# 1 Занятие 1, часть 1. Оригиналы и изображения.

**Преобразованием Лапласа** при котором функции-оригиналу $f(t)$ действительного переменного $t$ ставится в соответствие определенная функция-изображение $F(p)$ комплексного переменного $p$ определяется следующим образом:

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt, \tag{1}$$

будем обозначать это преобразование как $f(t) \doteqdot F(p)$. Правая часть равенства (1) называется **интегралом Лапласа**.

На функцию **оригинал** $f(t)$ налагают условия так, чтобы интеграл (1) сходился:
1) $f(t) = 0,\ t < 0$;
2) $|f(t)| < Me^{s_o t},\ M > 0,\ s_o \geq 0$,
3) $f(t)$ удовлетворяет на любом отрезке условиям теоремы Дирихле, т.е. является кусочно-монотонной и кусочно-непрерывной с точками разрыва первого рода.

**Функция Хевисайда** легко позволяет любой функции $f(t)$ соблюсти требование 1) к оригиналу:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t > 0 \end{cases}$$

**Теорема о существовании изображения.** Для всякого оригинала $f(t)$, изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\mathrm{Re}p > s_0$, где $s_0$ – показатель роста функции $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости.

Изображение существует, если интеграл Лапласа сходится. Кроме того, если заменить функцию-оригинал на её мажоранту, то получим, что изображение не превышает по абсолютной величине $\dfrac{M}{\mathrm{Re}p - s_o}$, где $M$ и $s_o$ константы, которые фигурируют в условии 2). Очевидно, при стремлении переменной $p$ к бесконечности, получем следующее утверждение.

**Необходимый признак существования изображения.** Если функция $F(p)$ является изображением некоторой функции $f(t)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

**Теорема о единственности оригинала.** Если функция $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны.

**Теорема обращения. Формула Римана - Меллина.** Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. В любой точке непрерывности оригинала $f(t)$ имеет место равенство

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Интегрируем по вертикальной прямой, лежащей в области сходимости интеграла для оригинала.

Формула не популярна. На практике, вычислять изображение по оригиналу мы будем другими, более удобоваримыми методами.

## Упражнения к занятию 1

Удовлетворяют ли функции требованиям 1-3 к оригиналу? Объяснитесь!

**1.1** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 3, & t \geq 0 \end{cases}.$

**1.2** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^3, & t > 0 \end{cases};$

**1.3** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 3^t, & t > 0 \end{cases}$

**1.4** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 3^{\sin t}, & t > 0 \end{cases}$

**1.5** $f(t) = \eta(t) 3^{t^3}.$

**1.6** $f(t) = \eta(t) 3^{3^t}.$

**1.7** $f(t) = \eta(t) t^{\sin t}.$

**1.8** $f(t) = \eta(t) t^{3^t}.$

**1.9** $f(t) = \eta(t) \dfrac{1}{\sin t}.$

**1.10** $f(t) = \eta(t) \dfrac{1}{1 + \ln t}.$

Удовлетворяют ли функции необходимым требованиям к изображениям?

**1.11** $F(p) = \dfrac{p^3 - 4}{p^3 + 4}.$

**1.12** $F(p) = \dfrac{p^3 - 4}{p^4 + 3}.$

**1.13** $F(p) = \dfrac{p^3 - e^p}{p^3 + 4}.$

**1.14** $F(p) = \dfrac{p^3 - e^{-p}}{p^3 + 4}.$

**1.15** $F(p) = \dfrac{p^3 - 4}{p^3 + e^p}.$

**1.16** $F(p) = \dfrac{p^3 - 4}{p^3 + e^{-p}}.$

**1.17** $F(p) = e^p \cdot \dfrac{p^3 - 4}{p^3 + e^p}.$

**1.18** $F(p) = e^{-p} \cdot \dfrac{p^3 - 4}{p^3 + e^p}.$

**1.19** $F(p) = \dfrac{\sin p^3 - 4}{p^3 + e^p}.$

**1.20** $F(p) = \dfrac{p^3 - 4}{\sin p^3 + e^p}.$

## 2 Занятие 1, часть 2 и занятие 2. Основные формулы и свойства

$$\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p} \tag{2}$$

$$\eta(t)e^{at} \doteqdot \frac{1}{p-a} \tag{3}$$

$$\eta(t)t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{4}$$

$$\eta(t)\cos at \doteqdot \frac{p}{p^2+a^2} \tag{5}$$

$$\eta(t)\sin at \doteqdot \frac{a}{p^2+a^2}. \tag{6}$$

$$\eta(t)\operatorname{ch} at \doteqdot \frac{p}{p^2-a^2} \tag{7}$$

$$\eta(t)\operatorname{sh} at \doteqdot \frac{a}{p^2-a^2}. \tag{8}$$

$$af(t)+bg(t) \doteqdot aF(p)+bG(p). \tag{9}$$

$$f(kt) \doteqdot \frac{1}{k}F(p/k),\ \ k\neq 0. \tag{10}$$

$$e^{at}f(t) \doteqdot F(p-a). \tag{11}$$

$$f(t-b) \doteqdot \frac{F(p)}{e^{pb}},\ \ b\geq 0. \tag{12}$$

**Пример 1.** Найдите изображение функции $\eta(t)\operatorname{ch}3t$ используя свойство подобия и формулу для изображения $\eta(t)\operatorname{ch}t$.

**Решение.** $\eta(t)\operatorname{ch}t \doteqdot \dfrac{p}{p^2-1}$, $k=3$, следовательно

$$\operatorname{ch}3t \doteqdot \frac{1}{3}\cdot\frac{p/3}{(p/3)^2-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(p/3)\cdot 3^2}{p^2-3^2} = \frac{p}{p^2-3^2}.$$

**Пример 2.** Найдите изображения функций $a)\eta(t)\ e^{10t}\operatorname{ch}3t$, б) $\eta(t)e^{-3t}\cos t$.

**Решение.**

а) $\eta(t)\operatorname{ch}3t \doteqdot \dfrac{p}{p^2-3^2}$, $\alpha=10$, следовательно $e^{10t}\operatorname{ch}3t \doteqdot \dfrac{p-10}{(p-10)^2-3^2}$;

б) $\eta(t)\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$, $\alpha=-3$, следовательно $\eta(t)e^{-3t}\cos t \doteqdot \dfrac{p+3}{(p+3)^2+1}$.

### Упражнения к занятию 1, часть 2 и к занятию 2

Найдите изображения функций $\eta(t)f(t)$, используя свойства (3)-(12):

**3.1** $f(t) = e^{2t}t.$

**3.2** $f(t) = e^{2t}\sin 3t.$

**3.3** $f(t) = e^{-t}\cos^2 t.$

**3.4** $f(t) = e^{2-t}\operatorname{ch} 2t.$

**3.5** $f(t) = e^{6-2t}t + t^2.;$

**3.6** $f(t) = e^{-2t}\sin^3 t.$

**3.7** $f(t) = 2^t t;$

**3.8** $f(t) = 5^t \sin 3t.$

**3.9** $f(t) = \dfrac{\cos^2 t}{3^t}.$

**3.10** $f(t) = 3^{2-t}\operatorname{ch} 2t.$

Найдите оригиналы функций 3.11-3.20, разлагая изображение на простейшие дроби методом неопределённых коэффициентов.

**3.11** $F(p) = \dfrac{p+4}{p^2-4}.$

**3.12** $F(p) = \dfrac{2p-5}{p^2-4p+5}.$

**3.13** $F(p) = \dfrac{p-9}{p^2-7p+10}.$

**3.14** $F(p) = \dfrac{p-5}{p^3+4p}.$

**3.15** $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2-2p}.$

**3.16** $F(p) = \dfrac{p-5}{p^2+4p-13}.$

**3.17** $F(p) = \dfrac{p^2+10}{p^3-7p^2+10p}.$

**3.18** $F(p) = \dfrac{p^2-5p-20}{p^3+9p^2+20p}.$

**3.19** $F(p) = \dfrac{p-1}{p^3+2p^2}.$

**3.20** $F(p) = \dfrac{p-5}{p^3-p}.$

# 3 Занятие 3. Графическое задание и свойства посложнее

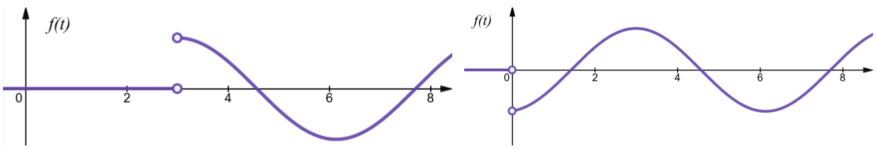
**Замечание.** При положительном значении $b$, оригинал смещается вправо и ненулевые значения принимает только начиная с $b \geq 0$. Если же применить теорему для отрицательного значения $b$, то функция-оригинал смещается влево и принимает ненулевые значения при отрицательных значениях $t$, что противоречит условиям налагаемым на оригинал. Но причина того, что теорема не будет работать при отрицательном $b$ даже не в этом, а в том, что при отрицательном смещении нет оснований выполнить самое первое преобразование в выводе формулы и сдвинуть пределы.

**Пример 1.** Найдите изображение функции $\eta(t-3)\cos(t-3)$ используя свойство подобия и формулу для изображения $\eta(t)\cos t$.

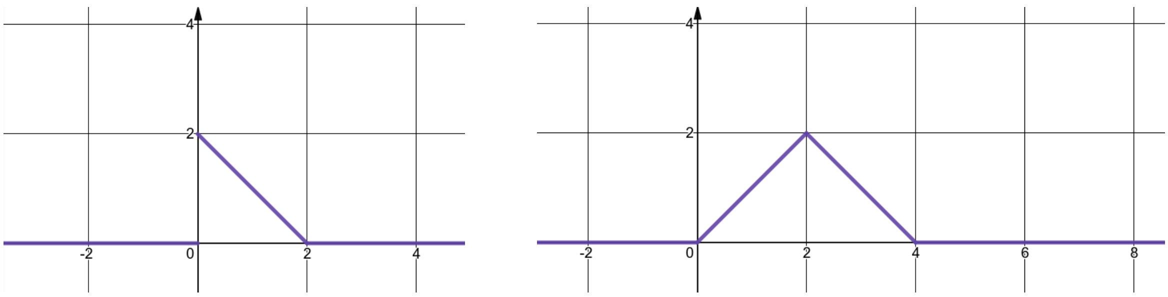
**Решение.** График оригинала изображен на рисунке 4 а), применима теорема запаздывания:

$$\eta(t)\cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}, \;\; b=3,$$

$$\eta(t-3)\cos(t-3) \doteqdot \frac{1}{e^{3p}}\cdot\frac{p}{p^2-1}.$$




**Пример 2.** Найти изображения оригиналов, заданных графически :




**Решение.** Запишем уравнения оригиналов, используя функцию Хевисайда. Заметим, что $\eta(t-a)-\eta(t-b)$ $(b>a)$ задает "ступеньку" ширины $b-a$ и высоты 1. А при умножении $f(t)(\eta(t-a)-\eta(t-b))$ мы получим функцию, совпадающую с $f(t)$ в пределах интервала $(a;b)$ и равную нулю за пределами этого интервала.

