工程數學(一) 報告　　F74091247 歐長諺

主題: 利用灰色理論來預測股市指數

(一) 背景介紹:

在工程數學這門學科裡教授了許多的知識和理論，像是有常微分方程、傅立葉分析、向量分析、偏微分方程、複變函數等等，其中在各領域最常用到的就是傅立葉分析，舉凡通訊工程、金融工程、軟體工程幾乎都可以看到傅立葉分析實際的應用，在通訊工程中，會利用傅立葉轉換來分析一個訊號，並將其作濾波(去掉雜訊)或者是改變訊號的組成等等，那在軟體工程之中常見的做法就是拿來做影像處理，舉反任何一種圖片都可以用傅立葉級數來表示，像是人臉輪廓等就是比較低頻的訊號，皺紋就是用高頻的訊號來表示，所以像現在流行的濾鏡就是將那些高頻的部分去除掉在做轉換，此外還有很多的應用。

那有關金融工程的應用就是會用在股市分析了，但也不是所有的金融專家都會利用傅立葉分析來分析股市的情況，在股市價格的預測主要有兩大派，一派認為股市是無法預測，因為股市本身就是人類自己制定出來的一個虛擬市場，所以有人為操作的空間，目前任何的數學理論還沒有辦法去計算人心，另外一派則是認為股市的價格是可以預測，因為只要交易量足夠大，價格的走勢就可以透過數學裡的迴歸分析來處理，股市分析的手段有很多種，有基本面、技術面、籌碼面等等，我就從技術面的方向來分析，指涉及到利用過去的數據來預測未來的價格。

(二) 問題描述:

最近看到新聞發現台股一直在漲，像上個月有破一萬八，這幾天又破一萬七，這讓我思考說這些情形有沒有辦法利用數學分析來進行預測。剛好找到有幾篇論文就有說到如何利用傅立葉轉換來做選擇權交易，不過因為選擇權交易的情形比較複雜，所以我換個想法，能不能來預測未來的台股指數。

主要目的: 預測接下來五天的台股指數的收盤價。

(三) 解決方法:

首先這邊我要先講到一個概念就是灰色理論，灰色理論的全名叫灰色系統理論，是有關於訊息的不完全或不確定，在控制理論中我們常用黑色和白色，訊息完全不明確的系統稱為黑色系統，相反的完全明確的就叫做白色系統，灰色

系統就是介於這兩者之間，屬於部分訊息明確、部分不明確的系統。

我接下來所要使用的數學模型是 GM(1,1)，它是一種一階線性的灰色預測模型，可以對現有的數據進行預測，好處是製需要幾點的數據就能做預測，大大降低計算的複雜度，缺點是只能對中短期的數據進行預測，用來進行長期的預測會失準。

以下是 GM(1,1)的五大特點

1. 預測所需數據少
2. 計算步驟不複雜
3. 可簡化資料蒐集工作
4. 適用中、短期的預測

以下會用到的數學概念:

- 最小平方法:

  找不到可解析解，所以只能找到最靠近解析解的近似解

- 傅立葉級數:

  透過它來修正找出來的近似解

- 一階常微分方程:

  將數列通式的給找出

我選擇的實驗對象是台股指數，理由有下:

(1) 為各公司的加權指，人為操控的因素較小。
(2) 交易單量的基數夠大，某些行為會趨近於某種自然規律(函數)。
(3) 值得分析的一種指數，可以用來進行選擇權交易的參考

以下是計算過程:

令 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \ldots, x^{(0)}(n)\}$ 為一初始非負資料數列，經一次 AGO 後得 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \ldots, x^{(1)}(n)\}$

定義 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)$

$\therefore\ x^{(0)}(1)=x^{(1)}(1)$

$x^{(1)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1),\quad k=2,3,\ldots,n$

由於數列 $X^{(1)}$ 是經由 $X^{(0)}$ 累加得到的，$X^{(1)}$ 可視為具有指數的行為，所以可以用一個一階 ODE 來近似數列 $X^{(1)}$ 的行為

可求得灰色的差分方程：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b\quad(a, b\in\mathbb{R})$$

解此微分方程得：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}$$

$\hat{x}^{(1)}$ 表示 $x^{(1)}$ 的預測值，If $C=[a, b]^T$

$C$ 的最佳解為 $C=(B^TB)^{-1}B^TY$

$$Y=[x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \ldots, x^{(0)}(n)]^T$$

