概率论与数理统计总复习大题类型题及解答

已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解：A_1={男人}，A_2={女人}，B={色盲}，显然 $A_1 \cup A_2=S$，$A_1 A_2=\phi$

由已知条件知 $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$。$P(B|A_1)=5\%, P(B|A_2)=0.25\%$

由贝叶斯公式，有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{10000}}=\frac{20}{21}$$

01 第一章 全概、贝叶斯

一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次及格的概率为 P，若第一次及格则第二次及格的概率也为 P；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{P}{2}$（1）若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解：A_i={他第 i 次及格}，i=1,2

已知 $P(A_1)=P(A_2|A_1)=P$，$P(A_2\mid\overline{A}_1)=P/2$

（1）B={至少有一次及格}

所以 $\overline{B}=\{\text{两次均不及格}\}=\overline{A}_1\overline{A}_2$

$$\therefore P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)$$

$$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2\mid\overline{A}_1)]$$

$$=1-(1-P)(1-\frac{P}{2})=\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}P^2$$

（2）$P(A_1A_2)\overset{\text{定义}}{=\!=}\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}$ （*）

由乘法公式，有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P^2$

由全概率公式，有 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)$

$$= P \cdot P + (1-P) \cdot \frac{P}{2}$$

$$= \frac{P^2}{2} + \frac{P}{2}$$

将以上两个结果代入（*）得 $P(A_1 \mid A_2) = \dfrac{P^2}{\dfrac{P^2}{2} + \dfrac{P}{2}} = \dfrac{2P}{P+1}$

有两箱同种类型的零件。第一箱装 5 只，其中 10 只一等品；第二箱 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。试求（1）第一次取到的零件是一等品的概率。（2）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率。

解：设 B_i 表示“第 i 次取到一等品” i=1，2

01 第一章 全概、贝叶斯

A_j表示“第 j 箱产品” j=1,2，显然 $A_1 \cup A_2=S$ $A_1A_2=\Phi$

（1）$P(B_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{30}=\frac{2}{5}=0.4$（$B_1=A_1B+A_2B$ 由全概率公式解）。

（2）$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{10}{50}\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\frac{18}{30}\frac{17}{29}}{\frac{2}{5}}=0.4857$

（先用条件概率定义，再求 $P(B_1B_2)$时，由全概率公式解）

01 第一章 全概、贝叶斯

设由以往记录的数据分析。某船只运输某种物品损坏 2%（这一事件记为 A_1），10%（事件 A_2），90%（事件 A_3）的概率分别为 $P(A_1)=0.8$, $P(A_2)=0.15$, $P(A_2)=0.05$，现从中随机地独立地取三件，发现这三件都是好的（这一事件记为 B），试分别求 $P(A_1|B)$ $P(A_2|B)$, $P(A_3|B)$（这里设物品件数很多，取出第一件以后不影响取第二件的概率，所以取第一、第二、第三件是互相独立地）

∵ B 表取得三件好物品。

$B=A_1B+A_2B+A_3B$ 三种情况互斥

由全概率公式，有

$$\therefore \quad P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=0.8\times(0.98)^3+0.15\times(0.9)^3+0.05\times(0.1)^3=0.8624$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(B)} = \frac{0.8 \times (0.98)^3}{0.8624} = 0.8731$$

$$P(A_2 | B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B | A_2)}{P(B)} = \frac{0.15 \times (0.9)^3}{0.8624} = 0.1268$$

$$P(A_3 | B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B | A_3)}{P(B)} = \frac{0.05 \times (0.1)^3}{0.8624} = 0.0001$$

如果 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < 1; \\ 2-x, & 1 \le x < 2; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求 $P\{X \le 1.5\}$.

解： $P\{X \le 1.5\}=\int_{-\infty}^{1.5} p(x)dx=\int_{0}^{1} xdx+\int_{1}^{1.5}(2-x)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^{1.5}=\frac{1}{2}-0+\left(3-\frac{1.5^2}{2}\right)-\frac{3}{2}=\frac{13}{16}$.

设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} A\cos x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

试求

（1）系数 A;

（2）X 落在区间 $(0,\pi/4)$ 内的概率.

解：（1）由密度函数正则性知 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A\cos x dx=A\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=A\sin\dfrac{\pi}{2}-A\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2A=1$，

故 $A=\dfrac{1}{2}$；

（2）所求概率为 $P\{0<X<\dfrac{\pi}{4}\}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\cos x dx=\dfrac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}-0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

设连续随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ Ax^2, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

试求

（1）系数 A；

（2）X 落在区间 $(0.3, 0.7)$ 内的概率；

（3）X 的密度函数.

解：（1）由连续随机变量分布函数的连续性知 $1=F(1)=F(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=A\cdot 1^2=A$，故 $A=1$；

（2）所求概率为 $P\{0.3<X<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$；

（3）密度函数 $p(x)=F'(x)$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，有 $p(x)=F'(x)=0$，

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=x^2$，有 $p(x)=F'(x)=2x$，

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$，有 $p(x)=F'(x)=0$，

故 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量，单位为小时．它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} cx^2+x, & 0\le x\le 0.5; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

（1）确定常数 c；

（2）写出 X 的分布函数；

（3）试求在 20min 内完成一道作业的概率；

（4）试求 10min 以上完成一道作业的概率．

（1）由密度函数正则性知 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_0^{0.5}(cx^2 + x)dx = \left(c\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{0.5} = \frac{c}{24} + \frac{1}{8} = 1$，故 $c = 21$；

（2）分布函数 $F(x) = P\{X \le x\}$，分段点为 $x = 0, 0.5$，

当 $x < 0$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P(\varnothing) = 0$，

当 $0 \le x < 0.5$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \int_0^x (21u^2 + u)du = \left(7u^3 + \frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^x = 7x^3 + \frac{x^2}{2}$，

当 $x \ge 0.5$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P(\Omega) = 1$，

故 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 7x^3 + \frac{x^2}{2}, & 0 \le x < 0.5; \\ 1, & x \ge 0.5; \end{cases}$

（3）所求概率为 $P\{X \le \frac{20}{60} = \frac{1}{3}\} = F\left(\frac{1}{3}\right) = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{27} + \frac{1}{18} = \frac{17}{54}$；

（4）所求概率为 $P\{X \ge \frac{10}{60} = \frac{1}{6}\} = 1 - F\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - 7 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 1 - \frac{7}{216} - \frac{1}{72} = \frac{103}{108}$.

已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=Ae^{-|x|}, \qquad -\infty<x<+\infty,$$

求：（1）A 值；（2）$P\{0<X<1\}$；(3) $F(x)$.

【解】（1）由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty} Ae^{-x}\mathrm{d}x=2A$$

故 $A=\dfrac{1}{2}$.

(2) $p(0<X<1)=\dfrac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$

(3) 当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}e^{x}$

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-x}\mathrm{d}x$

$=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$

$$\text{故 } F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$$

设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件$\{X\le 1/2\}$出现的次数，试求 $P\{Y=2\}$.

解：因 $P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$，有 Y 服从二项分布 $b\left(3,\frac{1}{4}\right)$，

故 $P\{Y=2\}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$.

设某种仪器内装有三只同样的电子管，电子管使用寿命 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x\geq 100,\\ 0, & x<100.\end{cases}$$

求：（1）在开始 150 小时内没有电子管损坏的概率；

（2）在这段时间内有一只电子管损坏的概率；

（3）$F(x)$.

【解】

（1）$P(X\leq 150)=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$

$$p_1=[P(X>150)]^3=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$$

(2) $p_2=C_3^1\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$

(3) 当 $x<100$ 时 $F(x)=0$

当 $x\geqslant 100$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

$$=\int_{-\infty}^{100}f(t)dt+\int_{100}^{x}f(t)dt$$

$$=\int_{100}^{x}\frac{100}{t^2}dt=1-\frac{100}{x}$$

故 $F(x)=\begin{cases}1-\frac{100}{x}, & x\geq 100\\ 0, & x<0\end{cases}$

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟计）服从指数分布 $E(\frac{1}{5})$. 某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开. 他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geq 1\}$.