Итак,

$$\text{а)}\; f(t) = (\eta(t)-\eta(t-2))(2-t),$$

$$f(t) = 2\eta(t) - t\eta(t) + \eta(t-2)(t-2),$$

к последнему слагаемому применима теорема запаздывания:

$$F(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-2p}.$$

$$\text{б)}\; f(t) = t(\eta(t)-\eta(t-2)) + (\eta(t-2)-\eta(t-4))(4-t),$$

$$f(t) = t\eta(t) - t\eta(t-2) + 4\eta(t-2) - t\eta(t-2) - (4-t)\eta(t-4),$$

$$f(t) = t\eta(t) - 2(t-2)\eta(t-2) + (t-4)\eta(t-4),$$

применяя теорему запаздывания:

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-4p},$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2}(1-2e^{-2p}+e^{-4p}),$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2}(1-e^{-2p})^2.$$

### Изображение периодического сигнала

Оказывается, если функция-оригинал периодическая, то её изображение будет рядом геометрической прогрессии.

**Пример.** Вычислить изображение периодической функции, изображенной на рисунке 6.

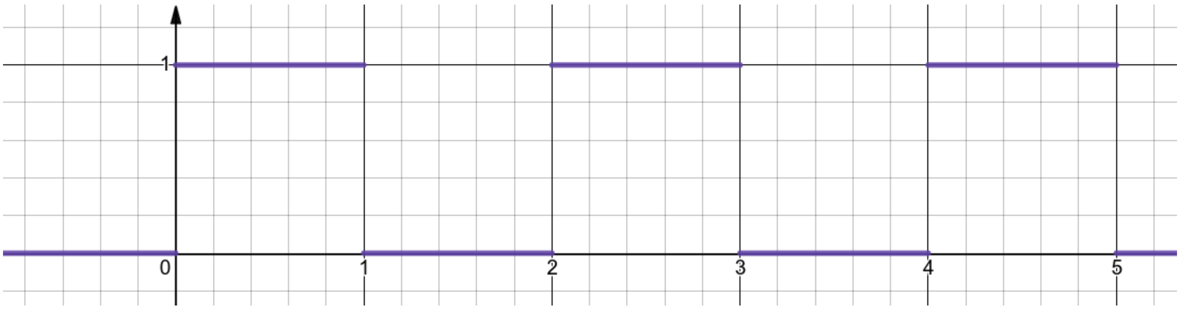



**Рисунок 6** График периодической функции-оригинала

Её аналитическая запись имеет вид

$f(t) = (\eta(t) - \eta(t-1)) + (\eta(t-2) - \eta(t-3)) + ... + (\eta(t-2k) - \eta(t-(2k+1))...$

Преобразуем это выражение к виду

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \eta(t-n).$$

Вычисляя изображение каждого слагаемого, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \eta(t-n) \risingdotseq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-np}}{p} = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-p})^n,$$

так как полученная геометрическая прогрессия прогрессия убывает, то без труда вычисляется её сумма:

$$\frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-p})^n = \frac{1}{p(1+e^{-p})}.$$

В итоге, $F(p) = \dfrac{1}{p(1+e^{-p})}$.

Рассуждая аналогичным образом получаем, что изображение периодической функции $f(t)$ с периодом $T$ — это изображение его повторяющегося участка на интервале $[0; T]$ с учетом множителя $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-nT)\eta(t-nT) \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTp} F_1(p) = F_1(p) \frac{1}{1-e^{-Tp}},$$

где

$$F_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt}\, dt = \int_0^{T} f(t) e^{-pt}\, dt.$$

## Упражнения к занятию 3

Найдите изображения функций.

**3.21 а)** $f(t) = \eta(t)e^{t-2}\sin t$, **б)** $f(t) = \eta(t-2)e^{t-2}\sin t$.

**3.22 а)** $f(t) = \eta(t)e^{-t}\sin(t-3)$, **б)** $f(t) = \eta(t-3)e^{-t}\sin(t-3)$.

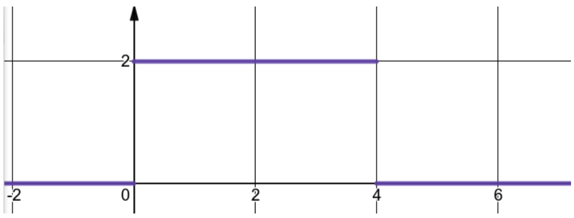
Найдите оригиналы функций, используя свойство смещения (затухания).

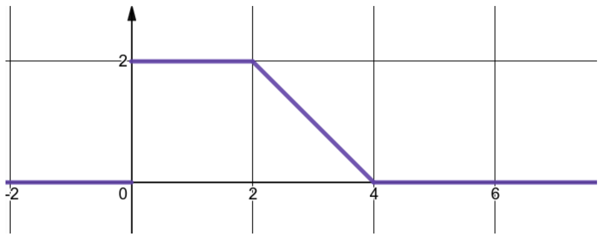
**3.27** $F(p) = \dfrac{1}{(p-2)^3}$. **3.28** $F(p) = \dfrac{p+3}{(p-2)^3}$.

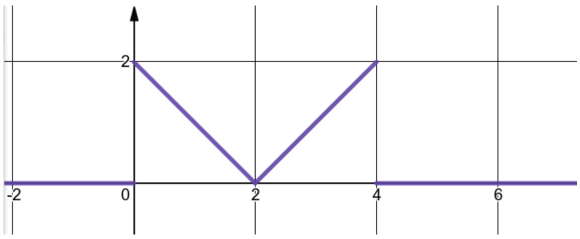
**3.29** $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2-2p+10}$. **3.30** $F(p) = \dfrac{p-5}{p^2+4p+20}$.

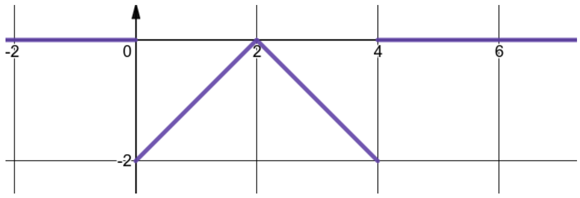
**3.31** $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2-2p}$. **3.32** $F(p) = \dfrac{p-5}{p^2+4p-13}$.

Найдите изображение оригинала, заданного графически.

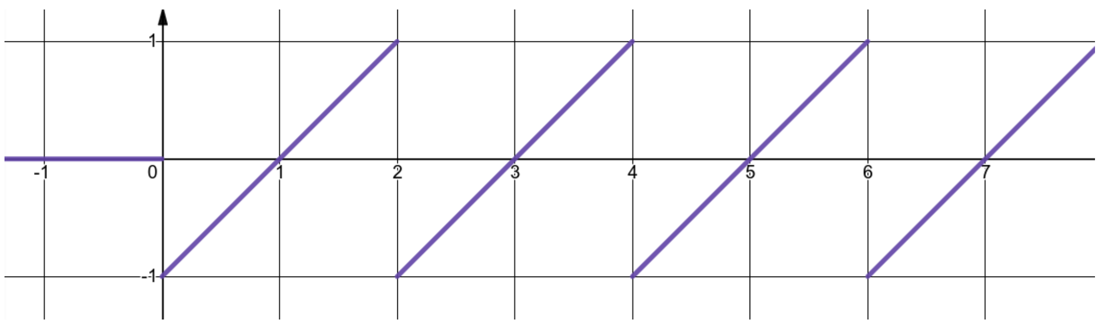
**3.37**


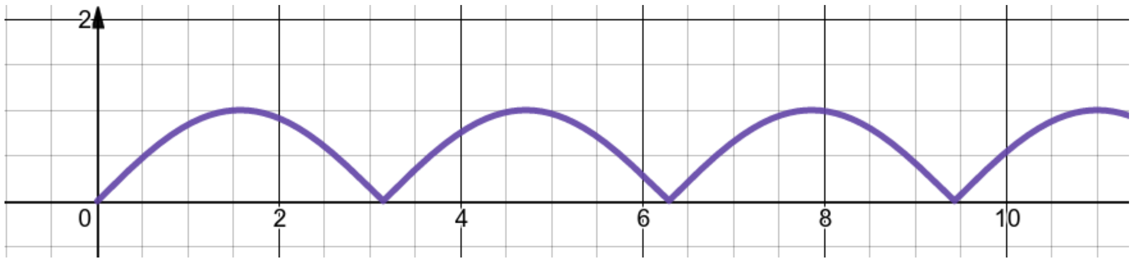

**3.38**



**3.39**


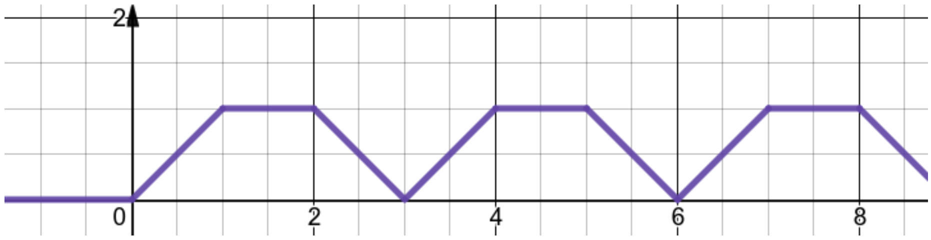

**3.40**



В заданиях 3.44-3.47 найти изображение периодического оригинала, заданного графически.

**3.44**


**3.45** 


$f_1(t) = \sin t,\ t \in (0; \pi)$.

**3.46** 


# 4 Занятие 4. Дифференцирование оригинала

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - f^{(n-1)}(0), \quad \text{где } f(t) \risingdotseq F(p). \quad (13)$$

**Пример 1.** Вычислить изображение функции $\eta(t)\sin^2 t$.
**Решение.**

$$f'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t,$$

$$f'(t) \risingdotseq \frac{2}{p^2+4},$$

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$pF(p) - f(0) = \frac{2}{p^2+4},$$

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

**Пример 2.** Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

**Решение.** Используем формулу (13):

$$p^2 Y - py(0) - y'(0) - 4(Yp - y(0)) + 3Y \risingdotseq \frac{1}{p-1}.$$

Подставим начальные условия:

$$p^2 Y - p - 4Yp + 4 + 3Y = \frac{1}{p-1},$$

$$Y = \frac{p^2 - 5p + 5}{(p-1)^2(p-3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-3}.$$

Вычислим коэффициенты разложения:

$$Y = \frac{22/17}{p-1} - \frac{5/17}{(p-1)^2} - \frac{4/17}{p-3}.$$

Найдём оригинал, который и является решением нашего дифференциального уравнения:

$$y = \frac{22}{17}e^t - \frac{5}{17}te^t - \frac{4}{17}e^{3t}.$$

Заметим, что эта схема применима в случае, если аргумент уравнения принимает только положительные значения (как правило, речь идёт об аргументе-времени).

**Пример 3.** Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' + y'' &= 1, \\ y' - x'' &= t, \end{cases}$$

с начальными условиями $\begin{cases} x(0) = x'(0) = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

**Решение.** Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} pX + p^2Y &= 1/p, \\ pY - p^2X &= 1/p^2. \end{cases}$$

Используем для решения данной системы метод Крамера.

