学风朋辈引领行动中心

期中复习资料-大物

编写：李语婷，杨威威，
王晓宇，张和持，张鑫
汇总：杨威威

学风朋辈的全称为：北京化工大学学风朋辈引领行动中心，英文名称为：Student Peer Center of Beijing University of Chemical Technology（简称“SPC”）。

学风朋辈隶属于北京化工大学学生工作办公室，接受指导教师管理。对所辖二级学生组织进行管理，对院级学业辅导组织进行指导。学风朋辈的二级学生组织包括化学工程学院学业指导中心、信息科学与技术学院学业指导中心、生命学院学业指导中心、理学院学业指导中心、英国皇家化学会北京化工大学分会等，共同为全体学生服务。

学风朋辈的主要工作是按照学校学风建设的总体要求，开展包括朋辈学业辅导、学业咨询、资源共享、难点解答、学风营造等与学生学业发展相关的工作。

学风朋辈的宗旨是服务我校学生学业发展，致力于营造积极向上、你争我赶、公平竞争的校园学习文化氛围，定时更新学习资源和有效信息，秉承我校校训“宏德博学，化育天工”，用热情及责任进一步推动我校学风建设工作。

按照学习学风建设的总体目标，学风朋辈在发展过程中不断寻求自身的改革创新，根据自身发展需求，现下设朋辈辅导部、发展咨询部、推广宣传部、秘书处、人事部、事务拓展部共六大职能部门。

学风朋辈自成立已开展了多项精品活动：“朋辈学业辅导”、“学业咨询工作坊”、“学习资料发放”、“学霸答疑”、“学霸经验分享会”。同时，本着强化我校学生专业知识技能，提高学生学习主动性和积极性的服务宗旨，学风朋辈已承办了多次学业发展辅导中心“团体工作坊”活动、“学业·职业规划大赛”等特色活动。学风朋辈正以更加积极的姿态协助我校不断完善教学过程中教与学的环节。

为了及时有效地为我校学子进行学业辅导，分享学习资源。学风朋辈创建了学委网，并拥有自己的微信公众平台（BUCTSPC），定时更新学习资源和有效信息，方便广大学生的学习和生活。

七、恒定磁场

1、恒定电流

【必备知识点】

1、电流

两种电流：

$$\begin{cases}\text{传导电流（由带电粒子定向运动形成的电流）}\\ \text{运流电流（由带电物体作机械运动时形成的电流）}\end{cases}$$

电流定义：导体中的电流I为通过截面S的电荷随时间的变化率，公式表达$I = dq/dt$

恒定电流：导体中的电流不随时间变化

2、电流强度

电流强度j：导体中任意一点电流密度j的方向为该点正电荷的运动方向，j的大小等于在单位时间内通过该点附近垂直于正电荷运动方向的单位面积的电荷

电流强度和电流的关系：$I = \iint j \cdot \mathrm{d}S$

3. 一个电子以半径 R 作匀速圆周运动，计算其电流

$$I = \frac{e}{T} = e\frac{w}{2\pi} = e\frac{v}{2\pi R}$$

2、电源　电动势

【必备知识点】

1、电源定义：提供非静电力的装置

2、电动势定义：单位正电荷绕闭合回路一周，非静电力所做的功，就是电源的电动势

电动势的大小等于把单位正电荷从负极经电源内部移至正极时静电力所做的功 注意：1、非静电力的电场强度E_k只存在于电源内部

2、在电源内部电流的方向是由负极到正极

3、磁场　磁感强度

【必备知识点】

1、磁场

磁场的宏观性质：1.对位于其中的运动电荷（或者电流）有力的作用

2.磁场有能量

2、磁感强度$\boldsymbol{B}$ 定义：当正电荷+q沿某特定方向（或其反方向）的直线通过某点时，它受的磁力为零；而垂直于此特定直线以速度$\boldsymbol{v}$运动时，受力最大为F_{max}。可以将$F_{max}\times\boldsymbol{v}$的方向定义为磁感强度的方向，而$\boldsymbol{B}$的大小为$B = \frac{Fmax}{|q|v}$，故可以用$\boldsymbol{F} = \mathrm{q}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$计算磁场力

3.注意：在利用$\mathrm{F} = \mathrm{q}\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}$时要将电荷的正负与v作为一个整体来判断其方向，且v与B满足右手螺旋定则

【常见题型与详解】

例：磁场中某点处的磁感应强度为$\vec{B} = 0.40\vec{\imath} - 0.20\vec{\jmath}$，一电子以速度$\vec{v} = 0.50 \times 10^6\vec{\imath} + 1.0 \times 10^6\vec{\jmath}$，通过该点，则作用于该电子上的磁场力$\vec{\mathrm{F}}$为（　　）。(基本电荷量$e = 1.6 \times 10^{-19}C$)

解：注意在向量的叉乘中：$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = 0$ $\vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = 0$ $\vec{k} \times \vec{k} = 0$ $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = \vec{k}$

$F = q\vec{v} \times \vec{B} = -1.6 \times 10^{-19} \times [(0.50 \times 10^6\vec{\imath} + 1.0 \times 10^6\vec{\jmath}) \times (0.40\vec{\imath} - 0.20\vec{\jmath})]$
$= -1.6 \times 10^{-19} \times [0.50 \times 10^6 \times (-0.20) - 1.0 \times 10^6 \times 0.40]\vec{k} = 0.80 \times 10^{-13}\vec{k}\ \ N$
（不要忘记是电子带上负号，且该负号仅代表方向）
答案：$0.80 \times 10^{-13}\vec{k}\ \ N$

4. 毕奥–萨伐尔定律　磁矩

【必备知识点】

1) 、定律内容：载流导线上一电流元 Idl，在真空中某点 P 处产生磁感强度 dB 的大小，与电流元的大小 Idl 成正比，与电流元 Idl 到 P 点位置矢量 r 间的夹角 θ 的正弦成正比，并与电流元到点距离的二次方成反比，即：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{e}}{r^2}$$

任意载流导线在点 P 处的磁感强度：
磁感强度叠加原理：

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{e}}{r^2}$$

2) 、磁矩定义：将平面圆电流的面积 S，电流 I，的乘积 SI 定义为磁矩的大小，S 的正方向定义为磁矩的方向。

$$\vec{m} = IS\vec{e_n}$$

3) 、常见特殊位置的磁感强度如下：

i. 真空载流长直导线的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\, r_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

无限长时: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\, x}$ （x 为点到导线的距离）

ii. 真空中均匀带电圆环的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

圆心处：

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

注：当有 N 匝时，公式前面乘以 N。

iii. 真空中圆心角为 α 的均匀带电圆弧圆心处的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

半圆时：

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

iv. 真空中长直螺线管轴线上的磁场

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

无限长时:$B = \mu_0 n I$

【常见题型与详解】

该节最主要的题型为利用毕-萨定律定义来求某点的磁感强度。

例、半径为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为σ，并以角速度ω绕通过盘心垂直于盘面的轴转动 ，求圆盘中心的磁感强度的大小。

分析：该电流是靠带电薄圆盘的电荷以角速度ω旋转产生的，而对于圆盘类型的题常用取薄圆环方式，用微分法建立关系式。

解题：第一步：取半径为 r,厚度为 dr 的薄圆环为微元，易知电流微元为：

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r\mathrm{d}r = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

第二步：对电流微元应用毕-萨定律得磁场微元为：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

第三步：对 r 从 0 到 R 积分得磁场为：

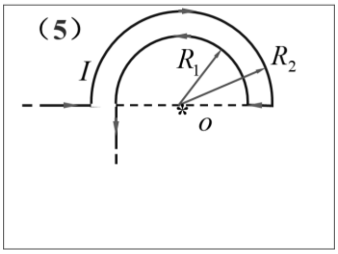
$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

