独立性

一、事件的相互独立性

二、几个重要定理

三、例题讲解

四、小结

一、事件的相互独立性

1.引例

盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

$A=$ 第一次抽取,取到绿球,

$B=$ 第二次抽取,取到绿球,

则有

$$P(B|A)=P(B),$$

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

$$P(B|A)=P(B) \Leftrightarrow \boxed{P(AB)=P(A)P(B)}$$

1.引例

从一副扑克牌中抽出大、小王，现随机抽取一张，

R——抽出红桃　　**A——抽出A**

$$P(R)=\frac{13}{52}$$

$$P(R\mid A)=\frac{1}{4}$$

$$P(A)=\frac{4}{52}$$

$$P(A\mid R)=\frac{1}{13}$$

$$P(R\mid A)=P(R)$$

$$P(A\mid R)=P(A)$$

在实际应用中，往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立.

例如

甲、乙两人向同一目标射击，记 A={甲命中}，B={乙命中}，A与B是否独立？

由于“甲命中”并不影响“乙命中”的概率，故认为A、B独立．

（即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率）

又如：一批产品共n件，从中抽取2件，设

A_i={第i件是合格品}　i=1,2

若抽取是有放回的，则A_1与A_2独立.

因为第二次抽取的结果

不受第一次抽取的影响.

若抽取是无放回的，则A_1与A_2不独立.

因为第二次抽取的结果受到第一次抽取的影响.

2.定义

设 A, B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立，简称 A, B 独立.

说明

事件 A 与 事件 B 相互独立，是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

请同学们思考

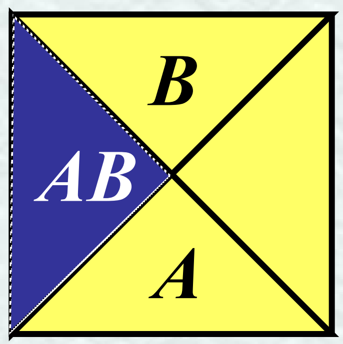
两事件相互独立与两事件互斥的关系.

两事件相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互斥 $AB=\varnothing$

二者之间没有必然联系

例如

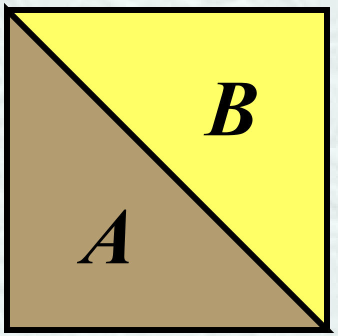


若 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2}$,

则 $P(AB)=P(A)P(B)$.

由此可见两事件相互独立，但两事件不互斥.

若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$



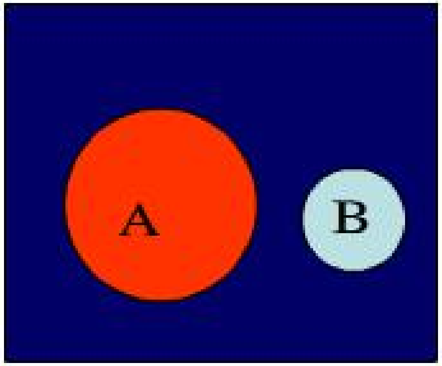
则 $P(AB)=0$,

$P(A)P(B)=\frac{1}{4}$,

故 $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

由此可见两事件互斥但不独立.

请问：如图的两个事件是独立的吗？



我们来计算：$P(AB)=0$

而$P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$

即 $P(AB)\neq P(A)P(B)$

故 A、B不独立

即：若A、B互斥，且$P(A)>0$, $P(B)>0$, 则A与B不独立.

反之，若A与B独立，且$P(A)>0$,$P(B)>0$, 则A、B不互斥.

问：能否在样本空间S中找两个事件,它们既相互独立又互斥?

这两个事件就是S和ϕ

$$\phi s=\phi$$

$$P(\phi S)=P(\phi)P(S)=0$$

ϕ与S独立且互斥

不难发现，ϕ与任何事件都独立.

前面我们看到独立与互斥的区别和联系，再请你做个小练习.