Запишем расширенную матрицу:

$$\left( \begin{array}{cc|c} p & p^2 & 1/p \\ -p^2 & p & 1/p^2 \end{array} \right).$$

Вычислим определитель системы и определители, соответствующие переменным (подставляя столбец правых частей вместо соответствующего переменной столбца):

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & p^2 \\ -p^2 & p \end{vmatrix} = p^2 + p^4,$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 1/p & p^2 \\ 1/p^2 & p \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_Y = \begin{vmatrix} p & 1/p \\ -p^2 & 1/p^2 \end{vmatrix} = \frac{1+p^2}{p}.$$

Найдём изображение, а затем оригинал решения системы:

$$X = 0 \risingdotseq 0, \quad Y = \frac{1+p^2}{p^3(1+p^2)} = \frac{1}{p^3} \risingdotseq \frac{t^2}{2}.$$

Ответ: $x(t) = 0, \quad y(t) = \dfrac{t^2}{2}.$

## Упражнения для занятия 4

Найдите изображения функций $\eta(t)f(t)$, используя теорему о дифференцировании оригинала.

**4.1** $f(t) = \cos^2 4t$. **4.2** $f(t) = e^{2t}\sin^2 3t$.

Найдите решение дифференциального уравнения 4.3-4.12 операторным методом (во всех заданиях ниже, полагаем $t > 0$).

**4.3** $x' - x = e^{-t}, \quad x(0) = 0.$

**4.4** $x' - x = e^{-t}, \quad x(0) = 2.$

**4.5** $x'' - 2x' = 1, \quad x'(0) = x(0) = 0.$

**4.6** $x'' + x = 1, \quad x'(0) = x(0) = 0.$

**4.7** $x'' + x' = t, \quad x'(0) = x(0) = 0.$

Найдите решение системы дифференциальных уравнений операторным методом (во всех заданиях ниже, полагаем $t > 0$).

**4.13** $\begin{cases} x' + y &= 0, \\ y' + x &= 0, \end{cases} \quad x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

**4.14** $\begin{cases} x' + 3x + y &= 0, \\ y' - x + y &= 0, \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

**4.15** $\begin{cases} x' - x + y &= 0, \\ y' - x - y &= 0, \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

**4.16** $\begin{cases} x' + y - z &= 0, \\ x + y' &= 0, \\ y' - z' &= 0, \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = -1.$

# 5 Занятие 5. Сложные свойства

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^{(n)} f(t), \quad \text{где } f(t) \risingdotseq F(p). \tag{14}$$

Формула (14) позволяет найти изображения оригиналов типа $t^n f(t)$.

**Пример.** Найти изображение функции $t\sin^2 t$.

**Решение.** Из примера выше имеем $\sin^2 t \risingdotseq \dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

Значит

$$t\sin^2 t \risingdotseq -\left(\frac{2}{p(p^2+4)}\right)' = \frac{6p^2+8}{(p^3+4p)^2}.$$

Если изображение имеет вид дроби четвертого типа, то это так же указывает на то, что оргинал следует искать с помощью равенства (14) (ну хотя бы попытаться).

$$\int_0^t f(s)\,ds \risingdotseq \frac{F(p)}{p}. \tag{15}$$

**Пример 1.** Вычислить оригинал для изображения $\dfrac{1}{p(p^2+4)}$.

**Решение.** Используем формулы (6) и (15)

$$\frac{1}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{2}\sin 2t,$$

$$\frac{1}{p(p^2+4)} \risingdotseq \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2s\,ds = -\frac{\cos 2s}{4}\bigg|_0^t = -\frac{\cos 2t}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\sin^2 t}{2}.$$

**Пример 2.** Вычислить изображение дельта-функции, которая определяется следующим образом:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0; \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

**Решение.** Заметим, что первообразная дельта-функции - это функция Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Дельта-функция представляет собой точечное воздействие.

Очевидно $\int\limits_0^a \delta(t)\,dt = 1,\ a > 0.$

Найдём изображение $\delta$-функции применяя (15):

$$1 = \int\limits_0^t \delta(s)\,ds \doteqdot \frac{\Delta(p)}{p},$$

с другой стороны, $1 \doteqdot \dfrac{1}{p}$, откуда $\Delta(p) = 1$.

Заметим, что формально дельта функция не соответствует требованиям к оригиналу, а полученное $\Delta(p) = 1$ не является изображением, причём по тем же причинам.

Имеет место следующая теорема интегрирования изображения:

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty F(p)\,dp. \tag{16}$$

**Пример 3.** Найдите изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$.

**Решение.** Известно, что $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$, следовательно

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \frac{1}{p^2+1}\,dp = \mathrm{arctg} p\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} p.$$

**Пример 4.** Найдите изображение функции $\dfrac{\cos t - e^t}{t}$.

**Решение.** Известно, что $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$, $e^t \doteqdot \dfrac{1}{p-1}$.

Применим теорему интегрирования изображения:

$$\frac{\cos t - e^t}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p-1}\right)\,dp.$$

Вычислим инеграл от каждого слагаемого:

$$\int \frac{p}{p^2+1}\,dp = \frac{1}{2}\int \frac{d\,p^2}{p^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(p^2+1)}{p^2+1} = \ln\sqrt{p^2+1} + C,$$

$$\int \frac{1}{p-1}\,dp = \ln(p-1) + C.$$

Обратите внимание, что каждое из этих выражений является бесконечно большой величиной на бесконечности, но сложив мы получим вполне адекватное выражение:

$$\int\limits_p^\infty \left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p-1}\right)\,dp = \left(\ln\sqrt{p^2+1} - \ln(p-1)\right)\Big|_p^\infty = \ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p-1}\Big|_p^\infty =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1} - \ln \frac{\sqrt{p^2+1}}{p-1} = \ln 1 + \ln \frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}} = \ln \frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

В итоге,

$$\frac{\cos t - e^t}{t} \doteqdot \ln \frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$, тогда имеет место формула:

$$F(p) \cdot G(p) \doteqdot \int\limits_0^t f(u)g(t-u)\,du. \tag{17}$$

**Пример 5.** Вычислить оригинал для изображения $\dfrac{1}{p^4-1}$.

**Решение.** Преобразуем выражение и воспользуемся формулой (17):

$$\frac{1}{p^4-1} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2-1},$$

$$\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t, \quad \frac{1}{p^2-1} \doteqdot \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

$$\frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2-1} \doteqdot \int\limits_0^t \sin u \cdot \frac{e^{t-u} - e^{-t+u}}{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sin u \cdot e^{t-u}\,du - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sin u \cdot\ e^{-t+u}\,du =$$

$$= \frac{e^t}{2}\int\limits_0^t \sin u \cdot e^{-u}\,du - \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_0^t \sin u \cdot\ e^{u}\,du = (*)\text{запомним это}$$

$$= -\frac{e^t}{2}\int\limits_0^t \sin u de^{-u} - \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_0^t \sin u de^{u} =$$

$$= -\frac{e^t}{2}\left( e^{-u}\sin u \Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{-u} d\sin u \right) - \frac{e^{-t}}{2}\left( e^{u}\sin u \Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{u} d\sin u \right) =$$

$$= -\frac{e^t}{2}\left( e^{-t}\sin t - \int\limits_0^t e^{-u} \cos u du \right) - \frac{e^{-t}}{2}\left( e^{t}\sin t - \int\limits_0^t e^{u} \cos u du \right) =$$

$$= -\frac{\sin t}{2} + \frac{e^t}{2}\int\limits_0^t e^{-u}\cos u du - \frac{\sin t}{2} + \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_0^t e^{u}\cos u du =$$

$$= -\sin t - \frac{e^t}{2}\int\limits_0^t \cos u de^{-u} + \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_0^t \cos u de^{u} =$$

$$= -\sin t - \frac{e^t}{2}\left(e^{-u}\cos u\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{-u} d\cos u\right) + \frac{e^{-t}}{2}\left(e^{u}\cos u\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{u} d\cos u\right) =$$

$$= -\sin t - \frac{e^t}{2}\left(e^{-t}\cos t - 1 + \int\limits_0^t e^{-u}\sin u du\right) +$$

$$+\frac{e^{-t}}{2}\left(e^{t}\cos t - 1 + \int\limits_0^t e^{u}\sin u du\right) =$$

$$= -\sin t - \frac{\cos t}{2} + \frac{e^t}{2} - \frac{e^t}{2}\int\limits_0^t e^{-u}\sin u du + \frac{\cos t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_0^t e^{u}\sin u du =$$

$$= -\sin t + \frac{e^t - e^{-t}}{2} - \left(\frac{e^t}{2}\int\limits_0^t e^{-u}\sin u du - \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_0^t e^{u}\sin u du\right),$$

мы вернулись к исходному выражению $(*)$. Следовательно искомый интеграл $(*)$ можно выразить из равенства $(*) = -\sin t + \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} - (*)$:

$$\frac{e^t}{2}\int\limits_0^t \sin u \cdot e^{-u}\, du - \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_0^t \sin u \cdot\ e^{u}\, du = -\frac{\sin t}{2} + \frac{e^t - e^{-t}}{4} = -\frac{\sin t}{2} + \frac{\operatorname{sh} t}{2}.$$

Резюмируя, получаем

$$\frac{1}{p^4 - 1} \doteqdot -\frac{\sin t}{2} + \frac{\operatorname{sh} t}{2}.$$

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$, тогда имеет место следствие из формулы (17), расширяющее область применения формулы:

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \doteqdot \int\limits_0^t f'(u) g(t-u)\, du + f(0) \cdot g(t). \tag{18}$$

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \doteqdot \int\limits_0^t f(u) g'(t-u)\, du + g(0) \cdot f(t). \tag{19}$$

Каждая из формул (18) и (19) называется интеграл Дюамеля.

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$, тогда имеет место следующая теорема об умножении оригиналов:

$$f(t) \cdot g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) G(p-s) ds. \tag{20}$$

Операция

$$f(x) * g(x) = \int\limits_0^x f(t) g(x-t)\, dt,$$

используемая в формулах (17)-(19) называется **свёрткой** функций.

## Упражнения к занятию 5

Найдите изображения функций $\eta(t) f(t)$, используя теорему о дифференцировании изображения.

**5.1** $f(t) = t \cos 4t$. **5.2** $f(t) = t^2 \sin 3t$. **5.3** $f(t) = t^8 e^{9t}$.

Найдите оригинал функций, используя теорему о дифференцировании изображения.

**5.7** $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+4)^2}$. **5.8** $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}$. **5.9** $F(p) = \dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

Найдите оригинал функций, используя теорему об интегрировании изображения.

**7.1** $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t}$. **7.2** $f(t) = \dfrac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}$.

**7.3** $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$. **7.4** $f(t) = \dfrac{e^{-t} - \cos 2t}{t}$.

Найдите оригиналы функций, используя формулы (17)-(19).

**8.1** $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$. **8.2** $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

**8.3** $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$. **8.4** $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

Найдите решения интегральных уравнений.

**8.27** $\int\limits_0^t e^{t-u}x(u)\,du = t.$ **8.28** $\int\limits_0^t e^{t-u}x(u)\,du = te^t.$

**8.29** $\int\limits_0^t e^{-u}x(u)\,du = t.$ **8.30** $\int\limits_0^t \sin{(t-u)}x(u)\,du = t^3.$

# 6 Занятие 6. Теоремы разложения

**Первая теорема разложения.** Если функция $F(p)$ разложима в ряд Лорана, сходящийся к этой функции, то ряд, полученный почленным преобразованием слагаемых, является оригиналом $f(t)$ этой функции.

