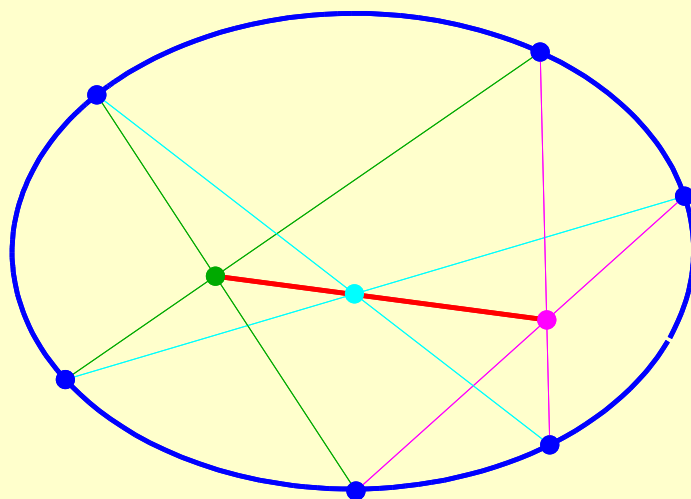


**Antonio Carlos T. de C. Auffinger  
Fábio Júlio da Silva Valentim**

# **INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PROJETIVA**



**Universidade Federal do Espírito Santo  
Departamento de Matemática  
Vitória, Setembro de 2003**

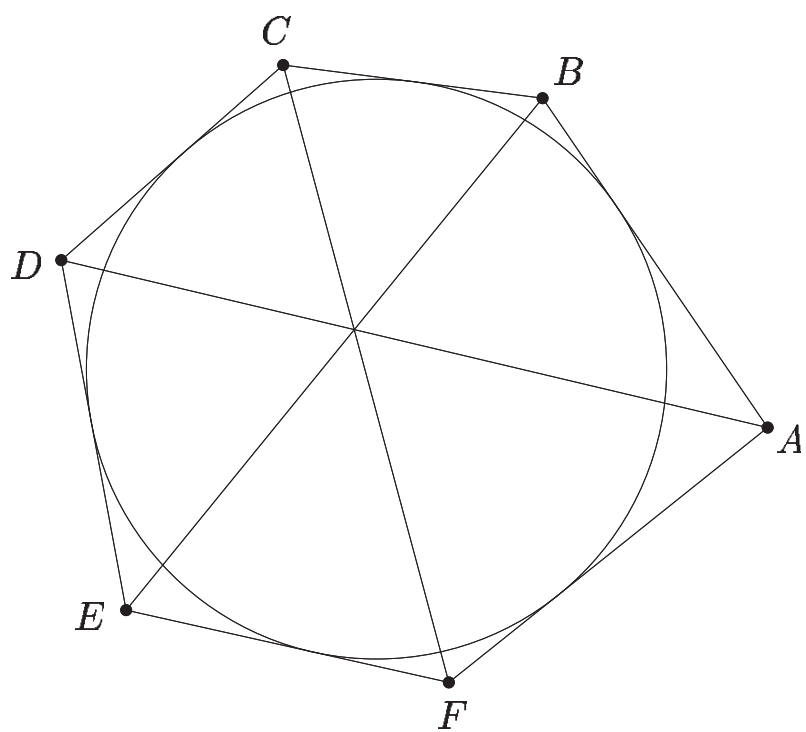


# Introdução à Geometria Projetiva

Antonio Carlos Theodoro de C Auffinger\*  
Fábio Júlio da Silva Valentim\*

30 de setembro de 2003

\*Alunos do Curso de Graduação em Matemática da UFES



Teorema de Brianchon

# Prefácio

Estas notas nasceram de um Projeto de Ensino, sob minha responsabilidade, iniciado em Agosto/2001 com *Os Três Mosqueteiros* Cleres, Fábio e Tuca, alunos do curso de Matemática da UFES. O projeto consistia em estudar os elementos da geometria projetiva clássica, sintética, e de divulgá-la pelo menos no âmbito da UFES. A bibliografia inicial foi sugerida, muito acertadamente, pelo Prof. Valmecir Bayer, que nos emprestou seu exemplar pessoal do excelente livro *Projective Geometry*, de H. S. M. Coxeter. Começamos o trabalho e logo nos empolgamos com a simplicidade, a simetria e a beleza da geometria projetiva. Foram dois anos de reuniões semanais onde discutíamos os fundamentos da geometria e resolvíamos problemas, mas também jogávamos muita conversa fora. Era só alegria... como dizia o Fábio. Muito legal, sem dúvida o projeto de ensino mais bem sucedido que já conduzi.

Inicialmente o Projeto estava vinculado ao programa PET, mas no ano seguinte foi incluído no Projeto Milênio. Nesta época, o Cleres resolveu estudar curvas algébricas com o Prof. Valmecir e deixou o grupo. Foi chato, estávamos emocionalmente envolvidos neste projeto e o Cleres fez falta. Mas continuamos, apenas com o Fábio e o Tuca. Quando começamos o estudo das cônicas, que beleza, o ritmo dos estudos se intensificou muito e rapidamente concluímos o restante do material.

Resolvemos então escrever umas notas introdutórias para que elas pudessem servir de estímulo, ou ponto de partida, para outros alunos que venham a se interessar por esta área tão bela da matemática elementar e que tem estado tão ausente nos currículos atuais dos cursos de Matemática. Esperamos que elas sejam úteis de alguma maneira.

Finalmente, quero deixar claro que tudo o que aqui está é de autoria exclusiva do Fábio e do Tuca, baseados na bibliografia no final do texto. A minha participação se limitou a fazer algumas poucas considerações e sugestões.

Luiz Fernando C. Camargo

Vitória – ES  
Dezembro, 2003

# Agradecimentos

Não haveria conquistas se não houvesse obstáculos a superar e a parte mais gratificante é poder contar com aliados nos melhores e piores momentos para obter essas conquistas.

Para a realização deste, sinceros agradecimentos principalmente a Deus, por ter nos dado força em todos os momentos, ao professor orientador e amigo Luiz Fernando Cassiani Camargo, pelo seu total apoio.

Este trabalho é resultado de um projeto de Iniciação Científica financiado pelo Instituto do Milênio - Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira (IM-AGIMB).

Bolsistas:

Antonio Carlos Theodoro de C. Auffinger  
Fábio Júlio da Silva Valentim

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Aspectos gerais . . . . .	1
1.2 Primeiras noções . . . . .	3
1.3 Notações e definições . . . . .	4
1.4 Projetividades e perspectividades . . . . .	5
EXERCÍCIOS . . . . .	8
<b>2 Fundamentos</b>	<b>10</b>
2.1 Axiomas . . . . .	10
2.2 O Teorema de Desargues . . . . .	14
2.3 Modelos . . . . .	16
EXERCÍCIOS . . . . .	17
<b>3 O Princípio da dualidade</b>	<b>19</b>
3.1 O Princípio da dualidade . . . . .	19
3.2 Conjuntos quadrangulares e harmônicos . . . . .	20
3.3 O Teorema Fundamental . . . . .	23
3.4 O Teorema de Pappus . . . . .	25
EXERCÍCIOS . . . . .	26
<b>4 Projetividades</b>	<b>28</b>
4.1 Pontos invariantes . . . . .	28
4.2 Projetividades parabólicas . . . . .	29
4.3 Involuções . . . . .	30
4.4 Projetividades bi-dimensionais . . . . .	31
4.5 Colineações perspectivas . . . . .	33
4.6 Polaridades . . . . .	35

EXERCÍCIOS . . . . .	38
<b>5 Cônicas</b>	<b>40</b>
5.1 Aspectos históricos . . . . .	40
5.2 A definição de von Staudt . . . . .	40
5.3 A definição de Steiner . . . . .	43
5.4 Os teoremas de Brianchon e Pascal . . . . .	45
5.5 A involução de Desargues . . . . .	46
EXERCÍCIOS . . . . .	49
<b>Referências</b>	<b>51</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>52</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>54</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo procuramos motivar o estudo da geometria projetiva, dando ênfase a alguns aspectos históricos relevantes. Fixamos a notação a ser utilizada no texto e introduzimos as noções fundamentais de projetividade e perspectividade.

### 1.1 Aspectos gerais

A história da geometria projetiva começa na Itália do século XV, junto com o Renascimento. Os artistas, buscando mais realismo para suas obras, introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectividade. Porém, demorou cerca de dois séculos para que essas idéias pudessem ser formuladas matematicamente. Foi apenas em 1639, com o célebre e pioneiro trabalho sobre a teoria geométrica das cônicas, o *Broullion Projet*, que Girard Desargues (1591-1661) formalizou esses conceitos. Contudo, talvez pela própria maneira como tinham sido escritos, em uma linguagem um tanto peculiar, o trabalho e as idéias de Desargues não foram bem aceitos na época. Somente no início do século XIX, Jean Victor Poncelet (1788-1867) pôde resgatá-los.

Poncelet, aluno da *École Polytechnique* e da Academia Militar de Metz, foi preso durante a campanha napoleônica contra a Rússia e nos dois anos que passou na prisão, sem livros, desenvolveu idéias que revolucionariam a geometria da época. Seus trabalhos, encabeçados pelo clássico *Traité des Propriétés Projectives des Figures* de 1822, deram-lhe o mérito de ser conhecido como o pai da geometria projetiva.

Após Poncelet, outros grandes nomes surgiram na geometria projetiva, como Michel Chasles (1798-1867), Jacob Steiner (1796-1863), Karl Christian e Von Staudt (1798-1867). Enfim, no final do século XIX, a geometria projetiva estava definitivamente solidificada.

Mas, afinal, a geometria projetiva se preocupa com o quê exatamente? É mais fácil responder essa pergunta fazendo uma pequena analogia com a geo-

metria que conhecemos desde o primário, a euclidiana: Enquanto a geometria euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos, a geometria projetiva lida com o mundo que vemos. Na prática, os trilhos de trem não são retas paralelas, mas retas que se encontram no horizonte, no infinito. Essa é uma das características marcantes da geometria projetiva, duas retas quaisquer sempre se intersectam.

Observaremos também que, ao contrário da geometria euclidiana, todo o desenvolvimento da geometria projetiva pode ser feito usando-se apenas uma régua não graduada. Daremos outro exemplo essa distinção entre a geometria euclidiana e a projetiva

Uma figura  $\Sigma$  em um plano  $\alpha$  é dita uma *projeção central* de uma figura  $\Omega$  contida em outro plano  $\beta$ , se existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de  $\Sigma$  e os pontos de  $\Omega$ , de modo que as retas ligando pontos correspondentes são concorrentes em um mesmo ponto  $P$  do espaço, denominado o *centro da projeção*. Observe que se os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos então  $\Sigma$  e  $\Omega$  serão figuras semelhantes. No caso de  $\beta$  e  $\alpha$  não paralelos, considere  $\alpha'$  o plano paralelo a  $\alpha$  passando por  $P$  e a reta  $r$  como a intersecção dos planos  $\beta$  com  $\alpha'$ . Assim,  $r$  tem sua imagem no infinito, visto que para todo ponto  $X$  sobre  $r$  a reta  $PX$  é paralela a  $\alpha$ , não possuindo dessa forma uma imagem ordinária. Percebe-se que retas concorrentes em pontos não incidentes a  $r$  são projetadas em retas concorrentes. E as retas que são concorrentes em pontos sobre  $r$ , estas terão como imagem um par de retas paralelas. Olhemos agora para a imagem de vários círculos sobre  $\beta$ . Um círculo que não toca a reta  $r$  terá imagem uma elipse, círculos em que a reta  $r$  é tangente terão imagem uma parábola e por último, círculos em que a reta  $r$  é secante terão imagem uma hipérbole, como se observa na figura 1.1. Estaremos estudando essencialmente as figuras invariantes por este tipo de projeção, ressaltando que no nosso plano não haverá distinção entre parábolas, elipses e hipérbolas. Existem outros indícios que nos levam ao estudo da geometria projetiva.

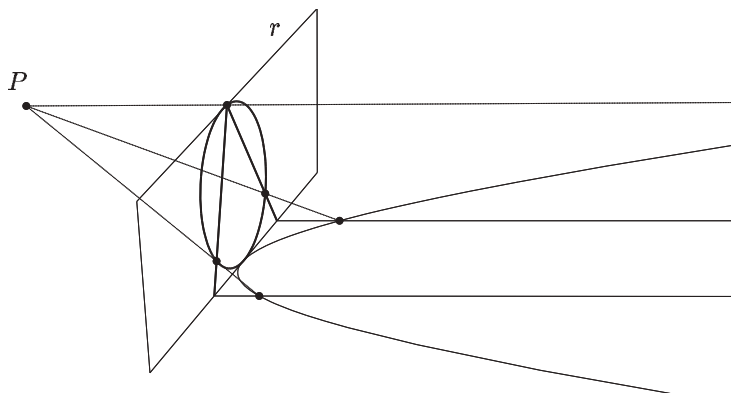


Figura 1.1: Projeção central

## 1.2 Primeiras noções

De fato, a existência de teoremas básicos com enunciados ‘retalhados’ na geometria euclidiana nos sugere que a geometria desenvolvida por Euclides não é de natureza apropriada para certos resultados. Por exemplo, um enunciado cuidadoso do Teorema de Pascal na geometria euclidiana seria:

**Teorema 1.2.1.** *Seja  $ABCDEF$  um hexágono inscrito sobre uma cônica então vale uma das três afirmações:*

- (i) *Se  $AB$  é paralelo a  $DE$  e  $BC$  é paralelo a  $EF$  tem-se  $AF$  paralelo a  $CD$*
- (ii) *Se existem  $P$  e  $Q$  pontos tais que  $P = AB \cdot DE$  e  $Q = BC \cdot EF$  e, além disso,  $AF$  é paralelo a  $CD$ , então  $PQ$  é paralelo a  $AF$*
- (iii) *Se existem  $P$ ,  $Q$  e  $R$  pontos,  $P$  e  $Q$  como acima, e  $R = AF \cdot CD$  então  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares.*

Essencialmente, uma e apenas uma das três condições acima ocorre. Repare que as diversas possibilidades de que os lados opostos do hexágono no Teorema de Pascal sejam paralelos aumenta, de fato, o número de casos a analisarmos. O próprio Pascal contornou este obstáculo enunciando-o engenhosamente em seu trabalho *Essay pour les coniques* (1640) conforme abaixo:

**Teorema 1.2.2.** *Se no plano  $MSQ$ , são traçadas duas retas  $MK$  e  $MV$  a partir de  $M$ , duas retas  $SK$  e  $SV$  a partir de  $S$  e se um círculo por  $K$  e  $V$  intersecta as quatro retas  $MV$ ,  $MK$ ,  $SV$ ,  $SK$  em pontos distintos  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  e  $N$ , respectivamente, então as três retas  $MS$ ,  $NO$  e  $PQ$  são concorrentes.*

Através desses e de outros indícios, surge a idéia de realizarmos uma nova geometria. Uma geometria sem retas paralelas, onde poderíamos encontrar uma melhor acomodação para resultados como o Teorema de Pascal. Mas como desenvolvê-la? Uma primeira tentativa seria a de estendermos o plano euclidiano da seguinte forma:

Considere a relação  $\sim$  entre as retas de um plano euclidiano  $\alpha$  tal que, se  $l$  e  $r$  são retas do plano  $\alpha$ ,  $l \sim r \Leftrightarrow l$  é paralela a  $r$ . Claramente,  $\sim$  é uma relação de equivalência, ou seja,  $\sim$  é reflexiva, simétrica e transitiva. Portanto, podemos considerar o conjunto quociente  $\alpha / \sim$  das classes de equivalência  $[x]$ , onde  $x$  é uma reta de  $\alpha$ . Assim,  $[l]$ , por exemplo, representa o conjunto de todas as retas do plano  $\alpha$  que são paralelas à reta  $l$ , chamado um *feixe de paralelas* de  $\alpha$ .

Assim, a partir desta relação, podemos associar a cada classe  $[x]$  um ponto  $X$  chamado *ponto ideal*, tal que, se  $r$ ,  $s$  pertencem a  $[x]$  então  $r \cdot s = X$ . Com certeza, neste momento, duas retas quaisquer no nosso plano sempre se intersectam (em um ponto ideal, ou em um ponto ordinário). Porém, dados dois pontos ideais seria conveniente ter uma reta incidente a ambos. Para isto, consideramos uma nova reta em nosso plano, a reta no infinito, aquela que contém todos os pontos ideais. Veremos no próximo capítulo, que este nosso plano, assim obtido, satisfaz a todos os axiomas da geometria projetiva plana e portanto é um modelo de plano projetivo.

Voltemos agora ao Teorema de Pascal. Em nosso plano euclidiano estendido, seu enunciado seria extremamente mais simples:

**Teorema 1.2.3.** *Os lados opostos de um hexágono inscrito em uma cônica intersectam-se em pontos colineares.*

Cabe ressaltar, neste momento, que a geometria a ser desenvolvida pelo conjunto de axiomas propostos no capítulo 2 não é *categórica*, ou seja, existem modelos não isomorfos onde todos os axiomas (e portanto todas as proposições) são válidos. Na verdade, verificaremos que existem modelos finitos para a geometria projetiva, modelos onde cada reta possui um número finito  $n$  de pontos e por cada ponto passam exatamente  $n$  retas. Outra observação interessante a ser feita para o leitor é que não se deve tratar com diferença os pontos ideais e ordinários (além da nomenclatura), nem a reta do infinito e as outras retas do plano afim. No final do capítulo seguinte, teremos uma visão mais clara dessa última afirmação.

