11
Aplicações da Integral

Ao introduzirmos a *Integral Definida* vimos que ela pode ser usada para calcular *áreas sob curvas*. Veremos neste capítulo que existem outras aplicações. Essas aplicações estendem-se aos mais variados campos do conhecimento e, apenas para citar dois desses campos, destacaremos a Geometria e a Física. Na Geometria, além do *cálculo de áreas sob curvas* como já vimos, podemos usar a *Integral Definida* para calcular *comprimento de arcos* e *volumes*; na Física, para calcular o *trabalho realizado por uma força, momento, centros de massa* e *momento de inércia*, além de várias outras aplicações. Faremos aqui, apenas, aplicações geométricas.

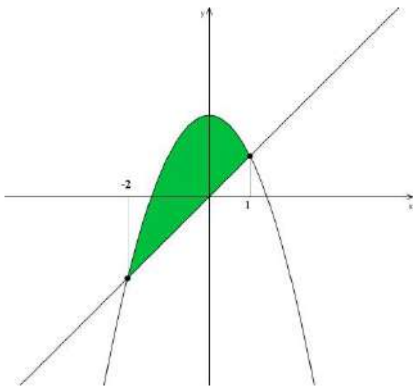
11.1 Áreas entre curvas

Denominaremos por *área entre curvas* a área de regiões limitadas por curvas que são gráficos de funções. Vamos considerar, para melhor entendimento, o exemplo a seguir.

Exemplo 11.1

Calcular a área limitada pelas curvas

$$y = x \text{ e } y = -x^2 + 2$$



Observe, no gráfico ao lado, que as curvas se interceptam nos pontos de coordenadas $(1,1)$ e $(-2,-2)$. A área procurada está representada pela região colorida.

Usando a notação de área sob curvas podemos escrever:

$$A = A_{-\sqrt{2}}^{1}(-x^2 + 2) - A_0^1(x) + A_{-2}^{0}(-x) - A_{-2}^{-\sqrt{2}}(x^2 - 2)$$

e, daí,

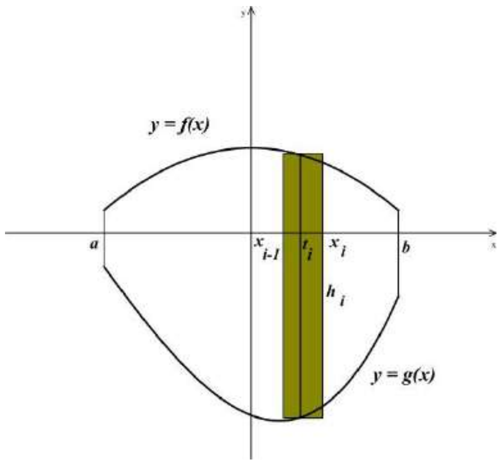
$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x\right]\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{1} - \frac{1}{2} + 2 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]\Bigg|_{-2}^{-\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$$

Este cálculo pode ser simplificado através do método que passaremos a descrever. Para isso vamos considerar duas funções f e g, contínuas em $[a,b]$, com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, e a região *do* plano limitada pelos gráficos de f, de g e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ (a figura abaixo é um esboço da região descrita).

Façamos uma partição do intervalo $[a,b]$, através dos pontos:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \cdots \leq x_n = b$$

e sejam $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ e $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1,2,3,\cdots,n$.



Para cada i podemos inscrever na região considerada um retângulo de base Δ_{x_i} e altura $h_i(t_i)$, como mostrado ao lado. A soma S_n das áreas desses retângulos, dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} h_i(t_i)\Delta_{x_i}$$

é uma aproximação da área da região considerada.

Na construção das áreas dos retângulos referidos anteriormente devemos considerar os três casos diferentes para o cálculo de $h_i(t_i)$, em razão das diferentes situações que a região considerada pode se apresentar.

