いる。」と読みかえることもできる。前半の文は現在完了を用いて<年数+ have[has] passed>「(年数) が過ぎた」の形で表すことができる。後半の文の「～がいる」は there are ～ (「～」が複数形なので be動詞は are),「～している…」は<名詞+現在分詞句>の形にする。「たくさんの種類の～」は many kinds of ～などとする。

(イ) 日本文を「私たちは彼らのために何をするべきかについて真剣に考える必要がある。」と読みかえる。「私たちは」は We,「～する必要がある」は<need + to不定詞>の形を用いる。「～について考える」は think about ～,「真剣に」は seriously などで表す。「何をするべきか」は what to do,「彼らのために」は for them とする。また，日本文を「私たちにとって，私たちが彼らのために何をすることができるのかについて真剣に考えることは必要だ。」と読みかえることもできる。「(人) にとって～することは…だ」は形式主語構文<it is +形容詞+ for +人+ to不定詞>の形で表すことができる。「必要な」は necessary,「私たちにとって」は for us などとする。「私たちが何をすることができるのか」は間接疑問で what we can do とする。

・「(年数) が過ぎた」
年数+ have[has] passed

(イ)
・「～する必要がある」
need + to不定詞
・「(人) にとって～することは…だ」
it is +形容詞+ for +人+ to不定詞

記述力アップ問題

B では，イラストを見て状況の問題点を把握し，中学生がどうするべきか英語で伝える自由英作文の問題を出題した。次の完答への道のりの一つひとつができていたかを，下の解説本文と照らし合わせながら確認してみよう。

☑完答への道のり

- ☐ **与えられた図や表について，内容や設定を理解することができた**
  公園で5人の中学生と2人の小学生がいる状況に遭遇している場面で，イラストから，その状況の問題点と中学生への提案を把握することができた。…❶
- ☐ **情報の過不足がなく，与えられた条件を満たす解答をまとめることができた**
  状況の問題点として，中学生が原因で小学生が遊ぶことができないなどと説明することができた。さらに，中学生がどうするべきかについて，小学生も公園で遊べるように，場所を分け合ってはどうかなどと提案することができた。…❷
- ☐ **読み手に伝わる英語表現になっているか解答を見直した**
  書き終わったあとで自分の答えを再度読み返して，適切に英文が構成できているか確認した。…❸

B イラストを見て状況の問題点を把握し，中学生がどうするべきか英語で伝える問題 (❶)。

状況の問題点については，「あなたたちが原因で，あの子どもたち (=小学生) が遊ぶことができません。」などと伝えればよい。理由を述べるときは because などの接続詞を用いる。提案するときは Why don't you ～?「～したらどうですか？」や How[What] about -ing?「～したらどうですか？」などを用いる。「A を B と分け合う」は share A with B とする (❷)。

解答を見直すときは，主語に対して適切な動詞を用いているか，時制は適切か，正しい代名詞を用いているかなどにも気を使うようにする (❸)。

B ・「～したらどうですか？」
Why don't you ～? ／
How[What] about -ing?

数　学

1 小問集合 (25 点)

次の □ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $(2x+3y)(3x-2y)-(2x-3y)(3x+2y)$ を展開し，整理すると，[(ア)] となる。

(2) $15a^2-11a-14$ を因数分解すると，[(イ)] となる。

(3) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)^2$ を簡単にすると，[(ウ)] となる。

(4) 連立不等式 $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+1 \leqq \dfrac{x}{6}+2 \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+1}{2}<1 \end{cases}$ の解は，[(エ)] である。

(5) 方程式 $|2-5x|=1$ の解は，$x=$ [(オ)] である。

解答・配点

(1)(ア) $10xy$ (5点)
(2)(イ) $(3a+2)(5a-7)$ (5点)
(3)(ウ) $4\sqrt{6}$ (5点)
(4)(エ) $-11<x\leqq 6$ (5点)
(5)(オ) $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{3}{5}$ (5点)

解法

(1)

$$\begin{aligned}&(2x+3y)(3x-2y)-(2x-3y)(3x+2y)\\&=6x^2+5xy-6y^2-(6x^2-5xy-6y^2)\\&=10xy\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&15a^2-11a-14\\&=(3a+2)(5a-7)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & \longrightarrow & 10 \\ 5 & \times & -7 & \longrightarrow & -21 \\ \hline 15 & & -14 & & -11 \end{array}$$

