

第一节 数学期望

- 一、数学期望的概念
- 二、数学期望的性质
- 三、随机变量函数的数学期望
- 四、小结



一、数学期望的概念

引例1 分赌本问题(产生背景)

A, B 两人赌技相同, 各出赌金100元, 并约定先胜三局者为胜, 取得全部 200 元. 由于出现意外情况, 在 A 胜 2 局 B 胜1 局时, 不得不终止赌博, 如果要分赌金, 该如何分配才算公平?



分析 假设继续赌两局,则结果有以下四种情况:

AA	AB	BA	BB
A 胜 B 负	A 胜 B 负	B 胜 A 负	B 胜 A 负
A 胜 B 负	B 胜 A 负	A 胜 B 负	B 胜 A 负

把已赌过的三局(A 胜2局 B 胜1局)与上述结果相结合,即 A 、 B 赌完五局,

前三局: A 胜 2 局 B 胜 1 局

后二局:

AA	AB	BA
------	------	------

A 胜

B

B 胜



故有, 在赌技相同的情况下, A, B 最终获胜的可能性大小之比为 **3:1**,

即 A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$, 而 B 只能获得赌金的 $\frac{1}{4}$.

因此, A 能“**期望**”得到的数目应为

$$200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}),$$

而 B 能“**期望**”得到的数目, 则为

$$200 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 50(\text{元}).$$



若设随机变量 X 为:在 A 胜2局 B 胜1局的前提下,继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则 X 所取可能值为: 200 0

其概率分别为: $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

因而 A 期望所得的赌金即为 X 的 “期望” 值,

等于 $200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}).$

即为 X 的可能值与其概率之积的累加.



引例2 射击问题

设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次,
(命中的环数是一个随机变量).
射中次数记录如下



命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问:该射手每次射击平均命中靶多少环?



解 平均射中环数 = $\frac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$= \frac{0 \times 2 + 1 \times 13 + 2 \times 15 + 3 \times 10 + 4 \times 20 + 5 \times 30}{90}$$

$$= 0 \times \frac{2}{90} + 1 \times \frac{13}{90} + 2 \times \frac{15}{90} + 3 \times \frac{10}{90} + 4 \times \frac{20}{90} + 5 \times \frac{30}{90}$$

$$= \sum_{k=0}^5 k \cdot \frac{n_k}{n} = 3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y .



$$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^5 k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}} \rightarrow \text{频率随机波动}$$

平均射中环数
随机波动
频率随机波动

“平均射中环数”的稳定值？

$$\sum_{k=0}^5 k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^5 k \cdot p_k$$

↓

随机波动

→

↓

稳定值

“平均射中环数”等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加



1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$



分赌本问题

A 期望所得的赌金即为 X 的数学期望

$$E(X) = 200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}).$$

射击问题

“平均射中环数” 应为随机变量 Y 的数学期望

$$E(Y) =$$

$$0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + 4 \times p_4 + 5 \times p_5.$$



关于定义的几点说明

(1) $E(X)$ 是一个实数,而非变量,它是一种**加权平均**,与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**,也称均值.

(2) **级数的绝对收敛性**保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变,之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量 X 取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

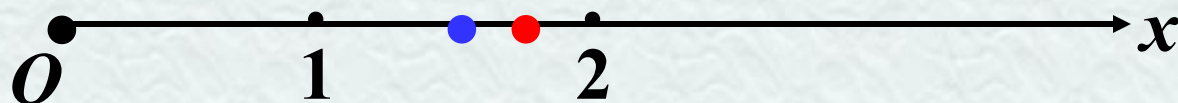


假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\frac{1+2}{2} = 1.5$,

$$E(X) = 1 \times 0.02 + 2 \times 0.98 = 1.98.$$



它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时, X 的期望值与算术平均值相等.

加权平均与算术平均区别

加权平均成绩

设某学生四年大学各门功课成绩分别为

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

其学分分别为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 则称

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{1}{n} \right)$$

为该生各门课程的**算术平均成绩**.



而

$$\bar{x}_\omega = \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^n \omega_j} \right) = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \text{ 其中 } v_i = \omega_i / \sum_{j=1}^n \omega_j,$$

则称 \bar{x}_ω 为该生的**加权平均成绩**.

