学风朋辈引领行动中心

期末复习资料-概率

编写：
刘佳洋、白文轩、刘嘉晖、刘文豪
整理：刘嘉晖

扫描右侧二维码
关注学风朋辈微信平台
获取课程资料动态

学风朋辈的全称为：北京化工大学学风朋辈引领行动中心，英文名称为：Student Peer Center of Beijing University of Chemical Technology（简称“SPC”）。

学风朋辈隶属于北京化工大学学生工作办公室，接受指导教师管理。对所辖二级学生组织进行管理，对院级学业辅导组织进行指导。学风朋辈的二级学生组织包括化学工程学院学业指导中心、信息科学与技术学院学业指导中心、生命学院学业指导中心、理学院学业指导中心、英国皇家化学会北京化工大学分会等，共同为全体学生服务。

学风朋辈的主要工作是按照学校学风建设的总体要求，开展包括朋辈学业辅导、学业咨询、资源共享、难点解答、学风营造等与学生学业发展相关的工作。

学风朋辈的宗旨是服务我校学生学业发展，致力于营造积极向上、你争我赶、公平竞争的校园学习文化氛围，定时更新学习资源和有效信息，秉承我校校训“宏德博学，化育天工”，用热情及责任进一步推动我校学风建设工作。

按照学习学风建设的总体目标，学风朋辈在发展过程中不断寻求自身的改革创新，根据自身发展需求，现下设朋辈辅导部、发展咨询部、推广宣传部、秘书处、人事部、事务拓展部共六大职能部门。

学风朋辈自成立已开展了多项精品活动：“朋辈学业辅导”、“学业咨询工作坊”、“学习资料发放”、“学霸答疑”、“学霸经验分享会”。同时，本着强化我校学生专业知识技能，提高学生学习主动性和积极性的服务宗旨，学风朋辈已承办了多次学业发展辅导中心“团体工作坊”活动、“学业·职业规划大赛”等特色活动。学风朋辈正以更加积极的姿态协助我校不断完善教学过程中教与学的环节。

为了及时有效地为我校学子进行学业辅导，分享学习资源。学风朋辈创建了学委网，并拥有自己的微信公众平台（BUCTSPC），定时更新学习资源和有效信息，方便广大学生的学习和生活。

一、随机事件及其概率

【必备知识点】

1. 事件间的关系

① 包含关系：事件*A*发生必然导致*B*发生，记为$A \subset B$

② 相等关系：$A \subset B$且$B \subset A$ ，记为*A=B*。

③ 积事件：事件*A*与*B*同时发生，记为*AB*。

④ 和事件：事件*A*或*B*至少有一个发生，记为$A \cup B$

⑤ 差事件：事件*A*发生而*B*不发生，记为*A-B*。

⑥ 互斥事件：事件*A*、*B*不能同时发生，即$AB = \emptyset$又称*A*、*B*为互不相容事件。

⑦ 逆事件："*A*不发生"这一事件称为*A*的逆事件，记为$\overline{A}$，*A*与$\overline{A}$又称为对立事件。

其中， $A\ \overline{A} = \emptyset$，$A \cup \overline{A} = S \rightarrow \overline{A} = S - A$

2. 事件的运算律

① 交换律：$A \cup B = B \cup A; AB = BA$

② 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (AB)C = A(BC)$

③ 分配律：

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

$$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC);$$

④ 对偶律（De Morgan德摩根律）：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$$

⑤ 减法： $A - B = A\overline{B}$

3. 概率

做n次重复试验，事件A发生的次数记为n_A， 当n很大时，若频率n_A/n稳定在常数P附近，则称P为随机事件A发生的概率，记作P(A)=P。

4. 概率的公理化定义

设E是随机试验，S是样本空间，对E的每个随机事件A，赋予一个实数P(A)， 若它满足：

① 非负性： $0 \leq P(A) \leq 1$

② 规范性：$P(S) = 1$ ，S为样本空间（必然事件）

③ 可列可加性：若事件$A_1, A_2, \dots, A_{n,\dots}$，中$A_iA_j = \emptyset, i \neq j$则$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$,则称$P(A)$为事件A的发生概率。

5. 概率的性质

①. 有限可加性：有限个两两互斥的事件$A_1, A_2, \dots, A_{n,\dots}$则$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$

②. $\bar{A}$是A的对立事件，则$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

③. $A \subset B$, 则$P(B - A) = P(B) - P(A)$

④. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,当A，B互斥即$AB = \emptyset$时$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

⑤ $P(\emptyset) = 0, P(S) = 1, P(A) \leq 1$

⑥ 推广 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

6. 等可能概型（古典概型）

1. 定义：具有以下性质的随机试验称为等可能概型

① 试验的样本空间的元素只有有限个

② 试验中每个基本事件发生的可能性相同

2. 等可能概型中事件概率的计算公式：

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

n为随机试验的总的结果数，即样本点的总数，k为事件A包含的结果数。

7. 条件概率

①. 定义：事件A已发生的条件下事件B发生的概率，称为条件概率，记为$P(B|A)$。

例 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正面的情况，设A={至少有一次为正面H}，B={两次掷出同一面}， 求$P(B|A)$

解：样本空间S={HH,HT,TH,TT},A={HH,HT,TH}, B={HH,TT}。则可得：

$$P(B|A) = 1/3$$

②条件概率的计算公式：

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{AB\text{中包含的基本事件}}{A\text{中包含的基本事件}}$$

③乘法定理：设$P(A)>0$，则有$P(AB)=P(B|A)P(A)$

推广： $P(AB)>0$，则有$P(ABC)=P(C|AB)P(AB) \;=\; P(C|AB)\ P(B|A)P(A)$

8. 全概率公式

①划分：设S为试验E的样本空间$B_1,B_2,\ldots,B_{n,\ldots}$， 为E的一组事件，若

$$B_iB_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n$$

$B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S$,则称$B_1,B_2,\ldots,B_{n,\ldots}$为样本空间S的一个划分。

②定理：设随机试验E的样本空间为S，A为E的事件$B_1,B_2,\ldots,B_{n,\ldots}$,为S的一个划分，且

$P(B_i)>0,(i=1,2,3\ldots,n)$ 则$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$,称

之为全概率公式。

注：全概率公式给出我们一个用来计算在众多原因$B_1,B_2,\ldots,B_{n,\ldots}$的作用下事件A发生概率的

方法.