(3)

$$\begin{aligned}&(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)^2\\&=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}+1)\\&=\sqrt{2}(3-1)(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}(3-1)(\sqrt{3}+1)\\&=2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)+2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\\&=2\sqrt{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\}\\&=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}\\&=4\sqrt{6}\end{aligned}$$

◀**展開の公式**
$(ax+b)(cx+d)$
$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

◀**因数分解の公式**
$acx^2+(ad+bc)x+bd$
$=(ax+b)(cx+d)$

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \longrightarrow & bc \\ c & \times & d & \longrightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

◀$\sqrt{6}+\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
$\sqrt{6}-\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
と変形する。

(4)

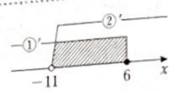
$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+1 \leqq \dfrac{x}{6}+2 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+1}{2}<1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より　$2x+6 \leqq x+12$
　$x \leqq 6$ ……①'

②より　$2(x-1)-3(x+1)<6$
　$2x-2-3x-3<6$
　$-x-5<6$
　$-x<11$
　$x>-11$ ……②'

①', ②' の共通範囲を求めると

$-11<x \leqq 6$



◀①の両辺に 6 を掛ける。

◀②の両辺に 6 を掛ける。

◀不等式の両辺を負の数で割ると、不等号の向きが変わる。

(5)

$|2-5x|=1$
$2-5x=\pm 1$

$2-5x=1$ のとき
　$-5x=-1$　　$x=\dfrac{1}{5}$

$2-5x=-1$ のとき
　$-5x=-3$　　$x=\dfrac{3}{5}$

よって、方程式の解は　$x=\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}$

◀方程式 $|x|=c$ $(c>0)$ の解は $x=\pm c$

2 数と式 (25 点)

$a=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $b=|2\sqrt{2}-3|$ とする。

(1) a の分母を有理化し、簡単にせよ。

(2) $a+b$ の値を求めよ。また、$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ の値を求めよ。

(3) $\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ の値を求めよ。

配点

(1) 6点　(2) 9点　(3) 10点

解答

(1)

$$a=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

A□
$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}$$

◀分母・分子に $\sqrt{2}+1$ を掛ける。

B□
$$=3+2\sqrt{2}$$

答　$3+2\sqrt{2}$

完答への道のり
- A　a の分母を有理化するために、分母・分子に $\sqrt{2}+1$ を掛けることができた。
- B　a の分母を有理化することができた。

(2)

$2\sqrt{2}<3$ より、$2\sqrt{2}-3<0$ であるから

$b=|2\sqrt{2}-3|$

A□
$=-(2\sqrt{2}-3)$
$=3-2\sqrt{2}$

B□
$a+b=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})$
$=6$

C□
$ab=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$
$=3^2-(2\sqrt{2})^2$
$=9-8=1$

D□
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$
$=(a+b)+2\sqrt{ab}$
$=6+2\sqrt{1}$
$=8$

答　$a+b=6$, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=8$

◀**絶対値**
a を実数とするとき

$$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

◀ab の値は、$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ の値を求めるときに必要になるため、先に求めておく。

完答への道のり
- A　$2\sqrt{2}-3<0$ であることから、絶対値記号を外すことができた。
- B　$a+b$ の値を求めることができた。
- C　ab の値を求めることができた。
- D　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ の値を求めることができた。

(3)

A□
$a-b=(3+2\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})$
$=4\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{2b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

B□
$$=\frac{\sqrt{2}\,a-(\sqrt{2}+1)\sqrt{ab}+b}{a-b}-\frac{a+(\sqrt{2}+1)\sqrt{ab}+\sqrt{2}\,b}{a-b}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-1)a-(2\sqrt{2}+2)\sqrt{ab}-(\sqrt{2}-1)b}{a-b}$$

C□
$$=\frac{(\sqrt{2}-1)(a-b)-(2\sqrt{2}+2)\sqrt{ab}}{a-b}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-1)\cdot 4\sqrt{2}-(2\sqrt{2}+2)\cdot 1}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6-6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$