### 1.3 Notações e definições

É conveniente olharmos retas e pontos como entes geométricos distintos ligados apenas por uma relação, a de incidência. Quando um ponto é incidente com uma reta, ou vice versa, diremos que o primeiro está sobre (ou passa pelo) segundo. Da mesma forma, relacionaremos retas com planos e pontos com planos. Neste texto, usaremos letras maiúsculas para pontos, minúsculas para retas e letras gregas para planos. Quando as retas  $l$  e  $m$  passarem pelo ponto  $P$ , usaremos o símbolo  $P = l \cdot m$  e diremos que  $l$  e  $m$  se intersectam em  $P$ , ou que  $P$  é ponto comum a elas. Quando os pontos  $Q$  e  $R$  estiverem sobre a reta  $n$ , usaremos a notação  $n = QR$  e diremos que  $n$  é a reta que liga  $Q$  e  $R$  ou que os pontos  $Q$  e  $R$  estão sobre  $n$ . Analogamente, se  $\alpha$  é um plano que passa pelas retas  $l$  e  $m$ , não são incidentes a  $P$ , escrevemos

$$\alpha = lm = ml = lP = Pl$$

Repare a importância do ‘ponto’ na notação; enquanto  $lm$  representa um plano,  $l \cdot m$  denota um ponto. Com a notação fixada, estabeleceremos agora os alicerces para as nossas definições, os conceitos primitivos.

Em qualquer idioma, qualquer definição de uma palavra, com certeza, necessita de outras palavras, que, por sua vez, precisam de definições. Chegamos, facilmente, a um círculo vicioso, que ilustra a necessidade de estabelecermos palavras, de preferência as mais simples e claras, que ficarão obviamente sem definição. Num sistema formal, essas palavras, as geradoras de todas as outras, são chamadas de conceitos primitivos.

Para a geometria projetiva realizada neste texto, adotaremos o ponto, a reta e a relação de incidência como conceitos primitivos. Portanto, como plano não é um termo indefinido somos obrigados a enunciar:

**Definição 1.3.1.** Dados um ponto  $P$  e uma reta  $l$  não incidentes definimos o plano  $Pl$  como sendo o conjunto de todos os pontos que estão sobre retas que unem  $P$  a pontos de  $l$  e todas as retas que são união de pares de pontos assim construídos.

## 1.4 Projetividades e perspectividades

Dados uma reta  $l$  e um ponto  $P$  quaisquer chamaremos, respectivamente, de fileira de pontos e feixe de retas, todos os pontos incidentes a  $l$  e todas as retas passando por  $P$ . Assim, fica claro que a intersecção de um feixe de retas por  $P$  com uma reta  $r$  não incidente a este ponto é a fileira de pontos sobre  $r$ . Ao fazermos esta intersecção, estamos estabelecendo uma relação biunívoca entre os elementos dos feixes baseada na relação de incidência. Dizemos então que a fileira de pontos é uma secção do feixe de retas e o feixe de retas projeta o feixe de pontos. Como notação para esta correspondência elementar escrevemos

$$ABC \dots \bar{\wedge} abc \dots,$$

onde  $A, B, C, \dots$  são pontos do feixe e  $a, b, c, \dots$  as retas correspondentes. A figura 1.2 mostram uma correspondência elementar entre o feixe de pontos da reta  $o$  com o feixe de retas do ponto  $O$ . Chamamos de *projetividade* uma combinação

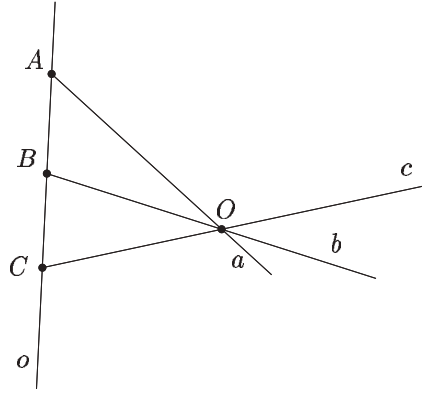


Figura 1.2: Correspondência elementar

finita de correspondências elementares. Assim, uma projetividade relaciona feixe de pontos (ou retas) com feixe de retas (ou pontos). Usaremos a mesma notação da correspondência elementar, ou seja, olhando a figura 1.3 abaixo temos,

$$X \bar{\wedge} x \bar{\wedge} X_1 \bar{\wedge} x_1 \bar{\wedge} X_2 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} X_n \bar{\wedge} x_n$$

ou simplesmente,

$$X \bar{\wedge} x_n$$

ou

$$x \bar{\wedge} x_n, \quad x \bar{\wedge} X_n, \quad X \bar{\wedge} X_n$$

Um tipo de projetividade será tratado de uma maneira mais cuidadosa, por ser

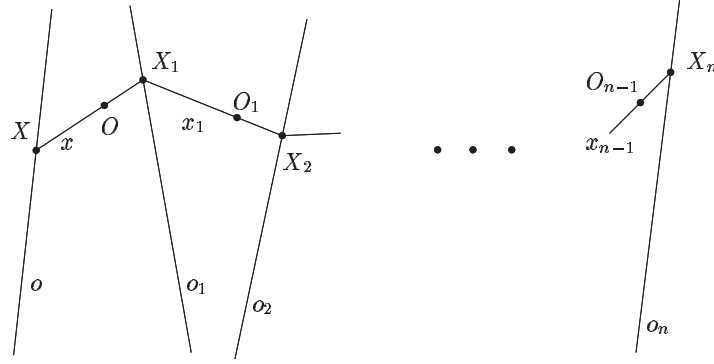


Figura 1.3: Sequência de correspondências elementares

de extrema importância.

O produto de *duas* correspondências elementares é chamado de *perspectividade* e é indicado pelo símbolo  $\bar{\bar{\wedge}}$ . Portanto, uma perspectividade relaciona duas fileiras de pontos ou dois feixes de retas. Assim, dizemos:

Duas fileiras de pontos estão relacionadas por uma perspectividade de *centro*  $O$  se são secções do feixe de retas por  $O$  (todas as retas incidentes a  $O$ ) por duas retas distintas  $o$  e  $o_1$ , isto é, se as retas  $XX_1$  de pontos correspondentes passam todas pelo ponto  $O$ . Em símbolos:

$$X \bar{\bar{\wedge}}^O X_1 \quad \text{ou} \quad X \bar{\bar{\wedge}}^O X_1$$

Dois feixes de retas estão relacionados por uma perspectividade de *eixo*  $o$  se eles projetam o feixe de pontos em  $o$  (todos os pontos incidentes a  $o$ ) por dois pontos distintos  $O$  e  $O_1$ . Isto é, se as intersecções  $x \cdot x_1$  de retas correspondentes estão sobre a reta  $o$ . Em símbolos:

$$x \bar{\bar{\wedge}}^o x_1 \quad \text{ou} \quad x \bar{\bar{\wedge}}^o x_1$$

Na figura abaixo, nós temos as perspectividades

$$ABC \bar{\bar{\wedge}}^O A'B'C', \quad abc \bar{\bar{\wedge}}^o a'b'c'$$

que podem ser vistas como o produto das correspondências elementares

$$ABC \bar{\wedge} abc \bar{\wedge} A'B'C', \quad abc \bar{\wedge} A'B'C' \bar{\wedge} a'b'c'$$

Agora, vamos proceder uma construção que será muito útil nos próximos capítulos. Dados três pontos distintos  $A$ ,  $B$  e  $C$  em uma reta e três pontos distintos  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  em outra reta, podemos estabelecer duas perspectividades cujo produto satisfaz:

$$ABC \bar{\wedge} A''B''C''$$

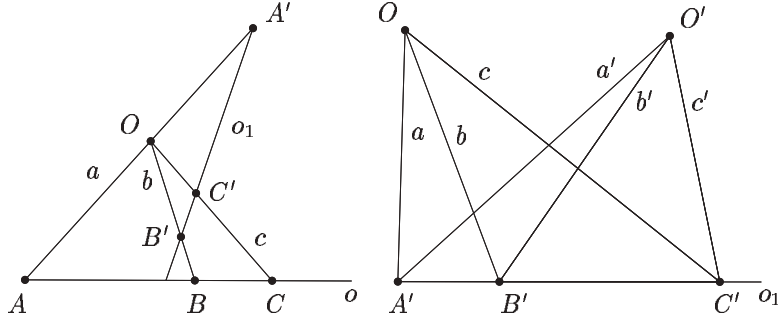
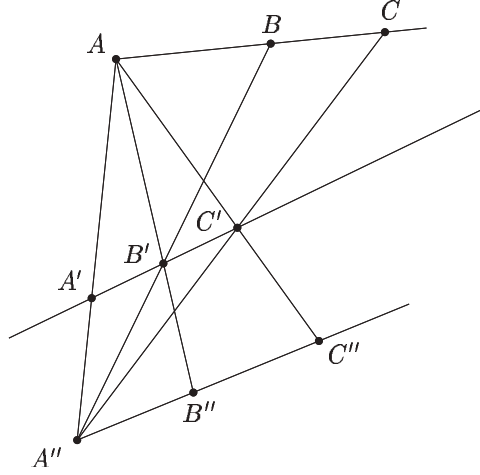


Figura 1.4: Perspectividades

Figura 1.5:  $ABC \bar{\wedge} A''B''C''$ 

De fato, tomando os pontos  $B' = AB'' \cdot BA''$ ,  $C' = AC'' \cdot CA''$  e  $A' = AA'' \cdot B'C'$  conforme a figura 1.5 abaixo, temos:

$$ABC \stackrel{A''}{\bar{\wedge}} A'B'C' \stackrel{A}{\bar{\wedge}} A''B''C''$$

Se trocarmos pontos por retas na construção acima, obteremos uma construção análoga para a projetividade  $abc \bar{\wedge} a''b''c''$  onde  $a, b$  e  $c$  são retas concorrentes em um ponto e  $a'', b''$  e  $c''$  são retas concorrentes em outro ponto.

**Teorema 1.4.1.** *A projetividade  $ABCD \bar{\wedge} BADC$  existe para quaisquer pontos distintos  $A, B, C, D$  de uma reta.*

*Demonstração.* Para mostrar tal fato, vamos elaborar a seguinte construção, conforme a Figura 1.6. Por um ponto  $S$  não incidente com  $l = AB$  projete  $ABCD$  em  $A'B'C'D'$  sobre uma reta  $l' \neq l$  incidente a  $A$ . De  $D$  projete

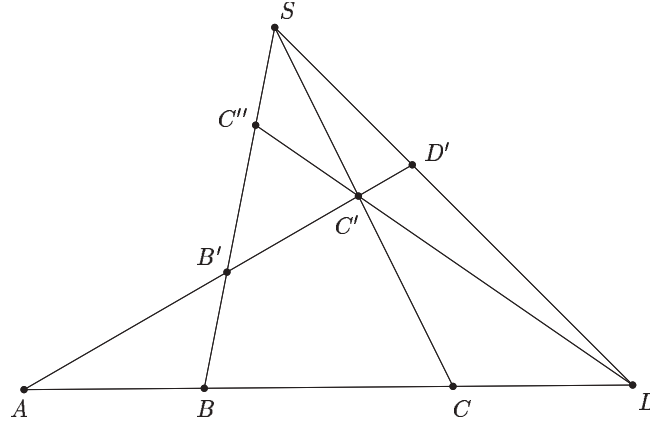


Figura 1.6

$A'B'C'D'$  na reta  $SB$ . Os últimos 4 pontos obtidos serão projetados em  $BADC$  por  $C'$ , ou seja,

$$ABCD \stackrel{S}{\bar{\wedge}} AB'C'D' \stackrel{D}{\bar{\wedge}} BB'C''S \stackrel{C'}{\bar{\wedge}} BADC$$

□

## Exercícios

1. Se  $\alpha = Pl$  e  $Q$ ,  $m$  pertencem a  $\alpha$  com  $Q$  não incidente a  $m$ , então  $\alpha = Qm$ .
2. Obtenha uma definição para plano a partir de duas retas concorrentes.
3. Dados  $A, B, C$  sobre uma reta  $r$  e  $A', B', C'$  sobre  $r'$ , todos distintos. Estabeleça duas perspectividades de forma a ter  $ABC \bar{\wedge} B'A'C'$ .
4. Dados  $a, b, c$  retas concorrentes em  $O$  e  $a', b', c'$  concorrentes em  $O'$ , todas distintas. Estabeleça duas perspectividades de forma a ter  $abc \bar{\wedge} b'a'c'$ .
5. De um exemplo de uma projetividade  $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$ , onde  $A, B, C, A', B'$  e  $C'$  são pontos colineares e distintos, que possa ser expressa como produto de duas perspectividades.
6. Dados  $A, B, C$  pontos colineares e  $a, b, c$  retas concorrentes. Estabeleça por meio de cinco perspectividades de forma a ter  $ABC \bar{\wedge} abc$ .
7. Estabeleça por meio de três perspectividades uma projetividade que tenha o efeito  $ABCD \bar{\wedge} DCBA$ , onde  $A, B, C, D$  são pontos colineares e distintos.



8. Considere uma perspectividade  $abc \stackrel{p}{\bar{\wedge}} a'b'c'$ , onde  $a, b, c$  e  $a', b', c'$  são retas distintas de feixes distintos. Sobre  $p$  considere o ponto  $S$ , distinto de  $A = p \cdot a, B = p \cdot b, C = p \cdot c$  e a reta  $s$ , distinta de  $p$  e não pertencente a nenhum dos feixes acima. Considere os pontos  $A' = s \cdot a, B' = s \cdot b, C' = s \cdot c, A'' = s \cdot a', B'' = s \cdot b'$  e  $C'' = s \cdot c'$ . Mostre que  $A'B'C' \bar{\wedge} A''B''C''$ .

# Capítulo 2

## Fundamentos

Todo sistema formal necessita de conceitos primitivos e de fatos básicos, úteis e alicerçais, para o seu desenvolvimento teórico. Neste capítulo, apresentamos um a um os axiomas da Geometria Projetiva, algumas implicações imediatas, o Teorema de Desargues e por fim, dois modelos de plano projetivo, sendo um deles finito.

### 2.1 Axiomas

De acordo com o primeiro capítulo, os termos indefinidos que utilizaremos serão: *ponto*, *reta* e a *relação de incidência*. Vimos também como o plano e a relação de projetividade podem ser definidos a partir destes conceitos primitivos. Na realidade, as primeiras fundamentações para a geometria projetiva foram dadas por dois italianos, Gino Fano (1892) e Mario Pieri (1899). Os seguintes oito axiomas são os sugeridos no livro [1].

É aconselhável ao leitor abster-se de qualquer tipo de ‘visualização’ e, ao tentar provar uma proposição enunciada, utilizar-se apenas dos axiomas e das afirmações já verificadas. Começemos:

**Axioma 2.1.** *Existem uma reta e um ponto que não são incidentes.*

**Axioma 2.2.** *Toda reta é incidente com pelo menos três pontos distintos.*

**Axioma 2.3.** *Dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.*

Estes três primeiros axiomas são facilmente aceitáveis para a grande maioria dos leitores. Sua simplicidade, porém, já resulta em pequenas consequências.

**Proposição 2.1.1.** *Existem ao menos quatro pontos distintos.*

**Proposição 2.1.2.** *Se  $l$  é uma reta, existe um ponto não incidente a  $l$ .*

*Demonstração.* De fato, sejam  $P$  e  $r$  o ponto e a reta que satisfazem o Axioma 2.2. Se  $l$  é igual a  $r$  a prova está concluída. Caso contrário, combinando o Axioma 2.2 com o Axioma 2.3 temos que existe um ponto  $Q$  que não é incidente a  $r$ .  $\square$

**Proposição 2.1.3.** *Se  $A$  é um ponto, existe uma reta não incidente a  $A$ .*

**Proposição 2.1.4.** *Dado um ponto  $P$ , existem ao menos três retas que passam por  $P$ .*

*Demonstração.* Com efeito, pela proposição anterior existe uma reta não incidente a  $P$ . Logo, utilizando o Axioma 2.2 podemos construir três retas distintas passando por  $P$ .  $\square$

As provas das proposições 2.1.1 e 2.1.3 são deixadas como exercícios.

O axioma seguinte é uma engenhosidade do matemático americano Oswald Veblen (1880-1960) para definir que duas retas coplanares se intersectam antes mesmo de se definir o que é plano<sup>1</sup>.

**Axioma 2.4.** *Se  $A, B, C$  e  $D$  são quatro pontos distintos tais que  $AB$  intersecta  $CD$ , então  $AC$  intersecta  $BD$  (Figura 2.1).*

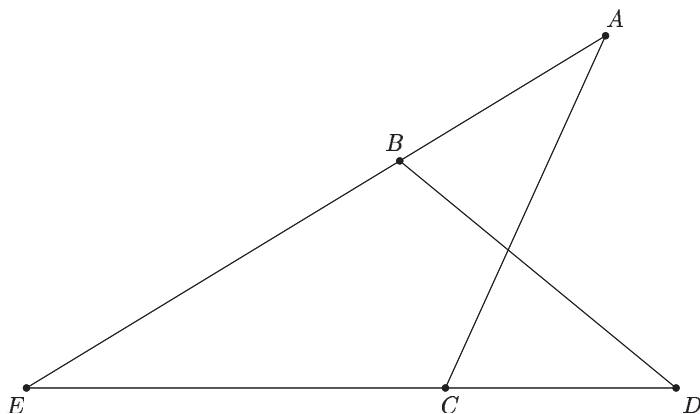


Figura 2.1

**Proposição 2.1.5.** *Existem quatro pontos coplanares tais que três quaisquer deles não são colineares.*

*Demonstração.* Pelos primeiros três axiomas, existem duas retas  $EC$  e  $EA$  distintas contendo os pontos  $B$  e  $D$  respectivamente. Os quatro pontos distintos  $A, B, C$  e  $D$  têm a propriedade desejada.  $\square$

<sup>1</sup>Note que no axioma a reta  $BD$  está sobre o plano  $AEC$  onde  $E = AB \cdot CD$ , visto que  $B$  está em  $AE$  e  $C$  em  $EC$

Os dois próximos axiomas fazem a geometria puramente tri-dimensional. Segue de imediato que dois planos distintos  $\alpha$  e  $\beta$  se intersectam em uma reta, a reta  $\alpha \cdot \beta$ .

