sequência.

Note que, para cada  $m \leq i \leq n$ , o grafo  $G_i$  tem exatamente  $i$  vértices, e

$$e(G_m) \leq t_r(m) \leq c \cdot \binom{m}{2}$$

pelo Teorema de Turán, pois  $G_m$  é  $K_{r+1}$ -livre e  $c = 1 - 1/r$ . Podemos, então, limitar o número de arestas de  $G$  por

$$e(G) < \sum_{i=m+1}^n (c - \delta)i + c \cdot \binom{m}{2} \leq c \cdot \binom{n+1}{2} - \frac{\delta(n-m)(n+m)}{2}.$$

Como  $e(G) \geq (c - \delta^2)\binom{n}{2}$ , por hipótese, decorre que

$$\frac{\delta(n-m)(n+m)}{2} < \delta^2 \binom{n}{2} + n,$$

e, portanto,  $n - m \leq \delta n$  como desejado, visto que  $n$  é suficientemente grande.  $\square$

É possível provar um lema similar para grafos livres de  $H$  com uma demonstração análoga, usando o Teorema 8.1.1 no lugar do Teorema de Turán.

Combinando os dois últimos lemas, obtemos o seguinte teorema de estabilidade para grafos livres de  $K_{r+1}$ .

**Teorema 8.2.4.** *Para todos  $r \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que vale o seguinte. Se  $G$  é um grafo  $K_{r+1}$ -livre com  $n \geq n_0$  vértices e*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) \binom{n}{2},$$

*então existe uma partição  $V(G) = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_r$  tal que  $|A_0| \leq \varepsilon n$  e  $A_i$  é um conjunto independente para todo  $i \in [r]$ .*

*Demonstração.* Escolha  $0 < \delta \leq \varepsilon^2/4$  suficientemente pequeno, de modo que a conclusão do Lema 8.2.2 valha com  $\varepsilon$  e  $\delta$  substituídos por  $\varepsilon/2$  e  $\sqrt{\delta}$ . Pelo Lema 8.2.3, existe um subgrafo  $G' \subset G$  com  $v(G') \geq (1 - \varepsilon/2)n$  e

$$\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \sqrt{\delta}\right)v(G').$$

Como  $G'$  é  $K_{r+1}$ -livre, decorre do Lema 8.2.2 e da escolha de  $\delta$  que existe um  $A_0 \subset V(G')$  com  $|A_0| \leq \varepsilon n/2$  tal que  $\chi(G' - A_0) \leq r$ , como desejado.  $\square$

Iremos agora esboçar como a prova acima pode ser generalizada para grafos  $H$ -livres para um  $H$  arbitrário. O primeiro passo é generalizar o Lema 8.2.3 para grafos  $H$ -livres. Como observamos acima, é possível fazê-lo substituindo o Teorema de Turán pelo Teorema 8.1.1 na demonstração do Lema 8.2.3. Podemos, então, supor que  $G$  é um grafo  $H$ -livre com

$$\delta(G) = \left(1 - \frac{1}{r} - o(1)\right)n,$$

em que  $r = \chi(H) - 1$ , de modo que nos resta generalizar a prova do Lema 8.2.2.

A conclusão do Lema 8.2.2 não é verdade para todo grafo  $H$  (veja Exercício 8.9.4) e, por isso, ao invés de encontrar conjuntos independentes, iremos construir uma partição

$$V(G) = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_r$$

tal que  $|B_0| = o(n)$  e  $e(B_i) = o(n^2)$  para todo  $i \in [r]$ . Para fazê-lo, encontraremos conjuntos tais que  $K_{t,t} \not\subset B_i$ , em que  $t = v(H)$ , e aplicaremos o Teorema 3.2.2.

Para definir os conjuntos  $B_i$ , combinaremos ideias das provas dos Lemas 8.2.2 e 8.1.3 e usaremos um truque adicional. Primeiro aplicamos o Lema 8.1.3 para obter uma cópia de  $K_r(q)$  em  $G$  para alguma constante  $q$  suficientemente grande. Sejam  $A_1, \dots, A_r$  as partes dessa cópia de  $K_r(q)$ , defina  $A := A_1 \cup \cdots \cup A_r$  e  $B := V(G) \setminus A$ , e defina

$$X := \bigcap_{i=1}^r \{v \in B : |N(v) \cap A_i| \geq t\}$$

o conjunto de vértices de  $B$  que têm pelo menos  $t$  vizinhos em cada uma das partes de  $K_r(q)$ . Como  $G$  é  $H$ -livre, vale que  $|X| = O(1)$ , pois do contrário poderíamos

usar o Princípio da Casa dos Pombos (como na demonstração do Lema 8.1.3) para encontrar uma cópia de  $K_{r+1}(t)$  em  $G$ .

Para prosseguir, fixe  $0 < \beta < 1/3t$ , e para cada  $v \in B \setminus X$ , defina

$$S(v) = \{i \in [r] : |N(v) \cap A_i| \leq (1 - \beta)q\}.$$

Observe que  $S(v)$  é não vazio, para todo  $v \in B \setminus X$ , e defina

$$Y := \{v \in B : |S(v)| \geq 2\}.$$

Contando arestas entre  $A$  e  $B \setminus X$ , obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{r} - o(1)\right)n|A| \leq e(A, B \setminus X) \leq (q(r-1) + t)|B| - (\beta q - t)|Y|.$$

Assim, como  $|A| = qr$  e  $|B| \leq n$ , vale que

$$|Y| \leq \frac{tn + o(n)}{\beta q - t} \leq \varepsilon n$$

para qualquer  $\varepsilon > 0$ , se  $q = q(\varepsilon)$  for suficientemente grande.

Portanto, resta mostrar que, para qualquer  $i \in [r]$ , o conjunto

$$B_i := \{v \in B : S(v) = \{i\}\}$$

é  $K_{t,t}$ -livre. Para fazê-lo, suponha que existe uma cópia de  $K_{t,t}$  em  $B_i$  com conjunto de vértices  $C$ . Como todo vértice de  $C$  tem no máximo  $\beta q$  não vizinhos em  $A_j$  para todo  $j \neq i$  e  $\beta < 1/3t$ , podemos concluir que os vértices de  $C$  têm pelo menos  $t$  vizinhos comuns em  $A_j$  para todo  $j \neq i$  e, portanto,  $H \subset K_{r+1}(t) \subset G$  como queríamos.

## 8.3 Problema de Turán para hipergrafos

Nesta seção, iremos esboçar uma outra demonstração do Teorema 8.2.1. Primeiro, precisaremos introduzir uma importante família de objetos combinatoriais, os hipergrafos.

**Definição 8.3.1.** Um *hipergrafo*  $\mathcal{H}$  é uma estrutura composta por um conjunto de vértices  $V(\mathcal{H})$  e um conjunto  $E(\mathcal{H})$  de subconjuntos de  $V(\mathcal{H})$ . Dizemos que  $\mathcal{H}$  é *k-uniforme* se todos os elementos de  $E(\mathcal{H})$  têm tamanho exatamente  $k$ .



Note que um grafo é exatamente um hipergrafo 2-uniforme. Chamamos os elementos de  $E(\mathcal{H})$  de *hiperarestas* de  $\mathcal{H}$  (ou simplesmente arestas de  $\mathcal{H}$  se não houver risco de confusão). Se  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{G}$  são hipergrafos, então dizemos que  $\mathcal{G}$  contém  $\mathcal{H}$  (e escrevemos  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ) se  $V(\mathcal{H}) \subset V(\mathcal{G})$  e  $E(\mathcal{H}) \subset E(\mathcal{G})$  e  $\mathcal{G}$  é  $\mathcal{H}$ -livre se  $\mathcal{G}$  não contém cópia de  $\mathcal{H}$  (isto é, um sub-hipergrafo isomorfo a  $\mathcal{H}$ ).

O *número de Turán* de um hipergrafo  $\mathcal{H}$  é definido por

$$\text{ex}(n, \mathcal{H}) = \max \{e(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \text{ tem } n \text{ vértices e é } \mathcal{H}\text{-livre}\}$$

em que  $e(\mathcal{G})$  denota o número de hiperarestas de  $\mathcal{G}$ . A *densidade de Turán* de um hipergrafo  $k$ -uniforme  $\mathcal{H}$  é definida por

$$\pi(\mathcal{H}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, \mathcal{H})}{\binom{n}{k}}.$$

Para mostrar que o limite acima sempre existe, iremos mostrar que  $f(n) = \text{ex}(n, \mathcal{H}) \cdot \binom{n}{k}^{-1}$  é uma função decrescente em  $n$ . Seja  $\mathcal{G}$  um hipergrafo  $k$ -uniforme  $\mathcal{H}$ -livre com  $n$  vértices e  $c \binom{n}{k}$  arestas, e seja  $A$  um conjunto aleatório de tamanho  $m$ , uniformemente escolhido. Então<sup>1</sup>

$$\mathbb{E}[e(\mathcal{G}[A])] = \sum_{e \in E(\mathcal{G})} \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{m}^{-1} = c \cdot \binom{m}{k},$$

de modo que  $\mathcal{G}$  contém um subgrafo induzido  $\mathcal{H}$ -livre com  $m$  vértices e pelo menos  $c \binom{m}{k}$  arestas.

De modo geral, é extremamente difícil determinar a densidade de Turán de um hipergrafo  $k$ -uniforme; por exemplo, um famoso problema em aberto é provar (ou refutar) que  $\pi(K_4^{(3)}) = 5/9$ , em que  $K_n^{(k)}$  denota o hipergrafo  $k$ -uniforme com  $n$  vértices e todas as hiperarestas possíveis. No entanto, no caso  $k = 2$ , já vimos que

$$\pi(H) = 1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}$$

para todo grafo  $H$  não vazio, pelo Teorema 8.1.1. Em particular, como mostramos nos Capítulos 3 e 5, temos  $\pi(H) = 0$  se e somente se  $H$  é bipartido.

O objetivo desta seção é generalizar o fato acima para grafos  $k$ -uniformes. Dizemos que um hipergrafo  $k$ -uniforme é  $k$ -partido se existe uma coloração  $c : V(\mathcal{H}) \rightarrow$

<sup>1</sup>Aqui estamos usando a identidade binomial  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m} \binom{m}{k}$ , que pode ser provada por contagem dupla. Veja o Exercício 1.5.3.

$[k]$  de seus vértices na qual toda hiperaresta contém vértices de todas as  $k$  cores. Note que se  $\mathcal{H}$  não é  $k$ -partido, então  $\mathcal{H}$  não está contido no hipergrafo  $k$ -partido completo com partes de tamanho  $n/k$  e, portanto, tem densidade de Turán não nula. O seguinte teorema de Erdős mostra que tal condição, que vimos ser claramente necessária, é também suficiente.

**Teorema 8.3.2.** *Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo  $k$ -uniforme. Então  $\pi(\mathcal{H}) = 0$  se e somente se  $\mathcal{H}$  é  $k$ -partido.*

Por simplicidade, iremos provar tal teorema apenas no caso  $k = 3$  (o que será suficiente para provar o Teorema 8.2.1 no caso  $\chi(H) = 3$ ). A prova para  $k$  geral é análoga, porém mais complicada, sendo um bom desafio para o(a) leitor(a) interessado(a).

O primeiro passo é provar um teorema de supersaturação para grafos bipartidos completos. Escreveremos  $k_{t,t}(G)$  para denotar o número de cópias de  $K_{t,t}$  em  $G$ . A prova do seguinte lema é bastante similar à do Teorema 3.2.2.

**Lema 8.3.3.** *Seja  $t \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , e seja  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices e  $e(G) \geq \varepsilon n^2$ , então*

$$k_{t,t}(G) \geq c(t) \cdot \varepsilon^{t^2} n^{2t}$$

para alguma constante  $c(t) > 0$ .

*Demonstração.* Naturalmente, o número de  $t$ -cerejas (isto é, cópias de  $K_{1,t}$ ) em  $G$  é

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{t} \geq c'(t) \cdot n \left( \frac{2e(G)}{n} \right)^t \geq c'(t) \cdot \varepsilon^t n^{t+1}$$

para alguma constante  $c'(t) > 0$ . Assim, o número médio de  $t$ -cerejas com um dado conjunto de folhas é da ordem de  $n$  e, portanto, por convexidade,

$$K_{t,t}(G) \geq \binom{n}{t} \binom{c'(t) \cdot \varepsilon^t n}{t} \geq c(t) \cdot \varepsilon^{t^2} n^{2t},$$

como afirmado. □

Observe que a cota do Lema 8.3.3 é igual, a menos do fator constante  $c(t)$ , ao número de cópias de  $K_{t,t}$  num grafo aleatório de mesma densidade. Tal fato é verdadeiro, em muito mais casos, e se conjectura que tal afirmação é verdade para todos os grafos bipartidos.

*Demonstração do Teorema 8.3.2 para  $k = 3$ .* Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo 3-uniforme. Já observamos que se  $\mathcal{H}$  não é 3-partido, então  $\mathcal{H}$  não está contido no hipergrafo completo 3-partido com partes de tamanho  $n/3$ , que possui  $n^3/27$  hiperarestas. Nossa tarefa é mostrar que se  $\mathcal{H}$  é 3-partido e  $e(\mathcal{G}) \geq \varepsilon n^3$ , em que  $\varepsilon > 0$  é fixo e  $n$  é suficientemente grande, então  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ .

Para tal, iremos contar  $K_{t,t}$ -cerejas em  $\mathcal{H}$ , que são hipergrafos 3-partidos completos com partes de tamanho 1,  $t$  e  $t$ , em que  $t = v(\mathcal{H})$ . Seja  $d_{\mathcal{H}}(v)$  o grau de  $v$  em  $\mathcal{H}$ , isto é, o número de hiperarestas de  $\mathcal{H}$  que contêm  $v$ . Como o grau médio de um vértice de  $\mathcal{H}$  é

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V(\mathcal{H})} d_{\mathcal{H}}(v) = \frac{3e(\mathcal{H})}{n} \geq 3\varepsilon n^2,$$

e o maior grau possível é  $\binom{n}{2}$ , temos que  $\mathcal{H}$  contém menos  $\varepsilon n$  vértices de grau pelo menos  $\varepsilon n^2$ . Pelo Lema 8.3.3, concluímos que  $\mathcal{H}$  contém pelo menos

$$\varepsilon n \cdot c(t) \cdot \varepsilon^{t^2} n^{2t} = c(t) \cdot \varepsilon^{t^2+1} n^{2t+1}$$

$K_{t,t}$ -cerejas. Como esse número é maior que  $n^{2t}$ , decorre do Princípio da Casa dos Pombos que existe uma cópia de  $K_{t,t}$ , que forma a base de pelo menos  $t$  dessas  $K_{t,t}$ -cerejas e, portanto,  $\mathcal{G}$  contém um hipergrafo 3-partido completo com partes de tamanho  $t$ . Como  $t = v(\mathcal{H})$ , isso implica que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ , como desejado.  $\square$

Com isso, podemos provar o Teorema 8.2.1 no caso  $\chi(H) = 3$ . Além do caso  $k = 3$  do Teorema 8.3.2, iremos usar o Teorema 3.3.3, que afirma que um grafo  $G$  que está  $t$ -longe de ser bipartido contém pelo menos

$$\frac{n}{6} \left( e(G) + t - \frac{n^2}{4} \right)$$

triângulos. Em particular, se  $G$  está  $\varepsilon n^2$ -longe de ser bipartido e

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} - \delta n^2,$$

então  $G$  contém pelo menos  $(\varepsilon - \delta)n^3/6$  triângulos.

*Demonstração do Teorema 8.2.1 para  $\chi(H) = 3$ .* Seja  $H$  um grafo com  $\chi(H) = 3$  e  $\varepsilon > 0$ , e defina  $\delta = \varepsilon/2$ . Como observado acima, se  $e(G) \geq n^2/4 - \delta n^2$  e  $G$  está  $\varepsilon n^2$ -longe de ser bipartido, então  $G$  contém pelo menos  $\varepsilon n^3/12$  triângulos.

Seja  $\mathcal{G}$  o hipergrafo 3-uniforme com conjunto de vértices  $V(G)$  cujas hiperarestas são triplas que formam triângulos em  $G$ . Pelo Teorema 8.3.2 (com  $k = 3$ ), temos que  $\mathcal{G}$  contém o hipergrafo completo 3-partido com partes de tamanho  $v(H)$ . Mas, então,  $G$  contém o grafo 3-partido completo com partes de tamanho  $v(H)$  e, portanto,  $H \subset G$  como desejávamos.  $\square$

Para deduzir o Teorema 8.2.1, no caso em que  $H$  é geral a partir do Teorema 8.3.2 (para  $k$  geral), é necessária a seguinte generalização do Teorema 3.3.3.

**Teorema 8.3.4.** *Sejam  $n, r, t \in \mathbb{N}$  e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Se  $G$  está  $t$ -longe de ser  $r$ -partido, então há pelo menos*

$$c(r) \cdot n^{r-1} \left( e(G) + t - \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \binom{n}{2} \right)$$

*cópias de  $K_{r+1}$  em  $G$ , para alguma constante  $c(r) > 0$ .*

Deixamos os detalhes da prova (e também da dedução do Teorema 8.2.1) como desafios ao(a) leitor(a) no Exercício 8.9.8.

## 8.4 Supersaturação para hipergrafos

Até o momento, provamos teoremas de supersaturação para triângulos e grafos completos bipartidos. Nesta seção, veremos como provar supersaturação para um hipergrafo arbitrário, mesmo sem conhecer sua densidade de Turán. A prova é uma aplicação simples do Método Probabilístico.

**Teorema 8.4.1.** *Sejam  $k \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , e seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo  $k$ -uniforme. Existe  $\delta > 0$  tal que o seguinte vale para  $n$  suficientemente grande. Se  $\mathcal{G}$  é um hipergrafo  $k$ -uniforme com  $n$  vértices e*

$$e(\mathcal{G}) \geq \text{ex}(n, \mathcal{H}) + \varepsilon n^k,$$

*então  $\mathcal{G}$  contém pelo menos  $\delta n^{v(\mathcal{H})}$  cópias de  $\mathcal{H}$ .*

A ideia da prova é a seguinte: iremos escolher uma constante apropriada  $m \in \mathbb{N}$ , encontrar uma cópia de  $H$ , na maioria dos subconjuntos de  $V(G)$  de tamanho  $m$ , e usar contagem dupla para deduzir que há muitas cópias distintas.

*Demonstração do Teorema 8.4.1.* Escolha  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande (dependendo de  $\mathcal{H}$  e  $\varepsilon$ ) de modo que

$$\text{ex}(m, \mathcal{H}) \leq (\pi(\mathcal{H}) + \varepsilon/2) \binom{m}{k}, \quad (8.2)$$

e suponha que  $n$  é grande o suficiente para que

$$\text{ex}(n, \mathcal{H}) \geq (\pi(\mathcal{H}) - \varepsilon) \binom{n}{k},$$

notando que isso é possível pela definição de  $\pi(\mathcal{H})$ . Considere um conjunto  $A$  escolhido uniformemente ao acaso dentre todos os subconjuntos de  $V(G)$  com  $m$  elementos. Como acima, temos

$$\mathbb{E}[e(\mathcal{G}[A])] = \sum_{e \in E(\mathcal{G})} \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{m}^{-1} \geq (\pi(\mathcal{H}) + \varepsilon) \binom{m}{k},$$

já que  $e(\mathcal{G}) \geq \text{ex}(n, \mathcal{H}) + \varepsilon n^k$ .

Agora, observando que  $X = \binom{m}{k} - e(\mathcal{G}[A]) \geq 0$  e aplicando a desigualdade de Markov à  $X$ , decorre que

$$\mathbb{P} \left( e(\mathcal{G}[A]) > (\pi(\mathcal{H}) + \varepsilon/2) \binom{m}{k} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

Por (8.2), cada conjunto  $A$  como acima contém uma cópia de  $\mathcal{H}$ . Além disso, cada cópia de  $\mathcal{H}$  é contada em no máximo

$$\binom{n - v(\mathcal{H})}{m - v(\mathcal{H})} \leq \left( \frac{2m}{n} \right)^{v(\mathcal{H})} \binom{n}{m}$$

subconjuntos  $A$ . Logo, há no mínimo

$$\frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{m} \cdot \left( \frac{2m}{n} \right)^{-v(\mathcal{H})} \binom{n}{m}^{-1} = \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{n}{2m} \right)^{v(\mathcal{H})}$$

cópias de  $\mathcal{H}$  em  $\mathcal{G}$ . Como  $m$  depende apenas de  $\mathcal{H}$  e  $\varepsilon$ , o teorema está provado.  $\square$

Para ver muitos resultados e conjecturas a respeito de problemas do tipo Turán para hipergrafos, consulte os *surveys* de Keevash (2011) e Mubayi, Pikhurko e Sudakov (2011).

## 8.5 Teorema de Andrásfai, Erdős e Sós

No Teorema 3.3.3, provamos que um grafo  $G$  sem triângulos com  $n^2/4 - t$  arestas está  $t$ -próximo de ser bipartido. Assim, é natural considerar quais condições podem garantir que  $G$  é de fato bipartido. Para tal questão,  $e(G)$  não é o parâmetro correto a se considerar, pois o grafo obtido adicionando-se uma cópia de  $C_5$  a um grafo completo bipartido tem pouco mais que o número extremal de arestas.

Como vimos em outros contextos, um outro parâmetro natural a se considerar é o grau mínimo de  $G$ . Pensando um pouco, considere o grafo  $G$  com conjunto de vértices  $A_1 \cup \dots \cup A_5$  e conjunto de arestas

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^5 \{uv : u \in A_i, v \in A_{i+1}\},$$

em que  $A_6 := A_1$ . Esse grafo é chamado de um *blow-up* do  $C_5$  e, se cada  $A_i$  tiver tamanho  $n/5$ , então  $\delta(G) = 2n/5$ . O grafo  $G$  não contém triângulos e está muito longe de ser bipartido.

Surpreendentemente, o exemplo acima é extremal para tal problema: qualquer grafo sem triângulos com grau mínimo maior que  $2n/5$  é bipartido! O seguinte teorema generaliza tal fato para cliques maiores.

**Teorema 8.5.1** (Andrásfai, Erdős e Sós, 1974). *Seja  $r \geq 2$ . Se  $G$  é um grafo  $K_{r+1}$ -livre com  $n$  vértices e*

$$\delta(G) > \left( \frac{3r-4}{3r-1} \right) n,$$

*então  $G$  é  $r$ -partido.*

Para ver que a cota em  $\delta(G)$  dada pelo Teorema 8.5.1 é a melhor possível, considere o grafo obtido substituindo-se uma parte de um grafo  $(r-1)$ -partido completo por um *blow-up* apropriado do  $C_5$  (ver Exercício 8.9.3).

Antes de mergulharmos nos detalhes, vamos descrever a prova no caso  $r = 2$ . Seja  $G$  um grafo maximal sem triângulos com  $\delta(G) > 2n/5$ , e suponha que existe uma tripla  $\{x, y, z\} \subset V(G)$  com  $xy \in E(G)$  e  $xz, yz \notin E(G)$ . Pela maximalidade de  $G$ , existem vértices  $u, v \in V(G)$  tais que  $u \in N_G(x) \cap N_G(z)$  e  $v \in N_G(y) \cap N_G(z)$ . Ademais, como  $G$  não contém triângulos,  $u \neq v$ . Defina  $A = \{x, y, z, u, v\}$  e note que  $C_5 \subset G[A]$ .

Pela condição de grau mínimo, existem estritamente mais de  $2(n-5)$  arestas entre  $A$  e  $B := V(G) \setminus A$  e, portanto, existe um vértice  $w$  com pelo menos três

vizinhos em  $A$ . Mas  $A$  não contém um conjunto independente de tamanho 3 e, assim,  $G$  contém um triângulo.

Tal contradição implica que não há um conjunto  $\{x, y, z\}$  como postulado. Logo, uma aplicação do seguinte lema conclui a demonstração.

**Lema 8.5.2.** *Um grafo  $G$  é  $k$ -partido completo para algum  $k \in \mathbb{N}$  se e somente se não há tripla  $x, y, z \in V(G)$  tal que  $e_G(\{x, y, z\}) = 1$ .*

Com efeito, se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo e também é livre de triângulos, então  $G$  é bipartido como desejado. O Lema 8.5.2 também será usado na prova do caso geral, então começaremos provando-o.

*Demonstração do Lema 8.5.2.* Primeiramente, suponha que  $G$  é  $k$ -partido completo, e sejam  $x, y, z \in V(G)$  tais que  $xz, yz \notin E(G)$ . Isso implica que  $x, y, z$  estão na mesma da partição e, então,  $xy \notin E(G)$ .

Seja  $(A_1, \dots, A_k)$  uma  $k$ -partição de  $G$  com  $k$  mínimo, e suponha que há  $i \neq j$  tais que  $G[A_i, A_j]$  não é bipartido completo. Como  $k$  é mínimo,  $G[A_i, A_j]$  contém pelo menos uma aresta e, portanto, existem vértices  $x \in A_i$  e  $y, z \in A_j$ , ou vice-versa, tais que  $xy \in E(G)$  e  $xz \notin E(G)$ . Como  $yz \notin E(G)$ , decorre que  $e_G(\{x, y, z\}) = 1$ , como desejado.  $\square$

Estamos prontos para provar o Teorema 8.5.1; iremos apresentar uma prova descoberta por Brandt (2003). A prova é similar à descrita acima, mas ao invés de  $A$  conter um ciclo de comprimento 5, dois vértices não adjacentes de  $C_5$  serão substituídos por cliques (possivelmente intersectantes) de tamanho  $r - 1$ . O limitante desejado será deduzido por meio de uma contagem dupla das arestas entre  $A$  e  $B$ .

*Demonstração do Teorema 8.5.1.* Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $G$  é maximal para a propriedade de não conter  $K_{r+1}$ . Com efeito, adicionar uma aresta não diminui o grau mínimo nem o número cromático. Como  $G$  é  $K_{r+1}$ -livre, se  $G$  é  $k$ -partido completo, então  $k \leq r$ , como gostaríamos. Assim, podemos supor que  $G$  não é multipartido completo.

Pelo Lema 8.5.2, existe uma tripla  $x, y, z \in V(G)$  com

$$yz \in E(G) \quad \text{e} \quad xy, xz \notin E(G).$$

Pela maximalidade de  $G$ , o grafo  $G + uv$  contém uma cópia de  $K_{r+1}$ . Isso implica que existe uma  $(r - 1)$ -clique  $Q_1 \subseteq N_G(x) \cap N_G(y)$ . Analogamente, existe uma

$(r-1)$ -clique  $Q_2 \subseteq N_G(x) \cap N_G(z)$ . Escolhemos  $x, y, z, Q_1, Q_2$  como acima e de modo a maximalizar a cardinalidade de  $Q = Q_1 \cap Q_2$ .

Seja  $A = \{x, y, z\} \cup Q_1 \cup Q_2$  e  $B = V(G) \setminus A$ , e observe que

$$\sum_{u \in A} d_G(u) \geq \delta(G) \cdot |A| \quad (8.3)$$

e que  $|A| = 2r + 1 - |Q|$ . Defina

$$X = \{v \in B : Q \subseteq N_G(v)\},$$

o conjunto de vértices adjacentes a todos os vértices de  $Q$ . Iremos provar que

$$\sum_{u \in A} d_G(u) \leq (|A| - 1) \cdot n - 2|X| \quad (8.4)$$

Para provar (8.4), iremos contar extremidades de arestas em  $A$ . Observe primeiro que

$$|N_G(v) \cap A| \leq |A| - 1 \quad (8.5)$$

para todo  $v \in V(G)$ , pois  $K_r \subset G[A]$  e  $G$  é  $K_{r+1}$ -livre. Afirmamos que

$$|N_G(v) \cap A| \leq |A| - 3 \quad (8.6)$$

para todo  $v \in X$ . Para ver isso, suponha primeiro que  $xv \in E(G)$ . Então, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , existe  $u_i \in Q_i$  tal que  $u_i v \notin E(G)$  pois  $G$  é  $K_{r+1}$ -livre. Além disso,  $u_1 \neq u_2$ , pois  $Q \subseteq N_G(v)$ . Ainda mais, há pelo menos um outro não vizinho de  $v$  em  $A$ , pois do contrário poderíamos ter escolhido as cliques  $(Q_i \setminus \{u_i\}) \cup \{v\}$  para  $i \in \{1, 2\}$ , contradizendo a maximalidade de  $|Q|$ .

Por outro lado, se  $xv \notin E(G)$ , então  $v$  tem um não vizinho em  $Q_1 \cup \{y\}$  e um não vizinho (diferente) em  $Q_2 \cup \{z\}$ , visto que  $G$  é  $K_{r+1}$ -livre e  $Q \subseteq N_G(v)$ . Logo, em ambos os casos,  $v$  tem pelo menos três não vizinhos em  $A$ , como afirmado.

Combinando (8.5) e (8.6), obtemos

$$\sum_{u \in A} d_G(u) = \sum_{v \in V(G)} |N_G(v) \cap A| \leq (|A| - 1)(n - |X|) + (|A| - 3)|X|,$$

provando (8.4). Juntamente com (8.3), concluímos que

$$n + 2|X| \leq (n - \delta(G)) \cdot |A|,$$



limitando  $|X|$  superiormente. Para limitar  $|X|$  inferiormente, observe que

$$|V(G) \setminus X| \leq (n - \delta(G)) \cdot |Q|,$$

pois cada vértice de  $Q$  tem no máximo  $n - \delta(G)$  não vizinhos. Combinando os limitantes inferiores e superiores em  $|X|$ , obtemos que

$$3n \leq (n - \delta(G))(|A| + 2|Q|),$$

e portanto

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{3}{|A| + 2|Q|}\right)n.$$

Finalmente, lembre-se que  $|A| + |Q| = 2r + 1$  e observe que  $|Q| \leq r - 2$ , pois  $Q \cup \{y, z\}$  é uma clique em  $G$ . Assim,

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{3}{3r - 1}\right)n = \left(\frac{3r - 4}{3r - 1}\right)n,$$

como desejado. □

## 8.6 Limiares cromáticos

O Teorema de Andrásfai, Erdős e Sós (Teorema 8.5.1) responde o caso  $H = K_r$  e  $k = r$  da seguinte pergunta mais geral, que foi primeiro respondida por Andrásfai (no caso  $H = K_r$ ) e primeiramente estudada no caso em que  $H$  é geral por Erdős e Simonovits (1973).

**Questão 8.6.1.** Dados um grafo  $H$  e  $n, k \in \mathbb{N}$ , qual o maior grau mínimo possível para um grafo  $H$ -livre com  $n$  vértices e número cromático pelo menos  $k$ ?

Em particular, Erdős e Simonovits perguntaram se existem grafos  $C_5$ -livres com grau mínimo pelo menos  $cn$  e número cromático arbitrariamente grande. Tal problema foi resolvido por Thomassen (2007), que provou o seguinte teorema.

**Teorema 8.6.2.** *Seja  $G$  um grafo  $C_5$ -livre com  $n$  vértices. Se  $\delta(G) \geq cn$ , então*

$$\chi(G) \leq 6/c.$$

Lembre-se do Capítulo 3 que  $P_k$  denota o caminho com  $k$  arestas. Na prova do Teorema 8.6.2, precisaremos do seguinte lema.

**Lema 8.6.3.** *Se  $G$  é um grafo  $P_3$ -livre, então  $\chi(G) \leq 3$ .*

*Demonstração.* Lembre-se que  $\text{ex}(n, P_3) \leq n$  pelo Teorema 3.2.7. Assim, qualquer grafo  $P_3$ -livre têm grau mínimo no máximo 2. Podemos, portanto, escolher uma ordem  $(v_1, \dots, v_n)$  dos vértices de  $G$  tal que

$$|N_G(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}| \leq 2$$

para todo  $i \in [n]$ . Usando essa ordem, podemos colorir  $G$  gulosamente com três cores, como desejado.  $\square$

*Demonstração do Teorema 8.6.2.* Escolha um conjunto independente maximal  $A \subset V(G)$  tal que as vizinhanças dos vértices de  $A$  são disjuntas duas a duas. Para cada  $u \in A$ , defina  $X(u) = \{u\} \cup N_G(u)$ ,

$$Y(u) = \{v \in V(G) \setminus X(u) : N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset\}$$

e

$$Z(u) = X(u) \cup Y(u).$$

Observe que  $|A| \leq 1/c$ , pois  $\delta(G) \geq cn$ , e que todo vértice  $v \in V(G)$  está em  $Z(u)$  para algum  $u \in A$ , pela maximalidade de  $A$ .

Iremos provar que  $\chi(G[Z(u)]) \leq 6$  para todo  $u \in A$ . Para tal, observe que  $G[N_G(u)]$  é  $P_3$ -livre, pois  $G$  é  $C_5$ -livre e, portanto,

$$\chi(G[N_G(u)]) \leq 3,$$

pelo Lema 8.6.3. Afirmamos que  $G[Y(u)]$  também é  $P_3$ -livre e, portanto,

$$\chi(G[Y(u)]) \leq 3, \tag{8.7}$$

novamente pelo Lema 8.6.3. Para ver isso, considere um caminho  $(v_0, v_1, v_2, v_3)$  de comprimento 3 em  $Y(u)$  e observe que  $v_0$  e  $v_3$  não têm vizinhos comuns em  $N_G(u)$ , pois  $G$  é  $C_5$ -livre. Como cada vértice de  $Y(u)$  tem um vizinho em  $N_G(u)$ , os vértices  $v_{i-1}$  e  $v_i$  têm vizinhos distintos  $x$  e  $y$  em  $N_G(u)$  para algum  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Mas, então,  $(u, x, v_{i-1}, v_i, y, u)$  é uma cópia de  $C_5$  em  $G$ , um absurdo que prova (8.7).

Portanto, podemos colorir  $G[Z(u)]$  com no máximo 6 cores para cada  $u \in A$ . Como  $|A| \leq 1/c$  e os conjuntos  $Z(u)$  cobrem  $V(G)$ , obtemos que  $\chi(G) \leq 6/c$ , como gostaríamos.  $\square$

Thomassen também provou um resultado similar para qualquer ciclo ímpar de comprimento pelo menos 5. Quando  $H$  é um triângulo, no entanto, Hajnal exibiu uma construção que mostra que a afirmação análoga não é verdadeira.

**Teorema 8.6.4.** *Para quaisquer  $k \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e um grafo grafo  $G$  sem triângulos com  $n$  vértices,*

$$\delta(G) > \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)n \quad e \quad \chi(G) > k.$$

A construção de Hajnal motiva a seguinte definição.

**Definição 8.6.5.** O *limiar cromático*  $\delta_\chi(H)$  de um grafo  $H$  é o ínfimo sobre os  $\alpha \in (0, 1)$  que satisfazem a seguinte propriedade. Existe  $C = C(\alpha)$  tal que se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices, então

$$\delta(G) > \alpha n \quad \Rightarrow \quad \chi(G) \leq C.$$

Assim, o teorema de Thomassen e a construção de Hajnal implicam que

$$\delta_\chi(C_5) = 0 \quad e \quad \delta_\chi(K_3) \geq 1/3.$$

Na verdade, Thomassen (2002) provou que  $\delta_\chi(K_3) = 1/3$ , e Brandt e Thomassé (2011) fortaleceram o resultado mostrando que  $\chi(G) \leq 4$  para todo grafo sem triângulos com  $\delta(G) > n/3$ , o que é o melhor possível. No caso geral, o limiar cromático de um grafo  $H$  foi determinado apenas em 2013, por Allen et al. (2013).

**Teorema 8.6.6** (Allen, Böttcher, Griffiths, Kohayakawa, e Morris, 2013). *Seja  $H$  um grafo com  $\chi(H) = r \geq 3$ . Então*

$$\delta_\chi(H) \in \left\{ \frac{r-3}{r-2}, \frac{2r-5}{2r-3}, \frac{r-2}{r-1} \right\}.$$

O resultado de Allen, Böttcher, Griffiths, Kohayakawa e Morris caracteriza cada um dos três casos, mas, para enunciar tal caracterização, precisamos de definições que, assim como sua prova, fogem ao objetivo deste livro.

## 8.7 Números extremais de ciclos pares

Provamos no Capítulo 3 que  $\text{ex}(n, C_4) = O(n^{3/2})$ . Tal limitante foi generalizado por Bondy e Simonovits (1974) para ciclos pares arbitrários.

**Teorema 8.7.1** (Bondy e Simonovits, 1974). *Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\text{ex}(n, C_{2k}) = O(n^{1+1/k}).$$

Seguiremos a prova de Pikhurko (2012), que foi uma melhoria incremental nas provas de Bondy e Simonovits (1974) e Verstraëte (2000).

Para provar o resultado, vamos precisar de dois lemas. O primeiro deles será provado no final da seção. Dizemos que uma  $r$ -coloração é *não trivial* se toda cor contém pelo menos um vértice.

**Lema 8.7.2.** *Seja  $H$  um grafo obtido de um ciclo de comprimento  $\ell \geq 4$  adicionando-se uma aresta  $e^*$ . Seja  $\chi$  uma 2-coloração não trivial dos vértices de  $H$ . Se  $\chi$  possui pelo menos uma aresta monocromática, então, para todo  $1 \leq t < \ell$ , existe caminho de comprimento  $t$  em  $H$  que possui extremos com cores diferentes.*

A prova do segundo lema, que enunciamos abaixo, é semelhante à prova do Teorema de Dirac (Teorema 2.6.1).

**Lema 8.7.3.** *Todo grafo bipartido  $G$  de grau mínimo  $\delta \geq 3$  contém um ciclo de comprimento pelo menos  $2\delta$  com uma corda.*

*Demonstração.* Considere um caminho maximal  $P = v_1 \dots v_k$  em  $G$ . Todos os vizinhos de  $v_1$  estão em  $P$  por maximalidade. Podemos, portanto, escolher  $2 \leq i_1 < \dots < i_\delta$  tais que  $v_{i_j} \in N(v_1)$  para todo  $1 \leq j \leq \delta$ . Como  $G$  é bipartido,  $v_1$  não pode ser vizinho de dois vértices consecutivos de  $P$  e, portanto,  $i_{j+1} \geq i_j + 2$  para todo  $1 \leq j < \delta$ . Assim, o ciclo  $v_1 v_2 \dots v_{i_\delta} v_1$  com a aresta extra  $v_1 v_{i_2}$  tem tamanho  $i_\delta \geq 2\delta$ , concluindo a prova.  $\square$

Com isso em mente, podemos passar à demonstração do teorema principal dessa seção.

*Demonstração do Teorema 8.7.1.* Seja  $n$  suficientemente grande. Suponha, para fins de contradição, que existe grafo  $G$  com  $n$  vértices sem  $C_{2k}$  com mais de  $2(k-1)n^{1+1/k}$  arestas. Pelo Lema 2.2.12, existe subgrafo  $H$  de  $G$  de grau mínimo  $2(k-1)kn^{1/k}$ . Daqui em diante, as notações  $e(\cdot)$ ,  $d(\cdot)$  e  $N(\cdot)$  se referirão ao grafo  $H$ .

Seja  $x$  um vértice arbitrário de  $H$ , e seja  $V_i$  o conjunto de vértices de  $H$  à distância  $i$  de  $x$ . Observe que se  $vw \in E(H)$  com  $v \in V_i$  e  $w \in V_j$ , então  $|i-j| \leq 1$ . Iremos construir, em passos, uma árvore geradora enraizada  $T$  de  $H$  por meio de um procedimento conhecido como *busca em largura*. No passo 0, a árvore  $T$

contém apenas o vértice  $x$ , que será a raiz. No  $i$ -ésimo passo, iremos adicionar os vértices de  $V_i$  do seguinte modo: para cada vértice de  $v \in V_i$ , escolhemos um vértice  $w \in V_{i-1} \cap N_H(v)$  e adicionamos o vértice  $v$  e a aresta  $vw$  à  $T$ .

**Afirmativa 8.7.4.** *Para todo  $1 \leq i \leq k-1$ , os grafos  $H[V_i]$  e  $H[V_i, V_{i+1}]$  não contêm um ciclo bipartido de comprimento pelo menos  $2k$  com corda.*

*Demonstração.* Suponha que o grafo  $H[V_i]$  tem um ciclo  $F$  de comprimento pelo menos  $2k$  com corda e bipartição  $(Y, Z)$ . Iremos construir um  $C_{2k}$  com o auxílio da árvore  $T$ . Para isso, seja  $y \in V_j$  com  $j$  máximo tal que todo vértice de  $Y$  é descendente de  $y$  na árvore  $T$ . Observe que  $j < i$ . Por maximalidade, existe  $y_1 \in V_{j+1}$  filho de  $y$  tal que o subconjunto  $Y_1 \subset Y$  de descendentes de  $y_1$  satisfaz  $Y_1 \neq \emptyset \neq Y \setminus Y_1$ . Observe que se encontrarmos um caminho  $P$  em  $H[V_i]$  de comprimento  $2k - 2(i - j)$  ligando um  $a \in Y_1$  a um  $b \in Y \setminus Y_1$ , então ir de  $y$  a  $a$  em  $T$ , seguir por  $P$  e ir de  $b$  a  $y$  em  $T$  nos dá um ciclo de tamanho  $2k$  em  $H$ .

Para achar tal caminho  $P$ , considere a coloração de  $F$  dada ao colorirmos todos os vértices de  $Y_1$  de azul e os vértices de  $Z \cup (Y \setminus Y_1)$  de vermelho. Qualquer aresta com uma extremidade em  $Y \setminus Y_1$  é monocromática. Pelo Lema 8.7.2, existe caminho  $P$  de comprimento  $2k - 2(i - j)$  com uma extremidade azul e a outra vermelha. Como o caminho tem comprimento par e tem a extremidade azul em  $Y$ , a extremidade vermelha também está em  $Y$  e, portanto, em  $Y \setminus Y_1$ . Isso conclui a prova para o grafo  $H[V_i]$ .

O caso  $H[V_i, V_{i+1}]$  é inteiramente análogo se estipularmos que a bipartição do ciclo  $F$  satisfaz  $Y = V(F) \cap V_i$ , pois os três caminhos usados para formar o ciclo ainda são arestas-disjuntos.  $\square$

Afirmamos que

$$e(V_i) \leq 2(k-1)|V_i|. \quad (8.8)$$

De fato, para provar tal desigualdade, observe que pela Proposição 2.3.4,  $H[V_i]$  tem um subgrafo bipartido gerador com grau médio pelo menos  $e(V_i)/|V_i|$ . Pelo Lema 2.2.12, podemos passar a um subgrafo de grau mínimo  $\delta \geq e(V_i)/2|V_i|$ . Combinando o Lema 8.7.3 com a Afirmativa 8.7.4, tem-se que  $\delta \leq k-1$ , provando a desigualdade. Um argumento análogo aplicado ao grafo bipartido  $H[V_i, V_{i+1}]$  mostra que

$$e(V_i, V_{i+1}) \leq (k-1)(|V_i| + |V_{i+1}|). \quad (8.9)$$

Façamos uma pausa para esboçar o argumento intuitivamente. Todo vértice de  $H$  tem grau pelo menos  $2(k-1)n^{1/k}$ . Para onde vão as arestas dos vértices de  $V_1$ ? Uma fração ínfima vai para  $V_0$ , pois  $|V_0| = 1$  e  $|V_1| \geq \delta(H)$ . Por (8.8), a

fração que vai para o próprio  $V_1$  é minúscula. Logo, as arestas vão primariamente para  $V_2$  e, portanto, o grau médio dos vértices de  $V_1$  em  $H[V_1, V_2]$  é alto. Por (8.9), o maior dos lados de  $H[V_1, V_2]$  tem grau médio no máximo  $2(k-1)$ , o que força  $V_2$  a ser muito maior que  $V_1$ . Iterando e fazendo as contas mais precisamente, obtemos a afirmativa abaixo.

**Afirmativa 8.7.5.** *Para  $0 \leq i \leq k-1$ , vale que  $|V_{i+1}|/|V_i| \geq (2 + o(1))n^{1/k}$  e  $e(V_i, V_{i+1}) \leq 2(k-1)|V_{i+1}|$ .*

*Demonstração.* A prova será por indução em  $i$ . O resultado é trivial para  $i = 0$ , pois  $|V_0| = 1$  e  $e(V_0, V_1) = |V_1| \geq \delta(H)$ . Seja  $i \geq 1$ . Lembre-se que, por construção dos  $V_i$ , vale que  $N(y) \subset V_{i-1} \cup V_i \cup V_{i+1}$  para  $y \in V_i$ . Assim, temos

$$e(V_i, V_{i+1}) \geq \left( \sum_{y \in V_i} d_H(y) \right) - \frac{e(V_i)}{2} - e(V_{i-1}, V_i) \geq (\delta(H) - 3(k-1))|V_i|,$$

em que a segunda desigualdade usa (8.8) e a hipótese de indução. Combinando com (8.9) e dividindo por  $(k-1)|V_i|$ , temos que

$$\frac{|V_{i+1}|}{|V_i|} \geq \frac{\delta(H)}{k-1} - 4 \geq (2 + o(1))n^{1/k},$$

provando uma das desigualdades desejadas. Em particular,  $|V_i| \leq |V_{i+1}|$  e, portanto, a outra desigualdade desejada segue de (8.9).  $\square$

Pela Afirmativa 8.7.5, podemos concluir que  $|V_k| \geq (2 + o(1))^k n > n$ , um absurdo que conclui a prova do teorema.  $\square$

Resta provar o Lema 8.7.2.

