Calculs de déterminants

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1) $\det A = -4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 - 3 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -4 \times (-4-1) - 3 \times (3+2)$

$= 20 - 15 = 5 \neq 0$

Donc A est inversible.

2) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times \mathrm{Com}(A)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

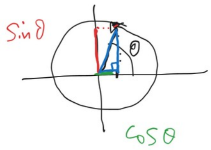
$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 5 & -5 & -5 \\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{Com}(A)^T = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 5 & -5 & -5 \\ 6 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \qquad \theta \in [0, 2\pi[$$

$\det A = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

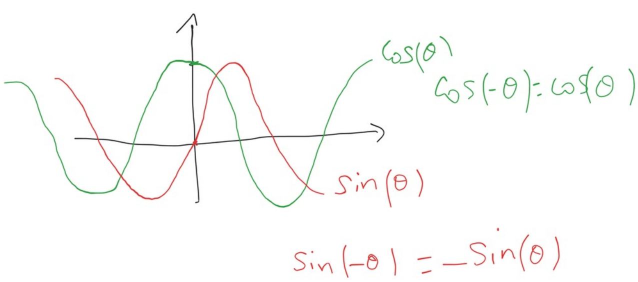


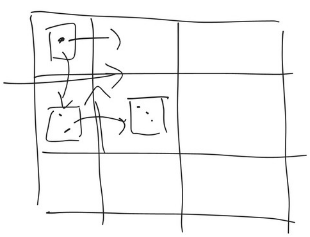
$\neq 0$

A est inversible.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = A^T$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$





Exercice 3

1) $P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\det P_{B\to B'} = +2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2\times(4-1) - (2-1) + (1-2)$

$= 6 - 1 - 1 = 4$

$P_{B\to B'}^{-1} = \frac{1}{4}\times \mathrm{Com}\left(P_{B\to B'}\right)^T$

$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$

$\mathrm{Com}\left(P_{B\to B'}\right) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Donc $P_{B\to B'}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = P_{B'\to B}$

3) $u_{|B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$u_{|B'} = P_{B'\to B}\, u_{|B}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x - y - z \\ -x + 3y - z \\ -x - y + 3z \end{pmatrix}$

Exercice 4.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$\det(A) = 1\times\begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

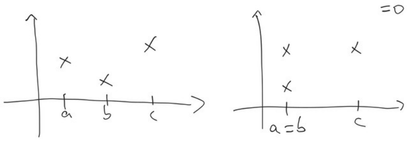
$= bc^2 - b^2c - (ac^2 - a^2c) + ab^2 - a^2b$

$= bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b$

Vérifier que $\det(A) = (a-b)(a-c)(c-b)$.

$(a-b)(a-c)(c-b) = (a^2 - ac - ba + bc)(c-b)$

$= a^2c - a^2b - ac^2 + \underbrace{acb - bac}_{=0} + b^2a + bc^2 - b^2c$



Exercice 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, avec n impair.

$A^T = -A$

$\boxed{\det(-A) = (-1)^n \det(A)}$

$\det(A^T) = \det(-A)$

$\det(A) = (-1)^n \det(A)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 2\times 3 = 6.$

$\lambda A = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 3\lambda \end{pmatrix}$ $\quad \det(\lambda A) = 6\lambda^2$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Si n impair : $\det A = -\det A$,

donc $\det A = 0$.

Donc A non inversible lorsque $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, avec n impair.

Diagonalisation.

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $P_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_2\right) = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (1-\lambda)^2 + 1$

2) $\mathrm{Spec}(A)$ = ensemble des racines (réelles) de $P_A(\lambda)$

$= \{ \lambda \in \mathbb{R},\ P_A(\lambda) = 0 \}$

$$\underbrace{\underbrace{(1-\lambda)^2}_{\geqslant 0} + 1}_{\geqslant 1} = 0 \iff (1-\lambda)^2 = -1$$

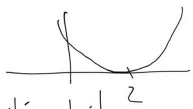
$P_A(\lambda)$ n'admet aucune racine réelle : $\mathrm{Spec}(A) = \emptyset$

Exercice 2

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$.