**Axioma 2.5.** *Se  $ABC$  é um plano, existe ao menos um ponto fora do plano  $ABC$ .*

**Axioma 2.6.** *Quaisquer dois planos distintos têm ao menos dois pontos em comum.*

Conforme citado no primeiro capítulo, uma das virtudes trazidas pela geometria projetiva é a simetria imposta no espaço. Essa simetria ficará mais visível quando apresentarmos o *princípio da dualidade*, no próximo capítulo. Porém, neste momento, daremos apenas alguns exemplos para ilustrar esta característica da geometria projetiva.

A Proposição 2.1.3 pode ser derivada a partir da Proposição 2.1.2 pela permuta dos termos *ponto* e *reta*. Da mesma forma, o enunciado da Proposição 2.1.4 pode ser obtido do Axioma 2.2. Quando acontece esta troca dos termos *ponto* por *reta*, *reta* por *ponto* e conseqüentemente de seus adjetivos relacionados, por exemplo, *concorrente* por *colinear*, e vice-versa, dizemos que a proposição resultante é a *proposição dual* do resultado original. Veremos logo mais que ao provarmos um teorema, ganhamos como bônus outro teorema já provado, seu dual. Podemos também dualizar figuras. Na geometria projetiva é conveniente definir uma *figura* como um conjunto formado por retas e pontos. Um *triângulo*, por exemplo, é a figura formada por três retas não concorrentes e suas intersecções, três pontos não colineares. Um triângulo é uma figura *auto-dual*, ou seja, seu dual é ele próprio. Para ressaltar este princípio vamos introduzir dois entes duais e essenciais da geometria projetiva. A apresentação em colunas, idéia de Poncelet, realça a propriedade citada:

Definimos um *quadrângulo completo* como a figura formada por quatro pontos coplanares, sendo três quaisquer deles não colineares, e as seis retas que unem esses pontos. Dizemos que os quatro pontos são os *vértices* e que as seis retas são os *lados* do quadrângulo completo. Dois lados são ditos *opostos* se o ponto comum a eles não é um vértice; sendo assim, este ponto é chamado de *ponto!diagonal*. Existem três pontos diagonais (veja Figura 2.2).

Definimos um *quadrilátero completo* como a figura formada por quatro retas coplanares, sendo três quaisquer delas não concorrentes, e os seis pontos comuns a essas retas. Dizemos que as quatro retas coplanares são os *lados* e que os seis pontos são os *vértices* do quadrilátero completo. Dois vértices são ditos *opostos* se a reta que os une não é um lado; sendo assim, esta é chamada de *reta diagonal*. Existem três retas diagonais (veja Figura 2.3).

O uso da expressão completo serve para não confundirmos com o quadrilátero usual, que é formado por quatro lados e quatro vértices. Mesmo assim, esta expressão será omitida em situações nas quais não há risco de dúvida.

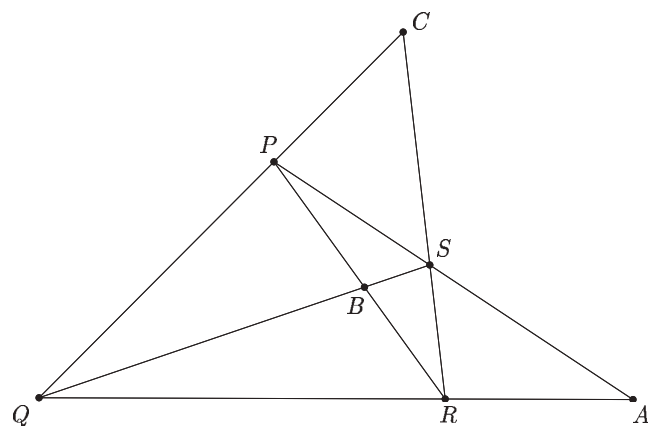


Figura 2.2: Quadrângulo PQRS

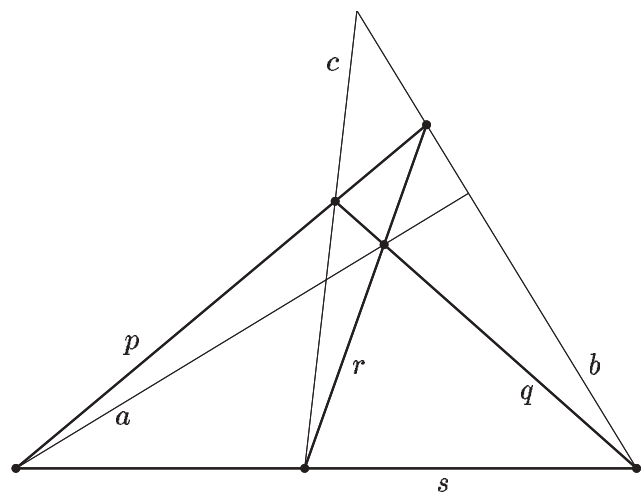


Figura 2.3: Quadrilátero pqrs

Assim, de posse da definição de quadrângulo completo, enunciamos nosso sétimo axioma.

**Axioma 2.7.** *Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.*

A partir desse axioma, observamos que os pontos diagonais de um quadrângulo completo são vértices de um triângulo, chamado *triângulo diagonal*. Vamos observar também que este axioma é de extrema valia no futuro apesar de existirem geometrias interessantes e peculiares desenvolvidas a partir da negação do mesmo.

Com base nos sete primeiros axiomas já citados, é possível mostrar que dada uma projetividade, uma coleção bem grande de pontos sobre uma mesma reta fica invariante, desde que três pontos desta mesma reta sejam invariantes <sup>2</sup>.

Este comentário nos dá razões suficientes para enunciarmos o nosso último axioma:

**Axioma 2.8.** *Se uma projetividade deixa invariante cada um de três pontos distintos de uma reta, ela deixa invariante todos os pontos da reta.*

Assim, nossa base está formada, os alicerces estão prontos. Toda teoria está pronta para ser exposta. Seguiremos na próxima seção com alguns importantes resultados.

## 2.2 O Teorema de Desargues

Antes de provar o Teorema de Desargues provamos o resultado que pode ser considerado a negação do famoso postulado das paralelas da geometria euclidiana.

**Proposição 2.2.1.** *Duas retas coplanares distintas se intersectam em um e somente um ponto.*

*Demonstração.* : Sejam  $r$  e  $s$  duas retas coplanares. O Axioma 2.3 garante que estas retas têm no máximo um ponto em comum. Para mostrar que existe ao menos um ponto em  $r$  e em  $s$ , tome  $E$ , um ponto no plano de  $r$  e  $s$ , mas não incidente nem com  $r$  e nem com  $s$ . Sejam  $AC = r$  e  $BD = s$ . Como o plano  $ACE$  é determinado pelo feixe de retas sobre  $E$  que intersecta  $AC$ , temos que  $B$  e  $D$  estão sobre retas distintas deste feixe. Logo, o resultado segue do Axioma 2.4.  $\square$

Dizemos que duas figuras são *perspectivas* se os seus pontos podem ser colocados em uma correspondência biunívoca de forma que par de pontos correspondentes definem retas concorrentes ou se as suas retas podem ser colocadas em uma correspondência biunívoca de forma que par de retas correspondentes definem pontos colineares. A primeira correspondência é dita *perspectividade por*

<sup>2</sup>Na realidade, consegue-se mostrar que qualquer rede harmônica é invariante nestas condições (maiores detalhes em [1], página 31)

um ponto, chamado *centro* da perspectividade, enquanto a segunda correspondência é dita perspectividade por uma reta, chamada *eixo* da perspectividade. Veremos que estas duas afirmações são equivalentes quando tratamos de triângulos. Observemos que ao considerar que duas figuras são perspectivas, é consideramos que os vértices e os lados de ambas sejam todos distintos. Por exemplo, no caso de um par de triângulos  $PQR$  e  $P'R'Q'$  perspectivos pelo centro  $O$  e eixo  $o$ , devemos ter seis vértices e seis lados distintos, como na Figura 2.4.

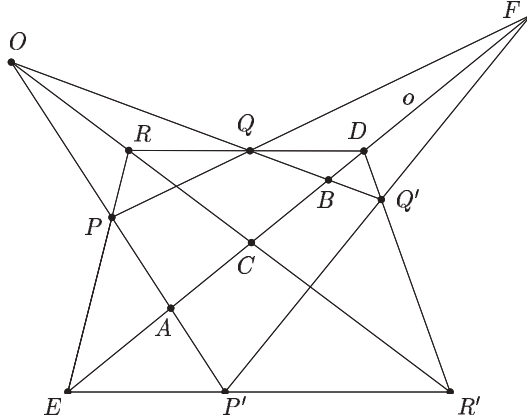


Figura 2.4: Triângulos perspectivos

Mais geralmente, temos o famoso,

**Teorema 2.2.2 (Desargues).** *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então eles são perspectivos por uma reta.*

*Demonstração.* Em outras palavras, queremos mostrar que, se  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $RR'$  passam pelo ponto  $O$  como na Figura 2.5, então os pontos

$$A = QR \cdot Q'R' \quad B = RP \cdot R'P' \quad C = PQ \cdot P'Q'$$

são colineares.

Primeiro, repare que o teorema é trivial quando os dois triângulos estão em planos distintos. Neste caso, os pontos  $A, B$  e  $C$  estão ambos nos planos  $\alpha = PQR$  e  $\beta = P'Q'R'$  portanto estão sobre a reta  $\alpha \cdot \beta$ .

Caso os triângulos estejam em um mesmo plano, tomamos dois pontos  $S$  e  $S'$  numa reta qualquer incidente a  $O$  e fora do plano  $PQR$ . Portanto, as retas  $PP', QQ', RR'$  e  $SS'$  passam todas por  $O$ . Assim, como  $P, P', S$  e  $S'$  estão sobre o plano  $OPS$ , segue que  $PS$  e  $P'S'$  se intersectam em um ponto  $P_1$ ; similarmente, determinamos os pontos  $Q_1 = QS \cdot Q'S'$ ,  $P_1 = PS \cdot P'S'$  e  $R_1 = RS \cdot R'S'$ . Aplicando a parte óbvia do teorema para os triângulos  $QRS$ ,  $Q'R'S'$ , que estão em planos distintos temos que os pontos

$$R_1 = RS \cdot R'S', \quad Q_1 = SQ \cdot S'Q', \quad A = QR \cdot Q'R'$$

são colineares. Portanto,  $A$  pertence a  $Q_1R_1$ ; analogamente, temos  $B$  em  $P_1R_1$  e  $C$  em  $P_1Q_1$ . Logo os três pontos  $A, B, C$  estão sobre a reta  $PQR = P_1R_1Q_1$ .  $\square$

E sua recíproca,

**Teorema 2.2.3.** *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então eles são perspectivos por um ponto.*

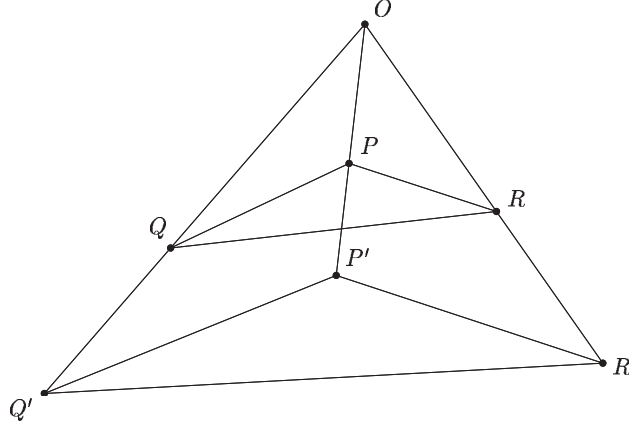


Figura 2.5: Planos distintos

*Demonstração.* Basta aplicar o Teorema 2.2.2 nos triângulos  $PP'B$  e  $QQ'A$ .  $\square$

## 2.3 Modelos

Nesta seção vamos construir um modelo finito para o plano projetivo e verificar os axiomas para o modelo proposto no primeiro capítulo.

Considere a Figura 2.6 abaixo:

De acordo com o que foi comentado anteriormente, o primeiro passo para podermos estabelecer um modelo é apontar quem são os conceitos primitivos, ou seja, dizer quem são os pontos, as retas e qual é a relação de incidência. Dessa forma, nossas retas serão os segmentos traçados na Figura 2.6 e nossos pontos serão as bolinhas pintadas na mesma figura. Além disso, dizer que um ponto é incidente a uma reta é simplesmente representar a bolinha pintada sobre o segmento.

Assim, cada reta será incidente somente a quatro pontos e cada ponto será incidente somente a quatro retas. Opa! O leitor pode perceber que, provavelmente, a Figura 2.6 está incompleta<sup>3</sup>, pois cada uma das retas  $MN$ ,  $IJ$ ,  $MH$

<sup>3</sup>Desenhar a figura completa complicaria muito a visualização. Uma solução seria colorir, como no jardim da infância, os pontos e as retas incidentes que faltam. Por exemplo, o ponto  $Q$  e a reta  $MH$  de verde, ...



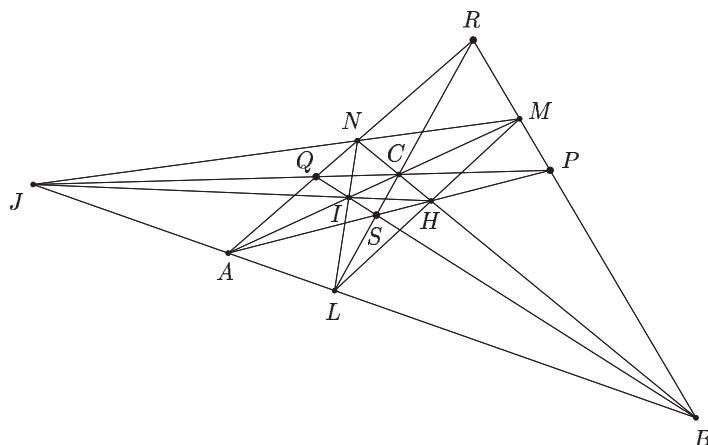


Figura 2.6: Modelo finito

e  $NI$  só é incidente a três pontos, da mesma forma que cada um dos pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  é incidente a apenas três retas. Todavia, somos livres para contornar este pequeno problema: basta considerar os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  incidentes a  $NI$ ,  $MH$ ,  $IJ$  e  $MN$  respectivamente.

Vamos então verificar, neste modelo finito, nossos axiomas. Ora, neste modelo os 3 primeiros axiomas são imediatos (Faça uma simples conferência!). O Axioma 2.4 é substituído pela Proposição 2.21, visto que a geometria é bi-dimensional. Além disso, como uma projetividade é uma bijeção, se três pontos colineares são fixados, por falta de opção o quarto ponto (e portanto todos os pontos da reta) é fixado. Logo o Axioma 2.8 é válido. Resta-nos mostrar o Axioma 2.7. Uma maneira geralmente utilizada pelos vascaínos é de examinar um a um os 234 quadrângulos possíveis dessa geometria. Outra forma, um pouco mais sutil, é a de perceber que este modelo pode ser construído a partir do quadrângulo  $PQRS$ , sendo isomorfo<sup>4</sup> ao modelo gerado pela mesma construção sobre um quadrângulo qualquer  $P'Q'R'S'$ . Portanto, como os três pontos diagonais de  $PQRS$  formam o triângulo  $ABC$ , segue que o Axioma 2.7 está verificado.

Temos assim o menor modelo de plano projetivo, um modelo peculiar com 13 pontos e 13 retas, que, no mínimo, serve para uma rápida visualização de proposições e teoremas.

## Exercícios

1. Prove a Proposição 2.11.
2. Prove a Proposição 2.13.

<sup>4</sup>Existe uma única colinação projetiva de  $PQRS$  em  $P'Q'R'S'$

3. Dualize o Axioma 2.7 e mostre a existência do triângulo diagonal para um quadrilátero completo.
4. Mostre que a figura abaixo, que contém 7 pontos e 7 retas (considere o círculo como uma reta e esqueça outras intersecções não assinaladas) satisfaz todos os axiomas bi-dimensionais (A2.1, A2.2, A2.3, A2.4, A2.7, A2.8) exceto um.
5. Construa uma projetividade que fixe 2 pontos.
6. Dizemos que dois triângulos são *propriamente perspectivos* quando o seu centro de perspectividade não coincide com nenhum dos seis vértices. Mostre que dois triângulos perspectivos não são propriamente perspectivos se, e somente se, o eixo de perspectividade coincide com um dos lados dos triângulos.
7. Faça os detalhes da recíproca do Teorema de Desargues.
8. Dados  $P, Q, R, P'$  e  $Q'$  pontos coplanares, como podemos construir  $R'$  de modo que  $PQR$  seja perspectivo a  $P'Q'R'$ .
9. Se três triângulos são perspectivos dois a dois com um mesmo centro de perspectividade, então os eixos de perspectividade são concorrentes.
10. Enuncie e prove o dual do exercício anterior.
11. Se dois triângulos são perspectivos, é possível que o centro de perspectividade seja incidente com o eixo?

# Capítulo 3

## O Princípio da dualidade

Neste capítulo apresentaremos o princípio da dualidade no plano projetivo, os conjuntos quadrangulares e harmônicos, o Teorema Fundamental da geometria projetiva e o Teorema de Pappus.