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(1)) & 1\\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(3)+x^{(1)}(2)) & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}\left(x^{(1)}(n)+x^{(1)}(n-1)\right) & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}(k)$$

接下來要做傅立葉殘差修正(Grey-Fourier)

設實際值的原始序列:

$$x^{(0)} = \left(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \ldots\ x^{(0)}(n)\right)$$

設預測值的原始序列: $\wedge$ 代表預測值

$$\hat{x}^{(0)} = \left(\hat{x}^{(0)}(1),\ \hat{x}^{(0)}(2),\ \ldots,\ \hat{x}^{(0)}(n)\right)$$

建立誤差值序列 E 為

$$E = \left(E(1), E(2), \ldots\ E(n)\right)^T$$

定義殘差:

$$E(j) = \hat{x}^{(0)}(j) - x^{(0)}(j),\ j = 2, 3, 4, \ldots, n$$

將殘差序列轉換為傅立葉級數

$$E_a(j) \cong \frac{1}{2}a_0 + \sum_{t=1}^{k_a}\left[a_i \cos\left(\frac{2\pi \cdot i}{T_a} j\right) + b_i \sin\left(\frac{2\pi i}{T_a} j\right)\right]$$

$$, j = 2, 3, 4, \ldots, n$$

整理後可得 $P_a C_a \cong E_a$,其中 $P_a =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & \cos\left(\frac{1\times 2\pi\times 2}{T_a}\right), & \sin\left(\frac{1\times 2\pi\times 2}{T_a}\right) \cdots, & \cos, & \sin\left(\frac{k_a\cdot 2\pi\times 2}{T_a}\right) \\ \frac{1}{2}, & \cos\left(\frac{1\times 2\pi\times 3}{T_a}\right), & \sin\left(\frac{1\times 2\pi\times 3}{T_a}\right) \cdots, & \cos, & \sin\left(\frac{k_a\cdot 2\pi\times 3}{T_a}\right) \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$\left[\; \vdots \atop \frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{1\times 2\pi\times n}{Ta}\right),\ \sin\left(\frac{1\times 2\pi\times n}{Ta}\right)\ldots,\ \cos,\ \sin\left(\frac{Ka\cdot 2\pi\times n}{Ta}\right),\right.$$

$$Ca = [a_0, a_1, b_1, a_2\ b_2, \ldots, a_{ka}, b_{ka}]^T$$
$$Ea = \{Ea(2), Ea(3), \ldots, Ea(n)\}^T$$

$Ta = n-1$，$Ka = \frac{n-1}{2} - 1$，其中 $\frac{n-1}{2}$ 取整數

將 $Ca = (Pa^T Pa)^{-1} Pa^T Ea$ 代入 $Ea(j)$

此為須修正的預測誤差，並求得修正後預測值

$$\hat{x}_a^{(0)}(j) = \hat{x}^{(0)}(j) - Ea(j),\ j = 2, 3, 4, \ldots, n$$

其中 $\hat{x}_a^{(0)}(1) = \hat{x}^{(0)}(1)$，$\hat{x}_a^{(0)}(j)$ 為傅立葉殘差修正的預測值

根據 $Pa$ 解出參數 C 陣列的參數估計值，代入

$$Ea(j) \cong \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{ka}\left[a_i \cos\left(\frac{2\pi i}{Ta}j\right) + b_i \sin\left(\frac{2\pi i}{Ta}j\right)\right]$$

可得 $k = 2, 3, \ldots, n$ 建模點的殘差預測數列 $\hat{E}$

當需預測下 m 點的殘差時，$\hat{E}$ 數列可往下延伸

$$\Rightarrow \hat{E}(n+m) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{ka}\left[a_i \cos\left(\frac{2\pi i}{Ta}(n+m)\right) + b_i \sin\left(\frac{2\pi i}{Ta}(n+m)\right)\right]$$

傅立葉級數可以預測建模點的殘差值與預測未來未知的殘差值，並將 $\hat{E}$ 加回預測數列 $\hat{x}^{(0)}$ 就可得 GM(1,1) 110傅立葉殘差修正的預測數列 $\tilde{x}^{(0)}$

$$\tilde{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(0)}(k+1) + \hat{E}(k+1),\ k = 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots n+m, \ldots$$

