Projekt

Datum

Kamul ALi Massoma Wattara

TP Examen 4 LIAL

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} -x+y \\ -x-z \\ y+z \end{pmatrix}$$

1) Calcul de la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}$

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; est la matrice $M_{\mathbb{B}}(f)$ dont la jème colonne est égale au vecteur des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B pour $1 \leq j \leq 3$, Autrement dit: $M_{\mathbb{B}}(f) = \left(f(e_1)_B, f(e_2)_B, f(e_3)_B \right)$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} -1+0 \\ -1-0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -0+1 \\ 0-0 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Déterminons une base de $Ker(f)$ et $Im(f)$

$$Ker(f) = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0 \}$$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f)$, alors $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ on a

$$\begin{cases} -x+y = 0 \\ -x - z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow Ker(f) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Ker(f) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2

Exercice 1

2/ Suite

$Ker(f)$ est engendré par le vecteur $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, une base de $Ker(f)$ est constitué de ce vecteur car il est libre

$\dim Ker(f) = 1$, $B_{Ker(f)} = (e) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

* Déterminons $Im(f)$

On peut remarquer les vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sont colinéaires car $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ donc la famille de vecteur $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est liée.

En prenant la famille de vecteur $(f(e_1), f(e_2))$ on obtient une famille libre.

* Preuve : Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ / $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Rappelons que $f(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a : $\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 0 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ d'où $f(e_1), f(e_2)$ sont libres.

De plus ~~ces~~ vecteurs engendrent $Im(f)$, $Im(f) = Vect\{f(e_1), f(e_2)\}$ d'où ils forment une base de $Im(f)$

$B_{Im(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $rg(f) = 2$

3/ L'application n'est pas injective car $\dim Ker(f) \neq 0$ ou $Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc elle n'est pas bijective.

De plus $rg(Im f) \neq 3$ d'où elle n'est pas surjective

f n'est ni injective, ni surjective donc pas bijective.

HELMHOLTZ ZENTRUM
DRESDEN ROSSENDORF

3

Exercice 2

Soit $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $D = Vect(u)$

1) Calcul de la matrice P_D, la projection orthogonale sur D

$$P_D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \to \frac{v \cdot u}{\|u\|^2} u$$

ici nous utilisons le produit scalaire canonique avec $\|\cdot\|_2$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} |u_i|^2}$$

$$f_D(u) = \frac{1}{9}(v.u)u$$

Soit la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M_B(P_D) = \left(f_D(e_1)|_B, f_D(e_2)|_B, f_D(e_3)|_B \right)$$

$$f_D(e_1) = \frac{1}{9}(e_1 \cdot u)u = \frac{1}{9} \times 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$f_D(e_2) = \frac{1}{9}(e_2 \cdot u)u = \frac{1}{9}(-1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f_D(e_3) = \frac{1}{9}(e_3 \cdot u)u = \frac{1}{9}(-2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$M_B(P_D) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice symétrique

2) Calcul du carré de $M_B(P_D)$

$$M_B^2(P_D) = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{9}{81}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = M_B(P_D)$$

(4)

Exercice 2

2) On obtient $\underset{B}{M^2}(P_D) = \underset{B}{M}(P_D)$

3) Calcul de la matrice symétrique orthogonale par rapport à D

$$S_D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$v \to 2P_D(v) - v$$

$$\underset{B}{M}(S_D) = 2\underset{B}{M}(P_D) - I_3$$

$$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & -8/9 \\ \frac{-4}{9} & 2/9 & 4/9 \\ -8/9 & 4/9 & 8/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 & -4/9 & -8/9 \\ -4/9 & -7/9 & 4/9 \\ -8/9 & 4/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{B}{M}(S_D) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -4 & -7 & 4 \\ -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4) Le carré de $\underset{B}{M}(S_D)$

$$M_B(S_D)^2 = \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -4 & -7 & 4 \\ -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -4 & -7 & 4 \\ -8 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \frac{81}{9^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\underset{B}{M^2}(S_D) = I_3$$

5) Donnons une équation de la diagonale.