（由因得果）

9. 贝叶斯公式（由果溯因）

设E的样本空间为S，A为E的事件. $B_1,B_2,\ldots,B_{n,\ldots}$ 为S的一个划分，且$P(A)>0$，$P(B_i)>$

$0,(i=1,2,3,\ldots,n)$ ，则$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)}$为贝叶斯

公式。

其中$P(B_i)$为先验概率；$P(B_i|A)$为后验概率。

二、随机变量及其分布

1、一维离散性随机变量及其分布

【必备知识点】

（1）、常用随机变量及其分布律

分布	分布律	期望$E(X)$	方差$D(X)$
a、$0-1$分布（两点分布）	$P\{X=k\}=p^k\cdot(1-p)^{1-k}$ $0<\mathrm{p}<1;\mathrm{k}=0,1$	p	p
b、二项分布 $X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ $0<\mathrm{p}<1;\mathrm{k}=0,1,\ldots,\mathrm{n}$	np	$np(1-p)$
c、泊松分布 $X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ $\lambda>0,\mathrm{k}=0,1,\ldots$	λ	λ
d、几何分布	$P\{X=k\}=p\cdot(1-p)^{k-1}$ $\mathrm{k}=0,1,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
e、超几何分布	$P\{X=k\}=\frac{C_a^kC_b^{m-k}}{C_{a+b}^m}$ $(1\le m\le a+b;1\le k\le\min\{m,a\})$		

泊松定理：

$X\sim B(n,p_n),p_n$与n有关，且$\mathrm{n}\cdot p_n=\lambda$(常数)$>0$，$\mathrm{n}=0,1,\ldots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}P\{X_n=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

应用：

若给定$P(\lambda)$，可以用n很大的$B(n,\frac{\lambda}{n})$来逼近；给定n很大的$B(n,p)$，可以用$P(np)$近似，即

$C_n^kp^k\cdot(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$，其中$\mathrm{n}\cdot p=\lambda$

（2）、分布函数

a、定义：$F(x)=P\{X\le x\}$

b、性质：

$0\le F(x)\le 1$	$x_1<x_2\Rightarrow F(x_1)\le F(x_2)$	$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$

【常见题型与详解】

（1）、已知$X\sim P(\lambda)$，求$E(X^2)$

解题思路：$E(X)=\lambda$，$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda\Longrightarrow E(X^2)=\lambda+\lambda^2$

（2）、已知口袋中有 4 个白球，3 个红球，一次取出 3 个球，取出 2 个红球的概率为

解题思路：X服从超几何分布，$P\{X=2\}=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$

（3）、设随机变量X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<1\\ 0.3,1\le x<2\\ 0.7,2\le x<3\\ 1 & ,3\le x\end{cases}$，则X的分布律为

解题思路：$P\{X=1\}=F(1)-F(0)=0.3$，$P\{X=2\}=F(2)-F(1)=0.4$，$P\{X=3\}=F(3)-F(2)=0.3$

【例题】

（1）、设$X \sim B(3,p)$，且$P\{X=0\}=\frac{1}{2}$，则p为多少？

（2）、已知$X \sim P(\lambda)$，且$E(X)=D(X)=1$，则$P\{X \neq 0\}$为多少？

答案：（1）$p=1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ （2）$P\{X \neq 0\}=1-\frac{1}{e}$

2、一维连续型随机变量及其分布

【必备知识点】

（1）、密度函数

a、定义：$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

b、性质：

$f(x) \geq 0$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$
$P\{a<x<b\}=\int_{a}^{b} f(x)\,dx=F(b)-F(a)$	$f(x)$在x处连续$\Rightarrow F'(x)=f(x)$

（2）、几种常用连续型随机变量的分布

分布	密度函数	期望$E(X)$	方差$D(X)$
a、均匀分布 $X \sim U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
b、指数分布 $X \sim E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0，\lambda>0\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
c、正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$	μ	σ^2

【常见题型与详解】

（1）、 已知$X \sim E(\lambda)$，求$P\{X>\sqrt{D(X)}\}$

解题思路：$\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}$ 所以 $P\left\{X>\sqrt{D(X)}\right\}=1-P\left\{X \leq \sqrt{D(X)}\right\}=1-F\left(\frac{1}{\lambda}\right)=1-\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{e}$

（2）、 $f(x)=\begin{cases}A \cdot x+1, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，求$A$，$F(x)$，$P\{1.5<x<2.5\}$

解题思路：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^2 (A \cdot x+1)dx=1 \Longrightarrow A=-\frac{1}{2}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\begin{cases}0, & x \leq 0\\ -\frac{x^2}{4}+x, & 0<x<2\\ 1 & ,2 \leq x\end{cases}$$

$$P\{1.5<x<2.5\}=F(2.5)-F(1.5)=\frac{1}{16}$$

【例题】

设$X \sim N(10,2^2)$，求 $P\{|X-10|<2\}$。已知$F_{0,1}(1.5)=0.9332$ $F_{0,1}(1)=0.8413$

$F_{0,1}(0.5)=0.6915\ \ F_{0,1}(2)=0.9772$
答案：$P\{|X-10|<2\}=2F_{0,1}(1)-1=0.6826$

3、二维随机变量及其分布

【必备知识点】

（1）、离散性

a、联合分布律：$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$

b、联合分布函数：

定义：$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$

性质：

$0\le p_{ij}\le 1$	$\sum_{i,j} p_{ij}=1$

c、边缘分布

边缘分布律	边缘分布函数
$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$	$F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$
$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$	$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\sum_{y_i\le y}\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

d、独立性

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)\Leftrightarrow P(X=x_i,Y=y_j)=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$$

（2）、连续型

a、联合密度

定义：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dy$

性质：

$f(x,y)\ge 0$	$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=1$
$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=f(x,y)$	$P\{(X，Y)\epsilon G\}=\iint_G f(x,y)\,d\sigma$

b、常用二维随机变量的分布

①均匀分布

联合密度：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{s},\ (x,y)\in G\\ 0,\ 其他\end{cases}$

②二维正态分布$X,Y\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2;\mu_2,{\sigma_2}^2;\rho)$

联合密度：$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\cdot\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right]}$

二维正态分布的联合密度不要求记忆，了解即可。

c、边缘分布

边缘分布函数	边缘密度函数
$F_X(\mathrm{x})=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$	$f_X(\mathrm{x})=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$
$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$	$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

d、独立性

$$F(x,y)=F_X(\mathrm{x})\cdot F_Y(y)\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(\mathrm{x})\cdot f_Y(y)$$

定理：X 与 Y 相互独立，$\mathrm{g_1(x)}$与$\mathrm{g_2(x)}$为两连续函数 $\Longrightarrow$ $\mathrm{g_1(X)}$与$\mathrm{g_2(Y)}$也相互独立

【常见题型与详解】

（1）、 袋中装有标号 1，2，2 的三个球，从中取出一球，不放回，再取一球，以X, Y表示第一二次取到的球上的号码数。求(X, Y)的联合分布，以及关于X, Y的边缘分布，并判断X 与 Y是否相互独立。

解题思路：

Y / X	1	2	X的边缘分布
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Y的边缘分布	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

因为$\mathrm{P\{X=1,Y=1\}=0\neq 1=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}}$，所以X 与 Y不相互独立。

（2）、

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8}\cdot(x^2+y^2),\ -1\le x\le 1,-1\le y\le 1\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 其他\end{cases}$$，求$f_X(\mathrm{x})$，并判断X 与 Y 是否独立

解题思路：$f_X(\mathrm{x})=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\frac{3}{8}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,dy=\frac{3}{4}\cdot x^2+\frac{1}{4},-1\le x\le 1\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\frac{3}{8}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,dx=\frac{3}{4}\cdot y^2+\frac{1}{4},-1\le y\le 1\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 其他\end{cases}$$

$f(x,y)\neq f_X(\mathrm{x})\cdot f_Y(y)$所以X 与 Y 不独立

【例题】

$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}),x>0,y>0\\ 0,else\end{cases}$，求$F_X(\mathrm{x})$和$F_Y(y)$，并判断两随机变量是否独立。