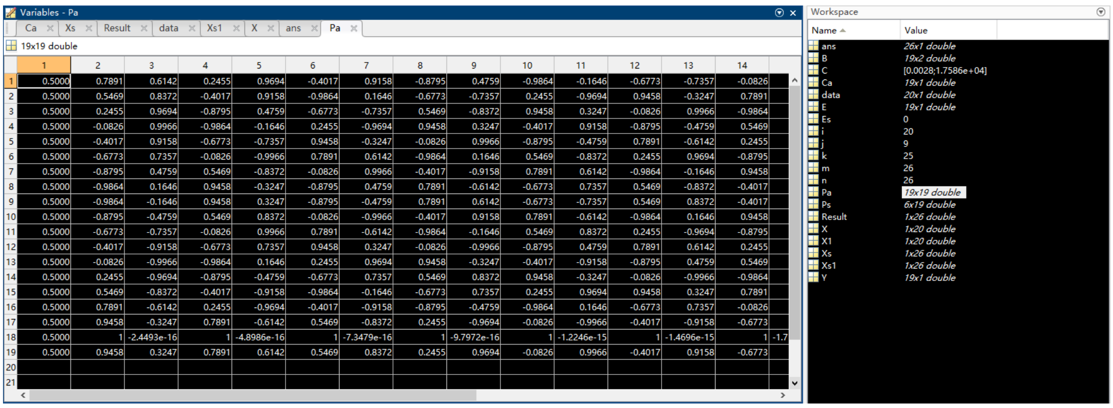
MATLAB 程式碼:

```matlab
data = xlsread('Test.xlsx')
data = xlsread('Test.xlsx', 'A2:A21')
X = 0;
X1 = 0;
Xs = 0;
Xs1 = 0;
C = 0;
B = 0;
Y = 0;
for i=1:20
    X(i) = data(i);
    if i == 1
        X1(i) = data(i);
    else
        X1(i) = X1(i-1) + data(i);
    end
end
for n=2:20
    B(n-1,1) = -(1/2)*(X1(n) + X1(n-1));
    B(n-1,2) = 1;
    Y(n-1,1) = X(n);
end


C = inv(transpose(B)*B)*transpose(B)*Y;
Xs1 = X(1);
Xs = X(1);
for k=1:25
    Xs1(k+1) = (X(1) - C(2,1)/C(1,1))*exp(-C(1,1)*k) + C(2,1)/C(1,1);
    Xs(k+1) = Xs1(k+1) - Xs1(k);
end
E = 0;
Es = 0;
for j=2:20
    E(j-1,1) = Xs(j-1) - X(j-1);
end
```

```
Pa = 0;
Ps = 0;
for i=2:20
    Pa(i-1,1) = 1/2;
    for j=1:9
        Pa(i-1,2*j) = cos((j*2*pi*i)/19);
        Pa(i-1,2*j+1) = sin((j*2*pi*i)/19);
    end
end
for m=21:26
    Ps(m-20,1) = 1/2;
    for j=1:9
        Ps(m-20,2*j) = cos((j*2*pi*i)*m/19);
        Ps(m-20,2*j+1) = sin((j*2*pi*i)*m/19);
    end
end
Ca = inv(transpose(Pa)*Pa)*transpose(Pa)*E;
Result = X(1);
for n=2:26
   if n <= 20
    Result(n) = Xs(n) + sum(Pa(n-1,:).*transpose(Ca));
   else
    Result(n) = Xs(n) + sum(Ps(n-20,:).*transpose(Ca));
   end
end
```

MATLAB 實際運算過程:



Variables - Pa

Ca | Xs | Result | data | Xs1 | X | ans | Pa

19x19 double

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5000 | 0.7891 | 0.6142 | 0.2455 | 0.9694 | -0.4017 | 0.9158 | -0.8795 | 0.4759 | -0.9864 | -0.1646 | -0.6773 | -0.7357 | -0.0826 | |
| 2 | 0.5000 | 0.5469 | 0.8372 | -0.4017 | 0.9158 | -0.9864 | 0.1646 | -0.6773 | -0.7357 | 0.2455 | -0.9694 | 0.9458 | -0.3247 | 0.7891 | |
| 3 | 0.5000 | 0.2455 | 0.9694 | -0.8795 | 0.4759 | -0.6773 | -0.7357 | 0.5469 | -0.8372 | 0.9458 | 0.3247 | -0.0826 | 0.9966 | -0.9864 | |
| 4 | 0.5000 | -0.0826 | 0.9966 | -0.9864 | -0.1646 | 0.2455 | -0.9694 | 0.9458 | 0.3247 | -0.4017 | 0.9158 | -0.8795 | -0.4759 | 0.5469 | |
| 5 | 0.5000 | -0.4017 | 0.9158 | -0.6773 | -0.7357 | 0.9458 | -0.3247 | -0.0826 | 0.9966 | -0.8795 | -0.4759 | 0.7891 | -0.6142 | 0.2455 | |
| 6 | 0.5000 | -0.6773 | 0.7357 | -0.0826 | -0.9966 | 0.7891 | 0.6142 | -0.9864 | 0.1646 | 0.5469 | -0.8372 | 0.2455 | 0.9694 | -0.8795 | |
| 7 | 0.5000 | -0.8795 | 0.4759 | 0.5469 | -0.8372 | -0.0826 | 0.9966 | -0.4017 | -0.9158 | 0.7891 | 0.6142 | -0.9864 | -0.1646 | 0.9458 | |
| 8 | 0.5000 | -0.9864 | 0.1646 | 0.9458 | -0.3247 | -0.8795 | 0.4759 | 0.7891 | -0.6142 | -0.6773 | 0.7357 | 0.5469 | -0.8372 | -0.4017 | |
| 9 | 0.5000 | -0.9864 | -0.1646 | 0.9458 | 0.3247 | -0.8795 | -0.4759 | 0.7891 | 0.6142 | -0.6773 | -0.7357 | 0.5469 | 0.8372 | -0.4017 | |
| 10 | 0.5000 | -0.8795 | -0.4759 | 0.5469 | 0.8372 | -0.0826 | -0.9966 | -0.4017 | 0.9158 | 0.7891 | -0.6142 | -0.9864 | 0.1646 | 0.9458 | |
| 11 | 0.5000 | -0.6773 | -0.7357 | -0.0826 | 0.9966 | 0.7891 | -0.6142 | -0.9864 | -0.1646 | 0.5469 | 0.8372 | 0.2455 | -0.9694 | -0.8795 | |
| 12 | 0.5000 | -0.4017 | -0.9158 | -0.6773 | 0.7357 | 0.9458 | 0.3247 | -0.0826 | -0.9966 | -0.8795 | 0.4759 | 0.7891 | 0.6142 | 0.2455 | |
| 13 | 0.5000 | -0.0826 | -0.9966 | -0.9864 | 0.1646 | 0.2455 | 0.9694 | 0.9458 | -0.3247 | -0.4017 | -0.9158 | -0.8795 | 0.4759 | 0.5469 | |
| 14 | 0.5000 | 0.2455 | -0.9694 | -0.8795 | -0.4759 | -0.6773 | 0.7357 | 0.5469 | 0.8372 | 0.9458 | -0.3247 | -0.0826 | -0.9966 | -0.9864 | |
| 15 | 0.5000 | 0.5469 | -0.8372 | -0.4017 | -0.9158 | -0.9864 | -0.1646 | -0.6773 | 0.7357 | 0.2455 | 0.9694 | 0.9458 | 0.3247 | 0.7891 | |
| 16 | 0.5000 | 0.7891 | -0.6142 | 0.2455 | -0.9694 | -0.4017 | -0.9158 | -0.8795 | -0.4759 | -0.9864 | 0.1646 | -0.6773 | 0.7357 | -0.0826 | |
| 17 | 0.5000 | 0.9458 | -0.3247 | 0.7891 | -0.6142 | 0.5469 | -0.8372 | 0.2455 | -0.9694 | -0.0826 | -0.9966 | -0.4017 | -0.9158 | -0.6773 | |
| 18 | 0.5000 | 1 | -2.4493e-16 | 1 | -4.8986e-16 | 1 | -7.3479e-16 | 1 | -9.7972e-16 | 1 | -1.2246e-15 | 1 | -1.4696e-15 | 1 | -1.7 |
| 19 | 0.5000 | 0.9458 | 0.3247 | 0.7891 | 0.6142 | 0.5469 | 0.8372 | 0.2455 | 0.9694 | -0.0826 | 0.9966 | -0.4017 | 0.9158 | -0.6773 | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | | | |

Workspace

| Name | Value |
|---|---|
| ans | 26x1 double |
| B | 19x2 double |
| C | [0.0028;1.7586e+04] |
| Ca | 19x1 double |
| data | 20x1 double |
| E | 19x1 double |
| Es | 0 |
| i | 20 |
| j | 9 |
| k | 25 |
| m | 26 |
| n | 26 |
| Pa | 19x19 double |
| Ps | 6x19 double |
| Result | 1x26 double |
| X | 1x20 double |
| X1 | 1x20 double |
| Xs | 1x26 double |
| Xs1 | 1x26 double |
| Y | 19x1 double |

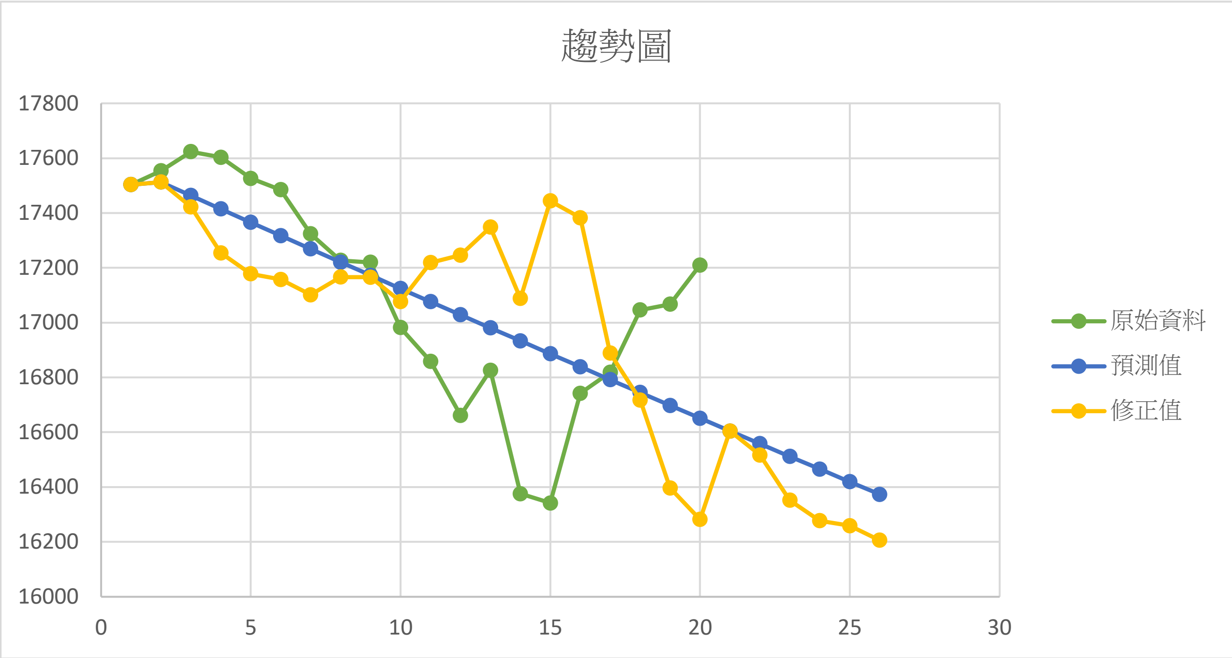
## (四) 結果與討論

實驗數據:　　原始資料: 台股指數每日的收盤價

| 日期 | 原始資料 | 預測值 | 誤差值 1 | 修正值 | 誤差值 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 110/08/02 | 17503.28 | 17503.28 | 0 | 17503.28 | 0 |
| 110/08/03 | 17553.76 | 17512.72 | -41.0445 | 17512.72 | -41.0445 |
| 110/08/04 | 17623.89 | 17463.7 | -160.191 | 17422.65 | -201.236 |
| 110/08/05 | 17603.12 | 17414.82 | -188.301 | 17254.63 | -348.493 |
| 110/08/06 | 17526.28 | 17366.08 | -160.204 | 17177.77 | -348.505 |
| 110/08/09 | 17485.15 | 17317.47 | -167.681 | 17157.26 | -327.885 |
| 110/08/10 | 17323.64 | 17269 | -54.6413 | 17101.32 | -222.322 |
| 110/08/11 | 17227.18 | 17220.66 | -6.51615 | 17166.02 | -61.1575 |
| 110/08/12 | 17219.94 | 17172.46 | -47.4757 | 17165.95 | -53.9919 |
| 110/08/13 | 16982.11 | 17124.4 | 142.2896 | 17076.92 | 94.81393 |
| 110/08/16 | 16858.77 | 17076.47 | 217.6995 | 17218.76 | 359.9892 |
| 110/08/17 | 16661.36 | 17028.67 | 367.3135 | 17246.37 | 585.0131 |
| 110/08/18 | 16826.27 | 16981.01 | 154.7414 | 17348.32 | 522.0549 |
| 110/08/19 | 16375.4 | 16933.48 | 558.0826 | 17088.22 | 712.8239 |
| 110/08/20 | 16341.94 | 16886.09 | 544.1468 | 17444.17 | 1102.229 |