1) $f(t_i) \geq 0$ e $g(t_i) \geq 0 \Rightarrow h_i(t_i) = f(t_i) - g(t_i)$;
2) $f(t_i) \geq 0$ e $g(t_i) < 0 \Rightarrow h_i(t_i) = f(t_i) + |g(t_i)| = f(t_i) - g(t_i)$;
3) $f(t_i) < 0$ e $g(t_i) < 0 \Rightarrow h_i(t_i) = |g(t_i)| - |f(t_i)| = -g(t_i) + f(t_i) = f(t_i) - g(t_i)$.

Nos três casos temos $h_i(t_i) = f(t_i) - g(t_i)$ e, portanto,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} h_i(t_i)\Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)]\Delta_{x_i}.$$

É de se esperar que, quando $\Delta_{x_i} \to 0$, a área procurada será dada por:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)]\Delta_{x_i} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Voltando ao Exemplo 11.1 podemos, agora, resolvê-lo pelo novo método:

$$\int_{-2}^{1} [-x^2 + 2 - x]\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}\cdot$$

Exercício 11.1

1) Calcular a área limitada pelas curvas:

a) $y = x^3$ e $y = x^2$ b) $y = x^2, y = x^2 + 2x + 2$ e $y = x^2 - 2x + 2$

c) $y = -x^2 + 8$ e $y = 2x^2 - 1$ d) $x = 4 - y^2$ e $2x = 3 - y^2$

e) $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ e $y = -2x + 12,$ *no primeiro quadrante*.

2) As curvas $y = -2x^2 + 2, y = x^2 - 1$ e $x = 2$ limitam uma região no plano que apresenta o formato de um peixe. Esboce o gráfico da região e calcule a sua área.

3) Esboce a região do plano limitada pela parábola $y = 9 - x^2$, pela reta tangente a esta parábola no ponto $x = 2$ e pelo *eixo x*. Em seguida, calcule a sua área.

4) Encontre a área da região limitada pelas parábolas de equações: $y = -x^2 + 4$, $y = 4x - x^2$ e $y = -(x^2 + 4x)$.

11.2 Volumes de sólidos de revolução

Muitos dos sólidos com que trabalhamos podem ser obtidos através da rotação de uma região plana em torno de um eixo, denominado *eixo de rotação*. A esfera, por exemplo, pode ser obtida girando um semicírculo em torno de um eixo que contenha o diâmetro do semicírculo. Sólidos obtidos dessa forma são chamados *sólidos de revolução.*

Dada certa região plana pode-se gerar uma infinidade de sólidos de revolução, cada um deles obtido em função de um determinado eixo de rotação.

Consideraremos somente as situações em que o eixo de rotação é paralelo a um dos eixos coordenados e região plana limitada por gráficos de funções contínuas. Para tanto, seja $y = f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tomemos a região limitada pelo gráfico da função, pelo eixo x e pelas verticais $x = a$ e $x = b$ (Fig.1). A Fig.2 apresenta o sólido de revolução gerado pela rotação da região descrita, em torno do eixo x (Fig. 2).

