Rappel : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$; $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ bases
$\phantom{Rappel : \mathcal{B} = (}E \qquad\qquad\qquad E$

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{cccc} \left(\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right. & \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} & \cdots & \left. \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right) \\ e'_1|_{\mathcal{B}} & e'_2|_{\mathcal{B}} & \cdots & e'_n|_{\mathcal{B}} \end{array} \qquad P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{array}{cccc} \left(\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right. & \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} & \cdots & \left. \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right) \\ e_1|_{\mathcal{B}'} & e_2|_{\mathcal{B}'} & \cdots & e_n|_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

$$\boxed{P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}^{-1}} \quad ; \quad \boxed{u|_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\, u|_{\mathcal{B}}} \quad ;$$

$f : E \to E \qquad \boxed{M_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}}(f)\, P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$

$$M_{\mathcal{B}'}(f) \underset{\mathcal{B}'}{\uparrow} = \underset{\mathcal{B}'}{\uparrow} P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \underset{\mathcal{B}}{\uparrow} M_{\mathcal{B}}(f) \underset{\mathcal{B}}{\uparrow} P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \underset{\mathcal{B}'}{\uparrow}$$

$$M_{\mathcal{B}'}(f) : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}' = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}}(f) : \underset{\times}{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}' \quad \text{Problème}$$

$$\uparrow$$

$$M_{\mathcal{B}}(f) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

Exercice 1

$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires dans $\mathbb{R}^2$

Donc $\{e_1, e_2\}$ est libre dans $\mathbb{R}^2$.

De plus, $\dim \{e_1, e_2\} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, $\{e_1, e_2\}$ est génératrice.

Donc $\mathcal{B}$ est une base.

Idem pour $\mathcal{B}'$.

2) $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \left(e'_1|_{\mathcal{B}} \quad e'_2|_{\mathcal{B}} \right)$

. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $e'_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = -2 \end{cases} \underset{L_1 = L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ 4 - \lambda_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Donc : $e'_1 = 4 e_1 + 6 e_2$

. On remarque que $e'_2 = 0 \times e_1 - 1 \times e_2$

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

3) $P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \left(e_1|_{\mathcal{B}'} \quad e_2|_{\mathcal{B}'} \right)$

$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$e_1 = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4\lambda_1 = 1 \\ -\frac{1}{2} + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc $e_1 = \frac{1}{4} e'_1 + \frac{3}{2} e'_2$ $\left(e_1|_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right)$

. On a : $e_2 = 0 e'_1 - 1 \times e'_2$ $e_2|_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$\mathcal{B}$: base canonique : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}'$: $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $P_{B \to B'} = \left(e_1'|_{\mathcal{B}} \quad e_2'|_{\mathcal{B}} \quad e_3'|_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\cdot\ e_1 = 1 e_1' + 0 e_2' + 0 e_3'$ $\quad e_1|_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cdot\ e_2 = -1 e_1' + 1 \times e_2' + 0 e_3'$ $\quad e_2|_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cdot\ e_3 = 0 \times e_1' - 1 e_2' + 1 \times e_3'$ $\quad e_3|_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\right\} P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ $\quad u|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$u|_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}\, u|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+y+z \end{pmatrix}$

1) $M_B(f) = \left(f(e_1)|_B \quad f(e_2)|_B \quad f(e_3)|_B \right)$

. $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Soit $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$

. B' libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' + \lambda_3 e_3' = 0_{\mathbb{R}^3}$

Alors: $\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Donc B' est libre. dans $\mathbb{R}^3$

. B' génératrice ?

Soit $v \in \mathbb{R}^3$ $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' + \lambda_3 e_3' = v$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 = y \\ \lambda_1 + \lambda_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - y + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 = y \\ \lambda_1 + \lambda_3 = z \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -y + 2\lambda_3 = x + z \\ \lambda_2 = y \\ \lambda_1 = z - \lambda_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = \frac{1}{2}(x + z + y) \\ \lambda_2 = y \\ \lambda_1 = z - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}(x - z + y) \end{cases}$

$v = -\frac{1}{2}(x - z + y) \cdot e_1' + y e_2' + \frac{1}{2}(x + z + y) e_3'$

Donc B' génératrice de $\mathbb{R}^3$.

<u>Alternative</u> : B' est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Donc $\mathrm{Vect}(e_1', e_2', e_3') = \mathbb{R}^3$. Donc B' est génératrice.

Donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) $f(e_1') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(e_2') = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(e_3') = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $M_{B'}(f) = \left(f(e_1')|_{B'} \quad f(e_2')|_{B'} \quad f(e_3')|_{B'} \right)$

- $f(e_1')|_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $f(e_2')|_{B'} = 0 e_1' + 1 e_2' + 0 e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $f(e_3')|_{B'} = 0 e_1' + 0 e_2' + 2 e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5) $M_{B'}(f) = P_{B' \to B} \, M_B(f) \, P_{B \to B'}$

$= P_{B \to B'}^{-1} \, M_B(f) \, P_{B \to B'}$

Noyau & Image

Exercice 1

1) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) • Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f)$. Alors $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$.

$Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$

$= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\dim Ker(f) = 1$

• $Im(f)$?

