CÁLCULO INTEGRAL 16

Gil da Costa Marques

16.1 Introdução
16.2 Cálculo de Áreas
16.3 O cálculo de uma área por meio de um processo limite
16.4 Soma de Riemann
16.5 Antiderivadas
16.6 O Teorema Fundamental do Cálculo
16.7 Integral Indefinida
16.8 Integrais definindo funções

16.1 Introdução

Existem problemas cujas soluções minimamente satisfatórias só foram encontradas alguns milênios após os primeiros estudos sobre eles. Esse é o caso do Cálculo Integral, cujas origens remontam aos tempos iniciais da agrimensura, entendida como técnica para a determinação de áreas na superfície terrestre.

A ênfase inicial da matemática nos impérios mais avançados na Antiguidade, do Egito e da Babilônia, ocorreu na aritmética e na mensuração. No último caso, havia interesse especial na mensuração de áreas de terras e de volumes de espaços destinados a abrigar cereais. Documentos comprovam que, cerca de dois mil anos antes de Cristo, os babilônios já se preocupavam com a determinação de áreas de polígonos regulares, bem como da área do círculo.

A solução definitiva do problema da determinação de áreas veio com o Cálculo, proposto quase simultaneamente por Newton e Leibniz ao final do século XVII. O Cálculo Integral, especificamente, é mais do que a solução do problema da determinação de áreas e volumes. Vai além, portanto, do seu uso na geometria plana e espacial.

A seguir, definiremos formalmente a integral de uma função por meio de um processo limite. Essa é a definição de **integral definida** na formulação de Riemann.

De grande relevância nesse contexto é o **teorema fundamental do cálculo**. Ele estabelece, para efeitos práticos, que o Cálculo Integral pode ser entendido como o problema inverso do Cálculo Diferencial, ou seja, determinar a integral de uma função é equivalente a determinar a função cuja derivada é igual ao integrando.

16.2 Cálculo de Áreas

É bem provável que a ideia fundamental do Cálculo, a de que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente, seja de Antífono (cerca de 490 a.C). Propunha ele que, aumentando-se o número de lados de polígonos inscritos num círculo, se poderia exaurir a diferença entre a região delimitada pelo polígono, com um número indefinidamente grande de lados, e o círculo. Lançou a base de um método que se tornou famoso na Antiguidade, denominado **Método da Exaustão**. Eudóxio de Cnido (cerca de 350 a.C), a quem usualmente se atribui o método, formulou-o de uma forma mais geral, ao afirmar que

> Se de um todo (uma grandeza física) se subtrai uma parte não menor que sua metade e se da mesma se subtrai uma parte não menor do que sua metade e assim indefinidamente, se chegará afinal a uma parte menor do que qualquer outra predeterminada.

Assim, ele encontrou um método para determinar a área de uma superfície plana arbitrária inscrevendo no interior dela uma sequência de n polígonos, de tal forma que a soma das áreas dessa sequência, ou a sequência das áreas em si, viesse a convergir para a área da região delimitada pela curva dada inicialmente.

Arquimedes empregou o Método da Exaustão para determinar aproximações para o número π assim como para determinar outras áreas. Em sua obra, **O Método**, desenvolveu outra estratégia para encontrar áreas. Para tanto, a ideia era a de recortar tirinhas de uma figura, de menor tamanho possível, e em seguida pesá-las. Nesse método encontramos as raízes do conceito de infinitésimos ou regiões infinitesimais aqui representadas pelas tirinhas.

Consideremos uma questão abordada por Arquimedes, utilizando o método da exaustão. Trata-se de dois modos para "exaurir", por meio de polígonos regulares, a região delimitada por um círculo. Podemos promover a exaustão do círculo considerando um polígono regular de n lados circunscrito. A exaustão se refere ao processo mediante o qual as áreas das duas figuras se tornam arbitrariamente próximas uma da outra, que, no caso, consiste em tomar o número n de lados do polígono cada vez maior. Nesse caso, a área A do círculo será calculada por excesso e escrevemos:

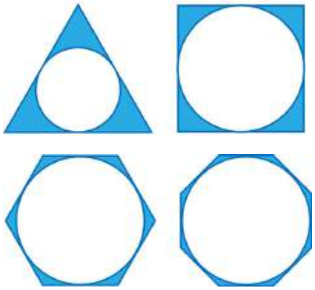

Figura 16.1: Polígonos circunscritos a uma dada circunferência.

$$A \leq A_n^{(+)} \tag{16.1}$$

onde $A_n^{(+)}$ é a área do polígono (em excesso) no qual a circunferência está inscrita.

