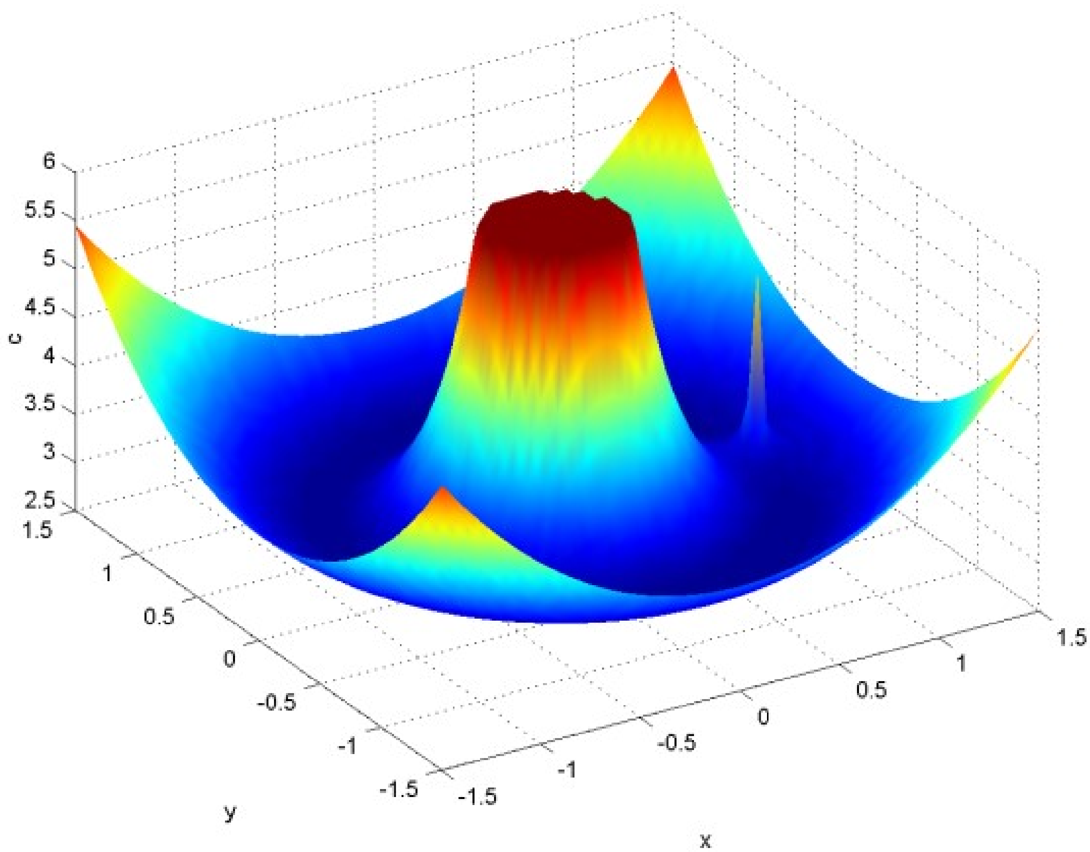
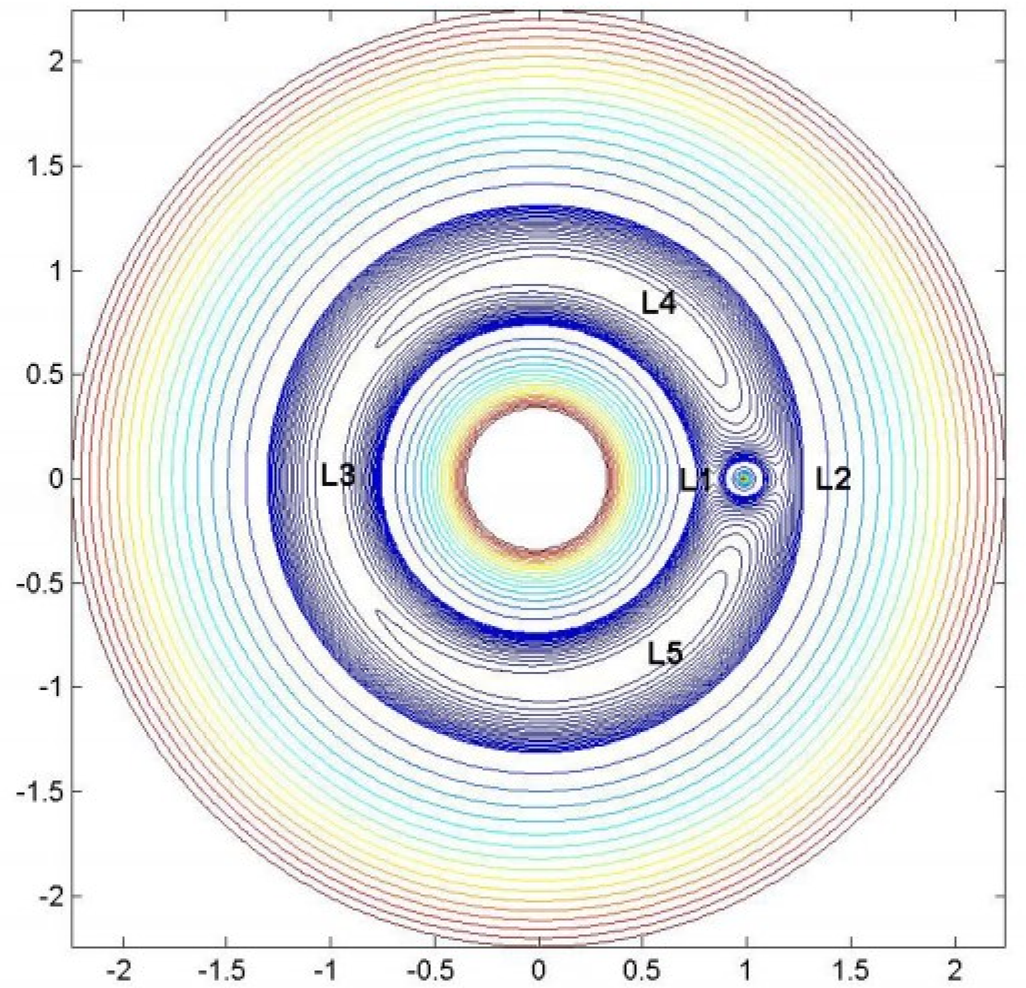
Стабільність і орбіти Лангража