【例题】

1) 、证明：半径为 R，圆心角为α的通有电流 I 的一段圆弧在圆心处的磁场强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\alpha}{2\pi}$$

2) 、如图所示，在导线内通的电流为 I，求 O 处的磁场强度，各关系如图。



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

5、磁通量 磁场的高斯定理

【必备知识点】

1、 磁感线：①闭合曲线，②任意两条不相交。

2、 磁通量：通过磁场中某一曲面的磁感线数，用符号Φ表示。

3、 通过面S的磁通量：

$$\Phi = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e_n}\boldsymbol{S} = BS\cos\theta = BS_\perp \quad d\Phi = BdS\cos\theta \quad \Phi = \oint_s \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

4、 磁场中的高斯定理：通过任意闭合曲面的磁通量必等于零。即：

$$\oint_s \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

【常见题型与详解】

1、一磁场的磁感强度$\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$，则通过一半径为R，开口方向为z轴正方向的半球壳表面的磁通量的大小为？

解：规定法线方向为球壳自内向外，依题可知：

在x, y方向既有穿出的磁感线，也有穿进的磁感线，故磁通量相互抵消了。只有z方向上存在分量。

因为为匀强磁场，故半球壳表面的磁通量为：

$\Phi=-\mathrm{c}\pi R^2$

6、安培环路定理

【必备知识点】

（1）、真空中磁场的环路定理（安培环路定理）：在真空的恒定磁场中，磁感强度$\boldsymbol{B}$沿任一闭合路径的积分（即$\boldsymbol{B}$的环流）的值，等于μ_0乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和，即

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_{i=1}^{n}I_i$$

若电流流向与积分回路呈右手螺旋关系，电流取正值，反之则取负值.

（2）、安培环流定理反映了静磁场的有旋特性（漩涡场，有旋场），与静电场（有势场，无旋场）形成对比.

（3）、基于真空中磁场的环路定理，可以建立磁介质中静磁场的安培环路定理.但此节内容只适用于恒定磁场，对于随时间变化的电磁场，需要进行推广从而建立麦克斯韦方程组.

【常见题型与详解】

（1）、设一无限长直圆柱导线，截面半径为R，电流沿截面均匀分布，电流强度为I.求导线内外的磁场分布.

解题思路：根据电流分布的轴对称性，磁感应强度$\boldsymbol{B}$应沿与圆柱共轴的圆回路的切线方向，大小只与离轴线的距离有关.设圆回路L的半径为r，则由安培环路定理得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=2\pi rB=\mu_0 I'$$

式中，I'为穿过圆回路L的电流.易证：

$$I'=\begin{cases}\dfrac{Ir^2}{R^2} & (r<R)\\ I & (r\geq R)\end{cases}$$

于是有

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2} & (r<R)\\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r\geq R)\end{cases}$$

【例题】

（1）、设一无限长螺旋管单位长度上的匝数为n，电流强度为I，求管内外的磁场.

答案：管内：$\mu_0 nI$；管外：0

（2）、 电流均匀分布在一无穷大平面导体薄板上，面电流密度为i，求空间磁场分布.

答案：$B=\frac{\mu_0 i}{2}$

7、带电粒子在电场和磁场中的运动

【必备知识点】

1、电场力

公式：$F_e = qE$

方向：正电荷为电场线方向，负电荷为电场线反方向，如果电场线为曲线，则沿着切线方向。

2、洛伦兹力

公式：$F_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$

注：因速度与洛伦兹力垂直，所以洛伦兹力不做功，但这不代表洛伦兹力的分力可以做功。

方向判断方法：

（1）$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$的右手螺旋定则判断，右手四指由$\boldsymbol{v}$转向 B，拇指方向即为洛伦兹力方向。注意$F_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$所以判断方向后，如果 q 为负数要取相反的方向。

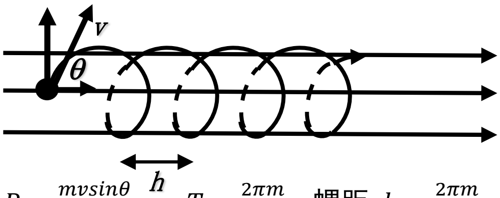
（2）左手定则：磁感线穿手心，四指指向正电荷运动方向（负电荷运动的反方向），拇指方向即为洛伦兹力方向。

3、带电粒子在磁场中做匀速圆周运动系列公式(速度垂直于磁场)

半径：$R = \frac{mv_0}{qB} = \frac{p(\text{动量})}{qB}$　周期：$T = \frac{2\pi m}{qB}$ $v = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$

注：周期频率与速度无关

4、等螺距螺旋运动（速度不垂直与磁场）



$R = \frac{mv\sin\theta}{qB}$　$T = \frac{2\pi m}{qB}$　螺距 $h = \frac{2\pi m}{qB} v\cos\theta$

5、应用

1.速度选择器 $qvB = qE$　$v = \frac{E}{B}$　速度满足条件的才可以射出

2.质谱仪 $qvB = \frac{mv^2}{R}$　$\frac{m}{q} = \frac{BR}{v}$

3.回旋加速器 回旋周期 $T = \frac{2\pi m}{qB}$

4.霍尔效应　霍尔电势差$U_{\text{H}} = \frac{IB}{nbq}$　霍尔电阻　$R = \frac{\boldsymbol{U}_{\mathbf{H}}}{\boldsymbol{I}} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{nqb}}$

8、载流导线在磁场中所受的力

【必备知识点】

1、安培力

公式：$F = \int_l I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$

大小：$F = BIL \sin\theta$

方向：

右手四指由$Id\boldsymbol{l}$转向 B 的方向，拇指方向即为安培力方向。

左手定则，磁感线穿手心，四指指向电流方向，拇指方向即为安培力方向

2、载流线圈的磁力矩

磁矩 $P_m = IS = IS\boldsymbol{e_n}$

磁力矩 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P_m} \times \boldsymbol{B} = ISB\sin\theta$ θ为面的法向量与$\boldsymbol{B}$的夹角

当$\overrightarrow{e_n}$与磁感强度方向相同时， $M = 0$称为平衡态。

当$\overrightarrow{e_n}$与磁感强度方向相垂直时，$M = NBIS$磁力矩最大。

当$\overrightarrow{e_n}$与磁感强度方向相反时，$M = 0$但不处于平衡态，稍有偏转就会离开这个位置。

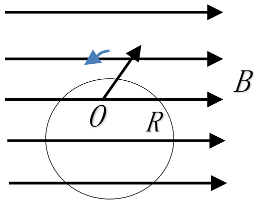
【常见题型与详解】

该知识点常考题型：在一个匀强磁场里，放置一个圆环，圆环里有会定向移动的电荷，求该圆环的磁矩或者磁力矩以及磁力矩的方向。

本类题的难点往往在于题目中没有已知的电流，需要自己求出，常用方法一般用$I = \frac{Q}{T}$求出电流，后面再用磁力矩的定义式求解

【例题】

如图，均匀磁场中放均匀带正电荷的圆环，其线电荷密度为λ，圆环可绕通过环心 O 与环面垂直的转轴旋转。当圆环以角速度ω转动时，圆环受到的磁力矩为—，其方向为—



解：$q = \lambda 2\pi R$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $I = \frac{q}{T} = \lambda R\omega$

$M = IS \times \boldsymbol{B} =$ $\pi\lambda R^3\omega B$

首先先判断圆面的法向量，根据右手螺旋，方向向外

再用叉乘的右手螺旋判断磁力矩方向向上。

9、磁场中的磁介质

【必备知识点】

1、介质中的磁场：$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}'$ 其中 $\boldsymbol{B}_0$ --真空中某点的磁感应强度， $\boldsymbol{B}'$ --磁介质被磁化产生的附加磁感强度