Outra alternativa é a exaustão por falta. Nesse caso, consideramos polígonos inscritos na circunferência e escrevemos para a área A do círculo:

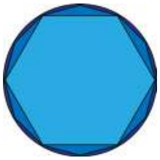

Figura 16.2: Polígono inscrito numa circunferência.

$$A \geq A_n^{(-)} \tag{16.2}$$

onde, agora $A_n^{(-)}$ é a área do polígono (em falta) inscrito na circunferência.

Arquimedes concluiu que o número π deveria estar limitado por dois valores:

$$\frac{A_n^{(-)}}{R^2} \le \pi \le \frac{A_n^{(+)}}{R^2} \tag{16.3}$$

e, usando um polígono de 96 lados, obteve:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} \tag{16.4}$$

Veremos a seguir que o cálculo integral, na formulação de Riemann, tem raízes no procedimento anterior.

16.3 O cálculo de uma área por meio de um processo limite

A título de ilustração do método geral, consideremos a área da região compreendida entre o eixo x e a curva, gráfico de $y = x^2$, quando x varia no intervalo $[0, x_0]$, conforme a **Figura 16.3**.

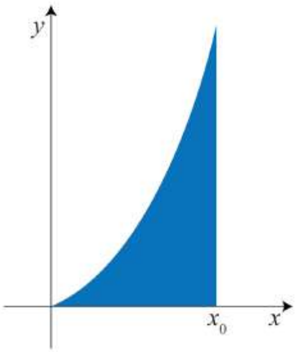

Figura 16.3: Área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 0$ (eixo x).

No método a ser empregado a seguir, o primeiro passo consiste em dividir o intervalo $[0, x_0]$ em n partes iguais. Esquematicamente, temos a seguinte divisão de intervalo $[0, x_0]$:

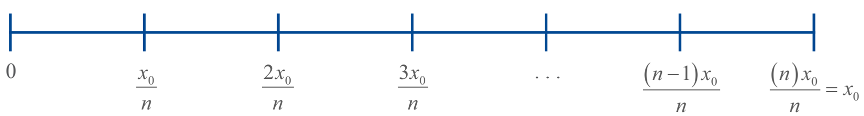

Figura 16.4: Divisão do intervalo $[0, x_0]$ em n partes.

Dessa forma, cada subintervalo dessa divisão tem comprimento igual a x_0/n. Consideremos o i-ésimo subintervalo, onde $1 \le i \le n$. Em qualquer dos subintervalos, a função dada varia. No entanto, admitindo que, em cada um deles, a função assume um valor constante, reduzimos o problema ao de determinar a soma de áreas de retângulos. Nesse caso, cada retângulo tem uma base que mede x_0/n e altura igual ao valor da função, admitida agora constante, no intervalo.

Se considerarmos o valor da função no subintervalo como igual ao seu valor mínimo nesse intervalo, isto é,

$$y(x_i) = y_{\min}(i) = \left((i-1)\cdot\frac{x_0}{n}\right)^2 \qquad 16.5$$

o cálculo da área será, nesse caso, aproximado por falta, já que tomamos para o valor constante o valor mínimo. Dessa forma, a área **aproximada por falta** é dada pela soma:

$$S_{\min} = \left[\left(0\cdot\frac{x_0}{n}\right)^2 + \left(1\cdot\frac{x_0}{n}\right)^2 + \left(2\cdot\frac{x_0}{n}\right)^2 + \ldots + \left((n-1)\cdot\frac{x_0}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{x_0}{n} = \\ = \frac{x_0^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right] \qquad 16.6$$

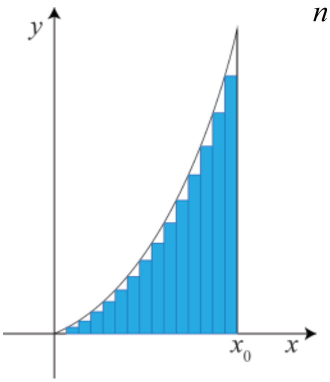

Figura 16.5: Área determinada por falta.