【解】 依题意知 $X \sim E(\frac{1}{5})$，即其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

该顾客未等到服务而离开的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=e^{-2}$$

$Y \sim b(5,e^{-2})$，即其分布律为

$$P(Y=k)=C_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k}, k=0,1,2,3,4,5$$

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5=0.5167$$

某人乘汽车去火车站乘火车，有两条路可走.第一条路程较短但交通拥挤，所需时间 X 服从 N（40，10^2）；第二条路程较长，但阻塞少，所需时间 X 服从 N（50，4^2）.

（1）若动身时离火车开车只有 1 小时，问应走哪条路能乘上火车的把握大些?

（2）又若离火车开车时间只有 45 分钟，问应走哪条路赶上火车把握大些?

【解】（1）若走第一条路，X~N（40，10^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{x-40}{10}<\frac{60-40}{10}\right)=\Phi(2)=0.97727$$

若走第二条路，X~N（50，4^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{60-50}{4}\right)=\Phi(2.5)=0.9938++$$

故走第二条路乘上火车的把握大些.

（2）若 X~N（40，10^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-40}{10}<\frac{45-40}{10}\right)=\Phi(0.5)=0.6915$$

若 X~N（50，4^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{45-50}{4}\right)=\Phi(-1.25)$$

$$=1-\Phi(1.25)=0.1056$$

故走第一条路乘上火车的把握大些.

由某机器生产的螺栓长度（cm）$X\sim N(10.05,0.06^2)$，规定长度在 10.05 ± 0.12 内为合格品，求一螺栓为不合格品的概率.

【解】$P(|X-10.05|>0.12)=P\left(\left|\dfrac{X-10.05}{0.06}\right|>\dfrac{0.12}{0.06}\right)$

$=1-\Phi(2)+\Phi(-2)=2[1-\Phi(2)]$

$=0.0456$

一工厂生产的电子管寿命 X（小时）服从正态分布 $N(160,\sigma^2)$，若要求 $P\{120<X\leqslant 200\}\geqslant 0.8$，允许 σ 最大不超过多少？

【解】$P(120<X\leq 200)=P\left(\frac{120-160}{\sigma}<\frac{X-160}{\sigma}\leq\frac{200-160}{\sigma}\right)$

$$=\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1\geq 0.8$$

故 $\sigma\leq\frac{40}{1.29}=31.25$

设随机变量 X 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad(\lambda>0),$$

（1）求常数 A，B；

（2）求 $P\{X\leqslant 2\}$，$P\{X>3\}$；

（3）求分布密度 $f(x)$．

【解】（1）由 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$

（2）$P(X\leq 2)=F(2)=1-e^{-2\lambda}$

$$P(X>3)=1-F(3)=1-(1-e^{-3\lambda})=e^{-3\lambda}$$

(3) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

设随机变量 X 的密度函数为

（1）$f(x)=ae^{-\square|x|}, \lambda>0$;

(2) $f(x)=\begin{cases} bx, & 0<x<1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

试确定常数 a,b，并求其分布函数 $F(x)$.

【解】（1）由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 知 $1=\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\lambda|x|}\mathrm{d}x=2a\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\dfrac{2a}{\lambda}$

故 $a=\dfrac{\lambda}{2}$

即密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}, & x>0 \\ \dfrac{\lambda}{2}e^{\lambda x} & x\le 0 \end{cases}$

当 $x\leqslant 0$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{\lambda}{2}e^{\lambda x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}e^{\lambda x}$

当 $x>0$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{\lambda}{2}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+\int_0^{x}\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$

$=1-\dfrac{1}{2}e^{-\lambda x}$

故其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x>0\\ \dfrac{1}{2}e^{\lambda x}, & x\le 0\end{cases}$$

(2) 由$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^1 bx dx+\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx=\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}$

得 $b=1$

即 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ \dfrac{1}{x^2}, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $x\leqslant 0$ 时 $F(x)=0$

当 $0<x<1$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{0}^{x}x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}$$

当 $1\leqslant x<2$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$$

当 $x\geqslant 2$ 时 $F(x)=1$

故其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x<1\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{x}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

设 $X \sim N(0,1)$.

（1）求 $Y=e^X$ 的概率密度;

（2）求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度;

（3）求 $Y=|X|$ 的概率密度.

【解】（1）当 $y \leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^x \le y)=P(X \le \ln y)$

$$=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y}f_x(\ln y)=\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\ln^2 y/2}, y>0$

(2) $P(Y=2X^2+1\geq 1)=1$

当$y\leqslant 1$时 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$

当$y>1$时 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X^2+1\leq y)$

$$=P\left(X^2\leq\frac{y-1}{2}\right)=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

$$=\int_{-\sqrt{(y-1)/2}}^{\sqrt{(y-1)/2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{y-1}}\left[f_X\left(\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)+f_X\left(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{y-1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(y-1)/4},y>1$$

(3) $P(Y \geq 0)=1$

当 $y\leqslant 0$ 时 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$

当 $y>0$ 时 $F_Y(y)=P(|X|\leq y)=P(-y\leq X\leq y)$

$$=\int_{-y}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=f_X(y)+f_X(-y)$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}, y>0$$

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求 $Y=\sin X$ 的密度函数.

【解】$P(0<Y<1)=1$

当 $y \leqslant 0$ 时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$

当 $0<y<1$ 时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\sin X \le y)$

$= P(0 < X \le \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \le X < \pi)$

$= \int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2} \mathrm{d}x + \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{\pi^2}(\arcsin y)^2 + 1 - \frac{1}{\pi^2}(\pi - \arcsin y)^2$$

$= \frac{2}{\pi} \arcsin y$

当 $y \geqslant 1$ 时，$F_Y(y) = 1$

故 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

【解】 设 X 为考生的外语成绩，则 $X\sim N$（72，σ^2）

$$0.023 = P(X \geq 96) = P\left(\frac{X-72}{\sigma} \geq \frac{96-72}{\sigma}\right) = 1-\Phi(\frac{24}{\sigma})$$

故 $\Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.977$

查表知 $\frac{24}{\sigma} = 2$,即σ =12

从而 X~N（72，12^2）

$$故\ P(60 \leq X \leq 84) = P\left(\frac{60-72}{12} \leq \frac{X-72}{12} \leq \frac{84-72}{12}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$$

$$= 0.682$$

在电源电压不超过 200V、200V~240V 和超过 240V 三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2（假设电源电压 X 服从正态分布 N（220，25^2））.试求：

（1）该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200~240V 的概率 β

【解】 设 A_1={电压不超过 200V}，A_2={电压在 200~240V}，

A_3={电压超过 240V}，B={元件损坏}。

由 X~N（220，25^2）知

$$P(A_1)=P(X\le 200)$$

$$=P\left(\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\right)$$

$$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=0.212$$

$$P(A_2)=P(200\le X\le 240)$$

$$=P\left(\frac{200-220}{25}\le\frac{X-220}{25}\le\frac{240-220}{25}\right)$$

$$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576$$

$$P(A_3)=P(X>240)=1-0.212-0.576=0.212$$

由全概率公式有

$$\alpha=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.0642$$

由贝叶斯公式有

$$\beta=P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}\approx 0.009$$

设随机变量 X 在区间（1，2）上服从均匀分布，试求随机变量 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

【解】 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2 \\ 0, & 其他\end{cases}$

因为 $P(1<X<2)=1$，故 $P(\mathrm{e}^2<Y<\mathrm{e}^4)=1$

当 $y\leqslant \mathrm{e}^2$ 时 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=0$.