*Demonstração do Lema 8.7.2.* Seja  $C$  o ciclo tal que  $H = C + e^*$ , e suponha, sem perda de generalidade, que o conjunto dos vértices de  $C$  é  $\{1, \dots, \ell\}$  (na ordem cíclica em que aparecem em  $C$ ) e  $e^* = \{1, r\}$  com  $r \leq \ell/2$ . Quando necessário, as operações nos vértices de  $C$  são feitas módulo  $\ell$ .

Seja  $X$  o conjunto dos inteiros positivos  $t < \ell$  para os quais não existe caminho de comprimento  $t$  em  $C$  com extremos de cores diferentes. Se  $X = \emptyset$ , então o resultado segue. Suponha, então, que  $X \neq \emptyset$ . Observe que, pela definição de  $X$ , temos que  $t \in X$  se e somente se  $\chi$  é  $t$ -periódica (isto é,  $\chi(i) = \chi(i+t)$  para todo  $1 \leq i \leq \ell$ ). Seja  $s$  o menor inteiro de  $X$ . Vale a seguinte afirmativa.

**Afirmativa 8.7.6.**  $X$  é exatamente o conjunto dos múltiplos de  $s$  entre 1 e  $\ell - 1$ . Além disso,  $\ell$  é múltiplo de  $s$ .

*Demonstração.* Todos os múltiplos de  $s$  estão em  $X$ , pois uma função  $s$ -periódica é  $(is)$ -periódica para todo  $i \geq 1$ . Suponha agora que  $t \in X$  não seja um múltiplo de  $s$ . Então, considerando a divisão com resto, temos  $t = sq + r$ , com  $1 \leq r < s$ . Como  $t \in X$ , para todo  $i$  temos

$$\chi(i) = \chi(i + t) = \chi(i + t - sq) = \chi(i + r).$$

Isso implica que  $\chi$  é  $r$ -periódica. Logo,  $r \in X$ , uma contradição à minimalidade de  $s$ . Analogamente, como  $\chi$  é  $\ell$ -periódica, se  $\ell$  não fosse múltiplo de  $s$  poderíamos encontrar  $r < s$  tal que  $\chi$  é  $r$ -periódica.  $\square$

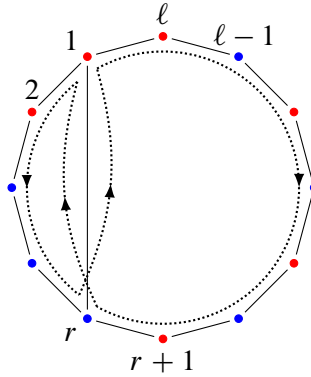
Resta então mostrar que também conseguimos encontrar (usando a aresta  $e^*$ ) caminhos de comprimentos múltiplos de  $s$  com extremos de cores diferentes. Sejam  $L = (1, 2, \dots, r)$  e  $R = (1, \ell, (\ell - 1), \dots, r)$  dois caminhos correspondentes aos arcos do ciclo delimitados pela aresta  $e^*$ . A prova é dividida em dois casos, dependendo de  $r$ .

**Caso 1.**  $r \leq s + 1$ . Fixe  $i \geq 1$ . Como  $r > 2$ , temos que  $l = r + is - 2$  não é múltiplo de  $s$ . Logo,  $l \notin X$  e, portanto, existe caminho  $P = a_1 \dots a_{l+1}$ , com  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{l+1}$ . Como  $\chi$  é  $s$ -periódica, podemos “rotacionar”  $P$  dando passos de comprimento  $s$ . Então há uma rotação  $P'$  de  $P$  que termina em algum vértice do conjunto  $\{r, \dots, r + s - 1\}$ . Como  $P'$  tem comprimento  $r + is - 2$ ,  $P'$  contém todos os vértices em  $L$ . Substituindo as arestas em  $L$  pela aresta  $e^*$ , obtemos um caminho de comprimento  $(r + is - 2) - (r - 1) + 1 = is$ , com os mesmos extremos que  $P'$ .

**Caso 2.**  $r \geq s + 2$ . Considere o passeio  $T = LRLR \dots$ , que percorre  $L$ , usa  $e^*$ , depois percorre  $R$ , usa  $e^*$  novamente, percorre  $L$  novamente, e assim por diante, como na Figura 8.1. Seja  $v_i$  o  $i$ -ésimo vértice do passeio  $T$ . Note que  $v_i = v_{i+\ell+2}$  para todo  $i$ . Como tanto  $L$  quanto  $R$  têm comprimento maior que  $s$ , para todo  $i \geq 1$ , os vértices do caminho  $P_i = v_i \dots v_{i+s}$  são todos distintos e  $P_i$  percorre  $e^*$  no máximo uma vez. Nesse caso, vale a seguinte afirmativa.

**Afirmativa 8.7.7.** Existe  $i > 0$  tal que  $\chi(v_i) \neq \chi(v_{i+s})$ .

*Demonstração.* Suponha falso. Como  $v_i = v_{i+(\ell+2)}$  para todo  $i \geq 1$ , temos que

Figura 8.1: O passeio  $T$  do caso 2 (pontilhado).

para todo  $i > 2$  vale<sup>2</sup>

$$\chi(v_i) = \chi(v_{i+(\ell/s)s}) = \chi(v_{i+\ell}) = \chi(v_{i-2+(\ell+2)}) = \chi(v_{i-2}).$$

Isso nos diz que os vértices de índice par têm a mesma cor, assim como os vértices de índice ímpar. Como  $\chi$  é não trivial, temos  $\chi(v_1) \neq \chi(v_2)$ . Isso implica que nenhuma aresta de  $T$  é monocromática e, portanto, nenhuma aresta de  $H$  é monocromática, uma contradição.  $\square$

Seja então  $i > 0$  tal que  $\chi(v_i) \neq \chi(v_{i+s})$ . Pela definição de  $s$ ,  $P_i$  usa a aresta  $e^*$  (exatamente uma vez). Então podemos supor, sem perda de generalidade, que  $v_i \in R$  e  $v_{i+s} \in L$ . Agora podemos estender  $P_i$  adicionando, em cada passo, e enquanto for possível, um caminho com  $s$  arestas de  $H$  ao fim ou  $s$  arestas de  $H$  ao início. Como  $\chi$  é  $s$ -periódica, em cada passo, obtemos um caminho cujos extremos possuem cores diferentes. Desta forma, obtemos caminhos de comprimentos  $s, 2s, \dots, ks$ , para algum  $k$ . Como  $\ell$  é múltiplo de  $s$ , podemos escrever  $\ell = s\ell'$ . Gostaríamos de encontrar caminhos de comprimento até  $\ell - s$ , em outras palavras, queremos provar que  $k = \ell' - 1$ . De fato, o instante em que não podemos mais estender é precisamente quando restam no máximo  $s$  arestas em  $R$  e no máximo  $s$  arestas em  $L$ . Isso implica que  $ks \geq \ell + 1 - 2s = s\ell' - 2s + 1 = s(\ell' - 2) + 1$ . Logo,  $k > \ell' - 2$ , ou seja,  $k \geq \ell' - 1$ , como gostaríamos de demonstrar.  $\square$

<sup>2</sup>A ideia intuitiva é a seguinte: se usássemos só as arestas do ciclo, dar  $\ell/s$  passos de tamanho  $s$  nos levaria de volta ao vértice inicial. O passeio  $T$  usa a aresta  $e^*$  duas vezes para “alongar” tal percurso em duas unidades, de modo que dar  $\ell/s$  passos de tamanho  $s$  a partir do vértice  $v_i$  chega apenas ao vértice  $v_{i-2}$ .



## 8.8 Construções de grafos sem $C_4$

Para concluir o capítulo, detalhamos uma construção que, juntamente com o Teorema 3.2.1, determina  $\text{ex}(n, C_4)$  a menos de um fator multiplicativo.

Para tal, usaremos o postulado de Bertrand, que diz que para todo  $n \geq 2$  existe um primo  $p$  com  $n < p < 2n$ . Tal postulado foi demonstrado pela primeira vez por Chebyshev em 1852. Uma demonstração particularmente simples e bela desse fato foi dada por Erdős, que mostrou que o coeficiente binomial  $\binom{2n}{n}$  sempre contém um primo entre  $n$  e  $2n$  em sua fatoração.

**Teorema 8.8.1.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\text{ex}(n, C_4) \geq \frac{n^{3/2}}{32}.$$

*Demonstração.* Seja  $p$  um primo com  $\sqrt{n} < p \leq 2\sqrt{n}$ , e seja  $G$  o grafo com conjunto de vértices

$$V(G) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p : (a, b) \neq (0, 0)\},$$

em que  $\mathbb{Z}_p$  denota o conjunto dos inteiros módulo  $p$ , e conjunto de arestas

$$E(G) = \{(a, b), (x, y)\} : ax + by \equiv 1 \pmod{p} \text{ e } (a, b) \neq (x, y)\}.$$

Observe que, para cada  $(a, b) \in V(G)$ , existem exatamente  $p$  soluções  $(x, y) \in V(G)$  da equação  $ax + by \equiv 1 \pmod{p}$ . De fato, suponha (sem perda de generalidade) que  $a$  é não nulo. Então, para qualquer  $y \in \mathbb{Z}_p$ , existe um único  $x \in \mathbb{Z}_p$  que resolve a equação, e  $x$  e  $y$  não podem ser simultaneamente nulos. Com isso, podemos afirmar que

$$e(G) \geq \frac{(p^2 - 1)(p - 1)}{2}.$$

Com efeito, removendo a solução  $(x, y) = (a, b)$  se necessário, deduzimos que  $G$  tem grau mínimo pelo menos  $p - 1$ . Como  $v(G) = p^2 - 1$ , o limitante afirmado segue do lema dos apertos de mão.

Afirmamos que  $G$  é  $C_4$ -livre. O primeiro passo é mostrar que se dois vértices  $(a, b)$  e  $(a', b')$  têm um vizinho comum em  $G$ , então  $ab' \not\equiv a'b \pmod{p}$ . Para ver isso, sejam  $(a, b)$  e  $(a', b')$  e  $(x, y)$  um vizinho comum a ambos. Por definição,

$$ax + by \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{e} \quad a'x + b'y \equiv 1 \pmod{p}.$$

Assim, se  $ab' \equiv a'b \pmod{p}$ , então

$$b' - b \equiv b'(ax + by) - b(a'x + b'y) \equiv 0 \pmod{p}$$

e, portanto,  $b = b'$ . Analogamente, deduz-se que  $a = a'$ .

Agora, suponha que existem  $(x, y)$  e  $(x', y')$  vizinhos comuns a  $(a, b)$  e  $(a', b')$ , com  $ab' \not\equiv a'b \pmod{p}$ . Então

$$a(x-x') + b(y-y') \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{e} \quad a'(x-x') + b'(y-y') \equiv 0 \pmod{p}$$

e, portanto, multiplicando a primeira equação por  $b'$ , a segunda por  $b$  e subtraindo uma da outra, obtemos

$$(ab' - ba')(x - x') \equiv 0 \pmod{p}.$$

Como  $ab' \not\equiv a'b \pmod{p}$ , concluímos que  $x = x'$ , e similarmente mostra-se que  $y = y'$ . Logo, cada par de vértices tem no máximo um vizinho em comum, provando que  $G$  é  $C_4$ -livre, como afirmado.

Para concluir a prova, lembre que  $v(G) = p^2 - 1$  e  $n \leq p^2 - 1 \leq 4n$ , e escolha um subconjunto de  $V(G)$  aleatório de tamanho  $n$ . O número esperado de arestas de  $G$  contidas nesse subconjunto é pelo menos

$$\frac{e(G)}{16} \geq \frac{(p^2 - 1)(p - 1)}{32} \geq \frac{n^{3/2}}{32}.$$

Assim, existe um conjunto  $A \subseteq V(G)$  de tamanho  $n$  tal que  $H = G[A]$  satisfaz  $e(H) \geq n^{3/2}/32$ . Como  $H \subset G$ , o grafo  $H$  é  $C_4$ -livre, como desejado.  $\square$

A prova acima é baseada no fato geométrico de que duas retas se intersectam em no máximo um ponto. Com uma análise mais cuidadosa da mesma construção (usando o Teorema dos Números Primos), a constante 32 no Teorema 8.8.1 pode ser melhorada para  $2 + o(1)$ , que é o melhor valor possível.

## 8.9 Exercícios

**Exercício 8.9.1.** Dada uma família finita  $\mathcal{F}$  de grafos, defina

$$\text{ex}(n, \mathcal{F}) = \max\{e(G) : v(G) = n \text{ e } F \not\subset G \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}.$$

Calcule o limite de  $\text{ex}(n, \mathcal{F})/n^2$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercício 8.9.2.** Prove que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $c > 0$  tal que o seguinte vale para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Todo grafo  $G$  com  $\delta(G) > (1/2 + \varepsilon)n$  contém uma cópia de  $K_3(t)$  para  $t = c \log n$ .

**Exercício 8.9.3.** Mostre que o Teorema de Andrásfai, Erdős e Sós é ótimo no seguinte sentido: Existe um grafo  $K_{r+1}$ -livre com grau mínimo exatamente  $(3r - 4)n/(3r - 1)$  que não é  $r$ -partido.

**Exercício 8.9.4.** Construa um grafo  $H$  com  $\chi(H) = 3$  e um grafo  $G$  com  $n$  vértices que é  $H$ -livre e satisfaz

$$\delta(G) \geq \frac{n}{2} - o(n) \quad \text{e} \quad \alpha(G) = o(n).$$

**Exercício 8.9.5.** Lembre do Capítulo 7 que para todos  $n, k \in \mathbb{N}$  tais que  $n \geq 2k$ , o grafo de Kneser, que tem conjunto de vértices  $\binom{[n]}{k}$  e conjunto de arestas

$$\{ST : S \cap T = \emptyset\},$$

tem número cromático  $n - 2k + 2$ . Use esse fato para construir uma sequência de grafos com

$$\delta(G) > \frac{n}{3} - o(n) \quad \text{e} \quad \chi(G) \rightarrow \infty.$$

[Dica: conecte um (pequeno) grafo de Kneser apropriado a um grafo completo bipartido grande.]

**Exercício 8.9.6.** Seja  $Q_3$  o cubo, isto é, o grafo com conjunto de vértices  $\{0, 1\}^3$  em que dois vértices estão ligados por uma aresta se diferem em exatamente uma coordenada. Mostre que existem constantes  $C > c > 0$  tais que

$$cn^{3/2} \leq \text{ex}(n, Q_3) \leq Cn^{8/5}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

**Exercício 8.9.7.** Dado um hipergrafo 3-uniforme  $\mathcal{H}$  e  $t \in \mathbb{N}$ , defina o *blow-up*  $\mathcal{H}(t)$  de  $\mathcal{H}$  como o hipergrafo 3-uniforme obtido substituindo cada vértice de  $\mathcal{H}$  por um conjunto de tamanho  $t$ , e cada aresta de  $\mathcal{H}$  por um hipergrafo completo tripartido nos conjuntos correspondentes.

(a) Usando os Teoremas 8.4.1 e 8.3.2, mostre que

$$\pi(\mathcal{H}(t)) = \pi(\mathcal{H}).$$

(b) Deduza o Teorema de Erdős e Stone.

**Exercício 8.9.8.** Usando indução em  $r$  e um argumento similar ao da prova do Teorema 3.3.3, prove o Teorema 8.3.4.

[Dica: Escreva  $X = \{(u, v) : uv \notin E(G)\}$ . Ao invés de contar triplas  $(u, v, w)$  com  $(u, v) \in X$  e  $vw \in E(G)$  como no Teorema 3.3.3, considere, para  $(u, v) \in X$ ,

$$S(u, v) = \{u\} \times \{v\} \times N(v) \times N(u)^{r-2}.$$

e use a desigualdade de Hölder

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q},$$

válida para  $p, q \geq 1$  tais que  $1/p + 1/q = 1$ , com  $p = r-2$  e  $q = (r-2)/(r-3)$  para mostrar que

$$\sum_{(u,v) \in X} |S(u, v)| \leq \sum_{(u,v) \in X} d(u)^{r-1}.$$

# 9

## Teoria de Ramsey

---

Neste capítulo, vamos considerar alguns problemas mais avançados em Teoria de Ramsey. Em particular, vamos melhorar alguns dos limitantes para números de Ramsey (de grafos e hipergrafos) que provamos no Capítulo 4, e usar o Método Probabilístico, apresentado no Capítulo 5, para provar alguns outros resultados em Teoria de Ramsey para grafos. Primeiramente, entretanto, vamos discutir alguns resultados fundamentais em uma área intimamente relacionada, Teoria de Ramsey aditiva.

### 9.1 Teoria de Ramsey Aditiva

Teoria de Ramsey aditiva é o estudo de estruturas aditivas que podem ser encontradas em  $r$ -colorações

$$\chi: \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, r\}$$

dos inteiros positivos. Talvez o enunciado mais simples deste tipo é o Teorema de Schur, que já encontramos nos exercícios do Capítulo 4.

**Teorema 9.1.1** (Schur, 1916). *Toda  $r$ -coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação  $x + y = z$ .*

*Demonstração.* O teorema é quase uma aplicação imediata do Teorema de Ramsey (4.0.2). Dada uma  $r$ -coloração  $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  dos inteiros positivos, definimos uma  $r$ -coloração

$$\xi: \binom{\mathbb{N}}{2} \rightarrow \{1, \dots, r\}$$

dos pares de inteiros positivos tomando

$$\xi(xy) := \chi(|x - y|)$$

para cada  $x, y \in \mathbb{N}$ . Pelo Teorema de Ramsey, existe uma clique monocromática infinita  $A$  na coloração  $\xi$ . Seja  $a, b, c \in A$ , com  $a < b < c$ , e observe que

$$\xi(ab) = \xi(bc) = \xi(ac) \quad \Rightarrow \quad \chi(b - a) = \chi(c - b) = \chi(c - a).$$

Tomando  $x = b - a$ ,  $y = c - b$  e  $z = c - a$ , vemos que  $x + y = z$ , como desejado.  $\square$

Schur chegou a esse problema enquanto trabalhava no último Teorema de Fermat: ele usou o resultado acima para mostrar que a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

tem uma solução não trivial módulo  $p$  para todo primo  $p$  suficientemente grande.

Na verdade, o Teorema de Schur não foi o primeiro resultado em Teoria de Ramsey aditiva: um exemplo ainda mais antigo é o Teorema do Cubo de Hilbert. Um cubo de Hilbert de dimensão  $k$  é um conjunto da forma

$$\left\{ a + \sum_{i \in S} d_i : S \subset \{1, \dots, k\} \right\}$$

para algum  $a \in \mathbb{N}$  e conjunto  $D = \{d_1, \dots, d_k\}$  de  $k$  inteiros positivos distintos.

**Teorema 9.1.2** (Teorema do Cubo de Hilbert, 1892). *Toda  $r$ -coloração dos inteiros positivos contém cubos de Hilbert monocromáticos de dimensão arbitrariamente grande.*

*Demonstração.* Na verdade, nós vamos provar por indução em  $k$  que existe um número  $H_r(k)$  tal que qualquer  $r$ -coloração do conjunto  $\{1, \dots, H_r(k)\}$  contém um cubo de Hilbert monocromático de dimensão  $k$ . É fácil ver que  $H_r(1) =$

$r + 1$ . Então seja  $k \geq 2$  e assumamos que  $H_r(k - 1)$  existe, e tome  $n = H_r(k - 1)$ . Afirmamos que

$$H_r(k) \leq n(r^n + 1).$$

Para provar isso, particione o conjunto  $\{1, \dots, N\}$ , em que  $N = n(r^n + 1)$ , em  $r^n + 1$  intervalos de comprimento  $n$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, para qualquer  $r$ -coloração de  $[N]$ , existem dois desses intervalos que são coloridos identicamente<sup>1</sup>. Como  $n = H_r(k - 1)$ , esses intervalos possuem cubos de Hilbert monocromáticos idênticos de dimensão  $k - 1$ . Sejam esses cubos de Hilbert  $C$  e  $C' = C + d_k$  (i.e.,  $C$  deslocado por uma distância de  $d_k$ ), segue que a união  $C \cup C'$  é um cubo de Hilbert monocromático de dimensão  $k$ , como desejado.  $\square$

Hilbert usou este resultado para provar seu famoso Teorema de Irredutibilidade (veja, por exemplo, (Villarino, Gasarch e Regan 2018)), que tem inúmeras aplicações em Álgebra e Teoria dos Números. Por exemplo, Hilbert o usou para provar que existem infinitos polinômios em  $\mathbb{Z}[X]$  de grau  $n$  cujos grupos de Galois formam o grupo simétrico  $S_n$ .

Voltando ao Teorema de Schur, é natural nos perguntarmos que outras equações (ou famílias de equações) têm solução monocromática em toda  $r$ -coloração de  $\mathbb{N}$ . A equação de aparência inocente

$$x + y = 2z$$

já é (surpreendentemente) muito mais difícil, e (mais surpreendentemente ainda) é a chave para o problema geral! O seguinte teorema foi provado por van der Waerden (1927). No que segue, abreviamos progressão aritmética de comprimento  $k$  por  $k$ -PA.

**Teorema 9.1.3.** *Toda  $r$ -coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação  $x + y = 2z$ .*

*Demonstração.* A primeira observação é que soluções de  $x + y = 2z$  são precisamente 3-PAs. Vamos mostrar que existe um número  $W(r, 3)$  tal que qualquer  $r$ -coloração do conjunto  $\{1, \dots, W(r, 3)\}$  contém uma 3-PA monocromática.

A ideia é a grosso modo como segue: cada par monocromático  $\{a, a + d\}$  restringe a cor de  $a + 2d$ , uma vez que se  $a + 2d$  também tivesse a mesma cor,

---

<sup>1</sup>Dizemos que dois intervalos são coloridos identicamente se a sequência em que as cores aparecem neles é a mesma. Note que há exatamente  $r^n$  possíveis formas diferentes de colorir um intervalo de comprimento  $n$ . Para aplicar o passo indutivo, consideramos uma nova paleta de cores em que cada cor corresponde a uma sequência de cores de comprimento  $n$ .

então  $\{a, a + d, a + 2d\}$  seria uma 3-PA monocromática. Chame  $a + 2d$  de *foco* do par  $\{a, a + d\}$ . Se pudermos encontrar  $r$  pares monocromáticos com o mesmo foco e cores diferentes, então a coloração estará encurralada, e não terá escolha a não ser nos dar uma 3-PA monocromática.

Motivados por essa observação, dizemos que  $s$  pares

$$\{a_1, a_1 + d_1\}, \dots, \{a_s, a_s + d_s\}$$

são *cor-focados* se são monocromáticos, cada par possui uma cor diferente, e todos os pares têm o mesmo foco, isto é,

$$a_1 + 2d_1 = a_2 + 2d_2 = \dots = a_s + 2d_s.$$

Fazemos a seguinte afirmativa.

**Afirmativa 9.1.4.** *Para cada  $1 \leq s \leq r$ , existe  $n = n(s)$  tal que toda  $r$ -coloração de  $[n]$  contém ou uma 3-PA monocromática, ou  $s$  pares cor-focados.*

*Prova da afirmativa.* Vamos provar a afirmativa por indução em  $s$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, podemos tomar  $n(1) = r + 1$ , uma vez que um único par cor-focado é simplesmente qualquer par de números com a mesma cor. Seja  $s \geq 2$ , e tome  $m = n(s - 1)$ . Vamos mostrar que podemos tomar

$$n(s) = 2m(r^{2m} + 1).$$

Para isso, particione  $[n(s)]$  em  $r^{2m} + 1$  intervalos de comprimento  $2m$ , e observe que, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem dois intervalos  $I$  e  $J$  que são coloridos de forma idêntica. Pela definição de  $m = n(s - 1)$ , cada intervalo contém (em sua primeira metade) uma 3-PA monocromática (e nesse caso a prova está terminada) ou  $s - 1$  pares cor-focados. No último caso, como o comprimento do intervalo é  $2m$ , então o foco destes pares cor-focados também está no mesmo intervalo, e deve ter cor diferente de cada um dos pares, do contrário teríamos uma 3-PA.

Sejam  $\{a_1, a_1 + d_1\}, \dots, \{a_{s-1}, a_{s-1} + d_{s-1}\}$  os  $s - 1$  pares cor-focados em  $I$ , com foco  $f = a_1 + 2d_1 = \dots = a_{s-1} + 2d_{s-1}$  e suponha que  $J = I + d$ . Então

$$\{a_1, a_1 + d_1 + d\}, \dots, \{a_s, a_s + d_s + d\} \quad \text{e} \quad \{f, f + d\}$$

são  $s$  pares cor-focados (que possuem  $f + 2d$  como foco), como desejado. Isso completa o passo indutivo, provando a afirmativa.  $\square$



O teorema segue da afirmativa tomando  $s = r$ . De fato, existe  $n = n(r)$  tal que toda  $r$ -coloração de  $[n]$  contém uma 3-PA monocromática, ou  $r$  pares cor-focados. No último caso, qualquer que seja a cor do foco, obtemos uma 3-PA monocromática.  $\square$

A seguinte generalização, que segue basicamente da mesma prova, é conhecida como o Teorema de Van der Waerden.

**Teorema 9.1.5** (Van der Waerden). *Toda  $r$ -coloração dos inteiros positivos contém progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente longas.*

*Demonstração.* Vamos provar que, para cada  $k, r \in \mathbb{N}$ , existe um número  $W(r, k)$  com a seguinte propriedade: qualquer  $r$ -coloração do conjunto  $\{1, \dots, W(r, k)\}$  contém  $k$ -PA monocromática. Vamos provar isso por indução em  $k$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, temos  $W(r, 2) = r + 1$ , então tome  $k \geq 3$  e assumamos que  $W(r, k - 1)$  existe para todo  $r \in \mathbb{N}$ .

Chame  $a + (k - 1)d$  de *foco* da progressão aritmética  $P = \{a, a + d, \dots, a + (k - 2)d\}$ . Dizemos que  $s$  tais  $(k - 1)$ -PAS

$$\{a_1, a_1 + d_1, \dots, a_1 + (k - 2)d_1\}, \dots, \{a_s, a_s + d_s, \dots, a_s + (k - 2)d_s\}$$

são *cor-focadas* se são monocromáticas, cada  $(k - 1)$ -PA tem uma cor diferente, e todas  $(k - 1)$ -PAS têm o mesmo foco. Fazemos a seguinte afirmativa chave.

**Afirmativa 9.1.6.** *Para cada  $1 \leq s \leq r$ , existe  $n = n(s)$  tal que toda  $r$ -coloração de  $[n]$  contém uma  $k$ -PA monocromática, ou  $s$  progressões aritméticas de comprimento  $(k - 1)$  cor-focadas.*

*Prova da afirmativa.* Vamos provar a afirmativa por indução em  $s$ . Pela hipótese de indução (para  $k$ ), podemos tomar  $n(1) = W(r, k - 1)$ , uma vez que uma única  $(k - 1)$ -PA é cor-focada se e somente se ela é monocromática. Seja  $s \geq 2$ , e tome  $m = n(s - 1)$ . Vamos mostrar que podemos tomar

$$n(s) = 2m \cdot W(r^{2m}, k - 1).$$

Para isso, particione  $\{1, \dots, n(s)\}$  em intervalos de comprimento  $2m$ , e observe que, pela definição de  $W(r^{2m}, k - 1)$ , existe uma  $(k - 1)$ -PA de intervalos

$$\{I, I + d, \dots, I + (k - 2)d\}$$

coloridos de forma idêntica. Além disso, pela definição de  $m = n(s - 1)$ , cada intervalo contém ou uma  $k$ -PA monocromática (e nesse caso a prova está terminada), ou  $s - 1$  progressões aritméticas de comprimento  $(k - 1)$  cor-focadas, e o foco, que deve ter uma cor diferente de cada uma das PAs.

Sejam

$$\{a_1, a_1 + d_1, \dots, a_1 + (k-2)d_1\}, \dots, \{a_{s-1}, a_{s-1} + d_{s-1}, \dots, a_{s-1} + (k-2)d_{s-1}\},$$

as  $s - 1$  progressões aritméticas de comprimento  $(k - 1)$  cor-focadas em  $I$  e seja  $f = a_1 + (k - 1)d_1 = \dots = a_{s-1} + (k - 1)d_{s-1}$  o foco delas. Então

$$\{a_i, a_i + d_i + d, \dots, a_i + (k - 2)(d_i + d)\}$$

para cada  $1 \leq i \leq s - 1$  e  $\{f, f + d, \dots, f + (k - 2)d\}$  são  $s$  progressões aritméticas de comprimento  $(k - 1)$  cor-focadas, como desejado. Isso completa o passo indutivo, provando a afirmativa.  $\square$

O passo indutivo (para  $k$ ) segue da afirmativa tomando  $s = r$ . De fato, existe  $n = n(r)$  tal que toda  $r$ -coloração de  $[n]$  contém ou uma  $k$ -PA monocromática, ou  $r$  progressões aritméticas de comprimento  $(k - 1)$  cor-focadas. No último caso, qualquer que seja a cor do foco, nós obtemos uma  $k$ -PA monocromática. Segue que  $W(r, k)$  existe, o que completa a prova do teorema.  $\square$

Apenas alguns anos depois da publicação do Teorema de Van der Waerden, Rado (1933) caracterizou as coleções de equações lineares que possuem soluções monocromáticas em qualquer coloração finita dos inteiros. Como o enunciado completo é um pouco técnico, vamos enunciar apenas o caso especial desse teorema para uma única equação. Dizemos que uma equação  $E$  é *partição regular* se para todo  $r \in \mathbb{N}$ , toda  $r$ -coloração dos inteiros possui uma solução monocromática para  $E$ .

**Teorema 9.1.7** (Rado, 1933). *Seja  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . A equação*

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$$

*é partição regular se, e somente se, existe um subconjunto não vazio dos  $c_i$  cuja soma é 0.*

Por exemplo, a equação  $x + y = z$  é partição regular porque  $c_2 + c_3 = 1 - 1 = 0$ , e a equação  $x + y = 2z$  é partição regular porque  $c_1 + c_2 + c_3 = 1 + 1 - 2 = 0$ .

A prova do Teorema de Van der Waerden acima dá limitantes *muito* ruins para  $W(r, k)$ . Por exemplo, para 3-PAS ela dá um limitante da forma

$$W(r, 3) \leq r^{r^{\dots^{O(r)}}},$$

em que a torre tem altura  $r-1$ . Mais geralmente, defina a hierarquia de Ackermann tomando  $f_1(x) = 2x$ , e

$$f_{n+1}(x) = f_n^{(x)}(1) = f_n(f_n(\dots(1)\dots))$$

para todo  $n \geq 1$ . Então  $f_2(x) = 2^x$ ,  $f_3(x)$  é uma torre de 2s com altura  $x$ , e assim por diante. A prova do Teorema de Van der Waerden acima dá um limitante para  $W(2, k)$  que cresce mais rápido do que  $f_n$  para todo inteiro  $n$ !

A razão pela qual obtivemos limitantes tão ruins é que a prova usa indução dupla. Shelah (1988) melhorou bastante esse limitante, provando que

$$W(r, k) \leq f_4(r + k).$$

Ele fez isso apresentando uma nova prova, usando apenas uma indução simples, de um resultado de Hales e Jewett (1963), que é uma generalização do Teorema de Van der Waerden. A prova desse resultado foge ao contexto deste livro e, portanto, apresentamos apenas seu enunciado. Para isso, precisamos da seguinte definição.

**Definição 9.1.8.** Uma *reta combinatória* em  $[k]^n$  é um conjunto  $L = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$  de tamanho  $k$ , com cada  $x^{(i)} \in [k]^n$ , tal que, para cada coordenada  $j \in [n]$ ,

$$(a) \quad x_j^{(1)} = \dots = x_j^{(k)} \quad \text{ou} \quad (b) \quad x_j^{(i)} = i \quad \text{para todo } i \in [k].$$

Por exemplo,  $\{(1, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 1), (3, 2, 3, 1)\}$  é uma reta combinatória em  $[3]^4$ , e o número de retas combinatórias em  $[k]^n$  é  $(k+1)^n - k^n$ . Podemos também obter uma reta combinatória tomando  $\tau \in \{1, \dots, k, *\}^n$  com pelo menos um  $*$  (chamamos  $\tau$  de *raiz*), e

$$L = \{\tau(1), \dots, \tau(k)\}$$

em que  $\tau(i) \in [k]^n$  é obtido ao substituímos cada  $*$  por  $i$ . O seguinte teorema foi provado por Hales e Jewett (ibid.).

**Teorema 9.1.9** (Hales–Jewett). *Seja  $k, r \in \mathbb{N}$ . Se  $n$  é suficientemente grande, então toda  $r$ -coloração de  $[k]^n$  contém uma reta combinatória monocromática.*

Uma melhora ainda maior (e similarmente grande) foi apresentada por Gowers, que mostrou que  $W(r, k)$  é no máximo uma torre de altura limitada. Ele fez isso apresentando uma nova prova do Teorema de Szemerédi, que é uma generalização diferente do Teorema de Van der Waerden, resolvendo a seguinte questão de Erdős e Turán (1936).

**Questão 9.1.10.** Todo conjunto  $A \subset \mathbb{N}$  de densidade superior positiva<sup>2</sup> contém uma  $k$ -PA?

Note que em qualquer  $r$ -coloração de  $\mathbb{N}$ , pelo menos uma das classes de cor possui densidade superior positiva, então uma resposta positiva para essa questão realmente generalizaria o Teorema de Van der Waerden. O caso  $k = 3$  foi resolvido por Roth (1952), usando análise de Fourier, mas a totalidade da conjectura só foi provada por Szemerédi (1975a) (o caso particular  $k = 4$  foi provado por Szemerédi (1969)), usando teoria dos grafos.

**Teorema 9.1.11** (Szemerédi (1975a)). *Para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $\delta > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que todo conjunto  $A \subset [n]$  de tamanho  $|A| \geq \delta n$  contém uma progressão aritmética de comprimento  $k$ .*

Vamos provar o caso  $k = 3$  desse teorema no Capítulo 11.

## 9.2 Números de Ramsey para grafos

Lembre-se do Capítulo 4 que escrevemos

$$G \rightarrow (H_1, H_2)$$

se toda coloração das arestas de  $G$  nas cores vermelho e azul contém ou uma cópia vermelha de  $H_1$  ou uma cópia azul de  $H_2$ , e definimos os números de Ramsey como

$$R(s, t) := \min \{n \in \mathbb{N} : K_n \rightarrow (K_s, K_t)\}.$$

Nos Capítulos 4 e 5, provamos os seguintes limitantes para  $R(3, k)$ .

**Teorema 9.2.1.**

$$\left(\frac{k}{\log k}\right)^{3/2} \leq R(3, k) \leq \binom{k+1}{2}.$$

---

<sup>2</sup>Isso significa que existe  $\delta > 0$  tal que  $|A \cap \{1, \dots, n\}| \geq \delta n$  para um número infinito de  $n \in \mathbb{N}$ .

A prova do limitante superior foi um simples argumento de indução, enquanto a coloração provando o limitante inferior foi obtida ao removermos um vértice de cada triângulo no grafo aleatório  $G(n, p)$ . Dois anos após provar esse limitante inferior, Erdős (1961) apresentou a seguinte melhora significativa.

**Teorema 9.2.2** (Erdős (ibid.)). *Existe constante  $c > 0$  tal que*

$$R(3, k) \geq \frac{ck^2}{(\log k)^2}.$$

A prova que vamos apresentar foi encontrada por Krivelevich (1995). A ideia é remover (as arestas de) uma coleção maximal de triângulos arestas-disjuntos de  $G(n, p)$ , e limitar a probabilidade de, ao fazer isso, removermos muitas arestas de um conjunto de tamanho  $k$ . Para isso, precisamos do seguinte lema, dado por Erdős e Tetali (1990).

**Lema 9.2.3.** *Seja  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  um conjunto de eventos em algum espaço de probabilidade e, para cada  $t \in \mathbb{N}$ , denote por  $\mathcal{E}_t$  o evento em que ocorrem todos os eventos de algum conjunto de  $t$  eventos independentes em  $\mathcal{A}$ . Então*

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_t) \leq \frac{1}{t!} \left( \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \right)^t.$$

*Demonstração.* Limitamos a probabilidade do evento  $\mathcal{E}_t$  usando a cota da união, que nos dá

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_t) \leq \frac{1}{t!} \sum_{(i_1, \dots, i_t) \in [m]^t} \prod_{j=1}^t \mathbb{P}(A_{i_j}) \leq \frac{1}{t!} \left( \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \right)^t,$$

como desejado. □

Também vamos precisar da seguinte consequência simples da desigualdade de Chernoff.

**Lema 9.2.4.** *Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $p \in (0, 1)$ . Se  $pk \geq 16 \log n$ , então com alta probabilidade vale o seguinte: todo conjunto com  $k$  vértices de  $G(n, p)$  contém pelo menos  $pk^2/8$  arestas.*

*Demonstração.* Note que se  $S$  é um conjunto com  $k$  vértices de  $G(n, p)$ , então o número esperado de arestas de  $G(n, p)$  em  $S$  é  $p\binom{k}{2} \geq pk^2/4$ . Portanto, pela desigualdade de Chernoff, o número esperado de  $k$ -conjuntos contendo menos do que  $pk^2/8$  arestas é no máximo

$$\binom{n}{k} e^{-pk^2/16} \leq \left( \frac{en}{k} e^{-pk/16} \right)^k \leq \left( \frac{e}{k} \right)^k \ll 1$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , em que no segundo passo usamos a desigualdade  $pk \geq 16 \log n$ .  $\square$

Estamos prontos para provar o limitante inferior de Erdős para  $R(3, k)$ .

*Demonstração do Teorema 9.2.2.* Seja  $S$  um conjunto com  $k$  vértices de  $G(n, p)$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$  e  $p \in (0, 1)$  (que será escolhido mais tarde) com  $pk \geq 16 \log n$ . Pelo Lema 9.2.4, com alta probabilidade, todo conjunto com  $k$  vértices de  $G(n, p)$  contém pelo menos  $pk^2/8$  arestas.

Nosso plano é remover (as arestas de) um conjunto maximal de triângulos arestas disjuntos; note que isso nos deixará com um grafo livre de triângulos. Para deduzir o teorema, precisamos limitar a probabilidade de que ao fazer isso, removermos  $pk^2/8$  arestas de algum  $k$ -conjunto. Vamos fazer isso usando o Lema 9.2.3.

Para ser preciso, seja  $\mathcal{T}$  a família de triângulos em  $K_n$  que intersecta  $S$  em pelo menos dois vértices e, para cada  $T \in \mathcal{T}$ , defina  $A_T$  como o evento em que  $T$  é contido em  $G(n, p)$ . Note que uma subcoleção de eventos  $\{A_T : T \in \mathcal{T}\}$  é independente se e somente se os triângulos correspondentes são arestas-disjuntos. Para cada  $t \in \mathbb{N}$ , denote por  $\mathcal{E}_t$  o evento em que  $G(n, p)$  contém um conjunto com  $t$  triângulos arestas-disjuntos em  $\mathcal{T}$ . Pelo Lema 9.2.3, temos

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_t) \leq \frac{1}{t!} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \mathbb{P}(A_T) \right)^t \leq \frac{(p^3 k^2 n)^t}{t!} \leq \left( \frac{ep^3 k^2 n}{t} \right)^t \leq e^{-t}$$

se  $t \geq e^2 p^3 k^2 n$ , em que o segundo passo segue, porque  $|\mathcal{T}| \leq k^2 n$  e  $\mathbb{P}(A_T) = p^3$  para cada  $T \in \mathcal{T}$ ; e o terceiro passo é simplesmente  $t! \geq (t/e)^t$ , que segue da fórmula de Stirling.

Agora, observe que se  $p = e^{-3} n^{-1/2}$  e  $k = e^7 \sqrt{n} \log n$ , então

$$\frac{pk^2}{24} > e^2 p^3 k^2 n \geq k \log n.$$

Segue que se  $t \geq e^2 p^3 k^2 n$ , então o número esperado de  $k$ -conjuntos  $S$  tais que  $\mathcal{E}_t$  ocorre é no máximo

$$\binom{n}{k} e^{-t} \leq \left( \frac{en}{k} e^{-\log n} \right)^k = \left( \frac{e}{k} \right)^k \ll 1$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Mas se  $\mathcal{E}_t$  não ocorre para nenhum  $k$ -conjunto, então quando removemos um conjunto maximal de triângulos arestas-disjuntos de  $G(n, p)$ , removemos no máximo  $3t$  arestas de cada  $k$ -conjunto  $S$ . Como  $3t < p^2 k/8$ , segue que o grafo livre de triângulos resultante  $G$  tem

$$n = \left( \frac{k}{e^7 \log n} \right)^2 \geq \frac{k^2}{e^{16} (\log k)^2}$$

vértices e nenhum conjunto independente de tamanho  $k$ , como desejado.  $\square$

O próximo grande avanço foi a seguinte melhora do limitante superior de Erdős-Szekeres, provado por Ajtai, Komlós e Szemerédi (1980).

**Teorema 9.2.5** (Ajtai, Komlós e Szemerédi (ibid.)).

$$R(3, k) \leq \frac{8k^2}{\log k}.$$

O passo principal na prova do Teorema 9.2.5 foi o seguinte teorema mais geral, sobre conjuntos independentes em grafos livres de triângulos. Para motivar o enunciado, lembre-se do Capítulo 2 (Proposição 2.1.2) que todo grafo com grau máximo  $d$  contém um conjunto independente de tamanho pelo menos  $n/(d+1)$ . Além disso, esse limitante é justo: considere uma coleção de cliques disjuntos de tamanho  $d+1$ .

O Teorema de Ajtai, Komlós e Szemerédi diz que se o grafo é livre de triângulos, então podemos fazer melhor que isso por um fator de ordem  $\log d$ .

**Teorema 9.2.6.** *Se  $G$  é um grafo livre de triângulos com grau máximo  $d$ , então*

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{8d} \log d.$$

A prova abaixo foi encontrada por Shearer.

*Demonstração.* Seja  $S$  um conjunto independente aleatório de  $G$ , escolhido uniformemente de todos os conjuntos independentes. Para cada vértice  $v \in V(G)$ , vamos considerar a variável aleatória

$$X_v = |N(v) \cap S| + d \cdot \mathbb{1}[v \in S].$$

Seja  $U = V(G) \setminus (\{v\} \cup N(v))$ . A ideia da prova é condicionar no conjunto  $S \cap U$ , e dividir em dois casos, dependendo de quantos vértices de  $N(v)$  podem ser adicionados a  $S \cap U$  sem criar uma aresta. Para ser preciso, vamos provar a seguinte afirmativa chave.

**Afirmativa 9.2.7.** *Para qualquer conjunto  $T \subset U$ , temos*

$$\mathbb{E}[X_v \mid S \cap U = T] \geq \frac{\log d}{4}.$$

*Prova da afirmativa.* Seja  $Y = \{u \in N(v) : e(u, T) = 0\}$  o conjunto de não vizinhos de  $T$ , e note que  $S \cap N(v) \subset Y$ . Como  $G$  é livre de triângulos, segue que  $N(v)$  é um conjunto independente, e, então,

$$\mathbb{P}(S \cap Y = Z \mid S \cap U = T) = \frac{1}{2^{|Y|} + 1}.$$

Para todo subconjunto não vazio  $Z \subset Y$ , e além disso

$$\mathbb{P}(v \in S \mid S \cap U = T) = \frac{1}{2^{|Y|} + 1}.$$

Segue que

$$\mathbb{E}[X_v \mid S \cap U = T] = \frac{2^{|Y|-1}|Y|}{2^{|Y|} + 1} + \frac{d}{2^{|Y|} + 1}.$$

Para deduzir o limitante desejado, note primeiramente que se  $|Y| \leq (1 + \log d)/2$ , então o segundo termo é pelo menos  $\sqrt{d}/2$ , que é mais do que o suficiente. Por outro lado, se  $|Y| \geq (1 + \log d)/2$ , então o primeiro termo é pelo menos  $(\log d)/4$ , como desejado.  $\square$

Como  $v \in V(G)$  e  $T$  são arbitrários, segue da Afirmativa 9.2.7 que

$$2d \cdot \mathbb{E}[|S|] \geq \sum_{v \in V(G)} \mathbb{E}[X_v] \geq \frac{n \log d}{4}.$$

Como existe um conjunto independente de tamanho pelo menos  $\mathbb{E}[|S|]$ , o teorema segue.  $\square$



Um limitante melhor para  $R(3, k)$  segue quase imediatamente.

*Demonstração do Teorema 9.2.5.* Seja  $\chi$  uma coloração de  $E(K_n)$  com as cores vermelho e azul, sem triângulos vermelhos e sem  $k$ -cliques azuis, e seja  $G$  o grafo vermelho. Observe que  $G$  tem grau máximo menor que  $k$ , porque a vizinhança de cada vértice é um conjunto independente. Pelo Teorema 9.2.6, segue que

$$k > \alpha(G) \geq \frac{n}{8k} \log k,$$

e então  $n < 8k^2 / \log k$ , como desejado.  $\square$

Shearer também provou, usando um método diferente, que se  $G$  é um grafo livre de triângulos com grau máximo  $d$ , então

$$\alpha(G) \geq (1 + o(1)) \frac{n}{d} \log d$$

quando  $d \rightarrow \infty$ , que implica no limitante superior no seguinte teorema. O limitante inferior foi primeiramente provado a menos de um fator constante por Kim (1995), e de forma justa por Fiz Pontiveros, Griffiths e Morris (2020) e Bohman e Keevash (2021).