Три Колінеарні точки, L1, L2 і L3, вважаються нестабільними і подібні «сідел» в гравітаційному потенціалі, тоді як дві трикутні точки стійкі. На графіках гравітаційного потенціалу нижче великий пік представляє потенціал гравітації поблизу великого тіла, а менший пік представляє потенціал гравітації поблизу малого тіла. Зверніть увагу на «сідло», де знаходиться точка L1. Походження цих графіків пояснюється в розділі «Аналіз» нижче.



Малюнок 2.1. 3D графік гравітаційного потенціалу в обертовій системі відліку



Малюнок 2.2. 2D-контурний графік гравітаційного потенціалу в обертовій системі відліку

Теоретично та в застосуванні було доведено, що існують періодичні орбіти щодо нестабільних точок Лагранжа (для стабільних точок L4 та L5, що з'являються там, не потрібно спеціального лікування). Оскільки для рівнянь цих орбіт не існує рішення закритої форми, для визначення траєкторій використовуються обчислювальний та чисельний аналіз. Крім того, ці орбіти не можуть бути описані конкретними орбітальними параметрами (орбітальними елементами), як це властиво типовим орбітам, але існують "родини" орбіт. "Ще в 1963 році Будас обчислював 19 сімей тривимірних періодичних орбіт у круговій проблемі з обмеженим трьома тілами".

Хоча існує багато назв і різних методів організації, в сучасній літературі є три основні категорії (зауважте, що не всі орбіти можна класифікувати до одного з цих типів, проте це найбільш практичні та добре вивчені орбіти):

1. Орбіта Ляпунова

Орбіта Ляпунова - це періодична орбіта в площині руху первинних тіл.

2. Орбіта Ліссайюса

Орбіта Ліссайюса - це поєднання плоскої та вертикальної складових на періодичній орбіті

3. Ореольна орбіта:

Орбіта ореолу - особливий випадок орбіт Ліссаджюса, коли частоти в площині і поза площиною рівні.