Levando-se em conta a identidade:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \qquad 16.7$$

obtemos, de **16.6** e **16.7**, que a área determinada de forma aproximada, por falta, é dada pela expressão

$$S_{\min} = \frac{x_0{}^3}{n^2}\frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{6} \qquad 16.8$$

Consideremos, agora, o valor constante em cada subintervalo como o valor máximo da função nesse intervalo, isto é, escolhemos:

$$y(x_i) = y_{\max}(i) = \left(i\cdot\frac{x_0}{n}\right)^2 \qquad 16.9$$

O i-ésimo subintervalo, para $1 \le i \le n$, determina um retângulo cuja base mede x_0/n e cuja altura é, nesse caso,

$$\left[i\cdot\frac{x_0}{n}\right]^2 \qquad 16.10$$

Nessas circunstâncias, a área da região compreendida entre o eixo x e a curva $y = x^2$, para x variando no intervalo $[0, x_0]$, é **aproximada por excesso** e seu valor é dado pela soma

$$S_{max} = \left[\left[1\cdot\frac{x_0}{n}\right]^2 + \left[2\cdot\frac{x_0}{n}\right]^2 + \ldots + \left[(n-1)\cdot\frac{x_0}{n}\right]^2 + \left[n\cdot\frac{x_0}{n}\right]^2\right]\cdot\frac{x_0}{n} = \frac{x_0^{\,3}}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right] \quad 16.11$$

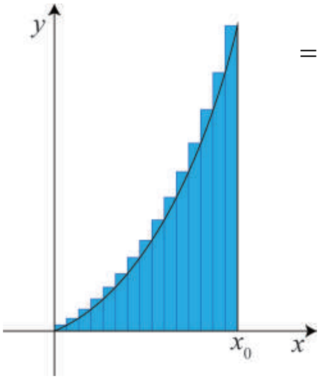

Figura 16.6: Área determinada por excesso.

Utilizando em **16.11** a identidade

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad 16.12$$

o valor aproximado da área, nesse caso, será:

$$S_{max} = \frac{x_0^{\,3}}{n^2}\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \quad 16.13$$

Assim, vemos que, em ambos os casos, a área da região depende do número n de divisões do intervalo $[0, x_0]$. Certamente, seu valor estará compreendido entre os valores mínimo e máximo já calculados. Ou seja, podemos escrever que a área satisfaz:

$$\frac{x_0^{\,3}}{n^2}\frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{6} \le A \le \frac{x_0^{\,3}}{n^2}\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \quad 16.14$$

Notamos agora que fazendo o número n de divisões do intervalo $[0, x_0]$ crescer indefinidamente, isto é, no limite em que n tende a infinito, obtemos os seguintes resultados:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x_0^{\,3}}{n^2}\frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{6}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x_0^{\,3}}{n^2}\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{6}\right] = \frac{x_0^{\,3}}{3} \quad 16.15$$

e

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x_0^{\,3}}{n^2}\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x_0^{\,3}}{n^2}\frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{6}\right] = \frac{x_0^{\,3}}{3} \quad 16.16$$

E, portanto, como os resultados são iguais, podemos escrever com segurança que a área é dada por:

$$S = \lim_{x\to\infty} S = \frac{x_0^{\,3}}{3} \qquad 16.17$$

Esse é o resultado exato para a área da região considerada.

16.4 Soma de Riemann

Vamos agora estender o procedimento anterior para uma função arbitrária. Com isso, chegaremos a uma definição formal, rigorosa e precisa da integral definida. O texto a seguir é adaptado do site ecalculo.if.usp.br.

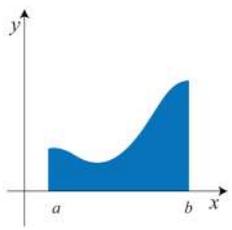

Figura 16.7: Região compreendida entre as curvas $y = f(x)$ e $y = 0$ no intervalo $[a, b]$.

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Nosso interesse é o de determinar a área da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo x, quando x varia no intervalo $[a, b]$. Para tanto, vamos considerar uma partição do intervalo $[a, b]$, constituída pelo conjunto de $n + 1$ pontos, $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$. Com essa partição, ficam determinados n subintervalos, cada um deles da forma $[x_{i-1}, x_i]$. Como no caso anterior, o índice i varia de 1 até n, isto é, $1 \leq i \leq n$. Se tomarmos as n divisões do intervalo $[a, b]$ todas do mesmo tamanho, cada um dos subintervalos terá um comprimento designado por Δx, onde $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, para $1 \leq i \leq n$. Tal simplificação não é necessária, mas será muito útil.