D□
$$=\frac{-6+3\sqrt{2}}{4}$$

答　$\dfrac{-6+3\sqrt{2}}{4}$

◀$a-b$ の値は、後で必要になるため、先に求めておく。

◀分母を有理化する。

◀$a-b=4\sqrt{2}$, $ab=1$ を代入する。

完答への道のり

- Ⓐ $a-b$ の値を求めることができた。
- Ⓑ 与式の分母を有理化することができた。
- Ⓒ 分子を $a-b$ と $\sqrt{ab}$ を用いて表すことができた。
- Ⓓ 答えを求めることができた。

3 数と式 (25点)

ある旅行会社では，参加者を10名以上50名以下に限定したバスツアーを企画している。このバスツアーを実施した場合にかかる費用には，「参加者の規模に応じて一律にかかる費用」(貸し切りバスの費用など) と「参加者1名ごとにかかる費用」(施設への入場料など) がある。

参加者が26名以上になると貸し切りバスを2台用意する必要があるため，「参加者の規模に応じて一律にかかる費用」は次の表のようになる。

参加者の人数	10名以上25名以下	26名以上50名以下
規模に応じてかかる費用	120000円	210000円

また，参加者が15名以上の場合，団体割引が適用される施設があるため，「参加者1名ごとにかかる費用」は次の表のようになる。

参加者の人数	10名以上14名以下	15名以上50名以下
参加者1名ごとにかかる費用	6000円	5000円

参加者の人数を x 名 (x は10以上50以下の整数)，1名あたりの参加料を a 円 (a は12000以上の整数) とし，このバスツアーを実施したときの利益について考える。ただし，利益とは参加料の合計から「参加者の規模に応じて一律にかかる費用」と「参加者1名ごとにかかる費用」の合計を引いた金額のことであり，キャンセル等による参加者の欠員や消費税等の税金は考えないものとする。

(1) $x=14$ とする。利益が76000円となるような，a の値を求めよ。

(2) $x=20$ のときの利益を A 円，$x=30$ のときの利益を B 円とする。このとき，A，B をそれぞれ a を用いて表せ。また，$|A-B| \leqq 30000$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(3) (2)の $|A-B| \leqq 30000$ を満たす a の最大値を M とする。1名あたりの参加料が M 円のとき，利益が参加料の合計の30％以上40％以下となるような x の値の範囲を求めよ。

配点

(1) 4点 (2) 9点 (3) 12点

解答

(1)

$x=14$ のとき，規模に応じてかかる費用は120000円，参加者1名ごとにかかる費用は6000円であるから，利益は

Ⓐ $a \times 14-(120000+6000 \times 14)=14a-204000$ (円)

◀参加料の合計から費用の合計を引く。

これが76000円であるから

$14a-204000=76000$

$14a=280000$

Ⓑ $a=20000$

これは，a が12000以上の整数という条件に適する。

答 $a=20000$

完答への道のり

- Ⓐ $x=14$ のときの利益を a を用いて表すことができた。
- Ⓑ 答えを求めることができた。

(2)

$x=20$ のとき，規模に応じてかかる費用は120000円，参加者1名ごとにかかる費用は5000円であるから，利益 A は

$A=a \times 20-(120000+5000 \times 20)$

Ⓐ $=20a-220000$

$x=30$ のとき，規模に応じてかかる費用は210000円，参加者1名ごとにかかる費用は5000円であるから，利益 B は

$B=a \times 30-(210000+5000 \times 30)$

Ⓑ $=30a-360000$

$|A-B| \leqq 30000$ のとき

$|(20a-220000)-(30a-360000)| \leqq 30000$

$|-10a+140000| \leqq 30000$

$|a-14000| \leqq 3000$

よって

Ⓒ $-3000 \leqq a-14000 \leqq 3000$

$11000 \leqq a \leqq 17000$

Ⓓ $a \geqq 12000$ より $12000 \leqq a \leqq 17000$

答 $A=20a-220000$，$B=30a-360000$

$12000 \leqq a \leqq 17000$

◀絶対値を含む不等式の解

$c>0$ のとき

$|x| \leqq c \Longleftrightarrow -c \leqq x \leqq c$

◀a は整数である。

完答への道のり

- Ⓐ $x=20$ のときの利益 A を a を用いて表すことができた。
- Ⓑ $x=30$ のときの利益 B を a を用いて表すことができた。
- Ⓒ 絶対値を含む a についての不等式の絶対値記号を外すことができた。
- Ⓓ a の値の範囲を求めることができた。