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}} \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!}. \tag{21}$$

**Пример.** Решите дифференциальное уравнение с данными начальными условиями

$$y' - y = x^2,\ y(0) = 0.$$

**Решение.** Найдём изображение правой и левой частей уравнения:

$$Yp - Y = \frac{2}{p^3}.$$

Найдём изображение решения:

$$Y = \frac{2}{p^3(p-1)}.$$

Представим изображение в виде степенного ряда, используя формулу суммы сходящейся геометрической прогрессии

$$Y = \frac{2}{p^4(1-1/p)} = \frac{2}{p^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{n+4}}.$$

Найдём оригинал каждого слагаемого получившегося ряда:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{n+4}} \doteqdot 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}.$$

Преобразуем полученный ряд:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+3)!} = 2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - 2 - 2x - x^2$$

Первое слагаемое представлет собой разложение экспоненты, следовательно искомое решение имеет вид

$$y(x) = 2e^x - 2 - 2x - x^2.$$

**Вторая теорема разложения.** Если изображение вляется дробно-рациональной функцией от $p$, т.е.

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

и $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ - простые или кратные полюсы этой функции, то оригинал $f(t)$, соответствующий $F(p)$ определяется формулой

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{n} res[F(p)e^{pt}, p_k].$$

**Следствие для простых полюсов.** Если изображение является дробно-рациональной функцией от $p$, т.е.

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

и $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ - простые полюсы этой функции, то оригинал $f(t)$, соответствующий $F(p)$ определяется формулой

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)e^{p_k t}}{B'(p_k)}.$$

**Пример.** Вычислить оригиналы изображений $X(p)$ и $Y(p)$:

$$X = \frac{1}{p^2(p^2-1)(p+2)}, \quad Y = \frac{(p^2+p-1)}{p^2(p-1)^2(p+2)}.$$

**Решение.** Полюсами функция $X(p)$ являются точки 0 (второго порядка), $\pm 1$ и 2 (простые полюсы). Следовательно по второй теореме разложения имеем:

$$\frac{1}{p^2(p^2-1)(p+2)} \doteqdot res[Xe^{pt}, 0] + res[Xe^{pt}, 1] + res[Xe^{pt}, -1] + res[Xe^{pt}, -2].$$

Вычислим все вышеупомянутые вычеты

$$res[Xe^{pt}, 0] = \lim_{p \to 0} \left( \frac{e^{pt} \cdot p^2}{p^2(p^2-1)(p+2)} \right)'_p = \lim_{p \to 0} \left( \frac{e^{pt}}{(p^2-1)(p+2)} \right)'_p =$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{te^{pt}(p^3+2p^2-p-2) - e^{pt}(3p^2+4p-1)}{((p^2-1)(p+2))^2} = \frac{-2t+1}{4};$$

$$res[Xe^{pt}, 1] = \lim_{p\to 1} \frac{e^{pt}(p-1)}{p^2(p^2-1)(p+2)} = \lim_{p\to 1} \frac{e^{pt}}{p^2(p+1)(p+2)} = \frac{e^t}{6};$$

$$res[Xe^{pt}, -1] = \lim_{p\to -1} \frac{e^{pt}(p+1)}{p^2(p^2-1)(p+2)} = \lim_{p\to -1} \frac{e^{pt}}{p^2(p-1)(p+2)} = -\frac{e^{-t}}{2};$$

$$res[Xe^{pt}, -2] = \lim_{p\to -2} \frac{e^{pt}(p+2)}{p^2(p^2-1)(p+2)} = \lim_{p\to -2} \frac{e^{pt}}{p^2(p^2-1)} = \frac{e^{-2t}}{12}.$$

Суммируя вычеты, найдём требуемый оригинал $x(t)$:

$$x(t) = \frac{-2t+1}{4} + \frac{e^t}{6} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{12}.$$

Полюсами функция $Y(p)$ являются точки 0, 1 (второго порядка) и 2 (простой полюс). Следовательно по второй теореме разложения имеем:

$$\frac{(p^2+p-1)}{p^2(p-1)^2(p+2)} \doteqdot res[Ye^{pt}, 0] + res[Ye^{pt}, 1] + res[Ye^{pt}, -2].$$

Найдём значения вычетов:

$$res[Y(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p\to 0} \left( \frac{(p^2+p-1)e^{pt}p^2}{p^2(p-1)^2(p+2)} \right)'_p = \lim_{p\to 0} \left( \frac{(p^2+p-1)e^{pt}}{p^3-3p+2} \right)'_p =$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{((2p+1)e^{pt} + t(p^2+p-1)e^{pt})(p^3-3p+2) - (p^2+p-1)e^{pt}(3p^2-3)}{(p^3-3p+2)^2} =$$

$$= \frac{(1+t\cdot(-1))\cdot 2 - (-1)\cdot(-3)}{2^2} = \frac{-2t-1}{4};$$

$$res[Y(p)e^{pt}, 1] = \lim_{p\to 1} \left( \frac{(p^2+p-1)e^{pt}(p-1)^2}{p^2(p-1)^2(p+2)} \right)'_p = \lim_{p\to 1} \left( \frac{(p^2+p-1)e^{pt}}{p^3+2p^2} \right)'_p =$$

$$= \lim_{p\to 1} \frac{((2p+1)e^{pt} + t(p^2+p-1)e^{pt})(p^3+2p^2) - (p^2+p-1)e^{pt}(3p^2+4p)}{(p^3+2p^2)^2} =$$

$$= \frac{(3e^t + te^t)\cdot 3 - e^t\cdot 7}{9} = \frac{e^t(2+3t)}{9};$$

$$res[Y(p)e^{pt}, -2] = \lim_{p\to -2} \frac{(p^2+p-1)e^{pt}(p+2)}{p^2(p-1)^2(p+2)} = \lim_{p\to -2} \frac{(p^2+p-1)e^{pt}}{p^2(p-1)^2} = \frac{e^{-2t}}{36}.$$

Суммируя вычеты, найдём требуемый оригинал $y(t)$:

$$y(t) = \frac{-2t-1}{4} + \frac{e^t(2+3t)}{9} + \frac{e^{-2t}}{36}.$$

## Упражнения к занятию 6

Найдите первые пять слагаемых разложения в степенной ряд по степеням $t$ функций-оригиналов, используя первую теорему разложения.

**9.1** $F(p) = \dfrac{1}{p^5+1}$.

**9.2** $F(p) = \dfrac{2p^2+1}{p^6-4}$.

**9.3** $F(p) = \sin\dfrac{1}{p^2}$.

**9.4** $F(p) = \dfrac{1}{(p^3+1)(p^2+1)}$.

Найдите оригиналы функций, используя вторую теорему разложения и её следствие.

**10.1** $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$.

**10.2** $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

**10.3** $F(p) = \dfrac{p(p-3)^2}{((p-3)^2-4)^2}$.

**10.4** $F(p) = \dfrac{p^2-2p}{(p^2-4p+3)^2}$.

**10.5** $F(p) = \dfrac{p^2+2p+1}{(p^2-2p)^2}$.

**10.6** $F(p) = \dfrac{(p-2)^3}{(p^2-4p+13)^2}$.

# Ответы, решения и указания

**Указание: 1.1-1.20** Аккуратно проверьте условия 1-3. В большинстве случаев нарушается непрерывность и показатель роста.

**1.1** Да. **1.2** Да. **1.3** Да. **1.4** Да. **1.5** Нет. **1.6** Нет. **1.7** Да. **1.8** Нет. **1.9** Нет. **1.10** Нет. **1.11** Да. **1.12** Да. **1.13** Нет. **1.14** Да. **1.15** Нет. **1.16** Нет. **1.17** Да. **1.18** Нет. **1.19** Нет. **1.20** Да.

**Указание: 1.21-1.40** Вычислите предел $F(p)$ на бесконечности.

**1.21** Нет. **1.22** Да. **1.23** Да. **1.24** Нет. **1.25** Да. **1.26** Нет. **1.27** Нет. **1.28** Да. **1.29** Да. **1.30** Да. **1.31** Да. **1.32** Да. **1.33** Нет. **1.34** Нет. **1.35** Да. **1.36** Нет. **1.37** Да. **1.38** Да. **1.39** Нет. **1.40** Да.

**2.1** $\dfrac{1-e^{-3p}}{p}$. **2.2** $\dfrac{1}{p^2+1}$. **2.3** $\dfrac{p(e^{-\pi p}+1)}{p^2+1}$. **2.4** $\dfrac{2}{p^3}$.

**2.5** Найдите изображение, используя непосредственное интегрирование (1), постройте график функции-оригинала: $f(t)=(\eta(t)-\eta(t-3))e^t$.

**Решение задания 2.5.** Построим график оригинала (рисунок N 2.5)).

$$f(t)=(\eta(t)-\eta(t-3))e^t=\begin{cases} e^t, & t\in(0;3);\\ 0, & t\notin(0;3).\end{cases}$$

Следовательно,

$$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt=\int\limits_0^3 e^t e^{-pt}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^3 e^{-(p-1)t}\,dt=-\frac{e^{-(p-1)t}}{p-1}\Bigg|_0^3=-\frac{e^{-3(p-1)}-1}{p-1}.$$

**2.6** $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p+1}$. **2.7** $\dfrac{e^3}{p-1}$. **2.8** $\dfrac{e^3(1-e^{-3(p-1)})}{p-1}$. **2.9** $\dfrac{e^{3p}+\cos 3+p\sin 3}{e^{3p}(p^2+1)}$.
**2.10** $\dfrac{3\cos 3+3p\sin 3}{e^{3p}(p^2+1)}$.

**2.11** Найдите изображения, используя непосредственное интегрирование (1), постройте график функции-оригинала:

$$f(t)=(\eta(t)-\eta(t-1))\cos t+(\eta(t-1)-\eta(t-2))\operatorname{ch} t.$$

**Чрезвычайно подробное решение 2.11.** График оригинала изображен на рисунке N 2.11). Вычислим значение интеграла (1). Разности функций Хевисайда со сдвигами позволяют записать одним выражением функцию, заданную различными формулами на различных участках:

$$f(t)=(\eta(t)-\eta(t-1))\cos t+(\eta(t-1)-\eta(t-2))\operatorname{ch} t=\begin{cases} \cos t, & t\in(0;1);\\ \operatorname{ch} t, & t\in(1;2)\\ 0, & t\notin(0;2).\end{cases}$$

Следовательно,

$$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt=\int\limits_0^1\cos te^{-pt}\,dt+\int\limits_1^2\operatorname{ch}te^{-pt}\,dt.$$

Вычислим первое слагаемое:

$$I_1=\int\limits_0^1\cos te^{-pt}\,dt=-\frac{1}{p}\int\limits_0^1\cos te^{-pt}\,d(-pt)=-\frac{1}{p}\int\limits_0^1\cos t d\,e^{-pt}=$$

$$=-\frac{1}{p}\left(\cos t\cdot e^{-pt}\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^{-pt}\,d\,\cos t\right)=$$

$$=-\frac{1}{p}\left(\cos 1\cdot e^{-p}-\cos 0\cdot e^0+\int\limits_0^1\sin t\cdot e^{-pt}\,d\,t\right)=$$

$$=-\frac{1}{p}\left(\frac{\cos 1}{e^p}-1-\frac{1}{p}\int\limits_0^1\sin t\cdot e^{-pt}\,d\,(-pt)\right)=$$

$$=-\frac{1}{p}\left(\frac{\cos 1}{e^p}-1-\frac{1}{p}\int\limits_0^1\sin t\,d\,e^{-pt}\right)=$$

$$=-\frac{1}{p}\left(\frac{\cos 1}{e^p}-1-\frac{1}{p}\left(\sin t\cdot e^{-pt}\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^{-pt}\,d\,\sin t\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{p}\left(\frac{\cos 1}{e^p}-1-\frac{1}{p}\left(\sin 1\cdot e^{-p}-\sin 0\cdot e^0-\int\limits_0^1 e^{-pt}\cdot\cos t\,dt\right)\right)=$$

$$=-\frac{\cos 1}{pe^p}+\frac{1}{p}+\frac{\sin 1}{p^2e^p}-\frac{1}{p^2}\int\limits_0^1 e^{-pt}\cdot\cos t\,dt=-\frac{\cos 1}{pe^p}+\frac{1}{p}+\frac{\sin 1}{p^2e^p}-\frac{1}{p^2}\cdot I_1.$$