当 $\mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\mathrm{e}^{2X}\le y)$

$$=P(1<X\le\frac{1}{2}\ln y)$$

$$=\int_1^{\frac{1}{2}\ln y}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln y-1$$

当 $y \geqslant e^4$ 时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$

即 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le e^2 \\ \dfrac{1}{2}\ln y - 1, & e^2 < y < e^4 \\ 1, & y \ge e^4 \end{cases}$

故 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y}, & e^2 < y < e^4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Y=e^X$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

【解】 $P（Y\geqslant 1）=1$

当 $y\leqslant 1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$

当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq \ln y)$

$$=\int_0^{\ln y} e^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{y}$$

即 $F_Y(y)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{y}, & y>1 \\ 0, & y\leq 1 \end{cases}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & y>1 \\ 0, & y\leq 1 \end{cases}$

设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

求 $Y=1-\sqrt[3]{x}$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

【解】 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-\sqrt[3]{X}\le y)=P(X\ge(1-y)^3)$

$$=\int_{(1-y)^3}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{(1-y)^3}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(1-y)^3\right]$$

故 $f_Y(y)=\dfrac{3}{\pi}\dfrac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$

某种型号的器件的寿命 X（以小时计）具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

现有一大批这种器件（设各器件损坏与否相互独立），任取 5 只，问其中至少有 2 只的寿命大于 1500 小时的概率是多少？

解 （i）先求这种器件的寿命大于 1500 小时的概率：

$$P\{X\geq 1500\}=\int_{1500}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=-\frac{1000}{x}\Big|_{1500}^{+\infty}=\frac{2}{3}。$$

（ii）求任取 5 只，至少有 2 件的寿命大于 1500 小时的概率

设 Y＝“器件的寿命大于 1500 小时”，则 $Y\sim B(5,\frac{2}{3})$。

$$P\{Y\geq 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}$$

$$=1-C_5^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5-C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=1-\frac{1}{243}-\frac{10}{243}=\frac{232}{243}。$$

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（min）服从指数分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, x>0\\ 0 \quad\quad ,其它\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开。他一个月要到银行 5 次。以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出 Y 的分布律，并求 $p\{Y\geq 1\}$。

解 （i）该顾客在窗口未等到服务而离开的概率为

$$p=\int_{10}^{+\infty}f(x)dx=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx$$

$$=-e^{-\frac{x}{5}}\Big|_{10}^{+\infty}=e^{-\frac{10}{5}}=e^{-2}$$

（ii）顾客未行到服务而离开银行的次数的概率

由已知条件可知，$Y \sim B(5, e^{-2})$，故

$$p\{Y = k\} = C_5^k (e^{-2k})(1 - e^{-2})^{5-k}, \quad k = 1,2,3,4,5$$

$$p\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - e^{-2})^5 = 0.5167.$$

设随机变量（X，Y）概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

（1）确定常数 k。　　（2）求 $P\{X<1, Y<3\}$

（3）求 $P(X<1.5\}$　　（4）求 $P(X+Y\leq 4\}$

分析：利用 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_{G\cap D_o} f(x,y)dx\,dy$ 再化为累次积分，其中

$$_o=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}0<x<2, \\ 2<y<4\end{array}\right\}$$

解：（1）$\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\,dy=\int_0^2\int_2^1 k(6-x-y)dydx$，$\therefore k=\frac{1}{8}$

（2）$P(X<1, Y<3)=\int_0^1 dx\int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{3}{8}$

（3）$P(X\leq 1.5)=P(X\leq 1.5, Y<\infty)=\int_0^{1.5} dx\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{27}{32}$

（4）$P(X+Y\leq 4)=\int_0^2 dx\int_0^{4-x} \frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{2}{3}$

设随机变量 X 在（0，1）上服从均匀分布

（1）求 $Y=e^X$ 的分布密度

$\because$ X 的分布密度为：$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x\text{为其他}\end{cases}$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数

又 $X=h(Y)=\ln Y$，反函数存在

且 $\alpha=\min[g(0),g(1)]=\min(1,e)=1$

$\beta=\max[g(0),g(1)]=\max(1,e)=e$

$\therefore$ Y 的分布密度为：$\psi(y)=\begin{cases}f[h(y)]\cdot|h'(y)|=1\cdot\dfrac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & y\text{为其他}\end{cases}$

（2）求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度。

$\because$ $Y=g(X)=-2\ln X$ 是单调减函数

又 $X=h(Y)=e^{-\frac{Y}{2}}$ 反函数存在。

且 $\alpha=\min[g(0),g(1)]=\min(+\infty,0)=0$

$\beta=\max[g(0),g(1)]=\max(+\infty,0)=+\infty$

$\therefore$ Y 的分布密度为：$\psi(y)=\begin{cases}f[h(y)]\cdot|h'(y)|=1\cdot\left|-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right|=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<y<+\infty\\ 0 & y\text{为其他}\end{cases}$

设 $X \sim N$（0，1）

（1）求 $Y=e^X$ 的概率密度

$\because$ X 的概率密度是 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<+\infty$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数

又 $X=h(Y)=\ln Y$ 反函数存在

且 $\alpha=\min[g(-\infty), g(+\infty)]=\min(0,+\infty)=0$

$\beta=\max[g(-\infty), g(+\infty)]=\max(0,+\infty)=+\infty$

$\therefore$ Y 的分布密度为：

$$\psi(y)=\begin{cases} f[h(y)]\cdot|h'(y)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\cdot\frac{1}{y} & 0<y<+\infty \\ 0 & y\text{为其他} \end{cases}$$

（2）求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度。

在这里，$Y=2X^2+1$ 在$(+\infty,\ -\infty)$不是单调函数，没有一般的结论可用。

设 Y 的分布函数是 $F_Y(y)$，

则 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(2X^2+1\leqslant y)$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

当 $y<1$ 时：$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant 1$ 时：$F_y(y)=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

故 Y 的分布密度 $\psi(y)$是：

当 $y\leqslant 1$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>1$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}$$

（3）求 $Y=|X|$的概率密度。

$\because$ Y的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(|X|\leqslant y)$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(|X|\leqslant y)=P(-y\leqslant X\leqslant y)=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$\therefore$ Y的概率密度为：

当 $y\leqslant 0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

（1）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，求 $Y=X^3$ 的概率密度。

∵ $Y=g(X)=X^3$ 是 X 单调增函数，

又 $X=h(Y)=Y^{\frac{1}{3}}$，反函数存在，

且 $\alpha=min[g(-\infty), g(+\infty)]=min(0, +\infty)=-\infty$

$$\beta = max[g(-\infty), g(+\infty)] = max(0, +\infty) = +\infty$$

∴ Y的分布密度为：

$$\psi(y) = f[h(h)] \cdot |h'(y)| = f(y^{\frac{1}{3}}) \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}, -\infty < y < +\infty, 但 y \neq 0$$

$$\psi(0) = 0$$

（2）设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

法一：$\because$ X 的分布密度为：$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

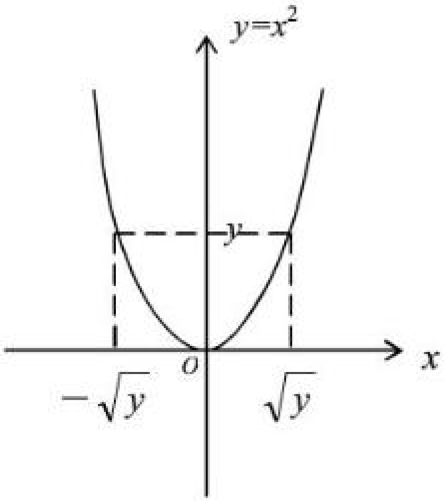
$Y=x^2$ 是非单调函数

当 $x<0$ 时 $y=x^2\swarrow$ 反函数是 $x=-\sqrt{y}$

当 $x<0$ 时 $y=x^2\nearrow$ $x=\sqrt{y}$

$\therefore$ $Y\sim f_Y(y)=f(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'+f(\sqrt{y})(\sqrt{y})'$

$$=\begin{cases} 0+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$



法二：$Y \sim F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-\sqrt{y} < X \le \sqrt{y}) = P(X \le \sqrt{y}) - P(X \le -\sqrt{y})$

$$\begin{cases} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx + 0 = 1 - e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0. \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 求边缘概率密度.