### **Teorema 9.2.8.**

$$\left( \frac{1}{4} + o(1) \right) \frac{k^2}{\log k} \leq R(3, k) \leq (1 + o(1)) \frac{k^2}{\log k}$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

Sobre os números de Ramsey  $R(4, k)$  muito menos é conhecido: os melhores limitantes conhecidos são

$$\frac{ck^{5/2}}{(\log k)^2} \leq R(4, k) \leq \frac{Ck^3}{(\log k)^2}$$

para algumas constantes  $C > c > 0$ . Limitantes levemente mais fracos podem ser provados usando os métodos acima (veja o Exercício 9.4.5).

### 9.3 Números de Ramsey para hipergrafos

Lembramos que um hipergrafo 3-uniforme  $\mathcal{H}$  é uma estrutura composta por um conjunto de vértices  $V(\mathcal{H})$  e um conjunto  $E(\mathcal{H})$  de triplas de vértices, os quais chamamos de arestas. Uma *clique* de tamanho  $k$  em  $\mathcal{H}$  é um conjunto de  $k$  vértices contendo todas as  $\binom{k}{3}$  possíveis arestas. Dizemos que  $\mathcal{H}$  é *completo* se toda tripla de vértices de  $\mathcal{H}$  é uma aresta. Denotamos por  $K_n^{(3)}$  o hipergrafo 3-uniforme completo com  $n$  vértices.

No Capítulo 4, provamos que o seguinte número de Ramsey para hipergrafos existe (ver Teorema 4.4.3).

**Definição 9.3.1.** Para cada  $k, \ell \in \mathbb{N}$ , defina

$$R^{(3)}(k, \ell) = \min \{n \in \mathbb{N} : K_n^{(3)} \rightarrow (K_k^{(3)}, K_\ell^{(3)})\},$$

isto é, o menor  $n \in \mathbb{N}$  tal que toda coloração das arestas de  $K_n^{(3)}$  com as cores vermelho e azul contém uma clique vermelha de tamanho  $k$  ou uma clique azul de tamanho  $\ell$ .

Nesta seção, vamos estudar esses números em mais detalhe. (Uma definição similar pode ser feita para hipergrafos  $s$ -uniformes, mas, por simplicidade, nesta seção vamos nos restringir ao caso  $s = 3$ .) Os limitantes que seguem das provas originais de Ramsey (1930) e Erdős e Szekeres (1935) crescem de forma exponencialmente rápida; por exemplo, no caso diagonal  $k = \ell$  eles dão uma função do tipo torre, cuja altura cresce linearmente em função de  $k$ . Limitantes drasticamente melhores foram obtidos por Erdős e Rado (1952).

**Teorema 9.3.2** (Erdős e Rado (ibid.)). *Para todos  $k, \ell \in \mathbb{N}$ ,*

$$R^{(3)}(k, \ell) \leq 2^{\binom{R(k-1, \ell-1)}{2}}.$$

A prova é similar (em esboço) à prova de Erdős e Szekeres dada no Capítulo 4, mas em vez de atribuir cores a vértices, vamos atribuí-las a arestas (de um grafo). Isso nos permite substituir  $\Theta(k)$  aplicações do Teorema de Ramsey com  $\Theta(k^2)$  aplicações do Princípio da Casa dos Pombos, e uma aplicação do Teorema de Ramsey.

*Demonstração do Teorema 9.3.2.* Tome  $m = R(k-1, \ell-1)$ , e seja  $\chi$  uma coloração dos 3-subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  nas cores vermelho e azul, em que  $n = 2^{\binom{m}{2}}$ .

Vamos definir uma coloração auxiliar  $\xi$  de  $E(K_m)$  nas cores vermelho e azul e, então, usar essa coloração para encontrar uma clique monocromática em  $\chi$ .

O primeiro passo é escolher vértices  $v_1, v_2 \in A_1 := \{1, \dots, n\}$  com  $v_1 \neq v_2$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe uma cor  $c_1$  tal que o conjunto

$$A_2 = \{w \in A_1 \setminus \{v_1, v_2\} : \chi(\{v_1, v_2, w\}) = c_1\}$$

tem tamanho pelo menos  $(|A_1| - 2)/2 = n/2 - 1$ . Tome  $\xi(\{1, 2\}) = c_1$ , e escolha um vértice  $v_3 \in A_2$ .

Novamente, usando o Princípio da Casa dos Pombos, existem cores  $c_2$  e  $c_3$  tal que o conjunto

$$A_3 = \{w \in A_2 \setminus \{v_3\} : \chi(\{v_1, v_3, w\}) = c_2 \text{ e } \chi(\{v_2, v_3, w\}) = c_3\}$$

tem tamanho pelo menos  $\lceil (|A_2| - 1)/4 \rceil = n/8$ . Tome  $\xi(\{1, 3\}) = c_2$  e  $\xi(\{2, 3\}) = c_3$ .

Repetindo o mesmo processo, obtemos uma sequência de vértices  $v_1, \dots, v_{m+1}$  e conjuntos  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_m$  tais que  $v_1, v_2 \in A_1$ ,  $v_{t+1} \in A_t$  para cada  $2 \leq t \leq m$ , e

$$|A_t| \geq \lceil 2^{-t+1}(|A_{t-1}| - 1) \rceil \geq 2^{-\binom{t}{2}} n \geq 1$$

para cada  $3 \leq t \leq m$ , e cores  $\xi(\{i, j\})$  para cada  $1 \leq i < j \leq m$ , tal que

$$\chi(\{v_i, v_j, w\}) = \xi(\{i, j\}) \quad (9.1)$$

para todo  $w \in A_j$ . Em particular, isso vale para cada  $w \in \{v_{j+1}, \dots, v_{m+1}\} \subset A_j$ .

Como  $m = R(k - 1, \ell - 1)$ , a coloração  $\xi$  contém uma clique vermelha de tamanho  $k - 1$  ou uma clique azul de tamanho  $\ell - 1$ . O argumento é o mesmo nos dois casos, então assuma que  $T \subset \{v_1, \dots, v_m\}$  é tal que  $\{i : v_i \in T\}$  é uma clique vermelha com tamanho  $k - 1$  em  $\xi$ . Segue, usando (9.1), que  $\chi(\{x, y, z\})$  é vermelho para toda tripla  $\{x, y, z\} \subset T \cup \{v_{m+1}\}$ , e, portanto, que o conjunto  $T \cup \{v_{m+1}\}$  é uma clique vermelha com tamanho  $k$  em  $\chi$ , como desejado.  $\square$

Aplicando o Teorema 9.3.2 com  $\ell = 4$  e, usando o limitante de Erdős e Szekeres (Teorema 9.2.1) para limitar  $R(3, k - 1)$ , obtemos o seguinte corolário:

$$R^{(3)}(4, k) \leq 2^{\binom{R(3, k-1)}{2}} \leq 2^{k^4}.$$

Isso pode ser melhorado um pouco se usarmos o limitante de Ajtai, Komlós, e Szemerédi (Teorema 9.2.5) no lugar do Teorema 9.2.1; entretanto, uma melhoria bastante substancial foi obtida por Conlon, Fox e Sudakov (2010).

**Teorema 9.3.3** (Conlon, Fox e Sudakov (ibid.)).

$$R^{(3)}(4, k) \leq k^{2k^2}.$$

A ideia é modificar a prova de Erdős e Rado descrita acima em duas formas: mudando a regra que determina se tomamos o vizinho vermelho ou o vizinho azul de um par  $\{v_i, v_j\}$ , e mudando o conjunto de arestas que são coloridas em  $\xi$ .

Para ser mais preciso, considere o seguinte “jogo de Ramsey *online*”. Em cada passo, escolhemos uma aresta de  $K_n$ , e nosso adversário a colore com vermelho ou azul. Nosso objetivo é forçar a construção de ou um  $K_s$  vermelho ou um  $K_t$  azul. Note que permitimos (crucialmente) que nossas escolhas dependam das escolhas do nosso adversário, isto é, na coloração atual.

Conlon, Fox e Sudakov provaram o seguinte lema sobre esse jogo.

**Lema 9.3.4.** *No jogo de Ramsey online, podemos forçar a construção de um triângulo vermelho ou um  $K_k$  azul com no máximo  $k^3$  arestas coloridas, das quais no máximo  $k^2$  são coloridas de vermelho.*

*Demonstração.* A estratégia é bem simples: oferecemos (no máximo)  $k^2$  arestas incidentes um vértice  $v$ , parando se tivermos  $k$  arestas vermelhas e, então, trabalhamos na vizinhança vermelha ou na vizinhança azul (dependendo de seus tamanhos). Se paramos com  $k$  arestas vermelhas, então podemos oferecer todas as arestas dentro da vizinhança vermelha de  $v$ , obtendo um triângulo vermelho ou um  $K_k$  azul.

Caso contrário,  $v$  tem pelo menos  $k^2 - k + 1$  vizinhos azuis, e podemos repetir a estratégia dentro da vizinhança azul (com  $k - 1$  no lugar de  $k$ ). Depois de  $k$  iterações, vamos ter encontrado ou um triângulo vermelho ou um  $K_k$  azul, e vamos ter colorido no máximo  $k^3$  arestas, das quais no máximo  $k^2$  são vermelhas.  $\square$

Podemos agora facilmente deduzir o limitante melhorado para  $R^{(3)}(4, k)$ .

*Demonstração do Teorema 9.3.3.* Executamos a prova de Erdős e Rado do Teorema 9.3.2, mas escolhemos as arestas que vamos colorir (em  $\xi$ ), usando o Lema 9.3.4, e escolhemos suas cores usando uma ponderação enviesada.

Para ser preciso, vamos descrever um passo único no processo. Suponha que já escolhemos (em passos anteriores) uma coleção  $\{v_1, \dots, v_t\}$  de vértices, um conjunto  $A$ , e uma coloração parcial  $\xi$  das arestas de  $K_t$ , tal que

$$\chi(\{v_i, v_j, w\}) = \xi(\{i, j\}) \quad (9.2)$$

para todos  $1 \leq i < j \leq t$  tais que  $ij$  já foi colorida, e todo  $w \in A \cup \{v_{j+1}, \dots, v_t\}$ . Escolhemos a próxima aresta  $v_i v_j$  para colorir usando a estratégia do Lema 9.3.4; se a estratégia requer um novo vértice, então escolhemos  $v_{t+1}$  em  $A$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe uma cor  $c$  tal que o conjunto

$$A' = \{w \in A : \chi(\{v_i, v_j, w\}) = c\}$$

tem tamanho pelo menos  $(|A|-1)/k$  se  $c$  é vermelho e pelo menos  $(1-1/k)(|A|-1)$  se  $c$  é azul.

Agora, para completar o passo, simplesmente atualize nosso vértice adicionando  $v_{t+1}$  (se necessário), substituindo  $A$  por  $A'$ , tomando  $\xi(\{i, j\}) = c$ . Em particular, note que (9.2) ainda vale para cada aresta colorida anteriormente porque  $A' \subset A$  e  $v_{t+1} \in A$  (se  $v_{t+1}$  existe), valendo para a aresta recém-colorida  $ij$  pela definição de  $A'$ .

Nos resta apenas calcular o número de vértices que precisamos para realizar essa estratégia. Colorimos no máximo  $k^3$  arestas, das quais no máximo  $k^2$  foram coloridas com vermelho, e, então, no final do processo nosso conjunto  $A$  terá tamanho pelo menos

$$n \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{k^2} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^3} \geq 1$$

se  $n \geq \exp(2k^2 \log k)$ , como desejado. □

Como o leitor pode ter notado, a constante no expoente pode ser melhorada com um cálculo um pouco mais cuidadoso. O argumento também pode facilmente ser generalizado a outros números de Ramsey para hipergrafos fora da diagonal (veja o Exercício 9.4.7).

### 9.3.1 Limitantes inferiores para números de Ramsey para hipergrafos

Diferentemente do caso de grafos, colorir arestas independentemente ao acaso nos dá limitantes bastante ruins para números de Ramsey para hipergrafos. Por exemplo, para evitar um  $K_k^{(3)}$  azul em uma coloração aleatória, as arestas devem ser

coloridas com vermelho, com probabilidade pelo menos  $p \gg 1/k^2$ , uma vez que precisamos que

$$\binom{n}{k} (1-p)^{\binom{k}{3}} \approx \left( \frac{n}{k} \cdot e^{-pk^2/6} \right)^k < 1.$$

Entretanto, se  $n \geq k^8$  e  $p \gg 1/k^2$ , então o número esperado de  $K_4^{(3)}$ s vermelhos é pelo menos

$$\binom{n}{4} p^4 \gg \frac{n^4}{k^8} \geq n^3.$$

Portanto, não podemos esperar provar um limitante inferior super-polinomial para  $R^{(3)}(4, k)$  usando essa construção. Porém, combinando aleatoriedade com um passo determinístico adequado, Erdős e Hajnal (1972) mostraram que é possível provar um limitante inferior exponencial para esses números. Por exemplo, o seguinte limitante é uma consequência fácil do limitante inferior de Erdős para  $R(k)$ .

**Teorema 9.3.5.**

$$R^{(3)}(6, k) \geq 2^{k/2}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Seja  $n = 2^{k/2}$  e seja  $\xi$  uma coloração de  $E(K_n)$  com as cores vermelho e azul e sem clique monocromática de tamanho  $k$ . (Em outras palavras, podemos tomar  $\xi$  como uma coloração aleatória.) Agora, defina uma coloração  $\chi$  das triplas em  $\{1, \dots, n\}$  com as cores vermelho e azul, tomando  $\chi(\{x, y, z\}) =$  azul se e somente se  $xyz$  é um triângulo monocromático em  $\xi$ .

Não existe clique monocromática de tamanho  $k$  em  $\chi$ , uma vez que tal clique iria corresponder a uma cópia monocromática de  $K_k$  em  $\xi$ . Também não há  $K_6^{(3)}$  monocromático vermelho em  $\chi$ , porque toda 2-coloração de  $K_6$  contém um triângulo monocromático.  $\square$

Erdős e Hajnal usaram uma ideia similar para provar um limitante inferior para  $R^{(3)}(4, k)$ .

**Teorema 9.3.6.**

$$R^{(3)}(4, k) \geq 2^{(k-1)/2}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Para isso usamos torneios. Um *torneio* é uma orientação de um grafo completo, isto é, cada aresta do grafo completo recebe exatamente uma direção. Formalmente, tratamos suas arestas como pares ordenados. Dizemos que um torneio  $\vec{G}$  é *transitivo* se  $\vec{G}$  não possui ciclos dirigidos.

*Demonstração.* Seja  $n < 2^{(k-1)/2}$ , e considere um torneio com  $n$  vértices que não contém nenhum torneio transitivo com  $k$ . Para mostrar que um tal torneio existe, observe que o número esperado de subtorneios transitivos em um torneio aleatório é

$$\binom{n}{k} \cdot k! \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \leq (n \cdot 2^{-(k-1)/2})^k < 1$$

uma vez que  $n < 2^{(k-1)/2}$ . Agora, defina uma coloração  $\chi$  das triplas em  $\{1, \dots, n\}$  com as cores vermelho e azul, tomando  $\chi(\{x, y, z\})$  igual a vermelho se e somente se  $xyz$  é um triângulo cíclico em  $\xi$ .

Não há clique monocromática azul de tamanho  $k$  em  $\chi$ , uma vez que tal clique corresponderia a um torneio transitivo de tamanho  $k$  em  $\xi$ . Além disso, não há  $K_4^{(3)}$  monocromática vermelha em  $\chi$ , uma vez que toda orientação de  $K_4$  contém um triângulo transitivo.  $\square$

Erdős e Hajnal conjecturaram que de fato  $R^{(3)}(4, k)$  cresce de forma super exponencialmente rápida, mas isso permaneceu um problema em aberto por quase quarenta anos, até que foi finalmente provado por Conlon, Fox e Sudakov (2010).

**Teorema 9.3.7** (Conlon, Fox e Sudakov (ibid.)).

$$R^{(3)}(4, k) \geq k^{k/5}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Tome  $r = R(3, k/4) - 1$ , e seja  $\xi$  uma coloração de  $E(K_r)$  com as cores vermelho e azul e sem triângulo vermelho, nem clique de tamanho  $k/4$  azul. Seja  $n < k^{k/5}$ , e seja  $\sigma$  uma  $r$ -coloração aleatória de  $E(K_n)$ . Agora defina uma coloração  $\chi$  de  $E(K_n^{(3)})$  com as cores vermelho e azul tomando

$$\chi(\{x, y, z\}) = \xi(\{\sigma(xy), \sigma(xz)\})$$

se  $\sigma(xy) \neq \sigma(xz)$ , em que  $x < y < z$ , e tome  $\chi(\{x, y, z\}) = \text{azul}$  caso contrário.

Afirmamos primeiramente que não há cópias vermelhas de  $K_4^{(3)}$  em  $\chi$ . Isso segue porque se  $\{x, y, z\}$ ,  $\{x, y, w\}$  e  $\{x, z, w\}$  são todas vermelhas em  $\chi$ , em que

$x < y < z < w$ , então  $\sigma(xy)$ ,  $\sigma(xz)$  e  $\sigma(xw)$  são elementos distintos de  $[r]$ , e formam um triângulo vermelho em  $\xi$ , o que contradiz nossa escolha de  $\xi$ .

Assim, observe que se  $T$  são os vértices de uma clique azul em  $\chi$ , então para cada  $x \in T$ , o conjunto

$$|\{\sigma(xy) : x < y \in T\}| < \frac{k}{4},$$

uma vez que esses vértices formam uma clique azul em  $\xi$ , e não há clique azul de tamanho  $k/4$  em  $\xi$ . Lembrando que a  $r$ -coloração  $\sigma$  foi escolhida de forma aleatória, segue que o número esperado de  $k$ -cliques azuis em  $\chi$  é no máximo

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \prod_{i=1}^k \binom{r}{k/4} \left(\frac{k/4}{r}\right)^{k-i} &\leq n^k \binom{r}{k/4}^k \left(\frac{k}{4r}\right)^{k^2/2} \leq \left(n \left(\frac{4er}{k}\right)^{k/4} \left(\frac{k}{4r}\right)^{k/2}\right)^k \\ &= \left(n \cdot \left(\frac{ek}{4r}\right)^{k/4}\right)^k \ll (n \cdot k^{-k/5})^k < 1 \end{aligned}$$

como  $k \rightarrow \infty$ , em que a penúltima desigualdade segue porque  $r = R(3, k/4) - 1 \geq k^{2-o(1)}$  quando  $k \rightarrow \infty$ , pelo Teorema 9.2.2; e a desigualdade final vale porque  $n < k^{k/5}$ . Segue que existe uma escolha de  $\sigma$  tal que  $\chi$  não possui  $k$ -cliques monocromáticas azuis, como desejado.  $\square$

### 9.3.2 Números de Ramsey diagonais para hipergrafos

Para terminarmos este capítulo, vamos discutir brevemente o principal problema em aberto em Teoria de Ramsey: determinar a taxa de crescimento de  $R^{(3)}(k) := R^{(3)}(k, k)$ . Os melhores limitantes são dados pelo seguinte teorema de Erdős, Hajnal e Rado (1965) (ver também (Conlon, Fox e Sudakov 2010)).

#### Teorema 9.3.8.

$$2^{k^2/6+o(k^2)} \leq R^{(3)}(k) \leq 2^{2k+1}.$$

*Demonstração.* O limitante inferior segue de uma coloração aleatória simples (isto é, uniforme). O número esperado de  $k$ -cliques monocromáticas é

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{3}+1} \leq 2 \cdot \left(\frac{en}{k} \cdot 2^{-(k-1)(k-2)/6}\right)^k \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k \ll 1$$

se  $n < 2^{k^2/6-k/2}$  e, portanto, existe uma 2-coloração das arestas do  $K^{(3)}(n)$  sem  $k$ -cliques monocromáticas.



Um limitante superior levemente mais fraco,

$$R^{(3)}(k) \leq 2^{\binom{R(k-1)}{2}} \leq 2^{2^{4k}},$$

segue imediatamente do limitante de Erdős e Rado (Teorema 9.3.2), e do limitante superior de Erdős e Szekeres para os números de Ramsey  $R(k) \leq 2^{2^k}$ . Para obter o limitante superior desejado, Conlon, Fox e Sudakov usaram o jogo de Ramsey online, como na prova do Teorema 9.3.3.

Para isso, eles modificaram a estratégia no Lema 9.3.4 como segue, de forma a forçar a construção de uma  $K_k$  monocromática enquanto colorimos no máximo  $2^{2k+1}$  arestas. Tome  $m = 2^{2k}$ , e revele primeiramente todas as arestas incidentes a algum vértice  $v_1$ ; depois escolha um conjunto  $A_1$  com  $m/2$  vizinhos da mesma cor, escolha  $v_2 \in A_1$ , e revele todas as arestas incidentes a  $v_2$  dentro de  $A_1$ ; e então repita isso até encontrarmos uma  $K_k$  monocromática. O número total de arestas reveladas é no máximo  $m + m/2 + \dots + 1 \leq 2m$ , como desejado.  $\square$

Uma conjectura famosa de Erdős, Hajnal e Rado (1965, Section 16) diz que o limitante superior no Teorema 9.3.8 é próximo da verdade.

**Conjectura 9.3.9** (Erdős, Hajnal e Rado (ibid.)).

$$R^{(3)}(k) = 2^{2^{\Theta(k)}}.$$

Alguma evidência a favor dessa conjectura é que o enunciado correspondente para  $r$ -colorações é verdade para todo  $r \geq 4$ . Vamos escolher  $R_r^{(3)}(k)$  para o menor  $n \in \mathbb{N}$  tal que toda  $r$ -coloração dos 3-subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  contém uma clique monocromática de tamanho  $k$ .

**Teorema 9.3.10** (Erdős e Hajnal, 1980).

$$R_r^{(3)}(k) = 2^{2^{\Theta(k)}}$$

para cada  $r \geq 4$  fixado.

O limitante superior segue do método de Erdős e Rado, enquanto o limitante inferior é uma consequência do seguinte ‘Lema de Ascensão’ de Erdős e Hajnal (veja (Graham, Rothschild e Spencer 1990, Chapter 4.7)).

**Lema 9.3.11.**

$$R_4^{(3)}(k) \geq 2^{R(k-1)-1}.$$

*Demonstração.* Tome  $m = R(k-1) - 1$ , e seja  $\xi$  uma coloração de  $E(K_m)$  com as cores vermelho e azul e sem clique monocromática de tamanho  $k-1$ . Vamos definir uma 4-coloração  $\chi$  dos 3-subconjuntos de  $Q = \{0, 1\}^m$ .

Para isso, primeiramente definimos uma função  $f : \binom{Q}{2} \rightarrow [m]$  como

$$f(x, y) = \max \{i \in [m] : x_i \neq y_i\},$$

e seja  $<$  a ordem ‘lexicográfica reversa’ em  $Q$  tal que  $x < y$  se e somente se  $x_i = 0$  e  $y_i = 1$  para  $i = f(x, y)$ . Em particular, note que se  $x < y < z$ , então  $f(x, y) \neq f(y, z)$ .

Definimos  $\chi(\{x, y, z\})$ , em que  $x < y < z$ , como uma de nossas quatro cores, dependendo em qual dos seguintes eventos vale:

$$f(x, y) < f(y, z) \quad \text{e} \quad \xi(f(x, y)f(y, z)) = \text{vermelho}. \quad (9.3)$$

Suponha que existe uma  $k$ -clique monocromática em  $\chi$  nos vértices  $T = \{x_1, \dots, x_k\}$ , em que  $x_1 < \dots < x_k$ . O argumento é o mesmo em cada um dos casos, então vamos assumir que ambos os eventos em (9.3) valem para cada tripla  $\{x, y, z\} \subset T$ . Afirmamos que

$$\{f(x_1, x_2), f(x_2, x_3), \dots, f(x_{k-1}, x_k)\}$$

são os vértices de uma clique vermelha em  $\xi$ , o que vai nos dar a contradição desejada. Para provar isso, note inicialmente que

$$f(x_1, x_2) < f(x_2, x_3) < \dots < f(x_{k-1}, x_k) \quad (9.4)$$

pela primeira propriedade em (9.3). Para mostrar que a aresta  $f(x_i, x_{i+1})f(x_j, x_{j+1})$  é vermelha em  $\xi$ , observe que

$$f(x_{i+1}, x_{j+1}) = \max_{i < \ell \leq j} f(x_\ell, x_{\ell+1}) = f(x_j, x_{j+1}),$$

em que o primeiro passo vale pela definição de  $f$  e  $<$  (e porque  $x_{i+1} < \dots < x_{j+1}$ ), e o segundo por (9.4). Agora, segue que

$$\xi(f(x_i, x_{i+1})f(x_j, x_{j+1})) = \xi(f(x_i, x_{i+1})f(x_{i+1}, x_{j+1})) = \text{vermelho}$$

como desejado, uma vez que a tripla  $\{x_i, x_{i+1}, x_{j+1}\}$  possui a segunda propriedade de (9.3), que contradiz nossa escolha de  $\xi$  e, portanto, completa a prova do lema.  $\square$

Podemos, agora facilmente, deduzir o Teorema 9.3.10.

*Demonstração do Teorema 9.3.10.* O limitante inferior segue do Lema 9.3.11 e do limitante inferior  $R(k) > 2^{k/2}$ , uma vez que  $R_r^{(3)}(k)$  é uma função crescente em  $r$ . Para o limitante superior, usamos (uma modificação simples do) o método Erdős e Rado, e o limitante  $R_r(k) \leq r^{rk}$  para o número de Ramsey com  $r$  cores. Isso dá

$$R_r^{(3)}(k) \leq r^{r^{2rk}} = 2^{2^{O(k)}},$$

em que a constante implícita depende de  $r$ . □

Erdős e Hajnal também provaram um lema de ascensão similar para 2-colorações (veja (Erdős, Hajnal e Rado 1965; Graham, Rothschild e Spencer 1990)), mas infelizmente ele só funciona para hipergrafos  $k$ -uniformes com  $k > 3$ . A seguinte versão melhorada desse lema foi provada por Conlon, Fox e Sudakov (2013).

**Lema 9.3.12** (Lema de Ascensão). *Seja  $r \geq 2$ . Então*

$$R_r^{(4)}(2k - 1) \geq 2^{R_r^{(3)}(k) - 1},$$

*e para cada  $s \geq 4$ ,*

$$R_r^{(s+1)}(k + 3) \geq 2^{R_r^{(s)}(k) - 1}.$$

Para vários outros resultados e problemas em aberto, sugerimos ao leitor os surveys de Conlon, Fox e Sudakov (2015) e Mubayi e Suk (2020).

## 9.4 Exercícios

**Exercício 9.4.1.** Toda coloração dos inteiros com um número finito de cores possui uma progressão aritmética monocromática infinita?

**Exercício 9.4.2.** Prove, para cada  $\lambda \in \mathbb{Q}$  e  $r \in \mathbb{N}$ , que toda  $r$ -coloração dos inteiros possui uma solução monocromática  $\{x, y, z\}$  da equação  $x + \lambda y = z$ .

**Exercício 9.4.3.** Mostre que o teorema de Hales–Jewett implica no teorema de Van der Waerden.

**Exercício 9.4.4.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , mostre que existe um grafo livre de triângulos  $G$  com  $n$  vértices e tal que

$$\alpha(G) \leq \frac{Cn}{\Delta(G)} \log \Delta(G).$$

para alguma constante absoluta  $C > 0$ .

**Exercício 9.4.5.** Mostre, para constantes  $C > c > 0$ , que

$$\left( \frac{ck}{\log k} \right)^{5/2} \leq R(4, k) \leq \frac{Ck^3}{\log k}$$

**Exercício 9.4.6.** Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices, grau máximo  $d$ , e no máximo  $d^{9/5}n$  triângulos.

(a) prove que

$$\alpha(G) \geq \frac{cn}{d} \log d$$

para alguma constante  $c > 0$ . [Dica: aplique o Teorema 9.2.6 em um subconjunto de  $V(G)$ .]

(b) Deduza que

$$R(4, k) \leq \frac{Ck^3}{(\log k)^2}$$

para alguma constante  $C > 0$ .

**Exercício 9.4.7.** Prove, para cada  $s \in \mathbb{N}$  fixado, que

$$R^{(3)}(s, k) = k^{O(k^{s-2})}$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Exercício 9.4.8.** Seja  $H$  um hipergrafo 3-uniforme com 4 vértices e 3 arestas. Prove que

$$r(H, K_k^{(3)}) = k^{O(k)},$$

em que  $r(H, K_k^{(3)})$  é o menor inteiro positivo  $n$  tal que toda coloração das arestas de  $K_n^{(3)}$  com as cores azul e vermelho contém uma cópia de  $H$  com todas as arestas azuis ou uma cópia de  $K_k^{(3)}$  com todas as arestas vermelhas.

# 10

## *Método Probabilístico*

---

Neste capítulo, apresentamos algumas técnicas mais avançadas em combinatória probabilística: o Lema Local de Lovász, as Desigualdades de Janson e a Escolha Aleatória Dependente. Motivamos essas ferramentas, que são ao mesmo tempo poderosas e flexíveis, aplicando-as a alguns dos problemas que estudamos em capítulos anteriores.

### 10.1 Lema Local de Lovász

No Capítulo 5, vimos várias “provas de existência” usando o método do primeiro momento. A ideia era bastante simples e pode ser sumarizada da seguinte forma: se o número esperado de eventos “ruins” é menor que 1, então com probabilidade positiva, nenhum desses eventos ocorre.

Se os eventos ruins forem mutuamente independentes, então é necessário e suficiente que cada um deles ocorra com probabilidade estritamente menor que 1 para garantir que, com probabilidade positiva, nenhum desses eventos ocorre.

Nesta seção, vamos descrever um método introduzido por Erdős e Lovász (1975), que nos permite mostrar que, com probabilidade positiva, nenhum desses eventos ocorre, mesmo quando o número esperado de eventos ruins é bastante grande. Esse lema se aplica quando temos algum controle sobre a dependência

entre os eventos ruins. Esse controle é medido por um *grafo de dependência* que é definido como segue.

**Definição 10.1.1.** Um *grafo de dependência* para uma coleção de eventos  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  é um grafo  $G$  com conjunto de vértices  $\mathcal{A}$  e com a seguinte propriedade: para cada  $A_i \in \mathcal{A}$ , os eventos em  $\overline{N}_G(A_i)$  são mutuamente independentes, onde

$$\overline{N}_G(A_i) = V(G) \setminus N_G(A_i)$$

denota o conjunto dos não vizinhos de  $A_i$  (incluindo  $A_i$ ) em  $G$ .

Note que o grafo de dependência não é definido de forma única pelos eventos em  $\mathcal{A}$  e a condição na definição é mais forte do que simplesmente pedir que  $A_i$  seja independente de cada não vizinho  $A_j$ .

O seguinte lema foi provado por Erdős e Lovász (ibid.).

**Teorema 10.1.2** (Lema Local de Lovász). *Seja  $G$  um grafo de dependência para um conjunto de eventos  $\mathcal{A}$ . Se*

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{e(\Delta(G) + 1)} \quad (10.1)$$

para cada  $A \in \mathcal{A}$ , então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c\right) > 0.$$

Antes de provar o lema local, vamos motivar seu enunciado com algumas aplicações simples. Primeiramente, lembre-se do Capítulo 5 que um hipergrafo  $\mathcal{H}$  é bicolorível se existe uma partição  $V(\mathcal{H}) = A \cup B$  tal que não existam arestas de  $\mathcal{H}$  totalmente contidas em  $A$  ou em  $B$ . Mostramos que todo hipergrafo com menos do que  $2^{k-1}$  arestas é bicolorível (ver Teorema 5.2.2). Usando o Lema Local de Lovász podemos provar o próximo teorema, que se aplica a hipergrafos com um número arbitrário de arestas.

**Teorema 10.1.3.** *Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo  $k$ -uniforme com grau máximo  $d$ . Se*

$$d \leq \frac{2^{k-1}}{ek} - 1$$

então  $\mathcal{H}$  é 2-colorível.

*Demonstração.* Colorimos os vértices de  $\mathcal{H}$  aleatoriamente com duas cores. Para cada aresta  $e \in E(\mathcal{H})$ , denote por  $A_e$  o evento “a aresta  $e$  é monocromática”. Seja  $G$  o grafo com conjunto de vértices  $\{A_e : e \in E(\mathcal{H})\}$  e conjunto de arestas  $\{A_e A_f : A_e \cap A_f \neq \emptyset\}$ . Note que  $G$  é um grafo de dependência para os eventos  $A_e$ . Observe que  $\Delta(G) \leq k \cdot d$ , uma vez que  $\mathcal{H}$  é  $k$ -uniforme e tem grau máximo  $d$ . Como

$$\mathbb{P}(A_e) = 2^{-k+1} \leq \frac{1}{e(kd+1)},$$

segue do Lema Local de Lovász que existe uma coloração sem arestas monocromáticas, como desejado.  $\square$

Relembre do Capítulo 9 que o número de Van der Waerden  $W(r, k)$  é o menor inteiro positivo  $n$  tal que toda  $r$ -coloração de  $[n]$  contém uma  $k$ -PA (progressão aritmética de tamanho  $k$ ) monocromática. No que segue, provamos um limitante inferior para  $W(r, k)$ . Note que o número de  $k$ -PAs contidas em  $[n]$  é no máximo  $n^2/(k-1)$ . De fato, fixados um número  $x$  e uma razão  $d$ , há apenas uma  $k$ -PA cujo o termo inicial é  $x$  e a razão é  $d$ . Agora, existem no máximo  $n$  escolhas para  $x$  e  $n/(k-1)$  escolhas para  $d$ , pois o  $k$ -ésimo termo deve ser dado por  $x + d(k-1)$  e deve ser no máximo  $n$ .

Assim, se colorirmos  $[n]$  com  $r$  cores de forma independente e uniformemente ao acaso, a probabilidade de uma  $k$ -PA em específico ser monocromática é  $r^{-(k-1)}$ . Logo, o número esperado de  $k$ -PAs monocromáticas em  $[n]$  é no máximo

$$\frac{n^2}{k-1} \cdot r^{-(k-1)},$$

o que é estritamente menor que 1 para todo  $n < ((k-1) \cdot r^{k-1})^{1/2}$ . Segue da desigualdade de Markov que, para tal valor de  $n$ , existe uma  $r$ -coloração de  $[n]$  sem  $k$ -PAs monocromáticas. Com isto, concluímos que

$$W(r, k) \geq ((k-1) \cdot r^{k-1})^{1/2}.$$

Uma aplicação do Lema Local de Lovász nos dá um limitante inferior quase que quadraticamente melhor que o limitante acima.

**Teorema 10.1.4.** *Para cada  $k, r \in \mathbb{N}$ , temos*

$$W(r, k) \geq \frac{r^{k-1}}{2ek}.$$

*Demonstração.* Tome  $n = \lfloor r^{k-1}/2ek \rfloor$  e seja  $\chi: [n] \rightarrow [r]$  uma coloração aleatória como anteriormente. Para cada progressão aritmética com  $k$  termos  $P \subset [n]$ , denote por  $A_P$  o evento no qual  $P$  é monocromática. Seja  $G$  o grafo de dependência para tais eventos com conjunto de arestas  $\{A_P A_Q : P \cap Q \neq \emptyset\}$ . Observe que  $\Delta(G) < 2kn$ , uma vez que cada progressão  $P$  tem razão no máximo  $n/(k-1)$  e no máximo  $k^2$  progressões com uma dada razão intersectam  $P$ . Assim, temos

$$\mathbb{P}(A_e) = r^{-k+1} \leq \frac{1}{2ekn}.$$

Pelo Lema Local de Lovász, existe uma  $r$ -coloração de  $[n]$  sem progressões aritméticas monocromáticas com  $k$  termos, como desejado.  $\square$

Nossa terceira aplicação também não é difícil, mas precisa de um cálculo um pouco mais técnico. Lembre-se do Capítulo 4 que o número de Ramsey  $R(k)$  é o menor  $n \in \mathbb{N}$  tal que toda 2-coloração de  $E(K_n)$  contém uma  $k$ -clique monocromática.

Uma das primeiras aplicações do Método Probabilístico foi a prova apresentada por Erdős, em 1947, de que

$$R(k) \geq (1 + o(1)) \frac{k}{\sqrt{2e}} 2^{k/2}. \quad (10.2)$$

A prova é simples: colorimos as arestas independentemente ao acaso, e mostramos que o número esperado de  $k$ -cliques monocromáticas é menor que 1.

Nos últimos 74 anos, o limitante inferior de Erdős foi melhorado apenas por um fator de 2. Essa melhora, descoberta por Spencer (1975), é uma consequência do Lema Local de Lovász.

**Teorema 10.1.5** (Spencer, 1975).

$$R(k) \geq (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2k}}{e} 2^{k/2}.$$

*Demonstração.* Colorimos as arestas de  $K_n$  independentemente e uniformemente ao acaso com duas cores. Para cada  $k$ -clique  $S$  em  $K_n$ , denotamos por  $A_S$  o evento no qual  $S$  é monocromática. Note que

$$\mathbb{P}(A_S) = 2^{-\binom{k}{2}}.$$



Consideremos o grafo de dependência  $G$  para estes eventos com

$$E(G) = \{A_S A_T : e(S \cap T) \geq 1\}.$$

Note que  $G$  é de fato um grafo de dependência, pois o evento  $A_S$  é independente das cores de todas as arestas que não estão em  $S$ . Observe que

$$\Delta(G) \leq \binom{k}{2} \binom{n-2}{k-2} \leq \frac{k^4}{n^2} \binom{n}{k}.$$

Então, pelo Lema Local de Lovász, se

$$\frac{k^4}{n^2} \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \ll 1, \quad (10.3)$$

então existe uma coloração sem  $k$ -cliques monocromáticas, como desejado. Para deduzir o limitante pretendido em  $R(k)$ , observe que

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq \left( \frac{en}{k} \cdot 2^{-(k-1)/2} \right)^k \leq (2 - \varepsilon)^k \ll \frac{n^2}{k^4}$$

para  $n = (1 - \varepsilon)(\sqrt{2}k/e)2^{k/2}$ , e note que isto implica em (10.3).  $\square$

Antes de continuar, fazemos duas observações rápidas a respeito das provas acima. Primeiro, em cada caso foi fácil definir o grafo de dependência, uma vez que todos os eventos que tentamos evitar dependiam de uma coleção subjacente de eventos aleatórios independentes; essa situação é típica de várias aplicações do Lema Local de Lovász. Segundo, note que em cada caso o limitante que provamos correspondeu ao número esperado de eventos ruins, sendo mais ou menos igual ao número de vértices (ou arestas) que colorimos (isto é, de ordem  $n$  nos Teoremas 10.1.3 e 10.1.4 e de ordem  $n^2$  no Teorema 10.1.5). Isso condiz com a intuição de que a probabilidade de que não ocorra eventos ruins deveria ser aproximadamente  $e^{-\mu}$ , em que  $\mu$  é o número esperado de eventos ruins, e podemos, então, esperar encontrar uma boa coloração se temos mais do que  $e^\mu$  colorações para escolher.

A prova do Lema Local de Lovász é um argumento de indução curto (mas esperto). Vamos provar de fato o seguinte enunciado mais geral.

**Teorema 10.1.6** (Lema Local de Lovász Assimétrico). *Seja  $G$  o grafo de dependência dos eventos  $A_1, \dots, A_n$ . Se existem números  $0 \leq x_1, \dots, x_n < 1$  tais que*

$$\mathbb{P}(A_i) \leq x_i \prod_{ij \in E(G)} (1 - x_j) \quad (10.4)$$

para todo  $i \in [n]$ , então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0.$$

*Demonstração.* É suficiente mostrar que

$$\mathbb{P}(A_i \mid A_1^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c) \leq x_i$$

para cada  $i \in [n]$ , porque então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c \mid A_1^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i),$$

como desejado. Vamos de fato provar, por indução em  $|S|$ , que

$$\mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j \in S} A_j^c\right) \leq x_i \quad (10.5)$$

para todo  $S \subset [n] \setminus \{i\}$ . O limitante segue de (10.4) quando  $S = \emptyset$ , então seja  $S \neq \emptyset$  e assumamos que (10.5) vale para todos os subconjuntos próprios de  $S$ .

Para provar o passo indutivo, vamos dividir em dois o evento  $\bigcap_{j \in S} A_j^c$  no qual estamos condicionando, definindo

$$E := \bigcap_{j \in S : ij \in E(G)} A_j^c \quad \text{e} \quad F := \bigcap_{j \in S : ij \notin E(G)} A_j^c.$$

Nosso objetivo é, então, mostrar que  $\mathbb{P}(A_i \mid E \cap F) \leq x_i$ . Para isso, note primeiramente que

$$\mathbb{P}(A_i \mid E \cap F) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap E \mid F)}{\mathbb{P}(E \mid F)} \leq \frac{\mathbb{P}(A_i \mid F)}{\mathbb{P}(E \mid F)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(E \mid F)},$$

em que o passo final vale porque  $G$  é um grafo de dependência dos eventos  $A_1, \dots, A_n$ . Agora, observe que

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \prod_{j \in S : ij \in E(G)} \mathbb{P}(A_j^c \mid \bigcap_{k \in T_j} A_k^c)$$

para alguma escolha de conjuntos  $T_j \subsetneq S$  e, portanto, pela hipótese de indução,

$$\mathbb{P}(E \mid F) \geq \prod_{j \in S : ij \in E(G)} (1 - x_j).$$

Finalmente, usando (10.4), segue que

$$\mathbb{P}(A_i \mid E \cap F) \leq \frac{\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(E \mid F)} \leq x_i,$$

como desejado.  $\square$

Agora, podemos facilmente deduzir a versão simétrica do lema local.

*Demonstração do Lema Local de Lovász.* Seja  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  e  $d = \Delta(G)$ , e tome

$$x_i = \frac{1}{d+1}$$

para cada  $i \in [n]$ . Por (10.1), e notando que  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x \leq e$  para todo  $x > 0$ , temos

$$\mathbb{P}(A_i) \leq \frac{1}{e(d+1)} \leq \frac{1}{d+1} \cdot \left(\frac{d}{d+1}\right)^d \leq x_i \prod_{ij \in E(G)} (1 - x_j).$$

Assim, a condição (10.4) é satisfeita e, então, o evento  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  ocorre com probabilidade positiva, como desejado.  $\square$

Para vermos que a versão assimétrica é útil, vamos apresentar uma outra prova do seguinte resultado clássico de Erdős (1961), que provamos no Capítulo 9. A prova usando o Lema Local de Lovász foi descoberta por Spencer (1977).

**Teorema 10.1.7** (Erdős, 1961). *Existe constante  $c > 0$  tal que*

$$R(3, k) \geq \frac{ck^2}{(\log k)^2}$$

*para todo  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  uma constante suficientemente pequena, e tome  $n = \varepsilon^4 k^2 / (\log k)^2$  e  $p = \varepsilon / \sqrt{n}$ . Para cada triângulo  $S$  em  $K_n$ , denote por  $A_S$  o evento  $\{S \subset G(n, p)\}$ , e, para cada  $k$ -clique  $T \subset K_n$ , denote por  $B_T$  o evento  $\{T \cap G(n, p) = \emptyset\}$  (isto é, os vértices de  $T$  formam um conjunto independente de tamanho  $k$ ). Para provar o teorema, é suficiente mostrar que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{S \in \mathcal{A}} A_S \cap \bigcap_{T \in \mathcal{B}} B_T\right) > 0,$$

em que  $\mathcal{A}$  é o conjunto de triângulos em  $K_n$ , e  $\mathcal{B}$  é a coleção de  $k$ -cliques em  $K_n$ .

Seja  $G$  o grafo com conjunto de vértices  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , no qual o conjunto de arestas consiste nos pares de cliques que se intersectam em pelo menos dois vértices (e então em pelo menos uma aresta). Note que  $G$  é um grafo de dependência para os eventos  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , uma vez que cada evento é independente de todos os eventos que dependem de um conjunto disjunto de arestas. Observe que

- cada  $S \in \mathcal{A}$  tem  $\leq 3n$  vizinhos em  $\mathcal{A}$  e  $\leq 3n^{k-2}$  vizinhos em  $\mathcal{B}$ ;
- cada  $T \in \mathcal{B}$  tem  $\leq k^2 n$  vizinhos em  $\mathcal{A}$  e  $\leq k^2 n^{k-2}$  vizinhos em  $\mathcal{B}$ .

Agora, para cada  $S \in \mathcal{A}$  e  $T \in \mathcal{B}$ , tome

$$x_S = 2p^3 \quad \text{e} \quad x_T = n^{-k}$$

e observe que

$$\mathbb{P}(A_S) = p^3 \leq 2p^3 (1 - 2p^3)^{3n} (1 - n^{-k})^{3n^{k-2}} \leq x_S \prod_{ST \in E(G)} (1 - x_T).$$

Além disso, temos

$$\mathbb{P}(B_T) = (1 - p)^{\binom{k}{2}} \leq \exp\left(-\frac{pk^2}{4}\right) \leq \exp(-4k \log k) < n^{-2k},$$

uma vez que  $pk = \varepsilon^{-1} \log k$  e  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, e então

$$\mathbb{P}(B_T) < n^{-2k} \leq n^{-k} (1 - 2p^3)^{k^2 n} (1 - n^{-k})^{k^2 n^{k-2}} \leq x_S \prod_{ST \in E(G)} (1 - x_T),$$

uma vez que  $p^3 k^2 n < k \log k$ . Pelo Lema Local de Lovász Assimétrico, segue que, com probabilidade positiva,  $G(n, p)$  não contém triângulos nem conjuntos independentes de tamanho pelo menos  $k$ , como desejado.  $\square$

Apresentamos mais uma aplicação do lema local a um problema na Teoria da Discrepância. Dada uma coloração  $\chi: V(\mathcal{H}) \rightarrow \{-1, 1\}$  dos vértices de um hipergrafo  $\mathcal{H}$ , a *discrepância* de  $\mathcal{H}$  com respeito a  $\chi$  é definida por

$$\text{disc}(\mathcal{H}, \chi) = \max_{e \in E(\mathcal{H})} \left| \sum_{v \in e} \chi(v) \right|,$$

e a *discrepância* de  $\mathcal{H}$  é definida por

$$\text{disc}(\mathcal{H}) = \min_{\chi} \text{disc}(\mathcal{H}, \chi),$$

em que o mínimo é sobre todas as colorações  $\chi: V(\mathcal{H}) \rightarrow \{-1, 1\}$  dos vértices de  $\mathcal{H}$ .