Рівняння та аналіз

Проведено велику роботу з аналізу руху супутників поблизу точок Лагранжа. Роберт Ф. Фаркхар написав кандидатську дисертацію на цю тему в рамках гранту НАСА, і цей технічний звіт став бібліографічним коренем майже кожного документу Lagrange Point з 1969 року (оскільки він є коренем цього). У першому розділі своєї роботи Фарквар виводить рівняння руху для кругової проблеми з трьома тілами (CR3BP), які можна використовувати для побудови як орбіт Точки Лагранжа, так і передавальних орбіт, необхідних для того, щоб потрапити туди. Цей склад характеризується обертовою системою координат з початком у центрі маси двох великих тіл (барицентр). Вісь x системи координат знаходиться по лінії, що з'єднує первинні тіла, вісь z у напрямку вектора імпульсу кута системи та вісь y, що завершує набір праворуч. Таким чином, координатний кадр обертається з кутовою швидкістю системи.

Кілька інших припущень є важливими для кругових обмежених рівнянь трьох тіл, більшість з яких свідчить сама назва. По-перше, орбіту малого тіла (наприклад, Місяць у системі Земля-Місяць) прийнято вважати круговою. Це розумне припущення для більшості цікавих систем, включаючи Землю-Місяць (em = 0,055), Сонце-Земля (ee = 0,0167) і Сонце-Юпітер (ej = 0,0482). Термін обмежений означає припущення, що третє тіло не впливає на орбіти двох первинних тіл. Тобто третє тіло безмасштабне. Ще одне припущення полягає в тому, що Всесвіт суворо обмежений трьома розглянутими тілами, тому інших гравітаційних впливів у системі немає. Наприклад, передбачається, що Сонце не впливає на орбіту космічного корабля навколо точки Лагранжа Земля-Місяць. Нарешті, передбачається, що в системі немає інших немодельованих прискорень, таких як тиск сонячної радіації. Усі ці припущення, хоча і здаються дуже обмежуючими, дозволяють скласти рівняння руху, які дають репрезентативну картину першого порядку орбіт навколо точок Лагранжа. Хоча це не підходить для реальної траєкторії космічного корабля, орбіти, які можна генерувати за допомогою рівнянь CR3BP, корисні з початкової точки зору проектування.

Існує багато еквівалентних формулювань рівнянь CR3BP, представлених різними авторами.

Одну з найбільш читаних форм наводить Пол Д. Мерріт і подається тут (рівняння Фаркхара подібні, використовуючи різні позначення):

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu[x-(1-\mu)]}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}$$

У наведених рівняннях x, y і z являють собою положення супутника відносно барицентра, де r1 - відстань від великого тіла до супутника, r2 - відстань від малого тіла до супутника, і μ є нерозмірним центром маси:

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

Тут M1 - більший корпус. Важливо також зазначити, що в нормалізованій одиничній системі цих рівнянь кутова швидкість двох тіл про барицентр встановлена в одиницю, в результаті чого одиниця часу (ТУ), що є оберненою середнього кута ставка. Це:

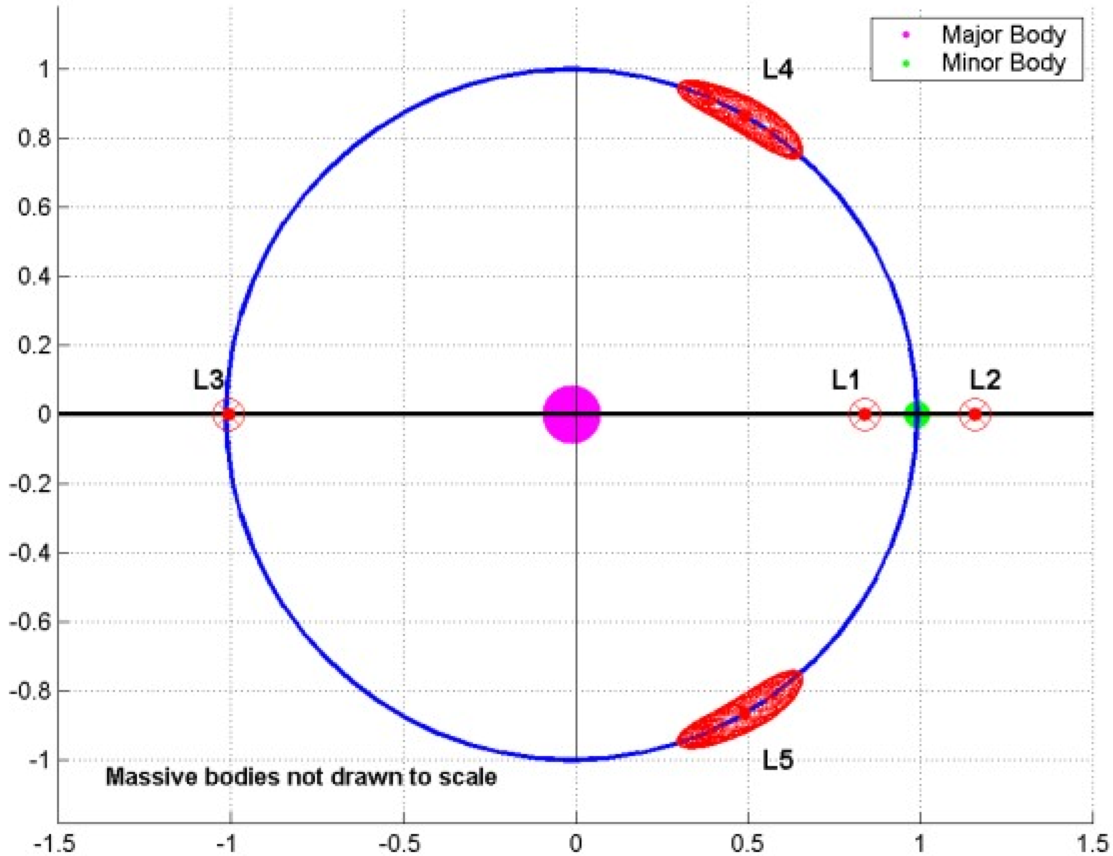
$$\dot{\theta} = 1$$

$$1TU = \frac{1}{n} = \frac{P}{2\pi} s$$

Де n - середня кутова швидкість, або P - період мас навколо барицентра.

Вище наведені рівняння - це система трьох спарених нелінійних диференціальних рівнянь, які можна використовувати для моделювання руху космічного корабля по орбітах навколо точок Лагранжа. Не існує рішення закритих форм для цих рівнянь, навіть із спрощеними припущеннями, переліченими вище. Враховуючи належні початкові умови, дизайнер може використати числовий інтеграційний режим для побудови еталонної траєкторії для початкового аналізу. Такий інструмент був створений для цього звіту та представлений у наступному розділі.

На жаль, виведення необхідних початкових умов не є тривіальним завданням. Простий приклад може бути сформований за допомогою стабільних точок L4 і L5. Оскільки розташування цих точок точно відомо, і критична початкова швидкість не потрібна, зразок космічного апарату можна вставити в точку L4 або L5 і спостерігати протягом тривалого часу. За допомогою згаданого вище інструменту було проведено цей експеримент, і результати, як очікувалося. Якщо вставити точно в точку L4 або L5 без початкової швидкості, космічний апарат взагалі не має відносного руху протягом тривалих періодів. Результат - це графік з єдиною точкою в точках L4 та L5, і тому тут не представлений. Більш цікавий приклад складається, коли космічний апарат не розміщений точно в точці Лагранжа (або розміщений туди з ненульовою відносною швидкістю), і йому дозволяється підкорятися механіці CR3BP протягом тривалого періоду. Результат цього експерименту показаний на малюнку 5. Порівняйте отриману схему з рисунками 4 і, і тоді рівняння CR3BP можуть бути використані з упевненістю.



