

Note: Check overfull textboxes!

1 Empirical analysis of a linear SDE

1.1 Vis en normalfordeling

Betragt Vasicek-modellen [vasicek], hvor aktivets kurs er givet ved følgende stokastiske differential ligning:

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t \quad (1.1)$$

Denne har en løsning, thi den er en sum af en ordinær differentialligning, $dX_t = \kappa\theta dt$, og så den geometriske brownske bevægelse, $dX_t = -\kappa X_t dt + \sigma dW_t$, der jf. [bjork], prop. 5.2 har løsningen $X_t = X_0 \exp\left\{(-\kappa - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right\}$. Det giver således mening at betragte $Z_t = e^{\kappa t} X_t$, som har Itô-differentialet:

$$dZ_t = \left\{ \kappa e^{\kappa t} X_t + \kappa(\theta - X_t) e^{\kappa t} \right\} dt + \sigma e^{\kappa t} dW_t = \kappa\theta e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} dW_t \quad (1.2)$$

Ovenstående gælder for alle t , specielt tidspunkt $t+u$. Integreres Ligning 1.21 Vis en normalfordeling equation 1.2, med hensyn til informationen på tidspunkt t , kan vi udtrykke Z_{t+u} som:

$$Z_{t+u} | \mathbb{F}_t = Z_t + \int_t^{t+u} \kappa\theta e^{\kappa s} ds + \int_t^{t+u} \sigma e^{\kappa s} dW_s$$

Andet led er givet ved:

$$\int_t^{t+u} \kappa\theta e^{\kappa s} ds = \theta e^{\kappa(t+u)} (1 - e^{-\kappa u})$$

Af [bjork], lemma 4.18, vides det at sidste led fordelt som

$$\mathcal{N}\left(0, \int_t^{t+u} (\sigma e^{\kappa s})^2 ds\right) = \mathcal{N}\left(0, \left[\frac{1}{2\kappa} \sigma^2 e^{2\kappa s}\right]_t^{t+u}\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2 e^{2\kappa(t+u)} (1 - e^{-2\kappa u})}{2\kappa}\right)$$

Alt i alt, gælder der således at

$$\begin{aligned} Z_{t+u} | \mathbb{F}_t &\sim \mathcal{N}\left(Z_t + \theta e^{\kappa(t+u)} (1 - e^{-\kappa u}), \frac{\sigma^2 e^{2\kappa(t+u)} (1 - e^{-2\kappa u})}{2\kappa}\right) \Rightarrow \\ X_{t+u} | \mathbb{F}_t &= e^{-\kappa(t+u)} Z_{t+u} | \mathbb{F}_t \sim \mathcal{N}\left(X_t e^{-\kappa u} + \theta (1 - e^{-\kappa u}), \frac{\sigma^2 (1 - e^{-2\kappa u})}{2\kappa}\right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.2 MLE estimator

Det er almindeligt kendt at Maximum Likelihood estimator oftest er de »bedste«, når man ønsker at bestemme parametre i en fordeling. Til dette formål, tages der udgangspunkt i den likelihood funktion, tilhørende Ligning 1.31. Vis en normalfordeling equation.1.3 , givet per [opgave], hvor det specielt bemærkes at Δt er holdt konstant. Ud fra denne konstrueres følgende log-likelihood funktion, for $n+1$ (indeks 0 til n) observationer:

$$\text{Log}L(a, b, v) = \sum_{i=1}^n -\log(\sqrt{2\pi}) - \log(\sqrt{v}) - \frac{(x_i - x_{i-1}a - b)^2}{2v} \quad (1.4)$$

Hvor der er foretaget følgende parameterskift, $\gamma(\kappa, \theta, \sigma)$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ v \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \kappa \\ \theta \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\kappa\Delta t} \\ \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) \\ \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta t})}{2\kappa} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa \\ \theta \\ \sigma \end{pmatrix} = \gamma^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\log(a)}{\Delta t} \\ \frac{b}{1-a} \\ \sqrt{-\frac{2\log(a)v}{\Delta t(1-a^2)}} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

For at lave parameterskiftet, er oplagt påkrævet at Δt er konstant, ellers ville eksempelvis hver κ være et κ_i , hvad der ikke ville hjælpe maksimum likelihood estimationen. Det ses af ligning(1.4) har følgende førstegrads afledte:

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{-2(x_i - x_{i-1}a - b)(-x_{i-1})}{2v} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \frac{-2(x_i - x_{i-1}a - b)(-1)}{2v} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial v} = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2v} + \frac{(x_i - x_{i-1}a - b)^2}{2v^2} \quad (1.8)$$

Efter almindelig algebra, opnås følgende MLE-estimer:

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n x_i x_{i-1} - \bar{x}_i \bar{x}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 - \bar{x}_{i-1} \bar{x}_i} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1} \hat{a})}{n} \\ \frac{n}{n} \frac{(x_i - x_{i-1} \hat{a} - \hat{b})^2}{n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{\kappa} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\log(\hat{a})}{\Delta t} \\ \frac{\hat{b}}{1-\hat{a}} \\ \sqrt{-\frac{2\log(\hat{a})\hat{v}}{\Delta t(1-\hat{a}^2)}} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

At estimerne ovenfor rent faktisk maksimeres, ses lettest i a, b, c -parametriseringen. De andenaflædte er nemlig heri:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial a \partial v} \\ \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial b \partial v} \\ \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial v \partial a} & \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial v \partial b} & \frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial v^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{-x_{i-1}^2}{v} & \sum_{i=1}^n \frac{-x_{i-1}}{v} & \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1}a - b)(-x_i)}{v^2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{-x_{i-1}}{v} & \sum_{i=1}^n \frac{-1}{v} & \sum_{i=1}^n \frac{-(x_i - x_{i-1}a - b)}{v^2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1}a - b)(-x_i)}{v^2} & \sum_{i=1}^n \frac{-(x_i - x_{i-1}a - b)}{v^2} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2v^2} - \frac{(x_i - x_{i-1}a - b)^2}{v^3} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Som, evalueret i estimerterne, jf. 1.6- 1.8 giver:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{-x_{i-1}^2}{\hat{v}} & \sum_{i=1}^n \frac{-x_{i-1}}{\hat{v}} & 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{-x_{i-1}}{\hat{v}} & \sum_{i=1}^n \frac{-1}{\hat{v}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2\hat{v}} + \frac{(x_i - x_{i-1}\hat{a} - \hat{b})^2}{2\hat{v}^2} \right) - \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1}\hat{a} - \hat{b})^2}{2\hat{v}^2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 & \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1} & 0 \\ \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1} & \frac{-n}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1}\hat{a} - \hat{b})^2}{2\hat{v}^2} \end{bmatrix}$$

Og beregnes dens egenverdier

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 - \lambda & \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1} & 0 \\ \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1} & \frac{-n}{\hat{v}} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1}\hat{a} - \hat{b})^2}{2\hat{v}^2} - \lambda \end{bmatrix} \right| =$$

$$\left(\frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1}\hat{a} - \hat{b})^2}{2\hat{v}^2} - \lambda \right) \left(\frac{1}{\hat{v}^2} \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 n + \frac{1}{\hat{v}} \lambda n + \lambda \frac{1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 + \lambda^2 - \frac{1}{\hat{v}^2} \left(\sum_{i=1}^n x_{i-1} \right)^2 \right) \Rightarrow$$

Ses det at disse er ikke-positive, så matricen er negativt semidefinit:

$$\frac{1}{\hat{v}^2} (n-1) \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 + \frac{1}{\hat{v}^2} \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - \bar{x}_{i-1})^2 + \lambda \left(\frac{n}{\hat{v}} + \frac{1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 \right) + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{n}{\hat{v}} - \frac{1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{n}{\hat{v}} + \frac{1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\hat{v}} (n-1) \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 + \frac{1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - \bar{x}_{i-1})^2 \right)}}{2} \leq 0,$$

$$\lambda_3 = \frac{-1}{\hat{v}} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1}\hat{a} - \hat{b})^2}{2\hat{v}^2} \leq 0$$

Hvor det for de to egenverdier, $\lambda_{1,2}$ er brugt er at matricen er reel og symmetrisk, så derfor har reelle egenverdier.

1.3 Simulation

For at verificere ovenstående gennemføres et simulationseksperiment - se kode i NOTE: Indsæt kode ref. her. Der gennemføres 10.000 simulationer, og med inspiration fra Vasicek-modellens historik som rentemodell, fastsættes parametre: $\kappa = 0.5, \theta = 0.02, \sigma = 0.05, n =$

Tabel: Dækningsgrader for konfidensintervaller

	T=1	T=5	T=20	T=100
κ	77,29%		91,47%	93,99%
θ	34,01%		84,72%	92,71%
σ	94,94%		95,01%	94,87%

1000, $T = 20$. Nu udnyttes det her for indgang 1,1 i fisherinformationen for n observationer at