### 3.1 O Princípio da dualidade

Uma geometria se diz, respectivamente, *uni-dimensional*, *bi-dimensional* ou *tri-dimensional* quando seu desenvolvimento lida apenas com pontos sobre retas, com pontos e retas no plano ou com pontos retas e planos no espaço. Os Axiomas 2.1 a 2.8, apresentados no capítulo 2, nos permitem desenvolver uma geometria projetiva tri-dimensional, sendo que os Axiomas 2.5 e 2.6 são responsáveis por não termos apenas um plano projetivo e nem um espaço de dimensão maior que três. No entanto, queremos dar um enfoque maior ao plano projetivo, geometria bi-dimensional contida no espaço definido pelos oito axiomas. Portanto, por que não abordamos diretamente o plano projetivo? Por que considerarmos um número maior de axiomas se o nosso objetivo principal é estudar uma geometria bi-dimensional, que poderia ser determinada por seis dos oito axiomas citados? A resposta é que não é bem assim, fizemos uso dos axiomas 2.5 e 2.6 para provar de imediato o Teorema de Desargues, o qual necessitou de uma fuga do plano para sua demonstração. Se não tivéssemos procedido assim, teríamos que incluí-lo também como um axioma. A axiomática puramente plana da geometria projetiva pode ser desenvolvida excluindo os axiomas espaciais 2.5 e 2.6, incluindo o Teorema de Desargues como axioma e substituindo os Axiomas 2.1, 2.2 e 2.4 pelos axiomas

**Axioma 3.1.** *Quaisquer duas retas são incidentes com pelo menos um ponto.*

**Axioma 3.2.** *Existem quatro pontos tais que três quaisquer deles são não colineares.*

sugeridos pelas proposições 2.1.5 e 2.2.1. Assim, devemos tomar como Axiomas 3.1, 3.2, 2.3, 2.7, 2.8 e o Teorema 2.2.2.

Quando dualizamos cada axioma, isto é, quando em cada axioma trocamos os termos ponto por reta, reta por ponto e seus derivados (concorrentes por colineares, vértice por lado,...) percebemos que cada uma das proposições assim obtidas são verdadeiras. De fato, o Axioma 2.1 é auto-dual. O dual dos Axiomas 2.2 e 2.3 são as proposições 2.1.3 e 2.2.1 respectivamente. Já o dual do Axioma 2.4 segue direto do Axioma 2.3, enquanto o dual de 2.7 é o exercício 3 do capítulo anterior. A prova do dual do Axioma 2.8 é também de grande simplicidade e é deixada como exercício.

Agora, uma vez verificada a veracidade dos axiomas duais, temos estabelecido o *Princípio da Dualidade Bi-Dimensional* que traz para a geometria uma riqueza muito maior de simetria e uma ferramenta para a obtenção de novos resultados, pois uma vez que descoberto um teorema ganhamos automaticamente o seu dual, cuja demonstração se resume a repetir a prova original dualizando-a passo a passo.

Embora tenhamos estabelecido apenas o princípio da dualidade no plano projetivo, também existe a dualidade tri-dimensional, onde pontos, retas e planos quando dualizados tornam-se planos, retas e pontos, respectivamente. No entanto, não abordaremos tal tipo de dualidade. Ainda assim, podemos facilmente observar que na geometria Euclidiana não temos o princípio da dualidade. Com efeito, existem retas paralelas.

### 3.2 Conjuntos quadrangulares e harmônicos

Dado um quadrângulo  $PQRS$  e uma reta  $g$  não incidente a nenhum dos seus vértices, chamamos de *conjunto quadrangular* a coleção de pontos incidentes a  $g$  e a um dos lados do quadrângulo. Se  $g$  não é incidente a nenhum ponto diagonal então o conjunto quadrangular é formado por seis pontos distintos. Caso contrário, podemos ter cinco ou quatro pontos apenas.

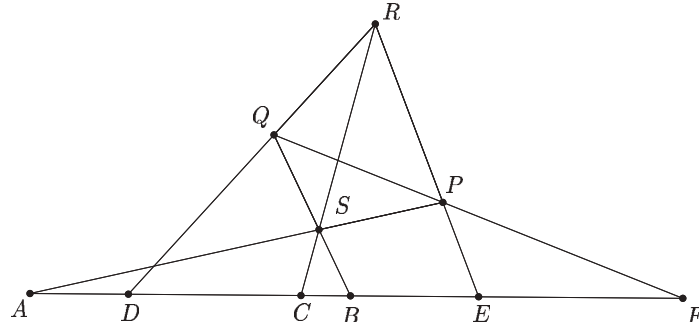


Figura 3.1: Conjunto quadrangular

Na figura acima,  $ABCDEF$  é um conjunto quadrangular. Dessa forma,

usaremos a seguinte notação para designar esse conjunto:

$$(AD)(BE)(CF)$$

Nesta notação necessariamente os três primeiros pontos dos parênteses devem estar sobre lados concorrentes, enquanto os três últimos devem estar, respectivamente, sobre os lados opostos. Além disso a notação é invariante se permutarmos  $ABC$  e  $DEF$  da mesma maneira, isto é,  $(AD)(BE)(CF)$  tem o mesmo significado que

$$(BE)(AD)(CF), \quad (AD)(EB)(FC), \quad (DA)(BE)(FC), \quad (DA)(EB)(CF)$$

Se  $A, B, C, D$  e  $E$  são pontos colineares, sempre existe um conjunto quadrangular ao qual estes 5 pontos pertençam. De fato, podemos construir um triângulo  $PQR$  cujos lados  $RS, SQ$  e  $QR$  passam respectivamente sobre  $C, B$  e  $D$ . Assim, bastaria tomar  $P = AS \cdot ER$ . O ponto  $F = g \cdot PQ$  completaria o conjunto quadrangular.

Se tomarmos outro triângulo  $QRS$  na construção anterior, provavelmente,  $F$  seria diferente. Mero engano. Surpreendentemente, o ponto  $F$  está bem definido e é único com tal propriedade, como vemos no:

**Teorema 3.2.1 (Unicidade do conjunto quadrangular).** *Cada ponto de um conjunto quadrangular é unicamente determinado pelos demais.*

*Demonstração.* Para mostrarmos que  $F$  é unicamente determinado pelos pontos<sup>1</sup>  $A, B, C, D$  e  $E$ , consideremos o quadrângulo  $P'Q'R'S'$  cujos cinco primeiros lados passam respectivamente pelos 5 primeiros pontos de  $g$ , de acordo com a figura abaixo. Vamos mostrar que  $P'Q' \cdot g = F$ . Para tal, repare que  $PRS$  e  $P'Q'R'$  são triângulos perspectivos por  $g$  logo  $QQ'$  é incidente a  $O$ . Portanto temos que os triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$  são perspectivos por  $O$ . Logo, pelo Teorema de Desargues, segue que  $P'Q' \cdot g = F$   $\square$

Vamos abordar agora um caso particular contudo extremamente interessante de conjunto quadrangular. Definimos um *conjunto harmônico* como o conjunto quadrangular formado por 4 pontos, ou seja, quando a antiga reta  $g$  é incidente a dois pontos diagonais de um quadrângulo.

Pela importância deste caso substituiremos a notação  $(AA)(BB)(CF)$  pela notação abreviada  $H(AB, CF)$  que é obviamente equivalente a  $H(BA, CF)$ ,  $H(AB, FC)$  ou  $H(BA, FC)$ . Neste caso,  $A$  e  $B$  são sempre pontos diagonais e  $C$  e  $F$  estão sobre os lados que passam sobre o terceiro ponto diagonal. Dizemos assim, que  $F$  é o conjugado harmônico de  $C$  com respeito a  $A$  e  $B$ . Da mesma forma,  $C$  é o conjugado harmônico de  $F$  com respeito a  $A$  e  $B$ . Além disso, o Axioma 2.7 nos garante que  $F$  é sempre distinto de  $C$ . Portanto, temos o

**Teorema 3.2.2.** *Se  $A, B$  e  $C$  são distintos, a relação  $H(AB, CF)$  implica que  $F$  é distinto de  $C$ .*

---

<sup>1</sup>repare que nada impede de termos  $A = D$  ou  $B = E$

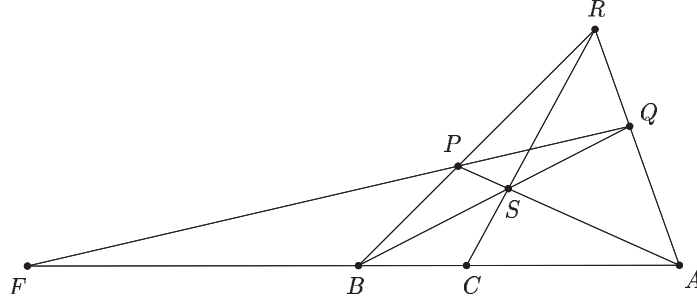


Figura 3.2: Conjunto harmônico de pontos

Dualizando todas as construções, vemos que quaisquer três retas concorrentes  $a$ ,  $b$  e  $c$  determinam uma única reta  $f$  a qual chamamos de conjugada harmônica de  $c$  com respeito a  $a$  e  $b$ . Para construção de  $f$  podemos proceder como abaixo:

Seja  $pqr$  um triângulo tal que  $q \cdot r$ ,  $q \cdot s$  e  $r \cdot s$  são incidentes a  $a$ ,  $b$  e  $c$  respectivamente, logo  $p = (a \cdot s)(b \cdot r)$  e  $f = (a \cdot b)(p \cdot q)$

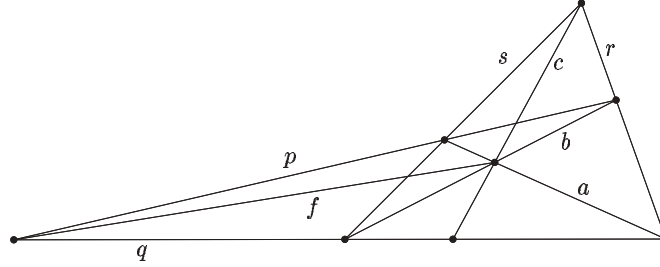


Figura 3.3: Conjunto harmônico de retas

De fato, o quadrilátero  $pqrs$  tem  $a$  e  $b$  como retas diagonais enquanto  $c$  e  $f$  passam sobre vértices que definem a terceira reta diagonal. Identificando as retas  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$  da figura anterior com as retas  $PQ$ ,  $AB$ ,  $QR$ ,  $RP$ ,  $PS$ ,  $QS$  e  $RS$  vemos que  $ABCF \stackrel{S}{\wedge} abcf$ , ou seja, através da figura sabemos como projetar um conjunto harmônico de pontos em um conjunto harmônico de retas. Esta construção independe da escolha do ponto  $S$  e pode ser feita para qualquer conjunto harmônico de pontos, portanto:

**Teorema 3.2.3.** *Um conjunto harmônico de pontos numa reta  $g$  é projetado por qualquer ponto não incidente a  $g$  em um conjunto harmônico de retas.*

Dualizando,

**Teorema 3.2.4.** *A secção de um conjunto harmônico de retas sobre um ponto  $P$  por qualquer reta não incidente a  $P$  é um conjunto harmônico de pontos.*

**Corolário 3.2.5.** Se  $ABCF \bar{\bar{\bar{}}} A'B'C'F'$  e  $H(AB, CF)$  então  $H(A'B', C'F')$ .

Aplicando o corolário anterior sucessivas vezes temos:

**Teorema 3.2.6.** Se  $ABCF \bar{\bar{}} A'B'C'F'$  e  $H(AB, CF)$  então  $H(A'B', C'F')$ .

Em outras palavras, a relação harmônica é invariante sobre qualquer projetividade.

### 3.3 O Teorema Fundamental

Vimos na Seção 1.4 que, dados seis pontos  $A, B, C, A_1, B_1$  e  $C_1$  com  $A, B, C$  e  $A_1, B_1, C_1$  colineares, é possível construir uma projetividade onde  $ABC \bar{\bar{}} A_1B_1C_1$ . Se por acaso, tivermos  $A = A_1, B = B_1$  e  $C = C_1$  o Axioma 2.8 nos permite conhecer a imagem de todos os pontos da reta  $AB$ , a saber, a projetividade é a própria identidade na reta. Fica então a pergunta: será que é possível determinar a projetividade como um todo fornecendo apenas a imagem de um número finito de pontos?

De fato, dados  $A, B, C, X$  pontos colineares e  $A_1, B_1, C_1$  sobre uma reta qualquer, existem inúmeras maneiras de se construir um ponto  $X_1$  em  $A_1B_1$  tal que:

$$ABCX \bar{\bar{}} A_1B_1C_1X_1$$

Por exemplo, a Figura 3.4 abaixo nos mostra um caminho. Quando  $AB \neq A_1B_1$  temos:

$$ABCX \xrightarrow{A_1} GMNQ \xrightarrow{A} A_1B_1C_1X_1 \quad (3.1)$$

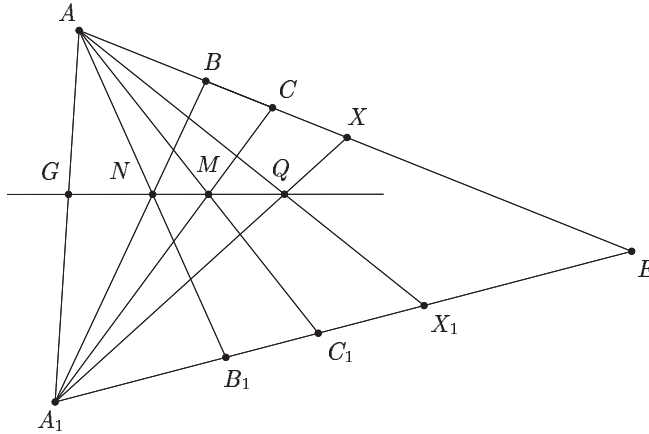


Figura 3.4: Projetividade  $ABCX \bar{\bar{}} A_1B_1C_1X_1$

Por outro lado, se  $AB = A_1B_1$  podemos usar uma perspectividade qualquer que leva os pontos  $A, B, C, X$  para fora de  $A_1B_1$  e com isso prosseguir a

construção. Assim, temos:

$$ABCX \stackrel{O}{\bar{\bar{\wedge}}} A_2B_2C_2X_2 \stackrel{A_1}{\bar{\bar{\wedge}}} GMNQ \stackrel{A_2}{\bar{\bar{\wedge}}} A_1B_1C_1X_1 \quad (3.2)$$

Agora, vamos verificar que este ponto  $X_1$  é único, ou seja,  $X_1$  não depende do tipo de construção feita. Bom, se  $X_1$  não fosse único existiriam um ponto  $X_3 \neq X_1$  e duas cadeias de perspectividades tais que:

$$ABCX \bar{\wedge} A_1B_1C_1X_1 \quad \text{e} \quad ABCX \bar{\wedge} A_1B_1C_1X_3$$

Assim, compondo a inversa da primeira cadeia de perspectividades com a segunda obtemos:  $A_1B_1C_1X_3 \bar{\wedge} A_1B_1C_1X_1$  o que contradiz o Axioma 2.8. Portanto, acabamos de provar o

**Teorema 3.3.1 (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva).** *Uma projetividade é determinada quando três pontos colineares e seus três pontos colineares correspondentes são dados.*

É claro que podemos trocar 'três pontos colineares' por 'três retas concorrentes'. Assim, cada uma das relações abaixo é suficiente para determinar uma única projetividade:

$$ABC \bar{\wedge} A_1B_1C_1, \quad ABC \bar{\wedge} abc, \quad abc \bar{\wedge} ABC, \quad abc \bar{\wedge} a_1b_1c_1$$

**Corolário 3.3.2.** *Dados dois conjuntos harmônicos (de retas ou de pontos) existe uma única projetividade que os relaciona.*

*Demonstração.* Sejam  $A, B, C, F, A', B', C'$  e  $F'$  pontos tais que

$$H(AB, CF) = H(A'B', C'F').$$

Queremos mostrar que a projetividade  $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$  leva o ponto  $F$  em  $F'$ . De fato, pela invariância da relação harmônica, a imagem de  $F$ , bem determinada pelo Teorema Fundamental, é conjugada harmônica de  $C'$  com respeito a  $A'$  e  $B'$ . Portanto, a unicidade do conjunto harmônico resolve a questão.  $\square$

**Corolário 3.3.3.** *Uma projetividade relacionando fileiras de pontos de duas retas distintas é uma perspectividade se, e somente se o ponto em comum das duas retas é invariante.*

*Demonstração.* A primeira implicação é trivial. Façamos a recíproca. Suponha que uma projetividade relacionando duas fileiras distintas de pontos possui um ponto  $P$  invariante pertencente a ambas as retas, de acordo com a Figura 3.5 Sejam  $A$  e  $B$  dois outros pontos de uma fileira e  $A'$  e  $B'$  os pontos correspondentes na outra fileira. O Teorema Fundamental nos garante que a perspectividade

$$ABP \stackrel{O}{\bar{\bar{\wedge}}} A'B'P,$$

onde  $O = AA' \cdot BB'$  é a mesma que a projetividade  $ABP \bar{\wedge} A'B'P$  dada.  $\square$



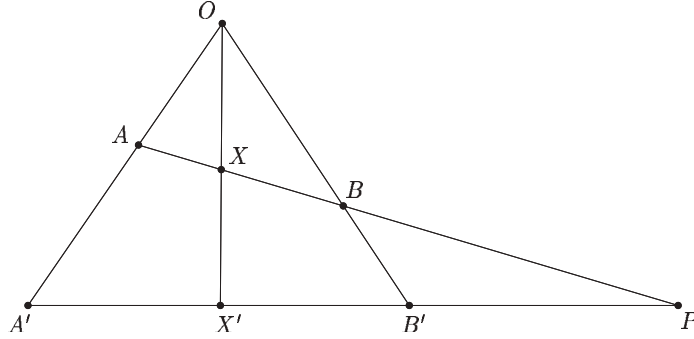


Figura 3.5

### 3.4 O Teorema de Pappus

A construção feita em 3.1 mostra como uma projetividade entre duas fileiras distintas pode ser expressa como o produto de duas perspectividades cujos centros são dois pontos correspondentes distintos quaisquer. O resultado que se segue afirma que a reta  $MN$  onde repousa o feixe intermediário da construção é invariante sob a escolha desses centros das duas perspectividades. A demonstração desse teorema é puramente técnica e se encontra em [1], página 37.

**Teorema 3.4.1.** *Toda projetividade relacionando feixes de pontos sobre retas distintas determina uma reta especial, o eixo, que contém as intersecções das retas formadas pela união cruzada de pares de pontos correspondentes.*

Estamos prontos para enunciar um dos mais antigos resultados da geometria projetiva devido a Pappus de Alexandria (cerca de 260 aC).