Найдём искомый интеграл из полученного равенства:

$$I_1\left(1+\frac{1}{p^2}\right)=-\frac{\cos 1}{pe^p}+\frac{1}{p}+\frac{\sin 1}{p^2e^p},$$

$$I_1\cdot\frac{p^2+1}{p^2}=\frac{pe^p+\sin 1-p\cos 1}{p^2e^p},$$

$$I_1 = \frac{pe^p + \sin 1 - p\cos 1}{(p^2+1)e^p}.$$

Вычислим второе слагаемое:

$$I_2 = \int\limits_1^2 \operatorname{ch} t e^{-pt}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (e^t + e^{-t})e^{-pt}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 e^{t(1-p)}\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 e^{-(1+p)t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2(1-p)}\int\limits_1^2 e^{t(1-p)}\,d(1-p)t - \frac{1}{2(1+p)}\int\limits_1^2 e^{-(1+p)t}\,d(-(1+p)t) =$$

$$= \frac{e^{t(1-p)}}{2(1-p)}\bigg|_1^2 - \frac{e^{-t(1+p)}}{2(1+p)}\bigg|_1^2 = \frac{e^{2(1-p)} - e^{(1-p)}}{2(1-p)} - \frac{e^{-2(1+p)} - e^{-(1+p)}}{2(1+p)} =$$

$$= \frac{e^2}{2e^{2p}(1-p)} - \frac{e}{2e^p(1-p)} - \frac{e^{-2}}{2e^{2p}(1+p)} + \frac{e^{-1}}{2e^p(1+p)} =$$

$$= \frac{e^2(1+p)}{2e^{2p}(1-p^2)} - \frac{e\cdot(1+p)}{2e^p(1-p^2)} - \frac{e^{-2}\cdot(1-p)}{2e^{2p}(1-p^2)} + \frac{e^{-1}\cdot(1-p)}{2e^p(1-p^2)} =$$

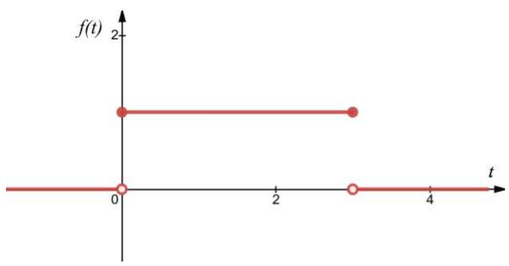
$$= \frac{(e^2-e^{-2})}{2e^{2p}(1-p^2)} + \frac{p\cdot(e^2+e^{-2})}{2e^{2p}(1-p^2)} - \frac{(e-e^{-1})}{2e^p(1-p^2)} - \frac{p\cdot(e+e^{-1})}{2e^p(1-p^2)} =$$

$$= \frac{\operatorname{ch} 2 + p\operatorname{sh} 2}{2e^{2p}(1-p^2)} - \frac{\operatorname{ch} 1 + p\operatorname{sh} 1}{2e^p(1-p^2)} = -\frac{\operatorname{ch} 2 + p\operatorname{sh} 2}{2e^{2p}(p^2-1)} + \frac{\operatorname{ch} 1 + p\operatorname{sh} 1}{2e^p(p^2-1)}.$$

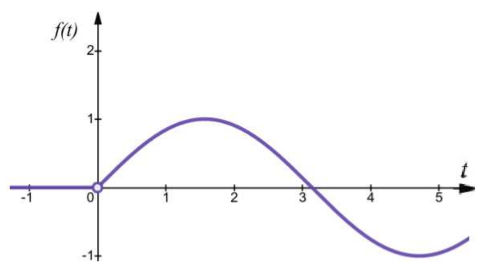
В итоге получаем:

$$F(p) = I_1 + I_2 = \frac{\sin 1 - p\cos 1}{e^p(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{\operatorname{sh} 1 + p\operatorname{ch} 1}{e^p(p^2-1)} - \frac{\operatorname{sh} 2 + p\operatorname{ch} 2}{e^{2p}(p^2-1)}.$$

**2.12** $\dfrac{e^p - 1 - p}{p^2\cdot e^p}\sum\limits_{n=0}^{10} e^{-pn}$. **2.13** $\sum\limits_{n=0}^{5}(\dfrac{(-1)^{n+1}(e^{-p-n}-1)}{e^{n^2+pn}(p+n)}$. **2.14** $\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{e^p-1}$.
**2.15** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(e^{-p-n}-1)}{e^{n^2+pn}(p+n)}$.




2.1)




2.2)

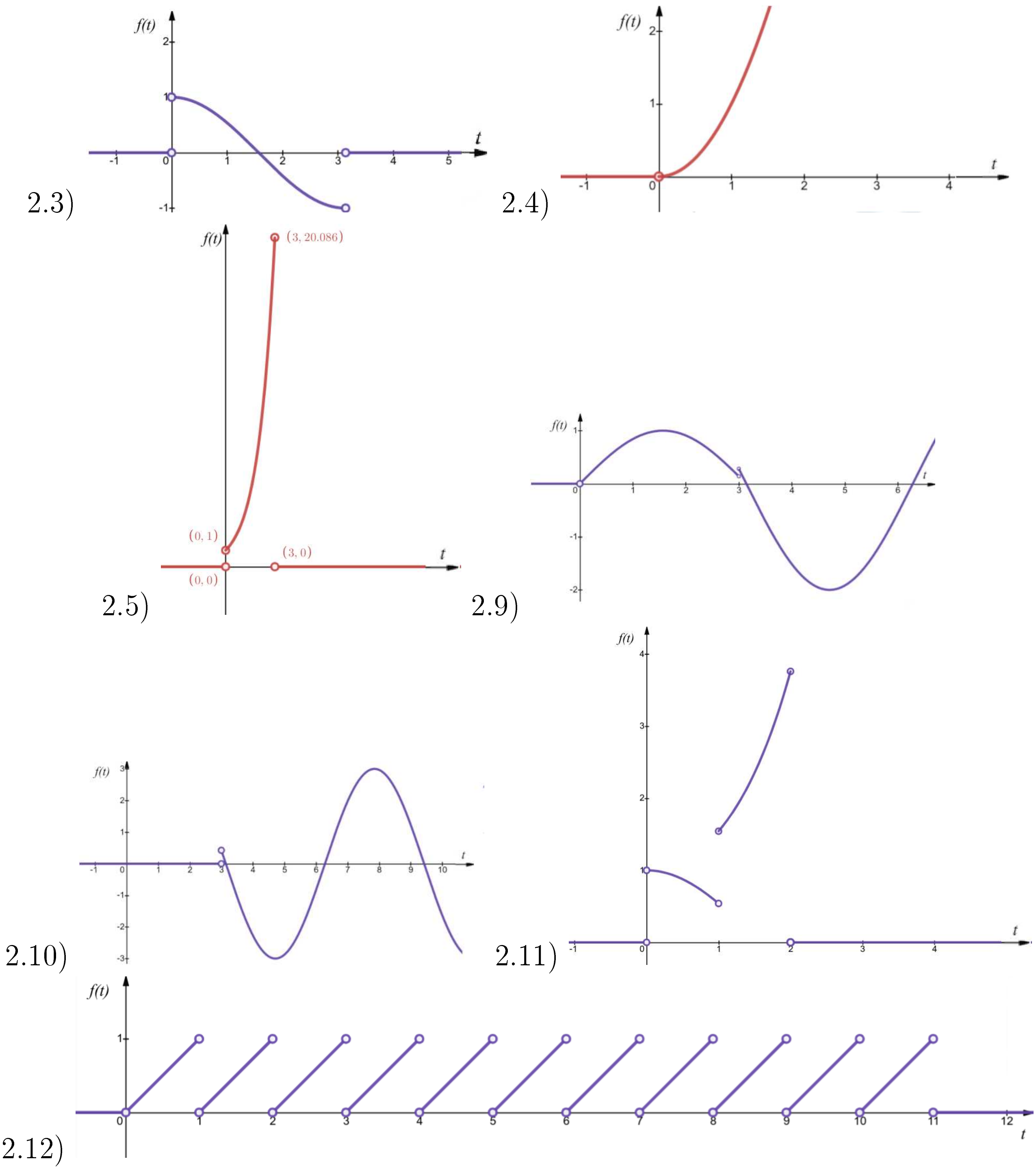


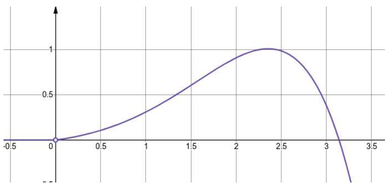
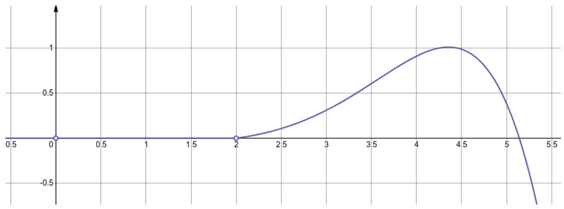

**Рисунок N** а) Графики функций 2.1-2.5, 2.9-2.12

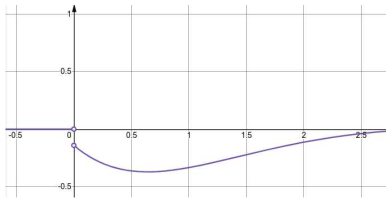
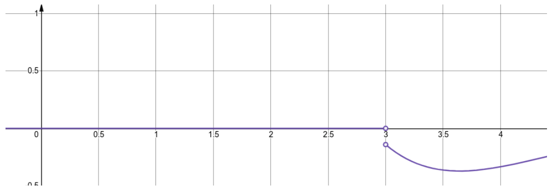
**2.16** $\dfrac{1}{2}t^2$. **2.17** $\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}2t$. **2.18** $\operatorname{ch}3t+\dfrac{1}{3}\operatorname{sh}3t$. **2.19** $\cos 2t-\dfrac{5}{2}\sin 2t$. **2.20** $1+t$.
**2.21** $\sin t+\operatorname{sh}t$. **2.22** $\cos t+\operatorname{sh}t$. **2.23** $1+\operatorname{sh}t$. **2.24** $\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}2t+\dfrac{1}{2}\cos 2t$.
**2.25** $\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}2t+\sin t-\dfrac{1}{2}\cos t$.

**3.1** $\dfrac{1}{(p-2)^2}$. **3.2** $\dfrac{3}{(p-2)^2+9}$. **3.3** $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p+1}{(p+1)^2+4}$. **3.4** $\dfrac{e^2(p+1)}{(p+1)^2-4}$.
**3.5** $\dfrac{e^6}{(p+2)^2}+\dfrac{2}{p^3}$. **3.6** $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{(p+2)^2+1}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{(p+2)^2+9}$. **3.7** $\dfrac{1}{(p-\ln 2)^2}$.