(3)

$|A-B| \leqq 30000$ を満たす a の最大値は17000であるから $M=17000$

よって，参加料の合計は $17000 \times x=17000x$ (円)

Ⓐ (i) $10 \leqq x \leqq 14$ のとき

Ⓑ 利益は $17000 \times x-(120000+6000 \times x)=11000x-120000$ (円)

利益が参加料の合計の30％以上40％以下となるとき

Ⓒ $17000x \times \frac{30}{100} \leqq 11000x-120000 \leqq 17000x \times \frac{40}{100}$

$5100x \leqq 11000x-120000 \leqq 6800x$

$51x \leqq 110x-1200 \leqq 68x$

よって

$$\begin{cases} 51x \leqq 110x-1200 & \cdots\cdots① \\ 110x-1200 \leqq 68x & \cdots\cdots② \end{cases}$$

◀規模に応じてかかる費用や1名ごとにかかる費用が変わる x の値の範囲で場合分けを行う。

◀規模に応じてかかる費用は120000円，1名ごとにかかる費用は6000円である。

◀$A \leqq B \leqq C \Longleftrightarrow \begin{cases} A \leqq B \\ B \leqq C \end{cases}$

①より

$-59x \leqq -1200$

$x \geqq \frac{1200}{59} = 20+\frac{20}{59}$ ……①′

②より

$42x \leqq 1200$

$x \leqq \frac{200}{7} = 28+\frac{4}{7}$ ……②′

①′, ②′ を満たす x の値の範囲は

$20+\frac{20}{59} \leqq x \leqq 28+\frac{4}{7}$

D□ これは $10 \leqq x \leqq 14$ を満たさないから不適。

E□ (ii) $15 \leqq x \leqq 25$ のとき

F□ 利益は　$17000\times x-(120000+5000\times x) = 12000x-120000$ (円)

(i)と同様に不等式を立てると

G□ $5100x \leqq 12000x-120000 \leqq 6800x$

$51x \leqq 120x-1200 \leqq 68x$

よって

$\begin{cases} 51x \leqq 120x-1200 & \text{……③} \\ 120x-1200 \leqq 68x & \text{……④} \end{cases}$

③より

$-69x \leqq -1200$

$x \geqq \frac{400}{23} = 17+\frac{9}{23}$ ……③′

④より

$52x \leqq 1200$

$x \leqq \frac{300}{13} = 23+\frac{1}{13}$ ……④′

③′, ④′ を満たす x の値の範囲は

$17+\frac{9}{23} \leqq x \leqq 23+\frac{1}{13}$

H□ x は $15 \leqq x \leqq 25$ の範囲の整数であるから，x は $18 \leqq x \leqq 23$ を満たす整数である。

I□ (iii) $26 \leqq x \leqq 50$ のとき

J□ 利益は　$17000\times x-(210000+5000\times x) = 12000x-210000$ (円)

(i)と同様に不等式を立てると

K□ $5100x \leqq 12000x-210000 \leqq 6800x$

$51x \leqq 120x-2100 \leqq 68x$

よって

$\begin{cases} 51x \leqq 120x-2100 & \text{……⑤} \\ 120x-2100 \leqq 68x & \text{……⑥} \end{cases}$