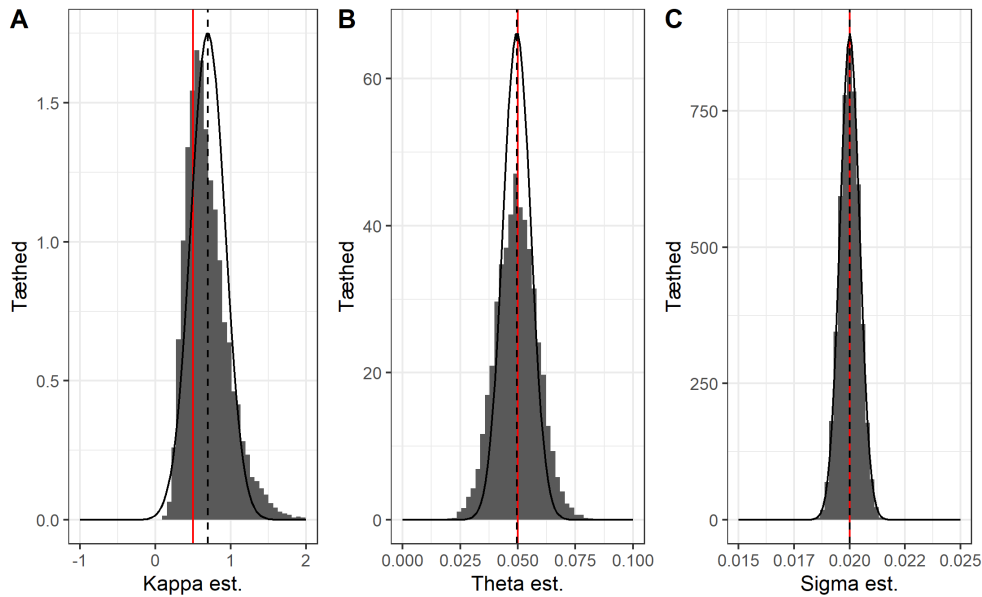
$$\begin{aligned}
 i_n^{1,1}(\kappa, \theta, \sigma) &= -E \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} \sum_{i=1}^n \text{Log} L_i(\kappa, \theta, \sigma) \\
 &\approx -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} \sum_{i=1}^n \text{Log} L_i(\kappa, \theta, \sigma) \\
 &= -\frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \text{Log} L_i(\kappa, \theta, \sigma) \\
 &= -\frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} \sum_{i=1}^n \text{Log} L_i(\kappa, \theta, \sigma)
 \end{aligned}$$

Kan fisherinformationen (og maksimum likelihood estimerne, per 1.9) - estimeres numerisk. Derfor burde MLE-estimerne være asymptotisk normalfordelte med middelværdi i parametrene, og variansmatrice lig den inverse fisherinformation. Dermed kan standardfejlene udtrækkes, og konfidensintervallerne kan laves som eksempelvis

$$\kappa_{\text{konf.int.}} = \left(Q_{\kappa, (i_n^{-1})^{1,1}}(0, 025), Q_{\kappa, (i_n^{-1})^{1,1}}(0, 975) \right)$$

Hvor $Q_{\kappa, (i_n^{-1})^{1,1}}(0, 025)$ er fraktilfunktionen for normalfordelingen med varians lig den inverse fisherinformations indgang 1,1, og middelværdi κ . 95%-konfidensintervallerne dækker med disse parametre i ca. 95% af observationerne σ estimatet - se fjerde kolonne i tabel 1. Lidt ringere ser det ud for κ og θ , de dækker tydeligt mindre. Dette billede understøttes af fig. 1, hvor MLE-estimer er plottet op mod deres asymptotiske normalfordeling¹, passer dette ganske rimeligt for sigmaestimerne (panel C), mens theta estimerne varierer en del mere end hvad de burde ifølge deres tilhørende normalfordeling. Tætheden for kappa estimerne tyder på at fordelingen ikke endnu helt er konvergeret mod en normalfordeling.

¹Her er middelværdien dog taget over alle simulationer, således der kun er 1 kurve

Figur: Parameterestimerer samt numerisk asymptotisk normalfordeling, $T=20$.

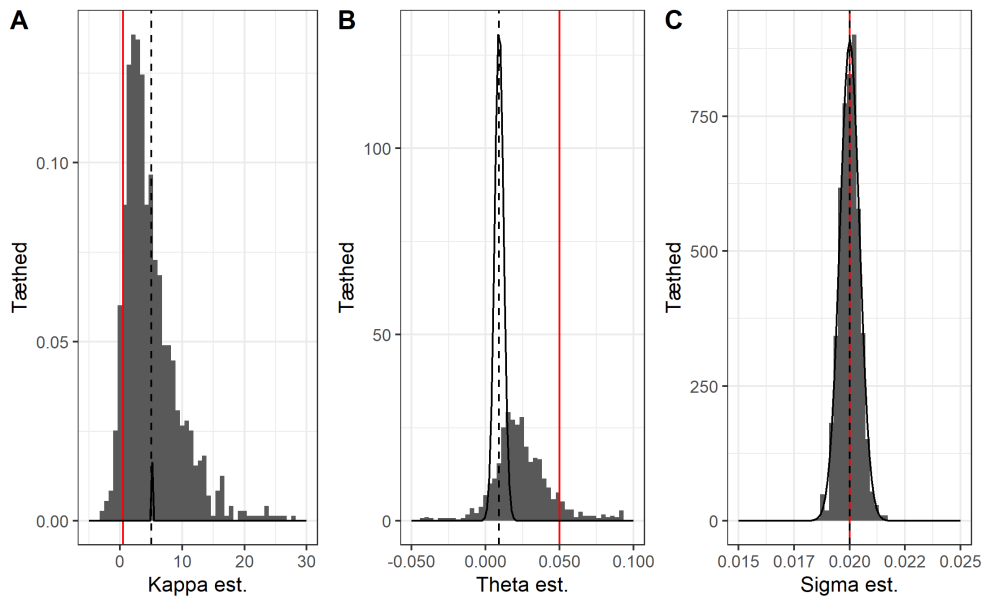
Note: Sort stipleet sort angiver det gennemsnitlige MLE-estimat, mens solid rød angiver den sande parameterværdi.

Helt pænt bliver det for $T=100$. Her er alle 3 dækningsgrader tæt på 95%. Det er blot ikke tilfredsstillende at tidshorisonten skal være markant mere end 20 år, for at der er pæn konvergens, taget modellens baggrund som rentemodell i betragtning. Og helt skidt ser det ud for korte tidshorisonter. Med en tidshorisont på et år, er den sande parameterværdi for θ således kun inkluderet i omtrent 34% af intervallerne, og estimererne for kappa og theta er ganske langt fra - se figur 2

1.4 VIX og Vasicek

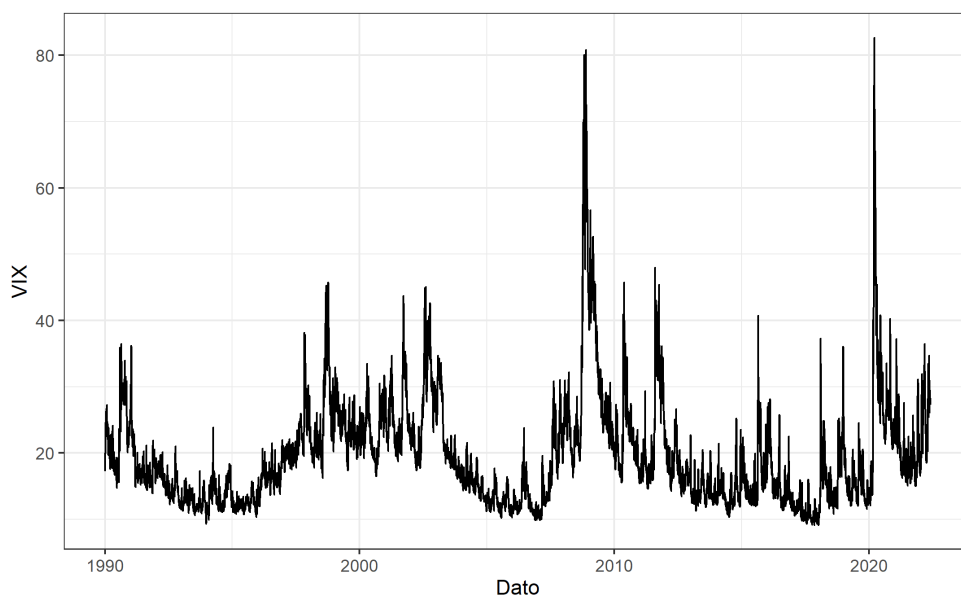
Nu anvendes Vasicek modellen på volatilitetsindexet, VIX ~~#NOTE~~ indsæt reference om hvor taget fra. VIX-data har eksisteret siden 1990, og som det ses af af figur 3, er ser tidsserien særdeles volatil ud. Volatiliten har altså volatilitet, og der er tilsyneladende perioder hvor volatiliteten er høj, mens den i andre er lav - der er en grad af persistens. Ved hjælp af ovenstående ligning 1.9, kan MLE-estimerne findes for to modeller - en hvor VIX følger Vasicek modellen, og en hvor $\log(\text{VIX})$ gør. Dette giver anledning til estimerne og konfidensintervallerne, som angivet i tabel 2.

Ifølge estimerne, har - hvis det er meningsfuldt at beskrive VIX eller $\log(\text{VIX})$ som Vasicek modeller - en kraftig forskydning **væk** fra hhv. et niveau på 19.62 og 2.,92, ifølge modellerne

Figur: Parameterestimer samt numerisk asymptotisk normalfordeling, $T=1$.

Note: Sort stiplet sort angiver det gennemsnitlige MLE-estimat, mens solid rød angiver den sande parameterværdi.

Figur: VIX, 1990-maj 2022



Tabel: Maximum likelihood estimator for κ, θ, σ og deres konfidensintervaller

VIX	κ	θ	σ
Estimat	5.45	19.62	26.49
Konfidensinterval	(4.30, 6.60)	(17.94, 21.29)	(26.08, 26.90)

log(VIX)	κ	θ	σ
Estimat	4.68	2.91	1.08
Konfidensinterval	(3.62, 5.75)	(2.83, 2.99)	(1.06, 1.09)

Note: Amerikansk kommatering anvendt for klarhed. Intervaller ikke ser ikke centreret ud, pga. afrunding.

for hhv. VIX og $\log(\text{VIX})$, modsat tanken om »rentens naturlige niveau«, som Vasicekmodellen lægger op til. . #NOTE: mere intuition (sæt i forhold til grafisk persistens)? Ydermere ses der to meget forskellige varians parametre. Det er dog ikke helt klart herudfra om det kan forsvares at hverken VIX eller $\log(\text{VIX})$ kan modelleres med Vasicek modellen. Det er dog markant tydeligere, såfremt ligning 1.3 udnyttes, for normaliseres VIX-observationerne med de predikterede middelværdier og varianser, fås QQ-plottet i 4.

Ud fra plottet er det tydeligt hvordan især VIX skulle være normalfordelt som ligning 1.3 foreskriver. Den har alt for tunge haler. Det er noget bedre for $\log(\text{VIX})$ - især den venstre hale er tæt på normalfordelingens. Men den højre hale så tung at der nok er mere til $\log(\text{VIX})$ end en Vasicek model. Mellem de to, er $\log(\text{VIX})$ at foretrække.