**3.8** $\dfrac{3}{(p-\ln 5)^2+9}$. **3.9** $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p+\ln 3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p+\ln 3}{(p+\ln 3)^2+4}$. **3.10** $\dfrac{9(p+\ln 3)}{(p+\ln 3)^2+4}$.

**3.11** $e^{2t}+\operatorname{sh}2t$. **3.12** $e^{4t}+e^{t}$. **3.13** $2e^{-5t}-e^{2t}$. **3.14** $-\dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{4}\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t$.
**3.15** $e^{t}\operatorname{ch}t$. **3.16** $e^{-2t}\left(\operatorname{ch}\sqrt{17}t-\dfrac{7}{\sqrt{17}}\operatorname{sh}\sqrt{17}t\right)$. **3.17** $1+\dfrac{7}{3}(e^{2t}-e^{5t})$.
**3.18** $-1-4e^{-4t}+6e^{-5t}$. **3.19** $\dfrac{3}{4}-\dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{4}e^{2t}$. **3.20** $5-2e^{t}-3e^{-t}$.

3.21 а)  3.21 б) 

3.22 а)  3.22 б) 

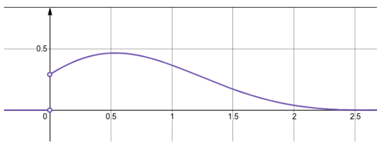
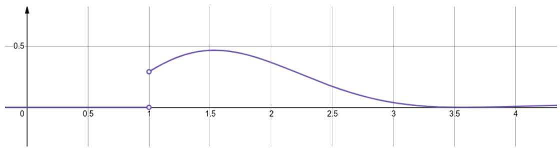
3.23 а)  3.23 б) 

**Рисунок N+1** а) Графики функций 3.21-3.23

**3.21** *а)* $f(t)=\eta(t)e^{t-2}\sin t$, *b)* $f(t)=\eta(t-2)e^{t-2}\sin t$.

**Решение задания 3.21.**

а) График оригинала изображен на рисунке N+1, 3.21 а). Преобразуем оригинал

$$\eta(t)e^{t-2}\sin t=\eta(t)e^{-2}e^{t}\sin t.$$

Используем свойство затухания (смещения) и свойство линейности:

$$\eta(t)\sin t\risingdotseq\frac{1}{p^2+1},$$

$$\eta(t)e^{t}\sin t\risingdotseq\frac{1}{(p-1)^2+1},$$

$$\eta(t)e^{-2}e^{t}\sin t\risingdotseq\frac{e^{-2}}{(p-1)^2+1}.$$

б) График оригинала изображен на рисунке N+1, 3.21 б).

Преобразуем оригинал

$$\eta(t-2)e^{t-2}\sin\left((t-2)+2\right)=\eta(t-2)e^{t-2}(\sin(t-2)\cos 2+\cos(t-2)\sin 2).$$

Используем свойство затухания и свойство линейности:

$$\eta(t)\sin t\risingdotseq\frac{1}{p^2+1},\quad \eta(t)\cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1},$$

$$\eta(t)e^t\sin t \risingdotseq \frac{1}{(p-1)^2+1}, \quad \eta(t)e^t\cos t \risingdotseq \frac{p-1}{(p-1)^2+1}.$$

Используем свойство запаздывания и свойство линейности:

$$\eta(t-2)e^{t-2}\sin(t-2)\cos 2 \risingdotseq \frac{e^{-2}e^{-2p}\cos 2}{(p-1)^2+1},$$

$$\eta(t-2)e^{t-2}\cos(t-2)\sin 2 \risingdotseq \frac{e^{-2}e^{-2p}(p-1)\sin 2}{(p-1)^2+1}.$$

В итоге получаем

$$\eta(t-2)e^{t-2}\sin t \risingdotseq \frac{e^{-2(p+1)}(\cos 2+(p-1)\sin 2)}{(p-1)^2+1}.$$

**3.22 а)** $\dfrac{\cos 3-(p+1)\sin 3}{(p+1)^2+1}$, **б)** $\dfrac{e^{-3(p+1)}}{(p+1)^2+1}$.
**3.23 а)** $\dfrac{1}{2(p+1)}+\dfrac{(p+1)\cos 2+2\sin 2}{(p+1)^2+4}$, **б)** $\dfrac{e^{-(p+1)}}{2(p+1)}+\dfrac{e^{-(p+1)}(p+1)}{2((p+1)^2+4)}$.
**3.24 а)** $\dfrac{e}{2(p-1)}+\dfrac{e^3}{2(p+3)}$, **б)** $\dfrac{e^{1.5-0.5p}(p+1)}{(p+1)^2+4}$.
**3.25 а)** $-\dfrac{e^6(9p^2+42p+34)}{(p+2)^3}$, **б)** $\dfrac{2e^{-3p}}{(p+2)^3}$. **3.26** Указание: используйте формулу для выражения куба синуса через синус и синус тройного аргумента.

**3.27** $\dfrac{t^2e^{2t}}{2}$. **3.28** $te^{2t}+\dfrac{5t^2e^{2t}}{2}$. **3.29** $e^t\cos 3t+\dfrac{2}{3}e^t\sin 3t$.
**3.30** $e^{-2t}\left(\cos 4t-\dfrac{7}{4}\sin 4t\right)$. **3.31** $e^t\operatorname{ch} t$. **3.32** $e^{-2t}\left(\operatorname{ch}\sqrt{17}t-\dfrac{7}{\sqrt{17}}\operatorname{sh}\sqrt{17}t\right)$.

**3.33** Найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^3-2p^2+10p}$.

**Решение задания 3.33.** Найдём разложение $F(p)$ на простейшие дроби методом неопределённых коэффициентов:

$$F(p)=\frac{p^2+1}{p^3-2p^2+10p}=\frac{p^2+1}{p(p^2-2p+10)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2-2p+10}=$$

$$=\frac{A(p^2-2p+10)+(Bp+C)p}{p^2-2p+10}=\frac{Ap^2-2Ap+10A+Bp^2+Cp}{p^2-2p+10}=$$

$$=\frac{p^2(A+B)+(-2Ap+C)p+10A}{p^2-2p+10},$$

откуда получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A+B &= 1,\\ -2A+C &= 0,\\ 2A &= 1. \end{cases}$$

Решая систему любым знакомым методом, получаем

$$A = 0.5,\ B = 0.5,\ C = 1.$$

Преобразуем исходное выражение:

$$F(p) = \frac{p^2+1}{p^3-2p^2+10p} = \frac{0.5}{p} + \frac{0.5p+1}{p^2-2p+10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p-1)^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(p-1)+3}{(p-1)^2+3^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+3^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{(p-1)^2+3^2}.$$

Первое слагаемое вычислим по формуле (2), для второго и третьего используем теорему смещения. В итоге получаем:

$$F(p) \risingdotseq \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot e^t\cdot\cos 3t + \frac{1}{2}\cdot e^t\cdot\sin 3t.$$

**3.34** $-\dfrac{1}{20}+\dfrac{e^{-2t}}{20}\cdot(21\cos 4t-\dfrac{69}{2}\sin 4t)$. **3.35** $e^{-t}\operatorname{ch} t-2e^{-t}\operatorname{sh} t$. **3.36** $te^t-2t^2e^t$. **3.37** $\dfrac{4-2e^{-4p}}{p}$. **3.38** $\dfrac{2p-e^{-2p}+e^{-4p}}{p^2}$. **3.39** $\dfrac{2(1-e^{-4p})}{p}-\dfrac{(1-e^{-2p})^2}{p^2}$.
**3.40** $\dfrac{2(e^{-4p}-1)}{p}+\dfrac{(1-e^{-2p})^2}{p^2}$.

**3.41** Найти изображение сигнала, заданного графически (рисунок TT)

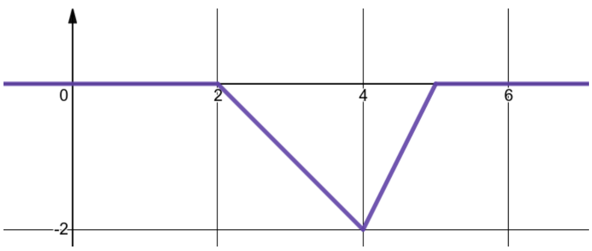



**Рисунок TT.** График оригинала к заданию 3.41

**Решение задания 3.41.** Запишем аналитически уравнение оригинала:

$$f(t) = (\eta(t-2)-\eta(t-4))(2-t) + (\eta(t-4)-\eta(t-5)(2t-10) =$$

$$= \eta(t-2)(2-t) - \eta(t-4)(2-t) + \eta(t-4)(2t-10) - \eta(t-5)(2t-10) =$$

$$= -\eta(t-2)(t-2) + \eta(t-4)(t-2+2t-10) - 2\eta(t-5)(t-5) =$$

$$= -\eta(t-2)(t-2) + 3\eta(t-4)(t-4) - 2\eta(t-5)(t-5) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -\frac{e^{-2p}}{p^2} + 3\frac{e^{-4p}}{p^2} - 2\frac{e^{-5p}}{p^2}.$$

**3.42** $-\dfrac{e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{e^{-4p}}{p^2}+2\dfrac{e^{-5p}}{p^2}$. **3.43** $\dfrac{e^{-2p}}{p^2}-4\dfrac{e^{-4p}}{p}+\dfrac{e^{-6p}}{p^2}+\dfrac{e^{-8p}}{p^2}-4\dfrac{e^{-10p}}{p}+\dfrac{e^{-12p}}{p^2}$.
**3.44** $\dfrac{1-p}{p^2}-\dfrac{2}{p(e^{2p}-1)}$. **3.45** $\dfrac{1}{p^2+1}\cdot\dfrac{e^{\pi p}+1}{e^{\pi p}-1}$. **3.46** $\dfrac{e^{-3p}+e^{-2p}-e^{-p}+1}{p^2(1-e^{-3p})}$.
**3.47** $\dfrac{2e^{-3p}-3e^{-2p}+1}{p^2(1-e^{-3p})}$.

**4.1** $\dfrac{p^2+72}{p(p^2+64)}$. **4.2** $\dfrac{6}{((p-2)^2+36)(p-2)}$. **4.3** $\operatorname{sh} t$. **4.4** $3\operatorname{sh} t+2\operatorname{ch} t$.
**4.5** $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{t}{2}+\dfrac{e^{2t}}{4}$. **4.6** $1-\cos t$. **4.7** $1-t+\dfrac{t^2}{2}-e^{-t}$. **4.8** $-\dfrac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t)$.
**4.9** $-\dfrac{1}{15}e^{-2t}+\dfrac{1}{18}e^{-3t}+\dfrac{1}{90}e^{3t}$. **4.10** $\sin t+e^t$. **4.11** $e^{3t/2}(\operatorname{ch}(t/2)+\operatorname{sh}(t/2))$.
**4.12** $1-\dfrac{1}{3}e^{-t}-\dfrac{2}{3}e^{-t/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}t}{2}+\sqrt{3}e^{-t/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}t}{2}$.

**4.13** $x=2\operatorname{ch} t,\ y=-2\operatorname{sh} t$. **4.14** $x=e^{-2t}-2e^{-2t}t,\ y=e^{-2t}+2e^{-2t}t$.
**4.15** $x=e^t\operatorname{ch} t,\ y=e^t\operatorname{sh} t$. **4.16** $x=1-t^2,\ y=-t-\dfrac{t^2}{2},\ z=-1+t+\dfrac{t^2}{2}$.

