

GRAFOS

Conceitos fundamentais

Definição

Um grafo é uma estrutura constituída por dois conjuntos finitos:

- de vértices (nós ou nodos)
- de arestas (arcos ou ramos)

Um **grafo** pode ser representado por $G = (V, A)$, em que

- $V = \{ 1, \dots, n \}$ é o conjunto de vértices
- $A = \{ 1, \dots, m \}$ é o conjunto arestas, com $A \subseteq V \times V$

Cada aresta é representada por um par (i, j) , com $i \neq j$ e $i, j \in V$, em que

- i é o vértice origem
- j o vértice destino

Tipos de grafos

Uma aresta (i, j) diz-se

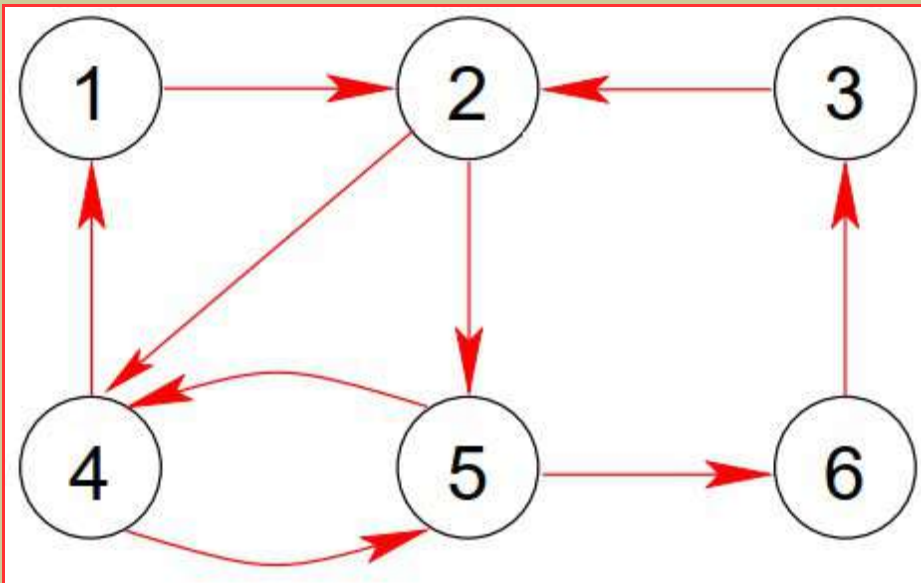
- **não dirigida (não orientada)** se a aresta $(j, i) \in A$
- **dirigida (orientada)** se a aresta $(j, i) \notin A$

Existem 3 tipos de grafos:

- **dirigido (orientado)**, todas as arestas são dirigidas,
- **não dirigido (não orientado)**, todas as arestas são não dirigidas e,
- **misto**, algumas arestas são dirigidas e outras são não dirigidas

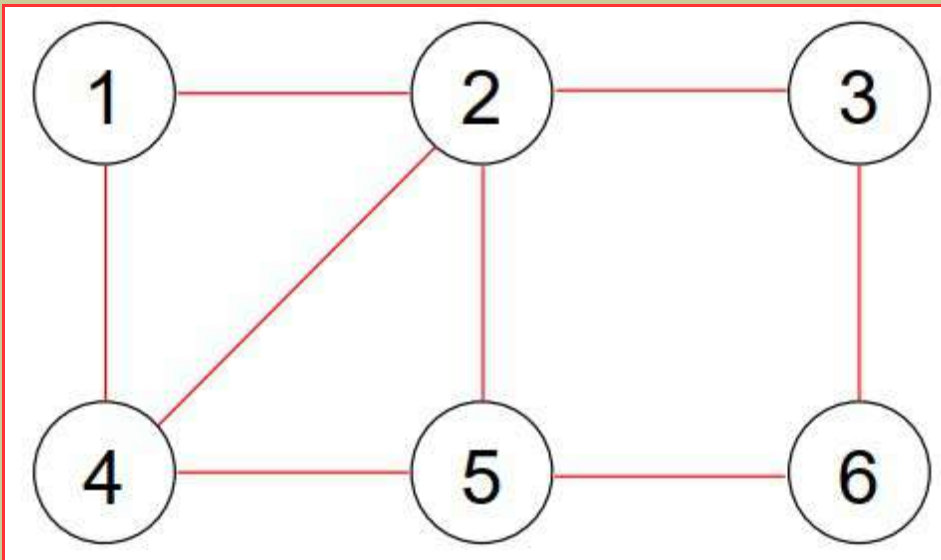
Exemplo de um grafo dirigido (orientado):

- $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
- $A = \{ (1,2), (2,4), (2,5), (3,2), (4,1), (4,5), (5,4), (5,6), (6,3) \}$



Exemplo de um grafo não dirigido (não orientado):

- $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
- $A = \{ (1,2), (1,4), (2,3), (2,4), (2,5), (3,6), (4,5), (5,6) \}$



Propriedades

Um **grafo** diz-se **completo**, se entre quaisquer dois vértices existir uma aresta dirigida (grafos dirigidos) ou não dirigida (grafos não dirigidos)

