第七周 多维随机变量，独立性

7.1. 多维随机变量

多维随机变量

在同一个随机试验中，往往同时涉及多个随机变量，例如考察某地区中学生的身体素质情况，随机地选取一名学生，观察学生的身高 X，体重 Y 和肺活量 Z 等指标。随机变量 X，Y，Z 来自同一样本空间，它们的取值可能相互影响。像这样同时考虑的多个随机变量，称为多元随机变量。

如果 $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)$是定义在同一样本空间$\Omega=\{\omega\}$上的$n$个随机变量，则称 $X(\omega)=(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$为$n$维随机变量，或随机向量。

对任意n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，事件$\{X_1 \le x_1\}, \{X_2 \le x_2\}, \cdots, \{X_n \le x_n\}$同时发生的概率$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$称为$n$维随机变量$X$的**联合分布函数**。

下面我们主要讨论二维随机变量的性质，大多数二维随机变量的结果都很容易推广到 n 维的情况。

****

定理 二维联合分布函数$F(x,y)$具有如下性质

(1) 单调性 $F(x,y)$分别对x和y是单调不减的，

当$x_1<x_2$时，$F(x_1,y)\le F(x_2,y)$；当$y_1<y_2$时，$F(x,y_1)\le F(x,y_2)$；

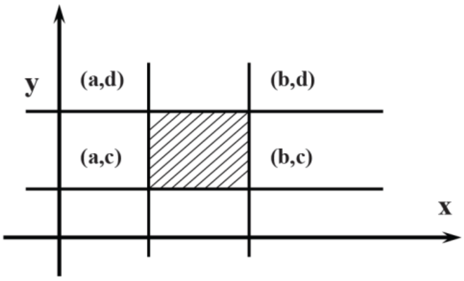
(2) 有界性 对任意x和y，有$0\le F(x,y)\le 1$，且$F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0，F(+\infty,+\infty)=\lim_{x,y\to+\infty}F(x,y)=1；$$

(3) 右连续性 $F(x+0,y)=F(x,y)$，$F(x,y+0)=F(x,y)$

(4) 非负性 对任意$a<b$，$c<d$，有 $P(a<X<b,c<Y<d)$

$$= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \geq 0$$



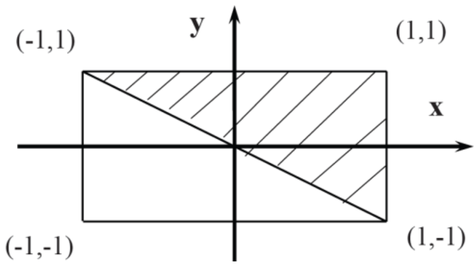
这 3 条性质，一元随机变量也具备。仅仅满足前 3 条性质，并不足以表明二元函数是某个二维随机变量的分布函数。下面看一个反例。

****

例 7.1.1　二元函数　$G(x,y) = \begin{cases} 0 & x+y<0 \\ 1 & x+y \geq 0 \end{cases}$

$G(1,1) - G(1,-1) - G(-1,1) + G(-1,-1) = -1 < 0$，

故 $G(x,y)$ 不能作为二元随机变量的分布函数。



****

二维离散型随机变量

若 (X,Y) 只取至多可列个数对，(x_i, y_j)，则称 (X,Y) 为二维离散随机变量，

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ 称为 (X,Y) 的联合分布列。

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nn}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

其中，$p_{ij} \geq 0$，$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$。

****

边缘分布

(X,Y)为二元离散型随机变量，其中 X 和Y 各自的分布称为边缘分布

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ P(X = x_1) & P(X = x_2) & \cdots & P(X = x_2) & \cdots \end{pmatrix}$$称为 X 的边缘分布列

其中，$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \cdots \\ P(Y = y_1) & P(Y = y_2) & \cdots & P(Y = y_2) & \cdots \end{pmatrix}$$称为Y 的边缘分布列

其中，$P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

****

例 7.1.2 从$1,2,3,4$中等可能地随机取一个数记为 X，再从$1,2,\cdots,X$ 中等可能地随机取一个数记为Y。（1）写出(X,Y)的联合分布列，并计算$P(X = Y)$；（2）写出(X,Y)的边缘分布列。