设A、B为互斥事件，且$P(A)>0, P(B)>0$，下面四个结论中，正确的是:

1. $P(B|A)>0$
2. $P(A|B)=P(A)$
3. $P(A|B)=0$ ✓
4. $P(AB)=P(A)P(B)$

设A、B为独立事件，且$P(A)>0, P(B)>0$，下面四个结论中，正确的是:

1. $P(B|A)>0$ ✓
2. $P(A|B)=P(A)$ ✓
3. $P(A|B)=0$
4. $P(AB)=P(A)P(B)$ ✓

事件的独立性与互斥是两个截然不同的概念，互斥是指两个事件之间的关系，独立性是指两个事件概率间的关系

二、几个重要定理

定理1： 若P（B）=0则B与任一事件独立，进而不可能事件与任一事件独立。

证明： $AB \subset B$ 0≤P（AB）≤P（B）=0。

P（AB）=P（A）P（B）=0。

定理2： 若P（B）=1则B与任一事件独立，进而必然事件与任一事件独立。

证明： $P(\overline{B})=0, \forall A, A=AS=AB+A\overline{B},$

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(A)P(\overline{B})$$

$$=P(AB). \qquad P(A)P(B)=P(AB)$$

定理3：A与B独立$\Leftrightarrow$ $P(B)=0$或$P(A|B)=P(A)$.

定理4：若A与B独立，则A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也分别独立。

证明：

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

$$=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(\overline{B})$$

得A与$\overline{B}$独立。

同理可证：$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也分别独立。

3.三事件两两相互独立的概念

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 两两相互独立.

4.三事件相互独立的概念

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

注意

三个事件相互独立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 三个事件两两相互独立

推广 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件, 如果对于任意 $k\,(1 < k \le n)$, 任意 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 具有等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件.

***n* 个事件相互独立** $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ ***n*个事件两两相互独立**

两个结论

1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 k $(2 \leq k \leq n)$ 个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ 相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

三、例题讲解

射击问题

例1 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2,若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

解 设事件 A_i 为“第 i 名射手击落飞机”,

$i = 1,2,\cdots,10.$

事件 B 为“击落飞机”,

则 $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}$,

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - (0.8)^{10} = 0.893.$$

例2 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 ,被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解 设 A_i 表示有 i 个人击中飞机 ,

A, B, C 分别表示甲、乙、丙击中飞机 ,

则 $P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.7,$

由于 $A_1 = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C,$

故得

$$P(A_1)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$$

$$=0.36.$$

因为 $A_2=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC,$

得 $P(A_2)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)$

$$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)$$

$$=0.41.$$

由 $A_3 = ABC$, 得 $P(A_3) = P(ABC)$

$$= P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14.$$

因而,由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$P = 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14$$

$$= 0.458.$$

伯恩斯坦反例

例3 一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，而第四面同时染上红、白、黑三种颜色.现以 A，B，C 分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件，问 A，B，C是否相互独立?

解 由于在四面体中红、白、黑分别出现两面，

因此 $$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

又由题意知 $$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$$

故有

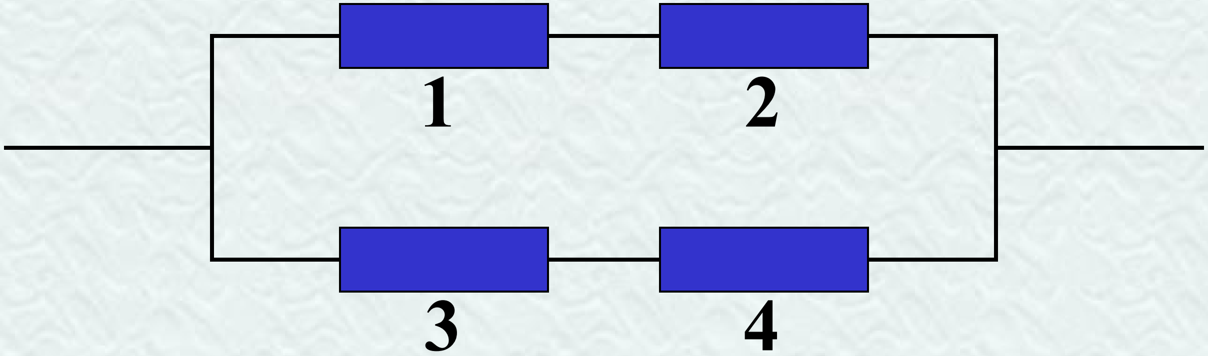
$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}, \\ P(BC) = P(B)P(C) = \dfrac{1}{4}, \\ P(AC) = P(A)P(C) = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 A, B, C 两两独立.

由于 $P(ABC) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8} = P(A)P(B)P(C),$

因此 A，B，C 不相互独立.

例4 一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性.如图所示,设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4 按先串联再并联的方式 联结(称为串并联系统),设第 i 个元件的可靠性为 p_i $(i=1,2,3,4)$. 试求系统的可靠性.