2 Pricing and hedging in the Black-Scholes model

2.1 Bevis for »et meget hjælpsomt resultat«

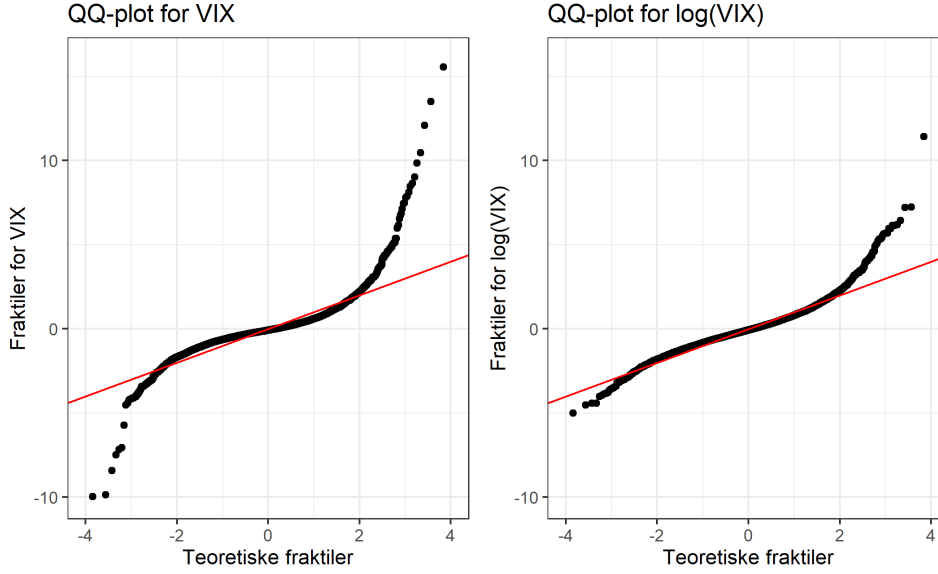
Den mest centrale model for kontinuert-tids finansiering, Black-Scholes modellen, har en aktiekurs, der følger geometrisk brownsk bevægelse. Mere præcist, udvikler den sig ved følgende differentialligning,

$$dX_t = \beta X_t dt + \xi X_t dW_t \quad (2.1)$$

med den velkendte løsning,

$$X_T = X_t \exp \left\{ \left(\beta - \frac{\xi^2}{2} \right) (T - t) + \xi (W_T - W_t) \right\} \quad (2.2)$$

Figur: QQ-plots for VIX og log(VIX).



Note: Rød linje er $y=x$.

Betragt nu $Y_t = e^{(\beta-\alpha)(T-t)} X_t$, der har følgende Itô-differentiale

$$\begin{aligned} dY_t &= \{-(\beta - \alpha)e^{(\beta-\alpha)(T-t)} X_t + \beta X_t e^{(\beta-\alpha)(T-t)}\} dt + \xi e^{(\beta-\alpha)(T-t)} X_t dW_t \\ &= \alpha Y_t dt + \xi Y_t dW_t \end{aligned}$$

Y_t er altså selv en geometrisk brownsk bevægelse nu med drift α . Det kan vi nu udnytte, ved at følge linjerne i [fin1]? Det kan vi nu bruge til at udregne $e^{-\alpha T} E[(X_T - K)^+]$.

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(T-t)} E[(X_T - K)^+ | \mathbb{F}_t] &= e^{-\alpha(T-t)} E[(Y_T - K)^+ | \mathbb{F}_t] \\ &= e^{-\alpha(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(Y_t \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{\xi^2}{2} \right) (T-t) + y \right\} - K \right)^+ \varphi_{\xi^2(T-t)}(y) dy \end{aligned}$$

Hvor "law of the unconscious statistician" blev brugt i sidste lighedstegn, og $\varphi_{\xi^2(T-t)}(y)$ er tætheden for en $\mathcal{N}(0, \xi^2(T-t))$ -fordeling. Integranden er forskellig fra 0 når

$$Y_t \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{\xi^2}{2} \right) (T-t) + y \right\} > K \Leftrightarrow y > d := \ln \left(\frac{K}{Y_t} \right) - \left(\alpha - \frac{\xi^2}{2} \right) (T-t) \Rightarrow$$

$$e^{-\alpha(T-t)} E[(X_T - K)^+ | \mathbb{F}_t] = e^{-\alpha(T-t)} \int_d^{\infty} Y_t e^{\left(\alpha - \frac{\xi^2}{2} \right) (T-t) + y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2(T-t)}} e^{\frac{-y^2}{2\xi^2(T-t)}} dy \quad (2.3)$$

$$- e^{-\alpha(T-t)} \int_d^{\infty} K \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2(T-t)}} e^{\frac{-y^2}{2\xi^2(T-t)}} dy \quad (2.4)$$

Lad $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, da er (2.4)-leddet givet ved $-e^{-\alpha(T-t)} K P(\xi\sqrt{T-t}Z > d) = -e^{-\alpha(T-t)} K \Phi(-\frac{d}{\xi\sqrt{T-t}})$ (hvor Φ angiver fordelingsfunktionen for en $\mathcal{N}(0, 1)$ -fordeling), per normalfordelingens symmetri. Lad d_2 være givet som $-\frac{d}{\xi\sqrt{T-t}} = \frac{\ln(\frac{Y_t}{K}) + (\alpha - \frac{\xi^2}{2})(T-t)}{\xi\sqrt{T-t}}$. Vendes blikket mod (2.3)-leddet, ses det at det er givet som

$$\begin{aligned}
(2.3) &= Y_t \int_d^\infty \exp \left\{ \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) (T-t) + y \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2(T-t)}} \exp \left\{ \frac{-y^2}{2\xi^2(T-t)} \right\} dy \\
&\stackrel{(1)}{=} Y_t \exp \left\{ \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) (T-t) \right\} \int_{\frac{d}{\xi\sqrt{T-t}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ z\xi\sqrt{T-t} - \frac{z^2}{2} \right\} dz \\
&\stackrel{(2)}{=} Y_t \exp \left\{ \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) (T-t) \right\} \int_{\frac{d}{\xi\sqrt{T-t}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(z - \xi\sqrt{T-t})^2}{2} + \frac{\xi^2}{2}(T-t) \right\} dz \\
&= Y_t P \left(Z + \xi\sqrt{T-t} > \frac{d}{\xi\sqrt{T-t}} \right) \\
&\stackrel{(3)}{=} Y_t P \left(Z \leq d_2 + \xi\sqrt{T-t} \right) \\
&= Y_t \Phi(d_1)
\end{aligned}$$

Hvor der i (1) foretages variabelskiftet $z = \frac{y}{\xi\sqrt{T-t}}$, i (2) bruges kvadratsætningerne, og i (3) er brugt normalfordelingens symmetri. d_1 er altså givet som $d_2 + \xi\sqrt{T-t} = \frac{\ln(\frac{Y_t}{K}) + (\alpha + \frac{\xi^2}{2})(T-t)}{\xi\sqrt{T-t}}$. Alt i alt fås der således:

$$e^{-\alpha(T-t)} E[(X_T - K)^+ | \mathbb{F}_t] = Y_t \Phi(d_1) - e^{-\alpha(T-t)} K \Phi(d_2) \stackrel{t \rightarrow 0}{\Rightarrow} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha T} E[(X_T - K)^+] &= X_0 e^{(\beta-\alpha)T} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{X_0 e^{(\beta-\alpha)T}}{K} \right) + \left(\alpha + \frac{\xi^2}{2} \right) T}{\xi\sqrt{T}} \right) \\
&\quad - e^{-\alpha T} K \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{X_0 e^{(\beta-\alpha)T}}{K} \right) + \left(\alpha - \frac{\xi^2}{2} \right) T}{\xi\sqrt{T}} \right) \\
&= X_0 e^{(\beta-\alpha)T} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{X_0}{K} \right) + \left(\beta + \frac{\xi^2}{2} \right) T}{\xi\sqrt{T}} \right) - e^{-\alpha T} K \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{X_0}{K} \right) + \left(\beta - \frac{\xi^2}{2} \right) T}{\xi\sqrt{T}} \right)
\end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Call-delta

Per [bjork], prop 7.13, er call prisen for et marked med P-dynamikker

$$dB_t = rB_t dt \quad (2.7)$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dt \quad (2.8)$$

hvor ligning(2.7) angiver rentedynamikken, og ligning(2.8) angiver aktiens dynamik, givet ved formelen:

$$F(t, s, K) = s\Phi(d_1(t, s, K)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2(t, s, K)), \quad (2.9)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

For at undersøge hvorledes denne pris ændrer sig ved ændringer i aktieprisen, kan ligning(2.9) differentieres. Bemærk her at $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial d_1}{\partial s} = \frac{\partial d_2}{\partial s}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= \Phi(d_1) + s\varphi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial s} - e^{r(T-t)}K\varphi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial s} \\ &= \Phi(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\ln(s) - \frac{\left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \\ &\quad - \frac{\partial d_1}{\partial s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\ln(K) - r(T-t) - \frac{\left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Fokuseres på andet led, ses følgende:

$$\begin{aligned} &\exp\left\{\ln(s) + \ln(K) - r(T-t) - \ln(K) + r(T-t) - \frac{\left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \\ &= \exp\left\{\ln(K) - r(T-t) + \frac{2\sigma^2(T-t)\ln\left(\frac{s}{K}\right) + r(T-t)^2 2\sigma^2}{2\sigma^2(T-t)}\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right)^2 + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2 + 2\ln\left(\frac{s}{K}\right)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma^2(T-t)}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\ln(K) - r(T-t) - \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right)^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2 + 2\ln\left(\frac{s}{K}\right)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \end{aligned}$$

Hvorned det ses at andet led er lig tredje i ligning(2.10), så $\frac{\partial F}{\partial s} = \Phi(d_1)$.