介质的相对磁导率 $\mu_r = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}_0}$

顺磁质： $\boldsymbol{B}'$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 方向相同，使 $\boldsymbol{B} > \boldsymbol{B}_0$ ，μ_r >1;

抗磁质： $\boldsymbol{B}'$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 方向相反，使 $\boldsymbol{B} < \boldsymbol{B}_0$，$\mu_r$ <1;

铁磁质： $\boldsymbol{B}'$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 方向相同，但 $\boldsymbol{B}'$ 比 $\boldsymbol{B}_0$ 大很多， μ_r >>1;

2、磁场强度

（1） $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu}, \mu = \mu_0 \times \mu_r$， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

（2） $\boldsymbol{H}$ 是磁场强度， $\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度

（3） $\boldsymbol{H}$ 单位 A/m

3、介质中的安培环路定理

（1） $\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{dl} = \sum \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I}$ 指传导电流。

（2）由 $\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_0\mu_r \sum \boldsymbol{I}$ 得，磁**感**强度环流与磁介质有关，而磁**场**强度环流只与传导电流

有关。

（3）对于螺绕环，$B=\mu_0\mu_r nI, H=nI$（n 为单位长度螺绕环匝数数目）

【常见题型与详解】

1、关于稳恒磁场的磁场强度的下列几种说法中哪个是正确的？

A、仅与传导电流有关.

B、若闭合曲线内没有包围传导电流，则曲线上各点的必为零.

C、若闭合曲线上各点均为零，则该曲线所包围传导电流的代数和为零.

D、以闭合曲线 L 为边缘的任意曲面的通量均相等.

答案：C

解题思路：注意题干中是稳恒磁场，没有位移电流只有传导电流。

A项：$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{B}$ 与传导电流有关，$\boldsymbol{M}$ 与磁化电流有关。

B项：没包围传导电流，说明 $\boldsymbol{H}$ 沿该路径积分是 0，不是各点。

C项：正确，$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum \boldsymbol{I}=0$。

D项：曲面的法向不同，$\boldsymbol{H}$ 通量 $\iint_s \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}$ 正负也不同。

2、螺绕环中心周长 L=10cm，环上均匀密绕线圈 N=200 匝，线圈中通有电流 I=100mA

（1）求管内的磁感应强度 B_0 和磁场强度 H_0;

（2）若管内充满相对磁导率

μ_r=4200 的磁性物质,则管内的 B 和 H 是多少

（3）由磁化电流产生的 B’各是多少？

解题思路：用介质中的安培环路定理来做。

（1）$H_0=\frac{NI}{l}=\frac{200\times100\times10^{-3}}{10\times10^{-2}}=200$ (A/m)，$B_0=\mu_0H_0=4\pi\times10^{-7}\times200=2.5\times10^{-4}$ (T)

（2）$H=H_0=200$ (A/m)，$B=\mu_0\mu_rH=\mu_rB_0=4200\times2.5\times10^{-4}=1.05$ (T)

（3）由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$ 得，$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_0=1.05-2.5\times10^{-4}=1.05$ (T)

【例题】

一铁环中心线的周长为 0.5m，横截面积为$1.5\times10^{-4}m^2$，在环上紧密地绕有线圈 500 匝。当线圈中通有电流3.0×10^{-3}A,通过环的磁通量为3×10^{-6}Wb。

求（1）环内的磁感应强度和磁场强度。

（2）环内的磁导率和相对磁导率。

答：（1）$B=2\times10^{-2}$ (T)，$H=3$ (A/m)

（2）$\mu=6.67\times10^{-3}$（H/m），$\mu_r=5311$

八、电磁感应 电磁场

1、电磁感应定律

【必备知识点】

1、当穿过一个闭合导体回路的磁通量发生变化时，回路中就产生电流，这种现象叫**电磁感应现象**，所产生的电流叫**感应电流**。电磁感应产生的电动势叫**感应电动势**。

2、电磁感应定律：当穿过**闭合回路**所围面积的**磁通量**发生**变化**时，不论这种变化是什么原因引起的，回路中都会产生感应电动势，且此感应电动势等于磁通量对时间变化率的负值。

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$$

负号表示感应电动势方向与磁通量变化的关系。

若回路是N匝密绕线圈：

$$\varepsilon=-N\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d(N\Phi)}{dt}=-\frac{d\psi}{dt}，\ \psi=N\Phi$$

3、若闭合回路的电阻为R，根据闭合回路欧姆定律，则回路中的感应电流为$I_i=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，利用$\mathrm{I}=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$及上式，可计算出在时间间隔$\Delta\mathrm{t}$内，由于电磁感应的缘故，流过回路的电荷。

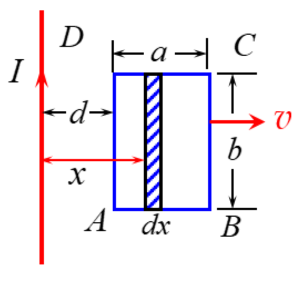
$$q=\int_{t_2}^{t_2}Idt=-\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}d\Phi=\frac{1}{R}(\Phi_1-\Phi_2)$$

回路中磁通量随时间的变化率越大，感应电流越强，但是感应电荷则只与回路中磁通量的变化量有关。

4、楞次定律：闭合的导线回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因。简单来说，就是要反抗引起感应电流的磁通量的变化。

【常见题型与详解】

1、如图所示，一长直导线通有电流I，导线附近有一矩形线圈ABCD，此线圈以速度v沿垂直长直导线方向向右运动，求当线圈与导线相距d时线圈中的感应电动势。



解：$d\Phi=Bbdx=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}bdx$

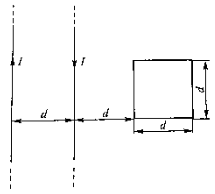
$\Phi=\int_l^{l+a}\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}ln\frac{l+a}{l}$

$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+a}\right)\frac{dl}{dt}=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+a}\right)\cdot v$

$l=d$时，$\varepsilon_i=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+a}\right)\cdot v$

【例题】

1. 有两根相距为d的无限长平行直导线，它们通以大小相等流向相反的电流，且电流均以$\frac{dI}{dt}$的变化率增长。若有一边长为d的正方形线圈与两导线处于同一平面内，如图所示，求线圈中的感应电动势。



答案：$(\frac{\mu_0 d}{2\pi} ln\frac{4}{3})\frac{dI}{dt}$

除了用电磁感应定律解题，还可以用互感电动势知识点解题。

2. 有一测量磁感应强度的线圈，其截面积$S = 4.0cm^2$, 匝数$N = 160$匝，电阻$R = 50\Omega$。线圈与一内阻$R_i = 30\Omega$的冲击电流计相连。若开始时线圈的平面与均匀磁场的磁感强度B相垂直，然后线圈的平面很快地转到与B的方向水平。此时从冲击电流计中测得电荷值$q = 4.0\times10^{-5}C$。问此均匀磁场的磁感强度B的值为多少？

答案：0.05T

2、动生电动势和感生电动势

【必备知识点】

（1）、导线段 ab 相对于恒定磁场运动时，可沿导线积分求出动生电动势

$$\varepsilon = \int_a^b (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}$$

在该电动势作用下，导线内的自由电子将沿$(-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$方向运动，导致导线两端出现等量异号电荷累积而产生电势差. 上式中

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

为引起电动势的，作用在单位正电荷上的非静电力（洛伦兹力）.

（2）、当回路闭合时，动生电动势为

$$\varepsilon = \oint_C (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

（3）、变化的磁场在其周围空间激发感生电场, 感生电动势等于感生电场$\boldsymbol{E}_\mathrm{k}$沿任意闭合回路的线积分，即

$$\varepsilon = \oint_C \boldsymbol{E}_\mathrm{k}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$与$\boldsymbol{E}_\mathrm{k}$在方向上遵从左手螺旋关系（即与右手螺旋关系相反）.