解：$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4x^2(2-x) & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

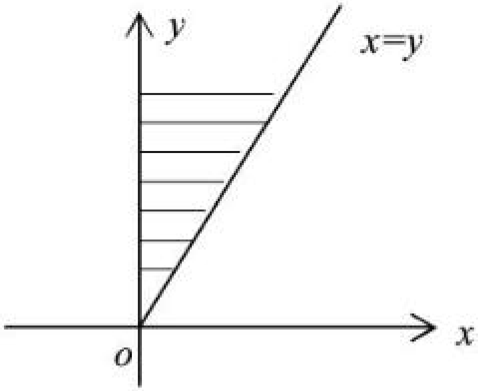
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)dx=2.4y(3-4y+y^2) & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0<x<y \\ 0, \text{其它}. \end{cases}$$ 求边缘概率密度。

解: $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^{y} e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0, \end{cases}$$



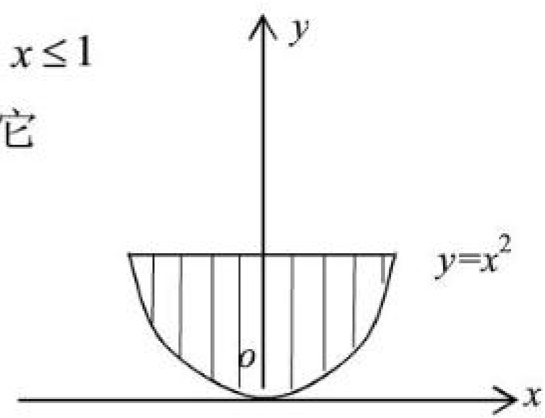
设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, x^2\le y\le 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$

（1）试确定常数 c。（2）求边缘概率密度。

解: $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} cx^2ydx=c\int_0^1 \frac{2}{3}y^{\frac{5}{2}}dy=\frac{4}{21}c\Rightarrow c=\frac{21}{4}$

$$X\sim f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^1 \frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), -1\le x\le 1 \\ 0, \qquad\qquad 其它\end{cases}$$

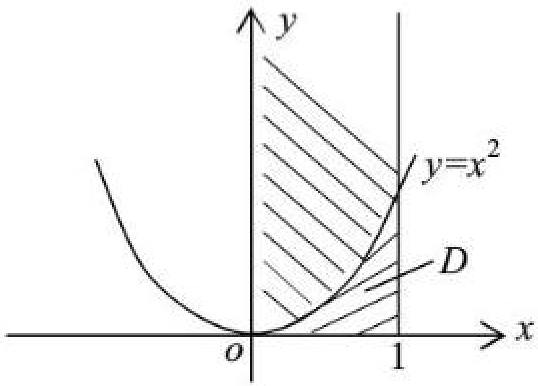
$$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} \frac{21}{4}d^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} \quad 0\le y\le 1 \\ 0 \qquad\qquad 其它\end{cases}$$



设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，X 在（0，1）上服从均匀分布。Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0.\end{cases}$

（1）求 X 和 Y 的联合密度。（2）设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$,试求有实根的概率。

解：（1）X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\ 0, \text{其它}\end{cases}$



Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0.\end{cases}$$ 且知 X, Y 相互独立，

于是（X，Y）的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1, y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（2）由于 a 有实跟根，从而判别式$\Delta = 4X^2 - 4Y \geq 0$

即：$Y \leq X^2$　记$D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$

$$P(Y \leq X^2) = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} dy = -\int_0^1 dx \int_0^{x^2} de^{-\frac{y}{2}} = 1 - \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= 1 - \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \sqrt{2\pi}(\Phi(1) - \Phi(2)) = 1 - \sqrt{2\pi}(0.8413 - 0.5)$$

$$= 1 - 2.5066312 \times 0.3413 = 1 - 0.8555 = 0.1445$$

设某种商品一周的需要量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$

并设各周的需要量是相互独立的，试求（1）两周（2）三周的需要量的概率密度。

解：（1）设第一周需要量为 X，它是随机变量

设第二周需要量为 Y，它是随机变量

且为同分布，其分布密度为

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$

Z=X+Y 表示两周需要的商品量，由 X 和 Y 的独立性可知：

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x}ye^{-y} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

∵ $z\geqslant 0$

∴ 当 $z<0$ 时，$f_z(z)=0$

当 $z>0$ 时，由和的概率公式知

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_y(y)dy$$

$$=\int_0^z (z-y)e^{-(z-y)}\cdot ye^{-y}dy=\frac{z^3}{6}e^{-z}$$

$$\therefore \qquad f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

（2）设 z 表示前两周需要量，其概率密度为 $f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

设 ξ 表示第三周需要量，其概率密度为：

$$f_\xi(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

z 与 ξ 相互独立

$\eta=z+\xi$ 表示前三周需要量

则：$\because\ \eta\geqslant 0$，　$\therefore$ 当 $u<0$，　$f_\eta(u)=0$

当 $u>0$ 时

$$f_\eta(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y)f_\xi(y)dy$$

$$=\int_0^u\frac{1}{6}(u-y)^3e^{-(u-y)}\cdot ye^{-y}dy$$

$$=\frac{u^5}{120}e^{-u}$$

所以 η 的概率密度为

$$f_\eta(u)=\begin{cases}\dfrac{u^5}{120}e^{-u} & u>0\\ 0 & u\le 0\end{cases}$$

设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1,0<y<+\infty \\ 0 \quad , & 其它 \end{cases}$$

（1）试确定常数 b；（2）求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$

（3）求函数 U=max (X, Y)的分布函数。

解：（1） $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy\,dx=b[1-e^{-1}]$

$$\therefore \quad b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}0 & x\le 0\text{或}x\ge 1\\ \int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \int_0^1 be^{-(x+y)}dx=e^{-y} & y>0\end{cases}$$

（3）$F_u(\omega)=P\{U\le u\}=P\{\max(X,Y)\le u)=P\{X\le u, Y\le u\}$

$$=F(u,u)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{u} f(x,y)dx\,dy$$

$u<0,\ F_U(u)=0$

$$0\le u<1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^u be^{-(x+y)}dx\,dy=\frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$$

$$u\ge 1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^1 be^{-(x+y)}dx\,dy=1-e^{-u}$$

某新产品在未来市场上的占有率 X 是仅在区间 (0, 1) 上取值的随机变量，它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求平均市场占有率.

解：平均市场占有率 $E(X)=\int_0^1 x\cdot 4(1-x)^3dx=\int_0^1(4x-12x^2+12x^3-4x^4)dx$

$$=\left(2x^2-4x^3+3x^4-\frac{4}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}.$$

设随机变量 X 的密度函数如下，试求 $E(2X+5)$.

$$p(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0; \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

解：$E(2X+5)=\int_0^{+\infty}(2x+5)e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}(2x+5)(-d\,e^{-x})=-(2x+5)e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2e^{-x}dx=5-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=7$.

设随机变量 X 的分布函数如下，试求 $E(X)$.

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{2}, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

解：因分布函数 $F(x)$ 是连续函数，有 X 为连续型，密度函数 $p(x)=F'(x)$，

当 $x<0$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{e^x}{2}$，

当 $0<x<1$ 时，$p(x)=F'(x)=0$，

当 $x>1$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$， $=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\dfrac{1}{2}d(e^x)+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)d[e^{-\frac{1}{2}(x-1)}]$

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\dfrac{e^x}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x\,e^x\,dx+\dfrac{1}{4}\int_{1}^{+\infty}x\,e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx$，

因 $\int_{-\infty}^{0}x\,e^x\,dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot d(e^x)=x\cdot e^x\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx=0-e^x\Big|_{-\infty}^{0}=-1$，

$$\int_{1}^{+\infty}x\,e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=-2\int_{1}^{+\infty}x\cdot d[e^{-\frac{1}{2}(x-1)}]=-2x\,e^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}+2\int_{1}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=2-4\,e^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}=6,$$

故 $E(X)=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{4}\times 6=1$.

某工程队完成某项工程的时间 X（单位：月）是一个随机变量，它的分布列为

X	10	11	12	13
P	0.4	0.3	0.2	0.1

（1）试求该工程队完成此项工程的平均月数；

（2）设该工程队所获利润为 $Y=50(13-X)$，单位为万元．试求该工程队的平均利润；

（3）若该工程队调整安排，完成该项工程的时间 X（单位：月）的分布为

X	10	11	12
P	0.5	0.4	0.1

则其平均利润可增加多少？

解：（1）平均月数 $E(X)=10\times0.4+11\times0.3+12\times0.2+13\times0.1=11$．

（2）平均利润为 $E(Y)=E[50(13-X)]=150\times0.4+100\times0.3+50\times0.2+0\times0.1=100$（万元）；

（3）因 $E(Y_1)=E[50(13-X_1)]=150\times0.5+100\times0.4+50\times0.1=120$，有 $E(Y_1)-E(Y)=20$，故平均利润增加 20 万元．

设随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le \pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对 X 独立重复观察 4 次，Y 表示观察值大于 $\pi/3$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.