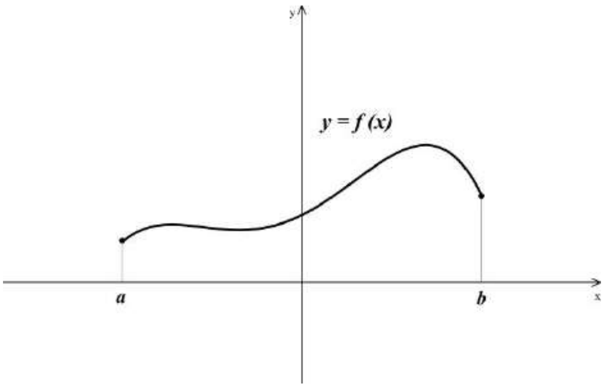


Fig.1

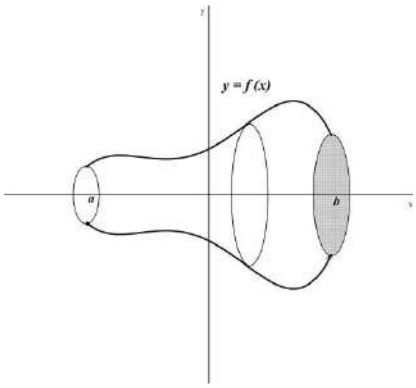


Fig.2

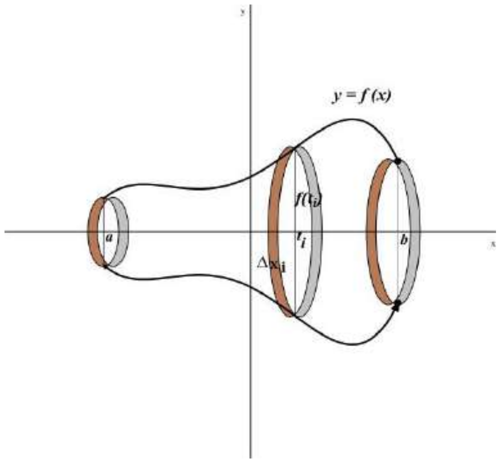
Para chegarmos à integral definida que nos dê o volume do sólido de revolução, obtido como anteriormente, comecemos com uma partição do intervalo $[a, b]$ e a construção de uma *Soma de Riemann*.

Seja P uma partição do intervalo $[a, b]$ através dos pontos

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \cdots \leq x_n = b$$

Consideremos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ com $i = 1,2,3, \cdots, n$ e, também, como conhecida, a fórmula para o cálculo de volume de um cilindro circular reto.

O volume V que queremos encontrar será aproximado por uma soma de volumes de cilindros, construídos como na figura a seguir.



Os cilindros considerados possuem raio de base igual a $|f(t_i)|$ e altura Δ_{x_i}. Assim o volume V_i, do i-ésimo cilindro é dado por

$$V_i = \pi[f(t_i)]^2 \Delta_{x_i}$$

A soma dos V_i, indicada por S_n, nos dá uma aproximação do volume pretendido, ou seja,

$$V \cong S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(t_i)]^2 \, \Delta_{x_i} \cdot$$

Não é difícil constatar que essa aproximação torna-se cada vez melhor, à medida que aumentamos os pontos da partição tomada para o intervalo $[a, b]$. Além disso, a soma apresentada é uma *Soma de Riemann* para a função

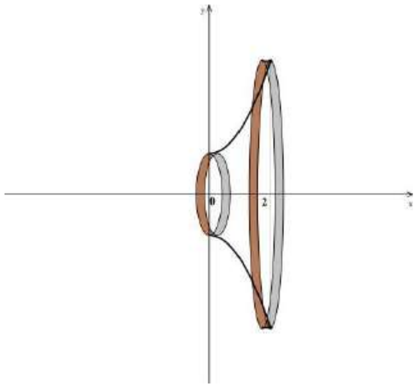
$$F(x) = \pi[f(x)]^2$$

no intervalo $[a, b]$. Portanto, podemos definir o *volume de revolução* por

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx.$$

Exemplo 11.2

Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$, $x = 2$ e pelo eixo x.



$$V = \int_0^2 \pi(x^2+1)^2\, dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]\Bigg|_0^2 = \frac{206\pi}{15}$$

Exemplo 11.3

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do disco

$$(y-2)^2 + x^2 \leq 1$$

em torno do eixo x.

Observe que o sólido obtido através dessa rotação (figuras 1 e 2) tem o formato de uma câmara de ar de um pneu. Em matemática esse sólido chama-se *Toro*.