2) $P_A(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda)^2 = 0$



$\iff \lambda = 2$ de multiplicité algébrique 2.

$\mathrm{Spec}(A) = \{2\}$.

3) $E_2(A) = \{ v \in \mathbb{R}^2,\ Av = 2v \}$.

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A)$. Alors :

$Av = 2v \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases} \iff \{ y = 0$

$\iff y = 0$

$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ $\qquad \dim E_2(A) = 1$

La multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda = 2$ vaut 1.

= dimension du sous-espace propre associé à λ

4) A est diagonalisable si et seulement si on peut créer une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de A.

Puisque $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} \dim E_\lambda(A) = 1 \neq \dim \mathbb{R}^2 = 2$,

alors A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$

2) On résout : $P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0$

$\iff \lambda^2 = 1$

$\iff \lambda = -1$ et $\lambda = +1$

Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$

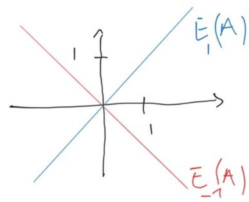
3) • $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \iff Au = -u \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \iff y = -x$

$E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

• $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff Au = u \iff y = x$

$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$



4) A symétrique donc diagonalisable.

(ou : $\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_1(A)) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc A diagonalisable)

. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

↳ orthogonale.

$\left(\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right.$
↳ orthonormée $\Big)$

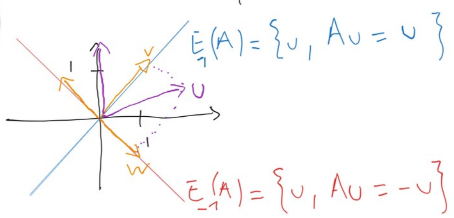
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de P^{-1} : $\det(P) = 2 \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dans la base $\mathcal{B}'$, A s'écrit :

$$\mathcal{D} = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5)



Soit $u \in \mathbb{R}^2$. Alors u se décompose :

$u = v + w$ avec $v \in E_1(A)$ et $w \in E_{-1}(A)$

$Au = Av + Aw$

$Au = v - w$ est le symétrique de u par rapport à $E_1(A)$.

Donc A est une symétrie.

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right)$

2) On résout $P_A(\lambda) = 0 \iff (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = 0$

$\iff \cdot\ \lambda = 1$

ou $\cdot\ (2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\iff \lambda = 1$

ou $(2-\lambda)^2 = 1$

$\iff \lambda = 1$ ou $2-\lambda = 1$ ou $2-\lambda = -1$

$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$

$Spec(A) = \{1, 3\}$

1 est de multiplicité algébrique 2

3 est de multiplicité algébrique 1

3) . Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A)$. Alors :

$Au = u \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - z = x \\ y = y \\ -x + 2z = z \end{cases}$

$\iff x = z$

$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

La multiplicité géométrique de $\lambda = 1$ est 2

. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A)$. Alors :

$Au = 3u \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - z = 3x \\ y = 3y \\ -x + 2z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -z = 3x - 2x = x \\ 0 = 2y \\ -x = 3z - 2z = z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$

$E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

La multiplicité géometrique de $\lambda = 3$ vaut 1

4) A est symétrique donc diagonalisable.

(ou : $\dim E_3(A) + \dim E_1(A) = \dim \mathbb{R}^3$).

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base B constituée de vecteurs propres de A :

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dans cette base, A s'écrit : $D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5) Si $A = PDP^{-1}$:

$$A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{PD\overbrace{P^{-1} \times P}^{I_n}D\overbrace{P^{-1} \times \cdots \times P}^{I_n}DP^{-1}}_{n \text{ fois}}$$

$A^n = PD^nP^{-1}$

$= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n P^{-1}$ $\qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3^n & 0 & -3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 0 & 1-3^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-3^n & 0 & 1+3^n \end{pmatrix}$