答案：$F_X(\mathrm{x})=\begin{cases}1-e^{-2x},x>0\\ 0,else\end{cases}$ $\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y},y>0\\ 0,else\end{cases}$ 独立

4、随机变量函数的分布

【必备知识点】

（1）、离散性随机变量的函数及其分布

a、一维

X分布律为$P\{X=x_i\}=p_i$，$y=g(x)$为连续实函数，$P\{Y=g(X)=g(x_i)\}=p_i$，函数值$g(x_1)$，$g(x_2)$，⋯，$g(x_n)$，⋯相同的只写一个，对应概率想加，其余照抄，可得$Y=g(X)$的分布律。

b、二维

$P\{Z=g(x_i,y_j)\}=p_{ij}$，$g(x_i,y_j)$相同的只写一个，对应概率想加，其余照抄，可得$Z=g(X,Y)$的分布律。

结论：

①$X_i(i=1,2,\dots,n)$独立且服从两点分布 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \sim B(n,p)$

②$X_i(i=1,2,\dots,n)$独立，$X_i\sim B(k_i,p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(\sum_{i=1}^{n} k_i\,,p)$

③$X_i(i=1,2,\dots,n)$独立，$X_i\sim P(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$

（2）、连续型随机变量的函数及其分布

a、一维

①推导法：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}\xRightarrow{y=g(x)\text{为单调增函数}}F_Y(y)=P\{X\le\varphi(y)\}=F_X(\varphi(y))$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{dF_X(\varphi(y))}{dy}=f_X(\varphi(y))\cdot\varphi'(y),$$

同理可得$y=g(x)$为单调减函数时$F_Y(y)=1-F_X(\varphi(y)),f_Y(y)=-f_X(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)$。

②公式法：

若$y=g(x)$为单调函数，且$g'(x)\ne 0$，$x=\varphi(y)$为$y=g(x)$的反函数，则$Y=g(X)$的密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[\varphi(y)]|\varphi'(y)|, & y\in(\alpha,\beta) \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\},\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$$

b、二维

①$Z=X+Y$的分布

卷积公式：$f_Z(z)=F_Z'^{(z)}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$

$$\xRightarrow{X,Y\text{独立}} f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\,dy$$

结论：$X_i(i=1,2,\dots,n)$独立，$X_i\sim N(\mu_i,{\sigma_i}^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,,\sum_{i=1}^{n}{\sigma_i}^2)$

② $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布(距离分布)

$$F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=\begin{cases} 0,z<0 \\ \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} f(x,y)d\sigma\,,z\ge 0\end{cases}$$

③$Y=\max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$与$Z=\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$的分布

$F_Y(y)=P\{\max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}\le y\}=P\{X_1\le y,X_2\le y,\dots,X_n\le y\}=F_{X_i(i=1,2,\dots,n)}(y,y,\dots,y)$

$$\xRightarrow{X_i(\mathrm{i=1,2,\dots,n})\text{独立}} F_Y(y) = F_1(y)\cdot F_2(y)\dots\cdot F_n(y)$$

$$F_Z(z) = P\{\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}\le z\} = 1 - P\{\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}\ge z\}$$
$$= 1 - P\{X_1\ge z, X_2\ge z,\dots,X_n\ge z\}$$

$$\xRightarrow{X_i(\mathrm{i=1,2,\dots,n})\text{独立}} F_Z(z) = 1-[1-F_1(z)]\cdot[1-F_2(z)]\dots[1-F_n(z)]$$

【常见题型与详解】

（1）、随机变量X 的概率密度$f_X(\mathrm{x}) = \begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$ 求随机变量$\mathrm{Y}=\mathrm{e}^{\mathrm{X}}$的密度函数$f_Y(y)$

解题思路：$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[\varphi(y)]|\varphi'(y)|s = \begin{cases} e^{-\ln y}\cdot\frac{1}{y} & ,\mathrm{y}\in[1,+\infty) \\ 0 & ,\mathrm{y}\in(0,1)\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{y^2} & ,\mathrm{y}\in[1,+\infty) \\ 0 & ,\mathrm{y}\in(0,1)\end{cases} \\ 0,\ \text{其他}\end{cases} =$

$\begin{cases}\frac{1}{y^2} & ,\mathrm{y}\in[1,+\infty) \\ 0 & ,\mathrm{y}\in(-\infty,1)\end{cases}$

（2）、 X 与 Y 相互独立，$X\sim U[1,2]$，$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & ,\mathrm{y}\in(0,+\infty) \\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$，求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(\mathrm{z})$

解题思路：$f_X(\mathrm{x}) = \begin{cases}1, & 1<x<2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $1<\mathrm{z}-\mathrm{y}<2 \Rightarrow \mathrm{z}-2<\mathrm{y}<\mathrm{z}-1$

$$f_Z(\mathrm{z}) = \begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\mathrm{z}-\mathrm{y})\cdot f_Y(y)\,dy = \int_{z-2}^{z-1} f_Y(y)\,dy = \begin{cases}\int_{z-2}^{z-1} e^{-y}\,dy = e^{2-z}-e^{1-z}, z\ge 2 \\ \int_0^{z-1} e^{-y}\,dy = 1-e^{1-z}, 1<z<2\end{cases} \\ 0, z\le 1\end{cases}$$

$$f_Z(\mathrm{z}) = \begin{cases}\int_{z-2}^{z-1} e^{-y}\,dy = e^{2-z}-e^{1-z}, z\ge 2 \\ \int_0^{z-1} e^{-y}\,dy = 1-e^{1-z}, 1<z<2 \\ 0, z\le 1\end{cases}$$

【例题】

（1）、已知随机变量X的分布函数为$F(x)$，求随机变量$Y=3X$的分布函数$G(y)$

（2）、 $X,Y\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2;\mu_2,{\sigma_2}^2;\rho)$，$f(x,y)=\frac{1}{36\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}\right]}$，$Z=X-Y$，则$\mathrm{P}\{\mathrm{Z}<1\}$为多少？

答案：（1）、$G(y)=F(\frac{x}{3})$ （2）、$\mathrm{P}\{\mathrm{Z}<1\} = F_{0,1}(1) = 0.8413$