**Teorema 3.4.2 (Teorema de Pappus).** *Se os seis vértices de um hexágono estão alternadamente sobre um par de retas então os três pares de lados opostos se encontram em pontos colineares.*

*Demonstração.* Seja  $AB_1CA_1BC_1$  o hexágono, como na figura abaixo. Como vértices alternados são colineares, existe uma (única) projetividade tal que  $ABC \bar{\wedge} A_1B_1C_1$ . Assim, se  $L = B_1C \cdot BC_1$ ,  $M = C_1A \cdot CA_1$  e  $N = A_1B \cdot B_1A$ , segue pelo teorema anterior que  $L, M$  e  $N$  estão sobre o eixo da projetividade.  $\square$

Uma prova alternativa para o Teorema de Pappus pode ser esta:

*Demonstração.* Sendo  $J = A_1C \cdot B_1A$ ,  $E = AB \cdot A_1B_1$  e  $K = AC_1 \cdot CB_1$  temos:

$$ANJB_1 \stackrel{A_1}{\bar{\wedge}} ABCE \stackrel{C_1}{\bar{\wedge}} KL CB_1$$

Logo  $B_1$  é um ponto invariante da projetividade  $ANJ \bar{\wedge} KLC$ . Pelo Corolário 3.3.3, segue que esta projetividade é uma perspectividade, ou seja,  $ANJ \stackrel{M}{\bar{\wedge}} KLC$ . Portanto,  $M, L$  e  $N$  são colineares.  $\square$

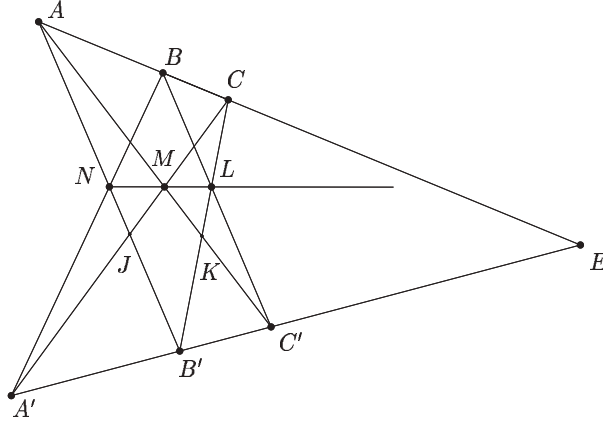


Figura 3.6: Teorema de Pappus

Para finalizarmos este capítulo, vamos exibir uma prova bi-dimensional do Teorema de Desargues o que concretiza o princípio da dualidade no plano projetivo.

*Demonstração(Desargues).* Sejam  $PP_1$ ,  $QQ_1$  e  $RR_1$  retas incidentes a um ponto  $O$ . Defina  $D = QR \cdot Q_1R_1$ ,  $E = RP \cdot R_1P_1$ ,  $F = PQ \cdot P_1Q_1$  e outros três pontos

$$A = OP \cdot DE \quad B = OQ \cdot DE \quad C = OR \cdot DE$$

Assim,  $OPAP_1 \overset{B}{\bar{\wedge}} ORCR_1 \overset{D}{\bar{\wedge}} OQBR_1$ . Logo,  $O$  é ponto invariante da projetividade  $PAP_1 \bar{\wedge} QBQ_1$ . Pelo corolário 3.3.3, segue que esta projetividade é uma perspectividade de centro  $F$  e portanto,  $D$ ,  $E$  e  $F$  são colineares.  $\square$

## Exercícios

1. Enuncie e prove o dual do Axioma 2.8.

2. Sejam

$$A = PS \cdot QR, \quad B = QS \cdot RP, \quad C = RS \cdot PQ$$

os pontos diagonais do quadrângulo  $PQRS$ . Definindo os pontos:

$$\begin{array}{lll} A_1 = BC \cdot QR, & B_1 = CA \cdot RP, & C_1 = AB \cdot PQ, \\ A_2 = BC \cdot PS, & B_2 = CA \cdot QS, & C_2 = AB \cdot RS, \end{array}$$

temos que os pontos  $A_1B_2C_2$ ,  $A_2B_1C_2$ ,  $A_2B_2C_1$ ,  $A_1B_1C_1$  são colineares e estão em retas que formam um quadrilátero, digamos  $pqrs$ , cujo triângulo diagonal é formado pelas retas  $a = BC$ ,  $b = CA$  e  $c = AB$ . Em outras

palavras, o quadrângulo  $PQRS$  e o quadrilátero  $pqrs$  possuem o mesmo triângulo diagonal.

3. Seja  $ABC$  o triângulo diagonal de  $PQRS$ . Como podemos reconstruir  $PQR$  se somente  $ABC$  e  $S$  nos forem dados?
4. Se  $PQR$  é um triângulo e  $H(AA_1, QR)$  e  $H(BB_1, RP)$ , então  $P$  e  $Q$  são conjugados harmônicos com respeito a

$$C = AB_1 \cdot BA_1 \quad \text{e} \quad C_1 = AB \cdot A_1B_1$$

5. Dados três pontos colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , construa três perspectividades cujo produto tem o efeito  $ABC \bar{\wedge} BCA$ .
6. Se a projetividade  $ABC \bar{\wedge} BCA$  transforma  $D$  em  $E$ ,  $E$  em  $F$ , qual o seu efeito sobre o ponto  $F$ ?
7. Se  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são pontos colineares, então

$$ABCD \bar{\wedge} BADC \bar{\wedge} CDAB \bar{\wedge} DCBA$$

8. Se  $H(AB, CD)$  então  $ABCD \bar{\wedge} BACD$
9. Considere a construção feita no exercício 2. O que podemos afirmar sobre as intersecções de pares de lados opostos do hexágono  $ABPCSA_1$ ?
10. Dualize o corolário 3.3.3.
11. Dualize a Figura 3.5.
12. Dado um triângulo  $AA'A''$  e dois pontos  $B$ ,  $B'$ , construa o ponto  $B''$  tal que as três retas  $AB$ ,  $A'B''$ ,  $A''B'$  sejam concorrentes assim como as três retas  $AB''$ ,  $A'B'$ ,  $A''B$ . Conclua que as retas  $AB'$ ,  $A'B$ ,  $A''B''$  também são concorrentes. Em outras palavras, se dois triângulos são duplamente perspectivos então eles são triplamente perspectivos.
13. Enuncie a proposição dual do exercício anterior. Faça uma construção exemplificando este resultado.
14. Ainda no exercício 12, o que podemos dizer sobre as três diagonais do hexágono  $AB''A'B'A''B$ ?
15. Enuncie o dual do Teorema de Pappus.
16. A solução do exercício 9 pode ser apresentada como uma prova do Teorema de Pappus?

# Capítulo 4

## Projetividades

A projetividade uni-dimensional tem uma ligação direta com conjuntos quadrangulares e harmônicos. Neste capítulo tratamos da projetividade bi-dimensional, que nos será de fundamental importância no estudo das cônicas, quando veremos, a geometria de pontos e retas nos dará mais uma prova de sua elegância e perfeição.

### 4.1 Pontos invariantes

O teorema fundamental afirma que para conhecermos uma projetividade entre pontos de uma mesma fileira precisamos apenas de três pares de pontos correspondentes. Em particular, se três pontos são fixados, a projetividade é a identidade. Nosso interesse neste momento será classificar as projetividades de acordo com o número de pontos invariantes. Chamaremos de projetividade *elíptica*, *parabólica* ou *hiperbólica* as projetividades que possuem exatamente zero, um ou dois pontos invariantes.

Agora, um questionamento que surge naturalmente é sobre a existência de tais projetividades. A construção feita a seguir mostra a existência de projetividades parabólicas e hiperbólicas.

Considere o quadrângulo  $PQRS$  onde  $A, B, C, D, E$  e  $F$  são as respectivas intersecções de  $PS, QS, RS, QR, PR$  e  $QP$  com uma dada reta  $g$  como na Figura 4.1. Temos então o conjunto quadrangular  $(AD)(BE)(CF)$  e a projetividade

$$AEC \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SRC \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} BDC$$

Dessa forma  $C$  é um ponto invariante, e qualquer outro ponto invariante, caso exista, deve ser colinear com os centros das duas perspectividades,  $P$  e  $Q$ . Portanto, além de  $C$ , apenas  $F$  pode ser invariante. Consequentemente a projetividade  $AEC \bar{\wedge} BDC$  é hiperbólica se  $C$  e  $F$  são distintos e parabólica

caso  $C$  e  $F$  coincidam, observe a Figura 4.2. Logo, temos provado o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.1.** *A projetividade  $AE CF \bar{\wedge} B D C F$  é equivalente ao conjunto quadrangular  $(AD)(BE)(CF)$ .*

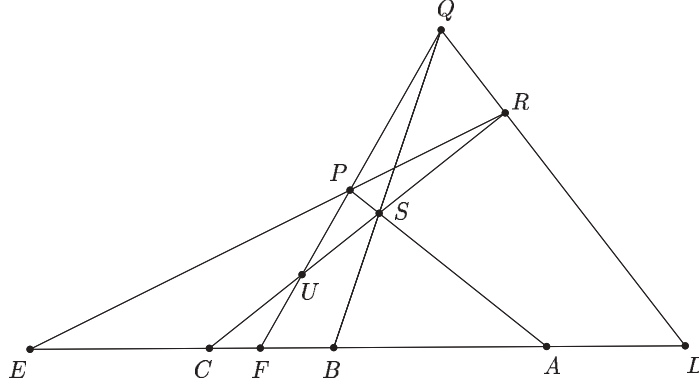


Figura 4.1: Equivalência do conjunto quadrangular (a)

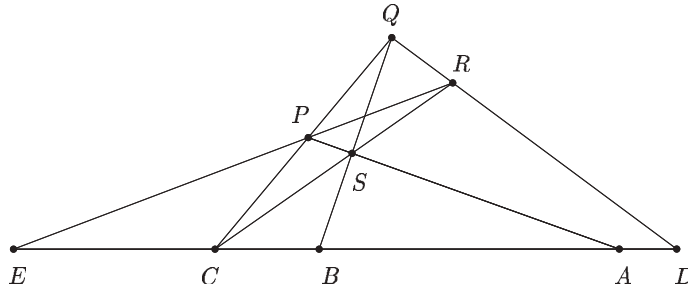


Figura 4.2: Equivalência do conjunto quadrangular (b)

Uma das aplicações da proposição acima é a determinação do sexto ponto de um conjunto quadrangular, sendo dados cinco deles, utilizando o teorema fundamental. Quanto à projetividade elíptica nada se pode dizer sobre sua existência, veremos adiante que ela pode ou não existir, conforme o modelo.

## 4.2 Projetividades parabólicas

Retornando ao teorema fundamental, uma projetividade hiperbólica está determinada quando se fornecem quatro pontos  $A, B, C$  e  $F$  sobre uma reta  $g$ , com  $C$  e  $F$  invariantes e  $A$  e  $B$  correspondentes. Ou seja:

$$ACF \bar{\wedge} BCF.$$

De fato, podemos construir um triângulo  $PQR$  tal que  $A$ ,  $B$  e  $F$  sejam as intersecções das retas  $PS$ ,  $QS$  e  $PQ$  com a reta  $g$  (ver Figura 4.1). Sendo  $C$  diferente de  $F$ , temos que  $U = SC \cdot PQ$  e a projetividade satisfaz

$$ACF \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SCU \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} BCF$$

Para qualquer ponto arbitrário  $X$  sobre  $g$  a construção acima permite construir seu correspondente ponto  $X'$  (como?). Quando acontece de  $U$  ser um ponto diagonal, ou seja, quando  $U = PQ \cdot RS$ , teremos  $C = F = U$ , resultando assim em uma projetividade parabólica, observe a Figura 4.2. Então uma projetividade parabólica é determinada por três pontos, um invariante e dois correspondentes. Seguindo a notação do teorema fundamental, temos simplesmente,

$$ACC \bar{\wedge} BCC.$$

Além disso,

**Teorema 4.2.1.** *O produto de duas projetividades parabólicas que possuem o mesmo ponto invariante é outra projetividade parabólica, a menos da identidade.*

*Demonstração.* A prova é bem simples. É claro que se  $C$  é o ponto invariante pelas duas projetividades,  $C$  é invariante pelo produto. Portanto, este é uma projetividade parabólica ou hiperbólica. Ora, se  $A \neq C$  é outro ponto invariante pelo produto, então existe  $B \neq A$  tal que  $ACC \bar{\wedge} BCC$  pela primeira projetividade e  $BCC \bar{\wedge} ACC$  pela segunda projetividade. Logo, o produto é meramente a identidade.  $\square$

**Teorema 4.2.2.** *A projetividade  $AA'C \bar{\wedge} A'A''C$  é parabólica se  $H(A'C, AA'')$  e hiperbólica caso contrário.*

*Demonstração.* Direta do Teorema 4.1.1  $\square$

### 4.3 Involuções

Agora, veremos um tipo de projetividade extremamente importante para a sequência deste estudo. Chamamos de *involução* a projetividade que satisfaz  $XX' \bar{\wedge} X'X$  para toda posição do ponto  $X$ , ou seja, a projetividade de período igual a 2.

**Teorema 4.3.1.** *Uma projetividade que satisfaz  $AA'X \bar{\wedge} A'AX'$  é uma involução.*

*Demonstração.* Combinando o Teorema 1.4.1 com o teorema fundamental, a projetividade satisfaz  $AA'XX' \bar{\wedge} A'AX'X$ .  $\square$

O teorema acima afirma que a troca de um par de pontos por uma projetividade garante que esta é de período 2.

**Corolário 4.3.2.** *Toda involução é determinada por dois pares de pontos correspondentes.*

Utilizaremos a notação  $(AB)(CD)$  para a involução  $ABC \bar{\cap} BAD$ . Pelo Teorema 4.1.1, temos a equivalência entre o conjunto quadrangular  $(AD)(BE)(CF)$  e a projetividade  $AE CF \bar{\cap} BD CF$ . Logo, combinando esta projetividade com a involução  $(BD)(CF)$  temos

$$AE CF \bar{\cap} BD CF \bar{\cap} DB FC$$

Portanto, o produto  $AE CF \bar{\cap} DB FC$ , que troca  $C$  e  $F$  é também uma involução. Temos, então o seguinte resultado.

**Teorema 4.3.3.** *O conjunto quadrangular  $(AD)(BE)(CF)$  é equivalente à involução  $ABC \bar{\cap} DEF$ , isto é, equivalente a  $ABCDEF \bar{\cap} DEFABC$ .*

Utilizando o teorema acima, obtemos uma outra forma alternativa para determinar o sexto ponto  $F$  de um conjunto quadrangular  $A, B, C, D$  e  $E$ . Basta encontrar o correspondente de  $C$  na involução  $(AD)(BE)$ . Fica ainda estabelecido que  $C$  e  $F$  formam um par da involução  $(AD)(BE)$  se, e somente se,  $AE CF \bar{\cap} BD CF$ . Visto que a involução  $(AD)(BE)$  é a mesma que  $(AD)(EB)$ , temos ainda a seguinte equivalência de projetividades

$$AE CF \bar{\cap} BD CF \quad \text{e} \quad ABCF \bar{\cap} EDCF$$

. Segue destas observações o seguinte resultado:

**Teorema 4.3.4.** *Toda involução que tem um ponto invariante tem dois pontos invariantes. Assim, não existem involuções parabólicas e toda involução é elíptica ou hiperbólica.*

*Demonstração.* De fato, caso exista um ponto  $B$  invariante na involução que troca  $C$  e  $C'$ , temos  $BCC' \bar{\cap} BC'C$ , isto é,  $(BB)(CC')$ . Seja  $A$  o conjugado harmônico de  $B$  com respeito ao par  $CC'$ , ou seja  $H(AB)(CC')$ . Pelo Teorema 3.2.3, existe uma projetividade hiperbólica tal que  $ABCC' \bar{\cap} ABC'C$  que é a mesma involução  $(BB)(CC')$ . Dessa forma, a involução acima fixa dois pontos e, portanto, é hiperbólica.  $\square$

## 4.4 Projetividades bi-dimensionais

Quando consideramos o caso bi-dimensional, recorde que a geometria se define como a de pontos e retas no plano. As projetividades nesse novo ambiente serão *transformações* dos tipos:

Uma transformação *ponto-ponto* é uma correspondência biunívoca entre todos os pontos de um plano. Isto é, para cada ponto  $P'$ , existe  $P$  tal que  $T(P) = P'$  e se  $T(Q) = P'$  então  $Q = P$ .

Uma transformação *ponto-reta* é uma correspondência biunívoca entre todos os pontos e todas as retas de um plano, que associa a cada ponto uma única reta.

Dualizando as definições acima obtemos, respectivamente, as transformações reta-reta e reta-ponto.

As projetividades no plano são classificadas de duas maneiras *colinação projetiva* ou *correlação projetiva*, e melhor esclarecidas a seguir:

Uma colinação projetiva é uma transformação ponto-ponto e reta-reta, preservando a relação de incidência de maneira projetiva, isto é, se ela transforma um ponto  $X$  da fileira  $x$  em um ponto  $Y$  da fileira  $y$  a relação entre  $X$  e  $Y$  é a projetividade ou seja,  $X \bar{\wedge} Y$

Uma correlação projetiva é uma transformação ponto-reta e reta-ponto, preservando a relação de incidência, de maneira projetiva, isto é, se ela transforma um ponto  $X$  sobre a reta  $x$  em uma reta  $y$  através de um ponto  $Y$  a relação entre  $X$  e  $y$  é a projetividade ou seja,  $X \bar{\wedge} y$ .

Observe que o produto, assim como a inversa e o dual, de colinações projetivas são colinações projetivas. A inversa e o dual de uma correlação projetiva ainda é uma correlação projetiva, enquanto o produto de duas correlações projetivas é uma colinação projetiva.

