ций существуют пределы в точке x_0, принадлежащей в данном случае их множеству задания, что и означает их непрерывность в этой точке. Иначе говоря, утверждение следствия 2 утверждения 6^0 является просто частным случаем этого утверждения, когда точка, в которой рассматривается предел, приналежит области задания функций.

5.11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Все рассматриваемые в этом пункте функции будем предполагать определенными на множестве $X \subset \mathbf{R}$ и рассматривать их конечные и бесконечные пределы при стремлении аргу-мента к конечной или к бесконечно удаленной точке x_0.

Определение 12. *Функция α: $X \to \boldsymbol{R}$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \tag{5.45}$$

Бесконечно малые функции играют особую роль среди всех функций, имеющих предел, связанную, в частности, с тем, что общее понятие конечного предела может быть сведено к понятию бесконечно малой. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Л Е М М А 6. *Конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ существует и равен a тогда и только тогда, когда $f(x) = a + \alpha(x), x \in \boldsymbol{X}$, где $\alpha = \alpha(x)$- бесконечно малая при $x \to x_0$.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, то, положив $\alpha(x) = f(x) - a, x \in \boldsymbol{X}$, получим, что

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - a = a - a = 0.$$

Наоборот, если $f(x) = a + \alpha(x), x \in \boldsymbol{X}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = a. \Box$$

ТЕОРЕМА 3. *Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$, а также и произведение бесконеч-*