Um dos problemas abertos mais famosos na Teoria da Discrepância é a seguinte conjectura de Beck e Fiala (1981).

**Conjectura 10.1.8** (Beck e Fiala (ibid.)). *Se  $\mathcal{H}$  é um hipergrafo com grau máximo  $d$ , então*

$$\text{disc}(\mathcal{H}) = O(\sqrt{d}).$$

Beck e Fiala provaram que  $\text{disc}(\mathcal{H}) \leq 2d - 1$  e nenhum limitante superior da forma  $(2 - \varepsilon)d$  é conhecido. Entretanto, se as arestas de  $\mathcal{H}$  têm tamanho  $d$ , então o Lema Local de Lovász implica o seguinte limitante.

**Teorema 10.1.9.** *Se  $\mathcal{H}$  é um hipergrafo  $d$ -uniforme com grau máximo  $d$ , então*

$$\text{disc}(\mathcal{H}) \leq 3\sqrt{d \log d}.$$

*Demonstração.* Seja  $\chi: V(\mathcal{H}) \rightarrow \{-1, 1\}$  uma coloração aleatória dos vértices de  $\mathcal{H}$  e, para cada aresta  $e \in E(\mathcal{H})$ , denote por  $A_e$  o evento

$$\left| \sum_{v \in e} \chi(v) \right| > 3\sqrt{d \log d}. \quad (10.6)$$

Seja  $G$  o grafo de dependência desses eventos com conjunto de arestas  $\{A_e A_f : A_e \cap A_f \neq \emptyset\}$ , e observe que  $\Delta(G) \leq d^2$ . Agora, pela desigualdade de Chernoff, temos

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{v \in e} \chi(v)\right| > \lambda\right) \leq 2 \cdot \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2d}\right)$$

para todo  $\lambda > 0$  e, portanto,

$$\mathbb{P}(A_e) \leq \frac{2}{d^4} \leq \frac{1}{e(d^2 + 1)}.$$

Portanto, pelo Lema Local de Lovász, existe uma coloração  $\chi$  na qual nenhuma aresta satisfaz (10.6), como desejado.  $\square$

Observe que a prova acima também funciona para hipergrafos não uniformes com arestas de tamanho  $O(d)$ , mas o limitante obtido fica mais fraco à medida que as arestas ficam maiores. Para lidar com arestas muito grandes, Beck e Fiala usaram Álgebra Linear para encontrar uma coloração com discrepância baixa.

Uma abordagem mais recente, descoberta por Bansal, Dadush e Garg (2019), nos permite encontrar uma coloração aleatória (mais complicada) com a seguinte propriedade: cada aresta tem discrepância alta (isto é, que satisfaz (10.6)) com probabilidade  $o(d^{-2})$ , como na prova acima. Infelizmente, os eventos ruins na coloração deles são todos (fracamente) correlacionados, e então não foi possível aplicar o Lema Local; eles, portanto, obtiveram um limitante da forma  $O(\sqrt{d \log n})$  em vez de  $O(\sqrt{d \log d})$ .

## 10.2 As desigualdades de Janson

Na seção anterior, observamos que se o número esperado de eventos ruins que ocorrem em uma coloração aleatória é  $\mu$ , então esperamos que a probabilidade de que nenhuma delas ocorra seja aproximadamente  $e^{-\mu}$ . Nesta seção, provamos que, sob certas condições, uma versão desse enunciado de fato válida. Entre outras coisas, isso nos permitirá dar respostas muito mais precisas à questão levantada no Capítulo 5: qual é a probabilidade de  $G(n, p)$  ser livre de triângulos?

### 10.2.1 Lema de Harris

Sejam  $T_1, \dots, T_m$  triângulos em  $K_n$ , e para cada  $i \in [m]$  defina o evento

$$A_i = \{T_i \subset G(n, p)\}.$$

Como podemos provar um limitante inferior na probabilidade de que nenhum desses eventos “ruins” ocorram? O primeiro passo é notar que, como na seção anterior, podemos reescrever essa probabilidade como

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c\right) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}\left(A_i^c \mid A_1^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c\right).$$

Agora, como condicionar no evento “os primeiros  $i - 1$  triângulos não estejam contidos em  $G(n, p)$ ” influencia a probabilidade do evento  $T_i \subset G(n, p)$ ? É intuitivamente claro que essa probabilidade deva ser no máximo a probabilidade não condicional  $p^3$ , uma vez que estamos condicionando em uma informação “negativa” sobre as arestas de  $G(n, p)$ .

Essa intuição foi tornada precisa por Harris (1960); para enunciar seu lema, precisamos de uma definição importante.

**Definição 10.2.1.** Um evento  $E \subset \{0, 1\}^n$  é *crescente* se

$$\mathbf{x} \in E \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} \in E,$$

em que  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$  significa que  $x_i \leq y_i$  para todo  $i \in [n]$ .

Escreva  $\mathbb{P}_p$  para indicar que  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \{0, 1\}$  são escolhidos aleatoriamente e independentemente, com  $\mathbb{P}(x_i = 1) = \mathbb{P}(y_i = 1) = p$ .

**Teorema 10.2.2** (Lema de Harris). *Sejam  $E, F \subset \{0, 1\}^n$  e  $p \in (0, 1)$ . Se  $E$  e  $F$  são ambos crescentes, então*

$$\mathbb{P}_p(E \cap F) \geq \mathbb{P}_p(E) \cdot \mathbb{P}_p(F). \quad (10.7)$$

Um evento  $E \subset \{0, 1\}^n$  é *decrecente* se  $E^c$  é crescente. Segue facilmente do Lema de Harris que (10.7) também vale se  $E$  e  $F$  são ambos decrecentes. Além disso, vale que

$$\mathbb{P}_p(E \cap F) \leq \mathbb{P}_p(E) \cdot \mathbb{P}_p(F)$$

se  $E$  é crescente e  $F$  é decrecente. Observamos que o Lema de Harris é frequentemente referido como a desigualdade FKG, devido a uma generalização provada por Fortuin, Kasteleyn e Ginibre (1971), uma ferramenta importante na Teoria de Percolação.

*Demonstração do Lema de Harris.* A prova segue por indução em  $n$ . Quando  $n = 1$ , a desigualdade vale com igualdade, a não ser que  $E = F = \{1\}$ , que vale uma vez que  $p \geq p^2$ .

Para passo indutivo, defina os eventos crescentes em  $\{0, 1\}^{n-1}$  como segue:

$$E_z := \{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n-1} : (\mathbf{x}, z) \in E\} \quad \text{e} \quad F_z := \{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n-1} : (\mathbf{x}, z) \in F\}$$

para cada  $z \in \{0, 1\}$ . Note que

$$\mathbb{P}_p(E \cap F) = p \cdot \mathbb{P}_p(E_1 \cap F_1) + (1 - p) \cdot \mathbb{P}_p(E_0 \cap F_0).$$

Agora, como  $E_z$  e  $F_z$  são crescentes, temos

$$\mathbb{P}_p(E_z \cap F_z) \geq \mathbb{P}_p(E_z) \cdot \mathbb{P}_p(F_z)$$

pela hipótese de indução e, então,

$$\mathbb{P}_p(E \cap F) \geq p \cdot \mathbb{P}_p(E_1) \cdot \mathbb{P}_p(F_1) + (1 - p) \cdot \mathbb{P}_p(E_0) \cdot \mathbb{P}_p(F_0). \quad (10.8)$$

Além disso, como  $E$  e  $F$  são crescentes, temos  $\mathbb{P}_p(E_0) \leq \mathbb{P}_p(E_1)$  e  $\mathbb{P}_p(F_0) \leq \mathbb{P}_p(F_1)$  e, portanto,

$$(p - p^2)(\mathbb{P}_p(E_1) - \mathbb{P}_p(E_0))(\mathbb{P}_p(F_1) - \mathbb{P}_p(F_0)) \geq 0.$$

Reorganizando essa desigualdade, segue que o lado direito de (10.8) é pelo menos

$$(p \cdot \mathbb{P}_p(E_1) + (1 - p) \cdot \mathbb{P}_p(E_0))(p \cdot \mathbb{P}_p(F_1) + (1 - p) \cdot \mathbb{P}_p(F_0))$$

que é igual a  $\mathbb{P}_p(E) \cdot \mathbb{P}_p(F)$ , como desejado.  $\square$

O Lema de Harris facilmente implica o seguinte limitante superior na probabilidade de existir um triângulo em  $G(n, p)$ .

**Corolário 10.2.3.** *Seja  $c > 0$ , e tome  $p = c/n$ . Então*

$$\mathbb{P}(K_3 \subset G(n, p)) \leq 1 - e^{-c^3/6} + o(1)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Lembre-se que  $T_1, \dots, T_m$  são triângulos em  $K_n$ , e que para cada  $i \in [m]$  denotamos por  $A_i$  o evento  $\{T_i \subset G(n, p)\}$ . Note que podemos considerar cada evento  $A_i$  como um subconjunto de  $\{0, 1\}^N$ , em que  $N = \binom{n}{2}$ , e observe que  $A_i$  é crescente e  $\mathbb{P}_p(A_i) = p^3$ . Como  $m = \binom{n}{3}$ , segue do Lema de Harris que

$$\mathbb{P}(K_3 \not\subset G(n, p)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c\right) \geq \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i^c) = (1 - p^3)^m \rightarrow e^{-c^3/6}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , como desejado.  $\square$



### 10.2.2 As desigualdades de Janson

Agora começamos a tarefa principal desta seção: provar um limitante superior na probabilidade de não acontecer eventos ruins. O contexto no qual seremos capazes de fazer isso é como segue; o leitor é encorajado a pensar no caso de evitar triângulos em  $G(n, p)$ .

Sejam  $T_1, \dots, T_t \subset [N]$  e  $p \in (0, 1)$ , e seja  $R$  um subconjunto  $p$ -aleatório de  $[N]$  (isto é, os elementos de  $R$  são escolhidos independentemente ao acaso, com  $\mathbb{P}(x \in R) = p$  para cada  $x \in [N]$ ). Defina os eventos

$$A_i = \{T_i \subset R\},$$

e note que os eventos  $A_i$  são todos crescentes. Escreva  $i \sim j$  se  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$  e  $i \neq j$ , e observe que se  $i \not\sim j$ , então  $A_i$  e  $A_j$  são independentes. Defina

$$\mu = \sum_i \mathbb{P}(A_i) \quad \text{e} \quad \Delta = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),$$

em que a segunda soma é sobre pares ordenados  $(i, j)$  tais que  $i \sim j$ . Note que  $\mu$  é o número esperado de eventos “ruins” que ocorrem em  $R$  e  $\Delta$  se assemelha à variância.

As desigualdades a seguir foram primeiramente provadas por Janson (durante a conferência RSA de 1987) e Janson, Łuczak e Ruciński (1990). Uma desigualdade relacionada foi provada por Suen (1990) aproximadamente na mesma época.

**Teorema 10.2.4** (Desigualdades de Janson).

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^t A_i^c\right) \leq e^{-\mu + \Delta/2}. \quad (10.9)$$

Além disso, se  $\Delta \geq \mu$ , então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^t A_i^c\right) \leq e^{-\mu^2/2\Delta}.$$

Antes de provar as desigualdades de Janson, vamos dar um exemplo de suas aplicabilidades deduzindo o seguinte teorema.

**Corolário 10.2.5.** *Seja  $c > 0$  uma constante fixada e tome  $p = c/n$ . Então*

$$\mathbb{P}(K_3 \subset G(n, p)) \rightarrow 1 - e^{-c^3/6}$$

*quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Já deduzimos o limitante superior a partir do Lema de Harris no Corolário 10.2.3; agora, vamos deduzir o limitante inferior a partir das desigualdades de Janson. Para isso, seja  $N = \binom{n}{2}$  e escolha uma bijeção entre  $[N]$  e as arestas de  $K_n$ , de tal forma que o conjunto aleatório  $R$  é mapeado em  $G(n, p)$ . Aplicando as desigualdades de Janson, com  $T_1, \dots, T_t$  sendo os triângulos em  $K_n$ , obtemos

$$\mathbb{P}(K_3 \not\subset G(n, p)) \leq e^{-\mu + \Delta/2}.$$

Agora, simplesmente observe que

$$\mu = p^3 \binom{n}{3} \rightarrow \frac{c^3}{6} \quad \text{e} \quad \Delta \leq p^5 n^4 \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uma vez que se  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$  e  $i \neq j$ , então  $T_i$  e  $T_j$  devem se intersectar em uma aresta.  $\square$

Note que a prova acima dá um limitante da forma

$$\mathbb{P}(K_3 \not\subset G(n, p)) \leq e^{-\Omega(p^3 n^3)}$$

para todo  $p \ll n^{-1/2}$ . Observe também que para  $p$  maior, a segunda desigualdade de Janson pode ser usada para obter um limitante da forma

$$\mathbb{P}(K_3 \not\subset G(n, p)) \leq e^{-\Omega(p n^2)},$$

que não é muito distante da probabilidade de  $G(n, p)$  ser vazio!

Uma vez que já motivamos o enunciado, vamos provar as desigualdades de Janson. Vamos apresentar uma prova elementar elegante que foi descoberta por Boppana e Spencer (1989).

*Prova da primeira desigualdade de Janson.* Como na prova do Lema Local de Lovász, o primeiro passo é observar que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^t A_i^c\right) = \prod_{i=1}^t \mathbb{P}(A_i^c \mid A_1^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c).$$

Afirmamos que, para cada  $i \in [t]$ ,

$$\mathbb{P}(A_i \mid A_1^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c) \geq \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i \sim j, j < i} \mathbb{P}(A_i \cap A_j). \quad (10.10)$$

Isso, então, vai facilmente implicar (10.9), usando a desigualdade  $1 - x \leq e^{-x}$  (veja abaixo).

Para provar (10.10), devemos (novamente, como na prova do Lema Local de Lovász) dividir o evento  $A_1^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c$  em duas partes, definindo

$$E := \bigcap_{j < i : i \sim j} A_j^c \quad \text{e} \quad F := \bigcap_{j < i : i \not\sim j} A_j^c.$$

Note que o evento  $A_i$  é independente do evento  $F$  e os eventos  $E$  e  $F$  são ambos decrescentes. Além disso, os eventos  $E \cap A_i$  e  $F \cap A_i$  são decrescentes, uma vez que  $A_i = \{T_i \subset R\}$ . Como o conjunto  $R$  é  $p$ -aleatório, segue do Lema de Harris (aplicado a  $\{0, 1\}^{N-|T_i|}$ ), que temos

$$\mathbb{P}(E \mid A_i \cap F) \geq \mathbb{P}(E \mid A_i).$$

Note também que, pela cota da união, temos

$$\mathbb{P}(E \mid A_i) \geq 1 - \sum_{j < i : i \sim j} \mathbb{P}(A_j \mid A_i).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i \mid E \cap F) &\geq \mathbb{P}(A_i \cap E \mid F) = \mathbb{P}(A_i \mid F) \cdot \mathbb{P}(E \mid A_i \cap F) \\ &\geq \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(E \mid A_i) \geq \mathbb{P}(A_i) \left(1 - \sum_{j < i : i \sim j} \mathbb{P}(A_j \mid A_i)\right) \\ &= \mathbb{P}(A_i) - \sum_{j < i : i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j), \end{aligned}$$

como afirmado. Finalmente, para deduzir (10.9) a partir de (10.10), observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^t A_i^c\right) &\leq \prod_{i=1}^t \left(1 - \mathbb{P}(A_i) + \sum_{j < i : i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)\right) \\ &\leq \exp\left(-\sum_i \mathbb{P}(A_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)\right), \end{aligned}$$

como desejado, uma vez que a relação  $i \sim j$  é simétrica. □

Talvez o passo mais surpreendente na prova acima seja a desigualdade

$$\mathbb{P}(A_i \mid E \cap F) \geq \mathbb{P}(A_i \cap E \mid F),$$

que à primeira vista parece fraca demais para ser útil. Acontece, entretanto, que quando  $\Delta$  é pequeno, o fator de  $\mathbb{P}(E \mid F)$  que estamos descartando é suficientemente próximo de 1.

A prova da segunda desigualdade usa um pouco de mágica.

*Prova da segunda desigualdade de Janson.* Primeiramente, observe que (10.9) vale para qualquer subfamília dos conjuntos  $T_1, \dots, T_t$  e, portanto, temos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^t A_i^c\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i^c\right) \leq e^{-\mu(S) + \Delta(S)/2} \quad (10.11)$$

para todo  $S \subset [t]$ , em que

$$\mu(S) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(A_i) \quad \text{e} \quad \Delta = \sum_{i, j \in S : i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

Agora a mágica: escolhamos o conjunto  $S$  *aleatoriamente*! Para ser preciso, escolha os elementos de  $S$  independentemente, cada um com probabilidade  $q$ . Observe que

$$\mathbb{E}[\mu(S)] = q \cdot \mu \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[\Delta(S)] = q^2 \cdot \Delta,$$

e portanto existe um conjunto  $S$  tal que

$$\mu(S) - \Delta(S)/2 \geq \mathbb{E}[\mu(S) - \Delta(S)/2] = q\mu - q^2\Delta/2.$$

Tomando  $q = \mu/\Delta$ , que é permitido porque  $\Delta \geq \mu$ , segue que existe um conjunto  $S$  tal que

$$\mu(S) - \Delta(S)/2 \geq \frac{\mu^2}{2 \cdot \Delta}.$$

Aplicando (10.11) ao conjunto  $S$ , o limitante desejado segue.  $\square$

O limitante exponencial dado pelas desigualdades de Janson são frequentemente bastante úteis. Vamos agora mostrar como eles podem ser usados para provar o famoso teorema de Bollobás (1988), enunciado abaixo, sobre o número cromático de grafos aleatórios.

**Teorema 10.2.6.** *Com alta probabilidade quando  $n \rightarrow \infty$ ,*

$$\chi(G(n, 1/2)) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \frac{n}{\log_2 n}.$$

Lembre-se do Capítulo 6 que

$$\alpha(G(n, 1/2)) = (2 + o(1)) \log_2 n$$

com alta probabilidade, e observe que isso prova o limitante inferior, uma vez que

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$$

para todo grafo  $G$ .

Para o limitante superior, precisamos encontrar uma coloração na qual o tamanho médio de uma classe de cor é  $(2 + o(1)) \log_2 n$ . A ideia é simplesmente escolher (gulosamente) classes de cores deste tamanho enquanto for possível e, então, colorir os vértices restantes com uma nova cor. Para ver que isso tem chance de funcionar, note que se  $m = n^{1+o(1)}$ , então  $\log_2 m = (1 + o(1)) \log_2 n$ . Assim, ainda esperamos, para  $m = n^{1+o(1)}$ , que  $G(m, 1/2)$  contenha um conjunto independente de tamanho  $(2 + o(1)) \log_2 n$ .

O problema é que depois de remover vários conjuntos independentes, o grafo restante não tem a mesma distribuição de  $G(m, 1/2)$ . Vamos superar esse problema usando as desigualdades de Janson para provar o seguinte lema.

**Lema 10.2.7.** *Seja  $\varepsilon > 0$ . Se  $m \geq n/(\log n)^2$ , então*

$$\mathbb{P}\left(\alpha(G(m, 1/2)) < (2 - \varepsilon) \log_2 n\right) \leq \exp\left(-\frac{n^2}{(\log n)^9}\right)$$

para todo  $n$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Vamos aplicar as desigualdades de Janson com  $T_1, \dots, T_t$  sendo as  $k$ -cliques em  $K_m$ , em que  $k = (2 - \varepsilon) \log_2 n$ . Primeiramente, observe que

$$\mu = \binom{m}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \geq \left(\frac{m}{k} \cdot 2^{-k/2}\right)^k \geq n^{\varepsilon k/4} \gg n^2.$$

Se  $\Delta \leq \mu$ , o resultado é consequência da primeira desigualdade de Janson. Para limitar  $\Delta$ , precisamos calcular, para cada  $2 \leq \ell \leq k - 1$ , o número esperado de

pares  $(i, j)$  tais que  $A_i \cap A_j$  vale e  $T_i \cap T_j$  é uma clique de tamanho  $\ell$ . Como a união  $T_i \cup T_j$  tem tamanho  $2\binom{k}{2} - \binom{\ell}{2}$ , temos

$$\Delta = \sum_{\ell=2}^{k-1} \binom{m}{k} \binom{k}{\ell} \binom{m-k}{k-\ell} 2^{-2\binom{k}{2} + \binom{\ell}{2}}.$$

Essa soma é dominada pelos termos  $\ell = 2$  e  $\ell = k - 1$ , uma vez que aumentar  $\ell$  em 1 aumenta o somatório em um fator de  $2^\ell m^{-1+o(1)}$  e  $k = (2 - \varepsilon) \log_2 n$ . Quando  $\ell = k - 1$ , o somatório é no máximo  $\mu$  e quando  $\ell = 2$  o somatório é

$$\binom{m}{k} \binom{k}{2} \binom{m-k}{k-2} 2^{-2\binom{k}{2} + 1} \leq \frac{k^4}{m^2} \cdot \mu^2.$$

Pela segunda desigualdade de Janson, segue que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^t A_i^c\right) \leq e^{-\mu^2/2\Delta} \leq \exp\left(-\frac{m^2}{k^4}\right),$$

como desejado. □

Podemos agora facilmente deduzir o Teorema 10.2.6, usando a estratégia descrita acima e a cota da união.

*Demonstração do Teorema 10.2.6.* Pelo Lema 10.2.7, o número esperado de subconjuntos dos vértices de  $G(n, 1/2)$ , com pelo menos  $n/(\log n)^2$  vértices e sem conjunto independente de tamanho  $k = (2 - \varepsilon) \log_2 n$ , é no máximo

$$2^n \cdot \exp\left(-\frac{n^2}{(\log n)^9}\right) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Segue que, com alta probabilidade, todo subgrafo de  $G(n, 1/2)$  com pelo menos  $n/(\log n)^2$  vértices contém um conjunto independente de tamanho  $k$ .

Agora, se  $G(n, 1/2)$  tem essa propriedade, então podemos escolher gulosamente conjuntos independentes disjuntos  $A_1, \dots, A_r$  de tamanho  $k$  em  $G(n, 1/2)$  de tal forma que

$$\sum_{i=1}^r |A_i| \geq n - \frac{n}{(\log n)^2}.$$

Colorindo cada um dos vértices restantes com uma nova cor, segue que

$$\chi(G(n, 1/2)) \leq \frac{n}{k} + \frac{n}{(\log n)^2} = \left( \frac{1}{2 - \varepsilon} + o(1) \right) \frac{n}{\log_2 n}.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, o teorema segue.  $\square$

## 10.3 Escolha Aleatória Dependente

Nesta seção, vamos discutir uma ideia simples, mas surpreendentemente poderosa, que foi apresentada independentemente por Gowers (1998) e Kostochka e Rödl (2001) há mais de 20 anos. A apresentação que fazemos aqui é baseada no elegante *survey* de Fox e Sudakov (2011), que contém um grande número de outras aplicações.

Para motivar este método, começamos discutindo o que acontece quando combinamos Teoria de Ramsey com Teoria Extremal dos Grafos.

### 10.3.1 Números de Ramsey–Turán

No Teorema de Turán, os grafos extremais livres de  $K_r$  (isto é, os grafos de Turán) têm conjuntos independentes extremamente grandes. Por outro lado, o Teorema de Ramsey diz que todo grafo livre de  $K_r$  tem que ter um conjunto independente bastante grande. Inspirado por esses dois teoremas, Vera Sós levantou a seguinte questão em 1969: quantas arestas um grafo livre de  $H$  pode ter, dado um limitante no seu número de independência?

**Definição 10.3.1.** O *número de Ramsey–Turán* de um grafo  $H$  e uma função  $k = k(n)$  é

$$\text{RT}(n, H, k) = \max \{e(G) : H \not\subset G \subset K_n \text{ e } \alpha(G) \leq k\}.$$

Para termos uma ideia desta definição, vamos primeiro observar que

$$\text{RT}(n, K_3, o(n)) = o(n^2).$$

Para ver isso, note simplesmente que a vizinhança  $N(v)$  de qualquer vértice  $v$  em um grafo livre de triângulos  $G$  é um conjunto independente, logo se  $\alpha(G) = o(n)$ , então  $\Delta(G) = o(n)$ .

O primeiro objetivo desta seção é provar o seguinte resultado de Sudakov (2003).

**Teorema 10.3.2.** *Para todo  $\varepsilon > 0$ ,*

$$RT(n, K_4, n^{1-\varepsilon}) = o(n^2)$$

*quando  $n \rightarrow \infty$ .*

Nossa estratégia é baseada na seguinte observação. Suponha que possamos encontrar um conjunto  $A \subset V(G)$  de tamanho  $k = n^{1-\varepsilon}$  tal que todo par de vértices  $u, v \in A$  tem pelo menos  $k$  vizinhos em comum. Ou  $A$  é um conjunto independente ou ele contém uma aresta  $uv$ . Além disso, a vizinhança comum de  $u$  e  $v$  tem tamanho pelo menos  $k$ , ou sendo um conjunto independente ou contendo uma aresta  $xy$ . Assim, se  $\alpha(G) < k$ , então  $G$  contém um  $K_4$  (nos vértices  $uvxy$ ).

O seguinte lema nos permite encontrar um tal conjunto  $A$  em qualquer grafo com densidade positiva.

**Lema 10.3.3** (Lema da Escolha Aleatória Dependente). *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices, e sejam  $r, s \in \mathbb{N}$ . Se existe  $t \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{s} \left(\frac{r}{n}\right)^t \geq a, \quad (10.12)$$

*então existe um subconjunto  $A \subset V(G)$  tal que:*

(a)  $|A| \geq a$ .

(b) *toda conjunto com  $s$  vértices de  $A$  tem pelo menos  $r$  vizinhos em comum.*

Para provar o Lema da Escolha Aleatória Dependente, vamos escolher  $A$  aleatoriamente, mas usando uma distribuição de probabilidade que depende do grafo  $G$ . Para isso, precisamos definir uma distribuição com a seguinte propriedade: um conjunto de vértices é mais provável de ser escolhido  $A$  se ele tem mais vizinhos em comum. A ideia chave é definir essa distribuição usando a vizinhança comum de um conjunto de vértices (uniformemente) aleatório.

*Demonstração do Lema 10.3.3.* Sejam  $v_1, \dots, v_t \in V(G)$  vértices aleatórios de  $G$ , escolhidos uniformemente e independentemente (com repetições permitidas), e considere a vizinhança em comum do conjunto  $T = \{v_1, \dots, v_t\}$ . Seja

$$X = \left| \bigcap_{i=1}^t N(v_i) \right|$$



a variável aleatória que conta o número de vizinhos em comum de  $T$ .

Primeiro, vamos limitar a esperança de  $X$ . Para isso, observe que

$$\mathbb{P}(u \in N(v_i)) = \frac{d(u)}{n}$$

para cada  $u \in V(G)$  e  $i \in [t]$ , uma vez que  $v_i$  foi escolhido uniformemente, e  $u \in N(v_i)$  se e somente se  $v_i \in N(u)$ . Como os  $v_i$  foram escolhidos independentemente, segue que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{u \in V(G)} \left( \frac{d(u)}{n} \right)^t \geq n \left( \frac{1}{n} \sum_{u \in V(G)} \frac{d(u)}{n} \right)^t = \frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}},$$

em que a desigualdade vale pela desigualdade de Jensen, porque a função  $x \mapsto x^t$  é convexa.

Escreva  $N(S)$  para a vizinhança comum em  $G$  de um conjunto de vértices  $S$ . Para controlar os tamanhos das vizinhanças comuns dos subconjuntos de  $N(T)$ , defina

$$Y = \left| \{ S \subset N(T) : |S| = s \text{ e } |N(S)| < r \} \right|$$

como a variável aleatória que conta o número de conjuntos com  $s$  elementos em  $N(T)$  que tenham menos do que  $r$  vizinhos em comum. Para limitar o tamanho esperado de  $Y$ , observe que

$$S \subset N(T) \quad \text{se e somente se} \quad T \subset N(S),$$

e portanto, como os  $v_i$  foram escolhidos uniformemente e independentemente,

$$\mathbb{P}(S \subset N(T)) = \left( \frac{|N(S)|}{n} \right)^t.$$

Segue que

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\substack{S \subset V(G) \\ |S|=s, |N(S)| < r}} \left( \frac{|N(S)|}{n} \right)^t < \binom{n}{s} \left( \frac{r}{n} \right)^t.$$

Combinando nossos limitantes nas esperanças de  $X$  e  $Y$ , e usando a linearidade da esperança, obtemos

$$\mathbb{E}[X - Y] \geq \frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{s} \left( \frac{r}{n} \right)^t \geq a,$$

pela suposição (10.12). Portanto, deve existir uma escolha de  $T$  tal que  $X - Y \geq a$ .

Agora, para construir o conjunto  $A$ , simplesmente remova um vértice de cada subconjunto  $S \subset N(T)$  com  $|S| = s$  e  $|N(S)| < r$ . Todo subconjunto restante de  $A$  com tamanho  $s$  deve, então, ter pelo menos  $r$  vizinhos em comum. Além disso, como  $N(T)$  possui  $X$  vértices, e removemos no máximo  $Y$  vértices, o conjunto resultante tem tamanho pelo menos  $a$ , como desejado.  $\square$

Podemos agora facilmente deduzir o Teorema 10.3.2, usando a estratégia descrita acima.

*Demonstração do Teorema 10.3.2.* Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrariamente pequeno, é suficiente mostrar que qualquer grafo  $G$  com  $n$  vértices e tal que

$$e(G) \geq \varepsilon n^2 \quad \text{e} \quad \alpha(G) \leq k := n^{1-\varepsilon}$$

contém uma cópia de  $K_4$ . Para isso, vamos primeiro usar o Lema da Escolha Aleatória Dependente (com  $s = 2$  e  $a = r = k$ ) para encontrar um conjunto  $A \subset V(G)$  de tamanho  $k$  tal que todo par de vértices em  $A$  tem pelo menos  $k$  vizinhos em comum. Então precisamos mostrar que (10.12) vale, i.e., que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{2} \left(\frac{k}{n}\right)^t \geq k$$

para algum  $t \in \mathbb{N}$ . Como  $e(G) \geq \varepsilon n^2$  e  $k = n^{1-\varepsilon}$ , isso decorre da desigualdade

$$(2\varepsilon)^t n - n^{2-\varepsilon t} \geq n^{1-\varepsilon},$$

que é verdadeira se  $t \geq 2/\varepsilon$  e  $n$  é suficientemente grande.

Pelo Lema da Escolha Aleatória Dependente, segue que existe um subconjunto  $A \subset V(G)$ , com  $|A| \geq k$ , tal que quaisquer dois vértices de  $A$  têm pelo menos  $k$  vizinhos em comum. Como  $\alpha(G) \leq k$ , existe uma aresta  $uv \in E(G)$  em  $A$  e, como  $u$  e  $v$  têm pelo menos  $k$  vizinhos em comum, sua vizinhança comum contém uma aresta  $xy$ . Mas agora o conjunto  $\{u, v, x, y\}$  induz um  $K_4$  em  $G$ , como desejado.  $\square$

O comportamento da função  $\text{RT}(n, K_4, k)$  quando  $k = o(n)$ , mas  $k/n$  tende a zero lentamente é bastante diferente, e será discutido no Capítulo 11. Para  $K_5$ , existe também uma transição de crescimento quadrático para subquadrático, mas em vez de ocorrer em  $k = n^{1-o(1)}$ , ocorre em  $k = \sqrt{n \log n}$ .

**Teorema 10.3.4.** *Se  $k \gg \sqrt{n \log n}$ , então*

$$\text{RT}(n, K_5, k) \geq \frac{n^2}{4},$$

*e se  $k \ll \sqrt{n \log n}$ , então*

$$\text{RT}(n, K_5, k) = o(n^2).$$

*Demonstração.* Lembre-se do Teorema 9.2.8 que

$$\left(\frac{1}{4} + o(1)\right) \frac{k^2}{\log k} \leq R(3, k) \leq (1 + o(1)) \frac{k^2}{\log k}$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Segue que, para todo  $n$  suficientemente grande, existe um grafo livre de triângulos  $H$  com  $n/2$  vértices e tal que  $\alpha(G) = O(\sqrt{n \log n})$ . Agora, para construir um grafo  $G$  com  $n$  vértices, simplesmente tome duas cópias de  $H$  e adicione todas as  $n^2/4$  arestas entre elas. Como  $H$  é livre de triângulo, segue que  $G$  é livre de  $K_5$ , como desejado.

Para a segunda desigualdade, seja  $\varepsilon > 0$  e suponha que  $G$  é um grafo com

$$e(G) \geq \varepsilon n^2 \quad \text{e} \quad \alpha(G) \leq k.$$

Para mostrar que  $G$  contém uma cópia de  $K_5$ , vamos primeiro usar o Lema da Escolha Aleatória Dependente (com  $s = 3$ ,  $a = R(3, k)$  e  $r = k$ ) para encontrar um conjunto  $A \subset V(G)$  de tamanho  $R(3, k)$  tal que toda tripla de vértices em  $A$  tenha pelo menos  $k$  vizinhos em comum. Então precisamos mostrar que (10.12) vale, i.e., que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{3} \left(\frac{k}{n}\right)^t \geq R(3, k)$$

para algum  $t \in \mathbb{N}$ . Como  $e(G) \geq \varepsilon n^2$  e  $k \ll \sqrt{n \log n}$ , então  $R(3, k) = O(k^2 / \log k) \ll n$ , isso segue de

$$(2\varepsilon)^t n - n^{3-t/2} (\log n)^{t/2} \geq R(3, k),$$

que vale com  $t = 6$  se  $n$  é suficientemente grande.

Pelo Lema da Escolha Aleatória Dependente, segue que existe um subconjunto  $A \subset V(G)$ , com  $|A| \geq R(3, k)$ , tal que quaisquer três vértices de  $A$  têm pelo menos  $k$  vizinhos em comum. Como  $\alpha(G) \leq k$ , segue que existe um triângulo  $uvw$  em  $A$  e, como  $u, v$  e  $w$  têm pelo menos  $k$  vizinhos em comum, sua vizinhança em comum contém uma aresta  $xy$ . Mas agora o conjunto  $\{u, v, w, x, y\}$  induz um  $K_5$  em  $G$ , como desejado.  $\square$

### 10.3.2 Números extremais de grafos bipartidos

Nossa próxima aplicação do Lema da Escolha Aleatória Dependente é em Teoria Extremal dos Grafos; o lema é particularmente útil para encontrar subgrafos bipartidos. Lembre-se do Capítulo 3 que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) = O(n^{2-1/s})$$

pelos teoremas de Erdős (1938) e Kővári, T. Sós e Turán (1954). O seguinte teorema, que foi primeiro provado por Füredi (1991), fornece um limitante similar para uma família muito mais ricas de grafos. A prova dada abaixo foi descoberta por Alon, Krivelevich e Sudakov (2003).

**Teorema 10.3.5.** *Seja  $H$  um grafo bipartido com partes  $A$  e  $B$ , e suponha que cada vértice de  $B$  tem grau no máximo  $s$ . Então*

$$\text{ex}(n, H) = O(n^{2-1/s}),$$

em que a constante implícita depende apenas de  $H$ .

Para provar o Teorema 10.3.5, vamos precisar do seguinte lema de imersão.

**Lema 10.3.6.** *Seja  $H$  um grafo bipartido com partes  $A$  e  $B$ , e suponha que cada vértice de  $B$  tem grau no máximo  $s$ . Seja  $G$  um grafo e suponha que existe um conjunto  $U \subset V(G)$  com as seguintes propriedades:*

- (a)  $|U| = |A|$ ;
- (b) *todos os subconjuntos de  $U$  de tamanho  $s$  têm pelo menos  $v(H)$  vizinhos em comum.*

Então  $H \subset G$ .

*Demonstração.* Primeiro, usando a propriedade (a) do conjunto  $U$ , podemos mapear os vértices de  $A$  (arbitrariamente) no conjunto  $U$ . Vamos mapear os vértices de  $B$  de forma gulosa, um por um, então tome  $B = \{v_1, \dots, v_t\}$ , e suponha que já mapeamos os vértices  $v_1, \dots, v_{i-1}$  para algum  $1 \leq i \leq t$ . Considere a vizinhança  $N(v_i)$  do vértice  $v_i$  no grafo  $H$ , seja  $S_i$  o conjunto de vértices correspondente de  $U$ , e observe que  $|S_i| \leq s$ .

Agora, pela propriedade (b) do conjunto  $U$ , segue que os vértices de  $S_i$  têm pelo menos  $v(H)$  vizinhos em comum em  $G$ . Para mapear  $v_i$ , simplesmente escolhemos qualquer membro dessa vizinhança comum que não tenha sido usado. Note que deve haver uma escolha disponível, porque mapeamos até agora menos do que  $v(H)$  vértices. Isso prova o lema.  $\square$

Podemos agora deduzir o Teorema 10.3.5, usando o Lema da Escolha Aleatória Dependente.

*Demonstração do Teorema 10.3.5.* Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e tal que  $e(G) \geq Cn^{2-1/s}$ . Para mostrar que  $G$  contém uma cópia de  $H$ , vamos primeiramente usar o Lema da Escolha Aleatória Dependente para encontrar um conjunto  $U \subset V(G)$  de tamanho  $|A|$  tal que todo subconjunto  $S \subset U$  de tamanho  $s$  tem pelo menos  $v(H)$  vizinhos em comum. Para aplicar o lema, precisamos mostrar que (10.12) vale com  $s = s$ ,  $a = |A|$  e  $r = v(H)$ , i.e., que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{s} \left( \frac{v(H)}{n} \right)^t \geq |A|$$

para algum  $t \in \mathbb{N}$ . Como  $e(G) \geq Cn^{2-1/s}$  e  $|A| \leq v(H)$ , isso segue de

$$(2C)^t n^{1-t/s} - v(H)^t n^{s-t} \geq v(H),$$

que vale com  $t = s$  se  $C = C(H)$  é suficientemente grande.

Pelo Lema da Escolha Aleatória Dependente, segue que existe um conjunto  $U \subset V(G)$ , com  $|U| \geq |A|$ , tal que todos os subconjuntos de  $U$  de tamanho  $s$  têm pelo menos  $v(H)$  vizinhos em comum. Pelo Lema 10.3.6, segue que  $H \subset G$ , como desejado.  $\square$

### 10.3.3 O número de Ramsey do hipercubo

Nossa aplicação final do Lema da Escolha Aleatória Dependente é em Teoria de Ramsey para grafos. Lembre-se que o número de Ramsey de um grafo  $H$  é o menor  $n$  tal que toda 2-coloração das arestas do grafo completo  $K_n$  contém uma cópia monocromática de  $H$ .

Vamos restringir nossa atenção a um caso particular, o hipercubo  $k$ -dimensional  $Q_k$ , mas a abordagem que vamos usar pode ser aplicada a qualquer grafo bipartido suficientemente esparso.

**Definição 10.3.7.** Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , o hipercubo  $k$ -dimensional  $Q_k$  é o grafo com conjunto de vértices  $\{0, 1\}^k$ , e conjunto de arestas

$$E(Q_k) = \{\mathbf{xy} : |\{i \in [k] : x_i \neq y_i\}| = 1\}.$$

Observe que  $Q_k$  é um grafo bipartido  $k$ -regular com ambas partes de tamanho  $2^{k-1}$ .

O problema de limitar  $r(Q_k)$  foi primeiramente estudado por Burr e Erdős (1983), que conjecturaram que

$$r(Q_k) = O(2^k).$$

Beck (1983a) provou um limitante da forma  $2^{O(k^2)}$  e Graham, Rödl e Ruciński (2001) melhoraram este limitante para  $k^{O(k)}$ . O seguinte teorema foi provado por Shi (2001).

**Teorema 10.3.8.**  $r(Q_k) \leq 2^{3k}$ .

*Demonstração.* Seja  $n = 2^{3k}$ , e seja  $\chi$  uma coloração das arestas de  $K_n$  com as cores vermelho e azul, e assuma (sem perda de generalidade) que pelo menos metade das arestas são vermelhas. Seja  $G$  o grafo das arestas vermelhas. Afirmamos que  $Q_k \subset G$ .

Para mostrar que  $G$  contém uma cópia de  $Q_k$ , vamos primeiramente usar o Lema da Escolha Aleatória Dependente para encontrar um conjunto  $U \subset V(G)$  de tamanho  $2^{k-1}$  tal que todo subconjunto  $S \subset U$  de tamanho  $k$  tem pelo menos  $2^k$  vizinhos em comum. Para isso, precisamos mostrar que (10.12) vale com  $s = k$ ,  $a = 2^{k-1}$  e  $r = 2^k$ , i.e., que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{k} \left(\frac{2^k}{n}\right)^t \geq 2^{k-1}$$

para algum  $t \in \mathbb{N}$ . Como  $e(G) \geq n^2/4$  e  $n = 2^{3k}$ , isso segue de

$$2^{3k-t} - 2^{3k^2-2kt} \geq 2^{k-1},$$

que vale para todo  $3k/2 \leq t \leq 2k$ .

Pelo Lema da Escolha Aleatória Dependente, segue que existe um conjunto  $U \subset V(G)$ , com  $|U| \geq 2^{k-1}$ , tal que todos subconjuntos de  $U$  de tamanho  $k$  têm pelo menos  $2^k$  vizinhos em comum. Pelo Lema 10.3.6, segue que  $Q_k \subset G$ , como desejado.  $\square$

Observe que na verdade provamos um resultado extremal: existe uma cópia de  $Q_k$  em todo grafo com pelo menos  $2^{3k}$  vértices e pelo menos  $n^2/4$  arestas. Observe também que a prova acima pode ser refinada para dar um limitante superior um pouco melhor. O melhor limitante conhecido, da forma  $O(k \cdot 2^{2k})$ , foi provado por Conlon (2009b) e Fox e Sudakov (2009).

## 10.4 Exercícios

**Exercício 10.4.1.** Seja  $G$  um ciclo de comprimento  $rn$ , e seja  $\chi$  uma  $r$ -coloração dos vértices de  $G$  com exatamente  $n$  vértices de cada cor. Mostre que se  $n \geq 12$ , então existe um conjunto independente de tamanho  $r$  com um vértice de cada cor.

**Exercício 10.4.2.** Sejam  $d, k, r \in \mathbb{N}$ , com  $d \geq k^k$  e  $r \geq 16d^{1+1/k}$ , e seja  $G$  um grafo com grau máximo  $d$ . Mostre que existe uma  $r$ -coloração própria dos vértices de  $G$  tal que, para cada  $v \in V(G)$ , cada cor aparece no máximo  $k$  vezes em  $N(v)$ .

**Exercício 10.4.3.** Prove que se para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$ , temos que  $pn - \log n \rightarrow c$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , então

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ é conexo}) \rightarrow e^{-e^{-c}}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercício 10.4.4.** Prove que para qualquer constante  $0 < c < 1/3$ , o limiar para que  $G(n, p)$  contenha uma coleção de  $cn$  triângulos vértice-disjuntos é  $n^{-2/3}$ .

**Exercício 10.4.5.** Prove que existem infinitos pares  $(n, k)$  tais que vale o seguinte: a probabilidade de  $G(n, 1/2)$  conter uma clique de tamanho  $k$  é entre  $1/3$  e  $2/3$ .

**Exercício 10.4.6.** Mostre que todo grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $\Omega(n^2)$  arestas contém  $\Omega(\sqrt{n})$  vértices ligados por caminhos disjuntos de comprimento 2.

**Exercício 10.4.7.** Mostre que um grafo livre de  $K_r$  e sem cópias induzidas de  $K_{s,t}$  tem no máximo  $O(n^{2-1/s})$  arestas.

**Exercício 10.4.8.** Seja  $H$  o grafo bipartido com  $k$  vértices e grau máximo  $\Delta$ .

- Mostre que, para todo  $c > 0$ , existe  $C > 0$  tal que vale o seguinte: todo grafo  $G$  com  $n \geq C^{\Delta} k$  vértices e  $cn^2$  arestas contém  $H$ .
- Deduza um limitante para o número de Ramsey de  $H$ .

# 11

## *Método da Regularidade*

---

Neste capítulo, apresentamos um método baseado no clássico *lema da regularidade*, obtido por Endre Szemerédi na década de 70. Szemerédi obteve esse lema para provar que todo conjunto de inteiros com densidade positiva contém uma progressão aritmética arbitrariamente grande, resolvendo assim uma conjectura feita por Erdős e Turán na década de 30.