解：（1）

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

$$P(X=i,Y=j)=\begin{cases}\dfrac{1}{4i}, & 1\le j\le i\le 4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$P(X=Y)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3)+P(X=4,Y=4)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}。$$

（2） 边缘分布列 $P(X=i)=\dfrac{1}{4}$， $i=1,2,3,4$

$$P(Y=1)=\sum_{i=1}^{4}p_{ij}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48},$$

同理可得，$P(Y=2)=\dfrac{13}{48}$， $P(Y=3)=\dfrac{7}{48}$， $P(Y=4)=\dfrac{1}{16}$。

$X\backslash Y$	1	2	3	4	$P(X=i)$
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$P(Y=j)$	25/48	13/48	7/48	1/16	1

****

例 7.1.3. 设二元随机变量(X,Y)的联合分布列为，$P(X=1,Y=1)=\dfrac{4}{9}$，

$P(X=1,Y=2)=\dfrac{2}{9}$，$P(X=2,Y=1)=\dfrac{2}{9}$，$P(X=2,Y=2)=\dfrac{1}{9}$。设 $U=\max(X,Y)$，

$V=\min(X,Y)$。

（1） 求(U,V)的联合概率分布；　（2） 求U,V的期望和方差。

解：（1）

$X\backslash Y$	1	2
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$\Rightarrow$

$U\backslash V$	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

（2）

$U\backslash V$	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

得到U,V的边缘分布列分别为 $U\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}$，$V\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$

$E(U)=1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{5}{9}=\frac{14}{9}$，　$E(U^2)=1\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{5}{9}=\frac{24}{9}$，　$Var(U)=E(U^2)-E(U)^2=\frac{20}{81}$

$E(V)=1\cdot\frac{8}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$，　$E(V^2)=1\cdot\frac{8}{9}+2^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{12}{9}$，　$Var(V)=E(V^2)-E(V)^2=\frac{8}{81}$

****

二维连续型随机变量

存在二元非负函数$f(x,y)$，使得二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$可表示为$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$，则$(X,Y)$为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为$(X,Y)$的联合密度函数，$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$。（稍停顿）

边缘密度函数　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$；

边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right)du=\int_{-\infty}^{x}f_X(u)du$。

****

7.2. 常见多维随机变量举例

多项分布 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)\sim M(n,p_1,\cdots,p_m)$

设随机试验 E 有 m 个基本事件 $A_1,\cdots,A_m$，$P(A_i)=p_i>0$，$\sum_{i=1}^{m}p_i=1$。将 E 重复 n 次，以 X_i 表示 n 次试验中 A_i 出现的次数，则

$$P(X_1=k_1,\cdots,X_m=k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}，(k_1+\cdots+k_m=n)。$$

$$C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}C_{n-k_1-k_2}^{k_3}\cdots C_{k_m}^{k_m}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdots\frac{k_m!}{k_m!}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m}$$

例如，某产品分为一等品（A_1）、二等品（A_2）、三等品（A_3）、不合格品（A_4），各种档次的产品出现概率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4（$p_1+p_2+p_3+p_4=1$）。任取 n 件产品，各品级数目服从 $M(n,p_1,p_2,p_3,p_4)$。

****

例 7.2.1 已知三项分布 $(X,Y,Z)\sim M(n,p_1,p_2,p_3)$，验证其边缘分布为二项分布。

$$P(X=i)=\sum_{j+k=n-i\ (j,k\in Z^+)}P(X=i,Y=j,Z=k)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-i}P(X=i,Y=j,Z=n-i-j)=\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot(n-i-j)!}p_1^{\,i}p_2^{\,j}p_3^{\,n-i-j}$$

$$=\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}p_1^{\,i}(1-p_1)^{n-i}\cdot\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(n-i)!}{j!\cdot(n-i-j)!}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^j\left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-i-j}$$

$$=C_n^ip_1^{\,i}(1-p_1)^{n-i}\cdot\left(\frac{p_2}{1-p_1}+\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-i}$$