Passamos a obter alguns resultados para essa projetividade, análogos ao Axioma 2.8. Temos o seguinte teorema.

**Teorema 4.4.1.** *A única colinação projetiva que deixa invariante os quatro lados de um quadrilátero é a identidade.*

*Demonstração.* Sendo os quatro lados de um quadrilátero invariante, como a colinação projetiva preserva incidência, os seis vértices são invariantes. Como cada lado do quadrilátero possui três vértices, pelo Axioma 2.8, todos os pontos sobre cada lado são invariantes. Dessa forma qualquer reta interceptará os lados do quadrilátero em pontos invariantes, portanto a colinação é a identidade.  $\square$

Para a determinação de uma colinação projetiva, temos o análogo do teorema fundamental:

**Teorema 4.4.2.** *Uma colinação projetiva é determinada quando dois quadriláteros correspondentes com seus vértices ordenados são dados.*

Analogamente, podemos obter o mesmo resultado para correlações, ou seja:

**Teorema 4.4.3.** *Uma correlação projetiva é determinada quando dois quadriláteros correspondentes são dados.*

Os teoremas acima podem ser dualizados a fim de obter novos resultados para quadrângulos e feixes de retas.

Sejam  $PQR$  e  $P'Q'R'$  dois triângulos perspectivos pelo centro  $O$  e eixo  $o$ , como na Figura 4.3. Pelo teorema anterior, existe uma única colinação projetiva que transforma o quadrângulo  $DEPQ$  em  $DEP'Q'$ . Esta colinação deixa invariante o eixo da perspectividade  $DE = o$ . Além disso, a reta  $PQ$  é transformada na reta  $P'Q'$  deixando invariante o ponto  $PQ \cdot o = F = P'Q' \cdot o$ . Logo, pelo Axioma 2.8, todo ponto sobre o eixo é invariante. Agora, a reta  $PP'$  também é invariante pois é transformada em  $P'X$ , onde  $X$  está sobre o eixo. Da mesma



forma,  $QQ'$  é uma reta invariante. Como a intersecção de retas invariantes é um ponto invariante, conclui-se que o centro  $O = PP' \cdot QQ'$  é também invariante. Destacamos agora dois importantes tipos de colineações projetivas.

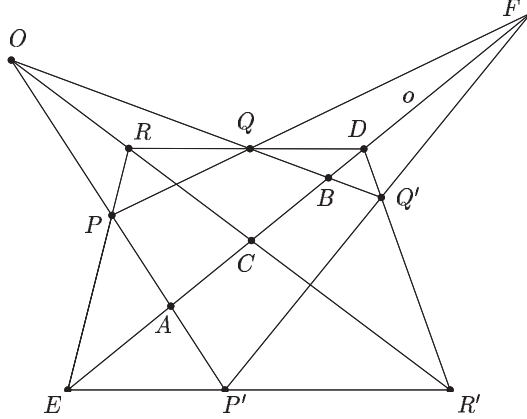


Figura 4.3: Triângulos perspectivos

## 4.5 Colineações perspectivas

Se uma colineação projetiva possui dois pontos invariantes  $M$  e  $N$ , o Teorema 4.4.2 afirma que bastam os quadrângulos correspondentes  $MNAB$  e  $MNA'B'$  para determiná-la. Ocorrendo de  $AB$  e  $A'B'$  serem concorrentes na reta  $MN$  como na Figura 4.4, temos, então, uma reta com três pontos invariantes  $M$ ,  $N$  e  $AB \cdot A'B'$ . Portanto, pelo Axioma 2.8, todos os pontos sobre essa reta são invariantes. Dessa forma, as retas  $AA'$  e  $BB'$  intersectam a reta  $MN$  em pontos invariantes sendo portanto retas invariantes cuja intersecção  $AA' \cdot BB' = O$  é um ponto invariante.

Mais que isso, toda reta através de  $O$  é invariante. De fato, se  $O$  não esta sobre  $MN$ , temos que qualquer reta  $r$  por  $O$  tem um segundo ponto invariante  $r \cdot MN$ , sendo portanto uma reta invariante. Caso contrário, as retas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $MN$  são invariantes e concorrentes em  $O$ , Logo, pelo dual do Axioma 2.8, o resultado é imediato.

Uma colineação que deixa todos os pontos sobre uma reta  $o$  e todas as retas através de um ponto  $O$  invariantes é chamada de *colineação perspectiva*. A reta  $o$  e o ponto  $O$  são chamados, respectivamente, de eixo e centro da colineação. Quando  $o$  e  $O$  são incidentes, dizemos que a colineação é uma *elação*; caso contrário, diremos que a colineação é uma *homologia* (veja Figura 4.5).

**Teorema 4.5.1.** *Uma homologia é determinada quando conhecemos o eixo, o centro e um par de pontos correspondentes colineares com o centro.*

*Demonstração.* Seja  $A$  e  $A'$  o par de pontos correspondentes (veja Figura 4.5). Ora, qualquer ponto  $X$  não incidente ao eixo  $o$  tem como seu correspondente o

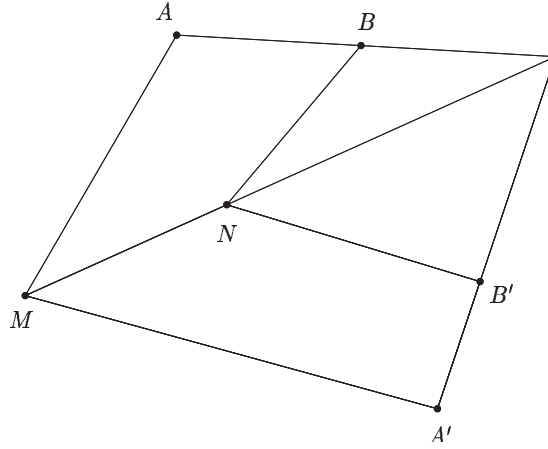


Figura 4.4: Quadrângulos perspectivos

ponto  $X' = OX \cdot CA'$ , onde  $C = AX \cdot o$ . Como todo ponto sobre  $o$  e toda reta através de  $O$  são invariantes, a homologia está completamente determinada.  $\square$

Para uma elação temos, similarmente:

**Teorema 4.5.2.** *Uma elação é determinada pelo eixo e um par de pontos correspondentes colineares.*

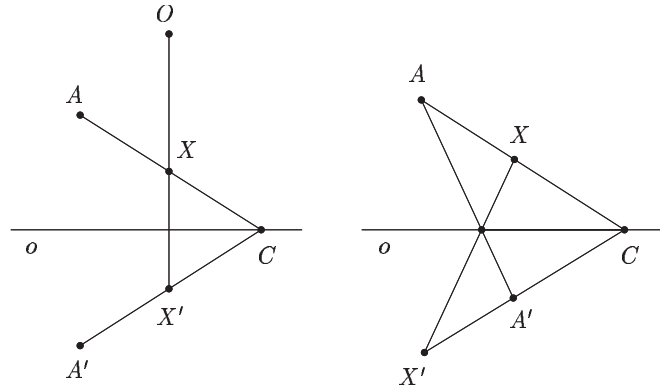


Figura 4.5: Homologia e elação

Elações e homologias estão profundamente relacionadas com perspectivas de triângulos.

**Teorema 4.5.3.** *Se os triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$  são perspectivos, então existe uma colinação perspectiva que os relaciona. Esta colinação é uma elação se, e somente se, o eixo e o centro da perspectiva são incidentes.*

*Demonstração.* Considere os triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$  perspectivos por  $O$  e  $o$ , conforme na Figura 4.3, que é idêntica à Figura 2.4. Pelo Teorema 4.4.2, existe uma única colinação projetiva que transforma o quadrângulo  $DEPQ$  em  $DEP'Q'$ . Esta colinação, que deixa  $o = DE$  invariante e leva  $PQ$  em  $P'Q'$ , deixa o ponto  $o \cdot PQ = F = o \cdot P'Q'$  invariante. Pelo Axioma 2.8, ela tem que deixar invariante todo ponto em  $o$ . Além disso, a união de dois pontos correspondentes intersecta  $o$  em um ponto invariante, portanto a união desses pontos é uma reta invariante. Como  $PP' \cdot QQ' = O$ ,  $O$  é invariante.  $\square$

Uma homologia determinada pelo centro  $O$ , eixo  $o$  e o par de pontos correspondentes  $A$  e  $A'$  é dita *homologia harmônica* quando  $H(OC, AA')$ , onde  $C = OA \cdot o$ , ou seja o conjugado harmônico do centro  $O$ , com respeito ao par  $AA'$ , repousa sobre o eixo  $o$  (veja Figura 4.6).

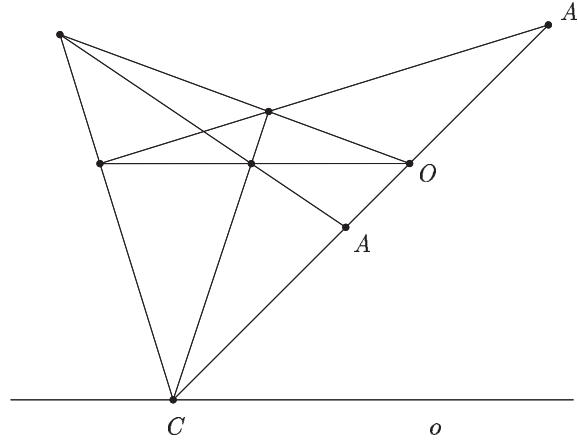


Figura 4.6: Homologia harmônica

A homologia harmônica é determinada pelo centro e o eixo. De fato, para encontrar o correspondente de um dado ponto  $X$  basta encontrar o seu conjugado harmônico com respeito ao par  $O$  e  $OX \cdot o$ .

## 4.6 Polaridades

Um tipo de correlação projetiva merece atenção especial neste final de capítulo devido a sua importância para a nossa futura definição de cônica. Estamos falando das correlações de período 2 que ganharão o nome de *polaridades*. Isto é, enquanto uma correlação qualquer transforma um ponto  $A$  numa reta  $a$  e  $a$  num ponto  $A'$ , uma polaridade garante que a imagem de  $a'$  sempre coincidirá com  $A$ . Assim, se reduzirmos a notação, temos em uma polaridade:  $A \rightarrow a \rightarrow A$ . Nesta situação, dizemos que  $a$  é o *polar* do ponto  $A$  enquanto  $A$  é o *pólo* da reta  $a$ .

As polaridades não só preservam, mas também dualizam, a relação de incidência. De fato, se o polar de  $A$  passa pelo ponto  $B$  então o polar de  $B$  passa

por  $A$ . Além disso, se três pólos são colineares então os respectivos polares são concorrentes.

Quando um ponto  $C$  está sobre seu polar  $c$  diremos que  $C$  é um ponto auto-conjugado e  $c$  uma reta auto-conjugada. Quando uma reta  $a$  é auto-conjugada, qualquer ponto  $B$  incidente a  $a$  e distinto do próprio pólo não é auto-conjugado. Com efeito, se tivéssemos o contrário, o polar de  $B$  passaria por  $A$  e conseqüentemente coincidiria com a reta  $a$ . Todavia, uma correlação é uma correspondência biunívoca! Logo temos o:

**Teorema 4.6.1.** *A reta por dois pontos auto-conjugados não é uma reta auto-conjugada.*

Além disso,

**Teorema 4.6.2.** *Uma reta tem no máximo dois pontos auto-conjugados.*

*Demonstração.* De fato, os pontos auto-conjugados em uma reta  $s$  são invariantes pela projetividade  $X \mapsto x \cdot s$  induzida em  $s$  pela polaridade. Ou seja, pelo Axioma 2.7,  $s$  só possui mais de dois pontos auto-conjugados se, e somente se, todos os seus pontos são auto-conjugados. Mas isto não pode ocorrer. Com efeito, sejam  $A$  e  $B$  pontos auto-conjugados em  $s$  e seja  $P$  um ponto sobre  $a$ , polar de  $A$ , tal que  $P \neq A$  e  $P \neq S$  (Figura 4.7). Se o polar  $p$  intersecta  $b$ , polar de  $B$ , em um ponto  $Q$ , então  $Q = b \cdot p$  é o pólo de  $q = BP$ . Se  $R = p \cdot q$  segue que  $R$  é o pólo de  $PQ = r$  que intersecta  $s$  em um ponto  $C$ . Finalmente,  $C = s \cdot r$  é o pólo de  $c = RS$  que intersecta  $s$  no ponto  $F$ , conjugado harmônico de  $C$  com respeito a  $A$  e  $B$ . Como  $C \neq A$  e  $C \neq B$ ,  $C$  não é um ponto auto-conjugado de  $s$ .  $\square$

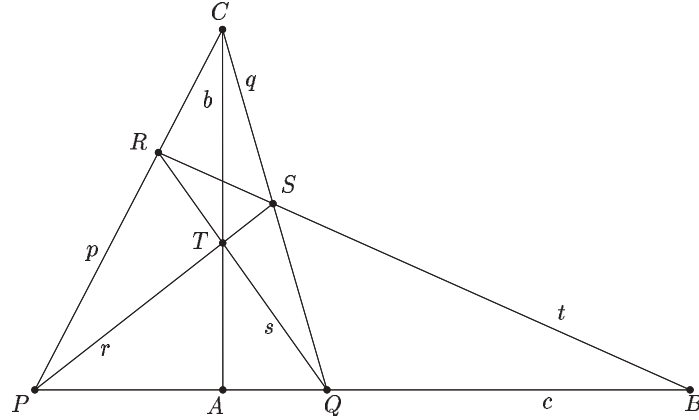


Figura 4.7: Pontos e retas auto-conjugadas

Dessa forma, podemos facilmente provar:

**Teorema 4.6.3.** *Uma polaridade induz uma involução de pontos conjugados em qualquer reta não auto-conjugada.*

*Demonstração.* Ora, a projetividade  $X \bar{\wedge} x \cdot s$  em  $s$  relaciona  $C$  com seu conjugado harmônico  $F = c \cdot s$  e vice-versa. Logo, como ela troca  $C$  com  $F$ , esta projetividade é uma involução.  $\square$

Quando os polares dos vértices de um triângulo são seus lados opostos, dizemos que este triângulo é *auto-polar*. Os triângulos auto-polares são característicos das polaridades e, além disso, são uma mão na roda para tentarmos expressá-las de uma maneira mais simples. Vejamos:

**Teorema 4.6.4.** *Uma correlação projetiva que relaciona três vértices de um triângulo com os respectivos lados opostos é uma polaridade.*

*Demonstração.* Seja  $ABCP \rightarrow abcp$  a correlação onde  $ABC$  é o triângulo dado e  $p$  é uma reta não incidente a  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Portanto, o ponto  $P$  e a reta  $p$  determinam seis pontos, conforme a Figura 4.6 :

$$L = a \cdot AP, \quad M = b \cdot BP, \quad N = c \cdot CP, \quad L' = a \cdot p, \quad M' = b \cdot p, \quad N' = c \cdot p$$

Essencialmente, como a correlação já age como uma polaridade no triângulo  $ABC$ , devemos apenas mostrar que  $p$  é transformado em  $P$ . Ora, a correlação transforma cada ponto  $X$  sobre a reta  $c$  em uma certa reta que intersecta  $c$  em um ponto  $Y$ . Como a correlação é projetiva, temos  $X \bar{\wedge} Y$ . Assim, quando  $X = A$ , temos  $Y = B$  e quando  $X = B$  temos  $Y = A$ , logo  $X \bar{\wedge} Y$  é uma involução. Agora, como a correlação transforma  $N$  em  $CN'$ ,  $(NN')$  é um par da involução. Portanto,  $N'$  é transformado em  $CN = CP$ . Analogamente,  $L'$  é levado em  $AP$  e  $M'$  em  $BP$ . Por fim, a reta  $p = L'M'$  é transformada no ponto  $AP \cdot BP = P$ .  $\square$

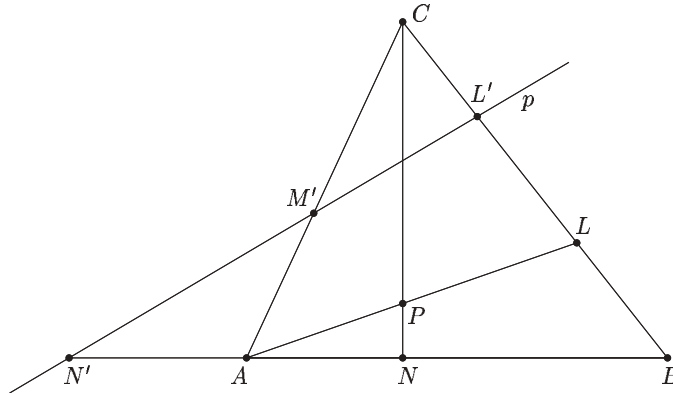


Figura 4.8: Polaridade

O teorema anterior nos diz que, dado um triângulo  $ABC$ , qualquer ponto  $P$  fora dos lados e qualquer reta  $p$  não incidente a nenhum dos vértices determinam uma única polaridade. Dessa forma, o polar de um ponto  $X$  pode ser obtido

através da construção feita no Teorema utilizando a correlação  $ABCP \rightarrow abcp$ . Para designar tal polaridade, usaremos a seguinte notação:

$$(ABC)(Pp)$$

Com isso, a prova do Teorema 4.6.4 nos sugere:

**Teorema 4.6.5.** *Na polaridade  $(ABC)(Pp)$ , onde  $P$  não é incidente a  $p$ , a involução de pontos conjugados em  $p$  é a involução determinada em  $p$  pelo quadrângulo  $ABCP$ .*

*Demonstração.* De fato, como os polares dos pontos  $L' = a \cdot p$ ,  $M = b \cdot p$  e  $N' = c \cdot p$  são as retas  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$ , os pares de lados opostos do quadrângulo  $ABCP$  se intersectam com a reta  $p$  em pares de pontos conjugados.  $\square$

Dado um triângulo  $ABC$ , chamamos de triângulo polar de  $ABC$  o triângulo formado pelos pólos dos seus lados ou pelos polares de seus vértices. A partir desta definição, o matemático Michel Chasles percebeu que, quando propriamente distintos (isto é, quando nenhum dos vértices e lados dos triângulos coincidem), um triângulo e seu polar são perspectivos.