O Lema da Regularidade de Szemerédi se tornou uma ferramenta fundamental na resolução de problemas em Combinatória, bem como em diversas áreas do conhecimento. Demonstraremos o poder desse método usando-o para provar vários teoremas importantes: o Teorema de Roth sobre 3-PAs em subconjuntos de inteiros, o Teorema de Erdős e Stone e o Teorema de Estabilidade de Erdős e Simonovits em Teoria Extremal dos Grafos, e o Teorema de Chvátal, Rödl, Szemerédi e de Teoria de Ramsey. Também usaremos tal método para limitar os números de Ramsey–Turán de  $K_4$  e para determinar a estrutura típica de um grafo  $H$ -livre. Esperamos que, ao fim deste capítulo, o leitor esteja convencido da relevância e utilidade desse lema, além de pronto para aplicar o método nos exercícios propostos.



## 11.1 Lema da Regularidade de Szemerédi

Começamos definindo as ideias e os conceitos essenciais envolvidos no Lema da Regularidade. Informalmente, o Lema da Regularidade afirma que *qualquer* grafo  $G$  pode ter seu conjunto de vértices particionado em uma quantidade limitada (não depende de  $v(G)$ ) de partes (ou classes) com aproximadamente o mesmo tamanho, de modo que para a grande maioria dos subgrafos formados por pares dessas partes, o conjunto de arestas entre essas partes se assemelha ao que teríamos se distribuíssemos essas arestas aleatoriamente. No que segue, vamos tornar essa descrição precisa.

### 11.1.1 Partições regulares

Para definir precisamente o que significa um par de conjuntos de vértices se assemelhar a um grafo aleatório, precisamos definir alguns conceitos. Dados um grafo  $G$ , e subconjuntos disjuntos  $X, Y \subset V(G)$ , definimos a *densidade* do par  $(X, Y)$  como

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}.$$

Podemos agora apresentar a definição de *par regular*, que é um conceito fundamental por trás do Lema da Regularidade.

**Definição 11.1.1** (Pares  $\varepsilon$ -regulares). Dados um grafo  $G$ , uma constante  $\varepsilon > 0$ , e subconjuntos disjuntos  $A, B \subset V(G)$ , dizemos que o par  $(A, B)$  é  $\varepsilon$ -regular se para todo  $X \subset A$  e  $Y \subset B$  com  $|X| \geq \varepsilon|A|$  e  $|Y| \geq \varepsilon|B|$ , temos

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

De acordo com a definição de pares  $\varepsilon$ -regulares, percebemos que, intuitivamente, um par  $(A, B)$  é “regular” se, para todos subconjuntos de tamanho não desprezível de  $A$  e  $B$ , a densidade  $e(X, Y)/|X||Y|$  entre tais conjuntos é muito próxima da densidade entre  $A$  e  $B$ . Essa propriedade garante uma boa distribuição das arestas entre  $A$  e  $B$ , que justifica a semelhança com um grafo bipartido aleatório mencionada anteriormente.

Uma vez que sabemos o que são pares  $\varepsilon$ -regulares, apresentamos agora o tipo de partição que será obtida no Lema da Regularidade. Dado um grafo  $G$ , uma partição<sup>1</sup>  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$  de  $V(G)$  é uma *equipartição* se  $|V_0| \leq |V_1| = \dots = |V_k|$ . Dizemos que  $V_0$  é o *conjunto excepcional* da partição.

<sup>1</sup>Lembre-se da definição de partição: cada elemento de  $V(G)$  está em *exatamente um* dos conjuntos  $V_i$ .

Poderíamos definir partições regulares sem o conjunto excepcional  $V_0$ , flexibilizando a condição  $|V_1| = \dots = |V_k|$  de modo que para todo par  $(V_i, V_j)$  tenhamos  $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ . Neste livro iremos considerar sempre a definição de equipartição que contém o conjunto excepcional.

Podemos agora definir as partições em que estamos interessados.

**Definição 11.1.2** (Partição  $\varepsilon$ -regular). Dados um grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $\varepsilon > 0$ , dizemos que uma equipartição

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

é  $\varepsilon$ -regular se  $|V_0| \leq \varepsilon n$  e se no máximo  $\varepsilon k^2$  pares  $(V_i, V_j)$ , com  $1 \leq i < j \leq k$ , **não** são  $\varepsilon$ -regulares.

Perceba que, quanto menor for o valor de  $\varepsilon$ , maior é a quantidade de pares que sabemos que são  $\varepsilon$ -regulares. Ademais, note que  $\varepsilon$  também limita o tamanho do conjunto excepcional  $V_0$ , além de controlar a regularidade dos pares (veja Definição 11.1.1). Finalmente, podemos enunciar o Lema da Regularidade de Szemerédi (1975b).

**Lema 11.1.3** (Lema da Regularidade). *Para todos  $\varepsilon > 0$  e  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $M = M(m, \varepsilon)$  tal que para qualquer grafo  $G$  existe uma partição  $\varepsilon$ -regular*

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

em que  $m \leq k \leq M$ .

No que segue, vamos discutir alguns detalhes importantes sobre o enunciado do Lema da Regularidade. Comece notando que, dada uma partição  $\varepsilon$ -regular  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ , não temos nenhum controle sobre as arestas dentro de cada  $V_i$  e também não conseguimos inferir nada sobre as arestas entre pares que não são regulares. Assim, todo grafo  $G$  tem uma equipartição contendo somente uma parte, o próprio conjunto  $V(G)$ . Mas, como tal partição não nos dá nenhuma informação útil, gostaríamos de garantir que tal partição possua uma quantidade mínima de partes. Daí, fica clara a importância da existência do parâmetro  $m$ , que garante tal quantidade mínima. No outro extremo, uma partição de  $V(G)$  em que cada classe é composta por um único vértice também não é muito útil, pois, apesar de ser uma partição  $\varepsilon$ -regular (para qualquer  $\varepsilon > 0$ ), ela não nos fornece nenhuma informação sobre a distribuição de arestas desse grafo. Assim, é essencial que a quantidade de partes da partição seja limitada por alguma constante, nesse caso, a constante  $M$ .

Analisemos agora a relação do Lema da Regularidade com a quantidade de arestas de um grafo  $G$  com  $n$  vértices. Como não temos controle sobre a distribuição das arestas dentro de cada classe de uma equipartição, o lema da regularidade fornece informação útil somente quando o grafo  $G$  em questão é *denso*, i.e., quando temos  $e(G) = \Theta(n^2)$ . Para verificar esse fato, considere uma partição  $\varepsilon$ -regular  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$  de  $G$  e note que temos

$$|V_i| = \frac{n - |V_0|}{k} \geq \frac{(1 - \varepsilon)n}{k}.$$

Assim, dentro das partes  $V_1, \dots, V_k$  podemos ter um total de

$$k \binom{(1 - \varepsilon)n/k}{2} = \Theta(n^2)$$

arestas, uma vez que  $k \leq M$ . Portanto, se  $e(G) = o(n^2)$ , então todas as arestas de  $G$  podem estar dentro das partes, de modo que o Lema da Regularidade não fornecerá nenhuma informação sobre a distribuição das arestas de  $G^2$ .

Apesar da prova do Lema da Regularidade não ser particularmente complicada, apresentamos-na somente no final deste capítulo (veja Seção 11.4). Assim, o leitor pode focar sua atenção primeiramente nas aplicações do lema que são apresentadas nas próximas seções.

## 11.2 Lemas de imersão e contagem

Nesta seção, apresentamos alguns resultados que são utilizados em conjunto com o Lema da Regularidade em diversas aplicações. O mais importante destes é o Lema de Imersão, que é uma ferramenta essencial para a aplicabilidade do Lema da Regularidade. Por fins didáticos, iremos enunciar lemas de imersão gradativamente mais gerais, começando com a seguinte versão para triângulos.

**Lema 11.2.1** (Lema de imersão para triângulos). *Seja  $G$  um grafo, e sejam  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ , com  $\varepsilon < \delta/4$ . Sejam  $A_1, A_2, A_3 \subset V(G)$  subconjuntos disjuntos não vazios, e suponha que, para todo  $1 \leq i < j \leq 3$ , os pares  $(A_i, A_j)$  são  $\varepsilon$ -regulares e de densidade  $d(A_i, A_j) \geq \delta$ . Então  $K_3 \subset G$ .*

---

<sup>2</sup>Uma versão do Lema da Regularidade que funciona para grafos esparsos foi obtida por Kohayakawa (1997) e Rödl. Recomendamos o *survey* (Kohayakawa e Rödl 2003) para uma descrição detalhada do método.

Para provar o Lema 11.2.1, precisaremos do simples fato sobre pares  $\varepsilon$ -regulares a seguir.

**Lema 11.2.2.** *Seja  $\varepsilon > 0$ , e seja  $(A, B)$  um par  $\varepsilon$ -regular num grafo  $G$ . Então*

$$(d(A, B) - \varepsilon)|B| \leq |N_G(v) \cap B| \leq (d(A, B) + \varepsilon)|B|$$

*para todos exceto no máximo  $2\varepsilon|A|$  vértices  $v \in A$ .*

*Demonstração.* Defina  $X$  como o conjunto de vértices de  $A$  com “vizinhos demais” em  $B$ , isto é,

$$X = \{v \in A : |N_G(v) \cap B| > (d(A, B) + \varepsilon)|B|\}.$$

Contando arestas, temos que

$$d(X, B) > d(A, B) + \varepsilon,$$

e portanto  $|X| < \varepsilon|A|$ , pela Definição 11.1.1. O número de vértices de  $A$  com menos vizinhos que o esperado em  $B$  pode ser limitado de modo similar.  $\square$

*Demonstração do Lema 11.2.1.* Como os pares  $(A_1, A_2)$  e  $(A_1, A_3)$  são  $\varepsilon$ -regulares e  $\varepsilon < \delta/4 \leq 1/4$ , decorre do Lema 11.2.2 que existe um vértice  $v \in A_1$  com pelo menos  $(\delta - \varepsilon)|A_i|$  vizinhos em  $A_i$  para todo  $i \in \{2, 3\}$ .

Seja  $X_i$  o conjunto de vizinhos de  $v$  em  $A_i$ . Como o par  $(A_2, A_3)$  é  $\varepsilon$ -regular e  $\delta - \varepsilon > \varepsilon$  por hipótese, podemos concluir que  $d(X_2, X_3) \geq \delta - \varepsilon > 0$  e, portanto, existe pelo menos uma aresta  $uw$  entre  $X_2$  e  $X_3$ . Assim,  $uvw$  é um triângulo em  $G$ , como gostaríamos.  $\square$

Observe que uma leve modificação na prova acima permite encontrar muitos triângulos. Com efeito, se  $\varepsilon < 1/8$  então há pelo menos  $(1 - 4\varepsilon)|A_1|$  escolhas para  $v$ , e para cada  $v$  há pelo menos  $(\delta - \varepsilon)^3|A_2||A_3|$  arestas entre  $X_2$  e  $X_3$ . Assim, obtemos o seguinte “lema de contagem”.

**Lema 11.2.3** (Lema de contagem para triângulos). *Seja  $G$  um grafo,  $n \in \mathbb{N}$ , e sejam  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  com  $\varepsilon < \delta/8$ . Sejam  $A_1, A_2, A_3 \subset V(G)$  conjuntos disjuntos de tamanho  $n$ , e suponha que, para todo  $1 \leq i < j \leq 3$ , os pares  $(A_i, A_j)$  são  $\varepsilon$ -regulares e satisfazem  $d(A_i, A_j) \geq \delta$ . Então  $G$  contém pelo menos  $\delta^3 n^3/4$  triângulos.*

Note que se  $\varepsilon$  for suficientemente pequeno, conseguimos obter na conclusão do Lema 11.2.3, em vez de  $\delta^3/4$ , uma constante tão próxima de  $\delta^3$  quanto se queira. Essa é a proporção de triângulos esperada se as arestas entre cada par fossem escolhidas aleatoriamente e independentemente com probabilidade  $\delta$ .

O próximo passo é provar lemas de imersão e contagem para grafos cliques de qualquer tamanho.

**Lema 11.2.4** (Lema de imersão para cliques). *Dados  $r \geq 3$  e  $\delta > 0$ , sejam  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $G$  um grafo. Sejam  $A_1, \dots, A_r \subset V(G)$  conjuntos disjuntos suficientemente grandes, e suponha, para todo  $1 \leq i < j \leq r$ , pares  $(A_i, A_j)$  são  $\varepsilon$ -regulares e satisfazem  $d(A_i, A_j) \geq \delta$ . Então  $K_r \subset G$ .*

Para provar o Lema 11.2.4, precisaremos do seguinte fato, conhecido como lema de fatiamento (do inglês *slicing lemma*).

**Lema 11.2.5** (Lema de fatiamento). *Sejam  $\alpha \geq \varepsilon > 0$ , e seja  $(A, B)$  um par  $\varepsilon$ -regular num grafo  $G$ . Para quaisquer  $X \subseteq A$  e  $Y \subseteq B$  com  $|X| \geq \alpha|A|$  e  $|Y| \geq \alpha|B|$ , o par  $(X, Y)$  é  $(2\varepsilon/\alpha)$ -regular e satisfaz  $d(X, Y) \geq d(A, B) - \varepsilon$ .*

*Demonstração.* Como  $\alpha \geq \varepsilon$ , o limitante em  $d(X, Y)$  decorre diretamente da Definição 11.1.1, de modo que precisamos mostrar apenas que  $(X, Y)$  é  $(2\varepsilon/\alpha)$ -regular. Para fazê-lo, sejam  $X' \subseteq X$  e  $Y' \subseteq Y$  com  $|X'| \geq (2\varepsilon/\alpha)|X|$  e  $|Y'| \geq (2\varepsilon/\alpha)|Y|$ . Note que

$$|d(X', Y') - d(X, Y)| \leq |d(X', Y') - d(A, B)| + |d(A, B) - d(X, Y)| \leq 2\varepsilon$$

pela desigualdade triangular e porque  $|X'| \geq \varepsilon|A|$  e  $|Y'| \geq \varepsilon|B|$ . Como  $\alpha \leq 1$ , concluímos que  $(X, Y)$  é  $(2\varepsilon/\alpha)$ -regular, como afirmado.  $\square$

Podemos então provar o Lema de Imersão para cliques. Como a prova é uma variação do Lema 11.2.1, seremos concisos nos detalhes.

*Demonstração do Lema 11.2.4.* Como os pares  $(A_i, A_r)$  são todos  $\varepsilon$ -regulares e  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, decorre do Lema 11.2.2 que há vértice  $v \in A_r$  com pelo menos  $(\delta - \varepsilon)|A_i|$  vizinhos em  $A_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ .

Seja  $X_i$  o conjunto de vizinhos de  $v$  em  $A_i$ , e defina  $\alpha = \delta - \varepsilon$ . Como os pares  $(A_i, A_j)$  são  $\varepsilon$ -regulares, o Lema 11.2.5 afirma que os pares  $(X_i, X_j)$  são  $(2\varepsilon/\alpha)$ -regulares e têm densidade pelo menos  $\delta - \varepsilon$  para todo  $1 \leq i < j \leq r-1$ .

Por indução em  $r$ , existe cópia de  $K_{r-1}$  em  $G$  com um vértice em cada um dos conjuntos  $X_1, \dots, X_{r-1}$ . Juntamente com  $v$ , estes formam um clique de tamanho  $r$  em  $G$ , como queríamos.  $\square$

Novamente, é possível obter um lema de contagem correspondente. Deixaremos os detalhes a cargo do leitor, pois nosso próximo objetivo será provar um lema de imersão para um grafo arbitrário  $H$ . Num certo sentido, tal lema é trivial: Se conseguimos encontrar cliques arbitrariamente grandes, então conseguimos encontrar cópias de  $H$ . No entanto, gostaríamos de encontrar tal cópia sem assumir que todo par  $(A_i, A_j)$  é  $\varepsilon$ -regular e com densidade pelo menos  $\delta$ . Isto é, se  $V(H) = [\ell]$ , gostaríamos de assumir que  $(A_i, A_j)$  é regular apenas quando  $ij$  for aresta de  $H$ .

Para simplificar o enunciado da primeira versão do Lema de Imersão para  $H$  geral, iremos definir uma notação para a família de grafos com a qual estamos lidando. Dado um grafo  $H$  e números  $n \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon, \delta > 0$ , definimos  $\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$  como a família de grafos  $G$  com a seguinte propriedade: existe uma partição  $V(G) = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$  com  $|A_i| = n$  para  $1 \leq i \leq \ell$  e um rotulamento  $V(H) = \{w_1, \dots, w_\ell\}$  tal que para todo  $w_i w_j \in E(H)$ , o par  $(A_i, A_j)$  é  $\varepsilon$ -regular e satisfaz  $d(A_i, A_j) \geq \delta$ .

Com isso, podemos enunciar uma versão do Lema de Imersão para grafos gerais.

**Lema 11.2.6** (Lema de imersão geral). *Para todo grafo  $H$  e todo  $\delta > 0$ , existem  $\varepsilon > 0$  e  $M \in \mathbb{N}$  tal que se  $G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$  para algum  $n \geq M$ , então  $H \subset G$ .*

*Demonstração.* A prova desse lema é essencialmente a mesma que fizemos para o caso  $H = K_r$ , e será por indução em  $v(H)$ .

Seja  $V(H) = \{w_1, \dots, w_\ell\}$ , e seja  $V(G) = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$  uma partição como na definição de  $\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$ , de modo que  $(A_i, A_\ell)$  é  $\varepsilon$ -regular para todo  $i \in [\ell - 1]$  tal que  $w_i w_\ell \in E(H)$ . Escolhendo  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, decorre do Lema 11.2.2 que existe um vértice  $v \in A_\ell$  tal que

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \varepsilon)|A_i|$$

para todo  $i \in [\ell - 1]$  tal que  $w_i \in N_H(w_\ell)$ .

Se  $w_i \in N_H(w_\ell)$ , então defina  $X_i = N_G(v) \cap A_i$ , e defina  $X_i = A_i$  caso contrário. Para  $\alpha = \delta - \varepsilon$ , o Lema 11.2.5 afirma que  $(X_i, X_j)$  é  $(2\varepsilon/\alpha)$ -regular e tem densidade pelo menos  $\alpha$  para todos os  $2 \leq i < j \leq r$  tais que  $w_i w_j \in E(H)$ .

Seja  $H'$  o grafo obtido removendo-se o vértice  $\ell$  de  $H$ . Por indução em  $v(H)$ , existe cópia de  $H'$  em  $G$  com um vértice em cada um dos conjuntos  $X_1, \dots, X_{\ell-1}$ . Juntamente com  $v$ , obtemos a cópia de  $H$  desejada.  $\square$

Como de costume, é possível obter um lema de contagem correspondente.

**Lema 11.2.7** (Lema de contagem geral). *Para todo grafo  $H$  e todo  $\delta > 0$ , existem  $\varepsilon > 0$  e  $M \in \mathbb{N}$  tal que se  $G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$  para algum  $n \geq M$ , então  $G$  contém pelo menos  $\delta^{e(H)} n^{v(H)}/2$  cópias de  $H$ .*

Para concluir a seção, iremos provar duas variações do Lema de Imersão, que serão úteis nas aplicações da seção seguinte.

**Lema 11.2.8.** *Seja  $H$  um grafo e  $\delta > 0$ , e defina  $r = \chi(H)$ . Existem  $\varepsilon > 0$  e  $M \in \mathbb{N}$  tais que se  $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$  para algum  $n \geq M$ , então  $H \subset G$ .*

*Demonstração.* Como  $\chi(H) = r$ , é verdade que  $H \subset K_r(t)$ , o grafo completo  $r$ -partido com  $t = v(H)$  vértices em cada parte. Pelo Lema 11.2.5, temos que  $G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta')$  para certos  $n' \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon', \delta' > 0$ , em que  $n' = n/t$  e  $\varepsilon'$  pode ser tomado arbitrariamente pequeno se escolhermos  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Pelo Lema 11.2.6, temos que  $H \subset K_r(t) \subset G$ , como afirmado.  $\square$

Nossa última versão do Lema de Imersão, a seguir, será utilizada para limitar superiormente números de Ramsey de grafos de grau limitado. Para tal, consideraremos subgrafos com quantidade linear de vértices.

**Lema 11.2.9.** *Dados  $d \in \mathbb{N}$  e  $\delta > 0$ , existem  $\varepsilon > 0$  e  $\gamma > 0$  tal que vale o seguinte. Seja  $n \in \mathbb{N}$ , e seja  $H$  um grafo com  $\Delta(H) \leq d$  e  $v(H) \leq \gamma n$ . Se  $G \in \mathcal{G}(K_{d+1}, n, \varepsilon, \delta)$ , então  $H \subset G$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.4.4, temos que  $\chi(H) \leq d + 1$  e, portanto,  $H \subset K_{d+1}(t)$  para algum  $t \leq \gamma n$ . Pelo Lema 11.2.5,  $G \in \mathcal{G}(K_{d+1}(t), n', \varepsilon', \delta')$ , em que  $n' = n/t \geq 1/\gamma$  e  $\varepsilon'$  pode ser tomado arbitrariamente pequeno.

Gostariamos de aplicar o Lema 11.2.6, como na demonstração do Lema 11.2.8; no entanto, não podemos fazê-lo diretamente, pois o grafo  $H$  é muito grande. Iremos, portanto, repetir a prova do Lema 11.2.6, usando o limitante em  $\Delta(H)$  para garantir que os conjuntos envolvidos nunca ficam pequenos demais, e assegurar também que o Lema 11.2.5 é aplicado uma quantidade limitada de vezes para cada aresta de  $K_{d+1}(t)$ .

Mais precisamente, observe que na prova do Lema 11.2.6, o conjunto  $A_i$  é substituído por um subconjunto próprio quando escolhemos um vértice  $v \in A_j$  numa parte tal que  $w_j \in N_H(w_i)$ . Como  $w_i$  tem no máximo  $d$  vizinhos, cada conjunto é reduzido por um fator de aproximadamente  $\delta^d$  em todo o procedimento. Além disso, para cada par  $ij \in E(H)$ , o Lema 11.2.5 é aplicado apenas quando escolhemos um vértice  $u \in A_k$  para uma parte tal que  $w_k \in N_H(w_i) \cup N_H(w_j)$ . Logo, para cada aresta  $ij$  de  $H$ , aplicamos o lema no máximo  $2d$  vezes à parte  $(A_i, A_j)$ . Assim, escolhendo  $\varepsilon$  e  $\gamma$  suficientemente pequenos como função de  $d$  e  $\delta$ , temos que  $H \subset K_{d+1}(t) \subset G$ , como desejado.  $\square$

## 11.3 Aplicações

Nesta seção, mostramos um pouco da importância do Lema da Regularidade, discutindo cinco aplicações clássicas desse resultado.

### 11.3.1 Teorema de Erdős e Stone

Nossa primeira aplicação será o Teorema de Erdős e Stone (veja o Teorema 8.1.1), que determina assintoticamente o número extremal de todo grafo não bipartido.

**Teorema 11.3.1** (Erdős e Stone, 1946). *Para todo grafo  $H$ ,*

$$\text{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \frac{n^2}{2}$$

*quando  $n \rightarrow \infty$ .*

Como esta é nossa primeira aplicação do lema de regularidade, iremos começar com um esboço da prova. Dado um grafo  $G$  com uma quantidade suficientemente grande de arestas, devemos encontrar uma cópia de  $H$  em  $G$ . Aplicando o lema de regularidade a  $G$  com  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e escolhendo (prescientemente)  $m = 1/\varepsilon$ , obtemos uma partição  $\varepsilon$ -regular

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

com  $m \leq k \leq M$ . Definimos então o *grafo reduzido*  $R$  associado à essa partição, que é o grafo com conjunto de vértices  $\{1, \dots, k\}$  e conjunto de arestas

$$E(R) = \{ij : \text{o par } (V_i, V_j) \text{ é } \varepsilon\text{-regular e } d(V_i, V_j) \geq \delta\}.$$

Se  $R$  contém uma cópia de  $K_{r+1}$ , então decorre do Lema de Imersão (Lema 11.2.8) que  $H \subset G$ , como queríamos. Por outro lado, se  $R$  é  $K_{r+1}$ -livre, então o Teorema de Turán permite deduzir que

$$e(R) \leq t_r(k) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2}.$$

Para deduzir um limitante para  $e(G)$  a partir disso, precisaremos limitar o número de arestas de  $G$  sobre as quais “não temos controle”, isto é, as que não estão contidas num par  $\varepsilon$ -regular  $(V_i, V_j)$  com  $d(V_i, V_j) \geq \delta$ . O seguinte lema, que será usado em todas as aplicações desta seção, dá um limitante para tais arestas.



**Lema 11.3.2.** *Seja  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$  uma partição  $\varepsilon$ -regular de um grafo  $G$ . Se  $k \geq 1/\varepsilon$ , então há no máximo*

- (a)  $\varepsilon n^2$  arestas de  $G$  com uma extremidade em  $V_0$ ;
- (b)  $\varepsilon n^2$  arestas de  $G$  dentro das partes  $V_1, \dots, V_k$ ;
- (c)  $\varepsilon n^2$  arestas de  $G$  entre pares  $(V_i, V_j)$  que não são  $\varepsilon$ -regulares;
- (d)  $\delta n^2$  arestas de  $G$  entre pares  $(V_i, V_j)$  com  $d(V_i, V_j) < \delta$ .

*Demonstração.* Para a parte (a), basta lembrar que  $|V_0| \leq \varepsilon n$ . Para a parte (b), usamos o limitante  $k \geq 1/\varepsilon$ , que implica que há no máximo

$$k \cdot \binom{n/k}{2} \leq \frac{n^2}{k} \leq \varepsilon n^2$$

arestas dentro das partes, como afirmado. Para a parte (c), usamos a definição de partição  $\varepsilon$ -regular (Definição 11.1.2) para afirmar que há no máximo  $\varepsilon k^2$  pares  $(V_i, V_j)$  não  $\varepsilon$ -regulares  $\varepsilon$ -regular, e (trivialmente) no máximo  $(n/k)^2$  arestas entre cada tal par  $(V_i, V_j)$ . Finalmente, para a parte (d), há no máximo  $k^2$  pares  $(V_i, V_j)$ , e cada par com  $d(V_i, V_j) < \delta$  satisfaz  $e(V_i, V_j) < \delta n^2/k^2$  por definição de densidade. Isso conclui a prova.  $\square$

Estamos prontos para provar o Teorema de Erdős e Stone.

*Demonstração do Teorema 11.3.1.* Lembre-se da discussão do Teorema 8.1.1 que o limitante inferior decorre de considerar o grafo de Turán, de modo que é suficiente obter o limitante superior. Para fazê-lo, seja  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeno, e seja  $\varepsilon > 0$  dado pelo Lema 11.2.8. Seja  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, defina  $r = \chi(H) - 1$ , e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + 2\delta\right) \frac{n^2}{2}.$$

Afirmamos que  $H \subset G$ .

O primeiro passo é aplicar o lema de regularidade (Lema 11.1.3) a  $G$  com  $m = 1/\varepsilon$ . Obtemos assim uma partição  $\varepsilon$ -regular com

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

e  $m \leq k \leq M$  partes. Seja  $R$  o grafo reduzido associado a essa partição.

Suponha primeiro que  $K_{r+1} \subset R$ , e sejam  $A_1, \dots, A_{r+1}$  as partes correspondentes aos vértices da cópia de  $K_{r+1}$  em  $R$ . Então, para todos  $1 \leq i < j \leq r+1$ , o par  $(A_i, A_j)$  é  $\varepsilon$ -regular e satisfaz  $d(A_i, A_j) \geq \delta$ . Assim, o subgrafo induzido

$$G' = G[A_1 \cup \dots \cup A_{r+1}]$$

satisfaz  $G' \in \mathcal{G}(K_{r+1}, n', \varepsilon, \delta)$  para  $n' = |V_1| = \dots = |V_k| \geq (1 - \varepsilon)n/M$ . Como  $\chi(H) = r+1$  e  $n'$  é suficientemente grande, concluímos pelo Lema 11.2.8 que  $H \subset G' \subset G$ , como queríamos.

Assim, podemos assumir que  $R$  é  $K_{r+1}$ -livre, o que implica, pelo Teorema de Turán, que

$$e(R) \leq t_r(k) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2}.$$

Observe que existem no máximo  $(n/k)^2$  arestas de  $G$  ligando a parte  $A_i$  à parte  $A_j$  para cada  $ij \in E(R)$ , e as demais arestas de  $G$  ou têm uma extremidade em  $V_0$ , ou estão dentro de algum  $V_i$ , ou correspondem a um par  $(V_i, V_j)$  que não é  $\varepsilon$ -regular, ou a um par  $(V_i, V_j)$  com  $d(V_i, V_j) < \delta$ . Como  $k \geq m = 1/\varepsilon$ , podemos aplicar o Lema 11.3.2 para concluir que

$$e(G) \leq e(R) \cdot \frac{n^2}{k^2} + (\delta + 3\varepsilon)n^2 < \left(1 - \frac{1}{r} + 2\delta\right) \frac{n^2}{2},$$

um absurdo que conclui a prova. □

### 11.3.2 Estabilidade supersaturada

Uma aplicação correlata do lema de regularidade é a dedução do Teorema de Estabilidade de Erdős e Simonovits no caso geral a partir do caso particular  $H = K_r$ , que provamos no Teorema 3.3.4. Lembre-se que um grafo  $G$  é  $t$ -perto de ser  $r$ -partido se existem no máximo  $t$  arestas de  $G$  cuja remoção gera um grafo  $r$ -partido.

**Teorema 11.3.3.** *Para todo grafo  $H$  e todo  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que o seguinte vale. Se  $G$  é um grafo  $H$ -livre com  $n \geq n_0$  vértices e*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

*então  $G$  é  $5\delta n^2$ -perto de ser  $(\chi(H) - 1)$ -partido.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno (dependendo apenas de  $H$  e  $\delta$ ), e aplique o Lema da Regularidade a  $G$  com  $m = 1/\varepsilon$ . Obtemos assim uma partição  $\varepsilon$ -regular

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

com  $m \leq k \leq M$ . Defina o grafo reduzido  $R$  no conjunto de vértices  $\{1, \dots, k\}$  como anteriormente, isto é, com

$$E(R) = \{ij : \text{o par } (V_i, V_j) \text{ é } \varepsilon\text{-regular e } d(V_i, V_j) \geq \delta\}.$$

Escreva  $r = \chi(H) - 1$ , e suponha primeiro que  $K_{r+1} \subset R$ . Assim como na demonstração do Teorema 11.3.1, decorre que  $H \subset G$ , um absurdo. Portanto,  $R$  é  $K_{r+1}$ -livre e, portanto, pelo Teorema 3.3.4, para qualquer  $t \geq 0$ , ou

$$e(R) \leq t_r(k) - t \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2} - t,$$

ou  $R$  está  $t$ -perto de ser  $r$ -partido.

Seja  $t = 3\delta k^2$ . Suponha primeiro que  $e(R) \geq t_r(k) - t$ . Como  $k \geq m = 1/\varepsilon$ , decorre do Lema 11.3.2 que

$$e(G) \leq e(R) \cdot \frac{n^2}{k^2} + (\delta + 3\varepsilon)n^2 < \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

uma contradição. Por outro lado, se  $R$  está  $t$ -perto de ser  $r$ -partido então existe uma partição  $V(R) = A_1 \cup \dots \cup A_r$  com no máximo  $t$  arestas de  $R$  dentro das partes. Usando o Lema 11.3.2 novamente, concluímos que é possível remover no máximo

$$t \cdot \frac{n^2}{k^2} + (\delta + 3\varepsilon)n^2 < 5\delta n^2$$

arestas de  $G$  e obter um grafo  $r$ -partido. Assim,  $G$  é  $5\delta n^2$ -perto de ser  $(\chi(H) - 1)$ -partido, como gostaríamos.  $\square$

Aplicando o lema de contagem ao invés do Lema de Imersão, obtemos, *mutatis mutandis*, a seguinte versão “supersaturada” do Teorema 11.3.3.

**Teorema 11.3.4.** *Para todo grafo  $H$  e todo  $\alpha > 0$ , existem  $\beta > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que o seguinte vale. Se  $G$  é um grafo com  $n \geq n_0$  vértices e menos que  $\beta n^{v(H)}$  cópias de  $H$  tal que*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \beta\right) \binom{n}{2},$$

então  $G$  é  $\alpha n^2$ -perto de ser  $(\chi(H) - 1)$ -partido.

Deixamos os detalhes a cargo do leitor.

### 11.3.3 Progressões aritméticas

Lembre-se do Capítulo 9 que uma progressão aritmética de tamanho  $k$ , que abreviaremos por  $k$ -PA, é uma sequência de inteiros  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$ . Nesta seção, estamos interessados em encontrar  $k$ -PAs em subconjuntos de inteiros positivos. Lembre-se que o Teorema de Van der Waerden (Teorema 9.1.5) nos diz que toda  $r$ -coloração dos inteiros positivos possui  $k$ -PAs monocromáticas com  $k$  arbitrário. Em particular, em toda  $r$ -coloração dos inteiros há uma cor com densidade pelo menos  $1/r$ . Szemerédi (1975b) provou um resultado, hoje conhecido como Teorema de Szemerédi, que diz que todo subconjunto de  $[n]$  de densidade positiva contém uma  $k$ -PA desde que  $n$  seja suficientemente grande.

**Teorema 11.3.5** (Teorema de Szemerédi). *Para todo inteiro positivo  $k$  e todo  $\alpha > 0$ , existe  $n_0$  tal que se  $n \geq n_0$  e  $A \subseteq [n]$  com  $|A| > \alpha n$ , então  $A$  contém uma  $k$ -PA.*

Vamos ilustrar a aplicação do Lema da Regularidade (Lema 11.1.3) provando uma versão mais simples do Teorema 11.3.5, nos restringindo ao caso  $k = 3$ . Esse resultado foi provado por Roth (1952).

**Teorema 11.3.6** (Teorema de Roth). *Para todo  $\varepsilon$  existe  $n_0$  tal que se  $n \geq n_0$  e  $A \subseteq [n]$  com  $|A| > \varepsilon n$ , então  $A$  contém uma 3-PA.*

Antes de provar o Teorema de Roth, vamos utilizar o Lema da Regularidade para provar um importante lema, conhecido como lema da remoção de triângulos. Informalmente, esse resultado garante que se um grafo tem “poucos” triângulos, então podemos torná-lo livre de triângulos por meio da remoção de “poucas” arestas.

**Lema 11.3.7** (Lema da remoção de triângulos). *Para todo  $\alpha > 0$ , existe  $\beta > 0$  tal que todo grafo  $G$  com  $n$  vértices e no máximo  $\beta n^3$  triângulos pode ser tornado livre de triângulo por meio da remoção de no máximo  $\alpha n^2$  arestas.*

*Demonstração.* Escolha  $0 < \delta < \alpha/3$ , defina  $\varepsilon = \delta/9$ , e aplique o lema de regularidade a  $G$  com  $m = 1/\varepsilon$ . Obtemos uma partição  $\varepsilon$ -regular

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

com  $m \leq k \leq M$ . Defina o grafo reduzido  $R$  dessa partição como anteriormente, correspondendo aos pares  $\varepsilon$ -regulares com densidade pelo menos  $\delta$ .

Suponha primeiro que existe um triângulo em  $R$ . Sejam  $A_1, A_2, A_3$  as partes correspondentes aos vértices de tal triângulo, e lembre-se que  $|A_1| = |A_2| = |A_3| \geq (1 - \varepsilon)n/k$  e que  $k \leq M$ . Pelo lema de contagem para triângulos (Lema 11.2.3), temos que  $G$  contém pelo menos

$$\frac{\delta^3}{4} \cdot \left( \frac{(1 - \varepsilon)n}{M} \right)^3 > \beta n^3$$

triângulos, em que a desigualdade final vale se escolhermos  $\beta > 0$  suficientemente pequeno (dependendo apenas de  $\delta$  e  $M$ , que dependem apenas de  $\alpha$ )

Assim, podemos assumir que  $R$  não tem triângulos. Afirmamos que podemos destruir todos os triângulos de  $G$  removendo as arestas listadas no Lema 11.3.2. Com efeito, removendo tais arestas, as arestas remanescentes são aquelas entre pares correspondentes a arestas de  $R$ . Logo, se os vértices  $\{u, v, w\}$  formam um triângulo em  $G$  e nenhuma das arestas do triângulo foi removida, então os vértices precisam estar em três partes diferentes da partição, digamos  $u \in V_i, v \in V_j$  e  $w \in V_\ell$ . Assim,  $\{i, j, \ell\}$  é um triângulo em  $R$ , um absurdo.

Finalmente, pelo Lema 11.3.2, removemos no máximo

$$(\delta + 3\varepsilon)n^2 < \alpha n^2$$

arestas de  $G$ , em que a última desigualdade segue das escolhas de  $\delta$  e  $\varepsilon$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

A prova do Teorema de Roth segue do lema da remoção de triângulos através de uma transformação entre  $k$ -AP e grafos tripartidos.

*Demonstração do Teorema de Roth (Teorema 11.3.6).* Nossa tarefa é mostrar que se  $A \subseteq [n]$  não contém uma 3-PA, então  $|A| = o(n)$ . Fixe  $\varepsilon > 0$ , suponha que  $n$  é suficientemente grande, e suponha por absurdo que  $|A| \geq \varepsilon n$ .

A ideia crucial é aplicar o lema da remoção de triângulos a um grafo específico  $G$  que “codifica” as 3-PAs de  $A$  como triângulos. Para isso, definiremos um grafo  $G$  com  $V(G) = X \cup Y \cup Z$ , em que  $X, Y$  e  $Z$  são disjuntos e  $|X| = |Y| = |Z| = 3n$ . Iremos identificar cada um desses três conjuntos com três “cópias” do conjunto  $[3n]$ , de modo que podemos somar vértices como se fossem números. As arestas de  $G$  são formadas pela união dos três conjuntos descritos abaixo:

- $E(G[X, Y]) = \{xy : x \in X, y \in Y \text{ e } y = x + a \text{ for some } a \in A\};$

- $E(G[Y, Z]) = \{yz : y \in Y, z \in Z \text{ e } z = y + a \text{ for some } a \in A\};$
- $E(G[X, Z]) = \{xz : x \in X, z \in Z \text{ e } z = x + 2a \text{ for some } a \in A\}.$

Quantos triângulos o grafo  $G$  contém? Se  $\{x, y, z\}$  são vértices de um triângulo, então  $y = x + a$ ,  $z = y + b$ , e  $z = x + 2c$  para alguns  $a, b, c \in A$ . Assim, tais elementos de  $A$  satisfazem  $a + b = 2c$ . Portanto, se  $A$  não contém 3-PA, então os únicos triângulos de  $G$  correspondem a  $a = b = c$ , o que implica que há no máximo

$$3n \cdot |A| \leq 3n^2 = o(n^3)$$

triângulos em  $G$ , pois a escolha de  $x \in X$  e  $a \in A$  determina os demais vértices. Pelo lema da remoção de triângulos (Lema 11.3.7), podemos destruir todos os triângulos de  $G$  removendo  $o(n^2)$  arestas.

Afirmamos que isso não pode ocorrer, o que concluirá a prova por contradição. Para ver tal fato, considere o seguinte conjunto de triplas “triviais” (isto é, correspondendo ao caso  $a = b = c$  acima) contidos em  $G$ :

$$\{\{x, x + a, x + 2a\} : x \in X, a \in A\}.$$

Observe que, sob a condição  $x + 2a \leq 3n$ , que é satisfeita para todo  $x \leq n$  e  $a \in A$ , tais triplas são triângulos de  $G$ . Assim, encontramos pelo menos  $n \cdot |A| \geq \varepsilon n^2$  triângulos triviais. Crucialmente, no entanto, tais triângulos são *aresta-disjuntos*! Com efeito, qualquer aresta do triângulo permite determinar o  $x \in [n]$  e o  $a \in A$  que o gerou. Assim, para destruir todos os triângulos listados, precisamos remover  $\varepsilon n^2$  arestas  $G$ , um absurdo que (como argumentado) conclui a prova.  $\square$

### 11.3.4 Números de Ramsey–Turán

Lembre-se da Seção 10.3.1 que, dado um grafo  $H$  e uma função  $k = k(n)$ , o número de Ramsey–Turán de  $H$  e  $k$  é definido por

$$\text{RT}(n, H, k) = \max \{e(G) : H \not\subset G \subset K_n \text{ e } \alpha(G) \leq k\}.$$

Em particular, escreveremos  $\text{RT}(n, H, o(n))$  para denotar (com abuso de notação) o caso em que  $k/n \rightarrow 0$  suficientemente devagar quando  $n \rightarrow \infty$ . Por exemplo, podemos escrever

$$\text{RT}(n, K_3, o(n)) = o(n^2),$$

já que, num grafo sem triângulos, a vizinhança de qualquer vértice  $v$  é um conjunto independente. Lembre-se também que vimos no Teorema 10.3.4 que, para todo  $r \geq 5$  e  $k \gg \sqrt{n \log n}$ ,

$$\text{RT}(n, K_r, k) \geq \frac{n^2}{4}.$$

Lá, obtivemos esse limitante colocando um grafo sem triângulos com número de independência no máximo  $k$  em cada uma das partes de um grafo bipartido completo. Finalmente, recorde também (do Teorema 5.5.2 e do Teorema 9.2.8) que, pelo Método Probabilístico, existem grafos sem triângulo com número de independência pequeno.

Falta, portanto, determinar se  $\text{RT}(n, K_4, o(n)) = o(n^2)$ . O seguinte limitante superior, provado por Szemerédi (1972), foi uma das primeiras aplicações do lema de regularidade.

**Teorema 11.3.8.** *Vale que*

$$\text{RT}(n, K_4, o(n)) \leq \frac{n^2}{8} + o(n^2).$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Sejam  $\delta > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices,

$$e(G) \geq \frac{n^2}{8} + 2\delta n^2$$

e  $\alpha(G) = o(n)$ . Iremos mostrar que  $K_4 \subset G$ .

Para tal, escolha  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno (dependendo de  $\delta$ ), e aplique o Lema da Regularidade a  $G$  com  $m = 1/\varepsilon$ . Obtemos uma partição  $\varepsilon$ -regular

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

com  $m \leq k \leq M$ . Defina o grafo reduzido  $R$  correspondente a essa partição como de costume, em que arestas de  $R$  representam pares  $\varepsilon$ -regulares com densidade pelo menos  $\delta$ .

A essa altura, já sabemos que se  $K_4 \subset R$  então é possível deduzir que  $K_4 \subset G$ . Nesse caso, no entanto, precisaremos de extrair mais informação a respeito da estrutura de  $R$ . O primeiro passo é a seguinte afirmativa, cuja prova é similar à do Lema 11.2.1.

**Afirmativa 11.3.9.** *Se  $K_3 \subset R$ , então  $K_4 \subset G$ .*

*Demonstração da afirmativa.* Sejam  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  as partes correspondentes ao vértice do triângulo contido em  $R$ . Como os pares  $(A_1, A_2)$  e  $(A_1, A_3)$  são  $\varepsilon$ -regulares e têm densidade pelo menos  $\delta$ , decorre do Lema 11.2.2 que existe um vértice  $v \in A_1$  com pelo menos  $(\delta - \varepsilon)|A_i|$  vizinhos em  $A_i$  para todo  $i \in \{2, 3\}$ .

Seja  $X_i$  o conjunto de vizinhos de  $v$  em  $A_i$ . Como o par  $(A_2, A_3)$  é  $\varepsilon$ -regular, temos que  $d(X_2, X_3) \geq \delta - \varepsilon > 0$  e, portanto, existe um vértice  $w \in X_2$  com pelo menos

$$(\delta - \varepsilon)|X_3| \geq (\delta - \varepsilon)^2|A_3| \geq \frac{(\delta - \varepsilon)^2}{k} \cdot n$$

vizinhos em  $X_3$ . Como  $k \leq M$  e  $\alpha(G) = o(n)$ , concluímos que existe uma aresta no conjunto  $N_G(w) \cap X_3$ , e essa aresta, juntamente com  $v$  e  $w$ , forma uma cópia de  $K_4$  e  $G$ , como desejávamos.  $\square$

Pelo Teorema de Mantel, vale que  $e(R) \leq k^2/4$ . Apenas usando tal fato, no entanto, concluímos apenas que  $e(G) \leq n^2/4 + o(n^2)$  (como fizemos na prova do Teorema 11.3.1). Para obter um fator de 2 adicional, iremos precisar da seguinte afirmativa.

**Afirmativa 11.3.10.** *Se existe uma aresta  $ij \in E(R)$  tal que*

$$d(V_i, V_j) \geq \frac{1}{2} + \delta,$$

*então  $K_4 \subset G$ .*

*Demonstração da afirmativa.* Como o par  $(V_i, V_j)$  é  $\varepsilon$ -regular e  $d(V_i, V_j) \geq 1/2 + \delta$ , decorre do Lema 11.2.2 que existe um conjunto  $U \subset V_i$  de tamanho pelo menos  $n/2k$  tal que todo vértice  $u \in U$  tem pelo menos

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}\right)|V_j|$$

vizinhos em  $V_j$ . Como  $|V_i| \geq n/2k \geq n/2M$  e  $\alpha(G) = o(n)$ , existe uma aresta  $uv \in G[U]$ .