显然算术平均成绩是加权平均成绩的一种特例, 即 $v_i = \frac{1}{n}$, 可见加权平均才充分的体现了平均值的意义.



实例1 谁的技术比较好？



甲、乙两个射手，他们射击的分布律分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好？



解 设甲、乙射手击中的环数分别为 X_1, X_2 .

$$E(X_1) = 8 \times 0.3 + 9 \times 0.1 + 10 \times 0.6 = 9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2) = 8 \times 0.2 + 9 \times 0.5 + 10 \times 0.3 = 9.1(\text{环}),$$

故甲射手的技术比较好.



实例2 发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票 10万张, 每张2元. 设头等奖1个, 奖金 1万元, 二等奖2个, 奖金各 5 千元; 三等奖 10个, 奖金各1千元; 四等奖100个, 奖金各 100元; 五等奖1000个, 奖金各10 元. 每张彩票的成本费为 0.3 元, 请计算彩票发行单位的创收利润.

解 设每张彩票中奖的数额为随机变量 X , 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0



每张彩票平均能得到奖金

$$\begin{aligned} E(X) &= 10000 \times \frac{1}{10^5} + 5000 \times \frac{2}{10^5} + \cdots + 0 \times p_0 \\ &= 0.5(\text{元}), \end{aligned}$$

每张彩票平均可赚

$$2 - 0.5 - 0.3 = 1.2(\text{元}),$$

因此彩票发行单位发行 10 万张彩票的创收利润为

$$100000 \times 1.2 = 120000(\text{元}).$$



实例3 如何确定投资决策方向？

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元，失败的机会为70%，将损失 2 万元。若存入银行，同期间的利率为5%，问是否作此项投资？



解 设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$E(X) = 8 \times 0.3 - 2 \times 0.7 = 1$ (万元), 存入银行的利息:
 $10 \times 5\% = 0.5$ (万元), 故应选择投资.



实例4 商店的销售策略

某商店对某种家用电器 的销售采用先使用后付款的方式 ,记使用寿命为 X (以年计),规定 :
 $X \leq 1$,一台付款 1500 元; $1 < X \leq 2$,一台付款 2000 元;
 $2 < X \leq 3$,一台付款 2500 元; $X > 3$,一台付款 3000 元.

设寿命 X 服从指数分布 ,概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

试求该商店一台家用电器收费 Y 的数学期望 .



解
$$P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$$

$$\begin{aligned} P\{1 < X \leq 2\} &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx \\ &= e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{2 < X \leq 3\} &= \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx \\ &= e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779, \end{aligned}$$



$$P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx$$

$$= e^{-0.3} = 0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y) = 2732.15,$

即平均一台家用电器收费 2732.15 元.



实例5:常见离散型随机变量的数学期望

1 (0-1分布) 设随机变量 $X \sim (0,1)$, 求 $E(X)$.

解 X 的分布律

$$P\{X = k\} = p^k (1-p)^{1-k}, \quad (k = 0, 1; \quad 0 < p < 1)$$

$$\text{则有 } E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P\{X = k\}$$

$$= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$



2 (二项分布) 设随机变量 $X \sim B(n, p)$, 求 $E(X)$.

解 设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \\ 0 < p < 1, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

则有 $E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P\{X = k\}$

$$= \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^n \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
 &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
 &= np [p + (1-p)]^{n-1} \\
 &= np
 \end{aligned}$$

同时可得两点分布 $B(1, p)$ 的数学期望为 p .



3 (泊松分布) 设随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 求 $E(X)$.

解 设 $X \sim P(\lambda)$, 且其分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0.$$

则有

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

因而泊松分布 $P(\lambda)$ 的数学期望为 λ .



4 (几何分布) 设随机变量 X 服从几何分布, 求 $E(X)$.

解 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = q^{k-1} p, q = 1 - p; k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1.$$

则有

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \right)' \\ &= p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

这是因为 $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' (|x| < 1) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)'.$



常见离散型分布的数学期望小结

分布	分布律	$E(X)$
0-1 分布 $X \sim B(1, p)$	$P\{X = k\} = p^k (1 - p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\dots,n$	np
泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=0,1,2,\dots$	λ
几何分布	$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p$ $k=1,2,\dots$	$\frac{1}{p}$



实例6 按规定,某车站每天 $8:00 \sim 9:00$, $9:00 \sim 10:00$ 都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立.其规律为

到站时刻	8:10	8:30	8:50
	9:10	9:30	9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$



- (i) 一旅客 $8:00$ 到车站,求他候车时间的数学期望.
- (ii) 一旅客 $8:20$ 到车站,求他候车时间的数学期望.