⑤より

$-69x \leqq -2100$

$x \geqq \frac{700}{23} = 30+\frac{10}{23}$ ……⑤′

⑥より

$52x \leqq 2100$

$x \leqq \frac{525}{13} = 40+\frac{5}{13}$ ……⑥′

◀規模に応じてかかる費用は120000円，1名ごとにかかる費用は5000円である。

◀規模に応じてかかる費用は210000円，1名ごとにかかる費用は5000円である。

⑤′, ⑥′ を満たす x の値の範囲は

$30+\frac{10}{23} \leqq x \leqq 40+\frac{5}{13}$

L□ x は $26 \leqq x \leqq 50$ の範囲の整数であるから，x は $31 \leqq x \leqq 40$ を満たす整数である。

(i)～(iii)より，求める x の値の範囲は

$18 \leqq x \leqq 23,\ 31 \leqq x \leqq 40$

答　$18 \leqq x \leqq 23,\ 31 \leqq x \leqq 40$

完答への道のり	
	A E I 費用の根拠が異なる3つの場合に分けて考えることができた。
	B F J それぞれの場合において，利益を x を用いて表すことができた。
	C G K それぞれの場合において，条件を満たす不等式を立てることができた。
	D H L それぞれの場合において，x の値の範囲を求めることができた。

4　2次関数 (25点)

2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ があり，$y=f(x)$ のグラフは2点(1, 1)，(3, 7)を通る。ただし，a, b は定数とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(3) t を正の定数とし，$-t \leqq x \leqq 2t$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする。$M+m=\frac{21}{2}$ となるような t の値を求めよ。

配点

(1) 6点　(2) 7点　(3) 12点

解答

(1)

$y=f(x)$ のグラフが2点 (1, 1)，(3, 7) を通るから

$f(1)=1$ かつ $f(3)=7$

A□ すなわち $\begin{cases} 1+a+b=1 \\ 9+3a+b=7 \end{cases}$

よって $\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=-2 \end{cases}$

B□ これを解いて　$a=-1,\ b=1$

答　$a=-1,\ b=1$

◀$y=f(x)$ のグラフが点 (r, s) を通る $\Longleftrightarrow s=f(r)$

完答への道のり	
	A グラフが通る2点の座標の値を代入し，a, b についての連立方程式を立てることができた。
	B a, b の値を求めることができた。

(2)

$f(x)=x^2-x+1$

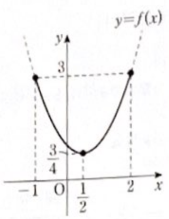
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，$f(x)$ は

$x=-1,\ 2$ で最大値 3

$x=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{3}{4}$

をそれぞれとる。



◀最大値をとる x の値が 2 個あることに注意する。

答 $x=-1,\ 2$ のとき，最大値 3
$x=\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{3}{4}$

完答への道のり
- A $f(x)$ を平方完成することができた。
- B グラフの軸と定義域の位置関係を考えて，最大値，最小値と，そのときの x の値をそれぞれ求めることができた。

(3)

$y=f(x)$ のグラフの軸は，直線 $x=\frac{1}{2}$ である。

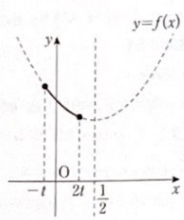
(i) $0<2t<\frac{1}{2}$ すなわち $0<t<\frac{1}{4}$ のとき

◀軸が定義域の右外にある場合。

$f(x)$ は $x=-t$ で最大，$x=2t$ で最小となるから

$M=f(-t)=t^2+t+1$

$m=f(2t)=4t^2-2t+1$



$M+m=\frac{21}{2}$ より

$(t^2+t+1)+(4t^2-2t+1)=\frac{21}{2}$

$5t^2-t+2=\frac{21}{2}$

$10t^2-2t-17=0$

$t=\frac{1\pm\sqrt{171}}{10}$

◀2次方程式の解の公式
2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ここで，$169<171$ より $13<\sqrt{171}$ であるから

$\frac{1+\sqrt{171}}{10}>\frac{1+13}{10}>\frac{1}{4}$　また　$\frac{1-\sqrt{171}}{10}<0$

よって，いずれの値も $0<t<\frac{1}{4}$ を満たさないから不適。

◀得られた t の値が，場合分けの条件を満たすか吟味する。

(ii) $-t \leqq \frac{1}{2} \leqq 2t$ かつ $\frac{t}{2} \leqq \frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{4} \leqq t \leqq 1$ のとき

◀軸が定義域に含まれ，定義域の中央 $x=\frac{t}{2}$ より右側，または中央にある場合。

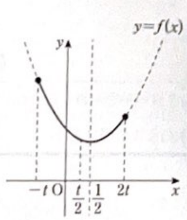
$f(x)$ は $x=-t$ で最大，$x=\frac{1}{2}$ で最小となるから