**5.1** $\dfrac{p^2-16}{(p^2+16)^2}$. **5.2** $\dfrac{18p^2-54}{(p^2+9)^3}$. **5.3** $\dfrac{7!}{(p-9)^8}$. **5.4** $\dfrac{6(p-2)^2-2}{((p-2)^2+1)^3}$.

**5.5** Найдите изображение функции $\eta(t)t^2\cos^2 t$.

**Решение.** Найдём изображение $\cos^2 t$, используя формулу (13):

$$g(t)=\cos^2 t,\quad g'(t)=-2\cos t\sin t=-\sin 2t,$$

$$g'(t)\risingdotseq pG(p)-g(0),$$

$-\sin 2t\risingdotseq-\dfrac{2}{p^2+4}$ – с одной стороны,
$-\sin 2t\risingdotseq pG(p)-\cos^2 0$ – с другой стороны.
Следовательно,

$$pG(p)=1-\frac{2}{p^2+4}=\frac{p^2+2}{p^2+4},$$

$$G(p)=\frac{p^2+2}{p^3+4p}.$$

Найдём изображение $\eta(t)t^2\cos^2 t$, используя формулу (14).

$$F(p)=\left(\frac{p^2+2}{p^3+4p}\right)''=\left(\frac{2p(p^3+4p)-(3p^2+4)(p^2+2)}{(p^3+4p)^2}\right)'=$$

$$=\left(\frac{-p^4-2p^2-8}{(p^3+4p)^2}\right)'=\frac{(-4p^3-4p)(p^3+4p)+2(3p^2+4)(p^4+2p^2+8)}{(p^3+4p)^3}=$$

$$=\frac{2p^6+48p^2+64}{(p^3+4p)^3}.$$

**5.6** $\dfrac{6(p-1)^2-2}{((p-1)^2+1)^3}$. **5.7** $\dfrac{t}{4}\sin 2t$. **5.8** $\dfrac{1}{2}\sin 2t - 2t\sin 2t$. **5.9** $\cos t - \dfrac{1}{2}t\sin t$.

**6.1** $\dfrac{t^2e^{2t}}{4} - \dfrac{te^{2t}}{4} + \dfrac{e^{2t}-1}{8}$. **6.2** $\dfrac{5t^2e^{2t}}{4} - \dfrac{3te^{2t}}{4} + \dfrac{3(e^{2t}-1)}{8}$.

**6.3** $\dfrac{e^t}{10}\left(\dfrac{11}{3}\sin 3t - \cos 3t\right) + \dfrac{1}{10}$. **6.4** $\dfrac{e^{-2t}}{14}\left(\dfrac{9}{4}\sin 4t + 8\cos 4t\right) + \dfrac{3}{7}$.

**6.5** $\dfrac{e^{2t}}{8} + \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{8}$.

**6.6** Найдите оригинал функции $F(p) = \dfrac{p-5}{p^3+4p^2-13p}$.

**Решение.** Найдём оригинал функции $\dfrac{p-5}{p^2+4p-13}$:

$$\frac{p-5}{p^2+4p-13} = \frac{p-5}{(p+2)^2-17} = \frac{p+2}{(p+2)^2-17} - \frac{7}{\sqrt{17}}\cdot\frac{\sqrt{17}}{(p+2)^2-17} \doteqdot$$

$$\doteqdot e^{-2t}\operatorname{ch}\sqrt{17}t - \frac{7}{\sqrt{17}}e^{-2t}\operatorname{sh}\sqrt{17}t.$$

По теореме о дифференцировании оригинала,

$$\frac{p-5}{p^3+4p^2-13p} = \frac{p-5}{p(p^2+4p-13)} \doteqdot \int\limits_0^t \left(e^{-2t}\operatorname{ch}\sqrt{17}t - \frac{7}{\sqrt{17}}e^{-2t}\operatorname{sh}\sqrt{17}t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(e^{-2t}(e^{\sqrt{17}t} + e^{-\sqrt{17}t}) - \frac{7}{\sqrt{17}}e^{-2t}(e^{\sqrt{17}t} - e^{-\sqrt{17}t})\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(e^{(\sqrt{17}-2)t} + e^{-(\sqrt{17}+2)t} - \frac{7}{\sqrt{17}}e^{(\sqrt{17}-2)t} + \frac{7}{\sqrt{17}}e^{-(\sqrt{17}+2)t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(e^{(\sqrt{17}-2)t}\cdot\frac{\sqrt{17}-7}{\sqrt{17}} + e^{-(\sqrt{17}-2)t}\cdot\frac{\sqrt{17}+7}{\sqrt{17}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^{(\sqrt{17}-2)t}\cdot\frac{\sqrt{17}-7}{\sqrt{17}(\sqrt{17}-2)}\Bigg|_0^t - \frac{1}{2}\cdot e^{-(\sqrt{17}+2)t}\cdot\frac{\sqrt{17}+7}{\sqrt{17}(\sqrt{17}+2)}\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^{(\sqrt{17}-2)t}\cdot\frac{\sqrt{17}-7}{\sqrt{17}(\sqrt{17}-2)} - \frac{1}{2}\cdot e^{-(\sqrt{17}+2)t}\cdot\frac{\sqrt{17}+7}{\sqrt{17}(\sqrt{17}+2)} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}-7}{\sqrt{17}(\sqrt{17}-2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}+7}{\sqrt{17}(\sqrt{17}+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^{(\sqrt{17}-2)t}\cdot\frac{(\sqrt{17}-7)(\sqrt{17}+2)}{\sqrt{17}(\sqrt{17}^2-2^2)} - \frac{1}{2}\cdot e^{-(\sqrt{17}+2)t}\cdot\frac{(\sqrt{17}+7)(\sqrt{17}-2)}{\sqrt{17}(\sqrt{17}^2-2^2)} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{17}-7)(\sqrt{17}+2)-(\sqrt{17}+7)(\sqrt{17}-2)}{\sqrt{17}(\sqrt{17}+2)(\sqrt{17}-2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^{(\sqrt{17}-2)t}\cdot\frac{3-5\sqrt{17}}{13\sqrt{17}} - \frac{1}{2}\cdot e^{-(\sqrt{17}+2)t}\cdot\frac{3+5\sqrt{17}}{13\sqrt{17}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-10\sqrt{17}}{13\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{1}{26\sqrt{17}}\left((3-5\sqrt{17})e^{(\sqrt{17}-2)t} - (3+5\sqrt{17})e^{-(\sqrt{17}+2)t}\right) + \frac{5}{13}.$$

**6.7** $\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot e^t\cdot\cos 3t + \frac{1}{2}\cdot e^t\cdot\sin 3t$. **6.8** $-\frac{1}{20} + \frac{e^{-2t}}{20}\cdot(21\cos 4t - \frac{69}{2}\sin 4t)$. **6.9** $e^{-t}\operatorname{ch} t - 2e^{-t}\operatorname{sh} t$. **6.10** $-2e^t t^2 + 9e^t t - 14e^t + 14$.

**7.1** $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{4}{p^2}\right)$. **7.2** $\frac{1}{4}(1-p)\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)$. **7.3** $\frac{1}{2}(1-p)\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)$.
**7.4** $\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{|p+1|}$. **7.5** $\ln\frac{|p+2|}{|p+1|}$. **7.6** $\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{|p+2|}$. **7.7** $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{p}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{p}{2}$.
**7.8** $\frac{1}{4}(\pi - 3\operatorname{arctg}p + \operatorname{arctg}\frac{p}{3})$. **7.9** $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+25}{p^2+1}$. **7.10** $-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}p - \operatorname{arctg}\frac{p}{3})$.

**8.1** $e^{2t}-e^t$. **8.2** $\frac{\sin t}{3}-\frac{\sin 2t}{6}$. **8.3** $\frac{\cos t}{3}-\frac{\cos 2t}{3}$. **8.4** $\frac{2\sin 2t}{3}-\frac{\sin t}{3}$.
**8.5** $\frac{1}{12}\left(e^{2t}-e^{-2t}-e^t+2e^{-t}\right)$. **8.6** $\frac{1}{6}\left(e^{2t}+e^{-2t}-e^t-e^{-t}+3\right)$.
**8.7** $\frac{1}{6}\left(2e^{2t}-2e^{-2t}-e^t+e^{-t}\right)$. **8.8** $\frac{1}{20}\left(e^{2t}-e^{-2t}-4\sin t\right)$.
**8.9** $\frac{1}{10}\left(e^{2t}+e^{-2t}-4\cos t\right)$. **8.10** $\frac{1}{5}\left(e^{2t}-e^{-2t}+\sin t\right)$. **8.11** $\frac{\sin t}{2}-\frac{t\cos t}{2}$.
**8.12** $\frac{t\sin t}{2}$. **8.13** $\frac{1}{16}(2t\operatorname{ch}2t-\operatorname{sh}t)$. **8.14** $\frac{1}{4}t\operatorname{sh}t$. **8.15** $\frac{1}{2}(t\operatorname{ch}2t+\operatorname{sh}2t)$.
**8.16** $t\operatorname{sh}2t+\operatorname{ch}2t$. **8.17** $\frac{te^{2t}}{4}+\frac{3}{8}\operatorname{sh}2t$. **8.18** $-\frac{te^{-t}}{3}+\frac{2e^{-t}}{9}+\frac{e^{2t}}{36}-\frac{e^{-2t}}{4}$.

**8.19** Вычислить оригинал $F(p) = \frac{p}{(p^2+4p+3)(p^2-4p+4)}$.

**Решение.** Воспользуемся формулой Дюамеля (18) предварительно преобразовав изображение и вычислив оригиналы сомножителей:

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4p+3)(p^2-4p+4)} = p\cdot\frac{1}{p^2+4p+5}\cdot\frac{1}{p^2-4p+4} =$$

$$= p\cdot\frac{1}{(p+2)^2-1}\cdot\frac{1}{(p-2)^2},$$

$$\frac{1}{(p+2)^2-1} \doteqdot e^{-2t}\operatorname{sh}t = e^{-2t}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}),$$

$$\frac{1}{(p-2)^2} \doteqdot te^{2t},$$

Вот на этом этапе, когда мы опознали оригиналы сомножителей, важно не спешить и вдумчиво на них посмотреть. Вы можете выбрать, кто из них будет выполнять обязанности $f$ (и будет продифференцирован), а кто $g$ из формулы (19). В большинстве случаев дифференцировать приятнее сумму, чем произведение. С другой стороны, аргумент оригинала второго сомножителя будет сдвинут – в случае с тригонометрией это не очень приятно. В нашем случае, принципиальной разницы нет.