三、随机变量的数字特征

【必备知识点】

（1）、数字特征含义：与随机变量的分布特点密切相关的数值。

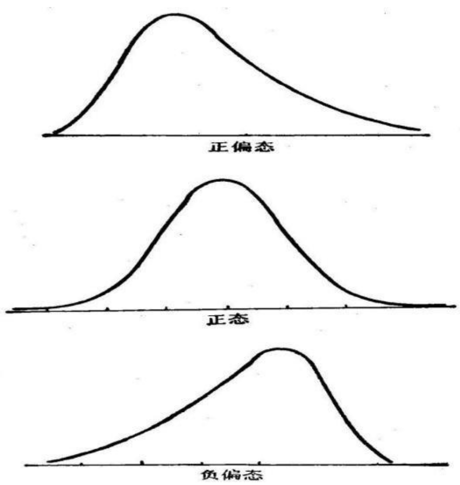
（2）、随机变量常用的数字特征分类：数学期望、方差、相关系数、矩。

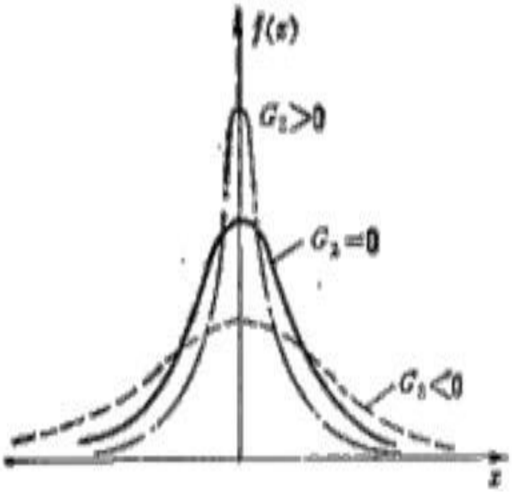
（3）、数字特征意义区别：

a、数学期望 E（X）（expectation）：表示随机变量 X 取值的集中位置，均值是其无偏、有效、相合估计。

b、方差 var（X）（variance,dispersion）：表示随机变量 X 取值相对于数学期望的集中程度，越大越分散。

c、偏度系数（skewness）$\gamma(X)$：表示随机变量 X 的分布关于其均值 E（X）的不对称程度。分为$\gamma(X)<0$左偏（负偏态）、$\gamma(X)=0$正态、$\gamma(X)>0$右偏（正偏态）分布。





d、峰度系数（kurtosis）$\kappa(X)$：表示随机变量 X 的分布与正态分布相比较的平坦程度。越大越尖峭。分为$\kappa(X)>0$尖顶峰、$\kappa(X)=0$正态峰、$\kappa(X)<0$平顶峰。

e、相关系数ρ_{XY}:表示随机变量 X、Y 线性相关的程度。越大相关程度越好。

1、数学期望

【必备知识点】

（1）、随机变量的数学期望分类

a、离散型随机变量的数学期望：

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$（k = 1,2,...）, 若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛，则 X 的数学期望（期望、均值）$E(X)=EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$。

b、连续型随机变量的数学期望：

设连续型随机变量 X 的密度函数为$f(\mathrm{x})$, 如果积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$绝对收敛，则 X 的数学期望

$\mathrm{E(X)} = \mathrm{EX} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$。

（4）、一维随机变量函数的数学期望分类

设 Y 是随机变量 X 的函数：Y=g(X)(g 是连续函数)

a、设离散型随机变量 X 的分布律为 $\mathrm{P}\{\mathrm{X} = x_k\} = p_\mathrm{k}$（$\mathrm{k} = 1,2,\ldots$）, 若级数$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝

对收敛，则 Y 的数学期望$\mathrm{E(Y)} = \mathrm{E[g(X)]} = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$。

b、设连续型随机变量 X 的分布密度为$f(\mathrm{x})$, 若$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则 Y 的数学期望

$\mathrm{E(Y)} = \mathrm{E[g(X)]} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$。

（5）、二维随机变量函数的数学期望分类

a、设二维离散型随机变量（X,Y）的分布律为$\mathrm{P}\{\mathrm{X} = \mathrm{x}_i, \mathrm{Y} = \mathrm{y}_j\} = p_{ij}$ $(\mathrm{i},\mathrm{j} = 1,2,\ldots)$, 若

$\sum_{i,j} g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则$\mathrm{E(Z)} = \mathrm{E[g(X,Y)]} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$。

b、设二维连续型随机变量（X,Y）的分布密度为$f(x,y)$, 若$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$绝

对收敛，则$\mathrm{E(Z)} = \mathrm{E[g(X,Y)]} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$。

(6) 数学期望的性质（假设下列数学期望存在，C 为常数，X、Y 为随机变量）

a、$\mathrm{E(C)} = \mathrm{C}$, C 为常数;

b、$\mathrm{E(CX)} = \mathrm{CE(X)}$, C 为常数;

c、$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$，$E[\sum_{i=1}^{n} x_i] = \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$；

d、当X, Y为相互独立的随机变量时，$E(XY) = E(X)E(Y)$，$E[\prod_{i=1}^{n} x_i] = \prod_{i=1}^{n} E(x_i)$；

2、方差

【必备知识点】

（1）、方差的定义：设 X 是一个随机变量，若$\mathrm{E[X - E(X)]^2}$存在，则 X 的方差$\mathrm{var(X)}$ (或

$\delta^2\mathrm{(X)}$、$\mathrm{D(X)}$、DX) $= \mathrm{E[X - E(X)]^2}$。

（2）、标准差的定义：$\sqrt{\mathrm{var(X)}}$（$\delta\mathrm{(X)}$、$\sqrt{\mathrm{D（X）}}$、$\sqrt{\mathrm{DX}}$）。

（3）、随机变量的方差分类

a、离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$（k = 1,2,...），函数 $g(X) = [X - E(X)]^2$ 的数学期望即为 X 的方差，$\mathrm{var}(X) = \sum_{k=1}^{\infty}[x_k - E(X)]^2 p_k$。

b、连续型随机变量 X 的分布密度为 f(x),则

$$\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X)]^2 f(x)dx = E(X^2) - [E(X)]^2。$$

（4）、方差的性质（C 为常数，X、Y 为随机变量）

a、$\mathrm{var}(C) = 0$。

b、$\mathrm{var}(CX) = C^2\mathrm{var}(X)$。

c、X、Y 相互独立时，$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$。

d、$\mathrm{var}(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = C) = 1$。

3、矩、协方差和相关系数

【必备知识点】

（1）、X 的 k 阶（原点）矩 $\alpha_\kappa = E(X^k)(k = 1,2,\cdots)$。$\alpha_1 = E(X)$。

（2）、X 的 k 阶中心矩

$\mu_k = E[X - E(X)]^k, (k = 1,2,\cdots)$。$\mu_2 = E[X - E(X)]^2 = \mathrm{var}(X)$。

（3）、X 的偏度系数 $\gamma(X) = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{E[X - E(X)]^3}{[\mathrm{var}(X)]^{\frac{3}{2}}}$。

（4）、X 的峰度系数 $\kappa(X) = \frac{E[X - E(X)]^4}{[\mathrm{var}(X)]^2} - 3$。

（5）、(X, Y)是二维随机变量，X 与 Y 的协方差

$\mathrm{var}(X \pm Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) \pm 2Cov(X, Y)$。

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$。

X、Y相互独立 $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

$\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0 \Rightarrow$ X、Y不相互独立

X、Y不相互独立 $\Rightarrow$ X、Y不相关

X、Y不相关 $\Rightarrow$ X、Y可能存在非线性关系，不能确定相互独立性。

当 X、Y 均服从正态分布时则会有 X、Y相互独立 $\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

（6）、X 与 Y 的相关系数 $\rho = \rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}$。

（7）、协方差的性质：

a、$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$;

b、$\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$,（a,b 为常数）;

c、$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$;

d、$\mathrm{Cov}(X,Y_1+Y_2)=\mathrm{Cov}(X,Y_1)+\mathrm{Cov}(X,Y_2)$;

e、$Cov(X,a)=0$,（a 为常数）。

（8）、相关系数的性质：

a、$|\rho_{XY}|\le 1$。

b、若 X 与 Y 相互独立，则 $Cov(X,Y)=0,\rho_{XY}=0$。

c、$|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow P\{Y=bX+a\}=1,(a,b$为常数，$b\neq 0)$。