$Im(f) = Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

Avec $\lambda_1 = 1$

$f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(e_3) = -f(e_1) - f(e_2)$

Donc $Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = Vect(f(e_1), f(e_2)) = Im(f)$

$\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une famille libre de $Im(f)$ car $f(e_1)$ et $f(e_2)$ non colinéaires

Donc une base de $Im(f)$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Alternative : d'après le théorème du rang :

$\dim Ker(f) + Rg(f) = \dim \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow Rg(f) = 3 - 1 = 2$

Or $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires engendrant $Im(f)$: elle forme une base de $Im(f)$.

3) . $\dim Ker(f) = 1$ donc $Ker(f) \neq \{0\}$: f non injective.

. $Rg(f) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3)$: f non surjective.

. Donc f non bijective.

Exercice 2

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \\ 3y \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ $\mathcal{B}' = \left\{ \underset{e'_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{e'_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{e'_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

1) $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \left(f(e_1)|_{\mathcal{B}'} \quad f(e_2)|_{\mathcal{B}'} \right)$

2) • $Ker(f)$?

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x - y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$Ker(f) = \{0\}$

Donc f est injective.

• D'après le théorème du rang :

$\dim Ker(f) + Rg(f) = \dim \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow Rg(f) = 2 - 0 = 2$

De plus $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas colinéaires, ils appartiennent à $Im(f)$, donc $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre et génératrice de $Im(f)$: c'est une base de $Im(f)$

3) $Rg(f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

$Ker(f) = \{0\}$ Donc f est injective.

Donc f n'est pas bijective.

Exercice 3

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) . $\mathrm{Ker}(f)$?

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$: f non injective.

. $\mathrm{Im}(f)$?

D'après le théorème du rang:

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$\iff \mathrm{Rg}(f) = 3 - 1 = 2$$

Donc on cherche deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ non colinéaires. Par exemple: $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$

3) . $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1 \neq 0$ donc f non injective

. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ donc f est surjective

. f n'est pas bijective.

Normes et distances

Exercice 1

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$u - v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$ Manhattan

$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}$ Euclidienne

$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$ Chebyshev

. $\|u\|_1 = |1| + |0| + |-3| + |2| = 6$ $\|v\|_1 = |1| + |-1| + |-2| + |2| = 6$

$\|u\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ $\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{10}$

$\|u\|_\infty = |-3| = 3$ $\|u\|_\infty = |-2| = 2$

. $d_1(u,v) = \|u-v\|_1 = |0| + |1| + |-1| + |0| = 2$

. $d_2(u,v) = \|u-v\|_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

. $d_\infty(u,v) = \|u-v\|_\infty = 1$

Exercice 2

$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longmapsto |u_1| + \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

1) • $N(u) = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^2}$?

. Si $u = 0_{\mathbb{R}^2}$: $N(u) = |0| + \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

. Si $N(u) = 0 \iff |u_1| + \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 0$

$\iff |u_1| = -\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Donc $|u_1|^2 = \left(-\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$

Donc $u_1^2 = |u_1^2 + u_2^2| = u_1^2 + u_2^2$

$\iff 0 = u_2^2$ Donc $u_2 = 0$.

Donc : $|u_1| + \sqrt{u_1^2} = 0 \iff 2|u_1| = 0$

$\iff u_1 = 0$

Finalement $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^2}$

• Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$N(\lambda u) = |\lambda u_1| + \sqrt{(\lambda u_1)^2 + (\lambda u_2)^2} = |\lambda||u_1| + |\lambda|\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$= |\lambda| N(u)$

• Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$?

$N(u+v) = |u_1 + v_1| + \underbrace{\sqrt{(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2}}_{\|u+v\|_2}$

. $|u_1 + v_1| \leq |u_1| + |v_1|$ car $|\cdot|$ est la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}$

. $\sqrt{(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2} = \|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$ (norme euclidienne)

Donc :

$N(u+v) \leq |u_1| + |v_1| + \|u\|_2 + \|v\|_2$

$\leq |u_1| + \sqrt{u_1^2 + u_2^2} + |v_1| + \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$\leq N(u) + N(v)$

Finalement N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) $C_1 = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ N(u) = 1 \right\}$

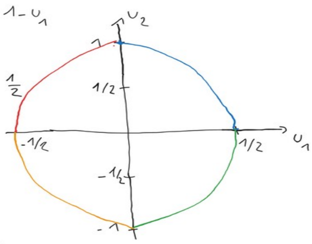
$N(u) = 1 \iff |u_1| + \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$

. Si $u_1 \geq 0$: $u_1 + \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 \iff \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 - u_1$

Donc $u_1^2 + u_2^2 = (1 - u_1)^2 = 1 - 2u_1 + u_1^2$

$u_2^2 = 1 - 2u_1 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$

Donc $u_2 = \sqrt{1 - 2u_1}$ ou $u_2 = -\sqrt{1 - 2u_1}$



. Si $u_1 < 0$: $-u_1 + \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$

$\iff \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 + u_1$

Donc $u_1^2 + u_2^2 = (1 + u_1)^2 = 1 + 2u_1 + u_1^2$

$u_2^2 = 1 + 2u_1 \geq 0 \iff 0 > u_1 \geq -\frac{1}{2}$

Donc $u_2 = \sqrt{1 + 2u_1}$ ou $u_2 = -\sqrt{1 + 2u_1}$