Pelo Princípio da Casa dos Pombos (ou por inclusão-exclusão), os vértices  $u$  e  $v$  têm pelo menos  $\delta|V_j|$  vizinhos comuns em  $V_j$ . Como  $|V_j| \geq n/2M$  e  $\alpha(G) = o(n)$ , existe uma aresta  $xy$  na vizinhança comum de  $u$  e  $v$ . Assim, o conjunto  $\{u, v, x, y\}$  é uma clique em  $G$ , demonstrando a afirmativa.  $\square$



Com as Afirmativas 11.3.9 e 11.3.10, concluímos que se  $G$  é  $K_4$ -livre, então  $e(R) \leq k^2/4$ , e cada aresta de  $R$  corresponde a um par de densidade no máximo  $1/2 + \delta$ . Como  $k \geq m = 1/\varepsilon$ , uma aplicação do Lema 11.3.2 mostra que

$$e(G) \leq \left(\frac{1}{2} + \delta\right) \frac{n^2}{k^2} \cdot e(R) + (\delta + 3\varepsilon)n^2 < \frac{n^2}{8} + 2\delta n^2,$$

uma contradição. Isso conclui a prova.  $\square$

Surpreendentemente, alguns anos após a prova dada por Szemerédi para o Teorema 11.3.8, uma construção de Bollobás e Erdős (1976) mostrou que o limitante obtido é assintoticamente justo.

**Teorema 11.3.11.** *Seja  $k = k(n)$  tal que  $k/n \rightarrow 0$  suficientemente devagar. Então*

$$\text{RT}(n, K_4, k) = \frac{n^2}{8} + o(n^2).$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

O grafo usado para provar o limitante inferior acima ficou conhecido como o grafo de Bollobás–Erdős. Ele é definido geometricamente, e seus vértices consistem de pontos coloridos numa esfera de dimensão alta. As arestas dependem das cores e produtos escalares dos pontos correspondentes. O leitor interessado pode consultar Fox, Loh e Zhao 2015 para uma descrição detalhada do grafo e uma análise das propriedades do mesmo.

### 11.3.5 Teorema de Chvátal, Rödl, Szemerédi, e Trotter

Uma última aplicação do Lema da Regularidade diz respeito a estimar números de Ramsey de grafos com grau máximo limitado por uma constante. Chvátal et al. (1983) provaram que o número de Ramsey de todo grafo  $H$  de grau limitado é linear na quantidade de vértices de  $H$ . Lembre-se que  $r(H)$  é o menor  $n$  tal que em toda coloração das arestas de  $K_n$  com duas cores temos uma cópia de  $H$  monocromática.

A ideia da prova é analisar um certo grafo reduzido  $R$  associado a uma partição  $\mathcal{P}$  que é  $\varepsilon$ -regular de um grafo completo  $G$  suficientemente grande, cujas arestas foram arbitrariamente coloridas com duas cores (digamos, azul e vermelho). Para cada par  $\varepsilon$ -regular  $(A, B)$  de  $\mathcal{P}$ , dizemos que  $(A, B)$  é vermelho se pelo menos metade das arestas são vermelhas; e dizemos que  $(A, B)$  é azul se mais da metade das arestas sejam azuis. Sem perda de generalidade, suponha que a maioria dos

pares regulares são azuis. Utilizando o Lema de Imersão, conseguiremos mostrar que o subgrafo de  $G$  formado somente pelas arestas entre pares de  $\mathcal{P}$  que são azuis contém uma cópia de  $H$ . Para aplicar o Lema de Imersão, vamos utilizar novamente o Teorema de Turán.

**Teorema 11.3.12** (Chvátal, Rödl, Szemerédi e Trotter). *Para todo  $\Delta \in \mathbb{N}$ , existe  $c(\Delta) > 0$  tal que para todo grafo  $H$  com  $\Delta(H) \leq \Delta$ , temos*

$$r(H) \leq c(\Delta) \cdot v(H).$$

*Demonstração.* Fixe  $\Delta > 0$ , e seja  $H$  um grafo com  $\Delta(H) \leq \Delta$ . Aplicaremos o Lema de Imersão para grafos de grau limitado (Lema 11.2.9) com parâmetros  $d = \Delta$  e  $\delta = 1/2$  para obter constantes  $\varepsilon > 0$  e  $\gamma > 0$ .

Para o restante da prova, fixamos um grafo  $K_n$  com  $n = c \cdot v(H)$ , em que  $c = c(\Delta)$  é suficientemente grande. Considere uma coloração arbitrária  $\varphi$  das arestas de  $K_n$  com cores vermelho e azul, e sejam  $G_r$  e  $G_b$  os subgrafos geradores de  $K_n$  que contêm, respectivamente, somente arestas vermelhas e somente arestas azuis em  $\varphi$ .

Tome  $m = r(K_{\Delta+1})$ , o número de Ramsey do grafo  $K_{\Delta+1}$ . Aplicando o Lema da Regularidade (Lema 11.1.3) ao grafo  $G_r$ , obtemos uma partição  $\varepsilon$ -regular

$$V(G_r) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

com  $m \leq k \leq M$ . Segue da definição de par regular que tal partição é também uma partição  $\varepsilon$ -regular para o grafo  $G_b$ .

Seja  $R$  o grafo reduzido associado à essa partição com parâmetros  $\varepsilon$  e 0, isto é,  $V(R) = \{1, \dots, k\}$  e  $ij \in E(R)$  se e somente se  $(V_i, V_j)$  é  $\varepsilon$ -regular (não há restrição sobre a densidade do par). Note que

$$e(R) \geq \binom{k}{2} - \varepsilon k^2 > t_{m-1}(k),$$

e portanto  $K_m \subset R$  pelo Teorema de Turán.

Sejam  $A_1, \dots, A_m$  as partes correspondentes aos vértices de uma cópia de  $K_m$  em  $R$ , de modo que os pares  $(A_i, A_j)$  são  $\varepsilon$ -regulares para todos  $1 \leq i < j \leq m$ . Definiremos uma coloração  $\xi$  das arestas de  $K_m$  declarando que  $\xi(ij)$  é vermelho se

$$d_{G_r}(V_i, V_j) \geq \frac{1}{2}$$

ou azul caso contrário. Como  $m = r(K_{\Delta+1})$ , temos que  $\xi$  contém uma clique monocromática de tamanho  $\Delta + 1$ .

Sem perda de generalidade, suponha que  $\xi$  contém um  $K_{\Delta+1}$  vermelho, e sejam  $A_1, \dots, A_{\Delta+1}$  as partes correspondentes. Nessas condições, o grafo induzido

$$G' = G[A_1 \cup \dots \cup A_{\Delta+1}]$$

satisfaz  $G' \in \mathcal{G}(K_{\Delta+1}, n', \varepsilon, 1/2)$  para  $n' = |V_1| = \dots = |V_k| \geq n/2M$ . Assim, se escolhermos  $c = c(\Delta)$  suficientemente grande (em particular tal que  $c \geq 2M/\gamma$ ), então

$$v(H) \leq \frac{n}{c(\Delta)} \leq \frac{\gamma n}{2M} \leq \gamma n'.$$

Logo, pelo Lema 11.2.9, temos que  $H \subset G' \subset G$ , como queríamos.  $\square$

## 11.4 Demonstração do Lema da Regularidade

A prova do Lema da Regularidade (Lema 11.1.3) é uma prova conceitualmente simples. Iniciamos esta seção discutindo de uma maneira informal e intuitiva as ideias envolvidas na prova, para daí partirmos para o detalhamento dessas ideias.

Lembre-se que o Lema da Regularidade garante a existência de uma partição  $\varepsilon$ -regular com quantidade limitada de partes. Para provar esse resultado para um grafo  $G$ , vamos começar com uma equipartição arbitrária  $\mathcal{P}_0$  de  $V(G)$  em uma quantidade constante de partes. Caso a partição  $\mathcal{P}_0$  não seja  $\varepsilon$ -regular, nós vamos “refinar”  $\mathcal{P}_0$ , dividindo as classes de  $\mathcal{P}_0$  em classes menores, de modo que obtemos uma equipartição  $\mathcal{P}_1$  que é “mais próxima” de ser  $\varepsilon$ -regular que a equipartição  $\mathcal{P}_0$ , i.e., as arestas entre a maioria das classes de  $\mathcal{P}_1$  estão melhores distribuídas do que a maioria das classes em  $\mathcal{P}_0$ . Iremos garantir que  $\mathcal{P}_1$  tenha uma quantidade constante de classes. Assim, aplicando essa ideia repetidamente, obtemos uma sequência de equipartições  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ , tal que  $\mathcal{P}_k$  é  $\varepsilon$ -regular.

Observe que, no Lema da Regularidade, queremos que, para todo  $\varepsilon > 0$  e todo inteiro positivo  $m$ , existia um inteiro  $M$  que dependa somente de  $\varepsilon$  e  $m$  tal que a equipartição  $\varepsilon$ -regular obtida tenha no máximo  $M$  classes. Portanto, para que a ideia de refinamentos sucessivos discutida no parágrafo anterior funcione, precisamos garantir que após uma quantidade constante  $k$  de refinamentos obtemos a equipartição  $\varepsilon$ -regular  $\mathcal{P}_k$ . A partir desse ponto, tornaremos essa ideia de prova precisa.

Para mensurar o quão próxima uma partição  $\mathcal{P}$  está de ser uma partição  $\varepsilon$ -regular, definimos a seguinte noção de densidade, chamada de *média quadrática* de uma partição.

**Definição 11.4.1.** Dado um grafo  $G$  com  $n$  vértices e uma  $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ , definimos a média quadrática  $d_2(V_i, V_j)$  do par  $(V_i, V_j)$ , para  $1 \leq i < j \leq k$ , como

$$d_2(V_i, V_j) = \frac{e(V_i, V_j)^2}{|V_i||V_j|n^2}.$$

Ademais, a média quadrática  $d_2(\mathcal{P})$  da partição  $\mathcal{P}$  é definida como

$$d_2(\mathcal{P}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} d_2(V_i, V_j).$$

Observe que, como  $d(V_i, V_j) \leq 1$ , temos que  $d_2(\mathcal{P}) \leq 1$ .

No restante desta seção, sempre estamos considerando um grafo  $G$  com  $n$  vértices. Uma partição  $\mathcal{P}'$  de  $V(G)$  *refina* uma partição  $\mathcal{P}$  de  $V(G)$  se toda classe de  $\mathcal{P}$  é uma união de classes de  $\mathcal{P}'$ . Dizemos também que  $\mathcal{P}'$  é um *refinamento* de  $\mathcal{P}$ . Começamos mostrando que, dada uma partição  $\mathcal{P}$ , a média quadrática  $d_2(\mathcal{P})$  nunca é maior que a média quadrática de um refinamento de  $\mathcal{P}$ .

**Lema 11.4.2.** *Sejam  $G$  um grafo e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $V(G)$ . Para todo refinamento  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  temos que  $d_2(\mathcal{P}') \geq d_2(\mathcal{P})$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  uma partição de  $V(G)$ . Comece notando que, como todo refinamento  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  pode ser obtido de sucessivos refinamentos em que somente uma classe de  $\mathcal{P}$  é particionada em 2 classes, podemos assumir que  $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus V_1) \cup \{X \cup Y\}$ , em que  $X$  e  $Y$  são disjuntos e tais que  $V_1 = X \cup Y$ .

Para todo  $2 \leq i \leq V_k$ , temos

$$\begin{aligned} d_2(V_1, V_i) &= \frac{e(V_1, V_i)^2}{|V_1||V_i|n^2} = \frac{(e(X, V_i) + e(Y, V_i))^2}{(|X| + |Y|)|V_i|n^2} \\ &= \frac{e(X, V_i)^2}{|X||V_i|n^2} + \frac{e(Y, V_i)^2}{|Y||V_i|n^2} \\ &= d_2(X, V_i) + d_2(Y, V_i). \end{aligned} \tag{11.1}$$

Utilizando a definição de média quadrática e (11.1), temos

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}') &= d_2(X, Y) + \sum_{2 \leq i < j \leq k} d_2(V_i, V_j) + \sum_{2 \leq i \leq k} (d_2(X, V_i) + d_2(Y, V_i)) \\ &= d_2(X, Y) + \sum_{2 \leq i < j \leq k} d_2(V_i, V_j) + \sum_{2 \leq i \leq k} d_2(V_1, V_i) \\ &\geq d(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

que conclui a prova.  $\square$

Para que a estratégia de prova do Lema da Regularidade discutida anteriormente funcione, precisamos garantir que, dada uma partição  $\mathcal{P}$  que não é  $\varepsilon$ -regular, sempre exista um refinamento  $\mathcal{P}'$  cuja média quadrática é razoavelmente maior que a média quadrática de  $\mathcal{P}$ . Começamos com um resultado simples que garante um refinamento como desejado para um par que não é  $\varepsilon$ -regular.

**Lema 11.4.3.** *Sejam  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $V(G)$ . Se  $(X, Y)$  é um par de  $\mathcal{P}$  que não é  $\varepsilon$ -regular, então existem partições  $\{X_1, X_2\}$  de  $X$  e  $\{Y_1, Y_2\}$  de  $Y$  tais que*

$$\sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r, Y_s)^2 \geq d(X, Y)^2 + \varepsilon^4.$$

*Demonstração.* Dado um par  $(X, Y)$  de  $\mathcal{P}$  que não é  $\varepsilon$ -regular, sabemos que existem  $X_1 \subseteq X$  e  $Y_1 \subseteq Y$  com  $|X_1| \geq \varepsilon|X|$  e  $|Y_1| \geq \varepsilon|Y|$  tais que  $|d(X_1, Y_1) - d(X, Y)| > \varepsilon$ . Seja  $X_2 = X \setminus X_1$  e  $Y_2 = Y \setminus Y_1$ . Assim, temos que

$$\varepsilon^4 \leq \sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} (|d(X_1, Y_1) - d(X, Y)|)^2.$$

Portanto, pela desigualdade acima e notando que  $\sum_{1 \leq r, s \leq 2} \left( \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r, Y_s) \right) = d(X, Y)$ , temos

$$\varepsilon^4 \leq \sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r, Y_s)^2 - d(X, Y)^2,$$

de onde concluímos que

$$\sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r, Y_s)^2 \geq d(X, Y)^2 + \varepsilon^4.$$

$\square$

Ainda precisamos mostrar como obter um refinamento  $\mathcal{P}'$  cuja média quadrática é razoavelmente maior que a média quadrática de  $\mathcal{P}$ . Além disso, precisamos limitar a quantidade de classes do refinamento  $\mathcal{P}'$ . O próximo lema formaliza esses fatos.

**Lema 11.4.4.** *Sejam  $G$  um grafo com  $n$  vértices e seja  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  uma partição de  $V(G)$  que não é  $\varepsilon$ -regular. Então existe um refinamento  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  tal que valem as seguintes afirmações.*

$$(i) \quad d_2(\mathcal{P}') \geq d_2(\mathcal{P}) + \varepsilon^5;$$

$$(ii) \quad |\mathcal{P}'| \leq k2^{k-1}.$$

*Demonstração.* Para qualquer par  $(V_i, V_j)$  de  $\mathcal{P}$  que não é  $\varepsilon$ -regular, sabemos que existem  $V'_i \subseteq V_i$  e  $V'_j \subseteq V_j$  com  $|V'_i| \geq \varepsilon|V_i|$  e  $|V'_j| \geq \varepsilon|V_j|$  tais que  $|d(V'_i, V'_j) - d(V_i, V_j)| > \varepsilon$ .

Defina, para todo par  $(V_i, V_j)$  que não é  $\varepsilon$ -regular, os seguintes conjuntos:  $V_i^{1,j} = V'_i$  e  $V_i^{2,j} = V_i \setminus V'_i$ ; e  $V_j^{1,i} = V'_j$  e  $V_j^{2,i} = V_j \setminus V'_j$ . Para construir a partição  $\mathcal{P}'$  desejada, iremos refinar a partição formada pelos conjuntos definidos acima.

Pelo Lema 11.4.3, sabemos que, para cada par  $(V_i, V_j)$  que não é  $\varepsilon$ -regular, existem uma partição  $\{V_i^{1,j}, V_i^{2,j}\}$  de  $V_i$  e uma partição  $\{V_j^{1,i}, V_j^{2,i}\}$  de  $V_j$  tais que

$$\sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|V_i^{r,j}| |V_j^{s,i}|}{|V_i| |V_j|} d(V_i^{r,j}, V_j^{s,i})^2 \geq d(V_i, V_j)^2 + \varepsilon^4. \quad (11.2)$$

Vamos agora construir a partição  $\mathcal{P}'$  desejada. Para cada  $V_i$  de  $\mathcal{P}$ , faremos uma partição  $\mathcal{W}_i = \{W_{i,1}, \dots, W_{i,w_i}\}$  de  $V_i$  em que  $w_i \leq 2^{k-1}$ . Para cada  $W \in \mathcal{W}$ , temos que  $u, v \in W$  se e somente se, para todo  $1 \leq j \leq k$  com  $j \neq i$ , vale que  $u, v \in V_i^{1,j}$  ou  $u, v \in V_i^{2,j}$ . Note que, como existem  $k-1$  possíveis classes que formam pares irregulares com  $V_i$ , de fato temos que  $w_i \leq 2^{k-1}$ . Portanto, sabemos que  $|\mathcal{P}'| \leq k2^{k-1}$ .

Pelo Lema 11.4.2 e fazendo uso de (11.2), para cada par  $(V_i, V_j)$  de  $\mathcal{P}$  que não

é  $\varepsilon$ -regular, temos que

$$\begin{aligned}
 d_2(\mathcal{P}') &\geq \sum_{1 \leq i < j \leq k} \sum_{r \in [w_i]} \sum_{s \in [w_j]} d_2(W_{i,r}, W_{j,s}) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} \sum_{r \in [w_i]} \sum_{s \in [w_j]} \frac{|W_{i,r}| |W_{j,s}|}{n^2} d(W_{i,r}, W_{j,s})^2 \\
 &\geq \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \sum_{r \in [2]} \sum_{s \in [2]} \frac{|V_i^{r,j}| |V_j^{s,i}|}{|V_i| |V_j|} d(V_i^{r,j}, V_j^{s,i})^2 \\
 &\geq \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 + \varepsilon^4 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \\
 &\geq d(\mathcal{P}) + \varepsilon^5,
 \end{aligned}$$

concluindo a prova do lema. □

Temos em mãos todas as ferramentas para a prova do Lema da Regularidade, que apresentamos abaixo. Lembre-se que o lema afirma o seguinte: para todos  $\varepsilon > 0$  e  $m \in \mathbb{N}$ , existem  $M$  e  $n_0$  tais que para qualquer grafo  $G$  com pelo menos  $n_0$  vértices, existe uma partição  $\varepsilon$ -regular  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$  em que  $m \leq k \leq M$ .

*Demonstração do Lema da Regularidade (Lema 11.1.3).* Começamos com uma equipartição  $\mathcal{P}_0 = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$  em que  $|V_0| = n - m \lfloor n/m \rfloor$ . Caso essa partição não seja  $\varepsilon$ -regular, existe um refinamento  $\mathcal{P}_1$  de  $\mathcal{P}_0$  tal que  $d_2(\mathcal{P}_1) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5$  e  $|\mathcal{P}_1| < m2^m$ . Para obter uma equipartição a partir de  $\mathcal{P}_1$ , formamos a partição  $\mathcal{P}'_1$  obtida por meio da partição de cada classe de  $\mathcal{P}_1$  em conjuntos de tamanho exatamente  $(\varepsilon^6/2)n/|\mathcal{P}_1|$  e uma “sobra” de tamanho menor que  $(\varepsilon^6/2)n/|\mathcal{P}_1|$ . Cada uma dessas “sobras” é adicionada ao conjunto  $V_0$  dos vértices excepcionais, notando que esse conjunto aumenta de no máximo  $(\varepsilon^6/2)n$  vértices. Ademais, temos que  $|\mathcal{P}'_1| \leq m2^{m+1}/\varepsilon^7$  e, pelo Lema 11.4.2, sabemos também que  $d_2(\mathcal{P}'_1) \geq d_2(\mathcal{P}_1) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5$ .

Enquanto não obtivermos uma partição  $\varepsilon$ -regular, podemos continuar refinando partições, obtendo uma sequência de equipartições  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ . Mas esse processo só é possível por uma certa quantidade de passos. De fato, como  $d_2(\mathcal{P}_k) < 1$ , sabemos que

$$1 > d_2(\mathcal{P}_k) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5 k.$$

Portanto,  $k < \varepsilon^{-5}$ . Assim, em no máximo  $\varepsilon^{-5}$  rodadas de refinamentos, obtemos uma equipartição  $\mathcal{P}$  cuja quantidade de classes é limitada superiormente por uma constante  $M$ , que só depende de  $\varepsilon$  e  $m$ . Ademais, o conjunto excepcional de  $\mathcal{P}$  tem no máximo  $m - 1 + (1/\varepsilon^5)(\varepsilon^6 n/2) < \varepsilon n$  vértices, concluindo a prova do lema.  $\square$

Vale ressaltar que, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o limitante superior dado pela prova acima é da forma

$$M(m, \varepsilon) \leq 2^{2^{\dots 2}},$$

uma torre de 2 de altura polinomial em  $\varepsilon^{-1}$ . Talvez surpreendentemente, Gowers (1997) mostrou que cotas do tipo torre são necessárias. Mais precisamente, ele mostrou que existem grafos tais que o número de partes em qualquer partição  $\varepsilon$ -regular é pelo menos uma torre de 2 de altura  $\varepsilon^{-1/16}$ . Uma prova mais simples desse resultado foi dada por Moshkovitz e Shapira (2016).

## 11.5 Exercícios

**Exercício 11.5.1.** Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo 3-uniforme com a seguinte propriedade: qualquer conjunto de seis vértices contém no máximo três arestas de  $\mathcal{H}$ . Prove que  $e(\mathcal{H}) = o(n^2)$ .

**Exercício 11.5.2.** Mostre que o número de grafos sem triângulo com conjunto de vértices  $[n]$  é  $2^{n^2/4 + o(n^2)}$ .

**Exercício 11.5.3.** Mostre que quase todos os grafos sem triângulo estão  $o(n^2)$ -próximos de serem bipartidos.

**Exercício 11.5.4.** O teorema de Thomassen afirma que para todo  $\alpha > 0$  existe  $C(\alpha) > 0$  tal que vale o seguinte: se  $G$  é um grafo sem triângulos com  $n$  vértices, então

$$\delta(G) > \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)n \quad \Rightarrow \quad \chi(G) \leq C(\alpha).$$

(a) Use o lema de regularidade para mostrar que existe uma partição  $\varepsilon$ -regular

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

com um número limitado de partes tal que  $\delta(R) > (1/3 + \alpha/2)k$ .



(b) Mostre que para todo  $I \subset [k]$ , o conjunto

$$X_I := \left\{ v \in V(G) : |N(v) \cap V_i| \geq \beta |V_i| \Leftrightarrow i \in I \right\}$$

é independente.

(c) Deduza o teorema de Thomasson.

**Exercício 11.5.5.** O Teorema de Mantel para  $G(n, p)$  afirma que se  $p \gg 1/\sqrt{n}$  então, com alta probabilidade, todo subgrafo  $G \subset G(n, p)$  com

$$e(G) \geq \left( \frac{1}{2} + \varepsilon \right) p \binom{n}{2}$$

contém um triângulo.

(a) Mostre que a conclusão não vale se  $p \ll 1/\sqrt{n}$ .

(b) Prove o teorema para  $p = 1/2$ .

# 12

## *Método dos Contêineres*

---

Neste capítulo, iremos estudar problemas dos seguintes tipos:

- Quantos grafos  $H$ -livres com  $n$  vértices existem?
- Qual a estrutura típica de um grafo  $H$ -livre com  $n$  vértices e  $m$  arestas?
- Quantas arestas o maior subgrafo  $H$ -livre de  $G(n, p)$  possui?
- Para quais funções  $p = p(n)$  vale que  $G(n, p) \rightarrow H$  com alta probabilidade?

Surpreendentemente, esses problemas (e muitos outros) podem ser atacados usando um método comum que envolve o estudo de conjuntos independentes em hipergrafos. Iremos introduzir uma técnica, conhecido como o *método dos contêineres*, para estudar tais conjuntos, e daremos várias aplicações simples.

Como o método geral de contêineres (para hipergrafos) pode parecer um pouco confuso à primeira vista, iremos primeiramente, na Seção 12.1, discutir o método de contêineres para grafos, que é um pouco mais acessível. Iremos então, nas seções Seções 12.3 e 12.4 discutir o método para hipergrafos 3-uniformes e dar várias aplicações. Em seguida, faremos, na Seção 12.5, uma rápida discussão do lema de contêineres no caso geral de hipergrafos  $k$ -uniformes. Concluiremos o

capítulo com as demonstrações dos lemas de contêineres para o caso 3-uniforme na Seção 12.6.

## 12.1 Conjuntos independentes em grafos

Como vimos no Capítulo 2, dado um grafo  $G$ , um conjunto  $X \subseteq V(G)$  é dito independente se não existe nenhuma aresta de  $G$  inteiramente contida em  $X$ , isto é, se  $e(G[X]) = 0$ . O principal objetivo deste seção é introduzir um modo – o método dos contêineres – de agrupar conjuntos independentes em blocos que chamaremos de *contêineres*. Tal método foi desenvolvido por Sapozhenko no começo dos anos 2000, mas foi primeiramente usado por Kleitman e Winston 1982 na prova do seguinte resultado.

**Teorema 12.1.1.** *Existem  $2^{O(n^{3/2})}$  grafos sem  $C_4$  no conjunto de vértices  $[n]$ .*

Para contextualizar esse teorema, lembre-se dos Teoremas 3.2.1 e 8.8.1 que

$$\text{ex}(n, C_4) = \Theta(n^{3/2}),$$

e note que se  $G$  é um grafo  $C_4$ -livre, então todo subgrafo de  $G$  é também  $C_4$ -livre. Como há  $2^{e(G)}$  subgrafos de  $G$  com conjunto de vértices  $V(G)$ , decorre que o número de grafos sem  $C_4$  é pelo menos  $2^{cn^{3/2}}$  para alguma constante  $c > 0$ . Por outro lado, qualquer grafo sem  $C_4$  tem no máximo  $\text{ex}(n, C_4)$  arestas e, portanto, há no máximo

$$\sum_{m=0}^{\text{ex}(n, C_4)} \binom{\binom{n}{2}}{m} \leq (n^2)^{\text{ex}(n, C_4)+1} = 2^{O(n^{3/2} \log n)}$$

grafos sem  $C_4$  com conjunto de vértices  $[n]$ . O Teorema 12.1.1, que confirmou uma conjectura de Erdős, mostra que a cota inferior está mais próxima da verdade. Na próxima subseção, iremos introduzir o algoritmo que Kleitman e Winston usaram para provar o Teorema 12.1.1.

### 12.1.1 Algoritmo de Kleitman e Winston

Imagine que você é um espião e se infiltrou numa reunião secreta. Tanto você quanto o centro de espionagem conhecem o grafo de inimidade das pessoas. Nesse grafo, duas pessoas estão conectadas por uma aresta se elas nunca frequentassem

uma mesma reunião. Seu objetivo é informar ao centro, o mais rápido possível, a lista de todas as pessoas que estão na reunião. Você quer fazê-lo de modo eficiente, pois sua comunicação pode ser cortada a qualquer momento. Além disso, você quer que a informação parcialmente transmitida seja útil mesmo que sua comunicação seja interrompida prematuramente. Será que existe como explorar o conhecimento do grafo de inimizade para melhorar a eficiência da comunicação?

Dizemos que uma pessoa está *definida* caso a central saiba se ela está ou não presente na reunião. Seja  $P_1$  a pessoa com o maior número de inimigos. Se  $P_1$  estiver na reunião, faz sentido que o espião comunique isso primeiro à central. Assim, se a comunicação for interrompida logo depois disso, a central saberá que muitas pessoas (a pessoa mencionada e seus inimigos) estão definidas. Por outro lado, se  $P_1$  não estiver na reunião, podemos descartá-la do grafo e repetir o processo para a pessoa  $P_2$  com mais inimigos no grafo restante. Em algum momento, a  $k$ -ésima pessoa a considerada,  $P_k$ , estará na reunião. Se a central conhecer a estratégia de comunicação do espião, conseguirá, ao ouvir que  $P_k$  está na reunião, deduzir não só que os inimigos de  $P_k$  não estão na reunião, mas também que as pessoas  $P_1, \dots, P_{k-1}$  não estão na reunião. De fato, se alguma dessas estivesse, o espião, preocupado com falhas de comunicação, teria avisado sobre alguma delas primeiro.

Dando nomes aos bois, seja  $G$  o grafo de inimizade. Para lidar com casos de desempate na versão formal do procedimento descrito acima, assumiremos que o conjunto de vértices de  $G$  está ordenado linearmente por uma ordem total, a ser usada para desempates. Pela definição do grafo de inimizade, o conjunto de pessoas que participa da reunião é um conjunto independente  $I \subseteq V(G)$ , isto é, um conjunto em que nenhum par de vértices está conectado.

Para comunicar o conjunto independente, usaremos o seguinte procedimento, chamado de *algoritmo de Kleitman–Winston*. Dado um grafo fixo  $G$ , esse algoritmo recebe um conjunto independente  $I \subseteq V(G)$  a ser transmitido. Além disso, ele depende de um parâmetro  $L$ , o limite de iterações.

O algoritmo define, para  $0 \leq i \leq L$ , subgrafos de  $G$  denotados por  $G^i$ . Define também subconjuntos  $S^i \subseteq I$ , que correspondem às pessoas que a central sabe que definitivamente estão em  $I$  antes de receber a informação da  $i$ -ésima iteração, e subconjuntos  $T^i \subseteq V(G) \setminus I$ , que correspondem às pessoas que a central sabe que definitivamente *não* estão em  $I$  antes de receber a informação da  $i$ -ésima iteração. Inicializamos

$$G^0 = G, \quad S^0 = \emptyset, \quad T^0 = \emptyset.$$

Para  $i = 0, \dots, L-1$ , a  $i$ -ésima iteração do algoritmo consiste dos passos abaixo:

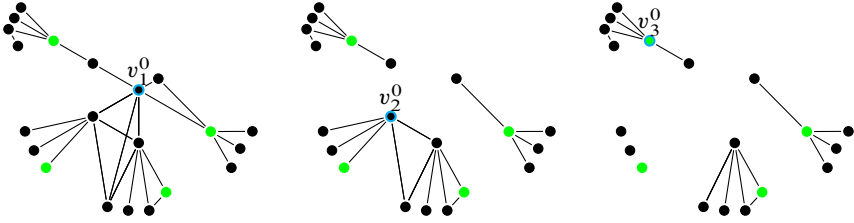


Figura 12.1: Passo (2a) do algoritmo para o conjunto  $I$  (em verde). Vértices mais acima na figura aparecem antes na ordem total fixada que usamos para desempates.

- (1) Se  $I \cap V(G^i) = \emptyset$ , o algoritmo define os conjuntos

$$S^L = S^i \quad \text{e} \quad T^L = T^i \cup V(G^i),$$

define  $G^L$  como o grafo sem vértices, e termina.

- (2a) Caso o algoritmo não tenha terminado até agora, escreva

$$V(G^i) = \{v_1^i, \dots, v_{n(i)}^i\}$$

de modo que, para cada  $1 \leq j \leq n(i)$ ,  $v_j^i$  seja o vértice de grau máximo do subgrafo induzido<sup>1</sup>  $G^i - \{v_1^i, \dots, v_{j-1}^i\}$ ; caso haja mais de um vértice de grau máximo, escolhemos o maior deles na ordem total fixada.

- (2b) Seja  $k(i)$  o menor índice tal que  $v_{k(i)}^i \in I$ . O algoritmo transmite  $v_{k(i)}^i$ , e define os conjuntos

$$S^{i+1} = S^i \cup \{v_{k(i)}^i\},$$

$$T^{i+1} = T^i \cup \{v_1^i, \dots, v_{k(i)-1}^i\} \cup N_{G^i}(v_{k(i)}^i).$$

e o grafo  $G^{i+1} = G^i - (S^{i+1} \cup T^{i+1})$ .

Note que os vértices de  $G^i$  correspondem exatamente às pessoas tais que a central ainda não consegue determinar suas presenças na reunião. Por conveniência, definiremos ainda

$$S(I) = S^L(I) \quad \text{e} \quad C(I) = V(G) \setminus T^L(I).$$

<sup>1</sup>Lembre-se que, dado um conjunto  $X \subseteq V(G)$ , escrevemos  $G - X$  para denotar o subgrafo induzido  $G[V(G) \setminus X]$ .

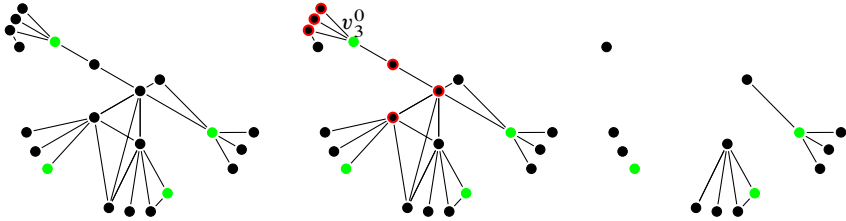


Figura 12.2: A primeira iteração, cujo passo (2a) foi detalhado na Figura 12.1. Estão representados  $G^0$ ,  $T^1$  (em vermelho) e  $G^1$ .

Chamamos  $S(I)$  de *impressão digital* ou *assinatura* de  $I$ , e  $C(I)$  de *contêiner* de  $I$ . Observando que  $I \cap T^L(I) = \emptyset$  por construção, temos que

$$S(I) \subseteq I \subseteq C(I).$$

Note que a informação obtida até o  $L$ -ésimo passo do algoritmo não é suficiente para determinar se os vértices de  $C(I) \setminus S(I)$  estão ou não em  $I$ .

Discutiremos a importância de tais funções e a utilidade prática do algoritmo na subseção seguinte.

### 12.1.2 Análise do algoritmo

Denotaremos por  $\mathcal{I}(G)$  a família de conjuntos independentes do grafo  $G$ . Fixados  $G$  e a ordem total em  $V(G)$ , podemos fazer algumas observações sobre o algoritmo.

**Lema 12.1.2.** *Suponha que o algoritmo é executado num  $I \in \mathcal{I}(G)$  e transmite um conjunto  $S(I)$ . Então, para qualquer  $I' \in \mathcal{I}(G)$  com  $S(I) = S(I')$ , executar o algoritmo em  $I'$  calcula os mesmos conjuntos  $S^i$ ,  $T^i$  e grafos  $G^i$ .*

*Demonstração.* A prova será por indução em  $i$ . A afirmação vale para  $i = 0$ ; suponha que ela vale para algum  $0 \leq i \leq L - 1$ . Então as ordens obtidas no passo (2a) na  $i$ -ésima iteração das duas execuções são iguais.

Suponha que vértices diferentes  $u \in I$  e  $v \in I'$  são transmitidos no  $i$ -ésimo passo das duas execuções do algoritmo. Suponha também, sem perda de generalidade, que  $u$  ocorre antes de  $v$  na ordem dos vértices de  $G^i$  dada pelo passo (2a) do algoritmo. Então  $u \in S(I)$  e  $u \notin I'$  (pelo passo (2b)) e, portanto,  $u \notin S(I')$ , contradizendo nossa hipótese.

Assim, ambas as execuções transmitem o mesmo vértice no  $i$ -ésimo passo e, portanto, os conjuntos  $S^{i+1}$  e  $T^{i+1}$  e o grafo  $G^{i+1}$  também serão iguais, concluindo a prova por indução.  $\square$

A mesma ideia da prova do Lema 12.1.2 pode ser usada para mostrar que, para todo conjunto independente  $I$ , o algoritmo calcula os mesmos conjuntos e grafos quando executado em  $I$  e em  $S(I)$ . Isso mostra que a sequência (ordenada) de vértices transmitidos ao executar o algoritmo em  $I$  pode ser recuperada a partir do conjunto (não ordenado)  $S(I)$ .

Observem que os passos (2a) e (2b) do algoritmo de Kleitman e Winston escolhem sempre o vértice de maior grau na esperança de garantir que  $C(I) \setminus S(I)$  é pequeno. O lema abaixo diz que isso de fato ocorre se o grafo tem uma quantidade suficientemente grande de arestas “bem distribuídas”.

**Lema 12.1.3.** *Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $0 < \beta \leq 1$ . Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices tal que para todo  $U \subseteq V(G)$  com  $|U| \geq m$ , tem-se que*

$$e(U) \geq \beta \binom{|U|}{2}.$$

*Se  $L$  é tal que  $m \geq e^{-\beta L} n$ , então para todo  $I \in \mathcal{I}(G)$  vale que  $|C(I) \setminus S(I)| \leq m$ .*

*Demonstração.* Lembrando que  $k(i)$  foi o índice do elemento escolhido pelo algoritmo no passo  $i$ , observe que, para  $0 \leq i < L$ ,

$$|V(G^{i+1})| = |V(G^i)| - |T^{i+1} \setminus T^i| - 1. \quad (12.1)$$

em que o  $-1$  corresponde ao elemento  $v_{k(i)}^i$ . Escolhendo  $U = \{v_{k(i)}^i, \dots, v_{n(i)}^i\}$ , observe que, de acordo com o passo (2a) do algoritmo, o grau do vértice selecionado  $v_{k(i)}^i$  é máximo em  $G^i[U]$ . Como

$$C(I) \setminus S(I) \subseteq V(G^{i+1}) \subseteq U,$$

podemos assumir que  $|U| \geq m$ , do contrário a conclusão do lema seria satisfeita.

Como a hipótese garante que o grau médio de  $G^i[U]$  é pelo menos  $\beta(|U| - 1)$  e  $v_{k(i)}^i$  tem grau máximo nesse grafo, temos da definição de  $T^{i+1}$  que

$$|T^{i+1} \setminus T^i| \geq \beta(|U| - 1) + (k(i) - 1) \geq \beta(k(i) + |U| - 1) - 1.$$

Combinando com (12.1) e usando que  $|U| = |V(G^i)| - k(i) + 1$ , temos que  $|V(G^{i+1})| \leq (1 - \beta)|V(G^i)|$ . Assim, se  $|V(G^L)| > m$ , teríamos

$$m < |V(G^L)| \leq (1 - \beta)^L n \leq e^{-\beta L} n \leq m,$$

um absurdo. Isso conclui a prova.  $\square$

Na verdade, o algoritmo de Kleitman–Winston prova algo mais forte, que enunciaremos abaixo.

**Teorema 12.1.4.** *Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $0 < \beta \leq 1$ . Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices tal que para todo  $U \subseteq V(G)$  com  $|U| \geq m$ , tem-se que*

$$e(U) \geq \beta \binom{|U|}{2}.$$

*Se  $L$  é tal que  $m \geq e^{-\beta L} n$ , então existem famílias  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}(G)$  e  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$ , e funções*

$$S: \mathcal{I}(G) \rightarrow \mathcal{S} \quad \text{e} \quad C: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$$

*tais que para todo  $I \in \mathcal{I}(G)$ , o conjunto  $S = S(I)$  satisfaz*

$$|S| \leq L, \quad S \subseteq I \subseteq C(S) \quad \text{e} \quad |C(S) \setminus S| \leq m.$$

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{C}$  como no Lema 12.1.3, e defina

$$\mathcal{S} = \{S(I) : I \in \mathcal{I}(G)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{C(S(I)) : I \in \mathcal{I}(G)\}.$$

Dada a conclusão do Lema 12.1.3 e a discussão que o antecede, a única coisa que precisamos mostrar é que as funções  $S$  e  $C$  definidas satisfazem  $C(I) = C(S(I))$ , para que a restrição de  $C$  a  $\mathcal{S}$  satisfaça as hipóteses do teorema. Tal fato decorre diretamente do Lema 12.1.2 e da observação que o sucede.  $\square$

Intuitivamente, o Teorema 12.1.4 diz que cada conjunto independente  $I$  contém uma pequena impressão digital  $S \subseteq I$  que determina o seu contêiner  $C$ . Enfatizamos que (crucialmente) o contêiner de  $I$  é determinado por sua assinatura, não dependendo de  $I$  de nenhum outro modo.

Note que as famílias  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{C}$  dadas pelo Teorema 12.1.4 dependem fortemente da escolha do parâmetro  $L$ . Por exemplo, se  $L = 0$  então a família  $\mathcal{C}$  dada pelo teorema possui apenas um conjunto,  $V(G)$ . Por outro lado, se  $L = v(G)$  então  $\mathcal{C} = \mathcal{I}(G)$ . A ideia central do método de contêineres é que, escolhendo um  $L$  intermediário, é muitas vezes possível pedir simultaneamente que  $|\mathcal{C}|$  seja “pequeno” e que todos os  $C \in \mathcal{C}$  tenham tamanho “próximo” de  $\alpha(G)$ , o tamanho do maior conjunto independente de  $G$ .



## 12.2 Aplicações em grafos

Sejam  $\mathcal{S}$  e  $C : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(V(G))$  a família e função dadas pelo Teorema 12.1.4, e considere o seguinte procedimento:

- i. Escolha uma assinatura  $S \in \mathcal{S}$ , que satisfaz  $|S| \leq L$ .
- ii. Escolha um subconjunto de  $C(S) \setminus S$ , que satisfaz  $|C(S) \setminus S| \leq m$ .

Pelo Teorema 12.1.4, é possível obter qualquer conjunto independente fazendo escolhas apropriadamente no procedimento acima. Em particular, podemos concluir que o número de conjuntos independentes de  $G$  é no máximo

$$2^m \sum_{i=0}^L \binom{n}{i}. \quad (12.2)$$

Escolhendo  $L$  e  $m$  apropriadamente, tal método permite obter cotas ótimas em muitos problemas. Abaixo temos dois exemplos de aplicação dessa técnica.

### 12.2.1 Conjuntos independentes em grafos $d$ -regulares

Quantos conjuntos independentes um grafo  $d$ -regular pode ter? Se o grafo é bipartido, a resposta certamente é pelo menos  $2^{n/2}$ , pois todo subconjunto de uma das partes é independente. Em 1988, Granville conjecturou que tal limitante inferior trivial não está longe do real valor se  $d \rightarrow \infty$ ; mais precisamente, ele conjecturou que todo grafo  $d$ -regular tem no máximo  $2^{(1/2+o_d(1))n}$  conjuntos independentes, em que  $o_d(1)$  denota uma função que tende a zero quando  $d \rightarrow \infty$ . Tal conjectura foi confirmada por Alon (1991), que obteve um limitante da forma

$$2^{n/2+O(d^{-1/10}n)}.$$

Usando o método dos contêineres, Sapozhenko (2001) provou o seguinte fortalecimento do resultado de Alon. Sua demonstração extremamente curta demonstra o poder do método.

**Teorema 12.2.1.** *Existe  $C \geq 0$  com a seguinte propriedade. Para  $d \geq 2$ , qualquer grafo  $d$ -regular com  $n$  vértices tem no máximo*

$$2^{\left(\frac{1}{2}+C\sqrt{\frac{\log d}{d}}\right)n}$$

*conjuntos independentes.*

*Demonstração.* Iremos aplicar o Teorema 12.1.4 com

$$L = \left\lceil \frac{1}{\beta} \right\rceil \quad \text{e} \quad m = \frac{n}{2} + \frac{\beta}{d} \binom{n}{2},$$

em que  $0 < \beta \leq 1$  é tal que  $\beta n = \sqrt{d \log d}$ . Note que  $e^{-\beta L} n \leq n/e \leq m$ , pois  $\beta L \geq 1$ , e que se  $|U| \geq m$ , então

$$|U| \cdot d = \sum_{u \in U} d(u) \leq 2e(U) + d(n - |U|),$$

pois cada aresta contida em  $U$  é contada duas vezes na soma, e cada uma das no máximo  $d(n - |U|)$  arestas entre  $U$  e  $V(G) \setminus U$  é contada exatamente uma vez. Assim,

$$e(U) \geq d(2|U| - n) \geq d(2m - n) \geq 2\beta \binom{n}{2} \geq \beta \binom{|U|}{2},$$

como desejado. Pelo Teorema 12.1.4 e por (12.2), temos no máximo

$$2^m \sum_{i=0}^L \binom{n}{i} \leq 2^{n/2 + \beta n^2/2d} (e\beta n)^{2/\beta}$$

conjuntos independentes em  $G$ . Podemos então substituir  $\beta n = \sqrt{d \log d}$  e verificar que o lado direito da desigualdade tem a forma que desejávamos.  $\square$

Para grafos bipartidos, uma resposta precisa para tal questão foi dada por Kahn (2001), através de uma bela aplicação do conceito de entropia. Algum tempo depois, Zhao (2010) encontrou um modo de deduzir o resultado para grafos não bipartidos a partir do teorema de Kahn. Combinando seus resultados, ficou demonstrado que o maior número possível de conjuntos independentes que um grafo  $d$ -regular com  $n$  vértices pode ter é

$$(2^{d+1} - 1)^{n/2d}.$$

Tal limitante é justo para o grafo que é uma união de cópias vértice-disjuntas do grafo bipartido completo  $K_{d,d}$ .

### 12.2.2 Contagem de grafos sem $C_4$

Nossa segunda aplicação do Teorema 12.1.4 será provar o Teorema 12.1.1, isto é, o limitante superior de Kleitman e Winston no número de grafos sem  $C_4$ . Iremos começar com um esboço da demonstração.

A ideia básica é escolher um vértice  $v$  de grau mínimo em  $G$ , contar o número de escolhas de  $G' = G - v$  por indução, e finalmente contar o número de modos de escolher a vizinhança  $X$  de  $v$ . Observe que se o grafo  $G'[X]$  contém um caminho de comprimento 2, então  $G$  contém um  $C_4$ . Logo,  $X$  é um conjunto independente no grafo  $H$  cujas arestas correspondem a caminhos de comprimento 2 em  $G$ .