2.3 En binær option (og dets delta)

Den digitale option har et payoff givet ved $\mathbf{1}_{S_T \leq K}$. For at udregne prisen, kan vi følge et almindeligt arbitrageargument. Bemærk først at put-prisen på tidspunkt t er givet ved $P(t, s, K) = Ke^{-r(T-t)} + F(t, s, K) - s$, jf. [bjork], prop. 10.2. Her $F(t, s, K)$ callprisen på

tid t , og da den er differentiabel mht. K , jf. 2.9, bemærkes det at putprisen er ligeså. Lad $\alpha \in (0, 1)$. Betragt de to selvfinansierende porteføljer:

1. Sælg $\frac{1}{\alpha}$ put-optioner med payoff $\frac{1}{\alpha}((K - \alpha) - S_T)^+$, pris $\frac{1}{\alpha}P_{K-\alpha}$, hvor $P_{K-\alpha}$ er t_0 -prisen på en putoption med strike $K - \alpha$, Køb $\frac{1}{\alpha}$ put optioner, strike K ; payoff: $\frac{1}{\alpha}(K - S_T)^+$, t_0 -pris: $\frac{1}{\alpha}P_K$

- (a) Prisen for denne portefølje på t_0 er $\frac{1}{\alpha}(P_K - P_{K-\alpha})$, og payoff på tid T er givet ved:

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(K - S_T)^+ & , S_T \leq K - \alpha \\ \frac{1}{\alpha}(K - S_T) \in (0, 1) & , -\alpha < S_T \leq K \\ 0 & , S_T > K \end{cases}$$

- (b) Udbyttet er lig den digitale option, for $(S_T \leq K - \alpha) \cup (S_T > K)$, men lavere for $S_T \in (K - \alpha, K]$

2. Sælg $\frac{1}{\alpha}$ put-optioner med payoff $\frac{1}{\alpha}(K - S_T)^+$, pris $\frac{1}{\alpha}P_K$, Køb $\frac{1}{\alpha}$ put optioner, strike K ; payoff: $\frac{1}{\alpha}(K + \alpha - S_T)^+$, t_0 -pris: $\frac{1}{\alpha}P_{K+\alpha}$

- (a) Prisen for denne portefølje på t_0 er $\frac{1}{\alpha}(P_{K+\alpha} - P_K)$, og payoff på tid T er givet ved:

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(K + \alpha - S_T)^+ & , S_T \leq K \\ 1 + \frac{1}{\alpha}(K - S_T) \in (0, 1) & , K < S_T < K + \alpha \\ 0 & , S_T \geq K + \alpha \end{cases}$$

- (b) Udbyttet er lig den digitale option, for $(S_T \leq K) \cup (S_T > K + \alpha)$, men højere for $S_T \in (K, K + \alpha]$

Da anden portefølje entydigt er bedre end både første og den digitale option, ved udbetaling, må den have en højere pris. Med et lignende argument for første portefølje, får vi derfor:

$\frac{1}{\alpha}(P_K - P_{K-\alpha}) < D_K < \frac{1}{\alpha}(P_{K+\alpha} - P_K)$, uanset valg af α . Her angiver D_K prisen på den digitale option på t_0 . Ses der nærmere på porteføljernes payofffunktioner, vil prisen stige for den første portefølje, for faldende α , mens den for anden portefølje vil falde. Og, såfremt putprisen er differentiabel mht., ses det at

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{P_{K+\alpha} - P_K}{\alpha} = \frac{\partial P}{\partial K} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{P_K - P_{K-\alpha}}{\alpha}$$

Hvorned

$$\begin{aligned} D_K &= \frac{\partial P}{\partial K} = e^{-r(T-t)} + \frac{\partial}{\partial K} (s\Phi(d_1(t, s, K)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2(t, s, K))) \\ &\stackrel{(1)}{=} e^{-r(T-t)} + \frac{\partial d_1}{\partial K} (s\varphi(d_1(t, s, K)) - e^{-r(T-t)}K\varphi(d_2(t, s, K))) - e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t, s, K)) \\ &\stackrel{(2)}{=} e^{-r(T-t)} - e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t, s, K)) \end{aligned}$$

Hvor det i (1) blev brugt at $\frac{\partial d_1}{\partial K} = \frac{\partial d_2}{\partial K}$, og i (2) blev brugt udregningerne fra 2.10. At finde den digitale options delta er nu en smal sag:

$$\begin{aligned} \Delta D_K &= \frac{\partial^2 P}{\partial K \partial s} = -e^{-r(T-t)}\varphi(d_2(t, s, K)) \frac{\partial d_2}{\partial s} \Leftrightarrow \\ \Delta D_K &= -e^{-r(T-t)}\varphi(d_2(t, s, K)) \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.4 Et hedging eksperiment.

Nu betragtes den mere praktiske side af hedging, hvortil der laves et eksperiment. Her følges linjerne i [bjork], eksempel 10.6. Først sælges et option, enten call eller digital. Dernæst ønsker vi at immunisere vores risiko mod ændringer i aktieprisen. Vi bemærker at vi kan købe aktien, og da er værdien af porteføljen $V(s, K, t) = -F_{call/digital}(t, s, K) + xS_T(t, s, K)$, hvor x angiver antallet af aktier og F angiver prisen på callen eller den digitale option. Vi kan nu differentiere mht. aktiekursen, og får:

$$\frac{\partial}{\partial s} V(s, K, t) = -\frac{\partial}{\partial s} F_{call/digital}(t, s, K) + \frac{\partial}{\partial s} xS_T(t, s, K) = 0 \Leftrightarrow x = \Delta F_{call/digital}(t, s, K) \quad (2.12)$$

Hvorned at der vi, med et køb på $\Delta F_{call/digital}(t, s, K)$ aktier og et salg på en option, har en delta-neutral portefølje. Der laves derfor et simulationseksperiment, hvor der hedges call og digitale optioner i diskret tid. Forsøget laves - i grove træk ²på følgende måde:

²Se fuldstændig beskrivelse i implementationen på NOTE:indsæt link til Github her

Tabel: Modelparametre

S_0	r	μ	σ	σ_{hedge}	T	K	Hedgepunkter	Repetitioner
100	0,02	0,02	0,2	0,2	1	102	252	1000

1. Først fastsættes parametrene i pris- & delta-ligningerne ovenfor, samt μ , antal hedge punkter, og NOTE???, så også modellen er fuldt specificeret. NOTE: spørg sofie her - hvad er initial outlay? købet af optionen? salget? hvorfor er prisen på initial outlay ikke lig værdien af porteføljen, når vi har deltahedget? for så er der vel ikke nogen risiko => arbitrage? Derudover gøres der plads til at volatiliteten i hedgen ikke er lig den sande volatilitet i markedet i aktien, i tråd med hvorledes det er eneste parameter i pris- og deltaligningerne, der kunne fejlvurderes. Parametrene er som følger af tabel 3.
2. t_0 : Nu skabes en portefølje, hvor der først sælges en option af den givne type, herefter købes $\Delta F_{call/digital}(0, S_0, K)$ -antal aktier. Banken modtager differensen mellem køb og salg.
3. $t_{i>0}$: Aktiekursen opdateres vha. differensligningen. Herefter, i rækkefølge; (i) Værdien af porteføljen opdateres, som følge af den nye aktiekurs og rentetilskrivninger, (ii) porteføljen gøres igen deltaneutral ved at købe aktier efter ligning 2.12, (iii) resten sættes/lånes i banken.
4. $t = T$: Værdien af hedgeporteføljen udregnes, og afvigelsen fra optionsværdien afgøres, og dens standardfejl undersøges.

Eksperimentet giver anledning til en række betragtninger. Først og fremmest, at det er muligt at ramme både den digitale option og call-optionen på trods af ændringer i aktieprisen, så eksperimentet er en succes, se figur 5 . $\mu \neq r$, gør ikke megen forskel, se figur 6. Det er helt i tråd med at den optimale hedgingstrategi for aktien, er komplet uafhængigt af dens drift. Vendes blikket mod fejlspecificering af σ , som i figur 7, ses det at volatiliteten betyder langt mere for de to optioner - helt i tråd med at volatiliteten er et parameter i optionernes prissætning, modsat μ . I hedging-strategien, og i prissætningen er der intet hensyn til driften, men en del hensyn til volatiliteten - for begge optioner - og det er netop det, der slår ud i de to figurer. Det betyder

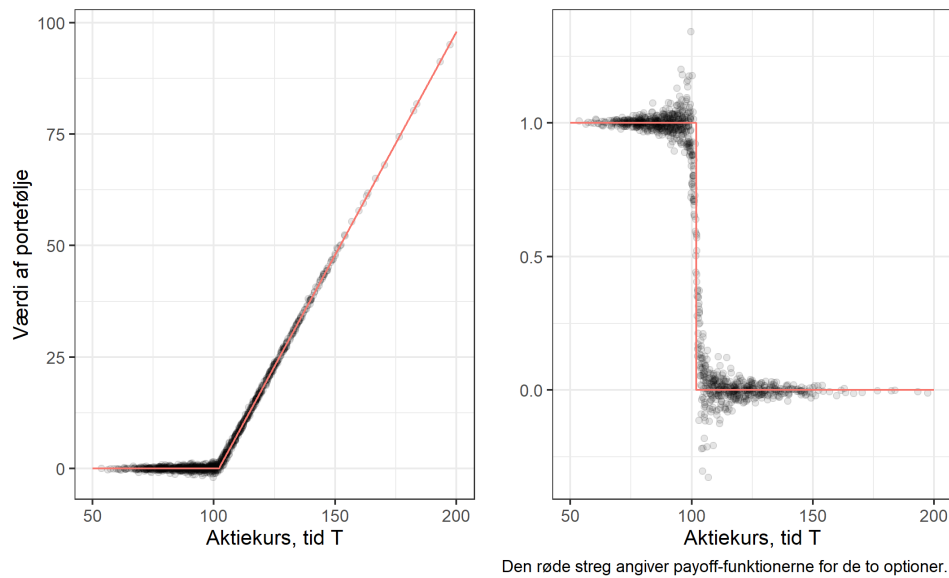
mest for callen, idet σ indgår kraftigst i prissætningen af callen. Billedet ændres ikke markant for større eller mindre antal hedgepunkter, det bibringer blot lidt mere støj.

