第二节　方　差

一、随机变量方差的概念及性质

二、重要概率分布的方差

三、例题讲解

四、小结

一、随机变量方差的概念及性质

1. 概念的引入

随机变量的数学期望，它体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.

例如，某零件的真实长度为a，现用甲、乙两台仪器各测量10次，将测量结果X用坐标上的点表示如图：

测量结果的均值都是 a

甲仪器测量结果

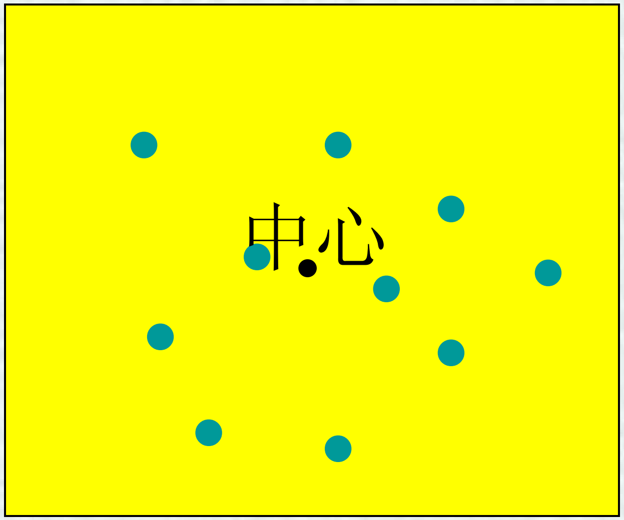
较好

乙仪器测量结果

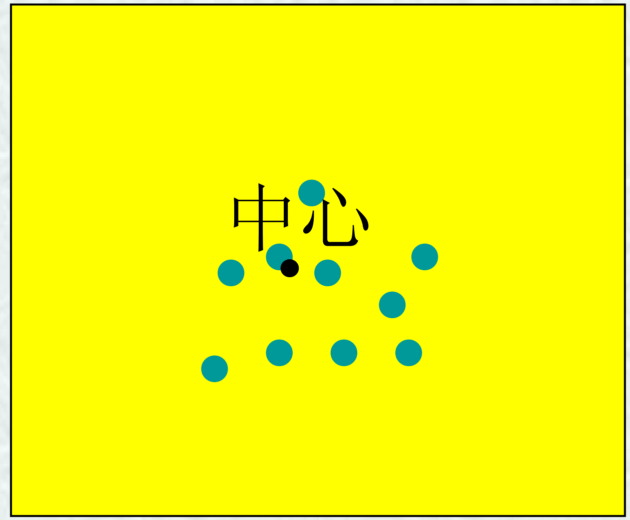
若让你就上述结果评价一下两台仪器的优劣，你认为哪台仪器好一些呢？

因为乙仪器的测量结果集中在均值附近

又如,甲、乙两门炮同时向一目标射击10发炮弹，其落点距目标的位置如图：



甲炮射击结果



乙炮射击结果

乙炮

你认为哪门炮射击效果好一些呢?

因为乙炮的弹着点较集中在中心附近 .

如果平均偏离较小，那么说明这批灯泡的寿命大部分接近它的均值，这也说明灯泡厂的生产是稳定的；这时，如果EX比较大，那么灯泡的质量就是比较好的. 相反，如果X离开EX的平均偏离较大，那么即使均值较大，生产质量也是有问题的.

再如在打靶比赛中，不但要求射击准确，而且还要求稳定. 如果某射手射击10次，虽然有7次正中靶心，但是另外3次却打歪了，弹孔离靶心很远，甚至子弹射到了靶外打伤了人，这也说明此人的射击技术是成问题的.

那么，用什么量来衡量这种平均偏离程度呢?

人们自然会想到采用$|X-EX|$的平均值$E|X-EX|$.

但是式$E|X-EX|$带有绝对值号，运算不便,故采用$(X-EX)^2$的平均值$E(X-EX)^2$来代替$E|X-EX|$.

显然，$E(X-EX)^2$的大小完全能够反映X离开EX的平均偏离大小的，这个值就称为X的方差.

为此需要引进另一个数字特征,用它来度量随机变量取值在其中心附近的离散程度.

这个数字特征就是

方差

2. 方差的定义

设 X 是一个随机变量,若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在,则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差, 记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$, 即$\cdots$

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差 , 记为 $\sigma(X)$.