Em cada um dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, teremos um valor de $x = m_i$, para o qual a função atinge um valor mínimo. Assim um valor aproximado, por falta, para a área da região, é dado por:

$$S_{\min}(P, f) = \Delta x \cdot f(m_1) + \Delta x \cdot f(m_2) + \Delta x \cdot f(m_3) + \ldots + \Delta x \cdot f(m_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(m_i) \qquad 16.18$$

que é denominada soma inferior relativa à partição P e à função f.

Podemos, no entanto, considerar outra situação. Consideremos agora, em cada um dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, outro valor de $x = M_i$, para o qual a função atinge, nesse intervalo, o valor máximo. Seja $f(M_i)$ para cada i, $1 \le i \le n$, esse valor máximo. Obtemos assim um valor, agora aproximado por excesso, para a área da região. Escrevemos:

$$S_{\max}(P,f) = \Delta x \cdot f(M_1) + \Delta x \cdot f(M_2) + \Delta x \cdot f(M_3) + \ldots + \Delta x \cdot f(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(M_i) \quad 16.19$$

que é a soma superior relativa à partição P e à função f.

Evidentemente, poderíamos considerar um outro ponto em cada um dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, diferente de m_i e de M_i. Designamos esse ponto por x_i^*. Considerando o valor da função nesse ponto como o valor constante da função nesse subintervalo, obtemos outro valor aproximado para a área da região:

$$S_{\text{aprox}}(P,f) = \Delta x.f\left(x_1^*\right) + \ldots + \Delta x f\left(x_n^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x.f\left(x_i^*\right) \quad 16.20$$

Por hipótese, podemos prever que a soma acima satisfaz:

$$S_{\min}(P,f) \le S_{\text{aprox}}(P,f) \le S_{\max}(P,f) \quad 16.21$$

Quando fazemos crescer indefinidamente o número de pontos da partição, isto é, fazemos $n \to \infty$, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_{\text{aprox}}(P,f)\right] = A \quad 16.22$$

Pode-se provar que para qualquer escolha dos pontos x_i^* em cada um dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, para $1 \le i \le n$, vale o resultado:

$$\lim_{n\to\infty}\left[S^*(P,f)\right] = A \quad 16.23$$

onde $S^*(P, f)$ indica a soma obtida para a particular escolha de x_i^*.

Considerando agora os pontos da partição definindo subintervalos não necessariamente do mesmo tamanho, qualquer uma das somas

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right).\Delta x_i \tag{16.24}$$

é denominada **soma de Riemann para a função *f*, relativa à partição *P* e aos números x_i^* para $1 \leq i \leq n$.** Observe que a escolha da partição determina o tamanho de Δx_i, para $1 \leq i \leq n$. Por isso mesmo, uma soma de Riemann é indicada por

$$S^*\left(P, f\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right).\Delta x_i \tag{16.25}$$

sem recorrermos agora à simplificação de tomar os subintervalos iguais, discutida acima. Essa soma depende da partição P e da função f.

Vale observar que, assumindo que os subintervalos da partição possam ser diferentes, ao calcular o limite não basta fazer n tender ao infinito, mas é preciso que o comprimento do maior subintervalo tenda a zero; condição essa que engloba a anterior.

Definimos a integral definida como

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left[S^*\left(P, f\right)\right] = A \tag{16.26}$$

que fornece a área da região acima considerada, uma vez que a função f foi suposta não negativa no intervalo considerado.

16.5 Antiderivadas

A antiderivada de uma função $g(x)$ é outra função, $y(x)$, cuja derivada é a função $g(x)$. Da definição segue-se que:

$$\frac{d\left[y\left(x\right)\right]}{dx} = g\left(x\right) \qquad y\left(x\right) \text{ é a antiderivada de } g\left(x\right) \tag{16.27}$$

De acordo com o conceito de antiderivada, tal função é definida com exceção de uma constante, isto é a função antiderivada não é, a rigor, única, pois qualquer outra que difira dessa por uma constante é, igualmente, uma antiderivada da mesma função.