解：设旅客的候车时间为 X (以分计).

(i) X 的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 10 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{3}{6} + 50 \times \frac{2}{6} \\
 &= 33.33(\text{分}).
 \end{aligned}$$



(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X) =$$

$$10 \times \frac{3}{6} + 30 \times \frac{2}{6} + 50 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + 70 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + 90 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \\ = 27.22(\text{分}).$$



2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,
若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 的值为随机
变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$



实例7 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X (以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{5}e^{-x/5} dx = 5(\text{分钟}).$

因此, 顾客平均等待5分钟就可得到服务.



书上例7 有5个相互独立工作的电子装置，他们的寿命 X_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) 服从同一指数分布，其分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

1. 若将这5个电子装置串联工作组成整机，求整机寿命N的数学期望。
2. 若将这5个电子装置并联工作组成整机，求整机寿命M的数学期望。



解：1.整机串联，则有

$$F_N(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} \leq z\}$$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)]^5$$

$$F_{X_1}(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

$$F_{X_1}(z) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt = \int_0^x e^{-t/\theta} d\frac{t}{\theta}$$

$$= -e^{-t/\theta} \Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$



$$\begin{aligned}
 f_N(x) = F'_N(z) &= \left\{ 1 - \left[1 - (1 - e^{-\frac{x}{\theta}}) \right]^5 \right\}' \\
 &= \left(1 - e^{-\frac{5x}{\theta}} \right)' = 0 - \left(-\frac{5}{\theta} e^{-\frac{5x}{\theta}} \right) \\
 &= \begin{cases} \frac{5}{\theta} e^{-\frac{5x}{\theta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 E(N) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_N(x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} x \frac{5}{\theta} e^{-\frac{5x}{\theta}} dx \\
 &\quad u = \frac{5x}{\theta} \\
 &= \frac{\theta}{5} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du \\
 &= -\frac{\theta}{5} \int_0^{+\infty} u de^{-u} \\
 &= -\frac{\theta}{5} \left[u e^{-u} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right] \\
 &= \frac{\theta}{5} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = -\frac{\theta}{5} e^{-\frac{5x}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{\theta}{5}
 \end{aligned}$$



解：2.整机并联，则有

$$\begin{aligned} F_M(z) &= P\{M \leq z\} = P\{X_1 \leq z, X_2 \leq z, X_3 \leq z, X_4 \leq z, X_5 \leq z\} \\ &= [P\{X_1 \leq z\}]^5 = \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^5 \quad (z > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_M(x) &= F'_M(z) = \left[\left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^5 \right]' \\ &= 5 \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^4 \times \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)' = 5 \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^4 \times \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \\ &= \begin{cases} \frac{5}{\theta} \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^4 \times e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E(M) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_M(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{5x}{\theta} \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^4 \times e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= \frac{137}{60} \theta \end{aligned}$$



实例8 常见连续型随机变量的数学期望

1 (均匀分布) 设随机变量 X 服从均匀分布, 求 $E(X)$.

解 设 $X \sim U(a, b)$, 其分布密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

则有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{2}(a+b).$$

因而均匀分布数学期望位于区间的中点.



2 (正态分布) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其分布密度函数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0, -\infty < x < \infty.$$

则有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$



$$\text{令 } \frac{x - \mu}{\sigma} = t \Rightarrow x = \mu + \sigma t$$

$$\text{所以 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \mu.$$

因而参数 μ 为正态分布的数学期望.



3 (指数分布)

设随机变量 X 服从指数分布, 其概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad \text{其中 } \lambda > 0,$$

求 $E(X)$.

解

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = - \int_0^{+\infty} x de^{-\lambda x} \\ &= - xe^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$



常见连续型分布的数学期望小结

分布名称	概率密度	$E(X)$
均匀分布	$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$
正态分布	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ
指数分布	$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$



二、数学期望的性质

1. 设 C 是常数, 则有 $E(C) = C$.

证明 $E(X) = E(C) = 1 \times C = C$.