$$=C_n^ip_1^{\,i}(1-p_1)^{n-i}\quad\Rightarrow\quad X\sim b(n,p_1)$$

同理，可也推出 Y 和 Z 的边缘分布分别为参数是 n, p2 和 n，p3 的二项分布。

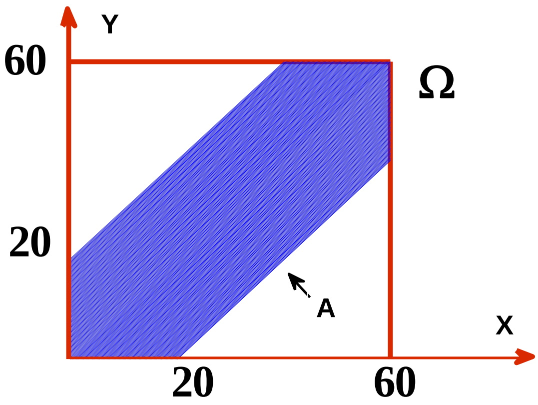
****

二维均匀分布 $(X,Y)\sim U(D)$

D 为 R^2 平面中的有界区域，其面积为 S_D， $f(x,y)=\begin{cases}1/S_D, & (x,y)\in D\\ 0, & otherwise\end{cases}$。

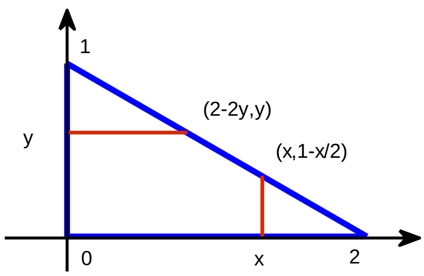
第一周古典概型的例 1.2.3 会面问题，甲、乙约定在下午 4 点至 5 点之间见面，并约定等候 20 分钟，过时即离去，求二人的会面概率。

甲、乙的到达时间 (X,Y) 服从 $0\le x,y\le 60$ 区域上的均匀分布。



****

例 7.2.2　设 (X,Y) 服从 x,y 坐标轴和 $x+2y=2$ 所围成区域内的均匀分布，求 X 和 Y 的边缘密度分布，并计算 $P(X\le 1)$。



解　x,y 坐标轴和 $2x+y=2$ 所围成区域的面积为 1，所以

(X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & x+2y\le 2, x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & 其他\end{cases}$

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 2$ 时， $f_X(x)=0$，

当 $0<x<2$ 时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{1-\frac{x}{2}}1dy=1-\frac{x}{2}$。

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时， $f_Y(y)=0$，

当 $0<y<1$ 时， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^{2-2y}1dx=2-2y$

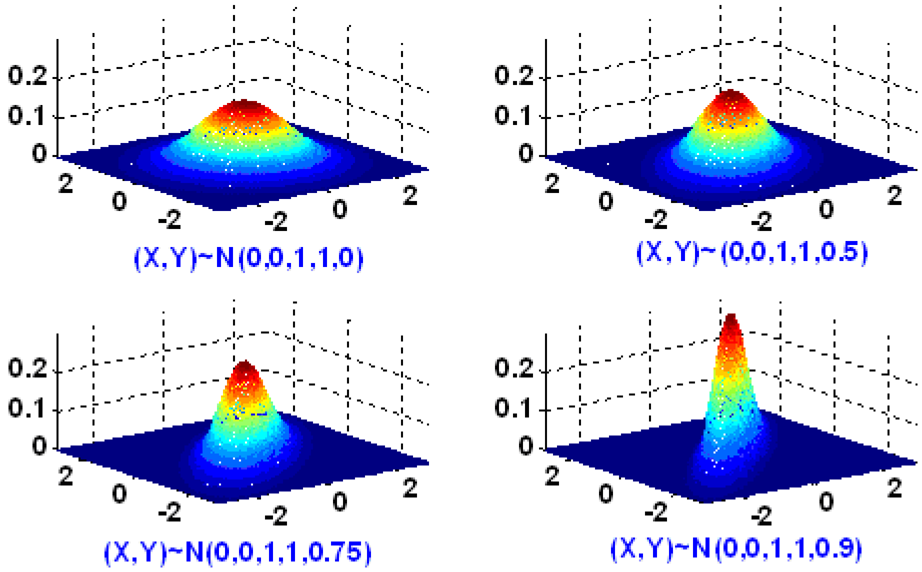
$$P(X \le 1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{3}{4}$$