解

以 A_i $(i=1,2,3,4)$ 表示事件第 i 个元件正常工作,

以 A 表示系统正常工作 .

则有 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4.$

由事件的独立性 ,得系统的可靠性 :

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4.$$

例6 一工人照看三台相互独立工作的机床，在一小时内甲、乙、丙三台机床需工人照看的概率分别是0.9,0.8和0.7，求在一小时内

1.没有机床需要照看的概率

2.至少一台机床需要照看的概率

3.至多一台机床需要照看的概率

解 设 A_i $i=1,2,3$ 表示“甲乙丙机床需要照看：

例6 一工人照看三台相互独立工作的机床，在一小时内甲、乙、丙三台机床需工人照看的概率分别是0.9,0.8和0.7，求在一小时内

1.没有机床需要照看的概率

解

设 $A_i \quad i=1,2,3$ 表示“甲乙丙机床需要照看:

$$P(\overline{A_1 A_2 A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0.06$$

例6 一工人照看三台相互独立工作的机床，在一小时内甲、乙、丙三台机床需工人照看的概率分别是**0.9,0.8**和**0.7**，求在一小时内

2.至少一台机床需要照看的概率

解

设 $A_i \quad i=1,2,3$ 表示“甲乙丙机床需要照看

C—至多一台机床需要照看

$$P(C)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$=0.098$$

例6　一工人照看三台相互独立工作的机床，在一小时内甲、乙、丙三台机床需工人照看的概率分别是0.9,0.8和0.7，求在一小时内

3.至多一台机床需要照看的概率

四、小结

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$

A,B,C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$相互独立.

贝努利概型

试验的独立性

Bernoulli试验：只有两个可能的结果A和 $\bar{A}$的试验

n重Bernoulli试验：设E为贝努里试验，将E独立地重复进行n次

n重贝努里试验有下面四个约定：

（1）每次试验的结果只有A和 $\bar{A}$两个可能结果

（2）A在每次试验中出现的概率p保持不变，

（3）各次试验相互独立，

（4）共进行了n次.

例1　袋中有3个白球，2个红球，有放回地取球 4 次，每次一只，求其中恰有2个白球的概率.

解一（古典概型）设 B 表示4个球中恰有2个白球

$$n_{\Omega} = 5^4 \qquad n_B = C_4^2 3^2 2^2$$

$$P(B) = \frac{C_4^2 3^2 2^2}{5^4} = C_4^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.3456.$$

解二 每取一个球看作是做了一次Bernoulli试验

记取得白球为事件 A， $P(A)=3/5.$

有放回地取4个球看作做了 4 重Bernoulli 试验,

4次试验中A 发生2次的概率

$$A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} \quad A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} \quad A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$$
$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4 \quad \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4 \quad \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}$$

$$P(B)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=0.3456.$$

定理:

n重贝努里试验，事件A在n次试验中出现k次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n, \quad q = 1-p$$

证明：由n重贝努里试验定义，事件A在某指定的k次试验中出现，而在其余n-k次试中不出现的概率为 $p^k(1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}$

而在n次试验中事件A发生k次共有C_n^k种不同情况，对应的事件为互不相容的，由概率的有限可加性

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n, \quad q = 1 - p$$

由于 $C_n^k p^k q^{1-k}$ 恰好是展开式(p+q)ⁿ中的第k项，

所以常称 $C_n^k p^k q^{1-k}$ 为二项概率公式。

设B_k=成功A恰好发生k次，A_i=第i次试验成功，$\overline{A_i}$=第i次试验失败，则

$$B_k = A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n$$
$$+ A_1A_2\cdots A_{k-1}\overline{A}_k A_{k+1}\overline{A}_{k+2}\cdots\overline{A}_n$$
$$+\cdots\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}\cdots A_n$$

$$P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)=$$
$$P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})\cdots P(\overline{A}_n)$$
$$= p^k q^{n-k}.$$

同理可得其它项的概率也是 $p^k q^{n-k}$，

利用概率的有限可加性得：

$$P_n(k) = P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

例2一批产品的废品率为0.2，每次抽取一个，观察后放回去，下次再任取一个，共重复三次，求3次中恰有两次取到废品的概率.

解 记事件A——取废品 $P(A)=0.2$

$$P_3(2)=C_3^2\left(0.2\right)^2\left(1-0.2\right)^1$$

例3：一大批电器元件的一级品率为0.8，现任取8件，求至少有两件一级品的概率.