（4）、感生电场不同于静电场，它的电场线是闭合的，是有旋场. 如果考虑与感生电场同时存在于空间中的有势电场$\boldsymbol{E}_\mathrm{p}$，那么总电场可以表示为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\mathrm{k} + \boldsymbol{E}_\mathrm{p}$$

而有势场环流为零，即

$$\oint_C \boldsymbol{E}_\mathrm{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

故有

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式是静电场环路定理的推广；稳恒情况下，它回到静电场的环路定理.

（5）、必须明确电动势和电势差是两个截然不同的概念. 电动势由非静电力产生，这里是由$\boldsymbol{E}_\mathrm{k}$产生的，它与积分路径有关，且对闭合回路可以不等于零. 因此，谈两点的电动势没有物理意义，即不能说 a、b 两点的感应电动势，只能说 ab 路径的感应电动势，它与 ab 路径的几何形状有关. 电势差由$\boldsymbol{E}_\mathrm{p}$产生，与积分路径无关，是对两点定义的，完全由两点的位置决定.

【常见题型与详解】

（1）、 长度为L的铜棒，以距端点r处为支点，并以角速度ω绕通过支点且垂直于铜棒的轴转动. 设磁感强度为$\boldsymbol{B}$的均匀磁场与轴平行，求棒两端的电势差.

解题思路：切割磁感线的铜棒产生的动生电动势，将会驱使铜棒中的自由电子朝与动生电动势方向相反的方向运动并积累，电子积累产生的电势差，将阻碍电子在动生电动势下的移动，最终达到平衡，此时，路径的动生电动势与两端点的电势差大小相等，方向相反，令距轴r的断电为 A，另一端点为 B，, 取铜棒的转轴为原点，则棒两端的电势差为

$$U_{AB}=-\varepsilon_{AB}=-\int_{AB}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})d\boldsymbol{l}=-\int_{-r}^{L-r}-\omega lBdl=\frac{1}{2}\omega BL(L-2r)$$

当$L>2r$时，端点A处的电势较高.

【例题】

1、一列火车的一节闷罐车厢宽2.5m，长9.5m，高3.5m，车壁由金属薄板制成. 在地球磁场的竖直分量为$0.62\times10^{-4}\mathrm{T}$ 的地方，这个闷罐车以$60\mathrm{km\cdot h^{-1}}$的速度在水平轨道上向北运动.

（1）这个闷罐车两边之间的金属板上的感应电动势是多少？（$2.6\times10^{-3}\mathrm{V}$）

（2）若考虑车两边积累的电荷所引起的电场，问车内静电场是多少？（0）

（3）若将两边当做两个非常长的平行板处理，那么每一边上的面电荷密度是多少？（$9.1\times10^{-15}\mathrm{C\cdot m^{-2}}$）

2、一导体盘的半径为a，厚度为δ，电导率为σ，将其放在相对盘轴z对称的磁场$\boldsymbol{B}$中

$$\boldsymbol{B}=B_0(t)\hat{\boldsymbol{z}}\quad(0\le\rho\le R);\quad \boldsymbol{B}=0\quad(\rho>R),\qquad R<a$$

（1） 确定空间的感应电场（$E_\varphi=-\frac{R^2}{2\rho}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}$，$\rho\ge R$；$E_\varphi=-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}$，$\rho\le R$）；

（2） 确定导体盘的电流密度（$\boldsymbol{j}=\sigma E_\varphi\hat{\boldsymbol{\phi}}$）；

（3） 证明盘耗散的总功率为

$$P=\frac{\pi\delta\sigma R^4}{8}\left(\frac{dB_0}{dt}\right)^2(1+4ln\frac{a}{R})$$

3、自感和互感

【必备知识点】

1、自感

（1）、当一个回路中的电流随时间变化时，穿过回路本身的磁通量也发生变化，在回路中产生电动势，这种现象叫自感现象，所产生电动势叫自感电动势 。

（2）、自感系数：

$\Phi=LI$

其中，L 为比例系数，仅与回路本身的形状、大小尺寸及周围磁介质有关，称为回路的自感系数。

（3）、自感电动势：

$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

说明：a. 负号：楞次定律的数学表述

b.自感具有使回路电流保持不变的性质

c.L 与线圈的形状、大小、匝数、以及周围磁介质的分布情况有关。若回路周围不存在铁磁质，与 I 无关

2、互感

（1）、由于一个线圈中的电流发生变化而在其邻近线圈上引起感应电流的现象称为互感现象，在互感现象中产生的电动势为互感电动势。

（2）、设由 I_1 产生的、通过线圈 2 的磁通量为 Φ_{21} ，由 I_2 产生的、通过线圈 1 的磁通量为 Φ_{12} 则：

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1 \qquad \Phi_{12} = M_{12}I_2$$

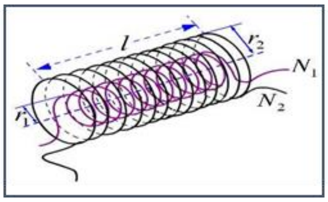
（3）、比例系数 M_{21} 和 M_{12} 与两个线圈的几何形状、相对位置及周围的磁介质有关。且 $M_{21}=M_{12}=M$ 称为两个线圈的互感系数。

（4）、互感电动势：

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \qquad \varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

【常见题型与详解】

例题、 有两个长度均为 l,半径分别为 r_1 和 r_2（ $r_1<r_2$ ）,匝数分别为 N_1 和 N_2 的同轴长直密绕螺线管.求它们的互感



解：分析：先设某一线圈中通以电流 I，然后求出另一线圈的磁通量Φ，最后利用公式求出互感。

设半径为 r_1 的线圈中通有电流 I_1 ， 则：$B_1 = \mu_0\frac{N_1}{l}I_1 = \mu_0 n_1 I$

则穿过半径为 r_2 的线圈的磁通匝数为：$\psi = N_2\Phi_{21} = N_2B_1(\pi r_1^2) = n_2 lB_1(\pi r_1^2)$

代入B_1计算得：$\psi = N_2\Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l(\pi r_1^2)I$

即：$M_{12} = \dfrac{N_2\Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l(\pi r_1^2)$

【例题】

一长直螺线管,单位长度上的匝数为n，有一半径为r的圆环放在螺线管内，环平面与管轴垂直，求螺线管与圆环的互感系数。 $M = \dfrac{\Phi}{I} = \mu_0 n\pi r^2$

5、磁场的能量 磁场能量密度

【必备知识点】

1、对于自感为L的线圈来说，当其电流为I时，磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

2、以螺线管为例：

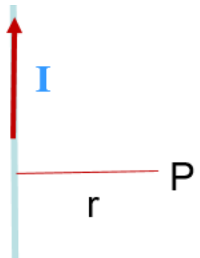
$L = \mu n^2 V, B = \mu nI$ (V 是磁场分布的整个空间)

$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 VI^2 = \frac{1}{2\mu}(\mu nI)^2 V = \frac{B^2}{2\mu}V$

其磁场能量密度为：$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{\mu H^2}{2}$（与电场能量密度结合记忆）

【常见题型与详解】

1、有一通有电流I的无限长导线，求距离该导线垂直距离为r的P点的磁能密度。



解：$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$\omega = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$

【例题】

1、一无限长直导线，截面各处的电流密度相等，总电流为I，试证：每单位长度导线内所储存的磁能为$\mu I^2/16\pi$。

答案：在单位长度导线内的磁感强度为：$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

$$W_m = \int dW_m = \int_0^R \frac{B^2}{2\mu} dV = \int_0^R \left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} r^2\right) \cdot 2\pi r dr = \mu I^2/16\pi$$