2. 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$E(CX) = CE(X).$$

证明 $E(CX) = \sum_k Cx_k p_k = C \sum_k x_k p_k = CE(X)$.

例如 $E(X) = 5$, 则 $E(3X) = 3E(X) = 3 \times 5 = 15$.



3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

证明

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_k (x_k + y_k) p_k \\ &= \sum_k x_k p_k + \sum_k y_k p_k = E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

说明 连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.



性质3 设 X 、 Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

证

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E(X) + E(Y). \end{aligned}$$



性质4 设 X 、 Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

证

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y) dy \\ &= E(X)E(Y). \end{aligned}$$



实例9 一机场班车载有 20 位旅客自机场开出, 旅客有 10 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车, 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量 X_i ,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车,} \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$.



$$\text{则有 } P\{X_i = 0\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \quad P\{X_i = 1\} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20},$$
$$i = 1, 2, \dots, 10.$$

$$\text{由此 } E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

$$\begin{aligned} \text{得 } E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_{10}) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) \\ &= 10 \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \right] = 8.784(\text{次}). \end{aligned}$$



随机变量函数的数学期望

(一) 一维随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{数学期望}} & E(X) \\
 \downarrow & & \\
 f(X) & \xrightarrow{\text{数学期望}} & E[f(X)] = ?
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \\
 E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx
 \end{array}$$

f 是连续函数, $f(X)$ 是随机变量, 如: $aX+b$, X^2 等等.



2. 一维随机变量函数数学期望的计算

如何计算随机变量函数的数学期望?

方法1 (定义法): $f(X)$ 是随机变量, 按照数学期望的定义计算 $E[f(X)]$.

关键: 由 X 的分布求出 $f(X)$ 的分布.

难点: 一般 $f(X)$ 形式比较复杂的, 很难求出其分布.



方法2 (公式法):

定理3.1 设 X 是一个随机变量, $Y=f(X)$, 则

$$E(Y) = E[f(X)] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) p_k, & X \text{ 为离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx, & X \text{ 为连续型。} \end{cases}$$

当 X 为离散型时, $P(X=x_k) = p_k, (k=1,2,\dots)$;

当 X 为连续型时, X 的密度函数为 $p(x)$.

求 $E[f(X)]$ 时, 只需
知道 X 的分布即可.



(二) 二维随机变量函数的数学期望

1. 二维离散型情形

设 (X, Y) 为二维离散型随机变量, $Z = f(X, Y)$ 为二元函数, 如果 $E(Z)$ 存在,

$$E(Z) = E[f(X, Y)] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) p_{ij}$$

其中 (X, Y) 的联合概率分布为 p_{ij} .



2. 二维连续型情形

设 (X, Y) 为二维连续型随机变量, $Z = f(X, Y)$ 为二元连续函数, 如果 $E(Z)$ 存在, 则

$$\begin{aligned} E(Z) &= E[f(X, Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy \end{aligned}$$

其中 (X, Y) 的联合概率密度为 $p(x, y)$.



例 10 设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X - Y)^2]$.

解 X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.4 = 2.0$.



Y 的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得 $E(Y) = -1 \times 0.3 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 = 0$.

因为 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1



Y/X 的分布律为	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X, Y)	(1, -1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, -1)	(2, 0)	(3, 0)	(3, 1)
Y/X	-1	0	1	-1/2	1/2	0	1/3

计算可得

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{Y}{X}\right) &= -1 \times 0.2 - \frac{1}{2} \times 0.1 + 0 \times 0.4 + \frac{1}{3} \times 0.1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \times 0.1 + 1 \times 0.1 \\
 &= -\frac{1}{15}.
 \end{aligned}$$



p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X, Y)	(1, -1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, -1)	(2, 1)	(3, 0)	(3, 1)
$(X - Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

$(X - Y)^2$ 的分布律为

p	0.1	0.2	0.3	0.4
$(X - Y)^2$	0	1	4	9

$$\begin{aligned} \text{得 } E[(X - Y)^2] &= 4 \times 0.3 + 1 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 9 \times 0.4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