采用平方是为了保证一切

差值X-E(X)都起正面的作用

3. 方差的意义

方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

4. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

由定义知，方差是随机变量X的函数$g(X)=[X-E(X)]^2$的数学期望.

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为X的概率密度.

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证明

$$\begin{aligned}D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\}\\&=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\\&=E(X^2)-E^2(X).\end{aligned}$$

5. 方差的性质

(1) 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0.$

证明 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$

(2) 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$D(CX)=C^2D(X).$$

证明 $D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}$

$$=C^2E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=C^2D(X).$$

(3) 设 X, Y 相互独立, $D(X), D(Y)$ 存在, 则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

证明

$$\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\{[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2\} \\
&= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2 \\
&= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 \\
&\quad \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\
&= D(X) + D(Y).
\end{aligned}$$

相互独立, 则 $[X-E(X)]$, $[Y-E(Y)]$

相互独立。

$$E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}$$
$$=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]$$
$$=E[E\left(X\right)-E(X)]E[E\left(Y\right)-E(Y)]$$
$$=0$$

(4) $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C,即

$$P\{X=C\}=1.$$

二、重要概率分布的方差

1. 两点分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = pq.$$

2. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，其分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, (k = 0,1,2,\cdots,n),$$

$$0 < p < 1.$$

则有

$$E(X) = np.$$

设$X \sim B(n, p)$，则X表示 n 重贝努里试验中的“成功”次数.

若设 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{如第}\boldsymbol{i}\text{次试验成功} \\ 0 & \text{如第}\boldsymbol{i}\text{次试验失败} \end{cases}$ $i=1,2, \ldots, n$

则 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 是n次试验中“成功”的次数

$E(X_i)=P(X_i=1)=p$, $E(X_i^2)=p$,

故 $D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2 = p-p^2=p(1-p)$

$$D(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$i=1,2,\ \dots,\ n$

由于$X_1,\ X_2,\ \dots,X_n$ 相互独立

于是

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

$$= np(1-p)$$

3. 泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots, \quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\lambda$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}(k^2-k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\lambda$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \text{for all } x$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\quad \text{for } |x|<1$$

$$=\lambda^2\sum_{k-2=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2+\lambda$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

泊松分布的期望和方差都等于参数λ.

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$EX=\frac{a+b}{2}$$

结论　均匀分布的数学期望位于区间的中点.

$$EX = \frac{a+b}{2} \qquad EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

5. 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$.

则有

$$E(X)=\theta$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-x/\theta} \,\mathrm{d}x - \theta^2$$

$$= 2\theta^2 - \theta^2$$

$$= \theta^2.$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{1}{\theta}\lambda x}d\frac{1}{\theta}x$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^2de^{-\frac{1}{\theta}x}$$

$$=-[x^2e^{-\frac{1}{\theta}x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{\theta}x}dx^2]$$

$$=2\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx$$

$$EX^2 = 2\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{1}{\theta}x}dx = -\frac{2}{\frac{1}{\theta}}\int_0^{+\infty} xde^{-\frac{1}{\theta}x}$$

$$= -2\theta[xe^{-\frac{1}{\theta}x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\theta}x}dx]$$

$$= 2\theta^2\int_0^{+\infty} e^{-2\frac{1}{\theta}x}d\lambda x = -2\theta^2\int_0^{+\infty} de^{-\frac{1}{\theta}x}$$

$$= -2\theta^2 e^{-\frac{1}{\theta}x}\Big|_0^{+\infty} = 2\theta^2$$

6. 正态分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma>0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