2、一个直径为0.01m，长为0.10m的厂址密绕螺旋管，共1000匝线圈，总电阻为7.76Ω. 问：

(1) 如果把线圈接到电动势$\varepsilon = 2.0$V的电池上，电流稳定后，线圈中所储存的磁能是多少？

(2) 磁能密度是多少？

答案：(1) 3.28×10^{-5}J；(2) 4.17 J/m^3

6、位移电流　电磁场基本方程的积分形式

【必备知识点】

1、 位移电流 全电流 安培环路定理

位移电流：$I=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=I_D$（电流变化等效为一种电流）

全电流安培环路定理：

$$\oint_L H\cdot dl=I_{传导}+\int_s \frac{\partial D}{\partial t}\cdot dS$$

全电流：$I_{全}=I_c+I_d$

注：传导电流与位移电流

相同点：a、都是激发磁场

b、激发的磁场是有旋磁场

c、磁场与电流方向满足右手螺旋

不同点：传导电流：a、运动电荷激发磁场

b、产生焦耳热

c、只存在与导体

位移电流：a、变化的电场激发的磁场

b、无焦耳热产生

c、存在于真空、导体与电介质

2、电磁场 麦克斯韦电磁场方程的积分形式

a、电场性质-静电场中的高斯定理：$\oint_s D\cdot dS=\Sigma q_0$

b、磁场性质-磁场中的高斯定理：$\oint_s B\cdot dS=0$

c、变化电场与磁场的关系：

$$\oint_L H\cdot dl=I_c+\frac{d\Phi}{dt}=\int_s\left(j_c+\frac{\partial D}{\partial t}\right)\cdot dS$$

d、变化磁场和电场的关系：

$$\oint_L E\cdot dl=-\frac{d\Phi}{dt}=-\int_s\frac{\partial B}{\partial t}\cdot dS$$

麦克斯韦方程组：

a、 电场高斯定理：

$\oint_s D\cdot dS=\Sigma q_i$

静电场是有源场、感应电场是涡旋场

b、 磁场高斯定理：

$\oint_s B\cdot dS=0$

传导电流、位移电流产生的磁场都是无源场

c、 电场环路定理：

$$\oint_L E \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

静电场是保守场,变化磁场可以激发涡旋电场

d、 全电流安培环路定理：

$$\oint_L H \cdot dl = \int_s (j_c + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS$$

传导电流和变化电场可以激发涡旋磁场

【例题】

麦克斯韦方程组为：

A、$\oint_s D \cdot dS = \Sigma q_i$　　　　B、$\oint_L E \cdot dl = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$

C、$\oint_s B \cdot dS = 0$　　　　D、$\oint_L H \cdot dl = \int_s (j_c + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS$

判断下列结论包含于或等效于哪一个方程式

（1）、电荷总伴随有电场　　（A）

（2）、静电场是保守场　　（B）

（3）、磁感线是无头无尾的　　（C）

（4）、变化的磁场一定伴随有电场　　（B）

（5）、感生电场是有旋场　　（B）

（6）、变化的电场总伴随有磁场　　（D）

（7）、电场线的头尾在电荷上　　（A）

九、振动

1、简谐振动 振幅 周期和频率 相位

【必备知识点】

(1)简谐振动

由$kx = -ma$这一最基本的力学方程可以导出$(\sqrt{\frac{k}{m}})^2x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$,

为书写方便，令$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，即$\omega^2x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$

解这个微分方程得到 x 满足的方程：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

由此也可以求导获得速度与加速度的方程：

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \qquad a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

由此也能看出： $v_{max} = \omega A$ $\qquad a_{max} = A\omega^2$

(2)振幅

简谐振动物体离开平衡位置最大位移的绝对值

$$A = x_{max}$$

(3)周期和频率

三角函数是周期函数，因此简谐运动是周期性的，由振动方程，可以看出

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

频率则指 1 秒内这运动经过了几次周期，恰与周期定义相反，因此：

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 单位：赫兹（Hz）

(4)相位

弹簧振子任意时刻的运动状态，都取决于$\omega t + \varphi$的取值，这个值就叫做相位。 与初速度类似，$t = 0$时的相位就叫初相，也就是φ

(5)A 和φ的确定

初始条件：物体在 t=0 时的位移x_0和速度v_0

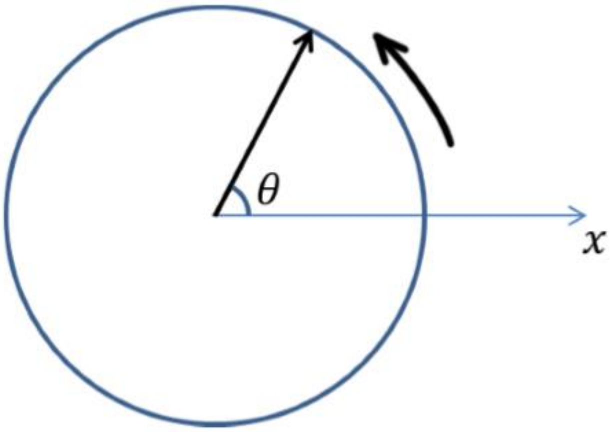
由式：$x_0 = A\cos\varphi$ $\qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi$

解得：$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ $\qquad \tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$

2、旋转矢量

【必备知识点】

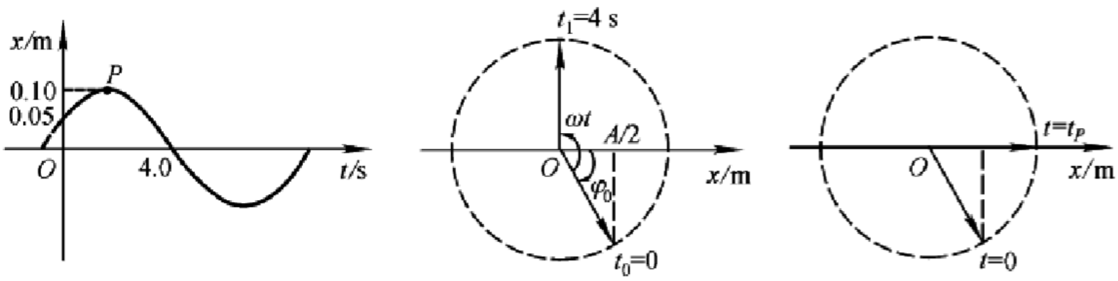
旋转矢量：自原点 O 出发以振幅 A 为模，以ω为转速作逆时针旋转形成的矢量。如图：



圆的半径对应振幅 A，运动的角速度对应ω，t=0 时与 x 轴的夹角为初相位，矢量端点的线速度为振动速度。那么，这圆周运动的x方向上的运动分量就是简谐振动。它的位移、速度、加速度，完全等于这个圆周运动的位移、速度、加速度在x上的分量（也就是乘以关于相位的三角函数）。特别注意，速度的方向：上半圆时振动方向向下，下半圆时振动方向向上。在知道振动曲线 一点上的速度方向以及位移大小后，就可以通过旋转矢量法轻松求出振动方程。

【例题】

1、某振动质点的 x-t 曲线如图（a）所示，试求：（1）振动方程（2）点 P 对应的相位



分析：由已知运动方程画振动曲线和由振动曲线求运动方程是振动中常见的两类问题．本题 就是要通过 x－t 图线确定振动的三个特征量 A、ω和φ_0，从而写出运动方程．曲线最大幅 值即为振幅 A；而ω、φ_0通常可通过旋转矢量法或解析法解出，一般采用旋转矢量法比较方便。

解：（1）质点振动振幅 A＝0.10m．而由振动曲线可画出t_0＝0 和t_1＝4s 时旋转矢量，如图（b）所示。由图可见初相$\varphi_0=-\frac{\pi}{3}$（或$\varphi_0=\frac{5}{3}\pi$），而由$\omega(t_1-t_0)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$得$\omega=\frac{5}{24}\pi$，则

运动方程为$x=0.10\cos(\frac{5}{24}\pi t-\frac{\pi}{3})$(m)