$$p \cdot \frac{1}{(p+2)^2-1} \cdot \frac{1}{(p-2)^2} \doteqdot \int\limits_0^t \frac{(e^{-u}-e^{-3u})'}{2} \cdot (t-u)e^{2(t-u)}\,du - \frac{e^0-e^0}{2}te^{2t} =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\int\limits_0^t (-e^{-u}+3e^{-3u})(t-u)e^{-2u}\,du = \frac{e^{2t}}{2}\int\limits_0^t (-e^{-3u}+3e^{-5u})(t-u)\,du =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\left(-t\int\limits_0^t e^{-3u}\,du + \int\limits_0^t ue^{-3u}\,du + 3t\int\limits_0^t e^{-5u}\,du - 3\int\limits_0^t ue^{-5u}\,du\right) =$$

$$= [\text{интегрируем по частям для второго и четвёртого слагаемых }] =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\left(\frac{te^{-3u}}{3}\Big|_0^t - \frac{1}{3}\int\limits_0^t u\,de^{-3u} - \frac{3te^{-5u}}{5}\Big|_0^t + \frac{3}{5}\int\limits_0^t u\,de^{-5u}\right) =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\left(\frac{te^{-3t}-t}{3} - \frac{1}{3}\left(ue^{-3u}\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{-3u}\,du\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3te^{-5t}-3t}{5} + \frac{3}{5}\left(ue^{-5u}\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{-5u}\,du\right)\right) =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\left(\frac{te^{-3t}-t}{3} - \frac{1}{3}\left(te^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-3u}\Big|_0^t\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3te^{-5t}-3t}{5} + \frac{3}{5}\left(te^{-5t} + \frac{1}{5}e^{-5u}\Big|_0^t\right)\right) =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\left(-\frac{t}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(e^{-3t} - 1)\right) + \frac{3t}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}(e^{-5t} - 1)\right)\right) =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\left(\frac{4t}{15} - \frac{2}{225} - \frac{e^{-3t}}{9} + \frac{3e^{-5t}}{25}\right) = \frac{2te^{2t}}{15} - \frac{e^{2t}}{225} - \frac{e^{-t}}{18} + \frac{3e^{-3t}}{50}.$$

**8.20** $-\dfrac{13}{104}e^t + \dfrac{25}{104}e^{5t} - \dfrac{2}{26}\sin t - \dfrac{3}{26}\cos t$. **8.21** $\dfrac{e^{2t}}{16}(\sin 2t - 2\cos 2t)$.
**8.22** $\dfrac{te^t \sin t}{4}$. **8.23** $\dfrac{5te^{5t}}{4} + \dfrac{te^t}{4} + \dfrac{7e^{5t}}{8} + \dfrac{e^t}{8}$. **8.24** $\dfrac{3te^{3t}}{4} - \dfrac{te^t}{4} + \dfrac{e^{3t}}{4} - \dfrac{e^t}{4}$.
**8.25** $\dfrac{9te^{2t}}{4} - \dfrac{3e^{2t}}{4} + \dfrac{t+3}{4}$. **8.26** $e^{2t}(\cos 3t - 1,5\sin 3t)$.

**8.27** $x(t) = 1 - t$. **8.28** $x(t) = e^t$. **8.29** $x(t) = e^t$. **8.30** $x(t) = 6t + t^3$.
**8.31** $x(t) = \cos t - \sin t$. **8.32** $x(t) = t$. **8.33** $x(t) = 1 + t^2/2$. **8.34** $x(t) = 6t - t^3$.
**8.35** $x(t) = 1,5t^2 - t^3 \ln 2$. **8.36** $x(t) = 2^t$.

**9.1** $f(t) = \dfrac{t^4}{4!} - \dfrac{t^9}{9!} + \dfrac{t^{14}}{14!} - \dfrac{t^{19}}{19!} + \dfrac{t^{24}}{24!} - \dots.$

**9.2** Используя теорему разложения найдите первые пять членов разложения функции-оригинала в степенной ряд по степеням $t$, если $F(p) = \dfrac{2p^2+1}{p^6-4}$.

**Решение задания 9.2.** Преобразуем выражение, разбив на два слагаемых:

$$F(p) = \frac{2p^2+1}{p^6-4} = 2 \cdot \frac{p^2}{p^6-4} + \frac{1}{p^6-4}.$$

Сумма убывающей геометрической прогрессии имеет вид

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \ |q| < 1. \qquad (*)$$

План дальнейших действий таков:
1) преобразуем каждое слагаемое $F(p)$ так, чтобы формулу суммы геометрической прогрессии можно было применить, т.е. знаменатель должен быть достаточно маленьким (а $p$ у нас, как известно таковым не является и бесконечно растёт);
2) каждое подготовленное на предыдущем шаге слагаемое разложим в ряд;
3) сгруппируем слагаемые, упорядочивая по старшинству степеней (нас интересуют первые пять);
4) найдём оригинал каждого слагаемого используя формулу $\dfrac{1}{p^n} \risingdotseq \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$.

$$F(p) = 2 \cdot \frac{p^2}{p^6\left(1 - \frac{4}{p^6}\right)} + \frac{1}{p^6\left(1 - \frac{4}{p^6}\right)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{p^4}\left(1 + \frac{4}{p^6} + \frac{16}{p^{12}} + \frac{64}{p^{18}} + ...\right) + \frac{1}{p^6}\left(1 + \frac{4}{p^6} + \frac{16}{p^{12}} + \frac{64}{p^{18}} + ...\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{p^4} + \frac{8}{p^{10}} + \frac{32}{p^{16}} + \frac{128}{p^{22}} + ...\right) + \left(\frac{1}{p^6} + \frac{4}{p^{12}} + \frac{16}{p^{18}} + \frac{64}{p^{24}} + ...\right) =$$

$$= \frac{2}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \frac{8}{p^{10}} + \frac{4}{p^{12}} + \frac{32}{p^{16}} + ... \doteqdot \frac{2t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{8t^9}{9!} + \frac{4p^{11}}{11!} + \frac{32t^{15}}{15!} + ....$$

**9.3** $f(t) = t - \frac{t^5}{3!5!} + \frac{t^9}{5!9!} - \frac{t^{13}}{7!13!} + \frac{t^{17}}{9!17!} + ....$

**9.4** Найдите первые пять членов разложения функции-оригинала в степенной ряд по степеням $t$, если $F(p) = \dfrac{1}{(p^3+1)(p^2+1)}$.

**Решение задания 9.4.** Преобразуем $F(p)$ так, чтобы формулу суммы геометрической прогрессии $(*)$ можно было применить:

$$F(p) = \frac{1}{p^3\left(1+\dfrac{1}{p^3}\right)} \cdot \frac{1}{p^2\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{p^3}\left(1 - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^6} - \frac{1}{p^9} + ...\right) \cdot \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^6} + ...\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^9} - \frac{1}{p^{12}} + ...\right) \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} - \frac{1}{p^8} + ...\right) =$$

[задания подобного типа, где требуется найти несколько первых слагаемых, не требуют владения техникой умножения рядов, здесь достаточно терпеливо сгруппировать несколько слагаемых]

$$= \frac{1}{p^3} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} - \frac{1}{p^8} + ...\right) - \frac{1}{p^6} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} - \frac{1}{p^8} + ...\right) +$$

$$+\frac{1}{p^9} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} - \frac{1}{p^8} + ...\right) + ... = \frac{1}{p^5} - \frac{1}{p^7} - \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^9} + \frac{1}{p^{10}} ... \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{p^8}{8!} + \frac{t^9}{9!} + ....$$

**9.5** $f(t) = \frac{3t^3}{3!} - \frac{16t^5}{5!} + \frac{61t^7}{7!} - \frac{16t^9}{9!} + \frac{61t^{11}}{11!} + ....$

**9.6** $f(t) = 1 + \frac{t^2}{2 \cdot 2!} + \frac{3t^4}{8 \cdot 4!} + \frac{5t^6}{16 \cdot 6!} + \frac{35t^8}{128 \cdot 8!} + ....$

**9.7** Найдите первые пять членов разложения функции-оригинала в степенной ряд по степеням $t$, если $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p^4+p^2+1}}$.

**Решение задания 9.7.** Преобразуем исходное выражение, руководствуясь следующей логикой:

1) при разложении в степенной ряд в нашем задании, аргументом функции должно быть выражение вида $\dfrac{1}{p^a}$ ;
2) многочлен в знаменателе содержит слишком много слагаемых, требуется сгруппировать это выражение так, чтобы была применима какая-либо табличная формула для разложения функции в степенной ряд;
3) так как в выражении присутствует квадратный корень, то уместно применить известную формулу

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + ..., \quad |x| < 1. \quad (**)$$

Итак, выполним ряд преобразований:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^4+p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(p^6-1)/(p^2-1)}} = \frac{\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{p^6-1}} =$$

$$= \frac{p\sqrt{1-\dfrac{1}{p^2}}}{p^3\sqrt{1-\dfrac{1}{p^2}}} = \frac{1}{p^2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{p^6}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

[применим (**) к сомножителям и выделим первые слагаемые произведения]

$$= \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{p^2}\right)^2\frac{1}{2!} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{p^2}\right)^3\frac{1}{3!} + ...\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{p^6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{p^6}\right)^2\frac{1}{2!} + ...\right) =$$

$$= \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{8p^4} - \frac{1}{16p^6} - ...\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2p^6} + \frac{3}{8p^{12}} + \frac{5}{16p^{18}} - ...\right) =$$

[вычислим произведение, выделяя первые слагаемые разложения]

$$= \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{1}{2p^6} + \frac{3}{8p^{12}} + \frac{5}{16p^{18}} - ...\right) - \frac{1}{2p^4}\left(1 + \frac{1}{2p^6} + \frac{3}{8p^{12}} + ...\right) -$$

$$-\frac{1}{8p^6}\left(1 + \frac{1}{2p^6} + ...\right) - \frac{1}{16p^8}\cdot\left(1 + \frac{1}{2p^6} + \frac{3}{8p^{12}} + ...\right) ... =$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2p^4} - \frac{1}{8p^6} + \frac{1}{p^8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4p^{10}} + ... =$$

[преобразуем и найдём оригиналы]

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2p^4} - \frac{1}{8p^6} + \frac{7}{16p^8} - \frac{1}{4p^{10}} + ... \risingdotseq t - \frac{t^3}{2\cdot 3!} - \frac{t^5}{8\cdot 5!} + \frac{7t^7}{16\cdot 7!} - \frac{t^9}{4\cdot 9!} + ....$$

**9.8** $f(t) = t + \dfrac{t^5}{4 \cdot 5!} + \dfrac{5t^9}{32 \cdot 9!} + \dfrac{15t^{13}}{128 \cdot 14!} + \dfrac{195t^{17}}{2048 \cdot 17!} + ....$

**10.1** $f(t) = e^{2t} - e^t$. **10.2** $f(t) = \dfrac{\sin t}{3} - \dfrac{\sin 2t}{6}$.

**10.3** $f(t) = \dfrac{5te^{5t}}{4} + \dfrac{te^t}{4} + \dfrac{7e^{5t}}{8} + \dfrac{e^t}{8}$.. **10.4** $f(t) = \dfrac{3te^{3t}}{4} - \dfrac{te^t}{4} + \dfrac{e^{3t}}{4} - \dfrac{e^t}{4}$.

**10.5** $f(t) = \dfrac{9te^{2t}}{4} - \dfrac{3e^{2t}}{4} + \dfrac{t+3}{4}$. **10.6** $f(t) = e^{2t}(\cos 3t - 1,5 \sin 3t)$.

**10.7** $f(t) = \dfrac{te^{2t}}{4} + \dfrac{3}{8} \operatorname{sh} 2t$. **10.8** $f(t) = \dfrac{1}{20}\left(e^{2t} - e^{-2t} - 4\sin t\right)$.

**10.9** $f(t) = \dfrac{2te^{2t}}{15} - \dfrac{e^{2t}}{225} - \dfrac{e^{-t}}{18} + \dfrac{3e^{-3t}}{50}$. **10.10** $f(t) = \dfrac{e^{2t}}{16}(\sin 2t - 2\cos 2t)$.