$EX=\mu$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

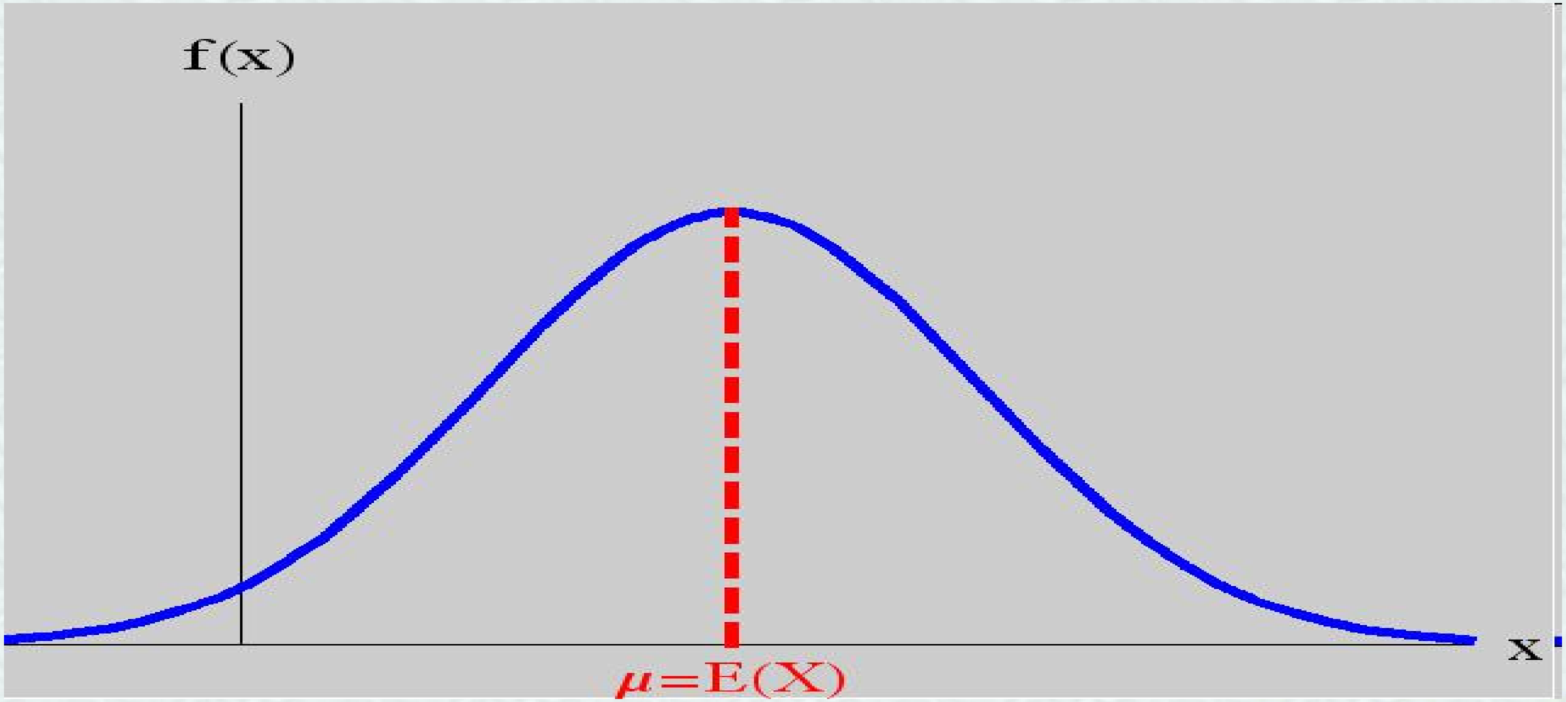
令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\frac{-t^2}{2}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

正态分布的期望和方差分别为两个参数 μ 和 σ^2.



分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\geq 1,$ $0<p<1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta>0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu,\sigma>0$	μ	σ^2

三、例题讲解

例1 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解

$$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}x+x^2\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x-x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=0$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}x^2+x^3\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2-x^3\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

于是 $\boldsymbol{D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}.}$$

例2 设 $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$, 求 $D(2X^3+5)$.

解 $$D(2X^3+5) = D(2X^3) + D(5)$$

$$= 4D(X^3)$$

$$= 4[E(X^6) - (E(X^3))^2]$$

$$E(X^6) = (-2)^6 \times \frac{1}{3} + 0^6 \times \frac{1}{2} + 1^6 \times \frac{1}{12} + 3^6 \times \frac{1}{12} = \frac{493}{6},$$

$$[E(X^3)]^2 = \left[(-2)^3 \times \frac{1}{3} + 0^3 \times \frac{1}{2} + 1^3 \times \frac{1}{12} + 3^3 \times \frac{1}{12}\right]^2$$

$$= \frac{1}{9},$$

故 $D(2X^3 + 5) = 4[E(X^6) - (E(X^3))^2]$

$$= \frac{2954}{9}.$$

四、小结

1. 方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示 X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

2. 方差的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 方差的性质

$1^{\circ}\ D(C) = 0;$

$2^{\circ}\ D(CX) = C^2 D(X);$

$3^{\circ}\ D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$