第一节　点估计

一、点估计问题的提法

二、估计量的求法

三、小结

一、点估计问题的提法

设总体 X 的分布函数形式已知, 但它的一个或多个参数为未知, 借助于总体 X 的一个样本来估计总体未知参数的值的问题称为**点估计问题**.

例1 在某炸药制造厂, 一天中发生着火现象的次数 X 是一个随机变量,假设它服从以 $\lambda > 0$ 为参数的泊松分布,参数 λ 为未知, 设有以下的样本值, 试估计参数 λ.

着火次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
发生 k 次着火的天数 n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\Sigma=250$

解 因为 $X \sim \pi(\lambda)$, 所以 $\lambda = E(X)$.

用样本均值来估计总体的均值 $E(X)$.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{6} k n_k}{\sum_{k=0}^{6} n_k} = \frac{1}{250}(0\times 75 + 1\times 90 + 2\times 54 + 3\times 22 + 4\times 6 + 5\times 2 + 6\times 1) = 1.22.$$

故 $E(X)=\lambda$ 的估计为 1.22.

点估计问题的一般提法

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 的形式为已知，θ 是待估参数．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应的一个样本值．

点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来估计未知参数 θ.

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为 θ 的估计量.
$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 θ 的估计值.

通称估计，简记为 $\hat{\theta}$.

例2 在某纺织厂细纱机上的断头次数 X 是一个随机变量，假设它服从以 $\lambda > 0$ 为参数的泊松分布，参数 λ 为未知，现检查了150只纱锭在某一时间段内断头的次数，数据如下，试估计参数 λ.

断头次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
断头 k 次的纱锭数 n_k	45	60	32	9	2	1	1	150

解 先确定一个统计量 $\overline{X}$，再计算出 $\overline{X}$ 的观察值 $\overline{x}$，把 $\overline{x}$ 作为参数 λ 的估计值.

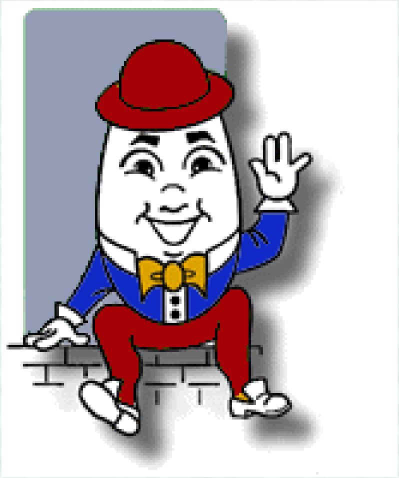
$\overline{x} = 1.133$. λ 的估计值为 1.133.

二、估计量的求法

由于估计量是样本的函数, 是随机变量, 故对不同的样本值, 得到的参数值往往不同, 如何求估计量是关键问题.

常用构造估计量的方法: (两种)

矩估计法和最大似然估计法.



1. 矩估计法

设 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，或 X 为离散型随机变量，其分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，

其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为待估参数，

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，

假设总体 X 的前 k 阶矩存在，

且均为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数，即

$$\mu_l = E(X^l) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^l f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\mathrm{d}x \quad (X\text{为连续型})$$

或 $$\mu_l = E(X^l) = \sum_{x\in R_X} x^l p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k), \quad (X\text{为离散型})$$

其中 R_X 是 x 可能取值的范围， $l = 1,2,\cdots,k$

因为样本矩 $A_l = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ 依概率收敛于相应的

总体矩 $\mu_l \ (l = 1, 2,\cdots, k)$,

样本矩的连续函数依概 率收敛于相应的总体矩的连续函数.

矩估计法的定义

用样本矩来估计总体矩,用样本矩的连续函数来估计总体矩的连续函数,这种估计法称为**矩估计法**.

矩估计法的具体做法: 令 $\mu_l = A_l,\quad l = 1, 2, \cdots, k.$

这是一个包含 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的方程组,

解出其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$.

用方程组的解 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 分别作为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量,这个估计量称为矩估计 量.

矩估计量的观察值称为矩估计值.

例3 设总体 X 在$[0,\theta]$上服从均匀分布,其中θ $(\theta > 0)$未知,$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体 X 的样本,求θ的估计量.

解 因为 $\mu_1 = E(X) = \dfrac{\theta}{2}$,

根据矩估计法, 令 $\dfrac{\hat{\theta}}{2} = A_1 = \overline{X}$,

所以 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 为所求θ的估计量.