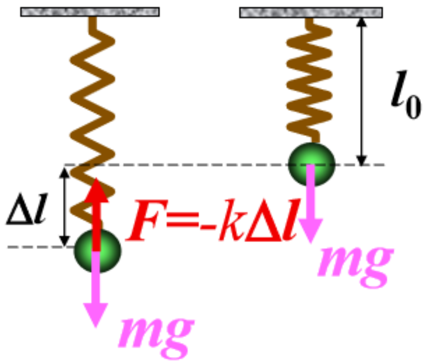
（2）图（a）中点 P 的位置是质点从$\frac{A}{2}$处运动到正向的端点处。对应的旋转矢量图如图

（c）所示。当初相取$\varphi_0=-\frac{\pi}{3}$时，点 P 的相位为$\varphi_p=\varphi_0+\omega\left(t_p-0\right)=0$（如果初相取

成$\varphi_0=\frac{5}{3}\pi$，则点 P 相应的相位应表示为$\varphi_p=\varphi_0+\omega\left(t_p-0\right)=2\pi$

2、一上端固定的弹簧原长为$l_0=50cm$, 下端挂一质量为 m=100g 的砝码，当砝码静止时，弹簧长为 60cm，若将砝码向上推，使弹簧回到原长，然后突然放手，砝码开始上下运动。

(1)证明砝码的上下运动为简谐振动(2)求振动的圆频率，频率和振幅(3)设从放手开始计算时间，写出位移、速度对时间的函数关系。



解：取 x 轴垂直向下，以弹簧的平衡位置为坐标原点。

设弹簧的劲度系数为 k,平衡时弹簧的伸长量为Δl

则：mg-kΔl=0　　　k=9.8N/m

起始位置在$x_0=-\Delta l$,运动到 x 时，弹簧的伸长量为（x+Δl），则$F_{弹}=-k(x+\Delta l)$

(1) $F_{合力}=mg-k(x+\Delta l)=-kx$为简谐振动

(2) $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=9.9rad/s$　　$\nu=\frac{\omega}{2\pi}$=1.58Hz　　$T=\frac{1}{\nu}=0.63s$

再由初始条件$x_0=-0.1\text{m}$　$v_0=0$得：$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.1m$　　$\varphi=\arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$=π

(3) $x=A\cos(\omega t+\varphi)=0.1\cos(9.9t+\pi)$

$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$=0.99sin(9.9t)　$m\bullet s^{-1}$

3、单摆和复摆

【必备知识点】

(1)单摆：质量为 m 的小球用细线悬挂，球在小角度（<5^0）摆动。

复摆：任意形状的刚体被支撑在无摩擦的水平轴 O 上，做小角度(<5^0)自由摆动，这样的系统叫做复摆。

三种振动方程的对比：

	简谐振动	单摆运动	复摆运动
振幅 A	x_{max}	最大摆角φ	最大摆角φ
ω计算	$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$	$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$
周期 T	$\frac{2\pi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$\frac{dx(d\theta)}{dt}$	速度	角速度	角速度

4、简谐振动的能量

【必备知识点】

1、弹簧振子是一个的理想模型：弹簧本身没有质量，连接的物块可以看作质点，系统没有 能量损耗（无摩擦）。

2、弹簧振子系统机械能守恒：由于系统中只有保守力弹力对物块做功，系统机械能守恒，势能和动能不断转换，系统满足关系式（A 为振幅，E_k为动能，E_p为弹性势能，ω为角频率，k 为弹簧劲度系数，φ为初相位，m 为物块质量）

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t+\varphi)$$

【例题】一个单摆在空气中振动，振幅逐渐减小，下列叙述中正确的是（）

A、后一时刻的动能一定小于前一时刻的动能

B、后一时刻的势能一定小于前一时刻的势能

C、后一时刻的机械能一定小于前一时刻的机械能

D、单摆振动能量不变，机械能守恒

答案：C(解题思路：联系了实际，存在空气阻力，机械能不守恒，机械能减少。)

5、简谐运动的合成

【必备知识点】

1、 两个同一直线上同频率简谐运动的合成

两个运动方程分别为：$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ $x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

合成运动为：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$其中：

$$x=x_1+x_2 \quad A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

结论：两个同一直线同频率简谐运动合成后仍为简谐运动。

（1）、相位差$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$时

$A=A_1+A_2$ **相互加强**

（2）、相位差$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$时

$A=|A_1-A_2|$ **相互削弱**

（3）、一般情况时

$A_1+A_2>A>|A_1-A_2|$

2、 多个同一直线同频率简谐运动的合成

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

....

$x_n = A_n \cos(\omega t + \varphi_n)$

合运动：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ （$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$）

3、同一直线上不同频率简谐运动的合成（了解）

$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t = A_1 \cos 2\pi \nu_1 t$

$x_2 = A_2 \cos \omega_2 t = A_2 \cos 2\pi \nu_2 t$

合运动：$x = (2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t) \cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t$

4、两个相互垂直的同频率简谐运动的合成（了解）

$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

质点运动轨迹：$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$

【常见题型与详解】

例、两个同方向简谐振动，周期相同，振幅为 A_1=0.05m，A_2=0.07m，组成一个振幅为 A=0.1044m 的简谐振动，求两个分振动的相位差。

解：分析：该题为第一种形式的合成

故根据 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ 得：

$\cos(\Delta\varphi) = (A^2 - A_1^2 - A_2^2)/2A_1A_2 = 0.50$

$\Delta\varphi = 60^\circ$

十、波动

1、机械波的几个概念

【必备知识点】

1.首先不能混淆振动和波动！

波动是振动的传播过程。振动是激发波动的波源。

2.机械波：机械振动在弹性介质中的传播，机械波的传播需有传播振动的介质。

特点：能量传播，反射，折射，干涉，衍射。

产生条件：(1)波源；(2)弹性介质.

注意：波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播!!

3.横波：质点振动方向与波的传播方向相垂直的波。

纵波：质点振动方向与波的传播方向互相平行的波。

4.波长λ：沿波的传播方向，两个相邻的、相位差为2π的振动质点之间的距离，即一个完整波形的长度。

周期 T：波前进一个波长的距离所需要的时间.

频率ν：周期的倒数，即单位时间内波动所传播的完整波的数目，$\nu=\frac{1}{T}$

波速u：波动过程中，某一振动状态（即振动相位）单位时间内所传播的距离（相速）。

$$u=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu \qquad \lambda=\frac{u}{\nu}=Tu$$

注意：周期或频率只决定于波源的振动

波速只决定于媒介的性质

5.波线：表示波的传播方向的射线（波射线）

波面：相位相同的点组成的面（同相面）

波阵面：某时刻波到达的各点所构成的面（波前）

【常见题型与详解】

例：在室温下，已知空气中的声速$u_1=340m/s$，水中的声速$u_2=1450m/s$，求频率为200Hz 和 2000Hz 的声波在空气中和水中的波长各为多少？

解题思路：此类型题目应用基本公式求解即可，而单位往往被忽略导致错误，答题千万注意题目所给单位。

解：由$\lambda=\frac{u}{\nu}$，频率为 200Hz 和 2000Hz 的声速在空气中的波长

$$\lambda_1=\frac{u_1}{v_1}=\frac{340m\cdot s^{-1}}{200Hz}=1.7m,\lambda_2=\frac{u_1}{v_2}=\frac{340m\cdot s^{-1}}{2000Hz}=0.17m$$

在水中的波长

$$\lambda_1'=\frac{u_2}{v_1}=\frac{1450m\cdot s^{-1}}{200Hz}=7.25m\ ,\lambda_2'=\frac{u_2}{v_2}=\frac{1450m\cdot s^{-1}}{2000Hz}=0.725m$$