解：令事件A——至少两件一级品

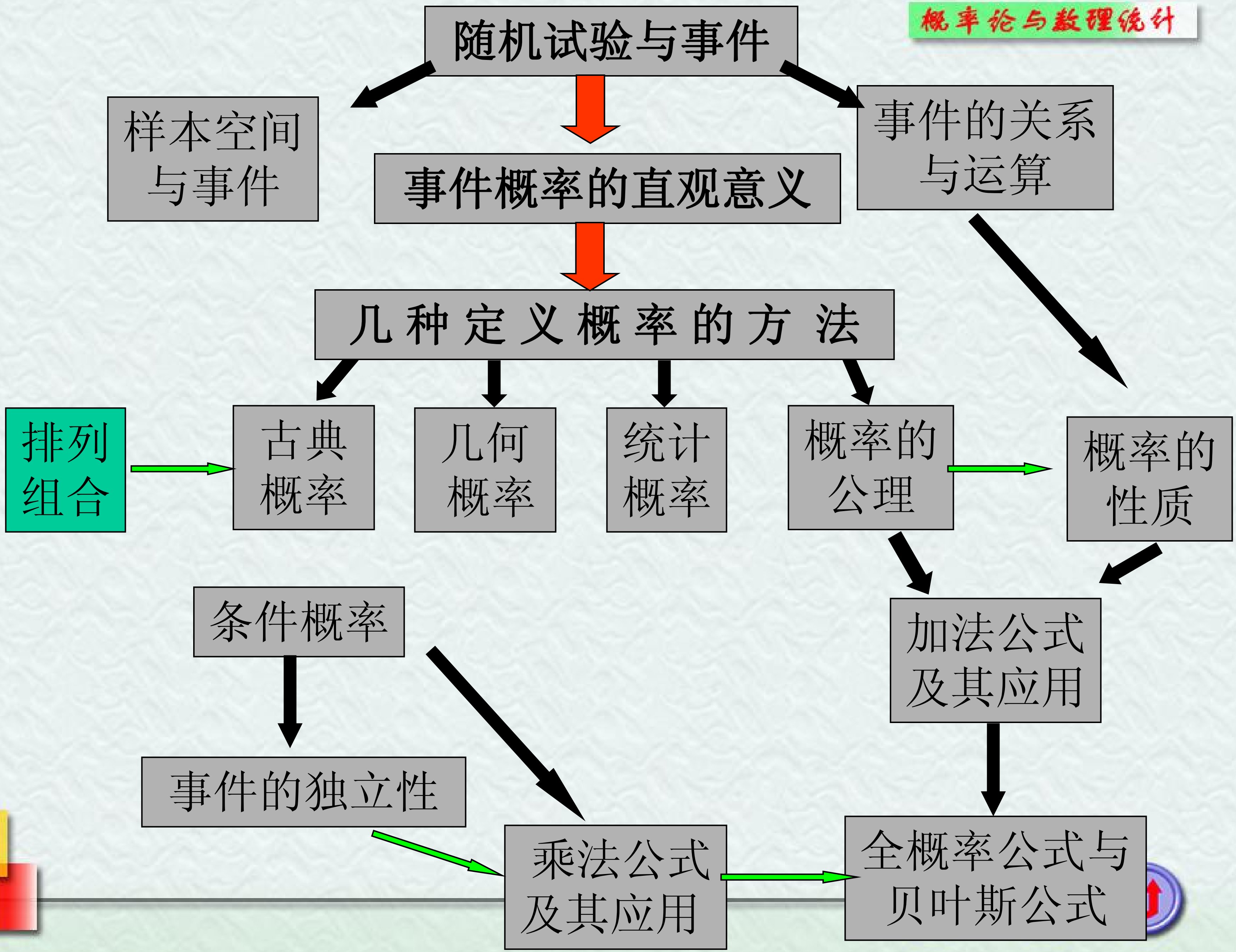
$\overline{A}$—— 一级品数量不超过两件

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-$$ P{无一级品}

—P{一件一级品}

$$=1-(0.2)^8-C_8^1(0.8)^1(1-0.2)^7$$

第一章内容总框图


随机试验与事件
样本空间
与事件
事件概率的直观意义
事件的关系
与运算
几种定义概率的方法
排列
组合
古典
概率
几何
概率
统计
概率
概率的
公理
概率的
性质
加法公式
及其应用
条件概率
事件的独立性
乘法公式
及其应用
全概率公式与
贝叶斯公式