Afhængigheden mellem standard afvigelse på hedgefejl og antallet af hedgepunkter undersøges i log-log plottet, figur 8. Her bemærkes det at de to optioners hedgefejl begge aftager for højere antal hedgepunkter. Hældningen for gruppen med call-options hedges er cirka $1/2$, mens den er $1/4$ for den digitale option. Så en 16-dobling af antallet af hedgepunkter vil ifølge figuren betyde, at den nye hedgefejle er en fjerdedel af den oprindelige for call-optioner, men kun halvt så stor for digitale optioner. Det er ikke overraskende, hvis der kigges på de to optioners delta - se figur 9. Hvis optionen er at the money, reagerer deltaet for den digitale option enormt voldsomt (faktisk konvergerer den mod uendelig i for $t \rightarrow T$), men for alle andre aktiekurser reagerer den slet ikke. Herimod har deltaet for callen slet ikke samme voldsomme reaktion. Det ses også af figur 5, hvor fejlene for den digitale option i meget høj grad er centreret omkring striken, 102. Hvis deltaet har form som på den digitale option, så er lokale approksimationer ikke nær så gode; i hedge eksperimentet vil vi ofte ende med en portefølje med for høj eller lav beholdning af aktien, hvis kursen er tæt på striken - simpelthen fordi vi ikke hedgede i det snævre tidsspektrum rundt om tidspunktet hvor $S_t = K$, som (tæt på udløb) er den eneste mængde tidspunkter der tæller. Fordi callen har en mindre ekstrem funktionel form, kan vi oftere bruge de ekstra hedgetidspunkter til noget, hvorfor den får mere gavn af ekstra hedgetidspunkter. Intuitionen ses også let analytisk.

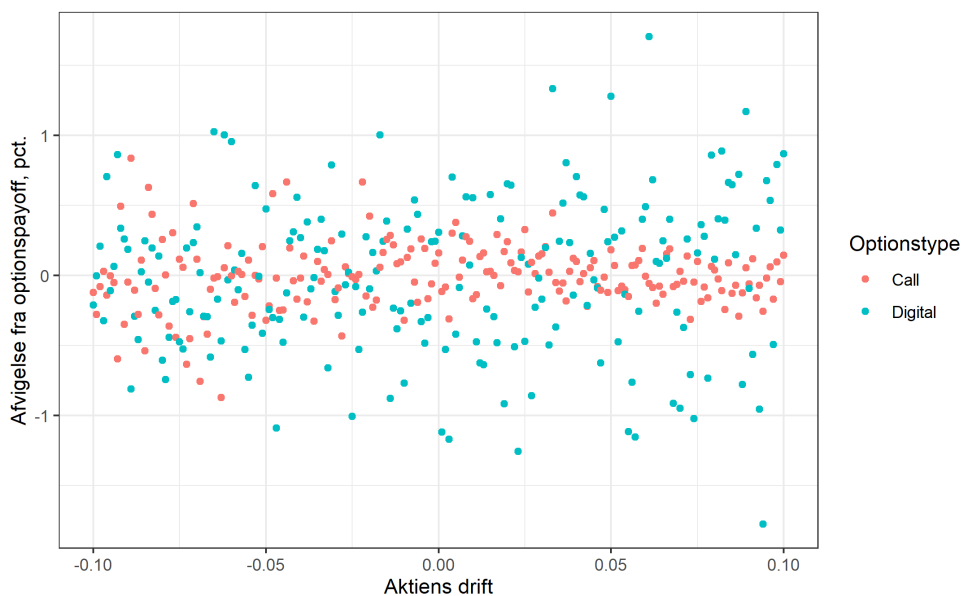
2.5 Et kig på den digitale no-touch.

Betragt nu den digitale no-touch option, der indgås på tid 0, og betaler $\mathbb{1}_{\max_{[0,T]} S_t < K}$ til tidspunkt T . Igennem hele det kommende antages det at $K > S_0$, da optionen ellers altid vil betale 0, og den ville derfor være værdiløs. Per det andet fundamentale teorem for arbitrage-fri prissættelse (prop. 11.27 i [bjork]), fås at prisen derfor må være $e^{-r(T-t)} E^Q \left(\mathbb{1}_{\max_{[0,T]} S_t < K} \right)$. For finde denne pris kunne man helt naivt forsøge at simulere sig til det; simulere en lang række aktiestier (med $r = \mu = \frac{\sigma^2}{2}$ som drift, så man får risikoneutral prissætning), beregne deres forventede payoff for no-touch optionen, og tilbagediskontere med renten. Problemet ville være at man altid kun ville have endeligt mange observationer af aktien, hvormed man

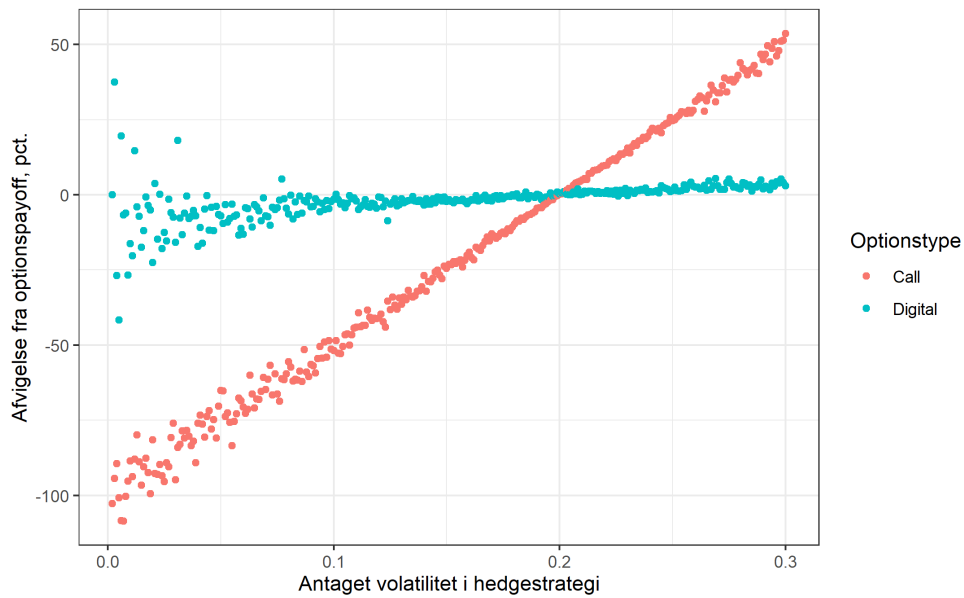
Figur: Værdi af simulerede replikerende porteføljer for hhv. calloptionen (venstre) og den digitale option (højre).



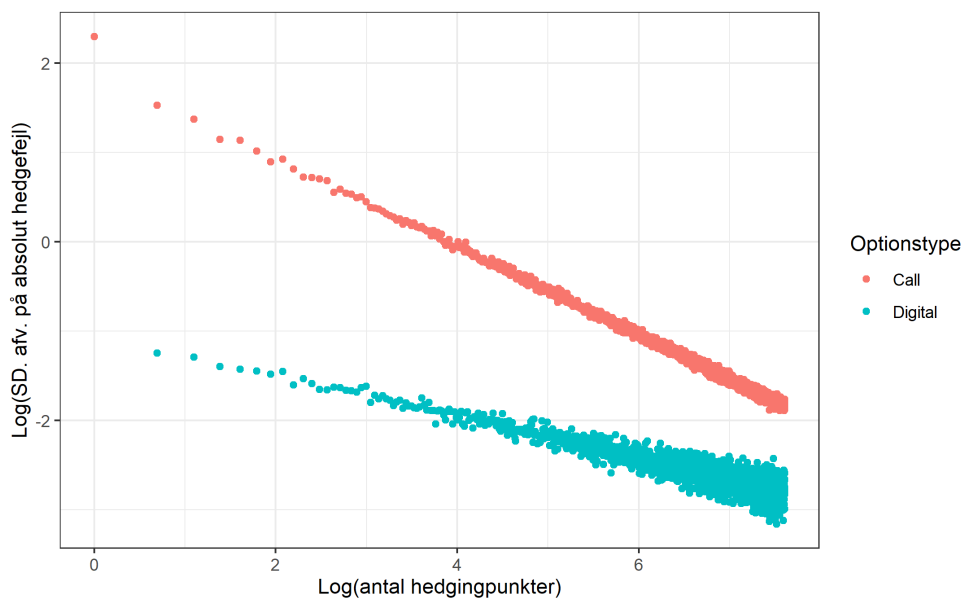
Figur: Hedgingfejl, som følge af ændringer i drifts-parametren



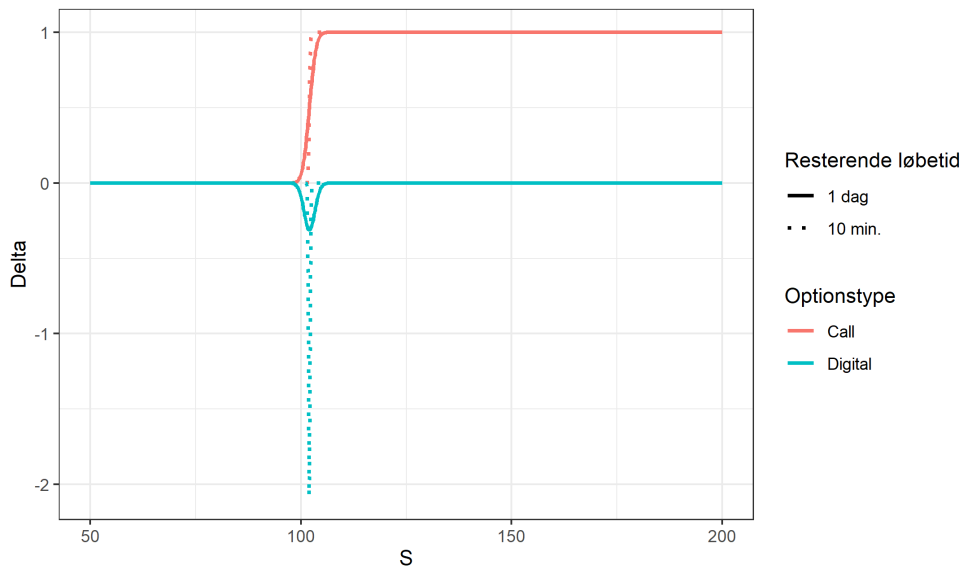
Figur: Hedging-fejl, som følge af misspecifikation af volatilitetsparameter



