线性代数期末复习资料

行列式

1. $\boldsymbol{n}$行列式共有$\boldsymbol{n}^2$个元素，展开后有$\boldsymbol{n}!$项，可分解为$2^{\boldsymbol{n}}$行列式；
2. 代数余子式的性质：

   ①、$\boldsymbol{A}_{ij}$和$\boldsymbol{a}_{ij}$的大小无关；

   ②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为0；

   ③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为$|\boldsymbol{A}|$；

3. 代数余子式和余子式的关系：$\boldsymbol{M}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{A}_{ij}$　　　　$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$
4. 设$\boldsymbol{n}$行列式$\boldsymbol{D}$：

   将$\boldsymbol{D}$上、下翻转或左右翻转，所得行列式为$\boldsymbol{D}_1$，则$\boldsymbol{D}_1=(-1)^{\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}{2}}\boldsymbol{D}$；

   将$\boldsymbol{D}$顺时针或逆时针旋转90°，所得行列式为$\boldsymbol{D}_2$，则$\boldsymbol{D}_2=(-1)^{\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}{2}}\boldsymbol{D}$；

   将$\boldsymbol{D}$主对角线翻转后（转置），所得行列式为$\boldsymbol{D}_3$，则$\boldsymbol{D}_3=\boldsymbol{D}$；

   将$\boldsymbol{D}$主副角线翻转后，所得行列式为$\boldsymbol{D}_4$，则$\boldsymbol{D}_4=\boldsymbol{D}$；

5. 行列式的重要公式：

   ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；

   ②、副对角行列式：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}{2}}$；

   ③、上、下三角行列式（$|◥|=|◣|$）：主对角元素的乘积；

   ④、$|◤|$和$|◢|$：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}{2}}$；

   ⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$、$\begin{vmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=(-1)^{\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{n}}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

   ⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；

   ⑦、特征值；

6. 对于$\boldsymbol{n}$阶行列式$|\boldsymbol{A}|$，恒有：$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^{\boldsymbol{n}}+\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}}(-1)^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}}\lambda^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$，其中$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}}$为$\boldsymbol{k}$阶主子式；
7. 证明$|\boldsymbol{A}|=0$的方法：

①、$|A| = -|A|$；

②、反证法；

③、构造齐次方程组 $Ax = 0$，证明其有非零解；

④、利用秩，证明 $r(A) < n$；

⑤、证明 0 是其特征值；

矩阵

1. A 是 n 阶可逆矩阵：

$\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$（是非奇异矩阵）；

$\Leftrightarrow$ $r(A) = n$（是满秩矩阵）

$\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组线性无关；

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow$ $\forall b \in R^n$，$Ax = b$ 总有唯一解；

$\Leftrightarrow$ A 与 E 等价；

$\Leftrightarrow$ A 可表示成若干个初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow$ A 的特征值全不为 0；

$\Leftrightarrow$ $A^T A$ 是正定矩阵；

$\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组是 R^n 的一组基；

$\Leftrightarrow$ A 是 R^n 中某两组基的过渡矩阵；

2. 对于 n 阶矩阵 A：$AA^* = A^*A = |A|E$ 无条件恒成立；

3. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$　　$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$　　$(A^*)^T = (A^T)^*$

$(AB)^T = B^T A^T$　　$(AB)^* = B^* A^*$　　$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；

5. 关于分块矩阵的重要结论，其中均 A、B 可逆：

若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则：

Ⅰ、$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

Ⅱ、$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

②、$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（主对角分块）

③、$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；（副对角分块）

④、$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

⑤、$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m\times n$ 矩阵 A，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的：

   $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$；

   等价类：所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

   对于同型矩阵 A、B，若 $r(A)=r(B) \Leftrightarrow A \quad B$；

2. 行最简形矩阵：

   ①、只能通过初等行变换获得；

   ②、每行首个非 0 元素必须为 1；

   ③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

   ①、 若 $(A,E)\ ^{r}\ (E,X)$，则 A 可逆，且 $X=A^{-1}$；

   ②、对矩阵 (A,B) 做初等行变化，当 A 变为 E 时，B 就变成 $A^{-1}B$，即：$(A,B)\overset{c}{\sim}(E,A^{-1}B)$；

   ③、求解线形方程组：对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax=b$，如果 $(A,b)\ ^{r}\ (E,x)$，则 A 可逆，且 $x=A^{-1}b$；

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，左乘矩阵 A，λ_i 乘 A 的各行元素；右乘，λ_i 乘 A 的各列元素；

③、对调两行或两列，符号 $E(i,j)$，且 $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}$；

④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$，且 $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$，例如：$\begin{pmatrix}1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$，且 $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix}1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & -k \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

5. 矩阵秩的基本性质：

①、$0\leq r(A_{m\times n})\leq\min(m,n)$；

②、$r(A^T)=r(A)$；

③、若 $A\quad B$，则 $r(A)=r(B)$；

④、若 P、Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

⑤、$\max(r(A),r(B))\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)$；（※）

⑥、$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$；（※）

⑦、$r(AB)\leq\min(r(A),r(B))$；（※）

⑧、如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$，则：（※）

Ⅰ、B 的列向量全部是齐次方程组 $AX=0$ 解（转置运算后的结论）；

Ⅱ、$r(A)+r(B)\le n$

⑨、若 A、B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为列矩阵（向量）× 行矩阵（向量）的形式，再采用结合律；

②、型如 $\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^m a^{n-m}b^m+\cdots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m};$$

注：Ⅰ、$(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项；

Ⅱ、$C_n^m=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\ 2\ 3\ \cdots\ m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}\qquad C_n^0=C_n^n=1$

Ⅲ、组合的性质：$C_n^m=C_n^{n-m}\qquad C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}\qquad \sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n\qquad rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$；

③、利用特征值和相似对角化：

7. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩：$r(A^*)=\begin{cases}n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$；

②、伴随矩阵的特征值：$\dfrac{|A|}{\lambda}\ (AX=\lambda X, A^*=|A|A^{-1}\Rightarrow A^*X=\dfrac{|A|}{\lambda}X)$；

③、$A^*=|A|A^{-1}$、$|A^*|=|A|^{n-1}$

8. 关于 A 矩阵秩的描述：

①、$r(A)=n$，A 中有 n 阶子式不为 0，$n+1$ 阶子式全部为 0；（两句话）

②、$r(A)<n$，A 中有 n 阶子式全部为 0；

③、$r(A)\ge n$，A 中有 n 阶子式不为 0；

9. 线性方程组：$Ax=b$，其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，则：

①、m与方程的个数相同，即方程组$Ax=b$有m个方程；

②、n与方程组得未知数个数相同，方程组$Ax=b$为n元方程；

10. 线性方程组$Ax=b$的求解：

①、对增广矩阵B进行初等行变换（只能使用初等行变换）；

②、齐次解为对应齐次方程组的解；

③、特解：自由变量赋初值后求得；

11. 由n个未知数m个方程的方程组构成n元线性方程：

①、$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{nm}x_n=b_n \end{cases}$；

②、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=b$（向量方程，$A$为$m\times n$矩阵，$m$个方程，$n$个未知数）

③、$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$（全部按列分块，其中$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$）；

④、$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\beta$（线性表出）

⑤、有解的充要条件：$r(A)=r(A,\beta)\le n$（n为未知数的个数或维数）

向量组的线性相关性

1. m 个 n 维列向量所组成的向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$；

   m 个 n 维行向量所组成的向量组 B：$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$ 构成 $m\times n$ 矩阵 $B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$；

   含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax=0$有、无非零解；（齐次线性方程组）

②、向量的线性表出 $\Leftrightarrow$ $Ax=b$ 是否有解；（线性方程组）

③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow$ $AX=B$ 是否有解；（矩阵方程）

3. 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解；(P_{101} 例 14)

4. $r(A^TA)=r(A)$；(P_{101} 例 15)

5. n维向量线性相关的几何意义：

①、α 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$；

②、α,β 线性相关 $\Leftrightarrow$ α,β 坐标成比例或共线（平行）；

③、α,β,γ 线性相关 $\Leftrightarrow$ α,β,γ 共面；

6. 线性相关与无关的两套定理：

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 必线性相关；

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 必线性无关；（向量的个数加加减减，二者为对偶）

若 r 维向量组 A 的每个向量上添上 $n-r$ 个分量，构成 n维向量组 B：

若 A 线性无关，则 B 也线性无关；反之若 B 线性相关，则 A 也线性相关；（向量组的维数加加减减）

简言之：无关组延长后仍无关，反之，不确定；

7. 向量组 A（个数为 r）能由向量组 B（个数为 s）线性表示，且 A线性无关，则 $r\le s$(二版 P_{74} 定理 7)；

向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则 $r(A)\le r(B)$；（P_{86} 定理 3）

向量组 A 能由向量组 B 线性表示

$\Leftrightarrow AX=B$ 有解；

$\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$（$P_{85}$ 定理 2）

向量组 A 能由向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$（$P_{85}$ 定理 2 推论）

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$；

①、矩阵行等价：$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow PA=B$（左乘，$P$ 可逆）$\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

②、矩阵列等价：$A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow AQ=B$（右乘，$Q$ 可逆）；

③、矩阵等价：$A\sim B\Leftrightarrow PAQ=B$（$P$、$Q$ 可逆）；

9. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$：

①、若 A 与 B 行等价，则 A 与 B 的行秩相等；

②、若 A 与 B 行等价，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；

③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；

④、矩阵 A 的行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$ 则：

①、C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵；

②、C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A^T 为系数矩阵；（转置）

11. 齐次方程组 $Bx=0$ 的解一定是 $ABx=0$ 的解，**考试中可以直接作为定理使用，而无需证明；**

①、$ABx=0$ 只有零解 $\Rightarrow$ $Bx=0$ 只有零解；

②、$Bx=0$ 有非零解 $\Rightarrow$ $ABx=0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $B_{n\times r}:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 可由向量组 $A_{n\times s}:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为：（P_{110} 题 19 结论）

$$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K \quad (B=AK)$$

其中 K 为 $s\times r$，且 A 线性无关，则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=r$；（B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性）

（必要性：$\because r=r(B)=r(AK)\le r(K), r(K)\le r, \therefore r(K)=r$；充分性：反证法）

注：当 $r=s$ 时，K 为方阵，可当作定理使用；

13. ①、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $Q_{n\times m}$，$AQ=E_m$ $\Leftrightarrow r(A)=m$、Q 的列向量线性无关；（P_{87}）

②、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $P_{n\times m}$，$PA=E_n$ $\Leftrightarrow r(A)=n$、P 的行向量线性无关；

14. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立；（定义）

$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解，即 $Ax=0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

15. 设 $m\times n$ 的矩阵 A 的秩为 r，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为：$r(S)=n-r$；

16. 若 η^* 为 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；（P_{111} 题 33 结论）

相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=E$ 或 $A^{-1}=A^T$（定义），性质：

   ①、A 的列向量都是单位向量，且两两正交，即 $a_i^Ta_j=\begin{cases}1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots n)$；

   ②、若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1}=A^T$ 也为正交阵，且 $|A|=\pm1$；

   ③、若 A、B 正交阵，则 AB 也是正交阵；

   注意：求解正交阵，千万不要忘记施密特正交化和单位化；

2. 施密特正交化：$(a_1,a_2,\cdots,a_r)$

   ； $b_1=a_1$

   $$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1$$

   ………

   $$b_r=a_r-\frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}b_2-\cdots-\frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}b_{r-1};$$

3. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

   对于实对称阵，不同特征值对应的特征向量正交；

4. ①、A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ A 经过初等变换得到 B；

   $\Leftrightarrow PAQ=B$，P、Q 可逆；

   $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，A、B 同型；

   ②、A 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^TAC=B$，其中可逆；

   $\Leftrightarrow x^TAx$ 与 x^TBx 有相同的正、负惯性指数；

   ③、A 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP=B$；

5. 相似一定合同、合同未必相似；

   若 C 为正交矩阵，则 $C^TAC=B\Rightarrow A \quad B$，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

6. A 为对称阵，则 A 为二次型矩阵；

7. n 元二次型 x^TAx 为正定：

   $\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n；

   $\Leftrightarrow A$ 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=E$；

   $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值均为正数；

   $\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式均大于 0；

   $\Rightarrow a_{ii}>0,|A|>0$；(必要条件)