Usando o Teorema 12.1.4, iremos mostrar que há no máximo  $e^{O(\sqrt{n})}$  escolhas para  $X$  dado  $G'$ . Observe que se  $|X| < \sqrt{n}/\log n$  então tal limitante vale trivialmente (considerando todos os subconjuntos de tais tamanhos); caso contrário, podemos usar a condição de grau mínimo  $\delta(G') \geq |X| - 1$  para limitar o número de conjuntos independentes de  $H$ .

Para tornar o esboço acima preciso, precisaremos do lema a seguir. Dado um grafo  $G$  e uma ordenação  $(v_1, \dots, v_n)$  de seus vértices, escreveremos

$$G_i = G[\{v_1, \dots, v_i\}] = G - \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

para denotar o subgrafo induzido pelos primeiros  $i$  vértices da ordem dada.

**Lema 12.2.2.** *Todo grafo  $G$  admite uma ordenação  $v_1, \dots, v_n$  de seus vértices tal que*

$$\delta(G_{i-1}) \geq d_{G_i}(v_i) - 1$$

para todo  $2 \leq i \leq n$ .

*Demonstração.* Dados  $v_n, \dots, v_{i+1}$ , escolhemos  $v_i$  como um vértice de grau mínimo de  $G_i$ . Desse modo, temos que

$$\delta(G_i \setminus \{v_i\}) \geq \delta(G_i) - 1 = d_{G_i}(v_i) - 1,$$

como queríamos. □

*Demonstração do Teorema 12.1.1.* Para  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\mathcal{G}_n$  a família de todos os grafos  $G$  sem  $C_4$  com  $V(G) = \{1, \dots, n\}$  que satisfazem

$$\delta(G_{i-1}) \geq d_{G_i}(i) - 1$$

para todo  $2 \leq i \leq n$ . Como todo grafo sem  $C_4$  pode ser rerotulado para estar em  $\mathcal{G}_n$  pelo Lema 12.2.2, o número de grafos sem  $C_4$  com  $n$  vértices é no máximo  $n! |\mathcal{G}_n|$ . Como  $n! \leq n^n = 2^{O(n \log n)}$ , basta então mostrar que

$$|\mathcal{G}_n| \leq 2^{O(n^{1/2})} \cdot |\mathcal{G}_{n-1}| \quad (12.3)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pois isso permite-nos concluir (por indução) que  $|\mathcal{G}_n| = 2^{O(n^{3/2})}$ .

Para provar (12.3), observe que os grafos  $\mathcal{G}_n$  podem ser gerados escolhendo-se um grafo de  $G' \in \mathcal{G}_{n-1}$  e um conjunto  $X \subseteq V(G')$ , que será a vizinhança do vértice  $n$  no novo grafo  $G$ . Pela definição de  $\mathcal{G}_n$ , o conjunto  $X$  tem que satisfazer  $|X| \leq \delta(G') + 1$ . Além disso, não pode haver caminho de comprimento 2 em  $G'$  com extremos em  $X$ , do contrário a adição das arestas de  $X$  a vértice  $n$  formaria um  $C_4$ . Mostraremos que, dado  $G'$ , o número de maneiras de escolher  $X$  com tais propriedades é no máximo  $e^C \sqrt{n}$  para algum  $C > 0$ ; aumentando  $C$  se necessário, podemos assumir que  $n$  é suficientemente grande.

Defina um grafo  $H$  com  $V(H) = V(G')$  e

$$E(H) = \{uv : \text{existe } v \in V(G') \text{ tal que } uv, vw \in E(G')\}.$$

Crucialmente, os  $X$  que queremos contar são conjuntos independentes de  $H$ .

Observe primeiro que há no máximo

$$\sum_{j=0}^t \binom{n-1}{j} \leq n^{t+1} \leq e^{2\sqrt{n}}$$

subconjuntos de  $V(H)$  de tamanho até  $t := \sqrt{n}/\log n + 1$  (independentes ou não). Desse modo, podemos assumir que  $|X| > t$  e, portanto, que

$$\delta(G') \geq \frac{\sqrt{n}}{\log n}.$$

Nesse caso, iremos contar os conjuntos independentes de  $G'$  usando o Teorema 12.1.4.

Para fazê-lo, fixe  $\delta(G') = k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ , e observe que  $k \leq 2\sqrt{n}$  pelo Teorema 3.2.1, visto que  $G$  é  $C_4$ -livre. Em particular, decorre disso que  $\beta := k^2/4n \leq 1$ . Para limitar o número de arestas de  $H$  contidas num conjunto  $U$ , observe que cada par de elementos de  $V(G')$  corresponde às extremidades de no máximo um  $P_2$ , pois do contrário teríamos um  $C_4$ . Então,

$$e_H(U) = \sum_{v \in V(G')} \binom{|N_{G'}(v) \cap U|}{2} \geq n \cdot \binom{k|U|/n}{2},$$

por convexidade. Com efeito,

$$\sum_{v \in V(G)} |N_{G'}(v) \cap U| = \sum_{u \in U} d_{G'}(u) \geq \delta(G') \cdot |U| = k \cdot |U|.$$

Definindo

$$L = \left\lceil \frac{\log n}{\beta} \right\rceil \quad \text{e} \quad m = \frac{2n}{k},$$

e relembrando que  $\beta = k^2/4n$ , vale que se  $|U| \geq m$ , então

$$e_H(U) \geq \frac{k^2|U|^2}{2n} - \frac{k|U|}{2} \geq \beta \binom{|U|}{2}.$$

Além disso, temos que  $e^{-\beta L}n \leq 1 \leq m$ , pois  $\beta L \geq \log n$ .

Podemos então aplicar o Teorema 12.1.4 e obter uma família  $\mathcal{S}$  e funções  $S: \mathcal{I}(H) \rightarrow \mathcal{S}$  e  $C: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(V(H))$  com

$$|S| \leq L, \quad S \subseteq I \subseteq C(S) \quad \text{e} \quad |C(S) \setminus S| \leq m$$

para cada  $I \in \mathcal{I}(H)$  e  $S = S(I)$ . Para escolher um conjunto independente de  $H$ , podemos primeiro escolher  $S \in \mathcal{S}$ , e depois o resto do conjunto independente de  $C(S) \setminus S$ . Assim, notando que

$$L \leq \frac{2 \log n}{\beta} \leq \frac{8n \log n}{k^2} \leq 8(\log n)^3,$$

o número de escolhas para  $X$  com tamanho  $x$  é

$$\sum_{i=0}^L \binom{k}{i} \binom{m}{x-i} \leq e^{(\log n)^5} \left( \frac{em}{x} \right)^x.$$

Como  $x = |X| \leq k + 1$ , temos que  $m = 2n/k \leq 4n/x$ . Logo, vale que

$$\left( \frac{em}{x} \right)^x \leq \left( \frac{4en}{x^2} \right)^x \leq \left( \frac{4\sqrt{n}}{x} \right)^{2x} \leq e^{4\sqrt{n}},$$

em que usamos que  $x \mapsto (C/x)^x$  atinge seu máximo quando  $x = C/e$ .

Assim, somando em  $x$  e usando que  $n$  é suficientemente grande, o número total de escolhas para  $X$  é no máximo

$$e^{2\sqrt{n}} + 2\sqrt{n} \cdot e^{(\log n)^5} \cdot e^{4\sqrt{n}} \leq e^{5\sqrt{n}},$$

completando a prova de (12.3). Voltando ao problema original, temos que

$$|\mathcal{G}_n| \leq \prod_{i=1}^n e^{5\sqrt{n}} = 2^{O(n^{3/2})},$$

e como  $n! = 2^{O(n \log n)}$ , concluímos que o número de grafos sem  $C_4$  com  $n$  vértices é no máximo  $n! \cdot |\mathcal{G}_n| = 2^{O(n^{3/2})}$ , como desejado.  $\square$

## 12.3 Conjuntos independentes em hipergrafos

Como vimos na Definição 8.3.1, um hipergrafo  $k$ -uniforme é uma generalização do conceito de grafo em que cada hiperaresta é um conjunto de tamanho  $k$ ; assim, grafos são hipergrafos 2-uniformes. Dado um hipergrafo  $\mathcal{H}$ , a definição de conjunto independente é similar: um conjunto  $I \subseteq V(\mathcal{H})$  é independente se não há hiperaresta  $e \in E(\mathcal{H})$  com  $e \subseteq I$ .

Conjuntos independentes se tornam mais versáteis no contexto de hipergrafos, pois frequentemente problemas extremais envolvem proibir estruturas de tamanho maior que 2, como podemos ver nos exemplos abaixo.

**Exemplo 12.3.1.** Seja  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$  o hipergrafo 3-uniforme no qual

$$V(\mathcal{H}) = [n] \quad \text{e} \quad E(\mathcal{H}) = \{uvw : u + v = w\}.$$

Os conjuntos independentes de  $\mathcal{H}$  são exatamente os conjuntos livres de soma.

Também é possível modelar problemas de Teoria Extremal dos Grafos através de conjuntos independentes.

**Exemplo 12.3.2.** Seja  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$  o hipergrafo 3-uniforme no qual

$$V(\mathcal{H}) = \binom{[n]}{2} \quad \text{e} \quad E(\mathcal{H}) = \left\{ \{uv, uw, vw\} : \{u, v, w\} \in \binom{[n]}{3} \right\}.$$

Cada hiperaresta de  $\mathcal{H}$  corresponde a um triângulo em  $K_n$ .

Um grafo  $G$  com conjunto de vértices  $[n]$  é livre de triângulos se e só se  $E(G)$  é um conjunto independente no hipergrafo do Exemplo 12.3.2. Assim, por exemplo, o Teorema de Mantel diz o maior conjunto independente de tal hipergrafo tem tamanho  $\lfloor n^2/4 \rfloor$ .

### 12.3.1 Contêineres para Hipergrafos 3-uniformes

Antes de enunciarmos o principal resultado técnico desta seção, o Lema 12.3.4, vejamos um caso particular do Lema 12.1.3.

**Lema 12.3.3.** *Para todo  $c \geq 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que vale o seguinte. Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e grau médio  $d = 2e(G)/n$ . Se*

$$\Delta(G) \leq c \cdot d,$$

*então, para  $L = \lceil n/d \rceil$ , as funções  $S$  e  $C$  dadas pelo algoritmo de Kleitman e Winston<sup>2</sup> satisfazem*

$$|C(S) \setminus S| \leq (1 - \delta)n$$

*para todo  $I \in \mathcal{I}(G)$ , em que  $S = S(I)$ .*

*Demonstração.* Iremos provar o lema para  $\delta = 1/4c$ . Com o objetivo de usar o Lema 12.1.3, defina

$$m = (1 - \delta)n \quad \text{e} \quad \beta = \frac{d}{2(n-1)}.$$

Como  $\delta \leq 1/4$  e  $\beta L \geq 1/2$ , vale que  $m \geq e^{-\beta L}n$ . Além disso, observe que se  $U \subseteq V(G)$  satisfaz  $|U| \geq m$ , então

$$e_G(U) \geq e(G) - \Delta(G) \cdot (n - |U|) \geq e(G) - cd \cdot \delta n \geq \frac{e(G)}{2},$$

pois  $nd = 2e(G)$  e  $c\delta \leq 1/4$ . Logo, vale que

$$e_G(U) \geq \frac{dn}{4} = \beta \binom{n}{2} \geq \beta \binom{|U|}{2},$$

Assim, o Lema 12.1.3 nos dá que  $|C(S) \setminus S| \leq m$ , como queríamos. □

Como no Lema 12.1.3, a condição de grau máximo do Lema 12.3.3 indica que as arestas do grafo estão “bem distribuídas”. Com o objetivo de generalizá-la para hipergrafos 3-uniformes, definimos o *2-grau máximo* de um hipergrafo  $\mathcal{H}$  por

$$\Delta_2(\mathcal{H}) = \max_{\{u,v\} \subseteq V(\mathcal{H})} |\{e \in E(\mathcal{H}) : \{u, v\} \subseteq e\}|,$$

<sup>2</sup>Lembre-se que tais funções dependem implicitamente de  $L$ .

em que o máximo é tomado em todos os pares  $u, v \in V(\mathcal{H})$  com  $u \neq v$ .

O Lema dos Contêineres para Hipergrafos 3-uniformes, a seguir, foi provado por Balogh, Morris e Samotij (2015) e independentemente por Saxton e Thomason (2015).

**Lema 12.3.4.** *Para todo  $c \geq 1$  existe  $\delta > 0$  tal que vale o seguinte. Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo 3-uniforme com  $n$  vértices e grau médio  $d = 3e(\mathcal{H})/n$ . Se*

$$\Delta(\mathcal{H}) \leq c \cdot d \quad e \quad \Delta_2(\mathcal{H}) \leq c \cdot \sqrt{d},$$

*então existem famílias  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H})$  e  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(V(\mathcal{H}))$  e funções*

$$S: \mathcal{I}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S} \quad e \quad C: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$$

*tal que para todo  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ , o conjunto  $S = S(I)$  satisfaz*

$$|S| \leq \frac{n}{\sqrt{d}}, \quad S \subseteq I \subseteq C(S) \quad e \quad |C(S) \setminus S| \leq (1 - \delta)n.$$

A princípio, a conclusão do Lema 12.3.4 pode parecer mais fraca que a condição do Lema 12.1.3, pois os contêineres dados têm tamanho  $(1 - \delta)n$ , potencialmente muito maior que  $\alpha(\mathcal{H})$ . No entanto, se provarmos, para alguma constante  $\beta > 0$ , que

$$e(\mathcal{H}[U]) \geq \beta e(\mathcal{H}) \tag{12.4}$$

para todo  $U$  contido numa família “bem comportada” de conjuntos  $\mathcal{U}$ , então podemos iterar o Lema 12.3.4, aplicando o resultado nos subhipergrafos induzidos  $\mathcal{H}[C]$  para os  $C \in \mathcal{C}$  que estejam em  $\mathcal{U}$ , e repetir o procedimento até que todos os contêineres obtidos satisfaçam  $C \not\in \mathcal{U}$ .

A escolha da família  $\mathcal{U}$  dependerá da aplicação; em muitos casos, no entanto, o argumento de iteração é idêntico, e por isso será conveniente provar o seguinte teorema geral, que decorre de aplicar o Lema 12.3.4 repetidamente até que cada elemento da família de contêineres contenha apenas  $o(e(\mathcal{H}))$  arestas de  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 12.3.5.** *Para todo  $c \geq 1$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que o seguinte vale. Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo 3-uniforme com  $n$  vértices e grau médio  $d = 3e(\mathcal{H})/n$ . Se*

$$\Delta(\mathcal{H}) \leq c \cdot d \quad e \quad \Delta_2(\mathcal{H}) \leq c \cdot \sqrt{d}, \tag{12.5}$$

*então existem famílias  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H})$  e  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(V(\mathcal{H}))$  e funções*

$$S: \mathcal{I}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S} \quad e \quad C: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$$



tais que para todo  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ , o conjunto  $S = S(I)$  satisfaz

$$|S| \leq \frac{\lambda n}{\sqrt{d}}, \quad S \subseteq I \subseteq C(S) \quad e \quad e(C(S) \setminus S) \leq \varepsilon \cdot e(\mathcal{H}).$$

Provaremos o Lema 12.3.4 e o Teorema 12.3.5 na Seção 12.6.

## 12.4 Aplicações em hipergrafos

Nesta seção daremos algumas aplicações do Teorema 12.3.5 a grafos sem triângulos e conjuntos sem 3-PAs. Para cada aplicação, precisaremos definir um hipergrafo e provar um resultado de supersaturação apropriado.

Por exemplo, para as aplicações que lidam com grafos sem triângulos, usaremos o hipergrafo  $\mathcal{H}$  que codifica os triângulos de  $K_n$ , definido no Exemplo 12.3.2. Para tal hipergrafo, temos que

$$v(\mathcal{H}) = \binom{n}{2}, \quad \Delta_2(\mathcal{H}) = 1, \quad e \quad d_{\mathcal{H}}(v) = n - 2$$

para todo  $v \in V(\mathcal{H})$  e, portanto, a condição (12.5) do Teorema 12.3.5 é satisfeita com  $c = 1$ . Aplicando o teorema a esse hipergrafo, obtemos o seguinte teorema de contêineres para grafos sem triângulos.<sup>3</sup>

**Teorema 12.4.1.** *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que vale o seguinte. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma coleção  $\mathcal{G}$  de grafos com  $n$  vértices satisfazendo*

$$|\mathcal{G}| \leq n^{\lambda n^{3/2}} \tag{12.6}$$

tal que

- (a) *todo  $G \in \mathcal{G}$  contém no máximo  $\varepsilon n^3$  triângulos;*
- (b) *todo grafo sem triângulos com  $n$  vértices está contido em algum  $G \in \mathcal{G}$ .*

No que segue, apresentaremos três aplicações do Teorema 12.4.1: limitaremos o maior tamanho de um subgrafo sem triângulos do grafo aleatório  $G(n, p)$ , determinaremos a estrutura típica de um grafo sem triângulos esparsos, e provaremos que  $G(n, p) \rightarrow K_3$  com alta probabilidade para certos valores de  $p$ .

As aplicações que veremos são exemplos de *problemas aleatórios esparsos*. O estudo sistemático de tais problemas foi iniciado por Kohayakawa, Łuczak, Rödl e colaboradores, e constitui uma importante área da Combinatória moderna.

<sup>3</sup>No Teorema 12.4.4, provaremos uma versão ligeiramente mais forte do Teorema 12.4.1.

### 12.4.1 Teorema de Mantel para grafos aleatórios

O número extremal de um grafo  $H$  com relação ao grafo aleatório  $G(n, p)$  é definido por

$$\text{ex}(G(n, p), H) = \max \{e(G) : H \not\subset G \subset G(n, p)\}.$$

Note que  $\text{ex}(G(n, p), H)$  é uma variável aleatória. O que podemos dizer sobre sua distribuição? Nesta seção, iremos considerar o caso  $H = K_3$ .

Lembre-se que, pela Proposição 2.3.4, todo grafo  $G$  contém um subgrafo bipartido com pelo menos  $e(G)/2$  arestas. Assim, para  $p \gg n^{-2}$ ,

$$\text{ex}(G(n, p), K_3) \geq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)p \binom{n}{2}$$

com alta probabilidade, usando a desigualdade de Chernoff para limitar o número de arestas de  $G(n, p)$ . Além disso, se  $p \ll n^{-1/2}$ , então o número de triângulos em  $G(n, p)$  é  $o(pn^2)$  com alta probabilidade (observando que  $p^3n^3 \ll pn^2$  e usando a desigualdade de Markov) e, portanto,

$$\text{ex}(G(n, p), K_3) = (1 + o(1))p \binom{n}{2},$$

pois podemos destruir todos os triângulos removendo uma aresta de cada.

O seguinte teorema, essencialmente devido a Frankl e Rödl 1986, mostra que para valores maiores de  $p$  o limitante inferior obtido considerando um subgrafo bipartido é essencialmente justo.

**Teorema 12.4.2.** *Se  $p \gg 1/\sqrt{n}$ , então*

$$\text{ex}(G(n, p), K_3) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)p \binom{n}{2},$$

*com alta probabilidade.*

Esboçaremos primeiramente a prova desse teorema no caso  $p \gg \log n/\sqrt{n}$ , usando o Teorema 12.4.1, antes de passarmos aos detalhes. Precisaremos do resultado de supersaturação dado pelo Teorema 3.3.2. Por conveniência, repetimos seu enunciado abaixo.

**Lema 12.4.3.** *Sejam  $n, t \in \mathbb{N}$ , e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Se*

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t,$$

*então  $G$  contém pelo menos  $tn/3$  triângulos.*

Fixe  $\varepsilon > 0$ , e seja  $\mathcal{G}$  a coleção de grafos dados pelo Teorema 12.4.1. Seja  $p \gg \log n / \sqrt{n}$ , e suponha que  $G(n, p)$  contém um subgrafo  $H$  sem triângulos com

$$e(H) \geq m = \left(\frac{1}{2} + 8\varepsilon\right)p \binom{n}{2}.$$

Pelo Teorema 12.4.1, existe um contêiner  $G \in \mathcal{G}$  tal que  $H \subset G$ . Iremos limitar, para cada  $G \in \mathcal{G}$  fixo, a probabilidade de que isso ocorra. Usaremos então a cota da união sobre a coleção  $\mathcal{G}$  de contêineres.

Para fazê-lo, lembre (do Teorema 12.4.1) que cada  $G \in \mathcal{G}$  contém no máximo  $\varepsilon n^3$  triângulos e, portanto,

$$e(G) \leq \frac{n^2}{4} + 3\varepsilon n^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 7\varepsilon\right) \binom{n}{2},$$

pelo Lema 12.4.3 aplicado com  $t = 3\varepsilon n^2$ . Lembre também que  $H \subset G$  e  $H \subset G(n, p)$ .

O número de arestas de  $G$  contidas em  $G(n, p)$  é uma variável aleatória com distribuição binomial  $\text{Bin}(e(G), p)$ . Assim, a esperança de tal variável aleatória é

$$p \cdot e(G) \leq \left(\frac{1}{2} + 7\varepsilon\right)p \binom{n}{2} = m - \varepsilon p \binom{n}{2},$$

e, portanto, pela desigualdade de Chernoff temos que

$$\mathbb{P}\left(\text{Bin}(e(G), p) \geq m\right) \leq e^{-\delta p n^2},$$

para alguma constante  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ .

Podemos então tomar a cota da união sobre todos os contêineres  $G \in \mathcal{G}$ . Usando o limitante (12.6) em  $|\mathcal{G}|$ , obtemos

$$\mathbb{P}\left(\text{ex}(G(n, p), K_3) \geq m\right) \leq n^{\lambda n^{3/2}} \cdot e^{-\delta p n^2} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , desde que  $p \gg \log n / \sqrt{n}$ .

Para remover o fator de  $\log n$ , precisaremos da seguinte versão, ligeiramente mais técnica, do Teorema 12.4.1. Escreveremos  $\mathcal{F}_n(K_3)$  para denotar a família dos grafos sem triângulos com  $n$  vértices.

**Teorema 12.4.4.** *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que vale o seguinte. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma família  $\mathcal{G}$  de grafos com  $n$  vértices, e uma função*

$$C : \mathcal{F}_n(K_3) \rightarrow \mathcal{G}$$

*com a seguinte propriedade. Para todo grafo sem triângulos  $G$  com  $n$  vértices, existe  $S \subset G$  tal que  $G \subset C(S)$ ,*

$$e(S) \leq \lambda n^{3/2},$$

*e o grafo com conjunto de arestas  $C(S) \setminus S$  contém no máximo  $\varepsilon n^3$  triângulos.*

Note que o Teorema 12.4.4 decorre diretamente do Teorema 12.3.5, e que ele implica no Teorema 12.4.1. Estamos prontos para provar o Teorema de Mantel para  $G(n, p)$  com o limitante correto em  $p$ . Como consideraremos apenas grafos com conjunto de vértices  $[n]$ , identificaremos um grafo com seu conjunto de arestas.

*Demonstração do Teorema 12.4.2.* Repetiremos o esboço feito acima, mas aplicando o Teorema 12.4.4 ao invés do Teorema 12.4.1. Usaremos também que  $S \subset G(n, p)$  para melhorar nosso limitante nas probabilidades envolvidas.

Fixe  $\varepsilon > 0$ , e seja  $\mathcal{G}$  a coleção de grafos e  $C$  a função dada pelo Teorema 12.4.4. Seja  $p \gg 1/\sqrt{n}$ , e suponha que  $G(n, p)$  contém um subgrafo sem triângulos  $H$  com

$$e(H) \geq m = \left(\frac{1}{2} + 8\varepsilon\right)p \binom{n}{2}.$$

Pelo Teorema 12.4.4, existe  $S \subset H$  tal que  $H \subset C(S)$ ,

$$e(S) \leq \lambda n^{3/2},$$

e  $G = C(S) \setminus S$  contém no máximo  $\varepsilon n^3$  triângulos. Com o Lema 12.4.3, aplicado com  $t = 3\varepsilon n^2$ , deduzimos que

$$e(G) \leq \frac{n^2}{4} + 3\varepsilon n^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 7\varepsilon\right) \binom{n}{2}.$$

Como  $H \subset G \cup S$  e  $H \subset G(n, p)$ , e como

$$e(S) \leq \lambda n^{3/2} \ll pn^2,$$

podemos aplicar a desigualdade de Chernoff para concluir que

$$\mathbb{P}\left(\text{Bin}(e(G), p) \geq m - e(S)\right) \leq e^{-\delta pn^2}$$

para algum  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ . Observe que o evento  $S \subset G(n, p)$  ocorre com probabilidade  $p^{|S|}$ , e é independente da interseção de  $G(n, p)$  com  $G = C(S) \setminus S$ .

Para prosseguir, podemos tomar a cota da união sobre todas as possíveis impressões digitais  $S$ . Usando o limitante  $e(S) \leq \lambda n^{3/2}$ , obtemos

$$\mathbb{P}\left(\text{ex}(G(n, p), K_3) \geq m\right) \leq \sum_{s=0}^{\lambda n^{3/2}} \binom{\binom{n}{2}}{s} p^s \cdot e^{-\delta pn^2}$$

Usando que a função  $(C/x)^x$  é crescente se  $x \leq C/e$ , obtemos que

$$\sum_{s=0}^{\lambda n^{3/2}} \binom{\binom{n}{2}}{s} p^s \cdot e^{-\delta pn^2} \leq \lambda n^{3/2} \cdot \left(\frac{ep\sqrt{n}}{\lambda}\right)^{\lambda n^{3/2}} e^{-\delta pn^2}. \quad (12.7)$$

Lembre-se que  $p\sqrt{n} \gg 1$ . Assim, escrevendo  $e^{-\delta pn^2}$  como  $(e^{-\delta p\sqrt{n}})^{n^{3/2}}$  e usando que  $x^\lambda e^{-\delta x} \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , o lado direito de (12.7) tende a zero. Combinando as desigualdades, temos que

$$\mathbb{P}\left(\text{ex}(G(n, p), K_3) \geq m\right) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , como queríamos. □

### 12.4.2 Estrutura típica de grafos esparsos sem triângulos

Lembre do Capítulo 3 que um grafo está  $t$ -perto de ser bipartido se existe um subgrafo bipartido  $H \subset G$  com  $e(H) \geq e(G) - t$ . Além disso, para duas propriedades de grafos  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ , diremos que *quase todos os grafos de  $\mathcal{Q}$  satisfazem a propriedade  $\mathcal{P}$*  se

$$\frac{|\mathcal{P}_n|}{|\mathcal{Q}_n|} \rightarrow 1$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , em que  $\mathcal{A}_n$  denota a subfamília de  $\mathcal{A}$  dos grafos com  $n$  vértices.

No Exercício 11.5.3, usamos o Lema da Regularidade para mostrar que quase todos os grafos sem triângulos estão  $o(n^2)$ -próximos de serem bipartidos. Nesta seção, usaremos o Teorema 12.4.1 para estender tal resultado para grafos mais esparsos. O seguinte teorema foi provado por Łuczak (2000).

**Teorema 12.4.5** (Łuczak). *Se  $m \gg n^{3/2}$ , então o seguinte vale para todo  $\delta > 0$ . Quase todos os grafos sem triângulos com  $n$  vértices e  $m$  arestas estão  $\delta m$ -próximos de serem bipartidos.*

O limitante em  $m$  é o melhor possível: Dada qualquer constante  $C > 0$ , a conclusão é falsa se  $m = Cn^{3/2}$  e  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno.

O Teorema 12.4.5 será consequência do Teorema 12.4.4, usando uma versão supersaturada do teorema de estabilidade para triângulos que provamos no Capítulo 3. Mais precisamente, usaremos o seguinte corolário do Teorema 3.3.3.

**Lema 12.4.6.** *Sejam  $n, t \in \mathbb{N}$ , e seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Se*

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t,$$

*então ou  $G$  está  $2t$ -próximo de ser bipartido ou  $G$  contém pelo menos  $tn/6$  triângulos.*

Por simplicidade, faremos a prova do Teorema 12.4.5 apenas quando  $m \gg n^{3/2} \log n$ , de modo a poder usar o Teorema 12.4.1 ao invés do Teorema 12.4.4. Deixamos a remoção do termo  $\log n$  a cargo do leitor.

Fixe  $\delta > 0$ , seja  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, e seja  $\mathcal{G}$  a coleção de grafos dada pelo Teorema 12.4.1, de modo que cada  $G \in \mathcal{G}$  contém no máximo  $\varepsilon n^3$  triângulos. Pelo Lema 12.4.6, aplicado com  $t = 6\varepsilon n^2$ , temos que ou

$$e(G) \leq \frac{n^2}{4} - \varepsilon n^2, \tag{12.8}$$

ou  $G$  está  $12\varepsilon n^2$ -próximo de ser bipartido. Iremos contar tais grafos  $H$  sem triângulos com  $n$  vértices e  $m$  arestas que não estão  $\delta m$ -próximos de serem bipartidos.

Observe primeiro que cada grafo  $H$  com as propriedades acima é subgrafo de algum contêiner  $G \in \mathcal{G}$ , de modo que podemos tomar a cota da união sobre todos os contêineres. Iremos considerar os dois tipos de contêiner separadamente. Suponha primeiro que  $G$  satisfaz (12.8); neste caso, simplesmente usamos a estimativa

$$\binom{e(G)}{m} \leq \binom{n^2/4 - \varepsilon n^2}{m} \leq (1 - \varepsilon)^m \binom{n^2/4}{m}$$

para o número de escolhas de  $H \subset G$ .

Por outro lado, se  $G$  está  $12\varepsilon n^2$ -próximo de ser bipartido, então há um conjunto de arestas  $T \subset E(G)$ , com  $|T| \leq 12\varepsilon n^2$ , tal que  $G - T$  é bipartido.<sup>4</sup> Se  $H$  está  $\delta m$ -longe de ser bipartido, então ele precisa conter pelo menos  $\delta m$  arestas de  $T$  e, portanto, há no máximo

$$\binom{|T|}{\delta m} \binom{e(G)}{(1-\delta)m} \leq \binom{12\varepsilon n^2}{\delta m} \binom{n^2}{(1-\delta)m}$$

tais grafos  $H$  contidos em  $G$ . Estimando os coeficientes binomiais e lembrando que  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  foi tomado suficientemente pequeno, concluímos que  $G$  contém no máximo

$$2^{O(m)} \left( \frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{\delta m} \binom{n^2}{m} \leq 2^{-m} \binom{n^2/4}{m},$$

grafos sem triângulos com  $m$  arestas que estão  $\delta m$ -longe de serem bipartidos.

Somando em todas as escolhas de  $G \in \mathcal{G}$  e usando o limitante (12.6) em  $|\mathcal{G}|$ , obtemos que, para  $m \gg n^{3/2} \log n$ , há no máximo

$$n^{\lambda n^{3/2}} \cdot (1-\varepsilon)^m \binom{n^2/4}{m} \ll \binom{n^2/4}{m}$$

grafos  $H$  sem triângulos com  $n$  vértices e  $m$  arestas que estão  $\delta m$ -longe de serem bipartidos. No entanto, há pelo menos  $\binom{n^2/4}{m}$  grafos sem  $H$  sem triângulos com  $n$  vértices e  $m$  arestas, pois todo grafo bipartido é  $K_3$ -livre. Assim, a conclusão do Teorema 12.4.5 é satisfeita quando  $m \gg n^{3/2} \log n$ , como afirmado.

### 12.4.3 Propriedades Ramsey de grafos aleatórios esparsos

No Teorema 6.6.2, provamos o seguinte teorema de Frankl e Rödl (1986) no caso  $r = 2$  com um limitante um pouco mais fraco em  $p$ . Usando o Teorema 12.4.4 e uma ideia de Nenadov e Steger (2016), podemos obter o seguinte resultado para todo  $r \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 12.4.7.** *Fixe  $r \in \mathbb{N}$ . Se  $p \gg 1/\sqrt{n}$ , então com alta probabilidade toda  $r$ -coloração das arestas de  $G(n, p)$  contém um triângulo monocromático.*

<sup>4</sup>Aqui, escrevemos  $G - T$  para denotar o grafo com conjunto de vértices  $V(G)$  e conjunto de arestas  $E(G) \setminus T$ .

Novamente, o limitante em  $p$  é o melhor possível: se  $p \ll 1/\sqrt{n}$ , então com alta probabilidade existe uma 2-coloração das arestas de  $G(n, p)$  sem triângulo monocromático. No entanto, provar tal afirmação requer ideias adicionais e foge ao escopo do livro.

Para deduzir o Teorema 12.4.7 do Teorema 12.4.4, iremos precisar do seguinte teorema de supersaturação, que é um caso particular do Exercício 5.8.5.

**Lema 12.4.8.** *Para todo  $r \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta > 0$  com a seguinte propriedade. Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices e*

$$e(G) \geq (1 - \delta) \binom{n}{2},$$

*então toda  $r$ -coloração de  $E(G)$  contém pelo menos  $\delta n^3$  triângulos monocromáticos.*

Iremos provar uma versão mais fraca do Teorema 12.4.7, usando Teorema 12.4.1 ao invés do Teorema 12.4.4. Novamente, deixamos a remoção do fator logarítmico a cargo do leitor.

*Demonstração do Teorema 12.4.7 no caso  $p \gg \log n / \sqrt{n}$ .* Seja  $\delta = \delta(r)$  a constante dada pelo Lema 12.4.8 e defina  $\varepsilon = \delta/r$ . Seja  $\mathcal{G}$  a coleção de grafos e  $C$  a função dada pelo Teorema 12.4.4. Se  $G(n, p)$  não tem a propriedade Ramsey desejada, então há grafos sem triângulos  $H_1, \dots, H_r$  tais que

$$G(n, p) = H_1 \cup \dots \cup H_r.$$

Assim, existem contêineres  $G_1, \dots, G_r$  tais que

$$G(n, p) \subset G_1 \cup \dots \cup G_r$$

em que  $H_i \subset G_i$  para cada  $i \in [r]$ . Afirmamos que

$$e(G_1 \cup \dots \cup G_r) \leq (1 - \delta) \binom{n}{2}.$$

Do contrário, pelo Lema 12.4.8, haveria pelo menos  $\delta n^3$  triângulos monocromáticos na coloração dada pelos grafos  $G_i$  e, portanto, um dos grafos conteria mais de  $\varepsilon n^3$  triângulos pelo Princípio da Casa dos Pombos. Isso seria um absurdo, pois pelo Teorema 12.4.4 todo contêiner tem no máximo  $\varepsilon n^3$  triângulos.



A probabilidade de  $G(n, p)$  não conter nenhuma aresta de um conjunto fixo  $T$  é  $(1 - p)^{|T|}$ . Portanto, para cada escolha de  $G_1, \dots, G_r \in \mathcal{G}$ , temos que

$$\mathbb{P}(G(n, p) \subset G_1 \cup \dots \cup G_r) \leq (1 - p)^{\delta \binom{n}{2}} \leq e^{-\delta p n^2/4}.$$

Tomando a cota da união em todas as  $r$ -tuplas de contêineres, concluímos que

$$\mathbb{P}(G(n, p) \not\supset K_3) \leq n^{r\lambda n^{3/2}} \cdot e^{-\delta p n^2/4} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , visto que  $p \gg \log n / \sqrt{n}$ . Isso conclui a prova.  $\square$

#### 12.4.4 Teorema de Roth em conjuntos aleatórios

Para nossa última aplicação do Teorema 12.3.5, iremos considerar subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  sem progressões aritméticas de 3 elementos (3-PAs). No Teorema 11.3.6 provamos o Teorema de Roth, que afirma que todo subconjunto de  $[n]$  sem 3-PAs tem  $o(n)$  elementos. Usando o método de contêineres, deduziremos uma versão correspondente para conjuntos aleatórios esparsos.

Lembre-se que  $A$  é dito ser um subconjunto  $p$ -aleatório de um conjunto  $X$  se cada elemento de  $X$  é incluído em  $A$  independentemente com probabilidade  $p$ . O seguinte teorema foi provado por Kohayakawa, Łuczak e Rödl (1996).

**Teorema 12.4.9** (Kohayakawa, Łuczak e Rödl). *Sejam  $\delta > 0$  e  $p \gg 1/\sqrt{n}$ , e seja  $A$  um subconjunto  $p$ -aleatório de  $\{1, \dots, n\}$ . Com alta probabilidade, todo subconjunto de  $A$  de tamanho  $\delta pn$  contém uma 3-PA.*

Para ver que o limitante em  $p$  é o melhor possível, observe que se  $p \ll 1/\sqrt{n}$ , então o número esperado de 3-PAs em  $A$  é no máximo  $p^3 n^2 = o(pn)$ , de modo que podemos destruir todas as 3-PAs removendo  $o(pn)$  elementos de  $A$ .

Para deduzir o Teorema 12.4.9 do Teorema 12.3.5, o primeiro passo é definir o hipergrafo 3-uniforme  $\mathcal{H}$  que codifica 3-PAs, isto é,

$$V(\mathcal{H}) = [n] \quad \text{e} \quad E(\mathcal{H}) = \{xyz : x + y = 2z\}.$$

Note que

$$v(\mathcal{H}) = n, \quad e(\mathcal{H}) = \Theta(n^2), \quad \Delta(\mathcal{H}) = O(n) \quad \text{e} \quad \Delta_2(\mathcal{H}) = O(1),$$

e, portanto, a condição (12.5) do Teorema 12.3.5 é satisfeita. Escreveremos  $\mathcal{F}_n$  para denotar a família de subconjuntos de  $[n]$  sem 3-PAs. Aplicando o Teorema 12.3.5 ao hipergrafo  $\mathcal{H}$  acima, obtemos o seguinte teorema, que fornece contêineres para subconjuntos sem 3-PAs.

**Teorema 12.4.10.** *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que vale o seguinte. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem uma coleção  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $[n]$  e uma função*

$$C : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{C}$$

*com a seguinte propriedade. Para todo subconjunto  $A \subseteq [n]$  sem 3-PAs, existe  $S \subseteq A$  tal que  $A \subseteq C(S)$ ,*

$$|S| \leq \lambda n^{1/2},$$

*e  $C(S) \setminus S$  contém no máximo  $\varepsilon n^2$  progressões aritméticas de tamanho 3.*

Também usaremos a seguinte versão supersaturada do Teorema de Roth.

**Lema 12.4.11.** *Para todo  $\delta > 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que o seguinte vale para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Se  $A \subseteq [n]$  é tal que*

$$|A| \geq \delta n,$$

*então  $A$  contém pelo menos  $\varepsilon n^2$  progressões aritméticas de tamanho 3.*

O lema acima pode ser provado através de uma demonstração similar à do Teorema 8.4.1, aplicando o Teorema de Roth em cada  $m$ -PA contida em  $[n]$  para algum  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande e considerando quantas vezes cada 3-PA é contada nesse procedimento. Deixamos os detalhes a cargo do leitor.

*Demonstração do Teorema 12.4.9.* Sejam  $\delta > 0$  e  $p \gg 1/\sqrt{n}$ , e seja  $A$  um subconjunto  $p$ -aleatório de  $[n]$ . Seja  $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$  dado pelo Lema 12.4.11, e sejam  $\mathcal{C}$  e  $C$  a coleção e a função dadas pelo Teorema 12.4.10.

Suponha que existe um subconjunto  $B \subseteq A$  de tamanho  $\delta pn$  sem 3-PAs, e seja  $S \subseteq B$  a impressão digital correspondente dada pelo Teorema 12.4.10. Como  $C(S) \setminus S$  contém no máximo  $\varepsilon n^2$  3-PAs, decorre do Lema 12.4.11, que

$$|C(S) \setminus S| \leq \delta n.$$

Além disso,  $|S| \leq \lambda \sqrt{n} = o(pn)$  e, portanto,

$$\mathbb{P}\left(|(C(S) \setminus S) \cap A| \geq 2\delta pn - |S|\right) \leq e^{-\delta pn},$$

pela desigualdade de Chernoff. Como o evento  $S \subseteq A$  ocorre com probabilidade  $p^{|S|}$  e é independente do evento acima, podemos tomar a cota da união sobre

todas as impressões digitais  $S$  e concluir que a probabilidade de existir  $B$  com as propriedades acima é no máximo

$$\sum_{s=0}^{\lambda\sqrt{n}} \binom{n}{s} p^s \cdot e^{-\delta pn} \leq \lambda\sqrt{n} \cdot \left(\frac{ep\sqrt{n}}{\lambda}\right)^{\lambda\sqrt{n}} e^{-\delta pn} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , dado que  $p \gg 1/\sqrt{n}$ . Isso conclui a prova.  $\square$

## 12.5 Caso geral do Lema de Contêineres

Para concluir o capítulo, iremos enunciar o lema de contêineres para hipergrafos  $k$ -uniformes, cujo enunciado é um pouco mais técnico. Precisaremos primeiro definir o *i-grau máximo* de um hipergrafo  $\mathcal{H}$ ,

$$\Delta_i(\mathcal{H}) = \max_{T \subseteq V(\mathcal{H}) : |T|=i} |\{e \in E(\mathcal{H}) : T \subseteq e\}|.$$

Observe que, para um hipergrafo  $\mathcal{H}$ ,  $\Delta_1(\mathcal{H}) = \Delta(\mathcal{H})$  é o grau máximo de  $\mathcal{H}$ .

**Lema 12.5.1.** *Para todo  $c \geq 1$  e  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta > 0$  tal que o seguinte vale. Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo  $k$ -uniforme com  $n$  vértices e  $\tau > 0$  satisfazendo*

$$\Delta_i(\mathcal{H}) \leq c \cdot \tau^{i-1} \frac{e(\mathcal{H})}{n} \quad (12.9)$$

para  $i \in [k]$ . Então existem famílias  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H})$  e  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(V(\mathcal{H}))$ , e funções

$$S: \mathcal{I}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S} \quad e \quad C: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$$

tais que para todo  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ , o conjunto  $S = S(I)$  satisfaz

$$|S| \leq \tau n, \quad S \subseteq I \subseteq C(S) \quad e \quad |C(S) \setminus S| \leq (1 - \delta)n.$$

A demonstração foge ao escopo deste livro. Perceba que quanto menor for  $\tau$ , mais forte é o resultado, pois menor é o tamanho dos elementos de  $\mathcal{S}$  e, portanto, das famílias  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{C}$ . Assim, tomamos  $\tau$  o menor possível (podendo depender de  $n$ ) que satisfaça as condições do lema.

Vejamos alguns exemplos de hipergrafos de uniformidade maior, onde o lema pode ser aplicado para obter limitantes ótimos para problemas similares aos vistos na Seção 12.4). O primeiro hipergrafo que veremos codifica  $k$ -PAs.

**Exemplo 12.5.2.** Seja  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$  o hipergrafo  $k$ -uniforme no qual

$$V(\mathcal{H}) = [n] \quad \text{e} \quad E(\mathcal{H}) = \left\{ \{a, a + d, \dots, a + (k-1)d\} \subseteq [n] : a, d \in [n] \right\}.$$

Nesse hipergrafo, os conjuntos independentes são precisamente os conjuntos sem  $k$ -PA. Note que

$$e(\mathcal{H}) = \Theta(n^2), \quad \Delta_1(\mathcal{H}) \leq n \quad \text{e} \quad \Delta_i(\mathcal{H}) = O(1)$$

para  $2 \leq i \leq k$ , onde a constante  $O(1)$  depende apenas de  $k$ . Assim, o leitor pode verificar que todas desigualdades de (12.9) são satisfeitas (para algum constante  $c = c(k)$ ) para  $\tau = n^{-1/(k-1)}$ .

O próximo exemplo codifica cópias de um grafo  $H$  fixo.

**Exemplo 12.5.3.** Dado um grafo  $H$ , seja  $k = e(H)$  e  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$  o hipergrafo  $k$ -uniforme com

$$V(\mathcal{H}) = E(K_n) \quad \text{e} \quad E(\mathcal{H}) = \{T \subseteq E(K_n) : T \text{ é uma cópia de } H\}.$$

Os conjuntos independentes desse hipergrafo correspondem a grafos  $H$ -livres com  $n$  vértices e, portanto,  $\alpha(\mathcal{H}) = \text{ex}(n, H)$ , que estudamos no Capítulo 3. É um exercício instrutivo determinar o menor valor de  $\tau$  que podemos tomar no exemplo acima (como função de  $n$  e dos subgrafos de  $H$ ).

Para concluir, iremos enunciar uma aplicação do Lema 12.5.1, o Teorema de Turán esparso, que generaliza o Teorema 12.4.2. Tal resultado foi conjecturado por Kohayakawa, Łuczak e Rödl (1997), que provaram o resultado no caso  $r = 4$  e (como já mencionado) iniciaram o estudo sistemático de problemas aleatórios esparsos. O caso geral, enunciado abaixo, foi provado independentemente por Conlon e Gowers (2016) e por Schacht (2016).

**Teorema 12.5.4** (Conlon e Gowers, Schacht). *Se  $p \gg n^{-2/(r+1)}$ , então*

$$\text{ex}(G(n, p), K_r) = \left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right) p \binom{n}{2},$$

*com alta probabilidade.*

Não é difícil mostrar que o limitante em  $p$  é o melhor possível. Deixamos tal tarefa, e a dedução do teorema a partir do Lema 12.5.1, como um desafio para o leitor.