Figur: Standard afvigelse på Hedging-fejl, som funktion af antallet af hedgepunkter, log-log-plot



Figur: Deltaer for de to optionstyper



ville undervurdere alle de mellemliggende tidspunkter, hvor aktien kunne være oversteget striken;

$$E^Q \left(\mathbb{1}_{\max_{t \in [0, T]} S_t^Q < K} \right) = Q \left(\max_{t \in [0, T]} S_t^Q < K \right) < Q \left(\max_{t \in \cup_{i=1}^n t_i} S_t^Q < K \right)$$

Det er første sandsynlighed vi ønsker at regne - men det er sidste sandsynlighed vi vil le ende med at regne, hvormed optionen bliver prissat for dyrt. Derfor må der tænkes anderledes - her følges #NOTE: Referer til NTU note. For at forsimple udfordringen antages det at aktien er en Q-martingal, altså at $r = \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow S_t^Q = S_0 e^{\sigma W_t^Q}$. Hermed er $\max_{t \in [0, T]} S_t^Q < K \Leftrightarrow S_0 e^{\sigma \max_{t \in [0, T]} W_t^Q} < K \Leftrightarrow \max_{t \in [0, T]} W_t^Q < \frac{\ln(\frac{K}{S_0})}{\sigma}$. Indfør nu stoppetiden $\tau_a = \inf \left\{ t \geq 0 : W_t^Q = a \right\}$, der er endelig (Law of Iterated Logarithm), Q-ns. Det noteres at $Q(W_T \geq a | \tau_a \leq T) = Q(W_T \leq a | \tau_a \leq T) = \frac{1}{2}$, per reflektionsprincippet - at den browniske bevægelse er symmetrisk omkring ethvert punkt den har besøgt, idet browniske bevægelser har den stærke Markov NOTE: INDSÆT REF HER egenskab, hvormed $W_t^Q - W_{\tau_a}^Q$ er en brownisk bevægelse (med fordeling $\mathcal{N}(0, T - \tau_a)$). Og da $\max_{t \in [0, T]} W_t^Q \geq$

$a \Leftrightarrow \tau_a \leq T$ fås:

$$\begin{aligned}
 Q\left(\max_{t \in [0, T]} W_t \geq a\right) &= Q(\tau_a \leq T) = Q(\tau_a \leq T \wedge W_T > a) + Q(\tau_a \leq T \wedge W_T \leq a) \\
 &\stackrel{(1)}{=} 2Q(\tau_a \leq T \wedge W_T \geq a) \\
 &= 2Q\left(\max_{t \in [0, T]} W_t \geq a \wedge W_T \geq a\right) \\
 &= 2Q(W_T \geq a) \\
 &= Q(W_T \geq a) + Q(W_T \leq -a) \\
 &= Q(|W_T| \geq a)
 \end{aligned}$$

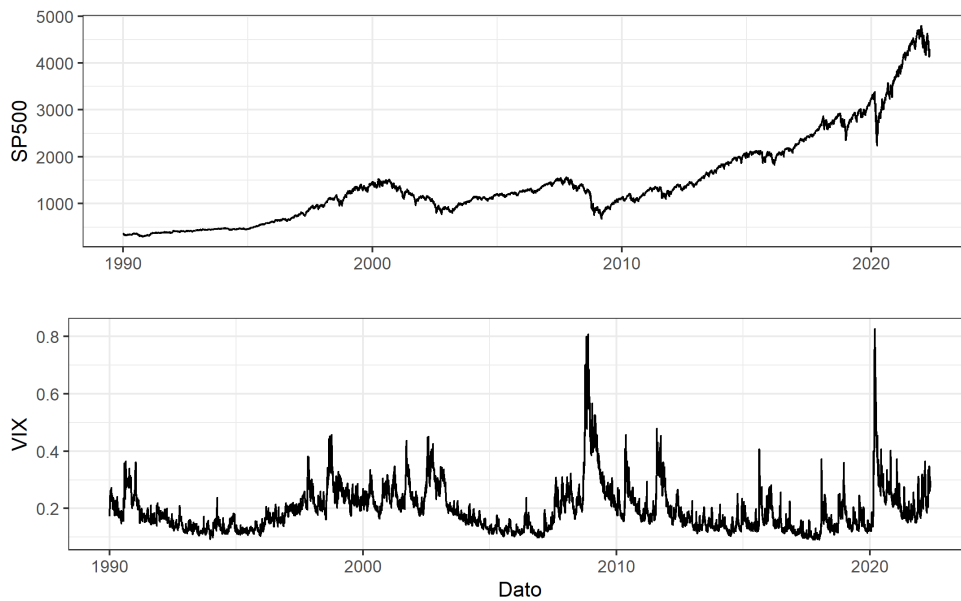
Hvor det i (1) blev brugt $Q(W_T \geq a | \tau_a \leq T) = Q(W_T \leq -a | \tau_a \leq T)$, og i (2) at $\max_{t \in [0, T]} W_t^Q \geq a \Leftrightarrow \tau_a \leq T$. Så max af en brownsk bevægelse fra 0 til T, har samme fordeling som absolutværdien af en brownsk bevægelse i tidspunkt T. Dermed fås nu:

$$\begin{aligned}
 Q\left(\max_{t \in [0, T]} S_t^Q < K\right) &= Q\left(\max_{t \in [0, T]} W_t \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}\right) \\
 &= Q\left(|W_T| \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}\right) \\
 &= Q\left(\sqrt{T}Z \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}\right) - Q\left(\sqrt{T}Z \leq -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}\right), \sim \mathcal{N}(0, 1) \\
 &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)
 \end{aligned}$$

Hvorned det fås at prisen på notouch er $e^{-rT} E^Q\left(\mathbf{1}_{\max_{[0, T]} Q < K}\right) = e^{-rT} \left(\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right)$.

Et kort eksperiment - se script på #NOTE: lav reference til github - viser at med $K = 102$, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = \frac{\sigma^2}{2} = 0.02$, $\mu = r$, $T = 1$ og fås en teoretisk pris på 0.07731, mens den naive simulation, i tråd med ovenstående argumenter, overvurderer, og giver en pris på 0.08753. Det er med 5.000 »beregningspunkter« (10.000 gentagelser), så den procentvise afvigelse er ganske betragtelig.

Figur: SP500- og VIX-indekset siden 1990



Note: VIX er divideret med 100 her.

3 Empirical hedging

3.1 SP500 og VIX

Nedenfor, i figur 10, ses de to indeks, VIX (divideret med 100) og SP500. SP500 er de 500 største firmaer målt på market cap, på børsen, og er verdens måske vigtigste indeks. Ud dette indeks handles der selvsagt optioner, som, i deres prissætning, tager hensyn til volatiliteten. Herudfra kan VIX konstrueres. VIX er nemlig givet som den risikoneutrale forventning af variansen for SP500. Hermed burde høje værdier af VIX være tæt forbundet til den realiserede volatilitet for SP500. Dette billede understøttes af figuren, hvor store udsving i SP500, ligger i samme periode som høje værdier af VIX.

Hvis SP500 følger en geometrisk brownsk bevægelse, $dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$, må dens afkast som bekendt være lognormalt fordelt. Derfor betragtes afkastforskellen mellem to dage, givet ved

$$r_{t_i} = \log \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)$$

Denne må være normalfordelt, per 2.2. Og ud fra alm. statistik #NOTE Rolf/Sofie vises?,

vides det at følgende bud på en estimator for volatiliteten er oplagt:

$$\sigma_{\infty} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{\Delta t}}$$

Andre måder findes også for at bestemme volatiliteten. Samme tilgangsmåde kunne anvendes på f.eks. alt data tilgængeligt op til tid T , hvor der oveni kunne anvendes et eksponentielt gennemsnit, så volatiliteten på tid T estimeres som

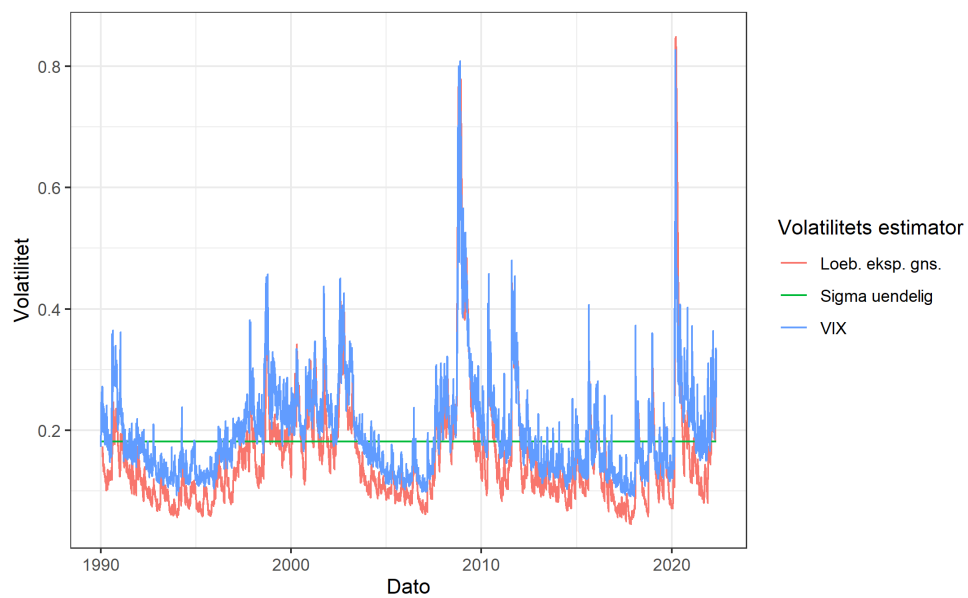
$$\sigma_{eksp.gns.}^T = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} (1 - \lambda)} \sum_{i=1}^T \frac{(r_{T-i+1} - \bar{r})^2}{\Delta t} \lambda^{i-1} (1 - \lambda)}$$

