



به نام خدا



دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
مکاترونیک

گزارش مینی پروژه سوم

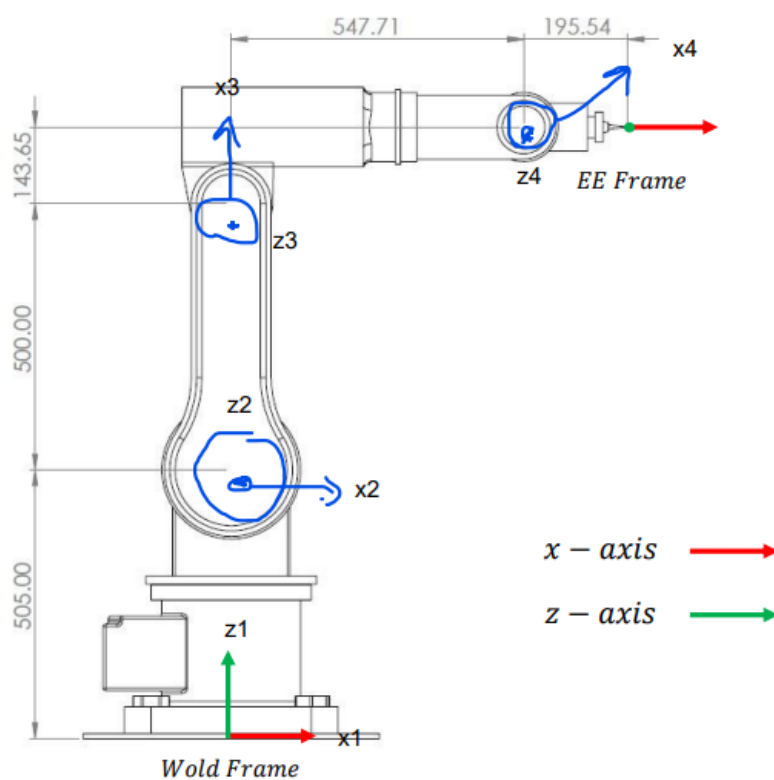
نام و نام خانوادگی	کامیار رحمانی
شماره دانشجویی	۸۱۰۱۹۹۴۲۲
تاریخ ارسال گزارش	۱۴۰۲/۴/۱۱

فهرست گزارش سوالات

- بخش اول: سینماتیک معکوس و مستقیم.....۳
- جدول D-H.....۳
- ماتریس های Q_i و بردارهای a_i۴
- معادلات سینماتیک مستقیم.....۴
- حل سینماتیک معکوس.....۵
- موقعیت مفاصل در طول مسیر.....۵
- سوال دوم: مسیریابی با نقاط میانی.....۷
- نقاط میانی.....۷
- موقعیت مفاصل در نقاط میانی.....۷
- ژاکوبین ماتریس و محاسبه $\dot{\theta}$۷
- بخش سوم: مونتاز ربات.....۹

بخش اول: سینماتیک معکوس و مستقیم

جدول D-H:



i	a_i	b_i	α_i	θ_i
1	0	505	$\pi/2$	θ_1
2	500	0	0	θ_2
3	566.23	0	0	θ_3
4	195.54	0	0	θ_4

ماتریس های Q_i و بردارهای a_i :

$$\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_i \cos(\theta_i) \\ a_i \sin(\theta_i) \\ b_i \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos(\theta_1) \\ a_1 \sin(\theta_1) \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 505 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \cos(\theta_2) \\ a_2 \sin(\theta_2) \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \cos(\theta_2) \\ 500 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \cos(\theta_3) \\ a_3 \sin(\theta_3) \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 566.23 \cos(\theta_3) \\ 566.23 \sin(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} a_4 \cos(\theta_4) \\ a_4 \sin(\theta_4) \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 195.54 \cos(\theta_4) \\ 195.54 \sin(\theta_4) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & 0 & -\cos(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معادلات سینماتیک مستقیم:

$$Q_i = [Q_i]_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ b_i \end{bmatrix} \equiv \begin{matrix} \text{نقطه } O_i \text{ به } O_{i-1} \text{ راجع} \\ \text{مانند} \end{matrix}$$

با کمک متلب معادلات FKP را بدست آوردم:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta_1) \sigma_1}{100} \\ \frac{\sin(\theta_1) \sigma_1}{100} \\ \frac{9777 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{50} + \frac{56623 \sin(\theta_2 + \theta_3)}{100} + 500 \sin(\theta_2) + 505 \end{pmatrix}$$

حل سینماتیک معکوس:

برای حل سینماتیک معکوس از دستور vpasolve متلب استفاده کردم:

زوایای مفاصل در نقطه ابتدایی و انتهایی بر حسب رادیان:

$$\text{theta_I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.16072222740936671901282159584478 \\ 1.3142880796881244774440062679067 \\ -1.4750103070974911964562503695497 \end{pmatrix}$$

$$\text{theta_F} = \begin{pmatrix} -163.29151052188395807362508494068 \\ 13.956869950771055967419982482091 \\ 66.98175763639492739138001307563 \\ 0.67147394138335051479729695818477 \end{pmatrix}$$

موقعیت مفاصل در طول مسیر:

در اینجا فرض کردم که معادله مربوط به مسیر درجه ۵ است. از درس میدانیم که معادله آن به شکل

زیر است:

$$S(\tau) = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3$$

در رابطه بالا τ برابر با t/T می باشد که T همان زمان کل مسیر است که در این مثال 1.5s در نظر گرفته شده است. در کد متلب t را با نرخ 0.1 افزایش دادم.

در نهایت برای بدست آوردن موقعیت هر مفصل از رابطه زیر استفاده کردم:

$$\vec{\theta}(t) = \vec{\theta}_I + (\vec{\theta}_F - \vec{\theta}_I) s(\tau)$$

چند تا از موقعیت های مفصل در طول مسیر:

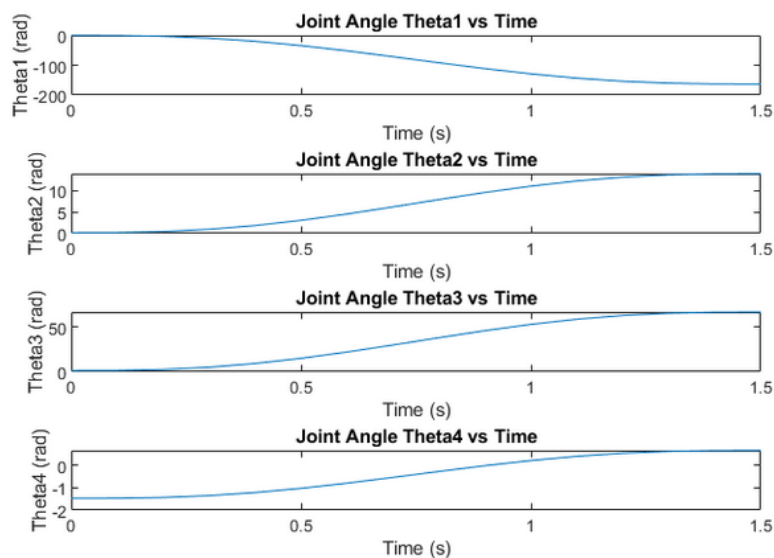
```
joint_theta =
    (-0.43673423258593754992311457528487
     0.1976209612709602552103613861568
     1.4899201859197906766022561562203
    -1.4692693892259987327560175275506)

joint_theta =
    (-3.1377774110753322645952832995838
     0.42582627689650251627167998426443
     2.5761412033377910537863432663724
    -1.4337638897755719357495891537988)

joint_theta =
    (-9.4578442894275188516243649197642
     0.95979510354647576028056435437613
     5.11774791641258250221917978221
    -1.3506859394254808445404449083273)
```

نمودار تغییرات زوایای مفصل در طول مسیر:

Changes in Joint Angles over Time



سوال دوم: مسیریابی با نقاط میانی

نقاط میانی:

در این بخش تعداد نقاط میانی را برابر ۵ در نظر گرفتیم:

$$y = 1 \times 7$$

50	60	80	100	120	140	150
----	----	----	-----	-----	-----	-----

موقعیت مفاصل در نقاط میانی:

$$\begin{pmatrix} -6.2118778423942961504929157767059 & -6.1976800135013818334007744997811 & -6.1693933000358784107014491838438 & -6.1412882525754225541124351494565 \\ 1.390499336411883013569833863367 & 1.3931599436100655101809087304288 & 1.3973513394657692826409681611404 & 1.4000202317704227887083146443756 \\ 4.149904564599062622127320018111 & 4.1532952825144339713270743627397 & 4.1612869855885744236705109925733 & 4.1708684435861107090324107652521 \\ 6.9546592485629369917205068531176 & 6.9344100945564688288175363645023 & 6.8939402821611211813147149880199 & 6.8535848843984755332964546977186 \\ -6.1134070332112480268708475149609 & -6.0857897473297057185552370013642 & -6.0720919739568399300830220244104 & \\ 1.4011576662789087669713338494508 & 1.4007660063840929535267697233716 & 1.4000003976217989138073953769076 & \\ 4.1820083555569861635967864255906 & 4.1946731565546570582953213006972 & 4.2015664728825520185172081466876 & \\ 6.8134263185549395732274721978093 & 6.7735358915705421836578909351851 & 6.753710410632075474683163458705 & \end{pmatrix}$$

ژاکوبین ماتریس و محاسبه $\dot{\theta}$:

فقط در راستای y سرعت داریم بنابراین در بردار twist سرعت های خطی مربوط به x و y صفر هستند.

