$$B \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$A \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

A^T ou ${}^tA$

$$\left(A^T + B\right)^T$$
$$= \left(A^T\right)^T + B^T$$
$$= A + B^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

symétrique.

$$A^T = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 8 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

antisymétrique.

$$A^T = -A$$

$$? \times 0 = 1$$

$$\sqrt{-1}$$

$$\cancel{\frac{1}{A}}$$

$$A^{-1}$$

$$3 \rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$2 \times 1 + 1 \times -1 = 1$

$2 \times (-1) + 1 \times 2 = 0$

$1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$

$1 \times (-1) + 1 \times 2 = 1$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$1 \times 2 + (-1) \times 1 = 1$

$1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$

$-1 \times 2 + 2 \times 1 = 0$

$-1 \times 1 + 2 \times 1 = 1$

Donc $B = A^{-1}$

$$A\underbrace{C \times C^{-1}}_{I_n} = B\underbrace{C \times C^{-1}}_{I_n} \Leftrightarrow A = B$$

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \quad B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

1) le produit AB a un sens : $AB \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -6 & 11 & 4 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$c_{1,1} = -2 \times 0 + 0 \times (-2) = 0$

$c_{1,2} = -2 \times (-2) + 0 \times 3 = 4$

$c_{1,3} = -2 \times 2 + 0 \times 2 = -4$

. $BA \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

$c_{1,1} = 0 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 2 \times 1$
$= 4$

2) A et B ne sont pas carrées : A^2 et B^2 ne sont pas définies.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

- $-1 \times -1 + 0 \times 1 + -2 \times 1 = -1$
- $-1 \times 0 + 0 \times 1 + -2 \times 0 = 0$
- $-1 \times -2 + 0 \times 1 + -2 \times 2 = -2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ici : $A^2 = A$

2) On suppose que A est inversible :

Il existe une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A.B = BA = I_3$

On a :

$$A^2 = A \quad \text{donc} \quad A^2.B = A.B = I_3$$

$$A \times \underbrace{A \times B} = I_3$$

$$A \times I_3 = I_3$$

$$A = I_3 \quad \text{FAUX}$$

Donc A non inversible.

<u>Exercice 3</u>

$\cdot\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 1) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A^2 = 5 \times A - 4 I_3$ $\quad 5A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

3) Rappel : A inversible s'il existe $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_3$$

$$A^2 = 5A - 4I_3 \iff A^2 - 5A = -4I_3 \iff \frac{A^2 - 5A}{-4} = I_3$$

$$\iff A \boxed{\frac{(A - 5I_3)}{-4}} = I_3$$

$\vdots$

$A \times (\cdots) = I_3$

A^{-1}

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I_3) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Alternative : on suppose que B existe :

$I_3 = AB$ donc $A = A.AB = \underbrace{A^2}B = (5A - 4I_3)B$

Donc $A = 5\underbrace{AB}_{I_3} - 4\underbrace{I_3 B}_{B} = 5I_3 - 4B$

$A - 5I_3 = -4B$ donc $-\frac{1}{4}(A - 5I_3) = B$

Exercice 4

$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

1) $\operatorname{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,i} + b_{i,i}) = (a_{1,1} + b_{1,1}) + \cdots + (a_{n,n} + b_{n,n})$

$= (a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}) + (b_{1,1} + b_{2,2} + \cdots + b_{n,n})$

$= \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$

2) $\operatorname{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} = \lambda a_{1,1} + \cdots + \lambda a_{n,n}$

$= \lambda (a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}) = \lambda \operatorname{Tr}(A)$

3) Rappel : $(AB)_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \times b_{k,1}$

$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$

$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{l,k} \times b_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\sum_{l=1}^{n} b_{k,l} \times a_{l,k}}^{(BA)_{k,k}}$

$= \operatorname{Tr}(BA)$

4) On suppose qu'il existe A et B telles que $AB - BA = I_n$

$$Tr(AB - BA) = Tr(I_n) = Tr\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = n$$

$$\| $$

$$Tr(AB) - Tr(BA) = 0$$ FAUX en général

Exercice 5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Décalage des lignes de B vers le bas.

2) $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ Décalage des colonnes de B vers la gauche.

Remarque : I_n est une matrice de permutation.

3) Soit A et B deux matrices de permutation.

AB est une matrice obtenue en permutant des lignes de B, qui est elle-même une matrice de permutation.

Donc AB comporte toujours que des 0 sauf exactement un 1 pour chaque ligne et colonne

AB est une matrice de permutation.

4) Soit A une matrice de permutation.

$AB = I_n$

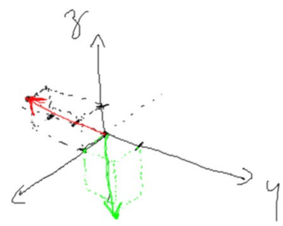
La première ligne de A ne possède qu'un unique 1 en position k.

Il suffit de construire B en imposant sa première colonne à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k^{ie}$ position

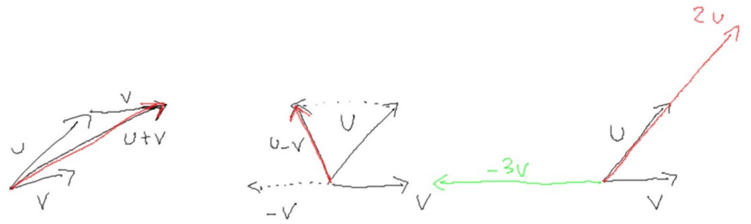
Idem pour toutes les lignes de A.