解：Y 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4，因 $p=P\{X>\frac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

则 $P\{Y=0\}=(1-p)^4=\frac{1}{16}$， $P\{Y=1\}=\binom{4}{1}\cdot p(1-p)^3=\frac{4}{16}$， $P\{Y=2\}=\binom{4}{2}\cdot p^2(1-p)^2=\frac{6}{16}$，

$P\{Y=1\}=\binom{4}{3}\cdot p^3(1-p)=\frac{4}{16}$， $P\{Y=4\}=p^4=\frac{1}{16}$，

故 $E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{16}+1^2\times\frac{4}{16}+2^2\times\frac{6}{16}+3^2\times\frac{4}{16}+4^2\times\frac{1}{16}=\frac{80}{16}=5$.

设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $\frac{1}{X^2}$ 的数学期望.

解：$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_0^2 \frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\int_0^2\frac{3}{8}dx=\frac{3}{4}$.

假设有 10 只同种电器元件，其中有两只不合格品．装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是不合格品，则扔掉重新任取一只；如仍是不合格品，则扔掉再取一只，试求在取到合格品之前，已取出的不合格品数的方差．

解：设 X 表示在取到合格品之前已取出的不合格品只数，X 的全部可能取值为 0, 1, 2，

则 $P\{X=0\}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$P\{X=1\}=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{45}$，$P\{X=2\}=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}\times\dfrac{8}{8}=\dfrac{1}{45}$，

得 $E(X)=0\times\dfrac{4}{5}+1\times\dfrac{8}{45}+2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{2}{9}$，且 $E(X^2)=0^2\times\dfrac{4}{5}+1^2\times\dfrac{8}{45}+2^2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{12}{45}=\dfrac{4}{15}$，

故 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{4}{15}-\left(\dfrac{2}{9}\right)^2=\dfrac{88}{405}$．

已知 $E(X)=-2$，$E(X^2)=5$，求 $\mathrm{Var}(1-3X)$.

解：因 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=5-(-2)^2=1$，故 $\mathrm{Var}(1-3X)=(-3)^2\mathrm{Var}(X)=9\times 1=9$.

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}}{2}, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

试求 $\mathrm{Var}(X)$.

解：因分布函数 $F(x)$ 是连续函数，有 X 为连续型，密度函数 $p(x)=F'(x)$，

解：因分布函数 $F(x)$ 是连续函数，有 X 为连续型，密度函数 $p(x)=F'(x)$，

当 $x<0$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{e^x}{2}$，

当 $0<x<1$ 时，$p(x)=F'(x)=0$，

当 $x>1$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$，

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\dfrac{e^x}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xe^x dx+\dfrac{1}{4}\int_{1}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx$，

因 $\int_{-\infty}^{0}xe^x dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot d(e^x)=x\cdot e^x\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^x dx=0-e^x\Big|_{-\infty}^{0}=-1$，

$$\int_{1}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=-2\int_{1}^{+\infty}x\cdot d[e^{-\frac{1}{2}(x-1)}]=-2xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}+2\int_{1}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=2-4e^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}=6,$$

可得 $E(X)=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{4}\times 6=1$，

且 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot\frac{e^x}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x^2e^xdx+\frac{1}{4}\int_{1}^{+\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx$

因 $\int_{-\infty}^{0}x^2e^xdx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot d(e^x)=x^2\cdot e^x\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^x\cdot 2xdx=0-2\int_{-\infty}^{0}xe^xdx=2$，

$$\int_{1}^{+\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=-2\int_{1}^{+\infty}x^2\cdot d[e^{-\frac{1}{2}(x-1)}]=-2x^2e^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}+2\int_{1}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}\cdot 2xdx$$

$$=2+4\int_{1}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=2+4\times 6=26，$$

可得 $E(X^2)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 26=\frac{15}{2}$，

故 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{15}{2}-1^2=\frac{13}{2}$.

设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x\le 0;\\ 1-x, & 0<x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $\mathrm{Var}(3X+2)$.

解：因 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$，

且 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$，

则 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}$，

故 $\mathrm{Var}(3X+2)=9\,\mathrm{Var}(X)=9\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$.

假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若 1 周 5 个工作日里无故障，可获利 10 万元；发生一次故障仍可获利 5 万元，发生两次故障所获利润零元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求 1 周内期望利润是多少？

解 设一周所获利润为 T（万元），则 T 的可能值为10，5，0，-2 .

又设 X 为机器一周内发生故障的次数，则 $X\sim B(5,\ 0.2)$，于是，

$$P(T=10)=P(X=0)=(0.8)^5=0.3277$$

$$P(T=5)=P(X=1)=C_5^1 0.2\times(0.8)^4=0.4096$$

类似地可求出 T 的分布为

T	-2	0	5	10
P	0.0579	0.2048	0.4096	0.3277

所以一周内的期望利润为

$$ET=-2\times0.0579+5\times0.4096+10\times0.3277$$

$$=5.209\ \text{（万元）}$$

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ cx+b, & 2\le x\le 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

已知 $EX=2$，$P(1<X<3)=\dfrac{3}{4}$，求

（1） a，b，c 的值

（2）随机变量 $Y=e^{X}$ 的数学期望和方差.

解 （1） $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2 axdx+\int_2^4(cx+b)dx$

$$=\frac{a}{2}x^2\Big|_0^2+\frac{c}{2}x^2\Big|_2^4+bx\Big|_2^4=2a+2b+6c,$$

$$2=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 ax^2dx+\int_2^4(cx+b)xdx$$

$$=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b,$$

$$\frac{3}{4}=\int_1^2 axdx+\int_2^3(cx+b)dx=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b,$$

解方程组

$$\begin{cases} a+b+3c=\dfrac{1}{2} \\ 8a+18b+56c=6 \\ 3a+2b+5c=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

得

$$a=\frac{1}{4},$$

$$b=1,$$

$$c=-\frac{1}{4}.$$

（2）$EY=E(e^{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{x}f(x)dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{4}xe^{x}dx+\int_{2}^{4}(-\frac{1}{4}x+1)e^{x}dx=\frac{1}{4}(e^{2}-1)^{2}$，

$$EY^{2}=E(e^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2x}f(x)dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{4}xe^{2x}dx+\int_{2}^{4}(-\frac{1}{4}x+1)e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2}-1)^{2}[e^{2}+\frac{1}{4}(e^{2}-1)^{2}]$$

$$DY=EY^{2}-(EY)^{2}=\frac{1}{4}e^{2}(e^{2}-1)^{2}.$$

游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光；电梯于每个整点的第 5 分钟，25 分钟和 55 分钟从底层起行。假设一游客在早八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在[0, 60]上均匀分布，求该游客等候时间的数学期望.

解　设候梯时间为 T，则

$$T=g(X)=\begin{cases}5-X, & X\le 5,\\ 25-X, & 5<X\le 25,\\ 55-X, & 25<X\le 55\\ 60-X+5, & X>55.\end{cases}$$

$$ET=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_0^{60}g(x)\cdot\frac{1}{60}dx$$

$$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)dx+\int_5^{25}(25-x)dx+\int_{25}^{55}(55-x)dx+\int_{55}^{60}(65-x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{60}[12.5+200+450+37.5]=11.67\,.$$

设某种商品每周的需求量 X 是服从区间[10, 30]上均匀分布的随机变量，而经销商店进货量为区间[10, 30]中的某一个整数，商店每销售一单位商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损 100 元；若供不应求，则从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利 300 元，为使商店所获利润期望值不少于 9280 元，试确定最小进货量。

解　设商店获得的利润为 T，进货量为 y，则

$$T = g(X) = \begin{cases} 500y + (X-y)\times 300, & y < X \le 30, \\ 500X - (y-X)\times 100, & 10 \le X < y. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 300X + 200y, & y < X \le 30, \\ 600X - 100y, & 10 \le X \le y, \end{cases}$$

由题意

$$9280 \le ET = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$$= \frac{1}{20}\left[\int_{10}^{y}(600x - 100y)dx + \int_{y}^{30}(300x + 200y)dx\right]$$

$$= -7.5y^2 + 350y + 5250,$$

即

$$7.5y^2 - 350y + 4030 \le 0 .$$

解不等式得

$$20\frac{2}{3} \le y \le 26 ,$$

即使利润的期望值不少于 9280 元的最少进货量为 21 个单位.