2、平面简谐波的波函数

【必备知识点】

1、基本物理量：波长λ、波速u、周期T、频率ν、角频率ω、振幅A、初相位φ、相位差$\Delta\varphi$、波程差Δx

2、基本关系：$\lambda=uT=\frac{u}{v}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}$，$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$

3、 波动方程最常见的形式：$y = A\cos[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)]$（若波沿$Ox$轴负方向运动，则$y =$

$A\cos[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)]$）

【常见题型与详解】

1、 波源作简谐运动，其运动方程$y = 4.0\times10^{-3}\cos(240\pi t)$，它所形成的波以30m/s的速度沿一直线传播。（1）求波的周期及波长；（2）写出波动方程。

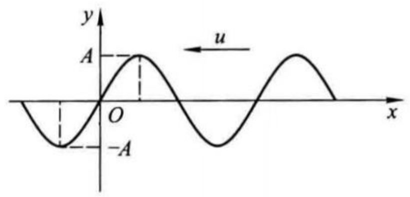
解：(1)依题可知：$\omega = 240\pi/s$，可得:$T=\frac{2\pi}{\omega}=8.33\times10^{-3}s, \lambda = uT = 0.25m$

(2)利用比较一般形式法，可知：$A = 4.0\times10^{-3}m$，$\varphi_0 = 0$

故$y = 4.0\times10^{-3}\cos(240\pi t - 8\pi x)$

【例题】

1、一平面简谐波，沿x轴负方向传播，角频率为ω，波速为u, 设$t = T/4$时刻的波形如图所示，则该波的表达式为（　　　）



(A) $y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\pi\right]$

(B) $y = A\cos[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)-\frac{\pi}{2}]$

(C) $y = A\cos[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)-\frac{\pi}{2}]$

(D) $y = A\cos[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\pi]$

答案：D

2、 波源作简谐运动，周期为0.02s，若该振动以100m/s的速度沿直线传播，设$t = 0$时，波源处的质点经平衡位置向正方向运动。求：（1）距离波源15.0m和5.0m两处质点的运动方程和初相位；（2）距离波源分别为16.0m、17.0m的两质点之间的相位差。

答案：

（1）、$y_{15} = A\cos(100\pi t - 15.5\pi)$ $y_5 = A\cos(100\pi t - 5.5\pi)$（初相位取$-\pi/2$）

$\varphi_{15} = -15.5\pi$ $\varphi_5 = -5.5\pi$

（2）、$\Delta\varphi = \pi$

3. 波的能量　能流密度

【必备知识点】

1、 波动能量的传播

取体积为 dV 的小块，易知其动能$dE_k = \frac{1}{2}v^2dm = \frac{1}{2}\rho v^2 dV = \frac{1}{2}\rho(\omega A)^2 sin^2(\omega t+\varphi)dV$

其弹性势能与动能完全相同，即$dEp = dEk$, 对于这一小块的能量，易知其能量密度为总能量除以体积，即$W=\frac{dE}{dV}$　　因此有能量密度公式：$W = \rho(\omega A)^2 sin^2(\omega t+\varphi)$

平均能量密度，为单位密度一个周期的函数平均值$\overline{w} = \frac{\int_0^T W dt}{T} = \frac{1}{2}\rho(\omega A)^2$

2、 能流和能流密度

若这列波以波速 u 传播，则经过时间 dt ，波的体积会增加 dV ，能量也会增长。 在平均值上，有$dE = \overline{w}dV = \overline{w}Sdl = \overline{w}Sudt$ 相当于时间dt内，流入了$\overline{w}Sudt$这么多的能量。因此

定义P为能流的话，就有

$P = wSu = \rho(\omega A)^2 Su\ sin^2(\omega t+\varphi)$

$\bar{p} = \bar{w}Su = \frac{1}{2}\rho(\omega A)^2 Su$ （单位：瓦特，功率单位）

好比电流有电流密度，能流也有能流密度（能量则好比电荷）。用 I 表示能流密度的话

$$\mathrm{I} = \frac{\bar{p}}{S} = \bar{w}\mathrm{u} = \frac{1}{2}\rho(\omega A)^2 u$$

4、惠更斯原理

【必备知识点】

1、 惠更斯原理：介质中波动传播到的各点都可以看作是发射子波的波源，而在其后的任意时刻，这些子波的包络就是新的波前。

意义：已知任意时刻波前的位置⟹用几何作图的方法确定下一时刻波前的位置⟹进而确 定波的传播方向。

局限：惠更斯原理只能确定传播方向，不能确定能量大小。

概念： **波阵面**：波传播时最前面的一个波面，也叫波前。

子波：以波上各点为振源振动产生的波。

包络线：包住全部子波波阵面的线。

2、 波的衍射：波在传播过程中遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播。

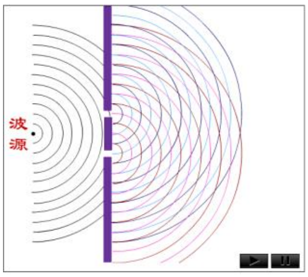
3、 波的干涉

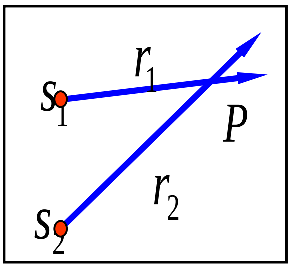
（1）、波的叠加原理

独立性：几列波相遇之后， 仍然保持它们各自原有的特征（频率、波长、振幅、振动方向等）不变，并按照原来的方向继续前进，好象没有遇到过其他波一样。

叠加性：在相遇区域内任一点的振动，为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和

（2）、波的干涉：频率相同、振动方向平行、相位相同或相位差恒定的两列波相遇时，使某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象，称为**波的干涉现象**。





波的相干条件： a、频率相同

b、振动方向平行

c、相位相同或相位差恒定

波源振动 $y_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ $y_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

点 P 的两个分振动 $y_{1p} = A_1\cos(\omega t+\varphi_1 - 2\pi\frac{r_1}{\lambda})$

$$y_{2p} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - 2\pi \frac{r_2}{\lambda})$$

干涉： $y_p = y_{1p} + y_{2p} = A\cos(\omega t + \varphi)$

其中： $\tan\varphi = \dfrac{A_1 \sin(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \sin(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1 \cos(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \cos(\varphi_2 - \frac{2\pi r_1}{\lambda})}$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

讨论：当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi \quad k = 0,1,2,\cdots$ 时

$A = A_1 + A_2$ **振动始终加强**

当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi \quad k = 0,1,2,\cdots$ 时

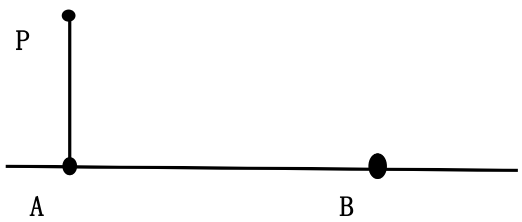
$A = |A_1 - A_2|$ **振动始终减弱**

当 $\Delta\varphi =$ 其他 时

$$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$$

【常见题型与详解】

例题、A、B 两点为同一介质中两相干波源，其振幅皆为 5cm，频率皆为 100Hz，但当 A 为波峰时，点 B 恰为波谷。设波速为 10m/s，试写出由 A、B 发出的两列波传到点 P 时干涉的结果。已知：AB=20m,AP 垂直与 AB 且 AP=15m



解：解题思路：BP=$\sqrt{AP^2 + AB^2}$=25m　　λ=u/v=0.1m　　$\varphi_A - \varphi_B = \pi$

$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi \times (BP - AP)/\lambda = -201\pi$