En construisant ainsi B_j on obtient $AB = I_n$.
Donc A est inversible.

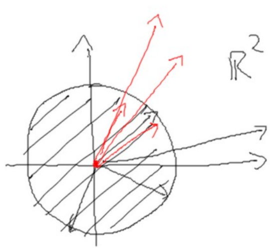
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

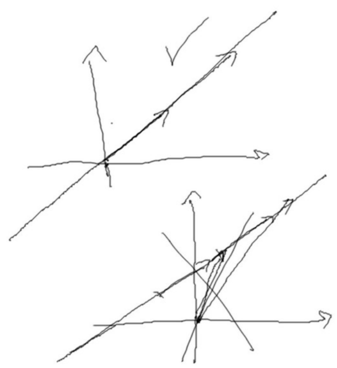


$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



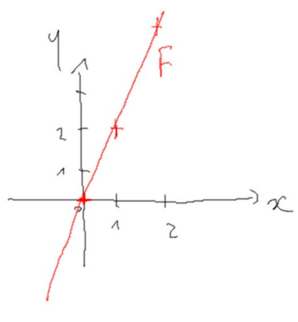
0_E





F est un sous-espace vectoriel si :

$$\begin{cases} \cdot\ 0 \in F \\ \cdot\ \lambda u + v \in F \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R},\ u, v \in F \end{cases}$$



$y = 2x$

- $0_{\mathbb{R}^2} \in F$ ✓
- Soit $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} x' \\ 2x' \end{pmatrix}$$

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda \cdot 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ 2x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda \cdot 2 \cdot x + 2x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda x + x'} \\ 2 \times \boxed{\lambda x + x'} \end{pmatrix} \in F \checkmark$$

X

2X

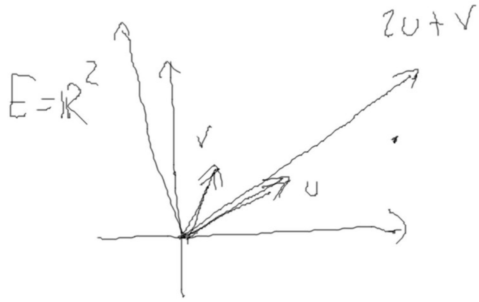
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad y^2 = 2x^2 \right\}$$

. $0 \in F$ ✓

. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\qquad 2 \times (1^2) = y^2$

$v = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\qquad 2 \times (-1)^2 = y^2$

$$u + v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \notin F$$



$w = \lambda_1 u + \lambda_2 v$

$\mathrm{Vect}(\{u, v\}) = \mathrm{Span}(\{u, v\})$

= ensemble des vecteurs obtenus par combinaison linéaire de u et v.

$\mathrm{Vect}(\{v\})^{\perp}$ –

Montrer que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ (engendrent $\mathbb{R}^2$)

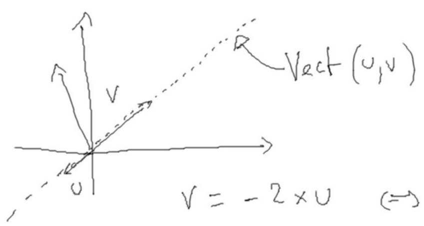
($\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(u, v)$)

Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On cherche λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $w = \lambda_1 u + \lambda_2 v \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

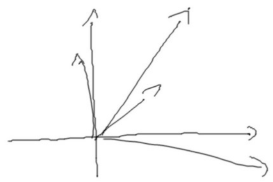
$$\iff \begin{cases} x = \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 1 \\ y = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \lambda_1 + y \\ y = \lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = \lambda_1 \\ y = \lambda_2 \end{cases}$$

Ici : $w = (x-y)\, u + y \cdot v$



$v = -2 \times u \iff 1 \times v + 2 u = 0_{\mathbb{R}^2}$



$$\begin{array}{cc} u & v \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array} \quad \times 2$$

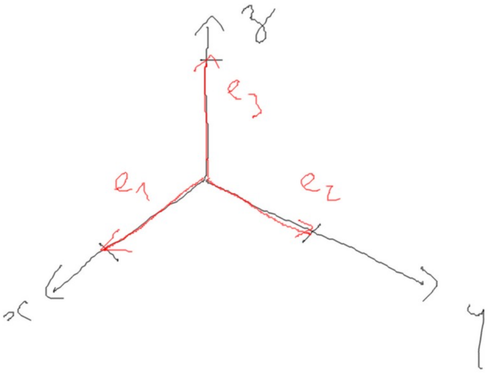
$v = 2 \times u$.
Colinéaires.

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Montrer qu'une famille de vecteurs est libre :} \\ \text{Soient } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}. \\ \text{On suppose que } \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = 0 \\ \text{On montre que } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0. \end{array}}$

Ex : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

On pose $\lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \\ -\lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0$$ Donc $\{u, v\}$ libre



$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \times e_1 + 3 \times e_2 + 7 e_3$$