$M=f(-t)=t^2+t+1$

$m=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$M+m=\frac{21}{2}$ より

$(t^2+t+1)+\frac{3}{4}=\frac{21}{2}$



$4t^2+4t-35=0$

$(2t+7)(2t-5)=0$

$t=-\frac{7}{2},\ \frac{5}{2}$

これらは $\frac{1}{4} \leqq t \leqq 1$ を満たさないから不適。

◀得られた t の値が，場合分けの条件を満たすか吟味する。

(iii) $-t \leqq \frac{1}{2} \leqq 2t$ かつ $\frac{1}{2}<\frac{t}{2}$ すなわち $1<t$ のとき

◀軸が定義域に含まれ，定義域の中央 $x=\frac{t}{2}$ より左側にある場合。

$f(x)$ は $x=2t$ で最大，$x=\frac{1}{2}$ で最小となるから

$M=f(2t)=4t^2-2t+1$

$m=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$M+m=\frac{21}{2}$ より

$(4t^2-2t+1)+\frac{3}{4}=\frac{21}{2}$

$16t^2-8t-35=0$

$(4t+5)(4t-7)=0$

$t=-\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}$

$1<t$ を満たすものは　$t=\frac{7}{4}$

(i)〜(iii)より，求める t の値は

$t=\frac{7}{4}$

◀得られた t の値が，場合分けの条件を満たすか吟味する。

答 $t=\frac{7}{4}$

完答への道のり
- ADG グラフの軸と定義域の位置関係により，3つの場合に分けて考えることができた。
- BEH それぞれの場合において，$M+m=\frac{21}{2}$ から t についての2次方程式を立てることができた。
- CFI それぞれの場合において，t の2次方程式を解き，解の吟味をすることができた。

5 場合の数 (25点)

1，2，3，4，5 の 5 種類の数字を使って 4 桁の整数をつくる。ただし，同じ数字を繰り返し使ってもよいものとする。

(1) 4 桁の整数は全部で何個できるか。

(2) 1122 や 2122 のように，1 と 2 のちょうど 2 種類の数字を使ってできる 4 桁の整数は全部で何個あるか。また，ちょうど 2 種類の数字を使ってできる 4 桁の整数は全部で何個あるか。

(3) ちょうど 3 種類の数字を使ってできる 4 桁の整数は全部で何個あるか。また，このうち，5000 以上の整数は全部で何個あるか。

配点

(1)　5点　(2)　8点　(3)　12点

解答

(1)

4桁の整数の個数は，1，2，3，4，5から重複を許して4個とった重複順列の総数に等しいから，その個数は

A□ $5^4 = 625$ (個)

答　625個

◀重複順列
異なる n 個のものから重複を許して r 個とる順列の総数は
n^r (通り)

完答への道のり	
	A 重複順列の考えを用いて答えを求めることができた。

(2)

［1と2のちょうど2種類の数字を使ってできる4桁の整数］

1または2だけを使ってできる4桁の整数は

$2^4 = 16$ (個)

このうち，1111と2222を除くと，その個数は

A□ $16-2=14$ (個)

［ちょうど2種類の数字を使ってできる4桁の整数］

2種類の数字の選び方が

B□ ${}_5C_2 = \dfrac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$ (通り)

であり，そのそれぞれの場合についてできる4桁の整数は，前半より14個ずつであるから，求める4桁の整数の個数は

C□ $14\times10 = 140$ (個)

答　(順に) 14個，140個

◀組合せ
異なる n 個のものから r 個取り出す組合せの総数は
${}_nC_r = \dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots2\cdot1}$ (通り)

完答への道のり	
	A 1と2のちょうど2種類の数字を使ってできる4桁の整数の個数を求めることができた。
	B 5種類の数字から2種類の数字を選ぶ選び方の総数を求めることができた。
	C ちょうど2種類の数字を使ってできる4桁の整数の個数を求めることができた。

(3)