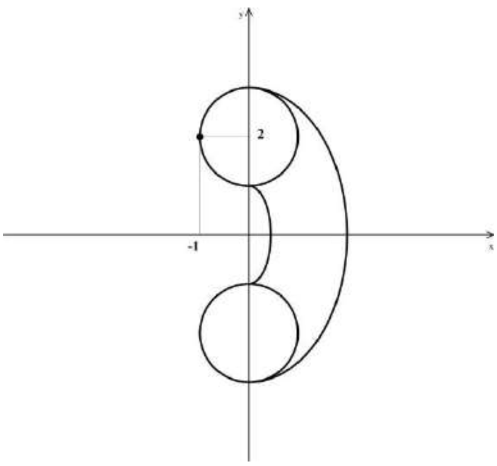


Fig. 1

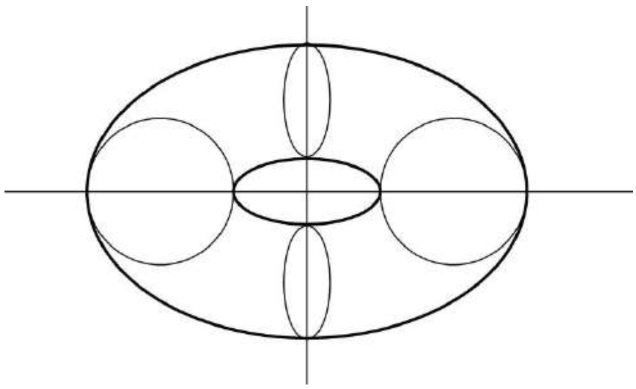


Fig.2

Neste caso, o resultado será obtido calculando-se a diferença dos volumes de dois sólidos de revolução. O volume procurado é a diferença entre os volumes dos sólidos gerados pela região limitada por

$$y = 2 + \sqrt{1 - x^2}, retas\ x = 1\ e\ x = -1\ e\ pelo\ eixo\ x$$

e pela região limitada por

$$y = 2 - \sqrt{1 - x^2}, retas\ x = 1\ e\ x = -1\ e\ pelo\ eixo\ x$$

quando giradas em torno do eixo x.

Assim, teremos:

$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left(2 + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx - \int_{-1}^{1} \pi \left(2 - \sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx$$

$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left[\left(2 + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{1 - x^2}\right)^2\right] dx = \pi \int_{-1}^{1} 8\sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Para resolver esta última integral, façamos a substituição:

$$x = senu, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

e teremos que:

$$V = 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 u\, du = 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos2u}{2} du = 4\pi^2.$$

Exemplo 11.4

Encontrar o volume do sólido obtido pela rotação do disco

$$(y - 2)^2 + x^2 \leq 1$$

do Exemplo 11.3, agora em torno do eixo y.

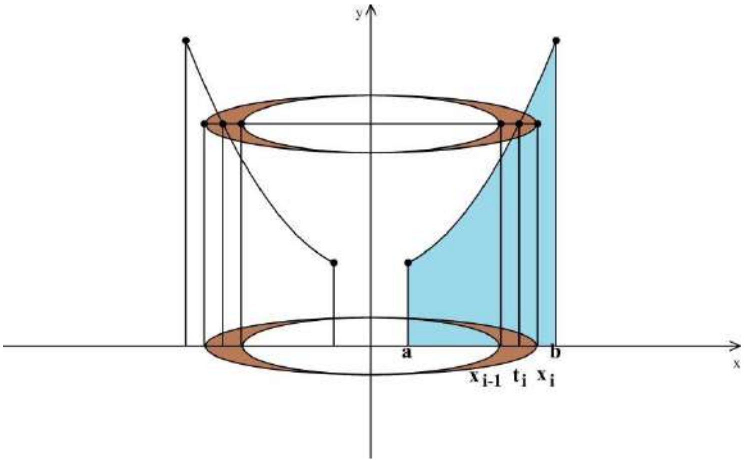
Para rotações desse tipo devemos considerar x como função de y:

$$x = f(y) = \sqrt{1 - (y - 2)^2}, \ \ 1 \leq y \leq 3.$$

Assim, o volume procurado será dado por:

$$V = \pi \int_1^3 [1 - (y-2)^2]\, dy = \frac{4\pi}{3} \cdot$$

Outra aplicação é obtida quando giramos, em torno do eixo y, uma região limitada pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, $a \le x \le b$, pelas retas verticais $x = a$ e $y = b$ e pelo eixo x. Vamos considerar, como na figura a seguir, $a \ge 0$ e $f(x) \ge 0$.