**Teorema 4.6.6 (Chasles).** *Um triângulo e seu triângulo polar, quando propriamente distintos, são perspectivos.*

## Exercícios

1. Deduza a equivalência do Teorema 4.1.1 quando  $B$  e  $C$  são pontos diagonais.
2. Enuncie o dual do Teorema 4.3.1.
3. A identidade é uma colineação ou correlação projetiva?
4. Uma colineação é uma transformação ponto-ponto e reta-reta que preserva incidência. Mostre que se uma colineação transforma uma fileira de pontos projetivamente então ela é projetiva. Dê exemplos de colineações no plano Euclidiano.
5. Uma correlação é uma transformação ponto-reta e reta-ponto que preserva incidência. Mostre que se uma correlação transforma uma fileira de pontos projetivamente então ela é projetiva. Dê exemplos de correlações no plano Euclidiano.
6. Uma correlação projetiva é determinada quando dois quadriláteros correspondentes com seus quatro vértices ordenados são dados.
7. Prove que o centro de uma colineação perspectiva é único.

8. O produto de elações com mesmo eixo é uma elação.
9. Qualquer colineação que fixa um feixe de pontos é perspectiva.
10. Todos os pontos invariantes de uma elação estão sobre o eixo.
11. Em uma homologia, o centro é o único ponto invariante fora do eixo.
12. Uma homologia cujo centro e eixo são, respectivamente, o ponto  $O$  e a reta  $o$ , é dita *homologia harmônica* quando para todo par  $A, A'$  de pontos correspondentes, tem-se  $H(O'C, AA')$ , onde  $C = OA \cdot o$ . Ou seja, o conjugado harmônico do centro  $O$ , com respeito ao par  $AA'$ , repousa sobre o eixo  $o$ . Mostre que uma homologia harmônica é determinada quando o eixo e o centro são dados. Conclua que toda homologia harmônica é de período dois.
13. Toda colineação projetiva de período 2 é uma homologia harmônica.
14. Toda elação de centro  $o$  pode ser escrita como o produto de duas homologias harmônicas de centro  $o$ .
15. O produto de duas homologias harmônicas é uma homologia se, e somente se, o centro de uma está sobre o eixo da outra. Neste caso, o produto ainda é uma homologia harmônica.

# Capítulo 5

## Cônicas

### 5.1 Aspectos históricos

*As cônicas* de Apolônio tinha sido uma das obras favoritas de Fermat, mas os métodos analíticos modificaram seu ponto de vista. *As cônicas* chamaram também a atenção de um outro homem, Girard Desargues, um arquiteto e engenheiro militar de Lyon que, como resultado de seus estudos, chegou a escrever um livro cujas idéias derivam da perspectiva na arte da Renascença. Mas até mesmo Descarte quando ouviu dizer sobre o tratamento dado as seções cônicas sem usar álgebra ficou desanimado. Não parecia possível dizer algo sobre as cônicas que fosse mais fácil sem o uso da álgebra. O prestígio da álgebra era tal que por quase dois séculos a beleza da geometria projetiva passou despercebida.

Para o estudo das cônicas, de um ponto de vista sintético, sem o uso da álgebra, vários nomes surgiram na história como Blaise Pascal, von Staudt e Jakob Steiner, dentre outros.

### 5.2 A definição de von Staudt

Em uma das seções passadas, vimos que uma projetividade pode ser classificada como elíptica, parabólica ou hiperbólica, conforme o seu número de pontos invariantes. Da mesma forma, diremos que uma polaridade é hiperbólica ou elíptica de acordo com a existência ou não de pontos auto-conjugados. A existência de um ponto  $P$  auto-conjugado, não só garante a classificação da polaridade como hiperbólica, mas também implica na existência de mais um ponto auto-conjugado em cada reta incidente com  $P$ , a menos do seu polar  $p$ .

Com efeito, o dual de 4.6.1 afirma que  $p$  é a única reta auto-conjugada incidente a  $P$ . Portanto, qualquer outra reta passando por  $P$  possui uma involução de pontos conjugados. Segue do Teorema 4.3.4 que em cada uma dessas retas existe um ponto auto-conjugado  $Q \neq P$ . Agora já podemos apresentar a defi-



nição simples e simétrica de cônica dada por von Staudt, que mostra a cônica como uma figura auto-dual.

**Definição 5.2.1 (von Staudt).** *O lugar geométrico formado pelos pontos ou pelas retas auto-conjugadas de uma polaridade hiperbólica é chamado de cônica.*

Essencialmente, sem perder a noção de dualidade do plano, trabalharemos as cônicas como sendo um conjunto de pontos e diremos que as retas auto-conjugadas, por intersectarem a cônica em um único ponto, são as retas *tangentes* à cônica. Analogamente, diremos que uma reta é *secante* ou *não-secante* à cônica, se ela intersectar em dois pontos ou não intersectar a cônica, respectivamente.

Um ponto que é incidente a duas retas tangentes será chamado de ponto *exterior* à cônica, já um ponto que é centro de um feixe formado apenas por retas secantes será dito ponto *interior*. Obviamente, o polar de um ponto exterior será sempre uma reta secante e o pólo de uma reta não-secante será um ponto interior. Na figura abaixo, ilustramos esta situação.

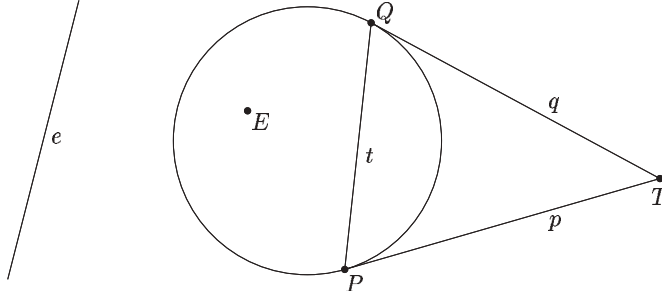


Figura 5.1: Ponto exterior e interior

No modelo finito apresentado na seção 2.3, toda cônica é formada por apenas quatro pontos, sendo seis dos pontos restantes exteriores e três interiores à cônica. Neste mesmo exemplo, podemos mostrar que toda polaridade é hiperbólica, ou seja, os conceitos de cônica e polaridade se fundem. Mas isto não ocorre sempre, isto é, existem geometrias onde as polaridades podem ser elípticas. Todavia, a partir de agora, estaremos só interessados nas polaridades hiperbólicas e tomaremos a liberdade de substituir expressões do tipo ‘pontos conjugados com respeito à polaridade’ por ‘pontos conjugados com respeito à cônica’. Com isso, vamos enunciar nossos primeiros resultados.

**Teorema 5.2.2.** *Dois pontos conjugados em uma secante  $PQ$  ( $P$  e  $Q$  sobre a cônica) são conjugados harmônicos com respeito a  $P$  e  $Q$ .*

*Demonstração.* Os pontos auto-conjugados  $P$  e  $Q$  são pontos invariantes da involução de pontos conjugados sobre  $PQ$ .  $\square$

Da mesma forma, reciprocamente, temos:

**Teorema 5.2.3.** *Em uma secante  $PQ$ , qualquer par de conjugados harmônicos com respeito a  $P$  e  $Q$  são conjugados com respeito à cônica.*

Dualizando,

**Teorema 5.2.4.** *Quaisquer duas retas conjugadas incidentes a um ponto exterior  $P$  são conjugadas harmônicas com respeito às tangentes traçadas por  $P$ .*

Os próximos teoremas vão nos ajudar a saber como ‘recuperar’ a polaridade através da cônica, ou seja, como determinar, através de uma cônica dada, o polar de todos os pontos sobre o plano.

**Teorema 5.2.5.** *Se um quadrângulo está inscrito em uma cônica então seu triângulo diagonal é auto-polar.*

*Demonstração.* Sejam  $A = PS \cdot QR$ ,  $B = QS \cdot RP$ ,  $C = RS \cdot PQ$  os pontos diagonais do quadrângulo  $PQRS$ , conforme a Figura 5.2. A reta  $BC$  intersecta os lados  $QR$  e  $PS$  nos pontos  $A_1$  e  $A_2$  tais que  $H(QR, AA_1)$  e  $H(PS, AA_2)$ . Por 5.2.3,  $A_1$  e  $A_2$  são pontos conjugados a  $A$ , logo a reta  $BC$  é o polar de  $A$ . Analogamente,  $CA$  é o polar de  $B$  e  $AB$  é o polar de  $C$ .  $\square$

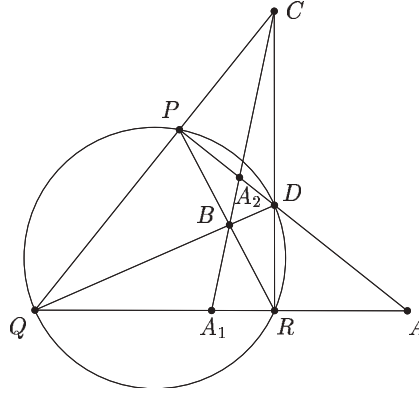


Figura 5.2

**Corolário 5.2.6.** *Para construir o polar de um ponto  $A$  fora da cônica, trace duas secantes quaisquer  $QR$  e  $PS$  por  $A$ . O polar de  $A$  será a reta*

$$(QS \cdot RP)(RS \cdot PQ)$$

Dualizando,

**Corolário 5.2.7.** *Para construir o pólo de uma reta  $a$  não tangente à cônica, trace dois pontos exteriores quaisquer  $(q \cdot r)$  e  $(p \cdot s)$  em  $a$ . O pólo de  $a$  será o ponto*

$$((q \cdot s)(r \cdot p)).((r \cdot s)(p \cdot q))$$

Uma dúvida que pode ocorrer ao leitor devido ao último resultado é a de como traçar as tangentes a uma cônica por um ponto exterior. Contudo, esta dúvida é fruto da nossa mente fechada, que insiste em olhar a cônica como apenas um lugar geométrico de pontos. Ao invés disso, se olharmos a cônica como o ‘envelope’ das retas auto-conjugadas, estaremos percebendo todas as possíveis candidatas a tangente incidentes com aquele ponto.

### 5.3 A definição de Steiner

Nesta seção vamos apresentar a definição de cônica dada por Steiner(1832) e mostrar que, surpreendentemente, esta definição coincide com a definição dada por von Staudt. Com efeito, o Teorema 5.3.3 mostrará que toda cônica de von Staudt é uma cônica de Steiner, enquanto o Teorema 5.3.5 mostrará que toda cônica de Steiner é uma cônica de von Staudt.

**Teorema 5.3.1 (Seydewitz).** *Se um triângulo está inscrito em uma cônica, qualquer reta conjugada a um dos lados intersecta os outros dois lados em pontos conjugados.*

*Demonstração.* Considere o triângulo  $PQR$ . Qualquer reta  $c$  conjugada a  $PQ$  é polar de algum ponto  $C$  em  $PQ$ . Seja  $S$  o outro ponto de intersecção da cônica com  $RC$ . Pelo Teorema 5.2.5,  $c$  é justamente a união dos pontos  $A = PS \cdot QR$  e  $B = QS \cdot RP$ . Estes pontos conjugados são as intersecções de  $c$  com o respectivo triângulo.  $\square$

**Definição 5.3.2 (Steiner).** *Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos comuns a retas correspondentes de dois feixes projetivos, mas não perspectivos.*

**Teorema 5.3.3 (Steiner).** *Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos sobre uma cônica. Se  $R$  é um ponto variando sobre a cônica então para  $x = RP$  e  $y = RQ$  temos  $x \bar{\wedge} y$*

*Demonstração.* De fato, as tangentes  $p$  e  $q$  se intersectam em um ponto  $D$ , pólo de  $PQ$ . Assim, tome uma reta  $c$  sobre  $D$  não incidente nem com  $P$  nem com  $Q$  e defina os pontos  $B = c \cdot x$  e  $A = c \cdot y$ , conforme a Figura 5.3. Segue pelo Teorema de Seydewitz que  $BA$  é um par da involução de pontos conjugados em  $c$ . Logo, a medida que o ponto  $x \cdot y$  varia sobre a cônica, temos:

$$x \bar{\wedge} B \bar{\wedge} A \bar{\wedge} Y$$

$\square$

A recíproca do teorema anterior será provada com a ajuda do:

**Teorema 5.3.4.** *Uma cônica é determinada quando três pontos e duas tangentes em dois destes pontos são dadas.*

*Demonstração.* A idéia da demonstração é encontrar uma polaridade que induza uma cônica satisfazendo o enunciado. De fato, sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  os pontos dados,

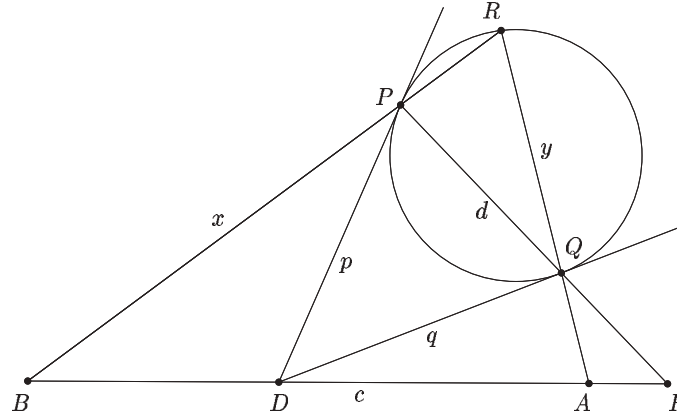


Figura 5.3: Teorema de Steiner

$PD$  e  $QD$  as retas dadas e  $F$  o conjugado harmônico de  $C = PQ \cdot RD$  com respeito a  $P$  e  $Q$ , conforme a Figura 5.4. Considere a correlação  $PQRD \rightarrow PD, QD, RF, PQ$  que transforma  $PQ$  em  $D$ ,  $RD$  em  $F$ ,  $C$  em  $FD$  e induz em  $PQ$  a projetividade  $PQC \bar{\wedge} PQF$ . Como  $H(PQ, CF)$ , temos  $PQCF \bar{\wedge} PQFC$ . Portanto, a correlação, que transforma  $F$  em  $CD$ , é uma polaridade (Teorema 5.2.5 aplicado a  $DCF$ ). Segue então, que a polaridade determina a cônica desejada, visto que os polares de  $P$ ,  $Q$ , e  $R$  são as retas  $PD$ ,  $QD$  e  $RF$ .  $\square$

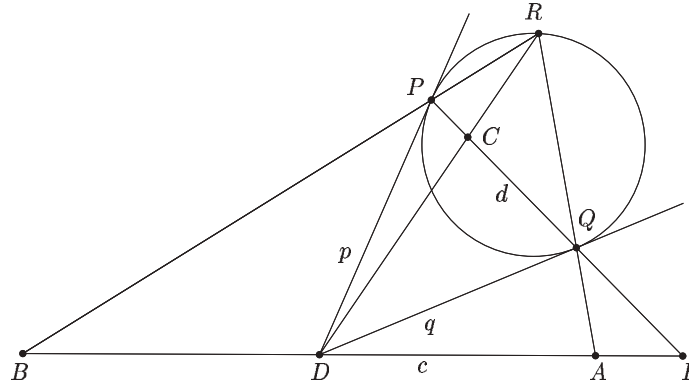


Figura 5.4: Cônica por 3 pontos tangente a duas retas dadas

**Teorema 5.3.5 (Construção de Steiner).** *Se  $x$  e  $y$  são retas variáveis passando pelos pontos  $P$  e  $Q$  de tal forma que  $x \bar{\wedge} y$ , mas não  $x \bar{\bar{\wedge}} y$ , então o lugar geométrico dos pontos  $x \cdot y$  é uma cônica (von Staudt) incidente a  $P$  e  $Q$ . Além disso, se a projetividade tem o efeito  $pdx \bar{\wedge} dqy$  onde  $d = PQ$ , então  $p$  e  $q$  são as tangentes nos pontos  $P$  e  $Q$ .*

*Demonstração.* Como a projetividade  $x \bar{\wedge} y$  não é uma perspectividade, existem retas  $p$  e  $q$  tais que  $pdx \bar{\wedge} dqy$ . Pelo teorema anterior, existe uma única cônica tangente a  $p$  em  $P$ , tangente a  $q$  em  $Q$  e incidente com algum ponto do tipo  $x \cdot y$ . Pelo Teorema de Steiner, esta cônica determina uma projetividade entre o feixe de retas por  $P$  e o feixe de retas por  $Q$ . Mas o Teorema Fundamental garante que as duas projetividades coincidem! Logo, o lugar geométrico dos pontos  $x \cdot y$  é uma cônica incidente com  $P$  e  $Q$ .  $\square$

**Corolário 5.3.6.** *Uma única cônica pode ser traçada por cinco pontos dados, desde que três quaisquer destes não sejam colineares.*

*Demonstração.* De fato, os dois pontos  $P, Q$  e três posições de  $x \cdot y$  determinam uma projetividade  $x_1x_2x_3 \bar{\wedge} y_1y_2y_3$ , que, pelo teorema anterior, determina uma cônica sobre estes cinco pontos. Para verificar a unicidade, basta notar que, se um ponto, incidente a qualquer cônica deste tipo, é ligado à  $P$  e  $Q$  pelas retas  $x$  e  $y$  temos, pelo Teorema de Steiner,  $xx_1x_2x_3 \bar{\wedge} yy_1y_2y_3$ .  $\square$

## 5.4 Os teoremas de Brianchon e Pascal

Nesta seção, talvez a mais bela de todo o texto, apresentamos dois resultados famosos: o Teorema de Brianchon (1760-1854) e o seu dual, o Teorema de Pascal. Historicamente, Brianchon obteve seu teorema dualizando o de Pascal, numa época onde o princípio da dualidade estava sendo descoberto. Aqui, vamos fazer o processo inverso.