【例题总结】

几种常见分布的期望与方差

分布类型	离散型—分布律 连续型—密度函数	E（X）	Var(X)
$X\sim$（0-1）分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $(k=0,1;0<p<1)$	p	P(1-p)
$X\sim B$（n,p）	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,2...,n)$	np	np(1-p)
$X\sim P$（λ）	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(k=0,1,2...)$	λ	λ
$X\sim$参数为p的几何分布	$P\{X=k\}=p\ (1-p)^{k-1}$ $(k=1,2...)$	$\dfrac{1}{p}$	
$X\sim U$（$a.b$）	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},a\le x\le b\\ 0,others\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$X\sim N$（μ，σ^2）	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\end{cases}$ $x\in R$	μ	σ^2
$X\sim N$（0,1）	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\end{cases}$ $x\in R$	0	1

【常见题型与详解】

（1）、设（X, Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y),0\le x\le 2,0\le y\le 2\\ 0,others\end{cases}$，求

E（X), E(Y), var(X), var(Y), Cov(X, Y), ρ_{XY}

解题思路：此题集中考察第三章的数字特征：二维连续型随机变量的期望，方差，协方差，相关系数。
利用公式求，先要熟悉公式，把公式挨个列出来，再一一求解，注意与高数定积分、二重积分的结合。

$\mathrm{E(X)}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$,$\mathrm{E(Y)}=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$,

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy$，$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dxdy$,

$\mathrm{var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$，$\mathrm{var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$,

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$, $\mathrm{Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)}$,

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}$。

$$\mathrm{E(X)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{8}(x+y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2(\frac{x^2}{8}+\frac{xy}{8})dy=\int_0^2(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4})dx=\frac{7}{6},$$

$$E(X^2)=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{x^2}{8}(x+y)dy=\frac{5}{3},$$

$$\mathrm{var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-\frac{49}{36}=\frac{11}{36},$$

因对称性，$\mathrm{E(Y)}=\frac{7}{6},\mathrm{var}(Y)=\frac{11}{36},$

$$E(XY)=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{xy}{8}(x+y)dy=\frac{4}{3},$$

$$\mathrm{Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)}=\frac{-1}{36},$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}=\frac{-1}{11}。$$

（2）、$P\{X=k\}=\frac{3^k e^{-3}}{k!}(k=0,1,2...)$，$Y=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),求E(Y^2).$

解题思路：先带入再展开还是先展开再代入。

$E(X)=\mathrm{var}(X)=3$

方法一：$E(Y^2)=\frac{1}{9}E(x_1+x_2+x_3)^2=\frac{1}{9}\left\{\mathrm{var}(x_1+x_2+x_3)+[E(x_1+x_2+x_3)]^2\right\}$

$=\frac{1}{9}[3\mathrm{var}(X)+9E(X)^2]=10.$

方法二：$E(Y^2)=\mathrm{var}(Y)+[E(Y)]^2=\frac{1}{9}\mathrm{var}(x_1+x_2+x_3)+[\frac{1}{3}E(x_1+x_2+x_3)]^2=10$

（3）、$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi a^2} & ,x^2+y^2\le a^2,判断x,y是否相关。\\ 0，others\end{cases}$

解题思路：即求ρ_{xy}是否为0，需求$E(XY),E(X)E(Y),$作差，

需求$f_X(x),f_Y(y).$

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\pi a^2}dy=\frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2},-a\le x\le a\\ 0,others\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{1}{\pi a^2}dx=\frac{2\sqrt{a^2-y^2}}{\pi a^2},-a\le y\le a\\ 0,others\end{cases}$$

$EX=\int_{-a}^{a}x\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2}dx=0$(奇函数)，同理，$EY=0.$

$$E(XY)=\iint_{x^2+y^2\le a^2}xy\frac{1}{\pi a^2}dxdy=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{dt}\int_0^{\mathrm{a}}\mathrm{rsint}\cdot\mathrm{rcost}\cdot\mathrm{rdr}=\frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{a}r^3dr\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2td2t=0$$

$\therefore E(XY)-E(X)E(Y)=0,\therefore \rho_{xy}=0,x$、$y$不相关。

（4）、设随机变量X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},则DX=?$

解题思路：与正态分布对比得出，而非用常规算法。

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2}$

$\mu=1,2\sigma^2=1,\ \sigma^2=DX=\frac{1}{2}.$

（5）、$CY=C[(x_1+x_2)^2+(x_3-x_4)^2]\sim\chi^2(2), x_i\sim N(0,2^2)$，求$C$.

解题思路：此题是卡方分布和方差的结合，要拆成标准形式计算。

$[\sqrt{C}(x_1+x_2)]^2+[\sqrt{C}(x_3-x_4)]^2\sim\chi^2(2)$

令$Y_1=\sqrt{C}(x_1+x_2)$，$Y_2=\sqrt{C}(x_3-x_4)$

若$Y_1\sim N$（0,1），$Y_2\sim N$（0,1），则$Y_1{}^2+Y_2{}^2\sim\chi^2(2)$

$\because x_i\sim N(0,2^2)\therefore D(X)=4$

$D(Y_1)=CD$（$x_1+x_2)=C[D(x_1)+D(x_2)]=8C=1\therefore C=\dfrac{1}{8}.$

四、大数定律和中心极限定理

1、大数定律

【必备知识点】

（1）、契比晓夫（Chebyshev）不等式

$$\mathrm{P}\{|X-E(X)|\geq \varepsilon\}\leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\mathrm{P}\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\leq 1-\frac{var(X)}{\varepsilon^2}$$

其长处是它不依赖于X的具体概率分布，适用性宽泛，但是精度不高。

（2）、经典大数定律

a、定义

$\{X_n\}$是独立同分布随机变量序列，若$\forall\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\{|\overline{X_n}-\mu|\geq\varepsilon\}=0$ ，

其中$\overline{X_n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}X_i, \mu=EX_n$(不依赖于 n)，则称$\{X_n\}$服从大数定律。

b、几种不同形式

①契比晓夫大数定律引理(契比晓夫大数定律的特例)

随机变量$X_i(\mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{n})$独立，且具有相同数学期望$\mathrm{E}(X_i)=\mu$,方差$\mathrm{var}(X_i)=\sigma^2$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0，\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

②契比晓夫大数定律

随机变量$X_i(\mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{n})$独立，每个变量都存在数学期望$\mathrm{E}(X_i)$,方差$\mathrm{var}(X_i)$，且方差有界$[\exists\mathrm{M}>0,\mathrm{var}(X_i)<\mathrm{M}]$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0，\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}X_i-\frac{1}{n}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0，\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}X_i-\frac{1}{n}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}E(X_i)\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

当n充分大，n个随机变量的算数平均值$\frac{1}{n}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}X_i$趋向其数学期望$\frac{1}{n}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}E(X_i)$。

③贝努力大数定律(辛钦大数定律特例)

n次独立重复实验中事件A发生Y_n次，事件A发生的概率为p，即$Y_n=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}X_i$，$X_i$服从两点分布，$Y_n\sim B(n,p)$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{P}\left\{\left|\frac{Y_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