## 12.6 Demonstrações dos lemas para hipergrafos 3-uniformes

Antes de passar à prova do Lema 12.3.4, daremos um esboço da demonstração. Para isso, vejamos o que acontece se tentarmos usar a mesma ideia do algoritmo de Kleitman–Winston em  $\mathcal{H}$ . Quando o algoritmo adiciona um vértice  $v \in I$  a  $S$ , não é mais possível deduzir que vértices que compartilham uma aresta com  $v$  não pertencem a  $I$ . O que é possível dizer é que nenhum conjunto da família

$$\{e \setminus \{v\} : v \in e \in E(\mathcal{H})\}.$$

está inteiramente contido em  $I$ . Isso significa que, ao final da execução do algoritmo em  $\mathcal{H}$ , temos também um conjunto de pares de vértices (isto é, um grafo  $G$ ) que não podem estar simultaneamente em  $I$ . Por construção, uma aresta é adicionada a  $G$  exatamente quando forma uma hiperaresta juntamente com um elemento de  $S \subseteq I$ . Assim, o conjunto  $I$  é também independente em  $G$ , de modo que de modo que há esperança de podermos aplicar o Lema 12.3.3 ao grafo  $G$ . Para isso, no entanto, precisamos que  $\Delta(G) = O(e(G)/n)$ .

Observe que, como  $\Delta_2(\mathcal{H})$  pode ser da ordem de  $\sqrt{d}$  e uma mesma aresta pode ser “adicionada” a  $G$  no procedimento acima até  $\Delta_2(\mathcal{H})$  vezes, poderia ser impossível que  $G$  tivesse mais que  $3e(\mathcal{H})/\Delta_2(\mathcal{H}) = \Theta(n\sqrt{d})$  arestas. Supondo que esse máximo é atingido, a condição que precisamos verificar para  $G$  para aplicar o Lema 12.3.3 é que  $\Delta(G) = O(\sqrt{d})$ .

A prova formal será uma modificação do algoritmo de Kleitman e Winston que constrói um grafo  $G$  de pares proibidos com  $e(G) = \Theta(n\sqrt{d})$  e  $\Delta(G) = O(\sqrt{d})$ . Para isso, nunca adicionaremos a  $G$  novas arestas que contenham vértices de grau maior que  $c\sqrt{d}$ . Na demonstração, usaremos a seguinte generalização do Lema 12.3.3.

**Lema 12.6.1.** *Para todo  $c \geq 1$ , o seguinte vale para todo  $0 < \delta \leq 1/4c$ . Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e grau médio  $d = 2e(G)/n$ . Se*

$$\Delta(G) \leq c \cdot d,$$

*então, para  $L = \lceil 4\delta n/d \rceil$ , as funções  $S$  e  $C$  dadas pelo algoritmo de Kleitman e Winston satisfazem*

$$|C(S) \setminus S| \leq (1 - \delta)n$$

*para todo  $I \in \mathcal{I}(G)$ , onde  $S = S(I)$ .*

A demonstração do Lema 12.6.1 é quase idêntica à do Lema 12.3.3, e por isso a omitiremos. Podemos agora passar à demonstração do Lema 12.3.4.

*Demonstração do Lema 12.3.4.* Considere o seguinte algoritmo, uma versão modificada do algoritmo de Kleitman e Winston que constrói hipergrafos  $\mathcal{H}^i$ , grafos  $G^i$ , e conjuntos  $S^i$  e  $T^i$ .

(1) Se  $I \cap V(\mathcal{H}^i) = \emptyset$ , o algoritmo define  $\mathcal{H}^L$  como o hipergrafo sem vértices, define os conjuntos  $T^L = T^i \cup V(\mathcal{H}^i)$ ,  $S^L = S^i$ ,  $G^L = G^i$  e termina.

(2a) Caso o algoritmo não tenha terminado até agora, escreva

$$V(\mathcal{H}^i) = \{v_1^i, \dots, v_{n(i)}^i\}$$

de modo que para cada  $1 \leq j \leq n(i)$ ,  $v_j^i$  seja o vértice de grau máximo do subgrafo induzido  $\mathcal{H}^i \setminus \{v_1^i, \dots, v_{j-1}^i\}$ ; caso haja mais de um vértice de grau máximo, escolhamos o maior deles na ordem total fixada.

(2b) Seja  $k(i)$  o menor índice tal que  $v_{k(i)}^i \in I$ . Defina

$$\begin{aligned} S^{i+1} &= S^i \cup \{v_{k(i)}^i\}, \\ T^{i+1} &= T^i \cup \{v_1^i, \dots, v_{k(i)-1}^i\}, \\ G^{i+1} &= G^i \cup \{e \setminus \{v_{k(i)}^i\} : v_{k(i)}^i \in e \in E(\mathcal{H}^i)\}, \end{aligned}$$

e seja

$$U^{i+1} = \{v \in V(\mathcal{H}) : d_{G^{i+1}}(v) \geq c\sqrt{d}\}.$$

o conjunto dos vértices com grau “preocupante” em  $G^{i+1}$ . Defina

$$\mathcal{H}^{i+1} = \mathcal{H}^i - (S^{i+1} \cup T^{i+1} \cup U^{i+1}).$$

Seja  $L = \lfloor n/\sqrt{d} \rfloor$  e  $\delta = 1/(16c)^2$ . Se  $|S^L| + |T^L| > \delta n$ , a conclusão do teorema já está satisfeita tomando  $S = S^L$  e  $C = V(\mathcal{H}) \setminus T^L$ . Portanto, assumiremos o contrário daqui em diante, e nosso objetivo será mostrar que

$$e(G) \geq \frac{n\sqrt{d}}{16c}. \quad (12.10)$$

vale ao final da execução do algoritmo. Observe que o mesmo garante que

$$e(\mathcal{H}^i) \geq e(\mathcal{H}) - \Delta(\mathcal{H}) \cdot (|S^i| + |T^i| + |U^i|) - \Delta_2(\mathcal{H}) \cdot e(G^i). \quad (12.11)$$

Se  $|U^L| \geq 32\delta n$ , o grafo  $G$  tem pelo menos  $16\delta n \cdot c\sqrt{d}$  arestas, satisfazendo (12.10). Por outro lado, se  $|U^L| < 32\delta n$  e (12.10) não vale, então decorre da equação (12.11) que

$$d_{\mathcal{H}_i}(v_{k(i)}^i, U_i) \geq d - 3 \cdot \left( 33c\delta d - \frac{d}{16} \right) \geq \frac{d}{8},$$

onde  $U_i = V(\mathcal{H}^i) \setminus T^{i+1}$ . Assim, considerando que um par pode estar em no máximo  $\Delta_2(\mathcal{H})$  arestas de  $\mathcal{H}$  e lembrando que  $L = \lfloor n/\sqrt{d} \rfloor \geq n/2\sqrt{d}$ , adicionamos um total de

$$\frac{1}{\Delta_2(\mathcal{H})} \sum_{i=0}^{L-1} d_{\mathcal{H}_i}(v_{k(i)}^i, U_i) \geq \frac{n\sqrt{d}}{16c},$$

arestas a  $G^L$ , um absurdo que mostra que (12.10) também é verificado nesse caso. Como um passo do algoritmo aumenta o grau de um vértice de  $G$  em no máximo  $\Delta(\mathcal{H})$ , a definição de  $U^{i+1}$  nos permite concluir que  $\Delta(G^L) \leq 2c\sqrt{d}$ . Assim, podemos aplicar o Lema 12.6.1 com parâmetros  $16c^2$  e  $\delta$  e obter funções  $S'$  e  $C'$  tais que  $S'(I) \subseteq I \subseteq C'(I)$  e, para todo  $S' = S'(I)$ ,

$$|S'| \leq \left\lceil \frac{2\delta n^2}{e(G)} \right\rceil \leq \frac{n}{\sqrt{d}} \quad \text{e} \quad |C'(S') \setminus S'| \leq (1 - \delta)n.$$

Seja  $S = S^L \cup S'$ . Assim como no Lema 12.1.2, podemos notar que executar o algoritmo modificado de Kleitman e Winston na entrada  $S \subseteq I$  recupera o mesmo conjunto de vértices  $S^L$ . Observando que o grafo  $G^L$  depende apenas de  $S^L$ , isso nos permite definir  $C(S) = C'(S \setminus S^L)$ . Isso conclui a prova.  $\square$

Finalmente, vamos usar o Lema 12.3.4 para provar o Teorema 12.3.5.

*Demonstração do Teorema 12.3.5.* Seja  $\delta > 0$  dado por aplicar o Lema 12.3.4 com parâmetro  $c' = c/\varepsilon$ . Vamos construir uma árvore enraizada  $\mathcal{T}$  com vértices e arestas rotulados por subconjuntos de  $V(H)$ ; os rótulos serão representados por uma função  $\ell: V(H) \cup E(H) \rightarrow \mathcal{P}(V(H))$ .

Começamos com um único vértice, a raiz  $r$ , que terá rótulo  $\ell(r) = V(H)$ . Trivialmente, todo  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$  está contido em  $\ell(r)$ . Para  $v \in V(\mathcal{T})$ , seja  $w_0 w_1 \cdots w_k$  o caminho ligando  $r = w_0$  a  $v = w_k$  e escreva  $\hat{\ell}(v) = \bigcup_{i=1}^k \ell(w_{i-1} w_i)$ . Iremos aumentar a árvore mantendo a propriedade de que se  $v$  não é uma folha de  $\mathcal{T}$  e  $I$

é um conjunto independente com  $\hat{\ell}(v) \subseteq I \subseteq \hat{\ell}(v) \cup \ell(v)$ , então existe filho  $w$  de  $v$  tal que  $\hat{\ell}(w) \subseteq I \subseteq \hat{\ell}(w) \cup \ell(w)$ .

Se existir uma folha  $v$  de  $\mathcal{T}$  com  $\ell(v) = X$  satisfazendo  $e(\mathcal{H}[X]) \geq \varepsilon e(\mathcal{H})$ , a escolha de  $c'$  nos permite aplicar o Lema 12.5.1 ao grafo  $\mathcal{H}[X]$  para obter duas funções  $S$  e  $C$ . Nesse caso, para cada conjunto  $S'$  da família

$$\mathcal{S} = \{S(I) : I \in \mathcal{I}(\mathcal{H}[X])\},$$

criamos um novo vértice  $w$  em  $\mathcal{T}$  com rótulo  $\ell(w) = C(S') \setminus S'$ , e adicionamos a aresta  $vw$  com rótulo  $\ell(vw) = S'$ . Temos que se  $w$  é filho de  $v$  em  $T$ , então  $\ell(w) \leq (1 - \delta)\ell(v)$ .

Como o grau médio de  $\mathcal{H}[X]$  é pelo menos  $\varepsilon d$ , temos que todo elemento de  $\mathcal{S}$  tem tamanho no máximo  $n/\sqrt{\varepsilon d}$ . Além disso, como todo conjunto  $X$  de tamanho menor que  $\varepsilon n/3c$  tem menos que  $\varepsilon e(\mathcal{H})$  arestas pela condição em  $\Delta(\mathcal{H})$ , e os conjuntos diminuem por um fator de  $(1 - \delta)$  a cada passo, concluímos que a árvore tem altura limitada por uma constante  $h = h(c, \varepsilon)$ .

Ao final do procedimento, todas as folhas  $v$  de  $\mathcal{T}$  satisfazem  $e(\mathcal{H}[\ell(v)]) < \varepsilon e(\mathcal{H})$ . Além disso, mantivemos a propriedade de que se  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ , então existe folha de  $v$  tal que  $S = \hat{\ell}(v)$  satisfaz  $S \subseteq I \subseteq \ell(v) \cup S$ . Assim, dado  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ , escolha arbitrariamente uma folha de  $v$  com essa propriedade e defina

$$S(I) = \hat{\ell}(v) \quad \text{e} \quad C(I) = \ell(v) \cup S(I).$$

Definindo  $\lambda = h/\sqrt{\varepsilon}$ , vale que  $|S(I)| \leq \lambda n/\sqrt{d}$ . Por argumento inteiramente análogo ao do Lema 12.1.2, é possível mostrar que a execução do algoritmo em  $S(I)$  permite recuperar as assinaturas usadas em cada uma das iterações do Lema 12.5.1 e, portanto, nossa função  $C$  depende apenas de  $S(I)$ . Isso conclui a prova.  $\square$

## 12.7 Exercícios

**Exercício 12.7.1.** Quantos conjuntos independentes de tamanho  $m$  um grafo  $d$ -regular com  $n$  vértices pode ter?

**Exercício 12.7.2.** Kleitman mostrou a seguinte versão supersaturada do Teorema de Sperner:

Sejam  $n, t \in \mathbb{N}$ , e seja  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}([n])$ . Se  $|\mathcal{A}| \geq \binom{n}{n/2} + t$ , então existem pelo menos  $tn/2$  pares  $A, B \in \mathcal{A}$  com  $A \subseteq B$ .



Use o lema de contêineres para grafos e o resultado acima para deduzir que existem  $2^{(1+o(1))\binom{n}{2}}$  anticadeias em  $\mathcal{P}([n])$ .

**Exercício 12.7.3.** Prove que se  $n \ll m \ll n^{3/2}$ , então quase todos os grafos sem triângulos com  $n$  vértices e  $m$  arestas estão  $(m/2 - o(m))$ -longe de serem bipartidos.

**Exercício 12.7.4.** Uma tripla  $(x, y, z)$  tal que  $x + y = z$  é chamada de *tripla de Schur*. Lembre-se que um conjunto é *livre de soma* se não contém tripla de Schur.

(a) Prove o seguinte resultado de supersaturação:

Se  $A \subseteq [n]$  e  $|A| \geq (1/2 + \varepsilon)n$ , então  $A$  contém  $\delta n^2$  triplas de Schur.

(b) Prove o seguinte resultado de contêineres para conjuntos livres de soma.

Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que vale o seguinte. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem uma coleção  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $[n]$  e uma função

$$C : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{C}$$

com a seguinte propriedade. Para todo subconjunto  $A \subseteq [n]$  livre de soma, existe  $S \subseteq A$  tal que  $A \subseteq C(S)$ ,

$$|S| \leq \lambda n^{1/2},$$

e  $C(S) \setminus S$  contém no máximo  $\varepsilon n^2$  triplas de Schur.

(c) Seja  $[n]_p$  o subconjunto  $p$ -aleatório de  $[n]$ . Prove que, se  $p \gg 1/\sqrt{n}$ , então com alta probabilidade todo subconjunto de  $[n]_p$  de tamanho  $(1/2 + \varepsilon)pn$  contém uma tripla de Schur.

(d) Prove que se  $p \gg 1/\sqrt{n}$ , então com alta probabilidade toda  $r$ -coloração de  $[n]_p$  tem uma tripla de Schur monocromática.

**Exercício 12.7.5.** Um conjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}$  é dito *set* um *conjunto de Sidon* se não contém soluções para a equação  $x + y = z + w$  com  $\{x, y\} \neq \{z, w\}$ .

(a) Prove o seguinte teorema de supersaturação para pares de mesma soma:

Existem constantes  $C > 0$  e  $\delta > 0$  com a seguinte propriedade. Se  $A \subseteq [n]$  é um conjunto de tamanho  $|A| \geq C\sqrt{n}$ , então  $A$  contém pelo menos  $\delta|A|^4/n$  conjuntos  $\{x, y, z, w\}$  com  $x + y = z + w$ .

(b) Deduza que existem  $2^{O(\sqrt{n})}$  subconjuntos de Sidon de  $\{1, \dots, n\}$ .

**Exercício 12.7.6.** Seja  $H$  um hipergrafo  $k$ -uniforme. Prove que o número de hipergrafos  $k$ -uniformes  $H$ -livres com  $n$  vértices é  $2^{\text{ex}(n, H) + o(n^k)}$ .

# Bibliografia

---

- M. Ajtai, J. Komlós e E. Szemerédi (1980). “A note on Ramsey numbers”. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 29.3, pp. 354–360. MR: 0600598 (ver p. 192).
- P. Allen, J. Böttcher, S. Griffiths, Y. Kohayakawa e R. Morris (2013). “The chromatic thresholds of graphs”. *Adv. Math.* 235, pp. 261–295. MR: 3010059 (ver p. 172).
- N. Alon (1991). “Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups”. *Israel J. Math.* 73.2, pp. 247–256. MR: 1135215 (ver p. 266).
- N. Alon, M. Krivelevich e B. Sudakov (2003). “Turán Numbers of Bipartite Graphs and Related Ramsey-Type Questions”. *Combinatorics, Probability and Computing* 12.5-6, pp. 477–494 (ver p. 229).
- D. Bal e L. DeBiasio (2020). “New lower bounds on the size-Ramsey number of a path”. arXiv: 1909.06354 (ver p. 107).
- J. Balogh, R. Morris e W. Samotij (2015). “Independent sets in hypergraphs”. *J. Amer. Math. Soc.* 28.3, pp. 669–709. MR: 3327533 (ver p. 273).
- N. Bansal, D. Dadush e S. Garg (2019). “An algorithm for Komlós conjecture matching Banaszczyk’s bound”. *SIAM Journal on Computing* 48.2, pp. 534–553. MR: 3945254 (ver p. 215).
- J. Beck (1983a). “An upper bound for diagonal Ramsey numbers”. *Studia Sci. Math. Hungar.* 18.2-4, pp. 401–406. MR: 787944 (ver p. 231).
- (1983b). “On size Ramsey number of paths, trees, and circuits. I”. *J. Graph Theory* 7.1, pp. 115–129. MR: 693028 (ver p. 104).

- J. Beck e T. Fiala (1981). ““Integer-making” theorems”. *Discrete Applied Mathematics* 3.1, pp. 1–8. MR: 0604260 (ver p. 214).
- T. Bohman e P. Keevash (2021). “Dynamic concentration of the triangle-free process”. *Random Structures & Algorithms* 58.2, pp. 221–293. MR: 4201797 (ver p. 194).
- B. Bollobás (1965). “On generalized graphs”. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 16, pp. 447–452. MR: 183653 (ver p. 128).
- (1988). “The chromatic number of random graphs”. *Combinatorica* 8.1, pp. 49–55. MR: 0951992 (ver p. 221).
- B. Bollobás e P. Erdős (1976). “On a Ramsey-Turán type problem”. *J. Combinatorial Theory Ser. B* 21.2, pp. 166–168. MR: 424613 (ver p. 250).
- B. Bollobás e A. Thomason (1987). “Threshold functions”. *Combinatorica* 7.1, pp. 35–38. MR: 0905149 (ver pp. 115, 116).
- J. A. Bondy e M. Simonovits (1974). “Cycles of even length in graphs”. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 16.2, pp. 97–105. MR: 0340095 (ver pp. 172, 173).
- R. Boppana e J. Spencer (1989). “A useful elementary correlation inequality”. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 50.2, pp. 305–307. MR: 0989201 (ver p. 219).
- P. Borg (2012). “Intersecting families of sets and permutations: a survey”. *Int. J. Math. Game Theory Algebra* 21.6, 543–559 (2013). MR: 3100366 (ver p. 134).
- S. Brandt (2003). “On the Structure of Graphs with Bounded Clique Number”. *Combinatorica* 23.4, pp. 693–696. MR: 2047472 (ver p. 168).
- S. Brandt e S. Thomassé (2011). “Dense triangle-free graphs are four-colorable: A solution to the Erdos-Simonovits problem”. *preprint* (ver p. 172).
- R. L. Brooks (1941). “On colouring the nodes of a network”. Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 37. 2. Cambridge University Press, pp. 194–197. MR: 0012236 (ver p. 37).
- S. A. Burr e P. Erdős (1983). “Generalizations of a Ramsey-theoretic result of Chvátal”. *Journal of Graph Theory* 7.1, pp. 39–51. MR: 0693019 (ver p. 231).
- V. Chvátal (1977). “Tree-complete graph Ramsey numbers”. *J. Graph Theory* 1.1, p. 93. MR: 465920 (ver p. 75).
- V. Chvátal, V. Rödl, E. Szemerédi e W. T. Trotter Jr. (1983). “The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree”. *J. Combin. Theory Ser. B* 34.3, pp. 239–243. MR: 714447 (ver p. 250).
- D. Conlon (2009a). “A new upper bound for diagonal Ramsey numbers”. *Ann. of Math. (2)* 170.2, pp. 941–960. MR: 2552114 (ver p. 71).

- D. Conlon (2009b). “Hypergraph packing and sparse bipartite Ramsey numbers”. *Combin. Probab. Comput.* 18.6, pp. 913–923. MR: 2550376 (ver p. 231).
- D. Conlon, J. Fox e B. Sudakov (2010). “Hypergraph ramsey numbers”. *Journal of the American Mathematical Society* 23.1, pp. 247–266. MR: 2552253 (ver pp. 197, 200, 201).
- (2013). “An improved bound for the stepping-up lemma”. *Discrete Applied Mathematics* 161.9, pp. 1191–1196. MR: 3030610 (ver p. 204).
- (2015). “Recent developments in graph Ramsey theory.” *Surveys in combinatorics* 424.2015, pp. 49–118. MR: 3497267 (ver p. 204).
- D. Conlon e W. T. Gowers (2016). “Combinatorial theorems in sparse random sets”. *Ann. of Math. (2)* 184.2, pp. 367–454. MR: 3548529 (ver p. 285).
- D. W. Cranston e L. Rabern (2015). “Brooks’ Theorem and beyond”. *Journal of Graph Theory* 80.3, pp. 199–225. MR: 3403726 (ver p. 37).
- M. Deza, P. Frankl e N. M. Singhi (1983). “On functions of strength  $t$ ”. *Combinatorica* 3.3-4, pp. 331–339. MR: 729786 (ver p. 137).
- A. Dudek e P. Prałat (2015). “An alternative proof of the linearity of the size-Ramsey number of paths”. *Combin. Probab. Comput.* 24.3, pp. 551–555. MR: 3326432 (ver p. 104).
- (2017). “On some multicolor Ramsey properties of random graphs”. *SIAM J. Discrete Math.* 31.3, pp. 2079–2092. MR: 3697158 (ver p. 107).
- P. Erdős (1938). “On sequences of integers no one of which divides the product of two others and on some related problems”. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. Mech. Univ. Tomsk* 2, pp. 74–82 (ver pp. 53, 229).
- (1947). “Some remarks on the theory of graphs”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 53.4, pp. 292–294. MR: 0019911 (ver p. 70).
- (1961). “Graph theory and probability. II”. *Canadian Journal of Mathematics* 13, pp. 346–352. MR: 0120168 (ver pp. 190, 212).
- (1964). “Extremal problems in graph theory”. Em: *Theory of Graphs and its Applications (Proc. Sympos. Smolenice, 1963)*. Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague, pp. 29–36. MR: 0180500 (ver p. 57).
- P. Erdős e T. Gallai (1959). “On maximal paths and circuits of graphs”. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 10.3-4, pp. 337–356. MR: 0114772 (ver p. 57).
- P. Erdős e A. Hajnal (1972). “On Ramsey like theorems, problems and results”. Em: *Combinatorics (Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972)*. Citeseer, pp. 123–140. MR: 0337636 (ver p. 199).

- P. Erdős, A. Hajnal e R. Rado (1965). "Partition relations for cardinal numbers". *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 16, pp. 93–196. MR: 202613 (ver pp. 201, 202, 204).
- P. Erdős, C. Ko e R. Rado (1961). "Intersection theorems for systems of finite sets". *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 12, pp. 313–320. MR: 140419 (ver p. 132).
- P. Erdős e L. Lovász (1975). "Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions". Em: *Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday)*, Vol. II, 609–627. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. MR: 0382050 (ver pp. 206, 207).
- P. Erdős e R. Rado (1952). "Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set". *Proceedings of the London mathematical Society* 3.1, pp. 417–439. MR: 0065615 (ver p. 195).
- P. Erdős e M. Simonovits (1973). "On a valence problem in extremal graph theory". *Discrete Math.* 5, pp. 323–334. MR: 342429 (ver p. 170).
- P. Erdős e A. H. Stone (1946). "On the structure of linear graphs". *Bull. Amer. Math. Soc.* 52, 1087–1091, p. 1. MR: 0018807 (ver pp. 63, 152).
- P. Erdős e G. Szekeres (1935). "A combinatorial problem in geometry". *Compositio Math.* 2, pp. 463–470. MR: 1556929 (ver pp. 68, 69, 79, 195).
- P. Erdős e P. Tetali (1990). "Representations of integers as the sum of  $k$  terms". *Random Structures Algorithms* 1.3, pp. 245–261. MR: 1099791 (ver p. 190).
- P. Erdős e P. Turán (1936). "On some sequences of integers". *Journal of the London Mathematical Society* 1.4, pp. 261–264 (ver p. 189).
- L. Euler (1741). "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". *Comment. Acad. Sci. Imp. Petropol* 8, pp. 128–140 (ver p. 22).
- G. Fiz Pontiveros, S. Griffiths e R. Morris (2020). "The triangle-free process and the Ramsey number  $R(3, k)$ ". *Mem. Amer. Math. Soc.* 263.1274, pp. v+125. MR: 4073152 (ver p. 194).
- J. Folkman (1970). "Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring". *SIAM J. Appl. Math.* 18, pp. 19–24. MR: 268080 (ver p. 119).
- C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn e J. Ginibre (1971). "Correlation inequalities on some partially ordered sets". *Communications in Mathematical Physics* 22.2, pp. 89–103 (ver p. 216).
- J. Fox, P.-S. Loh e Y. Zhao (2015). "The critical window for the classical Ramsey-Turán problem". *Combinatorica* 35.4, pp. 435–476. MR: 3386053 (ver p. 250).
- J. Fox e B. Sudakov (2009). "Density theorems for bipartite graphs and related Ramsey-type results". *Combinatorica* 29.2, pp. 153–196. MR: 2520279 (ver p. 231).

- J. Fox e B. Sudakov (2011). “Dependent random choice”. *Random Structures & Algorithms* 38.1-2, pp. 68–99. MR: 2768884 (ver p. 224).
- T. Franco (2021). *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (ver p. 83).
- P. Frankl (1984). “A new short proof for the Kruskal-Katona theorem”. *Discrete Math.* 48.2-3, pp. 327–329. MR: 737276 (ver p. 149).
- P. Frankl e V. Rödl (1986). “Large triangle-free subgraphs in graphs without  $K_4$ ”. *Graphs Combin.* 2.2, pp. 135–144. MR: 932121 (ver pp. 119, 275, 280).
- P. Frankl e R. M. Wilson (1981). “Intersection theorems with geometric consequences”. *Combinatorica* 1.4, pp. 357–368. MR: 0647986 (ver pp. 70, 71, 139).
- Z. Füredi (1991). “On a Turán type problem of Erdős”. *Combinatorica* 11.1, pp. 75–79. MR: 1112277 (ver p. 229).
- (2015). “A proof of the stability of extremal graphs, Simonovits’ stability from Szemerédi’s regularity”. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 115, pp. 66–71. MR: 3383250 (ver pp. 60, 62).
- L. Gerencsér e A. Gyárfás (1967). “On Ramsey-type problems”. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 10, pp. 167–170. MR: 239997 (ver p. 75).
- W. T. Gowers (1997). “Lower bounds of tower type for Szemerédi’s uniformity lemma”. *Geom. Funct. Anal.* 7.2, pp. 322–337. MR: 1445389 (ver p. 257).
- (1998). “A New Proof of Szemerédi’s Theorem for Arithmetic Progressions of Length Four”. *Geometric And Functional Analysis* 8.3, pp. 529–551 (ver p. 224).
- R. L. Graham, V. Rödl e A. Ruciński (2001). “On bipartite graphs with linear Ramsey numbers”. Em: vol. 21. 2. Paul Erdős and his mathematics (Budapest, 1999), pp. 199–209. MR: 1832445 (ver p. 231).
- R. L. Graham, B. L. Rothschild e J. Spencer (1990). *Ramsey theory*. Vol. 20. John Wiley & Sons. MR: 1044995 (ver pp. 202, 204).
- V. Grolmusz (2000). “Superpolynomial size set-systems with restricted intersections mod 6 and explicit Ramsey graphs”. *Combinatorica* 20.1, pp. 71–85. MR: 1770535 (ver p. 140).
- A. W. Hales e R. I. Jewett (1963). “Regularity and Positional Games”. *Transactions of the American Mathematical Society* 106.2, pp. 222–229. MR: 0143712 (ver p. 188).
- T. E. Harris (1960). “A lower bound for the critical probability in a certain percolation process”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 56.1, pp. 13–20 (ver p. 216).
- S. Janson, T. Łuczak e A. Ruciński (1990). “An exponential bound for the probability of nonexistence of a specified subgraph in a random graph”. Em: *Random*

- graphs '87 (Poznań, 1987)*. Ed. por J. J. M. Karonski e A. Ruciński. Chichester: John Wiley e Sons, pp. 73–87. MR: 1094125 (ver p. 218).
- (2000). *Random graphs*. Wiley - Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley - Interscience, New York, pp. xii+333. MR: 1782847 (ver p. 104).
- J. Kahn (2001). “An entropy approach to the hard-core model on bipartite graphs”. *Combin. Probab. Comput.* 10.3, pp. 219–237. MR: 1841642 (ver p. 267).
- G. O. H. Katona (1964). “Intersection theorems for systems of finite sets”. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 15, pp. 329–337. MR: 168468 (ver p. 134).
- (1972). “A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem”. *J. Combinatorial Theory Ser. B* 13, pp. 183–184. MR: 304181 (ver p. 132).
- (1974). “Solution of a problem of A. Ehrenfeucht and J. Mycielski”. *J. Combinatorial Theory Ser. A* 17, pp. 265–266. MR: 344130 (ver p. 130).
- P. Keevash (2011). “Hypergraph Turán problems”. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 392, pp. 83–139. MR: 2866732 (ver p. 166).
- J. H. Kim (1995). “The Ramsey number  $R(3, t)$  has order of magnitude  $t^2 / \log t$ ”. *Random Structures Algorithms* 7.3, pp. 173–207. MR: 1369063 (ver p. 194).
- D. J. Kleitman e K. J. Winston (1982). “On the number of graphs without 4-cycles”. *Discrete Mathematics* 41.2, pp. 167–172. MR: 0676877 (ver p. 260).
- Y. Kohayakawa (1997). “Szemerédi’s regularity lemma for sparse graphs”. Em: *Foundations of computational mathematics (Rio de Janeiro, 1997)*. Springer, Berlin, pp. 216–230. MR: 1661982 (ver p. 236).
- Y. Kohayakawa, T. Łuczak e V. Rödl (1996). “Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set”. *Acta Arith.* 75.2, pp. 133–163. MR: 1379396 (ver p. 282).
- (1997). “On  $K^4$ -free subgraphs of random graphs”. *Combinatorica* 17.2, pp. 173–213. MR: 1479298 (ver p. 285).
- Y. Kohayakawa e V. Rödl (2003). “Szemerédi’s regularity lemma and quasi-randomness”. Em: *Recent advances in algorithms and combinatorics*. Vol. 11. CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC. Springer, New York, pp. 289–351. MR: 1952989 (ver p. 236).
- A. V. Kostochka e V. Rödl (2001). “On graphs with small Ramsey numbers\*”. *Journal of Graph Theory* 37.4, pp. 198–204. MR: 1834850 (ver p. 224).
- P. Kővári, V. T. Sós e P. Turán (1954). “On a problem of Zarankiewicz”. Em: *Colloquium Mathematicum*. Vol. 3. Polska Akademia Nauk, pp. 50–57. MR: 0065617 (ver pp. 54, 229).



- M. Krivelevich (1995). “Bounding Ramsey numbers through large deviation inequalities”. *Random Structures & Algorithms* 7.2, pp. 145–155. MR: 1369060 (ver p. 190).
- L. Lovász (1975). “Three short proofs in graph theory”. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 19.3, pp. 269–271. MR: 0396344 (ver p. 37).
- D. Lubell (1966). “A short proof of Sperner’s lemma”. *J. Combinatorial Theory* 1, p. 299. MR: 194348 (ver p. 128).
- T. Łuczak (2000). “On triangle-free random graphs”. *Random Structures Algorithms* 16.3, pp. 260–276. MR: 1749289 (ver p. 279).
- W. Mantel (1907). “Problem 28”. *Wiskundige Opgaven* 10.60-61, p. 320 (ver p. 48).
- L. D. Mešalkin (1963). “A generalization of Sperner’s theorem on the number of subsets of a finite set”. *Teor. Verojatnost. i Primenen* 8, pp. 219–220. MR: 0150049 (ver p. 128).
- G. Moshkovitz e A. Shapira (2016). “A short proof of Gowers’ lower bound for the regularity lemma”. *Combinatorica* 36.2, pp. 187–194. MR: 3516883 (ver p. 257).
- D. Mubayi, O. Pikhurko e B. Sudakov (2011). “Hypergraph Turán problem: Some open questions”. Em: *AIM workshop problem lists, manuscript* (ver p. 166).
- D. Mubayi e A. Suk (2020). “A survey of hypergraph Ramsey problems”. Em: *Discrete Mathematics and Applications*. Springer, pp. 405–428 (ver p. 204).
- R. Nenadov e A. Steger (2016). “A short proof of the random Ramsey theorem”. *Combin. Probab. Comput.* 25.1, pp. 130–144. MR: 3438289 (ver p. 280).
- O. Pikhurko (2012). “A note on the Turán function of even cycles”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 140.11, pp. 3687–3692. MR: 2944709 (ver p. 173).
- R. Rado (1933). “Studien zur Kombinatorik”. *Mathematische Zeitschrift* 36.1, pp. 424–470. MR: 1545354 (ver p. 187).
- F. P. Ramsey (1930). “On a problem of formal logic”. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1, pp. 264–286. MR: 1576401 (ver pp. 67, 195).
- K. F. Roth (1952). “Sur quelques ensembles d’entiers”. *C. R. Acad. Sci. Paris* 234, pp. 388–390. MR: 46374 (ver pp. 189, 245).
- A. Sah (2020). “Diagonal Ramsey via effective quasirandomness”. arXiv: 2005.09251 (ver p. 71).
- A. A. Sapozhenko (2001). “On the number of independent sets in extenders”. *Diskret. Mat.* 13.1, pp. 56–62. MR: 1846037 (ver p. 266).
- D. Saxton e A. Thomason (2015). “Hypergraph containers”. *Invent. Math.* 201.3, pp. 925–992. MR: 3385638 (ver p. 273).

- M. Schacht (2016). “Extremal results for random discrete structures”. *Ann. of Math.* (2) 184.2, pp. 333–365. MR: 3548528 (ver p. 285).
- A. Seidenberg (1959). “A Simple Proof of a Theorem of Erdős and Szekeres”. *Journal of the London Mathematical Society* s1-34.3, pp. 352–352 (ver p. 80).
- S. Shelah (1988). “Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers”. *Journal of the American Mathematical Society* 1.3, pp. 683–697. MR: 0929498 (ver p. 188).
- L. Shi (2001). “Cube Ramsey numbers are polynomial”. *Random Structures Algorithms* 19.2, pp. 99–101. MR: 1848785 (ver p. 231).
- M. Simonovits (1968). “A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems”. Em: *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*. Academic Press, New York, pp. 279–319. MR: 0233735 (ver p. 59).
- J. Spencer (1975). “Ramsey’s theorem—a new lower bound”. *J. Combinatorial Theory Ser. A* 18, pp. 108–115. MR: 366726 (ver p. 209).
- (1977). “Asymptotic lower bounds for Ramsey functions”. *Discrete Math.* 20.1, pp. 69–76. MR: 491337 (ver p. 212).
- B. Sudakov (2003). “A few remarks on Ramsey–Turán-type problems”. *J. Combin. Theory Ser. B* 88.1, pp. 99–106. MR: 1973262 (ver p. 224).
- W. C. S. Suen (1990). “A correlation inequality and a poisson limit theorem for nonoverlapping balanced subgraphs of a random graph”. *Random Structures and Algorithms* 1.2, pp. 231–242. MR: 1138429 (ver p. 218).
- A. Suk (2016). “On the Erdős–Szekeres convex polygon problem”. *Journal of the American Mathematical Society* 30.4, pp. 1047–1053. MR: 3671936 (ver p. 80).
- E. Szemerédi (1969). “On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression”. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 20.1-2, pp. 89–104 (ver p. 189).
- (1972). “On graphs containing no complete subgraph with 4 vertices”. *Mat. Lapok* 23, 113–116 (1973). MR: 351897 (ver p. 248).
- (1975a). “On sets of integers containing  $k$  elements in arithmetic progression”. *Acta Arithmetica* 27, pp. 199–245. MR: 0369312 (ver p. 189).
- (1975b). “On sets of integers containing no  $k$  elements in arithmetic progression”. *Acta Arith.* 27, pp. 199–245. MR: 369312 (ver pp. 235, 245).
- A. Thomason (1988). “An upper bound for some Ramsey numbers”. *J. Graph Theory* 12.4, pp. 509–517. MR: 968746 (ver p. 71).
- C. Thomassen (2002). “On the chromatic number of triangle-free graphs of large minimum degree”. *Combinatorica* 22.4, pp. 591–596. MR: 1956996 (ver p. 172).

- C. Thomassen (2007). “On the chromatic number of pentagon-free graphs of large minimum degree”. *Combinatorica* 27.2, pp. 241–243. MR: 2321926 (ver p. 170).
- P. Turán (1941). “On an external problem in graph theory”. *Mat. Fiz. Lapok* 48, pp. 436–452. MR: 0018405 (ver p. 49).
- B. van der Waerden (1927). “Beweis einer baudetschen vermutung”. *Nieuw Arch. Wisk.* 19, pp. 212–216 (ver p. 184).
- J. Verstraëte (2000). “On arithmetic progressions of cycle lengths in graphs”. *Combinatorics, Probability and Computing* 9.4, pp. 369–373. MR: 1786926 (ver p. 173).
- M. B. Villarino, W. Gasarch e K. W. Regan (2018). “Hilbert’s Proof of His Irreducibility Theorem”. *The American Mathematical Monthly* 125.6, pp. 513–530 (ver p. 184).
- K. Yamamoto (1954). “Logarithmic order of free distributive lattice”. *J. Math. Soc. Japan* 6, pp. 343–353. MR: 67086 (ver p. 128).
- Y. Zhao (2010). “The number of independent sets in a regular graph”. *Combin. Probab. Comput.* 19.2, pp. 315–320. MR: 2593625 (ver p. 267).

# Índice de Notações

---

$\delta(G)$ , 24, 35  
 $\text{ex}(n, H)$ , 48  
 $\Delta_2$ , 273  
 $\text{dist}_G(u, v)$ , 26  
 $\Delta_i$ , 284

**D**  
 $d_G(v)$ , 23

**E**  
 $E(G)$ , 23  
 $e(G)$ , 23

**G**  
 $G \rightarrow H$ , 75  
 $g(G)$ , 26  
 $G[X]$ , 24

**K**  
 $K_{s,t}$ , 33

**N**  
 $N_G(v)$ , 23  
 $\binom{n}{k}$ , 10

**R**  
 $r(H_1, H_2)$ , 73  
 $R(k)$ , 68  
 $R(s, t)$ , 68  
 $R^{(3)}$ , 195  
 $R_r(k)$ , 71

**T**  
 $T_k(n)$ , 49  
 $t_k(n)$ , 49

**V**  
 $V(G)$ , 23  
 $v(G)$ , 23

**X**  
 $\binom{X}{k}$ , 10

# *Índice de Autores*

---

# Índice Remissivo

---

## A

alta probabilidade, 93  
anticadeia, 128  
aresta, 23  
árvore, 28  
    geradora, 31  
assinatura, 263

## B

bicolorível, 86  
bipartição, 33  
bipartido  
    classes, 33  
    partes, 33  
bloco, 38  
blow-up, 167  
busca em largura, 173

## C

caminho, 26  
    comprimento, 26

    hamiltoniano, 90

caso base, 13  
centro, 53  
cereja, 53  
ciclo, 26  
    hamiltoniano, 42  
cintura, 26  
classe de cor, 35  
clique, 24, 195  
coloração, 8, 35  
     $k$ -coloração, 35  
     $k$ -colorível, 35  
    própria, 35  
coloração de Sperner, 12  
componente  
    conexa, 28  
compressão, 146  
    à esquerda, 147  
condição de Hall, 41  
conjunto

excepcional, 234  
 independente, 24  
 livre de soma, 91  
 somas distintas, 99

contêiner, 263

convolução de Vandermonde, 11

cópia, 162

cor-focado, 185, 186

cota da união, 16

## D

densidade, 234

densidade de Turán, 162

desigualdade

de Chebyshev, 99

de Chernoff, 104

de Frankl e Wilson modular,  
 139

de Markov, 96

LYMB, 128

desvio padrão, 98

discrepância, 214

distância, 26

distribuição, 83

de Bernoulli, 88

uniforme, 84

## E

emparelhamento, 40

perfeito, 40

equipartição, 234

espaço amostral, 83

espaço de probabilidade, 83

esperança, 88

estabilidade, 59

estrela, 28

evento, 83

crescente, 216

decrecente, 216

independentes, 84

mutuamente independentes, 84

## F

face tricolor, 12

família

comprimida, 147

crescente, 116

intersectante, 127

foco, 185, 186

folha, 29, 53

função convexa, 92

função massa de probabilidade, 83

## G

grafo, 11, 22, 23

acíclico, 28

balanceado, 118

bipartido, 32

bipartido completo, 33

completo, 23

conexo, 15, 27

de Kneser, 134

denso, 236

desconexo, 28

euleriano, 44

hamiltoniano, 42

$H$ -extremal, 48

$H$ -livre, 48

isomorfo, 47

$k$ -partido, 49

livre de  $H$ , 48

multipartido, 49

reduzido, 241

regular, 39

sem  $H$ , 48

vazio, 23

grafo de dependência, 207

grafo de Turán, 49

grau, 23  
 2-grau máximo, 272  
*i*-grau máximo, 284  
 máximo, 24  
 médio, 31  
 mínimo, 24

**H**

hiperaresta, 162  
 hipergrafo, 161  
   completo, 195  
   *k*-uniforme, 86, 161  
   uniforme, 161  
 hipótese de indução, 13

**I**

impressão digital, 263  
 indução matemática forte, 14  
 intersectante, 127  
    $\ell$ -intersectante, 134  
   *L*-intersectante, 137

**J**

janela crítica, 115

**L**

Lema de Sperner, 11  
 limiar, 109, 111  
   cromático, 172  
   súbito, 115  
 livre de divisores, 9  
 livre de soma, 8  
 livre de triângulos, 49  
 longe de ser bipartido, 60

**M**

média, 88  
   quadrática, 252  
 método

  da alteração, 95  
   da rotação-extensão de Pósa, 57  
   do primeiro momento, 89  
   do segundo momento, 98  
 multilinearização, 138

**N**

número  
   cromático, 35  
   de independência, 24  
   de Ramsey, 68, 73  
   de Ramsey assimétrico, 97  
   de Ramsey para *r* cores, 71  
   de Ramsey–Turán, 224  
   de Turán, 162  
   extremal, 48  
   tamanho Ramsey, 81, 104

**O**

operador de compressão, 146, 147  
 operador linear, 88  
 ordem colexicográfica, 145

**P**

par regular, 234  
 partição, 8  
   classes, 8  
   partes, 8  
    $\varepsilon$ -regular, 235  
 partição regular, 187  
 passeio, 26  
 passo indutivo, 13  
 permutação, 18  
   circular, 133  
   desarranjo, 19  
 primeiro momento, 88  
 problemas aleatórios esparsos, 274  
 progressão aritmética  
   *k*-PA, 184



próximo  
de ser  $r$ -partido, 157

**Q**

quase todos, 278

**R**

raiz, 188  
refinamento, 253  
representação em  $k$ -cascata, 144  
reta combinatória, 188  
rotação de Pósa, 43

**S**

satura, 40  
segundo momento, 98  
simetrização de Zykov, 52  
sistema de Bollobás, 129  
sombra, 143  
subdivisão, 108  
subgrafo, 23  
    gerador, 31  
    induzido, 24  
supersaturação, 59

**T**

torneio, 86, 200

$t$ -próximo, 157  
 $t$ -próximo de ser bipartido, 60  
transitivo, 200  
triângulo, 49  
trilha, 44  
    euleriana, 44  
    fechada, 44  
tripla de Schur, 290

**U**

uniformemente ao acaso, 84

**V**

valor esperado, 88  
variância, 98  
variável aleatória, 87  
    binomial, 89  
    independente, 89  
    indicadora, 88  
vértice, 23  
    adjacentes, 23  
    de corte, 37  
vetor característico, 137  
vizinhança, 23  
vizinhos, 23

## **Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática**

- Geometria Lipschitz das singularidades** – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*
- Combinatória** – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*
- Códigos geométricos, uma introdução via corpos de funções algébricas** – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*
- Topologia e geometria de 3-variedades, uma agradável introdução** – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*
- Ciência de dados: algoritmos e aplicações** – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*
- Discovering Poncelet invariants in the plane** – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*
- Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além** – *Víctor León e Bruno Scárdua*
- Equações diferenciais e modelos epidemiológicos** – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*
- Differential Equation Models in Epidemiology** – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*
- A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes** – *Sinai Robins*
- PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria** – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*
- First steps into Model Order Reduction** – *Alessandro Alla*
- The Einstein Constraint Equations** – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*
- Dynamics of Circle Mappings** – *Edson de Faria e Pablo Guarino*
- Statistical model selection for stochastic systems with applications to Bioinformatics, Linguistics and Neurobiology** – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*
- Transfer operators in Hyperbolic Dynamics - an introduction** – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*
- A course in Hodge Theory: Periods of Algebraic Cycles** – *Hossein Movasati e Roberto Villaflor Loyola*
- A dynamical system approach for Lane-Emden type problems** – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*
- Visualizing Thurston's geometries** – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*
- Scaling problems, algorithms and applications to Computer Science and Statistics** – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*
- An introduction to Characteristic Classes** – *Jean-Paul Brasselet*



Instituto de  
Matemática  
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-53-5