Dualizando o último corolário temos:

**Teorema 5.4.1.** *Cinco retas, três quaisquer não concorrentes, determinam uma única cônica.*

Mais geralmente,

**Teorema 5.4.2.** *Se os vértices de um triângulo variam sobre três retas fixas  $p, q$  e  $r$  não concorrentes, com dois lados sempre passando por dois pontos fixos  $A$  e  $B$  não colineares a  $p \cdot q$ , então o terceiro lado determina uma cônica.*

*Demonstração.* Seja  $XYZ$  o triângulo variando sobre as retas  $p, q$  e  $r$ , enquanto  $YZ$  e  $ZX$  passam pelos pontos  $A$  e  $B$  respectivamente, conforme a Figura 5.5. Então,

$$X \overset{B}{\bar{\wedge}} Z \overset{A}{\bar{\wedge}} Y$$

Como nem  $AB$ , nem  $r$  passam por  $D = p \cdot q$ , a projetividade  $X \bar{\wedge} Y$  não é uma perspectividade. Logo, pelo dual da construção de Steiner,  $XY$  determina uma cônica que passa por  $p$  e  $q$ .  $\square$

Repare que, se todos os lados de um hexágono circunscrevem uma cônica, cinco deles podem ser identificados com as retas  $DE, FA, AB, BC, CD$ , conforme a Figura 5.5. Como esta cônica é única, pelo Teorema 5.4.1, o sexto lado tem que coincidir com alguma posição  $XY$ . Portanto  $BX \cdot AY$  está sobre  $CE$ . Assim, acabamos de provar o Teorema de Brianchon:

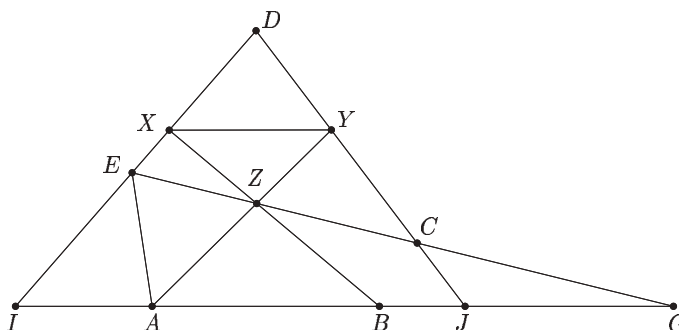


Figura 5.5

**Teorema 5.4.3 (Brianchon).** *As diagonais de um hexágono que circunscreve uma cônica são concorrentes.*

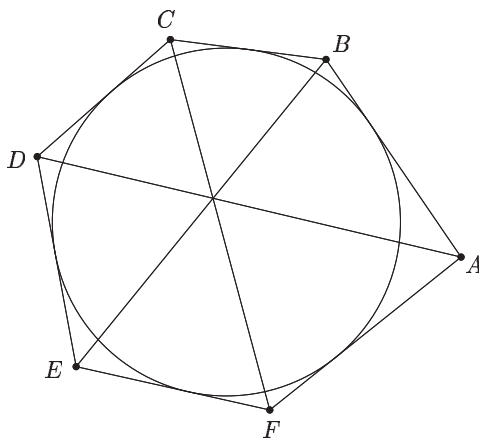


Figura 5.6: Teorema de Brianchon

Dualizando encontramos,

**Teorema 5.4.4 (Pascal).** *Os lados opostos de um hexágono inscrito em uma cônica são colineares.*

## 5.5 A involução de Desargues

Mais profundo que o seu teorema sobre triângulos perspectivos, o próximo teorema é fruto do fabuloso trabalho de Desargues:

**Teorema 5.5.1 (Teorema da Involução de Desargues).** *Dados um quadrângulo e uma reta que não passa por nenhum dos seus vértices, as cônicas*

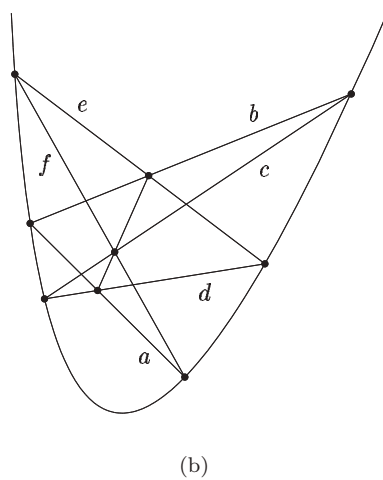
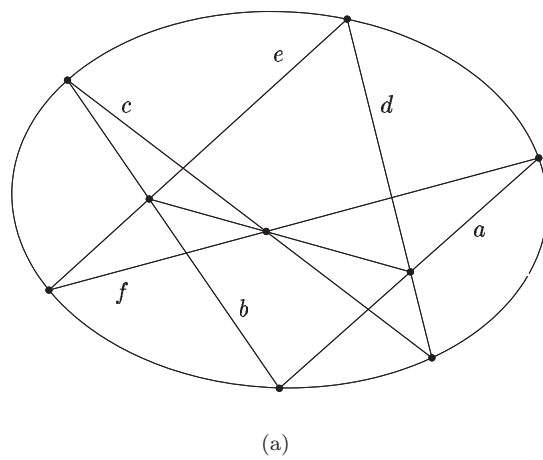


Figura 5.7: Teorema de Pascal

que passam pelos quatro vértices do quadrângulo intersectam a reta em pares de pontos de uma mesma involução.

*Demonstração.* Considere o quadrângulo  $PQRS$  inscrito em uma cônica e a reta  $g$ , que não passa por nenhum dos seus vértices, incidente à cônica nos pontos  $K, K'$  e aos lados opostos do quadrângulo nos pontos  $A, A'$  e  $B, B'$ . Considere as retas  $x = PK, y = PK', q = PQ, s = PS, x' = RK, y' = RK', q' = RQ$  e  $s' = RS$ . Pelo Teorema 5.3.3 temos que esta cônica é obtida pela projetividade  $xyqs \bar{\wedge} x'y'q's'$ , então temos

$$KK'AB \bar{\wedge} xyqs \bar{\wedge} x'y'q's' \bar{\wedge} KK'B'A'$$

Dessa forma,

$$KK'AB \bar{\wedge} KK'B'A' \bar{\wedge} K'KA'B'$$

onde a última projetividade é garantida pelo Teorema 1.4.1. Com isso, temos que  $KK'AB \bar{\wedge} KK'B'A'$  e segue que  $(K, K'), (A, A')$  e  $(B, B')$  são pares de uma involução sobre  $g$ . Como esta involução é determinada pelos pares  $(A, A')$  e  $(B, B')$  nos temos o teorema.  $\square$

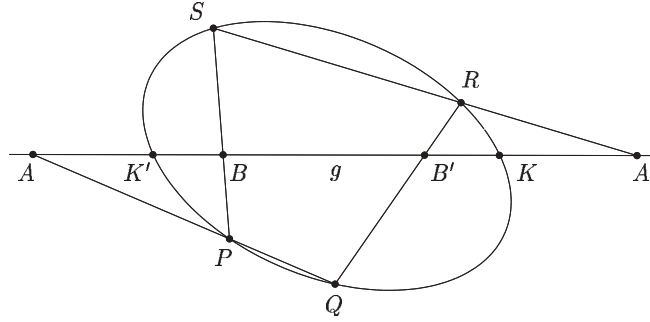


Figura 5.8: Involução de Desargues

Combinando os Teoremas 5.5.1 e 4.6.5, podemos observar que a involução determinada em  $g$  pelo quadrângulo  $PQRS$  não é só a involução de Desargues dada pelas cônicas incidentes a  $PQRS$ , mas também a involução de pontos conjugados em  $g$  com respeito a polaridade  $(PQR)(Sg)$ . Logo:

**Teorema 5.5.2.** *Se dois triângulos possuem seis vértices distintos, todos incidentes a uma cônica, então existe uma polaridade relativamente à qual ambos são auto-polares.*

Reciprocamente,

**Teorema 5.5.3.** *Se dois triângulos, com a propriedade de que nenhum vértice de qualquer um deles está sobre um lado do outro, são auto-polares por uma certa polaridade, então seus vértices estão sobre uma cônica enquanto seus lados circunscrevem uma outra cônica.*



## Exercícios

1. Todo ponto em uma tangente é conjugado ao ponto de contato.
2. O polar de qualquer ponto exterior é a união dos pontos de contato das duas tangentes traçadas por este ponto.
3. Quaisquer dois vértices de um triângulo circunscrito a uma cônica são separados harmonicamente pelo ponto de contato do lado que os contém e pelo ponto de intersecção desse lado com a reta formada pelos outros dois pontos de contato.
4. Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos conjugados com respeito a uma cônica dada. Se uma reta incidente a  $A$  intersecta a cônica em dois pontos  $Q$  e  $R$  e se as retas  $BQ$  e  $BR$  intersectam, respectivamente, a cônica nos pontos  $S$  e  $P$ , então  $A$ ,  $S$  e  $P$  são colineares.
5. Se  $PQR$  é um triângulo inscrito em uma cônica, qualquer ponto  $A$  em  $QR$  (exceto  $Q$ ,  $R$  ou  $p \cdot QR$ ) é vértice de um triângulo  $ABC$  auto-polar com  $B$  em  $RP$  e  $C$  em  $PQ$ .
6. Enuncie e prove a recíproca do exercício anterior.
7. Dado quatro pontos e uma reta, só existe uma única cônica incidente a três deles de tal forma que o ponto restante é o pólo da reta dada.
8. Dualize os Teoremas de Seydewitz e de Steiner.
9. Se  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $U$  são 6 pontos em uma cônica tais que  $PS$ ,  $QR$  e  $TU$  são incidentes a um ponto  $A$ , então  $TEAU \bar{\wedge} TABU$ , onde  $E = TU \cdot PR$  e  $B = TU \cdot QS$ .
10. Dado um quadrângulo  $PQRD$ , construa outro ponto sobre a cônica incidente a  $R$  e que é tangente a  $PD$  em  $P$  e tangente a  $QD$  em  $Q$ .
11. Dadas três tangentes a uma cônica e os pontos de contato de duas delas, construa a tangente restante.
12. Duas cônicas estão relacionadas por uma correlação projetiva e por uma colinação projetiva.
13. Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos sobre uma tangente de uma cônica. Fazendo variar uma reta  $x$  sobre  $P$  e sendo  $X$  o pólo de  $x$ , qual o lugar geométrico formado pelos pontos  $x \cdot QX$ ?
14. Sejam  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P'$ ,  $Q'$  cinco pontos, quaisquer, três quaisquer deles não

colineares, e  $x$  uma reta variando sobre  $P$ , defina

$$N = PQ' \cdot P'Q, \quad M = RP' \cdot x, \quad L = Q'R.MN, \quad R' = QL \cdot x$$

Qual é o lugar geométrico dos pontos  $R'$ ?

15. Dados cinco pontos e uma cônica incidente a eles, construa a tangente a cada um desses pontos.
16. Dados um quadrângulo  $PQRS$  e uma outra reta  $s$  incidente a  $S$ , construa outro ponto sobre a cônica incidente a  $PQR$  e que é tangente a  $s$  em  $S$ .
17. Dados 6 pontos em uma cônica, de quantas maneiras eles podem ser vistos como vértices de um hexágono de Pascal?
18. Dados 5 pontos, três quaisquer não colineares, e uma reta incidente a um deles, construa o segundo ponto de intersecção dessa reta com a cônica determinada pelos cinco pontos.
19. Uma reta dada é tangente no máximo a duas cônicas que circunscrevem um certo quadrângulo.
20. Sejam  $P, Q, R, S, T$ , e  $U$  pontos sobre uma cônica tais que as retas  $PS, QR$  e  $TU$  são concorrentes em um ponto  $A$ . Se  $E = TU \cdot PR$  e  $B = TU \cdot QS$  então  $EB$  é um par da involução  $(AA)(TU)$ . Isso pode ser concluído direto do exercício 9 desta seção?
21. Sejam  $P, Q, R, S$ , quatro pontos sobre uma cônica e  $t$  uma tangente a um quinto ponto. Se nenhum ponto diagonal de  $PQRS$  está em  $t$ , então existe uma outra cônica passando por  $P, Q, R, S$  e tangenciando  $t$ .
22. Se dois triângulos possuem 6 distintos vértices sobre uma cônica, os seis lados tangenciam outra cônica.
23. Se existem duas cônicas tais que uma circunscreve e a outra está inscrita a um dado triângulo, então toda secante da primeira que é tangente da segunda pode ser usada para construir outro triângulo inscrito-circunscrito.
24. Sejam  $P, Q, R, S, T$  cinco pontos tais que três quaisquer deles são não-colineares. Então os seis pontos

$$\begin{array}{lll} A = QR \cdot PS, & B = RP \cdot QS, & C = PQ \cdot RS, \\ D = QR \cdot PT, & E = RP \cdot QT, & F = PQ \cdot RT, \end{array}$$

estão sobre uma mesma cônica.

# Referências

- [1] Coxeter, H. S. M. *Projective Geometry*. Springer Verlag, 1974.
- [2] Coxeter, H. S. M. *The Real Projective Plane*. Springer Verlag, 1993.
- [3] Veblen, Oswald & Young, John W. *Projective Geometry, Vol. 1*. Blaisdell Publishing Company, 1938.
- [4] Cremona, Luigi. *Éléments de Géométrie Projective*. Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1875.
- [5] Boyer, Carl B. *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher Ltda, 1991.
- [6] Ayres Jr., Frank *Schaum's Outline of Theory and Problems of Projective Geometry*. Schaum Publishing Co., 1967.

# Índice alfabético

- cônica
  - de Steiner, 43
  - de von Staudt, 41
  - ponto exterior, 41
  - pontos conjugados, 41
- Chasles, M., 1, 38
- colineação
  - perspectiva, 33
    - centro de uma, 38
  - projetiva, 32, 33
- conjugado harmônico, 21
- conjunto
  - harmônico, 19, 21
  - quadrangular, 19, 29, 31
- correlação
  - projetiva, 32, 37, 38
- correspondência
  - elementar, 5
- Desargues
  - Teorema de, 10
- Desargues, G., 1
- Dualidade
  - Princípio da, 12, 19
- elação, 33, 34
- Fano, G., 10
- figuras perspectivas, 14
- Geometria projetiva
  - Teorema Fundamental, 19
- homologia, 33
  - harmônica, 35, 39
- involução, 30, 31
- modelos
  - finitos, 4
- pólo, 35
- Pappus de Alexandria, 25
- Pascal
  - Teorema de, 3, 4
- perspectividade, 1, 6
  - centro da, 15
  - eixo da, 15
- Pieri, M., 10
- plano, 5
- polar, 35, 42
- polaridades, 35
  - pontos conjugados, 41
- Poncelet, J. V., 1
- ponto
  - interior, 41
- pontos
  - auto-conjugados, 36, 41
  - conjugados harmônicos, 41
  - conjugados harmônicos, 42
  - fileira de, 5
  - ideais, 3, 4
  - ordinários, 3, 4
- projeção
  - central, 2
  - centro da, 2
- projetividade, 1, 5

- elíptica, 28, 29
- hiperbólica, 28, 29
- parabólica, 28, 30
- quadrângulo completo, 12
- quadrilátero completo, 12, 18
- reta
  - auto-conjugada, 36
  - não tangente, 41
  - secante, 41
  - tangente, 41
- retas
  - feixe de, 5
- Staudt, von, 1
- Steiner, J., 1
- Teorema
  - da involução de Desargues, 46
  - de Seydewitz, 49
  - de Brianchon, 46
  - de Desargues, 26
  - de Pappus, 19, 25, 27
  - de Steiner, 49
- triângulo
  - auto-polar, 37, 42
  - diagonal, 14, 42
  - polar, 38
- triângulos
  - propriamente distintos, 38
- vascaínos, 17
- Veblen, O., 11

# Lista de Figuras

1.1	Projeção central . . . . .	2
1.2	Correspondência elementar . . . . .	5
1.3	Seqüência de correspondências elementares . . . . .	6
1.4	Perspectividades . . . . .	7
1.5	$ABC \bar{\wedge} A''B''C'$ . . . . .	7
1.6	Teorema 1.4.1 . . . . .	8
2.1	Axioma 2.4 . . . . .	11
2.2	Quadrângulo PQRS . . . . .	13
2.3	Quadrilátero pqrs . . . . .	13
2.4	Triângulos perspectivos . . . . .	15
2.5	Planos distintos . . . . .	16
2.6	Modelo finito . . . . .	17
3.1	Conjunto quadrangular . . . . .	20
3.2	Conjunto harmônico de pontos . . . . .	22
3.3	Conjunto harmônico de retas . . . . .	22
3.4	Projetividade $ABCX \bar{\wedge} A_1B_1C_1X_1$ . . . . .	23
3.5	Corolário 3.3.3 . . . . .	25
3.6	Teorema de Pappus . . . . .	26
4.1	Equivalência do conjunto quadrangular (a) . . . . .	29
4.2	Equivalência do conjunto quadrangular (b) . . . . .	29
4.3	Triângulos perspectivos . . . . .	33
4.4	Quadrângulos perspectivos . . . . .	34
4.5	Homologia e elação . . . . .	34
4.6	Homologia harmônica . . . . .	35
4.7	Pontos e retas auto-conjugadas . . . . .	36
4.8	Polaridade . . . . .	37
5.1	Ponto exterior e interior . . . . .	41

5.2	Teorema 5.2.5 . . . . .	42
5.3	Teorema de Steiner . . . . .	44
5.4	Cônica por 3 pontos tangente a duas retas dadas . . . . .	44
5.5	Teorema 5.4.2 . . . . .	46
5.6	Teorema de Brianchon . . . . .	46
5.7	Teorema de Pascal . . . . .	47
5.8	Involução de Desargues . . . . .	48