这个定理表达了频率的稳定性。在实际应用中，当实验次数很大时，可以以事件发生的频率代替概率。

④辛钦大数定律

随机变量$X_i(\mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{n})$独立，服从同一分布，且具有相同数学期望$\mathrm{E}(X_i)=\mu$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

（2）、依概率收敛

①定义：

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$为一个随机变量序列，a为一常数，若$\forall\varepsilon > 0$，$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$，则称$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$依概率收敛于$a$，记为$X_i \xrightarrow{p} a$。

②性质：

设$X_n \xrightarrow{p} a$，$Y_n \xrightarrow{p} b$，$g(x,y)$在(a,b)处连续，则$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(a,b)$。

【常见题型与详解】

$X\sim B(200, 0.01)$，试用契比晓夫不等式估计$P\{|X-2| < 2\}$的值。

$$P\{|X-2| < 2\} \le \frac{1.98}{2^2} = 0.495$$

【例题】

$X\sim E(\frac{1}{2})$，试用契比晓夫不等式估计$P\{|X-2| > 3\}$的值。

答案：$P\{|X-2| > 3\} \le \frac{4}{3^2} = \frac{4}{9}$

2、中心极限定理

【必备知识点】

（1）、独立同分布的中心极限定理

随机变量$X_i(i = 1,2,\ldots)$独立，服从同一分布，数学期望 $E(X_i) = \mu$, 方差 $var(X_i) = \sigma^2 \ne 0$，

$$n \to \infty \Rightarrow Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\sqrt{var(\sum_{i=1}^{n} X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\{Y_n < x\} = \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

（2）、德莫佛-拉普拉斯(De Moivre – laplace)中心极限定理

$$Y_n \sim B(n,p) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\{\frac{Y_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

【常见题型与详解】

随机变量 $X_i(i = 1,2,\ldots)$独立，都服从参数为λ的poisson分布，由中心极限定理知，当n充分大时，$Y = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i$ 渐近服从什么分布?(写出该分布的参数)

解题思路：$n \to \infty \Rightarrow Y_n = \frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{var\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\lambda, \frac{\lambda}{n})$

【例题】

$X_n \sim B(n,p)$，$n = 0,1,\ldots$，$0 < p < 1$，则$\lim_{n\to\infty} P\{X_n \le x\}$为多少？

答案：$\lim_{n\to\infty} P\{X_n \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$

五、数理统计的基本概念

1、数理统计中的几个概念

【必备知识点】

（1）、总体、个体与简单随机样本

a、**总体：**研究对象的某项数量指标的值的全体。

b、**个体：**总体中的每个元素。

c、**简单随机样本：**从总体中抽取样本时，不仅要求每一个个体被抽到的机会均等，同时还要求每次的抽取是独立的，即每次抽样的结果不影响其他各次的抽样结果，同时也不受其他各次抽样结果的影响，这种抽样方法称为**简单随机抽样**，由简单随机抽样得到的样本叫做简单随机样本。

（2）、统计量

样本均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$.

样本 k 阶原点矩

$$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k,k=1,2,\cdots.$$

样本 k 阶中心矩

$$M_k'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k,k=2,3,\cdots.$$

$$E(\bar{X})=\mu,\ D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$E(S^2)=\sigma^2,\ E(S^{*2})=\frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

其中 $S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，为二阶中心矩。

2、数理统计中常用的三个抽样分布

【必备知识点】

（1）、正态分布

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的样本，则

a、$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

b、$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

c、 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立

（2）、χ^2 分布

a、定义

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且～ $N(0,1)$，则 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n)$

b、性质

①若 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X , Y 独立，则 $X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2)$

②若 $X\sim\chi^2(n)$，则 $EX=n$， $DX=2n$

（3）、t 分布

a、定义

设 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(n)$，且 X , Y 独立，则 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$

b、定理

①设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且～ $N(\mu,\sigma^2)$，则

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\dfrac{\dfrac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\dfrac{S}{\sigma}}=\frac{\dfrac{\dfrac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/n-1}}\sim t(n-1)$$

（因为 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$， $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$）

②设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 为总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本，

$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_1}$ 为总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，且 X,Y 独立，则

$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，其中

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

（4）、F 分布

a、定义

设$U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，且U,V独立，则$F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}\sim F(n_1,n_2)$

b、定理

①设$F\sim F(n_1,n_2)$，则$\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

②设$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$为总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本，

$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_1}$为总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且$X,Y$独立，则

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

【常见题型与详解】

（1）、设总体X服从$N(\mu_1,\sigma^2)$，总体Y服从$N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$为来自总体X的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$为来自总体Y的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\underline{\qquad\sigma^2\qquad}$$

解题思路：

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\frac{1}{n_1+n_2-2}E\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n_1+n_2-2}\sigma^2\left\{E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right]+E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{\sigma^2}\right]\right\}$$

又$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n_1-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$，故$E\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right]=n_2-1$，从而

$E\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}{n_1-1}=n_1-1$，同理$E\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{n_2-1}=n_2-1$，所以原式=$\sigma^2$

六、参数估计

1、参数的点估计

【必备知识点】

（1）、掌握点估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1，X_2，\ ...，X_n)$和点估计值$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1，x_2，\ ...，x_n)$的概念

（2）、参数点估计的两种方法：矩估计法和极大似然估计法

a、矩估计法：样本矩依概率收敛于相应的总体矩→总体矩是总体分布参数的函数→解出参数估计量$\hat{\theta}$

b、当总体均值μ与方差σ^2存在时，μ与σ^2的估计量分别为样本均值$\bar{X}$和样本二阶中心矩$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

c、似然函数：

X~离散型分布$p(x;\theta)$，似然函数$L(\theta)=L(x_1，x_2，\ ...，x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$

X~密度函数$f(x;\theta)$，似然函数$L(\theta)=L(x_1，x_2，\ ...，x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$

d、极大似然估计法：若似然函数$L(\theta)$在$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1，x_2，\ ...，x_n)$处取到最大值，则称$\hat{\theta}(x_1，x_2，\ ...，x_n)$为θ的极大似然估计值。

【常见题型与详解】

（1）、已知总体X分布，用矩估计法估计参数θ。

解题思路：

求出总体X的均值E(X) →由大数定律得样本均值$\bar{X}$依概率收敛于E(X)，即$\bar{X}\approx E(X)$ →得出未知参数θ的矩估计量$\hat{\theta}(X_1，X_2，\ ...，X_n)$

（2）、已知总体X分布，用极大似然估计法估计参数θ。

解题思路：

a、 求似然函数$L(\theta)$。

b、 求出$\ln L(\theta)$及方程$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$。

c、 解上述方程得到极大似然估计值$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1，x_2，\ ...，x_n)$。

d、 解上述方程得到极大似然估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1，X_2，\ ...，X_n)$。

【例题】

（1）、一般总体X~密度函数$f_X(x;\theta)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}，x>0\\ 0，x\le 0\end{cases}$，用矩估计法估计参数$\theta$。

（2）、设总体X服从正态分布$N(\mu，\sigma^2)$，其中μ和σ^2位未知参数。$X_1，X_2，\ ...，X_n$是来自X的样本。求μ和σ^2的极大似然估计量。