همچنین سرعت دورانی نداریم بنابراین ماتریس ژاکوبین 3×3 میشود:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\theta_1) \sigma_1}{100} & -\cos(\theta_1) \sigma_3 & -\cos(\theta_1) (\sigma_4 + \sigma_5) \\ \frac{\cos(\theta_1) \sigma_1}{100} & -\sin(\theta_1) \sigma_3 & -\sin(\theta_1) (\sigma_4 + \sigma_5) \\ 0 & \sigma_2 + \frac{56623 \cos(\theta_2 + \theta_3)}{100} + 500 \cos(\theta_2) & \sigma_2 + \frac{56623 \cos(\theta_2 + \theta_3)}{100} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = 19554 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + 56623 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 50000 \cos(\theta_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{9777 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{50}$$

$$\sigma_3 = \sigma_4 + \sigma_5 + 500 \sin(\theta_2)$$

$$\sigma_4 = \frac{9777 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{50}$$

$$\sigma_5 = \frac{56623 \sin(\theta_2 + \theta_3)}{100}$$

با توجه به رابطه زیر $\dot{\theta}$ نیز بدست می آید:

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \tilde{J} \dot{\vec{\theta}}$$

Handwritten notes in Persian:
 - \vec{t} is labeled "twist".
 - \tilde{J} is labeled "ماتریس جاکوبین" (Jacobian matrix).
 - $\dot{\vec{\theta}}$ is labeled "درجه حرارت فضایی" (Spatial velocity).
 - $\vec{\omega}$ is labeled "EE" (end-effector).
 - \vec{v} is labeled "EE" (end-effector).

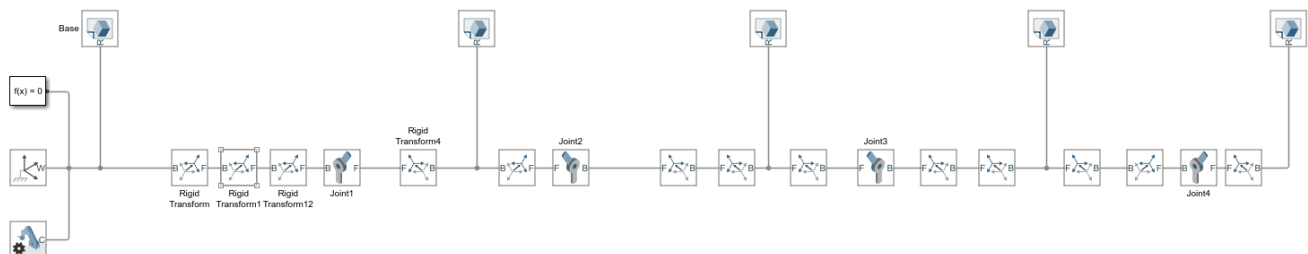
$$\text{theta_dot} = \begin{pmatrix} \frac{4000 \cos(\theta_1)}{56623 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1)^2 + 56623 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1)^2 + 50000 \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) + 50000 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)^2 + 19554 \sigma_3 \cos(\theta_1)^2 + 19554 \sigma_3 \sin(\theta_1)^2} \\ - \frac{2 \sin(\theta_1) (19554 \sigma_3 + \sigma_1)}{\sigma_2} \\ \frac{2 \sin(\theta_1) (19554 \sigma_3 + \sigma_1 + 50000 \cos(\theta_2))}{\sigma_2} \end{pmatrix}$$

حال سرعت زاویه ای مفاصل در نقاط میانی را محاسبه میکنیم:

$$\text{theta_dot_t} = \begin{pmatrix} 0.056726094003241491085899513776337 & 0.056406124093473005640612409347301 & 0.056 & 0.055511498810467882632831086439334 \\ -0.0062193875611022788237176990761002 & -0.0082884553060899805536977334642936 & -0.010340657256232951765453276949933 & -0.012367321780990435621643728803527 \\ 0.0071140161823770913755188732270054 & 0.0094452298476323223037505306096106 & 0.011753028324294487650222837001633 & 0.014035533879066755736882486678043 \\ 0.055511498810467882632831086439334 & 0.054945054945054945054945054945055 & 0.054634146341463414634146341463415 \\ -0.012367321780990435621643728803527 & -0.014360268616815605230505816680409 & -0.015341728655836573257420549270909 \\ 0.014035533879066755736882486678043 & 0.016291065249415280140788843493203 & 0.017408262213586815391099632519374 \end{pmatrix}$$

بخش سوم: مونتاژ ربات

مدار بسته شده در سیمولینک:



شکل های ربات مونتاژ شده:

