等可能概型(古典概型)

一、等可能概型

二、典型例题

三、几何概率

四、小结

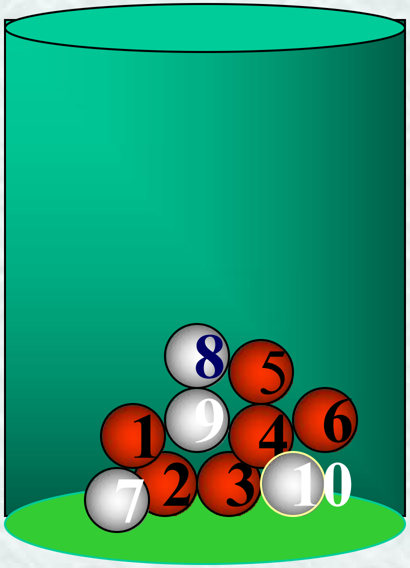
一、等可能概型(古典概型)

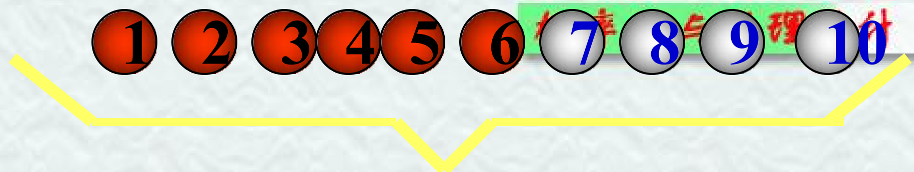
假定某个试验有有限个可能的结果

$$e_1, e_2, \dots, e_N,$$

假定从该试验的条件及实施方法上去分析，认为所有结果在试验中有同等可能的出现机会，即$1/N$的出现机会.

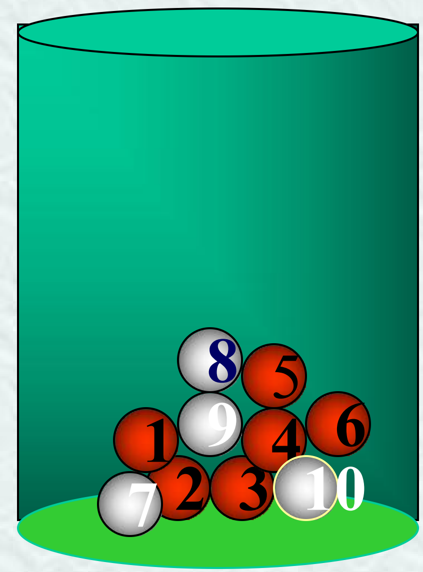
例如，一个袋子中装有10个大小、形状完全相同的球. 将球编号为1－10 . 把球搅匀，蒙上眼睛，从中任取一球.





因为抽取时这些球是完全平等的，我们没有理由认为10个球中的某一个会比另一个更容易取得．也就是说，10个球中的任一个被取出的机会是相等的，均为1/10.

10个球中的任一个被取出的机会都是1/10

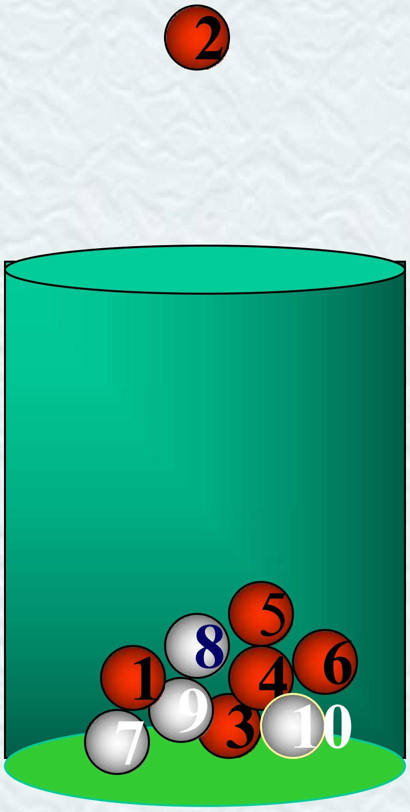


我们用 i 表示取到 i 号球，$i=1,2,\ldots,10$. 则该试验的样本空间

$$S=\{1,2,\ldots,10\},$$

且每个样本点(或者说基本事件)出现的可能性相同 .

如 $i=2$



称这样一类随机试验为古典概型.

1. 定义

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验称为等可能概型或古典概型.

这样就把求概率问题转化为计数问题.

排列组合是计算古典概率的重要工具.

2. 古典概型中事件概率的计算公式

设试验 E 的样本空间由n 个样本点构成， A 为 E 的任意一个事件，且包含 m 个样本点，则事件 A 出现的概率记为:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

称此为概率的古典定义.

3. 古典概型的基本模型:摸球模型

(1) 无放回地摸球

问题1　设袋中有4 只白球和 2只黑球, 现从袋中无放回地依次摸出2只球,求这2只球都是白球的概率.

解　设 $A=\{$摸得 2 只球都是白球$\}$,

基本事件总数为 $\binom{6}{2}$,

A 所包含基本事件的个数为 $\binom{4}{2}$,

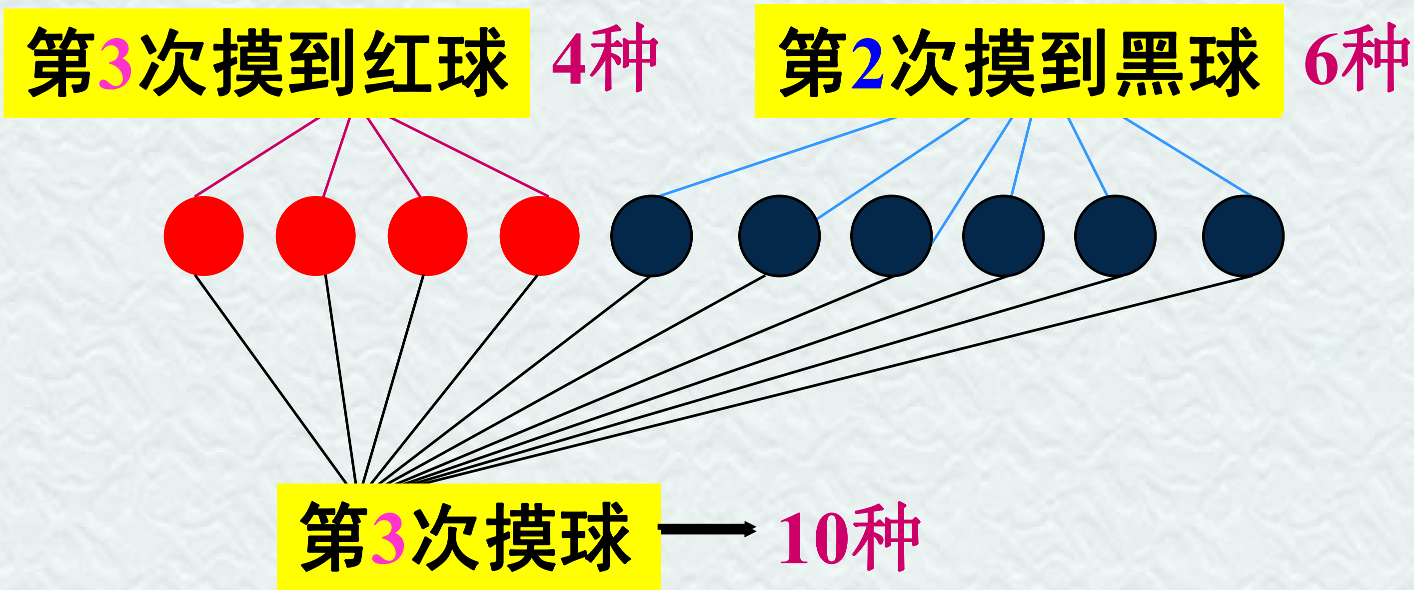
故　$P(A)=\binom{4}{2}\Big/\binom{6}{2}=\frac{2}{5}.$

(2) 有放回地摸球

问题2 设袋中有4只红球和6只黑球,现从袋中有放回地摸球3次,求前2次摸到黑球、第3次摸到红球的概率.

解

设 $A = \{$前2次摸到黑球，第3次摸到红球$\}$



基本事件总数为 $10 \times 10 \times 10 = 10^3$,

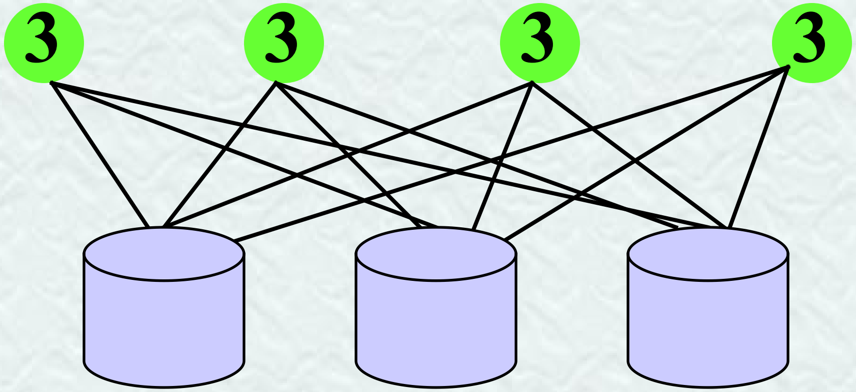
A 所包含基本事件的个数为 $6 \times 6 \times 4$,

故 $P(A) = \dfrac{6 \times 6 \times 4}{10^3} = 0.144.$

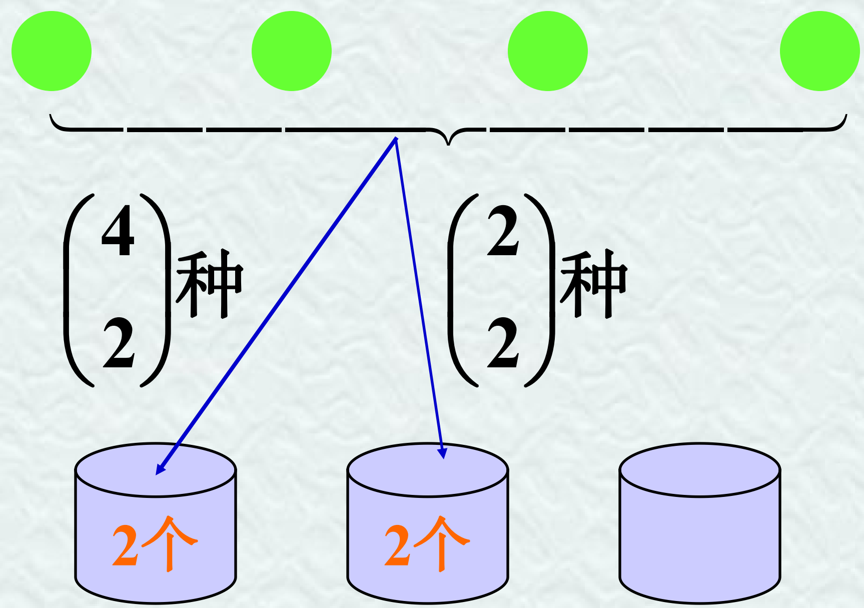
4.古典概型的基本模型:球放入杯子模型

(1)杯子容量无限

问题1 把 4 个球放到 3个杯子中去,求第1、2个杯子中各有两个球的概率, 其中假设每个杯子可放任意多个球.



4个球放到3个杯子的所有放法 $3\times3\times3\times3=3^4$种,



因此第1、2个杯子中各有两个球的概率为

$$p=\binom{4}{2}\binom{2}{2}\Big/3^4=\frac{2}{27}.$$

(2) 每个杯子只能放一个球

问题2 把4个球放到10个杯子中去,每个杯子只能放一个球, 求第1 至第4个杯子各放一个球的概率.

解 第1至第4个杯子各放一个球的概率为

$$p=\frac{\mathrm{p}_4^4}{\mathrm{p}_{10}^4}=\frac{4\times3\times2\times1}{10\times9\times8\times7}$$

$$=\frac{1}{210}.$$

推广： 把n个球放到N个杯子中去,杯子容量无限, 求：

1. 每个杯子至多一个球的概率

2. 指定n个杯子各有一球的概率

3. 任意n个杯子中各有一球的概率

解：

$$p1=\frac{N(N-1)\cdots[N-(n-1)]}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}$$

$$p2=\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{N^n}=\frac{n!}{N^n}$$

$$p3=\frac{C_N^n\cdot n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{N^n}=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

二、典型例题

例1

将一枚硬币抛掷三次. **(1)** 设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”, 求 $P(A_1)$. **(2)** 设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”, 求 $P(A_2)$.

(3) 设事件 A_3 为“至多有一次出现正面”，求 $P(A_3)$

解 (1) 设 H 为出现正面，T 为出现反面.

则 $S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$.

(1) 设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，求 $P(A_1)$.

而 $A_1=\{HTT, THT, TTH\}$. 得 $P(A_1)=3/8$.

(2) 设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”，求 $P(A_2)$.

(2) $A_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$.

因此 $P(A_2)=7/8$.

(3) 设事件 A_3 为“至多有一次出现正面”，求 $P(A_3)$

(3) $A_3=\{HTT,THT,TTH\ ,TTT\}.$

$$P(A_3)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

例2 设有 N 件产品,其中有 D 件次品,今从中任取 n 件,问其中恰有 $k(k \le D)$ 件次品的概率是多少？

解 在N件产品中抽取n件的所有可能取法共有

$$\binom{N}{n}\text{种},$$

在 N 件产品中抽取n件,其中恰有k 件次品的取法

共有 $$\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}\text{种},$$

于是所求的概率为 $$p=\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}\Big/\binom{N}{n}.$$

例3 在1~2000的整数中随机地取一个数,问取到的整数既不能被6整除, 又不能被8整除的概率是多少？

解 设 A 为事件“取到的数能被6整除”,B为事件“取到的数能被8整除”， 则所求概率为 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(AB)\}.$$

因为 $333 < \dfrac{2000}{6} < 334$, 所以 $P(A) = \dfrac{333}{2000}$,

由于 $\dfrac{2000}{8} = 250$, 故得 $P(B) = \dfrac{250}{2000}$.

由于 $83 < \dfrac{2000}{24} < 84$, 得 $P(AB) = \dfrac{83}{2000}$.

于是所求概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - \{P(A) + P(B) - P(AB)\}$$

$$= 1 - \left(\frac{333}{2000} + \frac{250}{2000} - \frac{83}{2000}\right) = \frac{3}{4}.$$

例4 号码锁上有6个拨盘，每个拨盘上有0~9共10个数字，当这6个拨盘上的数字组成原确定打开号码锁的6位数时（第一位可以是0），锁才能打开，如果不知道锁的号码，一次就把锁打开的概率是多少？

解： 设 A 为事件“一次就把锁打开”，号码锁所有可能组成的6位号码共 10^6 ，而能打开锁的号码只有1个，则

$$p(A)=\frac{1}{10^6}=0.000001$$

因此，如果不知道锁的号码，一次就把锁打开几乎是不可能的。

例5 某接待站在某一周曾接待过 12次来访,已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的,问是否可以推断接待时间是有规定的.

解 假设接待站的接待时间没有规定,且各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的.

7 7 7 7 ··· 7

周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日

故一周内接待 12 次来访共有 7^{12} 种.

2 2 2 2 ··· 2

周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日

12 次接待都是在周二和周四进行的共有 2^{12} 种.

故12 次接待都是在周二和周四进行的概率为

$$p = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.000\ 000\ 3.$$

小概率事件在实际中几乎是不可能发生的，从而可知接待时间是有规定的.

例6 假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，即都等于 1/365 ,求 64 个人中至少有2人生日相同的概率.

解 64 个人生日各不相同的概率为

$$p_1 = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ \cdots \ \cdot (365 - 64 + 1)}{365^{64}}.$$

故64 个人中至少有2人生日相同的概率为

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ \cdots \ \cdot (365 - 64 + 1)}{365^{64}} = 0.997.$$

说明

随机选取$n(\leq 365)$个人,他们的生日各不相同的 概率为

$$p=\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}.$$

而n个人中至少有两个人生 日相同的概率为

$$p=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}.$$

例7 产品放在一箱内，其中正品46件，废品4件，从箱中取产品两次，每次随机地取一件。考虑两种取产品方式：1.有放回抽取 2.无放回抽取。就两种情况分别求

1.取到的两件产品都是正品的概率

2.取到的两件产品为同质量的概率

3.取到的两件产品中至少有一件是正品的概率

解 设事件A：取到的两件都是正品

设事件B：取到的两件都是次品

设事件C：取到的两件产品至少有一件正品

有放回抽样：

$$p(A)=\frac{46\times 46}{50\times 50}=0.8464$$

$$p(B)=\frac{4\times 4}{50\times 50}=0.0064$$

取到产品为同质量的概率

$$p(A\cup B)=p(A)+P(B)=0.8528$$

A，B互不相容

解 设事件A：取到的两件都是正品

设事件B：取到的两件都是次品

设事件C：取到的两件产品至少有一件正品

有放回抽样：

$$p(C)=1-p(B)=1-0.0064=0.9936$$

解 设事件A：取到的两件都是正品

设事件B：取到的两件都是次品

设事件C：取到的两件产品至少有一件正品

无放回抽样：

$$p(A)=\frac{46\times 45}{50\times 49}=0.8449 \qquad p(B)=\frac{4\times 3}{50\times 49}=0.0049$$

取到产品为同质量的概率

$$p(A\cup B)=p(A)+P(B)=0.8498$$

A，B互不相容

解 设事件A：取到的两件都是正品

设事件B：取到的两件都是次品

设事件C：取到的两件产品至少有一件正品

有放回抽样：

$$p(C)=1-p(B)=1-0.0049=0.9951$$

三、几何概型

定义 当随机试验的样本空间是某个区域，并且任意一点落在度量 (长度、 面积、体积) 相同的子区域是等可能的，则事件 A 的概率可定义为

$$P(A)=\frac{S_A}{S}.$$

(其中 S 是样本空间的度量 ,S_A 是构成事件 A的子区域的度量 .) 这样借助于几何上的度 量来合理规定的概率称为 **几何概型**.

说明 当古典概型的试验结果为连续无穷多个时,就归结为几何概型.

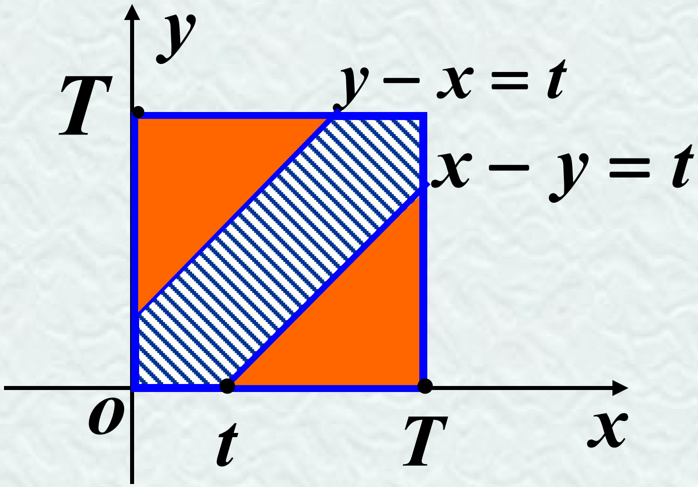
会面问题

例8 甲、乙两人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 先到的人等候另一个人, 经过时间 t ($t<T$) 后离去.设每人在0 到 T 这段时间内各时刻到达该地是等可能的 , 且两人到达的时刻互不牵连.求甲、乙两人能会面的概率.

解 设 x, y 分别为甲、乙两人到达 的时刻, 那么 $0 \le x \le T, \quad 0 \le y \le T.$

两人会面的充要条件为 $|x-y| \le t,$

若以 x, y 表示平面上点的坐标，则有



故所求的概率为

$$p = \frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}$$

$$= \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2}$$

$$= 1 - (1 - \frac{t}{T})^2.$$

四、小结

最简单的随机现象 → 古典概型 $\xrightarrow{\text{试验结果连续无穷}}$ 几何概型

↓

古典概率

↓

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}$$

加法原理　做一件事情，完成它可以有n类办法,在第一类办法中有m_1种不同的方法,在第二类办法中有m_2种不同的方法，……，在第n类办法中有m_n种不同的方法。那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\ldots+m_n$$

种不同的方法。

乘法原理　做一件事情，完成它需要分成n个步骤，做第一步有m_1种不同的方法，做第二步有m_2种不同的方法，……，做第n步有m_n种不同的方法，那么完成这件事有

$$N=m_1\times m_2\times\ldots\times m_n$$

种不同的方法。

1. 排列的定义: 从n个不同元素中,任取m个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列.

2. 组合的定义: 从n个不同元素中,任取m个元素,并成一组,叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合.

3. 排列数公式:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

4. 组合数公式:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

排列与组合的区别与联系: 与顺序有关的为排列问题, 与顺序无关的为组合问题.