设 X 与 Y 同分布，且 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0 \quad , & 其他.\end{cases}$$

（1）已知事件 $A=\{X>a\}$ 和事件 $B=\{Y>a\}$ 独立，且 $P\{A\cup B\}=\dfrac{3}{4}$，求常数 a；

（2）求 $E\dfrac{1}{X^2}$。

解 （1） $P(X>a)=\int_a^2\dfrac{3}{8}x^2dx=\dfrac{1}{8}[8-a^3]$

$$\frac{3}{4}=P\{A\cup B\}=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{2}{8}[8-a^3]-\frac{1}{64}[8-a^3]^2,$$

即有方程

$$(8-a^3)^2-16(8-a^3)+48=0,$$

即

$$[(8-a^3)-12][(8-a^3)-4]=0\ ,$$

可见

$$8-a^3=12 \quad 或 \quad 8-a^3=4\ ,$$

解之得 $a=\sqrt[3]{4}$ 或 $a=-\sqrt[3]{4}$ （不合题意） 故 $a=\sqrt[3]{4}$.

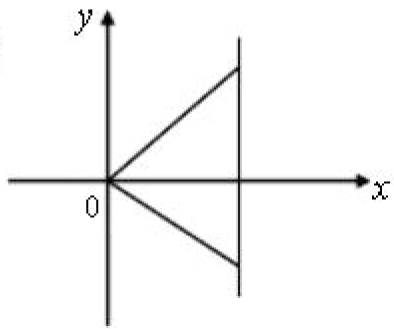
（2） $E\dfrac{1}{X^2}=\int_0^2\dfrac{3}{8}dx=\dfrac{3}{4}$.

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\quad 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 EX，EY，EXY，$D(2X+1)$.

解



$$EX=\int_0^1 x\left[\int_{-x}^{x} dy\right]dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3};$$

$$EY=\int_0^1 dx\left[\int_{-x}^{x} y\,dy\right]=0;$$

$$EXY=\int_0^1 x\left[\int_{-x}^{x} y\,dy\right]dx=0;$$

$$EX^2=\int_0^1 x^2\left[\int_{-x}^{x} dy\right]dx=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2},$$

于是

$$DX=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18};$$

故

$$D(2X+1)=4DX=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}.$$

假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & 若\ Y\le k,\\ 1, & 若\ Y>k,\end{cases}\qquad k=1,\ 2.$$

求（1） X_1，X_2 的联合分布，（2） $E(X_1+X_2)$.

解 （1） (X_1,X_2) 的分布：

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

$$P(X_1=0,\ X_2=0)=P(Y\le 1,\ Y\le 2)$$
$$=P(Y\le 1)=1-e^{-1},$$
$$P(X_1=0,\ X_2=1)=P(Y\le 1,\ Y>2)=0,$$
$$P(X_1=1,\ X_2=0)=P(Y>1,\ Y\le 2)$$
$$=P(1<Y\le 2)=e^{-1}-e^{-2}$$

（2） $E(X_1+X_2)=EX_1+EX_2=e^{-1}+e^{-2}$.

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5,\\ 0, & y\le 5.\end{cases}$$

求 $E(XY)$，$D(XY)$

解 $EX=\int_0^1 2x^2\,dx=\dfrac{2}{3}$，

$EY=6$

（注：因为参数为 1 的指数分布的数学期望为 1，而 $f_Y(y)$ 是前指数分布向右平移了 5 个单位，所以 $EY=1+5=6$）

因 X,Y 独立，所以

$$EXY=EXEY=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

今求 DXY

方法 1 $DXY=EX^2Y^2-(EXY)^2$

$$=EX^2EY^2-16=\int_0^1 2x^3dx\cdot[DY+(EY)^2]-16$$

$$=\frac{1}{2}[1+36]-16=\frac{37}{2}-16=\frac{5}{2}=2.5.$$

方法 2 利用公式：当 X,Y 独立时

$$DXY=DX\cdot DY+DX(EY)^2+DY(EX)^2=\frac{1}{18}\times 1+\frac{1}{18}\times 36+1\times\frac{4}{9}=2.5.$$

设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1，标准差（均方差）为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布，试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度.

解　因为相互独立的正态分布的线性组合仍为正态分布，所以 $Z \sim N(\mu,\sigma^2)$

其中

$$\mu = EZ = E(2X-Y+3) = 2EX - EY + 3 = 5$$

$$\sigma^2 = DZ = D(2X-Y+3) = 4DX + DY = 9$$

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, \quad -\infty < z < +\infty,$$

一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ 工厂规定出售的设备若在一年内损坏，可予以调换。若工厂出售一台设备可赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元。试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望。

解：一台设备在一年内损坏的概率为 $P(X<1)=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-\frac{1}{4}x}dx=-e^{-\frac{x}{4}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{4}}$

故 $P(X\ge 1)=1-P(X<1)=1-(1-e^{-\frac{1}{4}})=e^{-\frac{1}{4}}$. 设 Y 表示出售一台设备的净赢利

则 $$Y=f(X)=\begin{cases}(-300+100)=-200, (X<1)\\ 100, (X\ge 1).\end{cases}$$

故 $E(Y)=(-200)\cdot P(X<1)+100\cdot P(X\ge 1)=-200+200e^{-\frac{1}{4}}+100e^{-\frac{1}{4}}$

$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$

某车间生产的圆盘直径在区间（a, b）服从均匀分布。试求圆盘面积的数学期望。

解：设 X 为圆盘的直径，则其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

用 Y 表示圆盘的面积，则 $Y=\dfrac{1}{4}\pi X^2$, 从而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\pi x^2 f(x)dx=\frac{\pi}{4}\int_a^b\frac{1}{b-a}x^2dx=\frac{\pi}{4(b-a)}\cdot\frac{(b^3-a^3)}{3}=\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2).$$

设随机变量 X_1，X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

求（1）$E(X_1+X_2)$，$E(2X_1-3X_2^2)$；（2）又设 X_1，X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$

解：（1）$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\int_0^{\infty}x\cdot 2e^{-2x}dx+\int_0^{\infty}x\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=\left[-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty}+\left[-xe^{-4x}-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

（2）$E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)=2\times\frac{1}{2}-3\int_0^{\infty}x^2\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=1-3\left[-x^2e^{-4x}-\frac{x}{2}e^{-4x}-\frac{1}{8}e^{-4x}\right]_0^{\infty}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

（3）$E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量 Z=X+Y 的概率密度。

解　由于 X 和 Y 相互独立，因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设 $F_Z(z)$ 和 $f_Z(z)$ 分别表示 Z 的分布函数和概率密谋。

首先求 Z=X+Y 的分布函数，然后求 Z=X+Y 的概率密度，这是基础方法。

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0; 0\le z\prec 1$ 时，则

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} e^{-y}dxdy$$

$$=\int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=\int_0^z(-e^{-y})\Big|_0^{z-x}dx$$

$$=\int_0^z[(1-e^{-(z-x)})]dx=\int_0^z 1dx-\int_0^z e^{-y}e^x dx$$

$$=z-e^{-z}(e^x-1)=z-1+e^{-z}$$

当$z \ge 1$时，则

$$F_Z(z) = \iint\limits_{x+y \le z} e^{-y}dxdy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y}dy$$

$$= \int_0^z [(1-e^{-(z-x)})]dx = 1 - e^{-z}(e-1)$$

综合表示为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z - 1 + e^{-z}, & 0 \le z < 1 \\ 1 - e^{-z}(e-1), & z \ge 1 \end{cases}$$

则 Z=X+Y 的概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ e^{-z}(e-1), & z \ge 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

直接求 Z=X+Y 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

当$0 < z < 1$时，由$0 \le x \le 1, z - x > 0 (y > 0)$，使被积函数不等于零，得$0 \le x \le 1$和$x < z$的交集为$0 \le x < z$，则