参考答案：

（1）、未知参数θ的矩估计值$\hat{\theta}(x_1，x_2，\ ...，x_n)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\bar{x}$。

（2）、μ和σ^2的极大似然估计量分别为$\hat{\mu}=\bar{X}$，$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$。

2、评选估计量的标准

【必备知识点】

（1）、无偏性：若$\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是θ的估计量，$E(\hat{\theta}) = \theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的无偏估计量。

（2）、有效性：

a、设$\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$都是θ的无偏估计量，如果方差$\mathrm{var}(\hat{\theta}_1) < \mathrm{var}(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

b、设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体X的样本，$\hat{\theta}$是未知参数θ的一个无偏估计量，若对θ的任一无偏估计量$\hat{\theta}'$，有$\mathrm{var}(\hat{\theta}) \le \mathrm{var}(\hat{\theta}')$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的最小方差无偏估计量。

c、若θ的无偏估计$\hat{\theta}$满足$\mathrm{var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{nI(\theta)}$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的有效估计（量）。

（3）、相合性；设$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为未知参数$\theta$的估计量。若$\hat{\theta}_n$依概率收敛于$\theta$，即对任意$\varepsilon > 0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\} = 0$，则称$\hat{\theta}_n$是$\theta$的相合估计量。

【常见题型与详解】

（1）、结合矩估计法和极大似然估计法，判断估计量是否为无偏估计量。

（2）、将估计量$\hat{\theta}$修正为无偏估计量。

（3）、判断无偏估计量的有效性。

解题思路：根据上述知识点定义判断即可。

3、参数的区间估计

【必备知识点】

（1）、掌握置信区间、置信上下限、置信度（置信水平）的基本定义。

（2）、单个正态总体$N(\mu, \sigma^2)$数学期望μ的区间估计：

a、σ^2已知时μ的置信区间：$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

b、σ^2未知时μ的置信区间：$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

（3）、单个正态总体$N(\mu, \sigma^2)$方差σ^2的区间估计：

μ未知时，方差σ^2置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

（4）、两个正态总体均值差（$\mu_1 - \mu_2$）的区间估计：

设总体$X \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$，总体$Y \sim N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$，$X$与$Y$相互独立。

a、${\sigma_1}^2$，${\sigma_2}^2$均已知时，置信区间为$\left(\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

b、${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \sigma^2$，但$\sigma^2$未知时，置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2), \bar{X} - \bar{Y} + S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)\right)$$

（$S_\omega^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$）

c、${\sigma_1}^2$，${\sigma_2}^2$均未知，且${\sigma_1}^2 \ne {\sigma_2}^2$时，置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{{S_1}^2}{n_1} + \frac{{S_2}^2}{n_2}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

（4）、两个正态总体方差比${\sigma_1}^2/{\sigma_2}^2$的区间估计：

μ_1，μ_2未知时，置信区间为$\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1，n_1-1)，\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1，n_1-1)\right)$

（5）、掌握单侧置信区间、单侧置信上（下）限的定义（与双侧置信区间类似，在上侧分位数取法上不同）。

【常见题型与详解】

（1）、已知单个总体X的分布类型、置信度，求μ或σ^2的置信区间。

（2）、已知总体X的分布类型、置信度，求μ或σ^2的单侧置信区间

解题思路：根据题目已知条件，求出$\bar{X}$，查表得到$u_{\frac{\alpha}{2}}$、$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$、$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$等数值，带入式子。

【例题】

（1）、设总体$X\sim N(\mu，\sigma^2)$，其中参数μ，σ^2均未知。今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值$\bar{x}=10$，样本方差$S^2=0.16$，求方差σ^2的区间估计。（其中$\alpha=0.05$）

（2）、设总体$X\sim N(\mu，\sigma^2)$，其中参数μ，$\sigma>0$均未知。$(x_1，x_2，\ldots，x_9)$是来自该总体的样本，测得样本方差$S^2=1.21$，则σ^2的置信度为 0.95 的具有置信上限的单侧置信区间为？

参考答案：（1）（0.0873，0.3833）　（2）（0，3.5419）

七、假设检验

1、假设检验的概念与步骤

【必备知识点】

（1）、假设检验的基本思想

a、检验统计量

设X1、X2…Xn是取自正态总体N（μ，σ^2）的样本，现在要假设的检验是

H_0：μ = μ0

则其对立假设为：

H_1：μ ≠ μ0

此时称 H_0 为原假设（或零假设，解消假设），称 H_1 为备选假设（或对立假设）

b、如何判断原假设 H_0 是否成立

由于 μ 是正态分布的期望值，它的估计量是样本均值，因此 $\overline{X}$ 可以根据 $\overline{X}$ 与μ0的差距|$\overline{X}$ − μ0|来判断 H_0 是否成立。

因此，当|$\overline{X}$ − μ0|较小时，可以认为 H0 是成立的；当|$\overline{X}$ − μ0|较大时，应认为 H0 不成立。

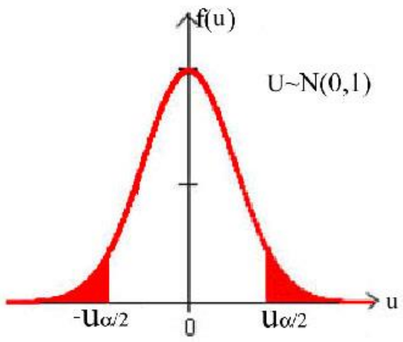
（2）、小概率事件

a、含义

在假设检验中，我们称这个小概率为显著性水平，用α表示，α的选择要根据实际情况而定。

常取的数值有：$\alpha = 0.1, \alpha = 0.01, \alpha = 0.05.$

b、图形表示



$P\{|U| > u_{\alpha/2}\} = \alpha$

可以取拒绝域为：W：$|U| > u_{\alpha/2}$

如果由样本值算得该统计量的实测值落入区域 W，则拒绝 H_0 ；否则，不能拒绝 H_0

【思路讲解】如果 H_0 是对的，那么衡量差异大小的某个统计量落入区域 W(拒绝域) 是个小概率事件，如果该统计量的实测值落入 W，也就是说， H_0 成立下的小概率事件发生了，

那么就认为 H_0 不可信而否定它，否则我们就不能否定 H0 （只好接受它）。

（3）、假设检验的一般步骤

a. 根据实际问题提出原假设 H_0 和备择假设 H1；
b. 选取适当的统计量，要求此统计量在 H0 成立条件下有确定的分布或渐近分布；
c. 给定显著水平α 的值（一般为 0.05,0.1,0.01 等），由检验统计量及统计量所服从分布的上侧分位数表，确定临界值和拒绝域；
d. 取样，根据样本观察值做出拒绝还是加收 H_0 的判断。

（4）、假设检验的两类错误

如果 H_0 成立，但统计量的实测值落入否定域，从而作出否定 H_0 的结论，那就犯了“以真为假”的错误；
如果 H_0 不成立，但统计量的实测值未落入否定域，从而没有作出否定 H_0 的结论，即接受了错误的 H_0，那就犯了“以假为真”的错误。