Exemplo

A antiderivada da função $g(x) = 2x$ é a função $y(x) = x^2 + C$, onde C é uma constante qualquer. Assim, a antiderivada da função proposta pode ser qualquer uma das funções abaixo:

$$y(x) = x^2 + 4$$
$$y(x) = x^2 + 10$$
$$y(x) = x^2 + 100$$

Portanto, a antiderivada se refere a uma família de funções que diferem entre si apenas por uma constante. Isso ocorre porque a derivada de uma constante é zero.

Abaixo apresentamos uma tabela de antiderivadas.

Tabela 16.1: Tabela de antiderivadas.

Função	Antiderivada
$f(x) = k$	$kx + C$
$f(x) = e^x$	$e^x + C$
$f(x) = x^n$ para $n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$\operatorname{sen} x + C$
$f(x) = \sec^2 x$	$\operatorname{tg} x + C$
$f(x) = \operatorname{cossec}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x + C$
$f(x) = \sec x . \operatorname{tg} x$	$\sec x + C$
$f(x) = \operatorname{cossec} x . \operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec} x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$

Para verificar cada um dos dados da **Tabela 16.1**, devemos recorrer aos resultados de **Derivadas das Funções Simples** e **Técnicas de Diferenciação**.

16.6 O Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece a conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O primeiro surgiu a partir do problema de determinar a reta tangente a uma curva em um ponto, enquanto o segundo surgiu a partir do problema de encontrar a área de uma figura plana. Aparentemente, **mas apenas aparentemente**, entre os dois problemas parece não existir nenhuma relação. Isaac Barrow, professor de Newton em Cambridge, descobriu que os dois problemas estão intimamente relacionados ao perceber que os processos de diferenciação e integração são processos inversos. Entendeu, assim, o conteúdo do Teorema Fundamental do Cálculo. Entretanto, foram Newton e Leibniz, independentemente, que exploraram essa conexão e desenvolveram o Cálculo. Em particular, eles perceberam que o Teorema Fundamental permitia encontrar a área exata de uma figura plana de uma forma muito fácil, sem a necessidade de se calcular a soma de áreas de um número indefinidamente grande de retângulos, a partir da antiderivada da função envolvida.

A seguir, apresentamos o **Teorema Fundamental do Cálculo**, cujo enunciado é:

Seja g uma função contínua no intervalo $[a,b]$. A integral definida dessa função nesse intervalo, e dada pelo limite da soma de Riemann observada em **16.26**, ou seja, pela expressão:

$$\int_a^b g(x) = y(b) - y(a) \qquad 16.28$$

onde a função $y(x)$ é uma função anterivada de $g(x)$.

Utilizaremos a notação:

$$\int_a^b g(x) = y(x)\Big|_a^b = y(b) - y(a) \qquad 16.29$$

Assim, a integral definida é igual à diferença entre os valores de qualquer uma das antiderivadas – também chamadas primitivas – calculada nos extremos da integral.

Concluímos, por exemplo, que

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) \qquad 16.30$$

e que, de forma análoga, a área sob a parábola dada por **16.3**, no intervalo $[a,b]$, é:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right) \quad (16.31)$$

16.7 Integral Indefinida

Encontrar uma integral da forma

$$\int g(x)dx \quad (16.32)$$

é o mesmo que determinar uma função $y(x)$ denominada anderivada ou primitiva da função $g(x)$, tal que

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(x) \quad (16.33)$$

Toda função contínua $g(x)$ tem uma antiderivada $y(x)$, definida pela expressão **16.33**.

Tendo em vista que antiderivadas são definidas a menos de constantes, uma integral da forma **16.32** é uma **integral indefinida**. Uma integral indefinida define uma família de funções, que diferem entre si por um termo constante. Assim, se $y(x)$ for uma função antiderivada de $g(x)$, $y(x) + C$ também o será. Portanto, a expressão mais geral de uma integral indefinida é:

$$\int g(x)dx = y(x) + C \quad (16.34)$$

onde C é uma constante arbitrária. Isso nos permite escrever, por exemplo, que a integral indefinida da função $g(x) = 2x$ pode ser, por exemplo, qualquer uma das funções:

$$\begin{aligned} \int 2x dx &= x^2 + 1 \\ \int 2x dx &= x^2 + 4 \\ \int 2x dx &= x^2 + 10 \end{aligned} \quad (16.35)$$

Essa arbitrariedade justifica o nome "integral indefinida". Em geral, não escrevemos explicitamente o termo constante.