Seja P uma partição de $[a, b]$, caracterizada pelos pontos:

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{i-1} \le x_i \le \cdots \le x_n = b$$

e seja $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,3, \cdots, n$.

Considere V_i a diferença dos volumes dos dois cilindros de alturas $f(t_i)$ e raios da base $r_i = x_i$ e $r_{i-1} = x_{i-1}$, respectivamente. Podemos, então, escrever que:

$$V_i = \pi f(t_i) x_i^2 - \pi f(t_i) x_{i-1}^2$$

Vamos aproximar o volume procurado por:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f(t_i)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \pi f(t_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \pi f(t_i)(x_i + x_{i-1})\Delta_{x_i}$$

Fazendo $\Delta_{x_i} \rightarrow 0$, teremos que $x_i, x_{i-1} \rightarrow t_i$ ou $x_i + x_{i-1} \rightarrow 2t_i$. Desta forma, para n suficientemente grande, teremos:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi t_i f(t_i) \Delta_{x_i} \cdot$$

Assim, definimos o volume como

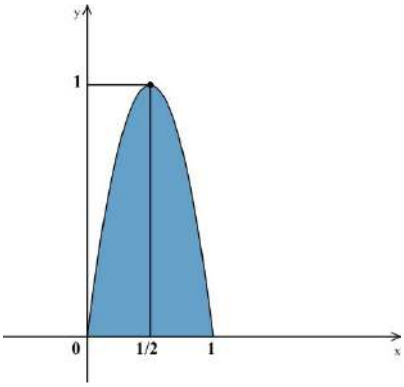
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi t_i f(t_i) \Delta_{x_i}$$

ou seja

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx.$$

Exemplo 11.5

Calcular o volume obtido ao girar, em torno do eixo y, a região limitada pela parábola $y = 4(x - x^2)$ e o eixo x.



$$V = 8\pi \int_0^1 x(x - x^2)\, dx = \frac{2\pi}{3}$$

Observe que para usarmos o processo utilizado no Exemplo 11.4, para calcularmos o volume do exemplo anterior, teríamos de isolar x em termos de y e considerar uma diferença de volumes.

Exercício 11.2

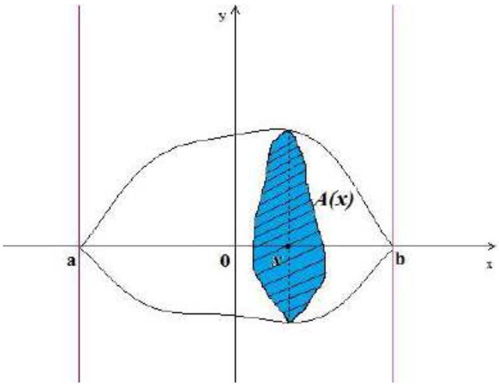
1) Calcular os volumes dos sólidos obtidos pela rotação da região dada em torno do eixo indicado:
   a) Limitada por $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ e o eixo x, em torno do eixo x;
   b) A mesma região do item a), girada em torno do eixo y;
   c) Limitada por $y = x^{3/2}$, eixo x e a reta $x = 1$, em torno do eixo y;
   d) Limitada por $y = 9 - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$, em torno do eixo y;
   e) Limitada por $y = x$ e $y = x^3$ em torno do eixo x e, depois, em torno do eixo y.
2) Verifique, usando os processos desenvolvidos nesta seção, que o volume da esfera de raio R é igual a $(4/3)\pi R^3$.

11.3 Volume de um sólido cuja seção plana tem área dada

Nesta seção obteremos uma fórmula para o cálculo de volumes, mais geral do que a obtida para volumes de sólido de revolução.

Dado um sólido tal que suas seções transversais, em relação a um determinado eixo, tenham áreas conhecidas, veremos como é possível calcular o seu volume através de uma integral. Para facilitar, tomaremos o eixo transversal às seções planas como sendo o eixo x.