****

二维正态分布 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in R, \sigma_1, \sigma_2 > 0, |\rho| \le 1$。



(X,Y)~N(0,0,1,1,0)　(X,Y)~(0,0,1,1,0.5)

(X,Y)~N(0,0,1,1,0.75)　(X,Y)~N(0,0,1,1,0.9)

如图所示，为几组不同参数取值下的二维正态分布随机变量的密度函数图像。当 σ_1 和 σ_2 比较小时密度函数的取值更加集中，峰值更为明显。当 ρ 较小时，(X,Y) 的分布较均匀，而当 ρ 较大时，(X,Y) 的分布更加扁平。

****

例 7.2.3 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，计算 X 和 Y 的边缘密度函数。

解　$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\overset{u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\, v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[u^2-2\rho\cdot uv+v^2\right]\right\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(v-\rho u\right)^2+\left(1-\rho^2\right)u^2\right]\right\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(v-\rho u\right)^2\right\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad\Rightarrow\quad X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$$

由对称性，可知 $Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$。 二元正态分布的边缘分布是一元正态分布。

逆命题不成立，二元随机变量$\left(X,Y\right)$的边缘分布均为正态，联合分布未必是二元正态。

****

7.3 随机变量的独立性

随机变量的独立性

定义. 设 n 维随机变量 $X=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$ 的联合分布函数为 $F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，$F_{X_i}\left(x_i\right)$为 X_i 的边缘分布函数，如果对任意n个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}\left(x_i\right)$，则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立。即

$$P\left(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i\le x_i\right)。$$

离散型等价定义： $P\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i=x_i\right)$

连续型等价定义： $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}\left(x_i\right)$

****

例 7.3.1（例 7.1.3） 设二元随机变量(X,Y)的联合分布列为，

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

，X,Y 是否独立？

解： $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$， $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{4}{9}$， $P(X=1,Y=2)=P(X=1)\cdot P(Y=2)=\frac{2}{9}$，

$P(X=2,Y=1)=P(X=2)\cdot P(Y=1)=\frac{2}{9}$，$P(X=2,Y=2)=P(X=2)\cdot P(Y=2)=\frac{1}{9}$

所以随机变量 X 和 Y 相互独立。

****

例 7.3.2 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$， $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$， 若$P(XY=0)=1$，求

(1) (X,Y)的联合分布列， (2) X,Y 是否独立

解： $P(XY=0)=1 \;\Rightarrow\; P(XY\neq 0)=0 \;\Rightarrow\; P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=1)=0$

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=x_i)$
-1	p_{11}	p_{12}	$1/4$
0	p_{21}	p_{22}	$1/2$
1	p_{31}	p_{32}	$1/4$
$P(Y=y_j)$	$1/2$	$1/2$	

$p_{12}=0,$
$p_{32}=0$ $\Rightarrow$

$X \backslash Y$	0	1
-1	$1/4$	0
0	0	$1/2$
1	$1/4$	0

$P(X=-1)\cdot P(Y=1)\neq P(X=1,Y=1)=0$，所以 X,Y 不独立。

****

例 7.3.3 设随机变量 X,Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，求 $X+Y$ 的分布。

解：$X+Y$ 的取值范围为全体非负整数，计算 $X+Y$ 的分布列，对任意非负整数 n

$$P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(Y=n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

****

泊松分布和二项分布的可加性

泊松分布的可加性：若 $X_1\sim P(\lambda_1)$，$X_2\sim P(\lambda_2)$,…，$X_m\sim P(\lambda_m)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立，则 $X_1+X_2+\cdots+X_m\sim P(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)$

二项分布的可加性：$X_1\sim B(n_1,p)$，$X_2\sim P(n_2,p)$,…，$X_m\sim P(n_m,p)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立，则 $X_1+X_2+\cdots+X_m\sim B(n_1+n_2+\cdots+n_m,p)$