Малюнок 2.3. Смучений і обмежений рух у точках L4 та L5 Лагранжа

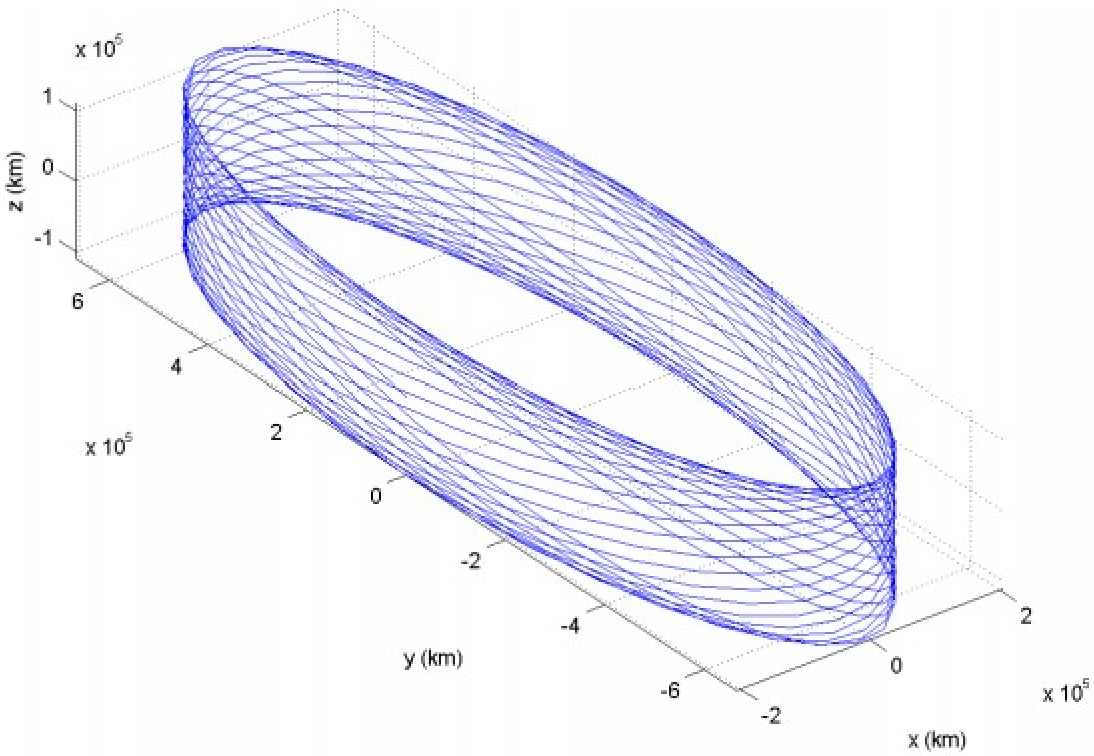
Дослідження показали кілька методів, які використовувалися в минулому для створення початкових умов (і навіть повних траєкторій), включаючи складні програмні засоби, розроблені галуззю чи освітніми установами. Один з таких програмних засобів називається Generator і був створений університетом Пердю, як описано Hamilton, et. al10. Генератор використовує дані ефемерів для моделювання збурень, не включених до моделі CR3BP, включаючи ексцентриситети, зовнішні гравітаційні впливи та радіаційний тиск. Інший метод, чітко представлений Ван Сангом Koon11 з Caltech, дає аналітичні періодичні рішення для лінеаризованих версій CR3BP. Ці рівняння можуть бути використані як перше наближення до потрібної орбіти гало, для використання в більш досконалих алгоритмах поширення та корекції для орбіт точки Лагранжа. Ці періодичні рішення для лінеаризованої задачі такі:

$$x = -A_x \cos(\lambda t + \phi)$$

$$y = kA_x \sin(\lambda t + \phi)$$

$$z = A_z \sin(\nu t + \psi)$$

Тут Ax, Ay = kAx і Az - амплітуди, що характеризують орбіту. Параметри λ і ν - частоти орбіти у відповідних осях, а ϕ і ψ - фазові кути. Якщо λ і ν неоднакові, результат - орбіта Ліссайюса; якщо вони рівні, результат - орбіта ореолу. Вибірковий графік, сформований цими рівняннями, показаний на малюнку 2.4.



Малюнок 2.4. 3D-графік орбіти Лісаяуса про L1, використовуючи рішення з лінеаризованого CR3BP

Окрім рівнянь руху для обмеженої задачі на три тіла, Фаркхар виводить у 1-й главі своєї дисертації рівняння для константи Якобіа та поверхонь постійної швидкості. Використовуючи енергетичні методи та спираючись на рівняння для трьох задач тіла, можна отримати таке рівняння:

$$V^2 = (x^2 + y^2) + \frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - C$$

Тут V - величина відносної швидкості супутника в обертовому кадрі, x і y - положення супутника в одному кадрі, C - константа Якобі, а μ така, як визначено вище у рівнянні. 5. Звичайно, це рівняння описує лише рух в орбітальній площині. Встановивши відносну швидкість до нуля, можна створити контурну карту, яка позначає лінії постійної С. Ця карта є потенційним полем даної системи, як показано на обертовому координатному кадрі, як це представлено на рисунках 3 і 4.