| 110/08/23 | 16741.84 | 16838.82 | 96.98372 | 17382.97 | 641.1305 |
| 110/08/24 | 16818.73 | 16791.69 | -27.0371 | 16888.68 | 69.94662 |
| 110/08/25 | 17045.86 | 16744.69 | -301.166 | 16717.66 | -328.203 |
| 110/08/26 | 17066.96 | 16697.83 | -369.133 | 16396.66 | -670.299 |
| 110/08/27 | 17209.93 | 16651.09 | -558.84 | 16281.96 | -927.973 |
| 110/08/30 | | 16604.49 | | 16604.49 | |
| 110/08/31 | | 16558.01 | | 16516.97 | |
| 110/09/01 | | 16511.67 | | 16351.47 | |
| 110/08/02 | | 16465.45 | | 16277.15 | |
| 110/09/03 | | 16419.36 | | 16259.16 | |
| 110/09/06 | | 16373.41 | | 16205.73 | |

註:8/30 以後的為預測的數據

圖表:




分析:

因為是用線性回歸的方式來處理，所以找出的預測值畫出來是一條直線，不過這條直線可以看出數據的趨勢，修正過後的數值，圖形和原始資料有相似性，但修正值和預測值相較起來會發現誤差較大，以下是我個人推測的原因

(1) 數據取的樣本數不夠多:

雖然這個模型適合做中短期的分析，但還是至少需要 2 個月的資料量(60 個以上的數據)，但由於我從 8 月初才開始做，時間不夠我收集那麼多的資料，也因為七月時有八大官股在護盤，所以我認為取七月的數據會不夠準確。

(2) 計算過程出錯:

有這個可能性，但我反覆測試的結果都差不多。

(3) 方法的不準確性:

這個方法的數學模型較為簡單，所以誤差比其他的數學模型還要來的大。

(4) 人為操控:

股市之中的三大法人和一些大戶可以控制台股指數，黑天鵝事件很難在數學模型內展現。

改善的方式:

(1) 收集更多的資料輸入模型內。
(2) 採取非線性的回歸方法。
(3) 採取其他更佳的修正方法。

結論:

就技術面來說，推測股市的價格有許多的不確定性，單靠數學分析還是會存在極大的風險，理論計算出來的結果和實際狀況不盡相同，若貿然跑去投資台指期，輸掉 100 多點是非常嚴重的事，想要穩操勝券的話還是得老實的從基本面去做功課，分析各家公司的財報和經營狀況，但還是可以以數學分析為輔來做投資參考。總而言之，不管是哪種投資都一定有風險，事前做好充足的功課是非常重要的，沒做任何功課做跳入茫茫的股海中就跟賭博是一樣的。

(五) 參考文獻

(1) 臺灣證券交易所
https://www.twse.com.tw/zh/page/trading/indices/MI_5MINS_HIST.html

(2) ScienceDirect
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X13000243

(3)Hindawi
https://www.hindawi.com/journals/complexity/2020/6514236/

(4)MBA 智庫百科
https://wiki.mbalib.com/zh-tw/%E7%81%B0%E8%89%B2%E9%A2%84%E6%B5%8B%E6%B3%95

備註:

組員有一個退選，另外一個連絡不到，所以全部都是我獨立完成的。