A **Tabela 16.2** apresenta algumas integrais indefinidas. Para conferir, basta derivar o termo do lado direito com relação a x e comparar com o integrando do lado esquerdo.

Tabela 16.2: Tabela de **integrais indefinidas.**

Função Integrando	Integrais indefinidas
$f(x) = k$	$\int k dx = kx + C$
$f(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$f(x) = x^n$ para $n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
$f(x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$
$f(x) = \operatorname{cossec}^2 x$	$\int \operatorname{cossec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$
$f(x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$	$\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = \sec x + C$
$f(x) = \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x$	$\int \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cossec} x + C$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

Como resultado da expressão geral para o caso de um expoente real diferente de −1, podemos escrever:

$$\int \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{x} + C \quad (16.36)$$

16.8 Integrais definindo funções

Consideremos uma integral da forma:

$$I(t,a) = \int_a^t g(x)dx \quad (16.37)$$

Tal integral depende da variável t e da constante a de tal modo que, se variarmos o valor de a, obteremos diferentes valores para a função I, que diferem por constantes.

Ademais, podemos escrever:

$$\frac{dI(t,a)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_a^t g(x)dx\right) = g(t) \quad (16.38)$$

Agora, como

$$I(a,a) = \int_a^a g(x)dx = 0 \quad (16.39)$$

do teorema fundamental do cálculo resulta que podemos escrever a integral **16.37** como diferença de antiderivadas:

$$I(t,a) = \int_a^t g(x)dx = y(t) - y(a) \quad (16.40)$$

ou

$$y(t) - y(a) = \int_a^t g(x)dx \quad (16.41)$$

onde y é a antiderivada da função $g(x)$. Observe que a integral acima é bem definida, isto é, não depende da constante C arbitrária que diferencia uma antiderivada da outra.

O teorema fundamental do cálculo pode ser escrito em termos de grandezas inifinitesimais. Para tanto, consideremos o caso em que y é a antiderivada da função $g(x)$. Nesse caso, escrevemos:

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(x) \tag{16.42}$$

Assim, em termos de grandezas infinitesimais, é válida a identidade:

$$g(x)dx = dy(x) \tag{16.43}$$

Efetuando a soma de Riemann em ambos os lados, levando em conta o intervalo $[a,x]$, e calculando os respectivos limites, escrevemos:

$$\int_a^t g(x)dx = \int_a^t dy(x) \tag{16.44}$$

O segundo membro de **16.44** pode ser escrito como

$$\int_a^t dy(x) = y(x)\Big|_a^t = y(t) - y(a) \tag{16.45}$$

Combinando a expressão **16.44** com **16.45**, obtemos **16.41**.

Exemplos

- Exemplo 1

A antiderivada da função constante

$$g(x) = k \tag{16.46}$$

é a função $y = kx + C$. Donde inferimos que:

$$y(x) - y(a) = \int_a^x kdu = ku\Big|_a^x = kx - ka \tag{16.47}$$

- Exemplo 2

A antiderivada da função cosseno, a menos de uma constante, é a função seno, pois

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x \tag{16.48}$$

Assim, de acordo com o teorema fundamental do cálculo, podemos escrever a seguinte expressão:

$$\int_a^x \cos u du = \operatorname{sen} u\Big|_a^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a \qquad 16.49$$

donde inferimos que:

$$\int_0^x \cos u du = \operatorname{sen} u\Big|_0^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} x \qquad 16.50$$

$$\int_{\pi/2}^x \cos u du = \operatorname{sen} u\Big|_{\pi/2}^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x - 1 \qquad 16.51$$

• Exemplo 3

Consideremos o caso da função exponencial e^x. Tendo em vista que a derivada dessa função é dada por:

$$\frac{d\left(e^x\right)}{dx} = e^x \qquad 16.52$$

obtemos que a integral indefinida dessa função é dada por:

$$\int_a^x e^u du = e^u\Big|_a^x = e^x - e^a \qquad 16.53$$

Em particular,

$$\int_0^x e^u du = e^u\Big|_0^x = e^x - e^0 = e^x - 1 \qquad 16.54$$

Finalmente, considerando que

$$\frac{d\left(\operatorname{arctg}(x)\right)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \qquad 16.55$$

podemos constatar que a integral dessa última função é dada por:

$$\int_a^x \frac{1}{1+u^2} du = \operatorname{arctg} u\Big|_a^x = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} a \qquad 16.56$$