Vamos considerar o sólido compreendido por dois planos perpendiculares ao eixo horizontal contendo, respectivamente, as retas verticais $x = a$ e $x = b$, conforme figura a seguir.



Seja P uma partição de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \cdots \leq x_n = b$$

Conhecendo $A(x)$, a área da seção transversal ao eixo x, para cada elemento x de $[a, b]$, podemos, então, aproximar o volume procurado por

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i$$

onde $V_i = A(t_i)\Delta x_i$ é o volume de um sólido cuja área da base é $A(t_i)$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a altura, medida ao longo do eixo x.

Então, podemos dizer que:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(t_i)\, \Delta x_i.$$

Ao fazer $n \to \infty$, teremos $\Delta x_i \to 0$ e, assim, definimos:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(t_i)\,\Delta x_i$$

ou seja

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Exemplo 11.6

Calcular o volume do sólido cuja base é o círculo $x^2 + y^2 \leq r^2$ e as seções perpendiculares ao eixo x são retângulos de altura r.

Para cada $x \in [-r, r]$ teremos a área da seção expressa por:

$$A(x) = 2yr = 2r\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Portanto, o volume V do sólido é dado por:

$$V = 2r\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Para resolver a integral, basta fazer a seguinte substituição:

$$\frac{x}{r} = senu, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

e, como resultado teremos

$$V = \pi r^3.$$

Exercício 11.3

1) Calcule o volume do sólido cuja base é o círculo $x^2 + y^2 \leq r^2$ e as seções perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles retângulos.

2) Calcule o volume do sólido que tem por base a elipse de eixos 10 e 8, sabendo-se que as seções perpendiculares ao eixo maior são quadrados.

3) Calcule o volume do sólido cuja base é o triângulo determinado pelo eixo x, eixo y e a reta $x + y = 1$ e cujas seções transversais ao eixo x são triângulos equiláteros.

4) Mostre que a fórmula para se calcular o *volume de revolução:*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx,$$

pode ser obtida pelo método desta seção.

Exercício 11.4

1) Use os métodos expostos neste capítulo para resolver as questões a seguir.

a) Mostre que o volume do cone de altura H e raio da base R é $(1/3)\pi R^2 H$.

b) Mostre que o volume do elipsoide de revolução

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

é dado por $(4/3)\pi a b^2$.

c) Mostre que o volume da pirâmide reta de base quadrada de lados a e altura h é dado por

$$V=\frac{1}{3}a^2 h.$$

d) Mostre que o volume da pirâmide reta de base quadrada com aresta a e altura h é dado por

$$V=\frac{2}{3}h(a^2-h^2).$$

2) Calcule o volume dos sólidos descritos a seguir.

a) Sólido obtido pela rotação da região limitada pelo *eixo* x e pela parábola $y = x^2 - 4x$, primeiro em torno do *eixo* x e, depois, em torno do *eixo* y.

b) Sólido cuja base é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ e as seções transversais ao *eixo* x são triângulos equiláteros.

c) Sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = lnx$, pelo *eixo* x e pela reta $x = e$.

d) Sólido obtido pela rotação em torno do *eixo* x da região limitada por

$$y = x^2, \qquad y = x^2 - 4x + 4 \ \ e \ \ pelo\ eixo\ x.$$

e) Sólido obtido pela rotação da região limitada pelo *eixo* y, por $y = \sqrt{x}$ e pela reta $y = 1$, primeiramente, em torno do *eixo* y e, depois, em torno do *eixo* x.

f) Sólido cuja base é o triângulo de vértices em $(0,-1)$, $(2,0)$ e $(0,1)$ e cujas seções perpendiculares ao $eixo\ x$ são círculos centrados nele.

g) Sólido cuja base é o círculo $x^2 + y^2 \leq r^2$ e as seções perpendiculares ao $eixo\ x$ são quadrados.

h) Sólido obtido pela rotação, em torno da reta $x = a$, da região limitada pela parábola $y^2 = 4ax$ e pela reta $x = a$.