Um grafo G' diz-se **complemento** do grafo G se for obtido a partir do grafo *completo* com o mesmo número de vértices de G , retirando-lhe todas as arestas de G

Um grafo diz-se **denso** se o número de arestas é próximo do número máximo

Um grafo cujo complemento seja denso diz-se **esparso**

A **densidade de um grafo** é a razão entre a quantidade de arestas do grafo e a quantidade de arestas do grafo completo com igual quantidade de vértices

Dois **vértices** são **adjacentes/vizinhos**, se estiverem ligados por uma aresta

Duas **arestas** são **adjacentes** se ambas incidem sobre o mesmo vértice

Um **vértice** é de **ordem k** , se tiver k arestas a ele adjacente

Caminho

Um **caminho** **p** entre os vértices **S** e **T** em G , é uma sucessão de vértices e arestas:

$$\mathbf{p} = [S = n_1, (n_1, n_2), n_2, \dots, (n_{k-1}, n_k), n_k = T]$$

Um caminho também pode ser representado apenas pela sucessão

- de vértices: $\mathbf{p} = [S = n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k = T],$ ou

- de arestas: $\mathbf{p} = [(S, n_2), \dots, (n_{k-1}, T)]$

Um caminho diz-se **simples** se não há vértices e arestas repetidas na sucessão

Um **ciclo** é um caminho em que $S = T$

Num **ciclo simples**, todos os vértices são distintos

Um **circuito** (**ciclo dirigido**) é um ciclo formado por arestas dirigidas

Um grafo dirigido sem ciclos dirigidos diz-se **acíclico**

Um grafo diz-se **ligado/conexo** se existir um caminho entre quaisquer dois vértices

Problemas envolvendo grafos

Um grafo diz-se **pesado** se contiver informação associada às arestas e/ou aos vértices (normalmente denomina-se de **rede**)

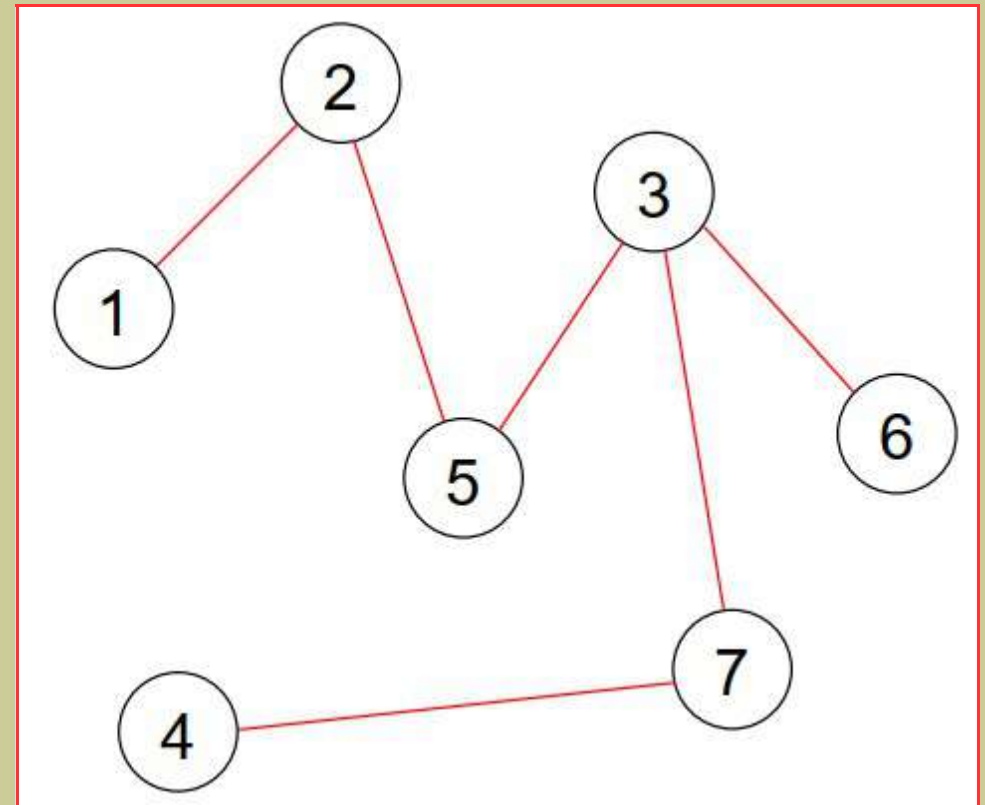
A forma mais simples de descrever muitos problemas reais é representá-lo em forma de grafo (rede), pois um grafo oferece uma representação visual com vantagens na construção de um modelo matemático com vista à resolução do problema

Árvore

Uma **floresta** é um grafo não orientado sem ciclos

Uma **árvore** é um grafo não orientado sem ciclos e ligado

Um subgrafo que seja uma árvore e contenha todos os vértices do grafo é designado por **árvore abrangente** ou **árvore total** ("Spanning Tree")



A escolha de um vértice arbitrário para raiz de uma árvore define noções de descendentes de um vértice e de subárvore com raiz num vértice

Uma **árvore com raiz** é um grafo orientado com *um e um só* caminho simples entre a raiz e qualquer vértice do grafo

Exemplo:

- árvore com raiz no vértice 5