$D^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3,\ u.v = 0\}$

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a : $u.v = 2x - y - 2z = 0$

$D^\perp = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y - 2z = 0\right\}$, tout vecteur de $D^\perp$ vérifie : $2x - y - 2z = 0$

⑤ Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, Soit Δ_{ij} la matrice obtenue en supprimant la $i^{ème}$ ligne et $j$ième colonne.

1) Calcul du determinant de A : $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

* Développons le calcul du determinant par rapport à la deuxième colonne.

$$\det A = (-1)^{2+2} (1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$\det A \neq 0$ donc A est inversible, de plus A est symétrique donc elle est diagonalisable.

2) Calcul du polynome caractéristique de A.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

avec $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne ; on obtient

$$\det(A - \lambda I_n) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)^2 - 4\right]$$

$$(-1-\lambda)^2 - 4 = (-1-\lambda)^2 - 2^2 = (-1-\lambda-2)(-1-\lambda+2) = (-3-\lambda)(1-\lambda)$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)^2 - 4\right] = (1-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(-3-\lambda)$$

d'où $P(\lambda) = +(\lambda-1)^2(\lambda+3)$

3) Déterminons le Spectre de A

Si λ est une valeur propre de A alors $\det(A - \lambda I_3) = 0$ en d'autre terme, les valeurs propres sont déterminés par la résolution de l'équation $P(\lambda) = 0$

Ainsi $P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+3) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -3$

$\mathrm{Spec}(A) = \{1, -3\}$ 1 étant une valeur propre de multiplicité algébriq 2 et -3 une valeur propre de " 1

⑥ Exercice 3

4) Déterminons les sous espaces propres de A

* $E_1(A) = \{v \in \mathbb{R}^3,\ Av = v\}$

soit $v \in E_1(A)$ alors :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2z = x \\ y = y \\ 2x - z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y \\ x = z \end{cases}$$

$$E_1(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\dim E_1(A) = 2$, La multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda = 1$ est donc égale à 2

* $E_{-3}(A) = \{v \in \mathbb{R}^3,\ Av = -3v\}$; soit $v \in E_{-3}(A)$ alors :

$$\begin{cases} -x + 2z = -3x \\ y = -3y \\ 2x - z = -3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z = -2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E_{-3}(A) = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$E_{-3}(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\dim E_{-3}(A) = 1$, le sous espace vectoriel $E_{-3}(A)$ est engendré par un unique vecteur de multiplicité géométrique 1

5) Les arguments pour affirmer que A est diagonalisable.

* $\sum_{\lambda_i \in Spec(A)} \dim E_{\lambda_i}(A) = \dim E_1(A) + \dim E_{-3}(A) = 3$ donc A est diagonalisable

car la somme de nos sous espaces propres est égale à l'ordre de A

* On remarque aussi que : $\det(A) = \prod_{\lambda \in Spec(A)} \lambda^{m(\lambda)}$

$\det(A) = (1)^2 \times (-3)^1 = -3$ donc on peut aussi conclure que A est diagonalisable.

En outre A est symétrique ce qui en fait un troisième argument

7 Exercice 3

5) La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6.) Calcul des produits scalaires deux à deux des vecteurs propres

Soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x.y = 0+0+0 = 0$

$x.z = 1+0-1 = 0$ $\Rightarrow$ On a: $x.y = x.z = y.z = 0$; $x \perp y,\ x \perp z,\ y \perp z$

$y.z = 0+0+0 = 0$

* Ce résultat était prévisible car A est une matrice symétrique donc il existe une base orthonormée de vecteurs propres de A et les sous espaces propres sont orthogonaux.

7) Calcul de P^{-1}

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a: $\det P = -2$

$$\mathrm{com}_A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}\ {}^t\mathrm{com}_A$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cqfd