Вимоги щодо обслуговування орбіти

Спочатку було сподівання, що програмне забезпечення може бути і буде створене, яке б оцінило вимоги до маневру для точок орбіти Лагранжа. Спочатку знаючи, що орбіти навколо точок Лагранжа нестабільні, і тому потрібно періодичне обслуговування (незалежно від збурювальних сил), очікувалося, що простий алгоритм може бути знайдений або отриманий, щоб дати дизайнеру перше скорочення бюджету budgetV для його місія. Результат досліджень у цій галузі був дивовижним, і безпосереднім наслідком цього є те, що дизайнеру не потрібен програмний інструмент для складання базової оцінки ΔV для місії. Другим наслідком є те, що дизайнерам місії потрібні досить складні програмні засоби для отримання високоточної моделі розмірів та частоти маневрів обслуговування орбіти. Пояснення обох цих наслідків випливає, починаючи, однак, із методів, які існують для обчислення вимог.

Незалежно від збурених сил, орбіти навколо колінеарних точок Лагранжа нестабільні і тому потребують періодичного обслуговування. Однак три проблеми з тілом, навіть у найпростішій і найбільш обмеженій формі, все ще призводять до системи трьох спарених нелінійних диференціальних рівнянь. Сам Фаркхар обговорював можливі стратегії утримання станцій у своєму первісному творі, а пізніше просунув ці зусилля щонайменше ще в одному документі, опублікованому в 198012 році. Оригінальна робота Фаркхара стосувалася методів безперервної тяги (і навіть навіть застосовувала сонячні вітрила до цього додатка), хоча багато хто методів, що їх слід застосовувати, для дискретних опіків, придатних для хімічних приводних пристроїв. Гамільтон10 використовував дискретний лінійно-квадратичний регуляторний фреймворк для управління орбітою космічних кораблів у точці L2 Сонце-Земля, а додатки для формування летять у цьому місці. Гомес та ін. ін. 13, написав документ, в якому детально описував два способи контролю, названий стратегією цільової точки та підходом режиму Floquet Mode. Стратегія цільової точки обчислює маневри, призначені для утримання космічного корабля поблизу опорної орбіти, використовуючи функцію витрат, яка включає необхідну керуючу енергію та передбачуване відхилення від номінальної (на основі розрахункових маневрів). Підхід в режимі Floquet Mode - це складна система, що базується на лінеаризованих рівняннях CR3BP, описаних вище (рівняння 8-10). Сербан, Кун та ін. ін., в набагато більш пізній роботі використали оптимальне управління для формування стратегій корекції маневру ореолу з основним акцентом на траєкторії передачі на орбіти гало.

На жаль, жоден із цих методів не має простої реалізації, яку можна було б швидко та акуратно зафіксувати у корисному інструменті проектування для інженерів-супутників. На щастя, результат усіх цих зусиль у стратегіях управління дає послідовне і цінне узагальнення: орбіти навколо Точок Лагранжа можна підтримувати роками, використовуючи дуже малу кількість ΔV, і з відносно нечастими маневрами. Консервативним правилом для дизайнерів буде оцінка 12 маневрів на рік із загальною ΔV лише 20 м / с на рік. Приклади знайшли лише 6 маневрів, а вимоги ΔV лише 4 м / с на рік.

Додаткові місяці, космічні колонії та хмари пилу

А що з точками Лагранжа на орбіті Місяця навколо Землі? Там щось ховається? Якби на Землі були якісь менші місяці, окрім того, про кого ми всі знаємо, вони б там, напевно, були!

Насправді люди вже давно шукають зайві місяці, що обходять навколо Землі. Деякі люди навіть стверджували, що їх знайшли! Історія досить цікава. Почалося це, коли Фредерік Петі стверджував, що троє спостерігачів бачили маленький другий місяць ... але він набрав пару, коли Жюль Верн прочитав про це і включив його у свій роман "З Землі на Місяць":

"" Це можливо? ", Вигукнув Мішель Ардан," земля має два місяці? "

"Так, мій друже, у нього є два місяці, хоча зазвичай вважають, що він має лише одну. Але цей другий місяць такий малий і його швидкість настільки велика, що мешканці Землі не можуть його бачити. Це, помічаючи порушення, Французький астроном, мсьє Петі, міг визначити існування цього другого Місяця і обчислив його орбіту. За його словами, повний оборот навколо Землі займає три години двадцять хвилин .... "

Це отримало німецьких астрономів-аматорів, які шукали маленький місяць, який вони назвали "Кляйхен" ... і в 1898 році один доктор Георг Вальтемат стверджував, що знайшов цілу систему маленьких лун! У 1918 році астролог навіть додав у свій гороскоп додатковий місяць: темний місяць «Ліліт».