［ちょうど3種類の数字を使ってできる4桁の整数］

・1種類の数字だけでできる4桁の整数

1111，2222，3333，4444，5555 の5個。

・ちょうど2種類の数字でできる4桁の整数

(2)より　140個

・ちょうど4種類の数字でできる4桁の整数

1，2，3，4，5から異なる4個をとった順列の総数に等しいから

A□ ${}_5P_4 = 5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120$ (個)

また，すべての4桁の整数は，(1)より625個あるから，ちょうど3種類の数字を使ってできる4桁の整数の個数は

$625-(5+140+120) = 625-265$

B□ $= 360$ (個)

［ちょうど3種類の数字を使ってできる5000以上の4桁の整数］

ちょうど3種類の数字を使った5000以上の4桁の整数は，千の位が5である。

◀全体の場合の数から，条件を満たさないものの個数を引く方法で求める。

◀順列
異なる n 個のものから r 個を取り出して並べる順列の総数は
${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ (通り)

(i)　百，十，一の位に5を含むとき

C□ 百，十，一の位の数字は5を1個だけ含み，他の2個は1，2，3，4のうちの異なる2個の数字であるから，その数字の選び方は

D□ ${}_4C_2 = \dfrac{4\cdot3}{2\cdot1} = 6$ (通り)

その各々において，3個の数字の並べ方が3!通りあるから，4桁の整数の個数は

E□ $3!\times6 = 36$ (個)

F□ (ii)　百，十，一の位に5を含まないとき

百，十，一の位の数字の選び方は

G□ ${}_4C_2 = \dfrac{4\cdot3}{2\cdot1} = 6$ (通り)

その各々について，百，十，一の位の数字の並べ方は，例えば1と2の場合

112，121，122，211，212，221

の6通りがあるから，4桁の整数の個数は

H□ $6\times6 = 36$ (個)

(i)，(ii)より，求める5000以上の4桁の整数の個数は

I□ $36+36 = 72$ (個)

答　(順に) 360個，72個

◀百，十，一の位に5を含むかどうかで場合分けをする。

◀
千　百　十　一
$\boxed{5}\,\underbrace{\boxed{1}\,\boxed{5}\,\boxed{2}}$
5を1個含む3種類の数字

◀
千　百　十　一
$\boxed{5}\,\underbrace{\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{2}}$
1，2，3，4のうちの2種類

完答への道のり	
	A 1種類，2種類，および4種類の数字でできる整数の個数を求めることができた。
	B ちょうど3種類の数字を使ってできる整数の個数を求めることができた。
	C F 百，十，一の位に5を含むかどうかで2つの場合に分けて考えることができた。
	D G それぞれの場合において，百，十，一の位の数字の選び方の総数を求めることができた。
	E H それぞれの場合において，4桁の整数の個数を求めることができた。
	I ちょうど3種類の数字を使ってできる5000以上の4桁の整数の個数を求めることができた。

［前半の別解］

ちょうど3種類の数字を使ってできる4桁の整数は，1123のように，同じ数字が2個あり，他の2個は異なる数字である。

2個の同じ数字の選び方は，5通り。

その各々について残りの2個の数字の選び方は ${}_4C_2 = \dfrac{4\cdot3}{2\cdot1} = 6$ (通り)

さらに，選んだ3種類，4個の数字について，その順列の総数は

$\dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} = 12$ (通り)

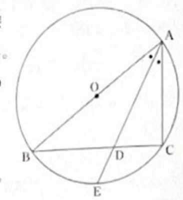
以上より，求める4桁の整数の個数は

$5\times6\times12 = 360$ (個)

◀同じものを含む順列
a が p 個，b が q 個，c が r 個，…あるとき，そのすべてを1列に並べる並べ方は全部で
$\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$ (通り)
ただし，$p+q+r+\cdots = n$

6 図形の性質 (25点)

右の図のように，点Oを中心とする円Oに△ABCが内接しており，AB = 15，AC = 9 で，辺ABは円Oの直径である。また，∠BACの二等分線と辺BCの交点をDとし，∠BACの二等分線と円Oとの交点のうちAでない方の点をEとする。



(1) 辺BCの長さを求めよ。また，線分BDの長さを求めよ。

(2) 線分ADの長さを求めよ。また，線分DEの長さを求めよ。

(3) 2直線AC，BEの交点をFとし，2直線OD，BEの交点をGとする。$\frac{BG}{GE}$ の値を求めよ。また，線分GFの長さを求めよ。

配点

(1) 6点 (2) 8点 (3) 11点

解答

(1)

辺ABは円Oの直径であるから

$\angle ACB = 90^\circ$

△ABCにおいて，三平方の定理により

$BC = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$

線分ADは∠BACの二等分線であるから

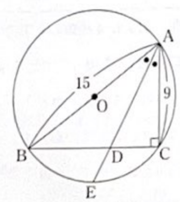
$BD : DC = AB : AC$

$= 15 : 9$

$= 5 : 3$

よって

$BD = \frac{5}{8}BC = \frac{5}{8} \times 12 = \frac{15}{2}$



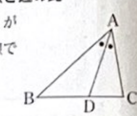
答 $BC = 12$，$BD = \frac{15}{2}$

◀**角の二等分線と辺の比**

右図で，ADが∠Aの二等分線であるとき

BD : DC

= AB : AC



完答への道のり	
	Ⓐ 辺ABが円Oの直径であることから，∠ACB = 90° であることに気づくことができた。
	Ⓑ 三平方の定理を用いて，辺BCの長さを求めることができた。
	Ⓒ 角の二等分線の性質を用いて，線分BDの長さを求めることができた。

(2)

$CD = BC - BD = 12 - \frac{15}{2} = \frac{9}{2}$

△ADCにおいて，三平方の定理により

$AD = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9^2} = \frac{9\sqrt{5}}{2}$

方べきの定理により

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

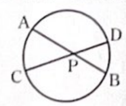
$\frac{15}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9\sqrt{5}}{2} \cdot DE$

$DE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

◀**方べきの定理**

円の弦ABとCDの交点をPとする。このとき

PA·PB = PC·PD



答 $AD = \frac{9\sqrt{5}}{2}$，$DE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

完答への道のり	
	Ⓐ 三平方の定理を用いて，線分ADの長さを求めることができた。
	Ⓑ 方べきの定理を用いて，線分DEの長さについての方程式を立てることができた。
	Ⓒ 線分DEの長さを求めることができた。

(3)

(2)より

$AD : DE = \frac{9\sqrt{5}}{2} : \frac{3\sqrt{5}}{2}$

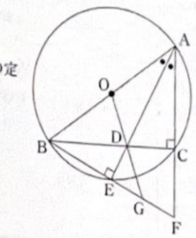
$= 3 : 1$

△ABEと直線OGにおいて，メネラウスの定理により

$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BG}{GE} \cdot \frac{ED}{DA} = 1$

$\frac{1}{1} \cdot \frac{BG}{GE} \cdot \frac{1}{3} = 1$

よって $\frac{BG}{GE} = 3$



次に，△ABEと△AFEにおいて

∠BAE = ∠FAE

∠AEB = ∠AEF = 90°

AEは共通

であるから △ABE ≡ △AFE

よって BE = FE

また，AB = AF = 15，AC = 9 であるから

CF = 15 − 9 = 6

△BFCにおいて，三平方の定理により

$BF = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

$\frac{BG}{GE} = 3$ より BE : EG = 2 : 1

BE = FE であるから BF = 2BE

したがって BF : GF = 4 : 1

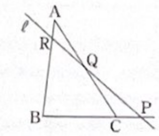
よって $GF = \frac{1}{4}BF = \frac{1}{4} \times 6\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

答 $\frac{BG}{GE} = 3$，$GF = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

◀**メネラウスの定理**

△ABCの3辺BC，CA，ABまたはその延長が，三角形の頂点を通らない直線ℓと，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$



◀辺ABは外接円の直径であるから ∠AEB = 90°

完答への道のり	
	Ⓐ AD : DE を求めることができた。
	Ⓑ △ABEと直線OGにおいてメネラウスの定理を用いて，線分の長さの比についての関係式を立てることができた。
	Ⓒ $\frac{BG}{GE}$ の値を求めることができた。
	Ⓓ 三角形の合同から BE = FE であることに気づくことができた。
	Ⓔ BF : GF を求めることができた。
	Ⓕ 線分GFの長さを求めることができた。