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)}dx = 1 - e^{-z}$$

当$z \ge 1$时，$0 \le x \le 1$和$x < z$的交集为$0 \le x \le 1$，则

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e-1)$$

其他，$f_Z(z) = 0$。综合表示为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ e^{-z}(e-1), & z \ge 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

设随机变量（X，Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), COV(X,Y)$。

解 下面是直接利用二维随机量（X，Y）的概率密度求随机变量的数字特征。

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} x dy = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} y dy = 0$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xy dy = \int_0^1 x dx\int_{-x}^{x} y dy = 0$$

则 X 和 Y 的协方差为

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

已知三个随机变量 X, Y, Z 中，$E(X)=E(Y)=1$，$E(Z)=-1$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$，$\rho_{XY}=0$　$\rho_{XZ}=\frac{1}{2}$，$\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$。设 $W=X+Y+Z$ 求 $E(W)$，$D(W)$。

解：$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=1+1-1=1$

$$D(W)=D(X+Y+Z)=E\{[(X+Y+Z)-E(X+Y+Z)]^2\}$$

$$=E\{[X-E(X)]+[Y-E(Y)]+Z-E(Z)\}^2$$

$$=E\{[X-E(X)]^2+[Y-E(Y)]^2+[Z-E(Z)]^2+2[X-E(X)][Y-E(Y)]$$

$$+2[Y-E(Y)][Z-E(Z)]+2[Z-E(Z)][X-E(X)]\}$$

$$=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\,COV(X,Y)+2\,COV(Y,Z)+2\,COV(Z,X)$$

$$=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\sqrt{D(X)D(Y)}\,\rho_{XY}+2\sqrt{D(Y)D(Z)}\,\rho_{XZ}$$

$$+2\sqrt{D(Z)D(X)}\,\rho_{ZX}=1+1+1+2\times\sqrt{1\times1}\times0+2\sqrt{1\times1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$+2\sqrt{1\times1}\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

设随机变量（X_1，X_2）具有概率密度。

$$f(x,y)=\frac{1}{8}(x+y),\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\qquad 0\leqslant y\leqslant 2$$

求　$E(X_1)$，$E(X_2)$，COV（X_1，X_2），$\rho_{X_1X_2}$　$D(X_1+X_2)$

解：

$$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$COV(X_1X_2)=E\{(X_1-\frac{7}{6})(X_2-\frac{7}{6})\}$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2(x-\frac{7}{6})(y-\frac{7}{6})\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=-\frac{1}{36}$$

$$D(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$D(X_2)=E(X_2^2)-[E(X_2)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$$

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2COV(X_1,X_2)$$

$$=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times(-\frac{1}{36})=\frac{5}{9}$$

设随机变量（X_1，X_2）具有概率密度。

$$f(x,y)=\frac{1}{8}(x+y)\,,\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\qquad 0\leqslant y\leqslant 2$$

求 $E(X_1)$，$E(X_2)$，$COV(X_1, X_2)$，$\rho_{X_1X_2}$ $D(X_1+X_2)$

解：

$$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$COV(X_1X_2)=E\{(X_1-\frac{7}{6})(X_2-\frac{7}{6})\}$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2(x-\frac{7}{6})(y-\frac{7}{6})\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=-\frac{1}{36}$$

$$D(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

已知正常成人男性每升血液中的白细胞数平均是 7.3×10^9，标准差是 0.7×10^9. 试利用切比雪夫不等式估计每升血液中的白细胞数在 5.2×10^9 至 9.4×10^9 之间的概率的下界.

解：设 X 表示“每升血液中的白细胞数”，有 $E(X)=7.3\times10^9$，$\mathrm{Var}(X)=(0.7\times10^9)^2=0.49\times10^{18}$，

则 $P\{5.2\times10^9\le X\le 9.4\times10^9\}=P\{-2.1\times10^9\le X-7.3\times10^9\le 2.1\times10^9\}=P\{|X-E(X)|\le 2.1\times10^9\}$

$$\ge 1-\frac{\mathrm{Var}(X)}{(2.1\times10^9)^2}=1-\frac{0.49\times10^{18}}{4.41\times10^{18}}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9},$$

故所求概率的下界为 $\frac{8}{9}$.

若 $DX = 0.004$，利用切比雪夫不等式估计概率 $P(|X-EX|<0.2)$

解 由切比雪夫不等式

$$P(|X-EX|<0.2) \geq 1-\frac{DX}{(0.2)^2} = 1-\frac{0.004}{0.04} = 0.9$$

给定 $P(|X-EX|<\varepsilon)\geq 0.9$，$DX=0.009$，利用切比雪夫不等式估计 ε。

解 $P(|X-EX|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}=1-\dfrac{0.009}{\varepsilon^2}\geq 0.9$ $\qquad \varepsilon\geq 0.3$

设有 30 个电子器件 $D_1, D_2, \cdots, D_{30}$，它们的使用情况如下：D_1 损坏，D_2 立即使用；D_2 损坏，D_3 立即使用等等，设器件 D_i 的寿命服从参数为 $\lambda = 0.1$（小时）$^{-1}$ 的指数分布的随机变量，令 T 为 30 个器件使用的总时间，求 T 超过 350 小时的概率。

解　设 D_i 为器件 D_i 的寿命，则 $T = \sum_{i=1}^{30} D_i$，所求概率为

$$P(T \ge 350) = P(\sum_{i=1}^{30} D_i \ge 350) = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{30} D_i - 300}{\sqrt{3000}} \ge \frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(\frac{50}{\sqrt{3000}}) = 1 - \Phi(0.91) = 1 - 0.8186 = 0.1814\,.$$

某计算机系统有 100 个终端，每个终端有 20%的时间在使用，若各个终端使用与否相互独立，试求有 10 个或更多个终端在使用的概率。

解　设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个终端在使用,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个终端不在用.} \end{cases}$　　$i = 1, 2, \cdots$

则同时使用的终端数

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100, 0.2)$$

所求概率为

$$P(X \geq 10) \approx 1 - \Phi\left(\frac{10-20}{\sqrt{16}}\right) = 1 - \Phi(-2.5) = \Phi(2.5) = 0.9938 .$$

1．据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布。现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的。求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率。

解　利用独立同分布中心极限定理。设 X 表示电器元件的寿命，则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

随机取出 16 只元件，其寿命分别用 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 表示，且它们相互独立，同服从均值为 100 的指数分布，则 16 只元件的寿命的总和近似服从正态分布。设寿命总和为 $Y=\sum_{i=1}^{16}X_i$，其中 $E(X_i)=100, D(X_i)=100^2$，由此得 $E(Y)=\sum_{i=1}^{16}E(X_i)=16\times100=1600, D(Y)=\sum_{i=1}^{16}D(X_i)=16\times100^2$。由独立同分布中心极限定理知，Y 近似服从正态分布 $N(1600,16\times100^2)$，于是

$$\begin{aligned}&P\{Y>1920\}=1-P\{Y\le1920\}\\&=1-P\{\frac{Y-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\le\frac{1920-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\}\\&=1-P\{\frac{Y-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\le\frac{320}{400}\}\\&\approx1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119\end{aligned}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数。

4. 设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 0.5kg，均方差为 0.1kg，问 5000 只零件的总重量超过 2510kg 概率是多少？

解　利用独立同分布中心极限定理. 设 X_i 表示第 i 只零件的重量(i=1,2, ⋯, 5000),且

$E(X_i)=0.5, D(X_i)=0.1^2$。设总重量为 $Y=\sum_{i=1}^{5000} X_i$，则有

$E(Y)=5000\times0.5=2500, DY=5000\times0.1^2=50$。由独立同分布中心极限定理知 Y 近似服从正态分布 $N(2500,50)$，而 $\frac{Y-2500}{\sqrt{50}}$ 近似服从标准正态分布 N（0，1）所求概率为

$$
\begin{aligned}
P\{Y>2510\} &= P\{\frac{Y-2500}{\sqrt{50}} > \frac{2510-2500}{\sqrt{50}}\} \\
&= P\{\frac{Y-2500}{\sqrt{50}} > 1.4142\} \\
&\approx 1-\Phi(1.4142) \\
&= 1-0.9207 = 0.0793
\end{aligned}
$$

卡车装运水泥，设每袋水泥重量（以公斤计）服从 N（$50,2.5^2$）问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

解：已知 $X \sim N$（$50,2.5^2$）不妨设最多可装 A 袋水泥才使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.则由期望和方差的性质得 $Y=AX \sim N$（$50A,2.5^2A$）.故由题意得

$$P\{Y \geq 2000\} \leq 0.05 \Rightarrow P\{Y < 2000) \geq 0.95$$

即 $\Phi\left(\dfrac{2000-50A}{2.5\sqrt{A}}\right) \geq 0.95$查表得 $\dfrac{2000-50A}{2.5\sqrt{A}} \geq 1.65$ 解得 $A \geq 39$.