for et givent λ , her valgt til 94%, ligesom RiskMetrics har valgt til deres volatilitetsmål (lav reference til dette link: <https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ae2-3449d5c7e95a>). Et sammendrag af de forskellige estimater findes i figur 11. Figuren beskriver hele tidsserien, fra 1990 til i dag, og det flere ting springer i øjnene. VIX og det 1 måneders rullende eksponentielle gennemsnit, $\sigma_{eksp.gns.}$, er begge særdeles volatile, og svinger med centrum cirka omkring σ_{∞} . Dynamikken mellem de to er dog ikke så tydelig, dertil er tidsserien for lang. Af denne grund, er de 3 estimatorer plottet for de seneste 3 år i 12. Denne figur viser to ting. Først, viser den at $\sigma_{eksp.gns.}$ generelt er lidt lavere end VIX i denne periode (men ikke altid), og derudover viser den, at $\sigma_{eksp.gns.}$ typisk »følger efter« VIX. Det kan skyldes at VIX afspejler markedets (berettigede) frygt for volatilitet inden for en kort tidshorisont, som så realiseres, og $\sigma_{eksp.gns.}$ så følger efter i takt med den realiserede volatilitet. Men det kan også skyldes at der har været stor faktisk volatilitet på en given dag, hvilket får markedsdeltagerne til at forudse højere volatilitet fremover - hvad $\sigma_{eksp.gns.}$ ikke har nået at reagere lige så kraftigt på, idet at dagen, og de efterfølgende dages volatilitet ikke endnu har fyldt så meget i $\sigma_{eksp.gns.}$, da der er en meget høj λ , og dermed en tilsvarende lavere vægtning af de nye kraftigere udsving. Eksperimenter med $\lambda = 0$, hvormed $\sigma_{eksp.gns.}$ reagerer instantant (men NOTE: vel ikke proportionelt?), tyder på den første forklaring er den mest rigtige.

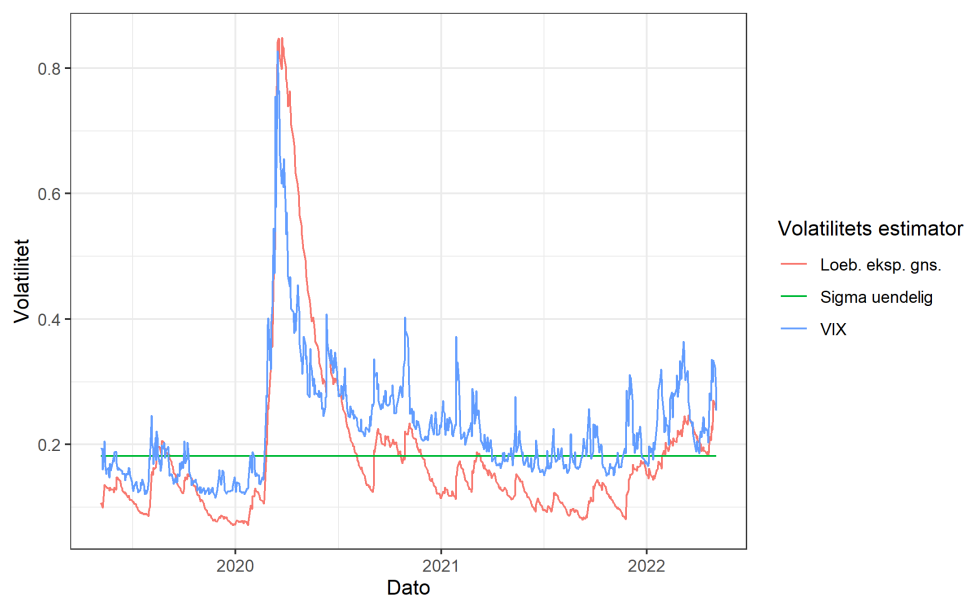
3.2 Et hedging-eksperiment på virkelige data

Nu gennemføres et hedgingeksperiment for call-optioner, ligesom i afsnit 2. Eneste forskelle er 1. i stedet for σ_{hedge} anvendes forskellige former for volatilitetsmål - i første omgang σ_{∞} , der er det bedste bud på volatiliteten i markedet, såfremt den er konstant, som i den

Figur: Estimer af volatilitet, SP500



Figur: Estimer af volatilitet, SP500



geometriske brownske bevægelse, og at renten sættes lig 0. 2. σ sættes lig σ_{hedge} og 3. i stedet for simulerede aktiekurser bruges SP500 indekset. For at skabe et sammenlignings grundlag, simuleres aktiekurser S_t^{sim} , som der hedges tilsvarende call optioner ud fra. Tilsvarende udregninger som for σ_∞ kan gøres for at bestemme et estimat for driftsparametren i μ (per ligning 2.2), hvormed S_t^{sim} kan skabes:

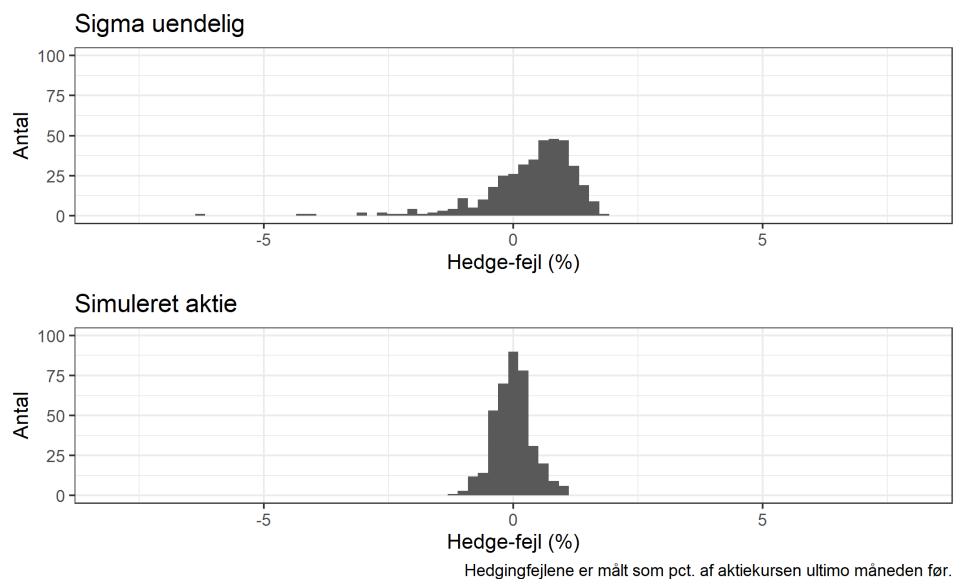
$$\frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)}{T} = (\mu - \sigma^2/2) + \frac{\sigma}{T}W_T \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)}{T} + \frac{\sigma_\infty^2}{2}$$

Gennemføres et sådant eksperiment, fås hedgingfejl (værdi af portefølje minus værdi af option på sluttidspunkt, som pct. af aktien i slutningen af måneden før, som kan ses i øverst i figur 13. Det ses af figuren, at fejlen ikke synes normalfordelt, idet den har en særdeles tung venstrehale. Til sammenligning er nederste plot i samme figur - dette er hedgingfejlene for en simuleret brownsk bevægelse, med drift $\hat{\mu} = 0.0913$ og volatilitet $\sigma_\infty = 0.1819$. Tabel 4 understøtter udtrykket med stærk venstreskævhed, samt meget forskellig kurtosis - SP500 hedgefejlene har altså tungere haler, og er venstreskæv - hvad tilfældet ikke er for de hedgefejl, der kommer af en geometrisk brownsk bevægelse. Dernæst, i figur 14, undersøges fejlene i tidsspektiv. I det øverste af de to plots i figuren ses hedgingfejlene for SP500-hedgen over tid, og det ses ganske tydeligt at der er perioder med meget store udsving (finanskrisen), og andre perioder med meget små udsving, modsat i nederste plot i samme figur, der angiver hedgingfejl over tid for den geometriske brownske bevægelse. Fejlene er slet ikke i samme grad koncentreret i perioder her. Dette passer fint, med den generelle erkendelse af at volatilitet selv udviser volatilitet (og dermed gør hedgen det også). Et sidste søm i kisten om hvorvidt SP500 følger en geometrisk brownsk bevægelse, ses i figur 15, hvor logafkastene, $\log(S_i) - \log(S_{i-1})$ for SP500 er opgjort. Disse skulle være normalfordelte, hvis SP500 fulgte en geometrisk brownsk bevægelse. Det er de oplagt ikke, thi den har en meget tung venstrehale, og ikke har nogen synderlig højre hale.

3.3 Efter konstant volatilitet

Droppes antagelsen om konstant volatilitet, giver det anledning til at prøve at se om det er muligt at sænke hedgefejlene - og især at undgå meget høje hedgefejl - ved at anvende andre volatilitetsestimatorer end σ_∞ - som f.eks. $\sigma_{eksp.gns.}^T$, eller VIX^T , som hedging volatilitet på tidspunkt T. Et enkelt volatilitetsmål tilføjes - nemlig den volatilitet, der minimerer

Figur: Hedgingfejl for hver måned siden februar 1990, som pct. af aktiens pris, dagen ultimo måneden før



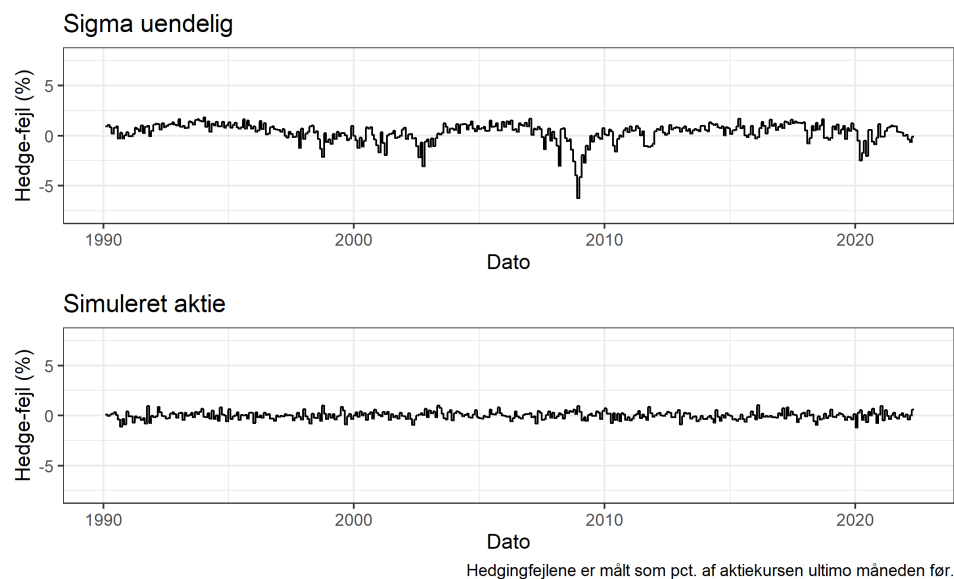
Tabel: Momenter for hedgeafvigelser

NOTE: SKAL OPDATERES!!!

