Algèbre Linéaire

Année Académique 2022-2023

Évaluation Finale

1 Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y - z \\ x + y \\ x + z \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

2 Une projection dans $\mathbb{R}^3$

Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $D = \mathrm{Vect}(u)$.

1. Calculer la matrice de p_D, la projection orthogonale sur D.
2. Quel est le carré de cette matrice ?
3. Calculer la matrice de s_D, la symétrie orthogonale par rapport à D.
4. Quel est le carré de cette matrice ?
5. Donner une équation de $D^\perp$.

3 Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A. On pourra faire apparaître un 0 sur la troisième ligne et première colonne, puis sur la troisième ligne et deuxième colonne afin d'obtenir une expression directement factorisée.
3. Les valeurs propres de A sont -4 de multiplicité algébrique 1 et 2 de multiplicité algébrique 2. Justifier ce résultat à l'aide de la question précédente. Si vous n'avez pas réussi la question précédente vous pourrez vous servir de ces valeurs dans la suite de l'exercice.
4. Déterminer les sous-espaces propres de A.
5. Présenter deux arguments pour affirmer que A est diagonalisable. Donner les matrices D et P associées.

6. Calculer les produits scalaires deux à deux des vecteurs propres de A. Était-ce prévisible ?
7. Calculer P^{-1}