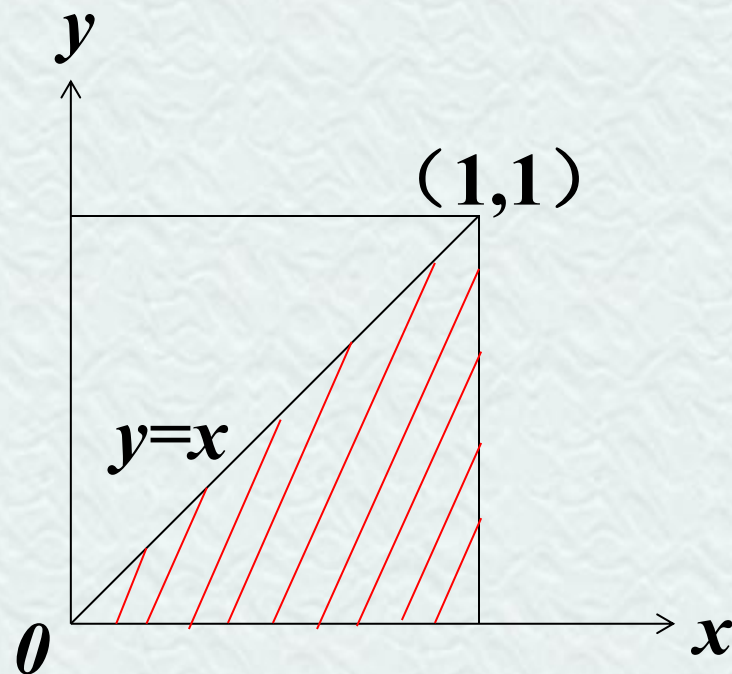


例11 设 (X, Y) 的分布密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求: $E(X^2 + Y^2)$

解:



$$E(X^2 + Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy$$

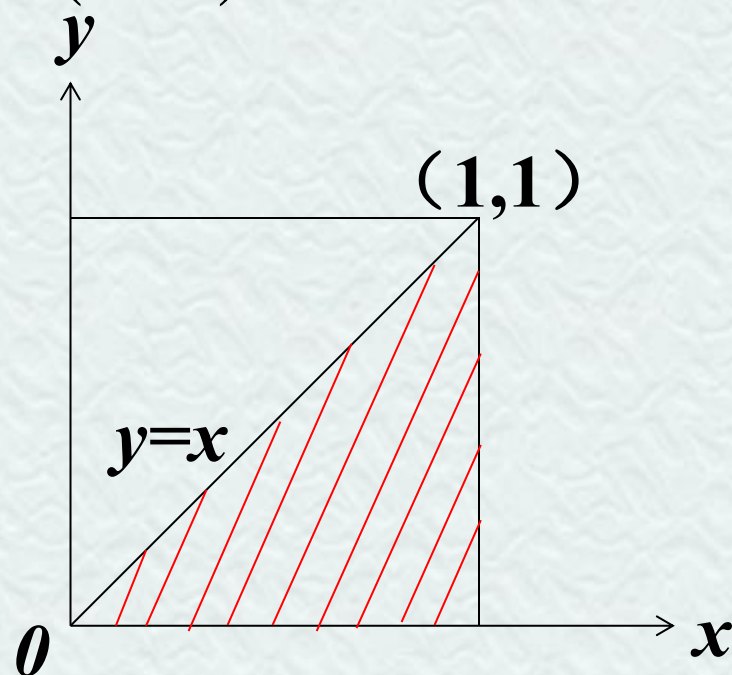
$$= \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2) 12y^2 dy$$

$$= 12 \int_0^1 dx \left[\int_0^x x^2 y^2 dy + \int_0^x y^4 dy \right]$$

$$= 12 \int_0^1 \left[x^2 \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^x + \frac{1}{5} y^5 \Big|_0^x \right] dx$$

$$= 12 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^5 + \frac{1}{5} x^5 \right] dx = 12 \int_0^1 \left[\frac{8}{15} x^5 \right] dx$$

$$= 12 \times \frac{8}{15} \times \frac{1}{6} x^6 \Big|_0^1 = \frac{16}{15}$$



例12 设随机变量的分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求: $E\left(\frac{1}{X^2}\right)$

解:

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2} \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} x \Big|_0^2 = \frac{3}{4}$$



四、小结

1. 数学期望是一个实数, 而非变量, 它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同, 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

$$1^{\circ} E(C) = C;$$

$$2^{\circ} E(CX) = CE(X);$$

$$3^{\circ} E(X + Y) = E(X) + E(Y);$$

$$4^{\circ} X, Y \text{ 独立} \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y).$$