	实际情况	
决定	H_0 为真	H_0 不真
拒绝 H_0	第一类错误	正确
接受 H_0	正确	第二类错误

犯两类错误的概率：

P{拒绝 H_0|H_0 为真}=α

P{接受 H_0|H_0 不真}=β

显著性水平α为犯第一类错误的概率。
两类错误是互相关联的，当样本容量固定时，一类错误概率的减少导致另一类错误概率的增加。要同时降低两类错误的概率α，β或者要在α不变的条件下降低β，需要增加样本容量。

【例题】

（1）、某工厂生产的一种螺钉，标准要求长度是 32.5 毫米。实际生产的产品，其长度 X 假定服从正态分布N（μ，σ^2），σ^2未知，现从该厂生产的一批产品中抽取 6 件,得尺寸数据如下：
32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03
问这批产品是否合格?
分析：这批产品(螺钉长度)的全体组成问题的总体 X. 现在要检验 E(X)是否为 32.5。
解答：
STEP1. 提出原假设和备择假设

H_0：$\mu = 32.5$

H_1：$\mu \neq 32.5$

STEP2. 取一检验统计量，在 H_0 成立下求出它的分布

$$t = \frac{\overline{X} - 32.5}{S/\sqrt{6}} \sim t(5)$$

STEP3. 对给定的显著性水平α=0.01，查表确定临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(5) = t_{0.005}(5) = 4.0322$, 可得出否

定域：W：$|t| > 4.0322$
STEP4. 将样本值代入算出统计量 t 的实测值，$|t|=2.997<4.0322$，故不能拒绝 H_0。
（2）、某织物强力指标 X 的均值μ_0=21 公斤． 改进工艺后生产一批织物，今从中取 30 件，测得 $\overline{X}$ =21.55 公斤． 假设强力指标服从正态分布N（μ，σ^2），且已知σ=1.2 公斤，问在显著性水平α=0.01 下，新生产织物比过去的织物强力是否有提高?
解：
提出假设，H_0：$\mu \leq 21$；H1：$\mu > 21$
取统计量$U = \frac{\overline{X}-21}{\sigma/\sqrt{n}}$
此时可得出拒绝域为W：$U > u_{0.01} = 2.33$
代入$\sigma = 1.2$，$n = 30$，并由样本值计算得出统计量 U 的实测值 U=2.51>2.33
因此，拒绝原假设 H_0 ，即新生产织物比过去的织物的强力有提高。

2、单个正态分布总体均值的假设检验

【必备知识点】
（1）、双侧与单侧假设检验
a、双侧检验
当原假设（如对总体均值μ）为 H_0：$\mu = \mu 0$，那么备择假设按照实际问题的具体情况，可在下面三个中选定一个

$$\mu \neq \mu 0$$
$$\mu > \mu 0$$
$$\mu < \mu 0$$

由于此类假设检验的拒绝域在接受域两侧，因此称它为双侧假设检验。
b、单侧检验
假设检验的拒绝域只在接受域的一侧，则称为单侧检验。
（2）、单个总体N（μ，σ^2）均值μ的检验
a、双边检验
设 X1、X2…Xn 是取自正态总体N（μ，σ^2）中的样本，现取检验假设
H_0：$\mu = \mu 0$ ； H_1: $\mu \neq \mu 0$
选择检验统计量$U = \frac{\overline{X}-\mu 0}{\delta 0/\sqrt{n}}$
可得出检验问题的拒绝域为$|U| > u_{\alpha/2}$，当统计量 U 的值满足拒绝域，则拒绝原假设 H_0，否则就接受 H_0。
b、单边检验
H_0：$\mu = \mu 0$ ； H_1: $\mu > \mu 0$
选择检验统计量$U = \frac{\overline{X}-\mu 0}{\delta 0/\sqrt{n}}$
可得问题的拒绝域为$u = \frac{\overline{X}-\mu 0}{\delta 0/\sqrt{n}} \geqslant u_\alpha$
对左边检验问题，
H_0：$\mu = \mu 0$ ； H_1: $\mu < \mu 0$

选择检验统计量$U=\frac{\overline{X}-\mu0}{\delta0/\sqrt{n}}$

可得问题的拒绝域为$u=\frac{\overline{X}-\mu0}{\delta0/\sqrt{n}}\leqslant -u_{\alpha}$

（3）、σ^2未知，关于μ的检验（t 检验）

设总体 x~ N（μ，σ^2），其中μ，σ^2未知，我们来求检验问题

H_0：$\mu=\mu0$ ； H_1: $\mu\neq\mu0$

此时由于总体方差σ^2未知，因此可用样本方差S^2代替总体方差σ^2，采用 T 检验

$$T=\frac{\overline{X}-\mu0}{S/\sqrt{n}}$$

当 H_0 为真时，T~t(n-1)。

由$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha$可得出该类检验问题的拒绝域为$|t|=\left|\frac{\overline{X}-\mu0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$利用 T 统计量的检验方法成为 t-检验法

【常见题型与详解】

（1）、假设检验的步骤

题目问题多为“判断…产品是否合格”、“产品长度是否超过…”、“质量是否降低…”

解题思路：

遇到此类题目，首先判断题目为单侧还是双侧，若出现“提高”等字眼，在设立原假设应为 H_0：$\mu\leq\mu0$，即二者有相反的关系；若是有“降低”等字眼，则为 H_0：$\mu\geq\mu0$；若是为“是否合格”，则是双侧检验，原假设应为 H_0：$\mu=\mu0$

在设立完假设后，应根据题目已给出的条件判断统计检验量应为 U 检验、T 检验还是χ^2检验，将题目给出的数据代入，求出统计量的值，再与拒绝域的值相比较，做出判断。

【例题】

（1）、某种电子元件的寿命 X（以小时计）服从正态分布，μ，σ^2均未知。现测得 16 只元件的寿命如下：

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225（小时）？

解答：

解：

按题意需检验 H_0：$\mu\leq\mu0=225$；H1：$\mu>225$。

取$\alpha=0.05$，可知拒绝域为$T=\frac{\overline{X}-\mu0}{S/\sqrt{n}}\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

目前 n=16，$t_{0.05}(15)=1.7531$，同时算出 x 均值为 241.5，s=98.7259，即得出

$T=\frac{\overline{X}-\mu0}{S/\sqrt{n}}$=0.6685<1.7531

T 不落在拒绝域，故接受 H_0，即认为元件的平均寿命不大于 225 小时。

3、单个正态总体方差的假设检验

【必备知识点】

（1）、双侧与单侧假设检验

a、双侧检验

设X1、X2 … Xn是来自 X 的样本，要求检验假设（显著性水平为α）：

H₀：$\sigma^2=\sigma_0^2$ ； H₁: $\sigma^2\neq\sigma_0^2$，σ_0^2为已知常数。

取$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$作为检验统计量，对于给定的显著性水平α，由$P\{\chi^2\geq\chi_\alpha^2(n-1)\}=\alpha$

得出上述问题的拒绝域为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi_\alpha^2(n-1)$$

上述检验法称为χ^2-检验法。

【例题】

某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差$\sigma^2=5000$(小时)的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变，现随机取 26 只电池，测出其寿命的样本方差$S^2=9200$小时。问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化（取$\alpha=0.02$）？

解：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leqslant 11.524$ 或$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq 44.314$

由观察值$S^2=9200$得出$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ =46>44.314，所以拒绝 H₀，认为这批电池寿命波动性较以往的有显著的变化。