此时合振幅最小，又因为两波源振幅相同，所以合振幅为零。

5、驻波

【必备知识点】

1、驻波产生的条件

（1）两波相干（2）振幅、频率、振动方向相同（3）两波的传播方向相反

2、驻波的特点

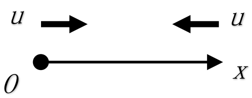
（1）有波形，却无波形传播（无相位，能量传播）

（2）各质点在分段上振动，但振幅不等

（3）各分段上振动相位相同，相邻两分段的振动相位相反

3、驻波方程

$$y_1 = A\cos 2\pi\left(vt - \frac{x}{\lambda}\right)$$



$$y_1 = A\cos 2\pi\left(vt - \frac{x}{\lambda}\right)$$

将两式相加，和差化积，解得$y = 2\mathrm{A}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi vt$

其中合振幅等于$\left|2\mathrm{A}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$

4、波腹

振幅最大的点称为波腹

$$\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 1$$

$$x = \pm k\frac{\lambda}{2} \qquad k = (0,1,2)$$

5、波节

振幅为零的点为波节

$$\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 0$$

$$x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad k = (0,1,2)$$

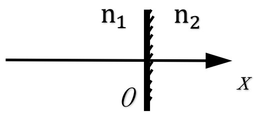
相邻波腹（节）的距离为 $\frac{\lambda}{2}$ ，相邻的波腹和波节距离为 $\frac{\lambda}{4}$

6、相位跃变

（1）产生条件：机械波由波密介质入射到波疏介质，会在反射处形成波节并发生相位跃变（如波在固定点反射）；若机械波由波密介质入射到波疏介质，会在反射处形成波腹，不发生相位跃变（如波在自由端反射）

（2）相邻两波节之间质点振动同相位，任一波节两侧振动相位相反，在波节处产生 π 的相位跃变。

7、驻波的界面情况



$n_1 > n_2$ 波密到波疏

界面上是波腹

$n_1 < n_2$ 波疏到波密

界面上是波节

【常见题型与详解】

题中给出一个驻波方程，让选择它是由哪两个反向行波组成的。

解题思路：利用和差化积的方法，将四个选项依次算出。

【例题】

（2009 年第 5 题）若在弦线上的驻波表达式是$y = 0.20\sin(2\pi x)\cos(20\pi t)$.则形成该驻波的

两个反向进行的行波为：（ ）

A、$y_1=0.10\cos\left[2\pi(10t-x)+\frac{1}{2}\pi\right]$,　　$y_2=0.10\cos\left[2\pi(10t+x)+\frac{1}{2}\pi\right]$,

B、$y_1=0.10\cos[2\pi(10t-x)-0.50\pi]$,　　$y_2=0.10\cos[2\pi(10t+x)+0.75\pi]$,

C、$y_1=0.10\cos\left[2\pi(10t-x)+\frac{1}{2}\pi\right]$,　　$y_2=0.10\cos\left[2\pi(10t+x)-\frac{1}{2}\pi\right]$,

D、$y_1=0.10\cos[2\pi(10t-x)+0.75\pi]$,　$y_2=0.10\cos[2\pi(10t+x)+0.75\pi]$,

利用和差化积的公式

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

可求出 C 满足题干，但要注意题目中给的是 sin 函数，算出来的 cos 函数要进行转化。

6、多普勒效应

【必备知识点】

（1）、以v_D表示观察者相对介质的速度，以趋近波源为正；以v_S表示波源相对介质的速度，以趋近观察者为正；介质中的波速为V；观察者感受到的频率为ν'，波源频率为ν. 则

$$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{V+v_D}{V-v_S}$$

v_S和v_D可以分别取为零，分别表示波源静止观察者运动，以及波源运动观察者静止的情况.

（2）、对于真空中的电磁波，由于光速c与参考系无关，多普勒效应公式中只出现观察者对波源的相对速度v（取相互靠近时为正），则按照狭义相对论，多普勒效应公式为

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

其中，$\beta=\frac{v}{c}$.

（3）来自遥远星系的光，其光谱与地面光源的光谱相比，显著地偏于低频方面，这被称为红移. 一般认为红移是一种多普勒效应.

（4）波源的速度超过波速时，波面的包络面呈圆锥状，称为马赫锥. 这种情况下波的传播不会超过运动物体本身，马赫锥面是波的前缘，其外没有扰动波及. 这种形式的波动叫做冲击波或激波. 令马赫锥的半顶角为a，则

$$\sin a=\frac{V}{v_S}$$

它的倒数，即$\frac{v_S}{V}$叫做马赫数.

冲击波到达的地方，空气压强突然增大，足以损伤耳膜和内脏，打碎窗玻璃，甚至摧毁建筑物. 这种现象称为声爆或声震.

船速超过水面上水波的波速时，激起的以船为顶端的V形波，称为艏波.

带电粒子在介质中以超过介质中光速的速度运动时，会激发锥形的电磁辐射，称为切连柯夫辐射.

【常见题型与详解】

一警车以$25\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速度在静止的空气中行驶，假设车上警笛的频率为800Hz. 求：

（1）　静止站在路边的人听到警车驶近和离去的警笛声波频率；

（2） 如果警车追赶一辆速度为$15\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$的客车，客车上的人听到警笛声波频率是多少？（假设空气中声速为$u=330\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$）

解题思路：直接套用多普勒效应公式得

$$\nu_1'=\nu\frac{V}{V-v_S}=800\times\frac{330}{330-25}\approx 865.57\mathrm{Hz}$$

$$\nu_2'=\nu\frac{V}{V-(-v_S)}=800\times\frac{330}{330+25}\approx 743.66\mathrm{Hz}$$

$$\nu_3'=\nu\nu\frac{V+(-v_D)}{V-v_S}=800\times\frac{330-15}{330-25}\approx 826.23\mathrm{Hz}$$

【例题】

（1）、一机车汽笛频率为650Hz，机车以54km/h的速度驶向观察者，问观察者听到的声音频率是多少？设空气中声速为340m/s. （680Hz）

（2）、甲火车以43.2km/h的速度行驶，其上一乘客听到对面驶来的乙火车鸣笛声的频率为$\nu_1=512\mathrm{Hz}$；当这一火车过后，听其鸣笛声的频率为$\nu_2=428\mathrm{Hz}$. 求乙火车上的人听到乙火车鸣笛的频率ν_0和乙火车对地面的速度u. 设空气中声波的速度为340m/s.

（$\nu_0=468\mathrm{Hz};\quad u=66.4\mathrm{km/h}$）

7、平面电磁波

【必备知识点】

（1）、介质中电磁波的传播速度

$$u=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

（2）、电磁波中电场强度，磁场强度和矢径三个矢量互相垂直，并成右手螺旋系

$$E=E_0\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)=E_0\cos(\omega t-kx)$$

$$H=H_0\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)=H_0\cos(\omega t-kx)$$

（3）电磁波的特性：

1. 电磁波是横波.

2. $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$同相位. 即任何时刻、任何地点$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$都是同步变化的.

3. $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的数值成正比. $\frac{E}{H}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ 或 $\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$

4. 真空中电磁波的传播速度等于真空中的光速（$2.998\times10^8 m\cdot s^{-1}$）

（4）以电磁波形式传播的能量叫做辐射能，记电磁波的能流密度矢量为$\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

对平面电磁波，能流密度的平均值为

$$\bar{S}=\frac{1}{2}E_0H_0$$

【常见题型与详解】

太阳电磁辐射在地球轨道处的平均能流密度为$\bar{S}=1.94\mathrm{cal}\cdot\mathrm{cm}^{-2}\cdot\mathrm{min}^{-1}=1.36\times10^3\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot s^{-1}$，称为太阳常数. 求地球轨道处的电场强度振幅.

解题思路：取$\varepsilon=\varepsilon_0, v=c$，得

$$E_0=\sqrt{\frac{2\bar{S}}{\varepsilon_0 c}}=\left(\frac{2\times1.36\times10^3}{8.85\times10^{-12}\times3\times10^8}\right)^{\frac{1}{2}}=1.01\times10^3(\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1})$$