****

7.4 独立随机变量期望和方差的性质

独立随机变量乘积的期望的性质：

X,Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

以离散型随机变量为例，设二元随机变量 (X,Y) 的联合分布列 $P(X=x_i,Y=y_j)$ 已知，

则 $P\left(X=x_i,Y=y_j\right)=P\left(X=x_i\right)\cdot P\left(Y=y_j\right)$， $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jP\left(X=x_i,Y=y_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jP\left(X=x_i\right)P\left(Y=y_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}x_iP\left(X=x_i\right)\sum_{j=1}^{n}y_jP\left(Y=y_j\right)=E(X)E(Y)$$

****

独立随机变量和的方差的性质：

X,Y 独立，则 $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

$$Var(X+Y)=E\left[(X+Y)^2\right]-E(X+Y)^2$$

$$=E\left(X^2+2XY+Y^2\right)-\left[E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2\right]$$

$$=E\left(X^2\right)-E(X)^2+E\left(Y^2\right)-E(Y)^2+2E(XY)-2E(X)E(Y)$$

$$=E\left(X^2\right)-E(X)^2+E\left(Y^2\right)-E(Y)^2=Var(X)+Var(Y)$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都存在方差，则 $Var\left(X_1+X_2+\cdots+X_m\right)=\sum_{k=1}^{n}Var\left(X_k\right)$

****

利用独立的 0-1 分布求和计算二项分布随机变量 $X\sim b(n,p)$ 期望和方差

我们在推导二项分布随机变量的方差时，已经利用了独立随机变量和的方差等于方差求和的性质。这里我们再回顾一下。

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且均服从 0-1 分布 $B(1,p)$，则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

对所有 $k=1,\cdots,n$， $E\left(X_k\right)=1\times p+0\times(1-p)=p$， $E\left(X_k^2\right)=1\times p+0\times(1-p)=p$

$$Var\left(X_k\right)=E\left({X_k}^2\right)-E\left(X_k\right)^2=p-p^2=p(1-p),$$

$$E(X)=E\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)=E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+\cdots+E\left(X_n\right)=np$$

$$Var(X)=Var(X_1+X_2+\cdots+X_n)=Var(X_1)+Var(X_2)+\cdots+Var(X_n)=np(1-p)$$

****

负二项分布随机变量

$Y\sim NB(r,p)$：连续不断且独立地重复进行一个参数为 p 的伯努利试验，第 r 次“成功”出现时所进行的试验次数。更细致地考虑由伯努利试验构造参数为 r，p 的负二项分布随机变量的过程。从伯努利试验开始到第一次成功，所进行试验的次数是随机的，记为随机变量 X_1，则 X_1 服从参数为 p 的几何分布；然后继续独立地进行伯努利试验，到第二次试验成功，我们记从第一次试验成功后开始计算的试验次数为 X_2，则 X_2 仍然服从参数为 p 的几何分布；如此进行下去，到第 r 次“成功”出现时所进行的总的伯努利试验次数 Y 就等于 X1 加 X2 一直加到 Xr。

设 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 相互独立，且均服从几何分布 $Ge(p)$，

则 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_r$；　　$E(X_k)=\dfrac{1}{p}$，$Var(X_k)=\dfrac{1-p}{p^2}$，　$k=1,2,\cdots,r$

$$E(Y)=E(X_1+X_2+\cdots+X_r)=E(X_1)+\cdots+E(X_r)=\frac{r}{p}$$

$$Var(Y)=Var(X_1+X_2+\cdots+X_r)=Var(X_1)+\cdots+Var(X_r)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

****

例 7.4.1 设随机变量 X,Y 相互独立，已知它们的期望分别为 $E(X)$ 和 $E(Y)$。令 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\max\{X,Y\}$，求 $E(UV)$。

解：　分别考虑 $X\ge Y$ 和 $X<Y$ 两种情况，

当 $X\ge Y$ 时，$U=X$，$V=Y$；　当 $X<Y$ 时，$U=Y$，$V=X$；

所以 $UV=XY$，

$E(UV)=E(XY)=E(X)E(Y)$。