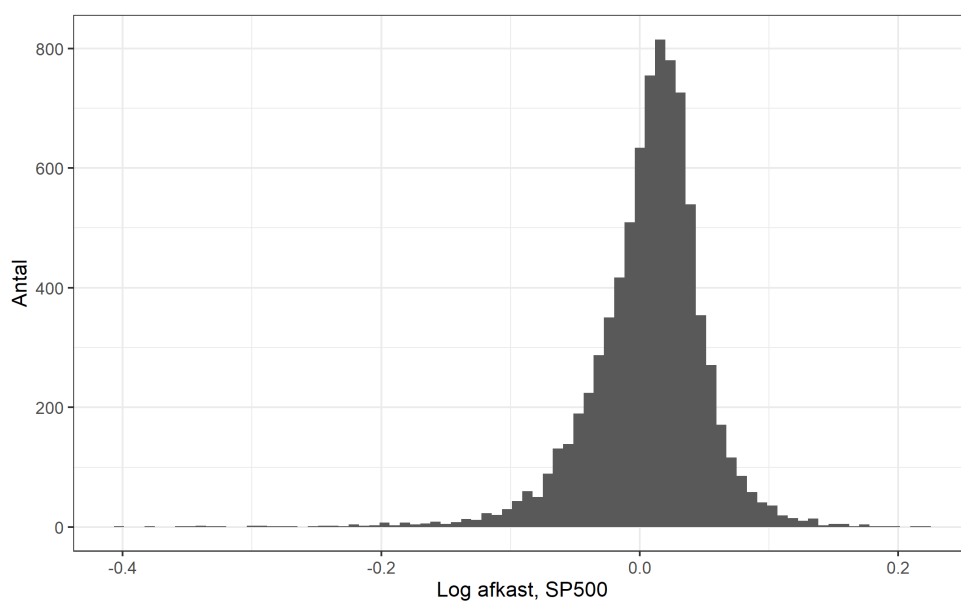
Mål	SP500 hedge	GBM-hedge
Gennemsnit	0.0031	-0.0001
Standardafvigelse	0.0114	0.0044
Skævhed	-3.7385	-0.3062
Kurtosis	29.59	4.22

Hedging fejl er angivet i pct. af SP500, ultimo måneden før.

Figur: Hedgingfejl for hver måned siden februar 1990, som pct. af aktiens pris, dagen ultimo måneden før



Figur: Logafkast for SP500



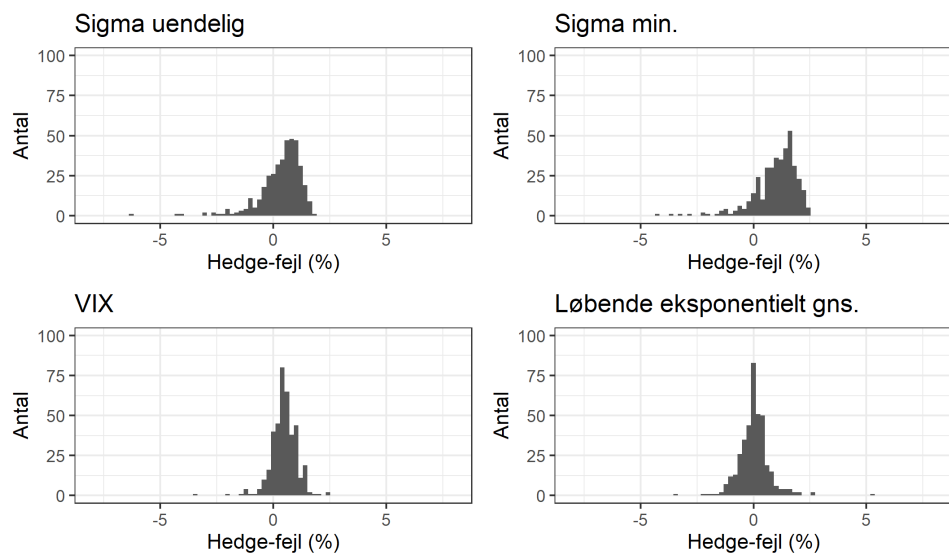
Tabel: Momenter for hedgeafvigelse

Mål	$\sigma_{eksp.gns.}^T$	VIX^T	σ_{min}
Gennemsnit	0,0200	0,4912	0,9961
Standardafvigelse	0,7560	0,6097	0,9557
Skævhed	-0,1642	-1,5677	-1,7026
Kurtosis	16,5865	13,04	7,8381

Hedge-fejl opgjort som pct. af aktien, ultimo måneden før.

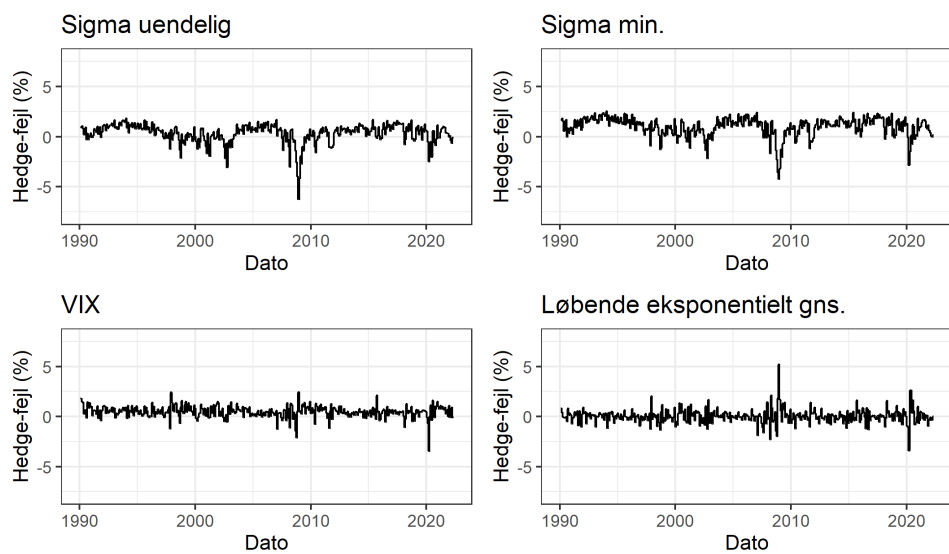
summen af de kvadratiske hedgefejl (σ_{min}). Det er selvsagt ikke synderligt anvendeligt i virkeligheden, som andet end reference at anvende afkast i 2022 til at skabe en volatilitetsparameter til hedging i 2001. Derudover afsættes beløbet ved hedgens start, T_0 baseret på $\sigma_{hedge}^{T_0}$. Ellers er alt som ovenfor. Gennemføres eksperimentet, fås hedgefejl, som i figur 16 og 17. I tabel 5, fremgår det hvordan volatilitets estimerne klarer sig. σ_{min} er i store træk ringest til at anvende som input til replikation - den har højest standardafvigelse, og betydelig venstreskævhed, omend den ikke har helt lige så tunge haler, så selvom den udnytter fremtidig information, så betyder dens manglende dynamik, at den ikke forbedrer meget ifht. σ_{∞} - den har tilmed højere standardafvigelse, hvad der nok må være det primære sammenligningspunkt. Ikke overraskende er det fordelagtigt at opdatere sin viden undervejs, således at ens volatilitetsparameter kan ændre sig i tilfælde af f.eks. kriser. VIX og $\sigma_{eksp.gns.}^T$ klarer sig begge markant bedre end σ_{∞} , men på forskellige måder. $\sigma_{eksp.gns.}^T$ har lidt større standardafvigelse, men er tilgængelig ikke nær så venstreskæv, og ender ikke i samme grad med at have en portefølje med for høj værdi, så kan synes som det oplagte valg. Dette billede underbygges i histogrammerne i figur 16, med den ene undtagelse at σ_{min} nok ikke har helt så lette haler, som dens kurtosis angav - det skyldes nok snarere dens mangel på højrehale. I 17, falder σ_{min} endnu engang igennem, og figuren sætter samtidig spørgsmålstejn ved om nu $\sigma_{eksp.gns.}^T$ faktisk er bedst. For her er det tydeligt at hedgingfejlene er mere »grupperede« for hedges med $\sigma_{eksp.gns.}^T$ end for hedges med VIX^T som volatilitetsparameter. Så hedgingfejlene for en given sub-periode (f.eks. et regnskabsår, hvor man skal forklare sin bestyrelse hvilke besynderlige hedges, der har kostet banken alle pengene), er ofte kraftigere med førstnævnte hedge parameter. Det kunne betyde noget, hvis man (f.eks. pga. likviditetsbegrænsninger) ikke kan vente på at ens »optimale« hedgestrategi får succes igen. I det lys er VIX noget bedre.

Figur: Histogrammer med hedge-fejl



Hedgingfejlene er målt som pct. af aktiekursen ultimo måneden før.

Figur: Tidsserier med hedgingfejl



Hedgingfejlene er målt som pct. af aktiekursen ultimo måneden før.