已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差是 700，利用契比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5200~9400 之间的概率 p.

解：由题意知 $\mu=7300, \sigma=700$，则由契比雪夫不等式

$$P\{5200 \le X \le 9400\} = P\{|X-7300| \le 2100\} \ge 1-\frac{700^2}{2100^2} = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0.8889$$

5 家商店联营，它们每周售出的某种农产品的数量（以 kg 计）分别为 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5，已知 $X_1 \sim N(200, 225)$，$X_2 \sim N(240, 240)$，$X_3 \sim N(180, 225)$，$X_4 \sim N(260, 265)$，$X_5 \sim N(320, 270)$，X_1，X_2，X_3，X_4，X_5 相互独立。

（1）求 5 家商店两周的总销售量的均值和方差；

（2）商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存多少公斤该产品？

解：（1）令 $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$ 为总销售量。

已知 $EX_1=200$，$EX_2=240$，$EX_3=180$，$EX_4=260$，$EX_5=320$，

$D(X_1)=225$，$D(X_2)=240$，$D(X_3)=225$，$D(X_4)=265$，$D(X_5)=270$，

利用数学期望的性质 3° 有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{5} E(X_i)=1200$$

利用方差的性质 3° 有

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{5} D(X_i)=1225$$

（2）设商店仓库储存 a 公斤该产品，使得

$$P\{Y \le a\} > 0.99$$

由相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，并注意到（1），得

$$Y \sim N(1200,\ 1225)$$

$$P\{Y \le a\} = \Phi\left(\frac{a-1200}{35}\right) > 0.99$$

查标准正态分布表知

$$\frac{a-1200}{35} > 2.33$$

$$a > 1281.55$$

∴ a 至少取 1282.

某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8，医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言。（1）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？（2）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

解：设 X 为 100 人中治愈的人数，则 $X\sim B(n,p)$其中 n=100

（1）$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$

$$=1-\Phi(\frac{-5}{4})=\Phi(+\frac{5}{4})=0.8944$$

（2）p=0.7 由中心极限定理知

$$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$$

$$=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{21}})=1-\Phi(1.09)=1-0.8621=0.1379.$$

1. 在总体 $N(52,6.3^2)$ 中随机抽一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率。

解　样本均值 $\overline{X}$ 服从正态分布 $N(52,6.3^2)$，由此得 $\dfrac{\overline{X}-52}{6.3/6}\sim N(0,1)$。所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P\{50.8<\overline{X}<53.8\}=P\{\frac{50.8-52}{6.3/6}<\frac{\overline{X}-52}{6.3/6}\}\\
&=\Phi(1.714)-\Phi(-1.143)\\
&=0.9564-(1-0.8729)\\
&=0.8293
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数。

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一相应的样本值。求下述各总体的密度函数或分布律中的未知参数的矩估计量和估计值。

（1）$f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中 $c>0$ 为已知参数，$\theta>1,\theta$ 不未知参数。

（2）$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中 $\theta>1,\theta$ 不未知参数。

（3）$P\{X=x\}=\binom{m}{x}p^{x}(1-p)^{m-x}(x=0,1,2,\cdots),m,$ 其中 $0<p<1$，p 为未知参数。

解　求一个未知参数的矩估计量，首先求总体 X 的数学期望，然后令总体数学期望等于样本均值，解此方程，得未知参数的矩估计量。

（1）

$$E(X)=\int_c^{+\infty} x\theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)}dx=\theta c^{\theta}\int_c^{+\infty} x^{-\theta}dx$$

$$=\theta c^{\theta}\left(\frac{1}{1-\theta}x^{-(\theta+1)}\right)\Big|_c^{+\infty}$$

$$=\theta c^{\theta}\left(\frac{-c^{1-\theta}}{1-\theta}\right)=\frac{\theta c}{\theta-1}$$

对样本的一组观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，得样本均值为 $\bar{x}$。

令 $\dfrac{\theta c}{\theta-1}=\bar{x}$，解得 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{x}}{\bar{x}-c}$，则 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{x}}{\bar{x}-c}$ 为 θ 的矩估计值，相就的 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$ 为 θ 的矩估计量。其中 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是随机变量，表示对样本的不同观察值，它取值不同，所以 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$ 是随机变量。

（2）

$$E(X)=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\sqrt{\theta}\int_0^1 x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}$$

对样本的一组观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，令 $\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}=\bar{x}$，得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}})^2$， θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}})^2$。

（3）总体 X 服从二项分布 $b(m,p)$，由此得 $E(X)=mp$，对样本的一组观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

令 $mp=\bar{x}$，得 p 的矩估计值为 $\hat{p}=\frac{\bar{x}}{m}$，p 的矩估计量为 $\hat{p}=\frac{\bar{X}}{m}$。

（1）设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$为未知参数。已知取得了样本值$x_1=1, x_2=2, x_3=1$ 。试求θ的矩估计值和最大似然估计量。

（2）设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自参数为 的泊松分布总体的一个样本，试求λ的最大似然估计量及矩估计量。

解　（1）$E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta$ 。

样本均值$\bar{x}=\dfrac{1+2+1}{3}=\dfrac{4}{3}$，令$3-2\theta$，得$\theta$的矩估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$。

似然函数为

$$L(\theta)=\theta^4 2\theta(1-\theta)=2\theta^5(1-\theta)$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln l\theta+\ln(1-\theta)$$

似然方程为

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$$

得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{5}{6}$。

（2）总体X服从泊松分布，其分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\quad（x=0,1,2,\cdots）$$

而$E(X)=\lambda$，令$\lambda=\overline{X}$，得λ的矩估计量为$\hat{\lambda}=\overline{X}$。

似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}=e^{-n\lambda}(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i!})\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

对数似然函数为

$$1nL(\lambda)=-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}1nx_i!+\sum_{i=1}^{n}x_i1n\lambda$$

似然方程为

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$$

得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$，$\lambda$ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\overline{X}$。$\lambda$ 的矩估计量和最大似然估计量相等。

随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮口速度的样本标准差 $s=11m/s$ 。设炮口速度服从正态分布。求这种炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解　求标准差 σ 的置信区间时，首先求方差 σ^2 的置信区间。选取的随机变量（样本的函数）为

$$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-1)$$

给定置信水平 $1-a=0.95$，使

$$P\{X^2_{0.975}(8)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<X^2_{0.025}(8)\}=0.95$$

查 X^2 分布表得分位点为 $X^2_{0.975}(8)=2.180, X^2_{0.025}(8)=17.535$ 。等价于

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{17.535}<\sigma<\frac{(n-1)S^2}{2.180}\}=0.95$$

于是 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\frac{(n-1)S^2}{17.535},\frac{(n-1)S^2}{2.180})$$

将 $n=9, s=11$ 代入，得 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{8\times 11^2}{17.535},\frac{8\times 11^2}{2.180}\right)=(55.2,444.0)$$

由此得 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\sqrt{55.2},\sqrt{444.0})=(7.43,21.07)$$

随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮弹口速度的样本标准差为 s=11(m/s)。设炮口速度服从正态分布。求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信度为 0.95 的置信区间。

解：σ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right) = \left(\frac{\sqrt{8}\times 11}{\sqrt{17.535}}, \frac{\sqrt{8}\times 11}{\sqrt{2.18}}\right) = (7.4, 21.1)$$

其中 $\alpha=0.05$, $n=9$

查表知 $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$, $\chi^2_{0.975}(8)=2.180$