Однак останнім і науковим пошуком об’єктів у точках Лагранжа Земля-Місяць є:

Роберт А. Фрейтас-молодший. Пошук природних або штучних об'єктів, розташованих у точках коливання Земля-Місяць, Ікар 42 (1980), 442-447.

Його пошук показав, що жоден твердий об'єкт розміром з Skylab або більше не припаркований на L4 або L5.

Але це не означає, що ці місця абсолютно нудні. Насправді є хмари пилу на L4 та L5. Вони приблизно в чотири рази більше, ніж Місяць. Вони дуже мудрі і несуттєві, але їх сфотографували пару разів. У 1990 році польський астроном Вінярський виявив, що вони мають кілька градусів у видимому діаметрі, що вони відхиляються до десяти градусів від точок Лагранжа, і що вони дещо червоніші, ніж звичайне "зодіакальне світло" - світло, що відбивається від пилу у Сонячній системі.

У 1974 році професор фізики в Прінстоні написав документ, який виступає за розміщення космічних колоній в одній із точок Лагранжа Землі, а саме L5:

Джеральд О'Нілл, Колонізація космосу, Фізика сьогодні 27 (9) (вересень 1974), 32-40.

Але поки що, здається, у точках Лагранжу Земля-Місяць просто пил. Отже, що з точками Лагранжа на місяцях інших планет?

Ну, у Сатурна крижаний місяць під назвою Діона, діаметром 560 кілометрів - і на 60 градусів попереду Діони, прямо в точці Лагранжа L4, є крихітний місяць під назвою Хелен! Ось малюнок Хелен:

Є також крихітний місяць під назвою Polydeuces, що відстає від Діони на точці L5: Ще краще, у Сатурна є ще один місяць під назвою Tethys, досить схожий на Діону, діаметром 530 кілометрів, який має дві місяці Лагранжа. У точці L4 є маленький під назвою Telesto, на 60 градусів попереду від Тетіса, і ще один, який називається Каліпсо, на 60 градусів позаду Тетіса!

Троянський Місяць Телесто Сатурна,

Троянський Місяць Салірна Каліпсо,

Марсові трояни, троянти Нептуна та дивні супутники Землі

Астероїд 5261 Еврика - "троян Марса", що займає навколо Сонця точку L5 на орбіті Марса. Це було виявлено Девідом Леві в 1990 році. Він червонуватого відтінку і знаходиться глибоко в стійкій лагрангійській зоні Марса, що говорить про те, що він був на цій орбіті протягом більшої частини історії Сонячної системи.

З того часу були виявлені деякі інші Марсові троянці - щонайменше чотири в L5 і один в L4.

Коли я востаннє перевіряв, були відомі трояни Сатурна, але сім "троянців Нептуна", з негласними назвами 2001 QR322 та 2004 UP10. Астероїди у зовнішній Сонячній системі називають «кентаврами», але відомо не надто багато. Станом на 2005 рік відомо лише близько сорока кентаврів, які входять в регіон між Сатурном і Ураном.

Більшість з них були виявлені з 2000 року, тому ми, можливо, просто починаємо їх знаходити. Але дослідники Каліфорнійського університету в Лос-Анджелесі та інших місцях зробили деякі комп'ютерні симуляції для вивчення цього питання. Вони виявили, що ніші для стабільних орбіт рідкісні у зовнішній Сонячній системі.

Чи є "земні троянці" - астероїди в точках Лагранжа на орбіті Землі навколо Сонця? Астрономи шукали їх і діставали кілька можливих вражаючих проблисків, але остаточних доказів немає. Цей веб-сайт можна знайти для отримання додаткової інформації - у ньому є навіть деякі фільми, які показують, що б робили троянці Землі, якщо вони існували:

Мартін Коннорс, Крістіан Вейлет, Пол Вігерт, Кіммо Іннанен і Сеппо Міккола, Земля Лагранж або Троянські астероїди - спільні орбіти Землі.