例4 设总体 X 在$[a,b]$上服从均匀分布,其中a, b未知,$(X_1, X_2,\cdots, X_n)$是来自总体X的样本,求a, b的估计量.

解 $\mu_1 = E(X) = \dfrac{a+b}{2}$,

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4},$$

令 $\dfrac{a+b}{2} = A_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$$\frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

即 $\begin{cases} a+b=2A_1, \\ b-a=\sqrt{12(A_2-A_1^2)}. \end{cases}$

解方程组得到a, b的矩估计量分别为

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2},$$

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

例5 设总体 X 服从几何分布,即有分布律

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots),$$

其中 $p\ (0<p<1)$未知,$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体 X 的样本,求 p的估计量.

解 $$\mu_1=E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k p(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p},$$

令 $\dfrac{1}{\hat{p}}=A_1=\overline{X}$,

所以 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$ 为所求 p的估计量.

例6 设总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 都存在,且有 $\sigma^2 > 0$, 但 μ 和 σ^2 均为未知, 又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本, 求 μ 和 σ^2 的矩估计量.

解 $\mu_1 = E(X) = \mu,$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2,$$

$$令 \begin{cases} \mu = A_1, \\ \sigma^2 + \mu^2 = A_2. \end{cases}$$

解方程组得到矩估计量分别为 $\hat{\mu} = A_1 = \overline{X},$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

上例表明:

总体均值与方差的矩估计量的表达式不因不同的总体分布而异.

例 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 未知, 即得 μ,σ^2 的矩估计量

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

一般地,

用样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 作为总体 X 的均值的矩估计,

用样本二阶中心矩 $B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 作为总体

X 的方差的矩估计.

2. 最大似然估计法

(1) 设总体 X 属离散型

似然函数的定义

设分布律 $P\{X=k\}=p(x;\theta)$, θ 为待估参数, $\theta\in\Theta$,

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的样本,

则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布律为 $\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$.

又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值.

则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 取到观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的概率，

即事件 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$ 发生的概率为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta,$$

$L(\theta)$称为样本似然函数.

最大似然估计法

得到样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时,选取使似然函数 $L(\theta)$

取得最大值的 $\hat{\theta}$ 作为未知参数 θ 的估计值,

即 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta).$

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

这样得到的 $\hat{\theta}$ 与样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有关,记为

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 参数 θ 的最大似然估计值,

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 参数 θ 的最大似然估计量.

(2) 设总体 X 属连续型

似然函数的定义

设概率密度为 $f(x;\theta), \theta$ 为待估参数， $\theta \in \Theta$,

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本,

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合密度为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$.

又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值.

则随机点 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 落在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的邻域(边长分别为 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 的 n 维立方体)内的概率近似地为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\mathrm{d}x_i$，

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),$$

$L(\theta)$ 称为样本的似然函数.

若 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\theta)$.

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 参数 θ 的最大似然估计值,

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 参数 θ 的最大似然估计量.

最大似然估计法是由费舍尔引进的.

费舍尔

求最大似然估计量的步骤:

(一) 写出似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

或 $$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);$$

(二) 取对数

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta)$$ 或 $$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta);$$

(三) 对 θ 求导 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$, 并令 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0}$, 对数似然方程

解方程即得未知参数 θ的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

最大似然估计法也适用于分布中含有多个未知参数的情况. 此时只需令

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L=0,\qquad i=1,2,\cdots,k.}$$ 对数似然方程组

解出由 k 个方程组成的方程组 ,即可得各未知参数 θ_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例7 设 $X \sim B(1,p)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的一个样本,求p的最大似然估计量.

解 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为相应于样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一个样本值,

X的分布律为 $P\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1,$

似然函数 $L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0,$$

解得 p 的最大似然估计值 $$p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$$

p 的最大似然估计量为 $$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}.$$

这一估计量与矩估计量是相同的.

例8 设 X 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一个样本, 求 λ 的最大似然估计量.

解 因为 X 的分布律为

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad (x = 0,1,2,\cdots,n)$$

所以 λ 的似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)},$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}(x_i!),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0,$$

解得 λ 的最大似然估计值 $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$

λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$

这一估计量与矩估计量是相同的.

例9 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 为未知参数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 X 的一个样本值, 求 μ 和 σ^2 的最大似然估计量.

解 X 的概率密度为

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

X 的似然函数为

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right] = 0, \\[2ex] -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0, \end{cases}$$

由$\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right] = 0$解得 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$,

由$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$解得

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

故μ和σ^2的最大似然估计量分别为

$\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. 它们与相应的矩估计量相同.

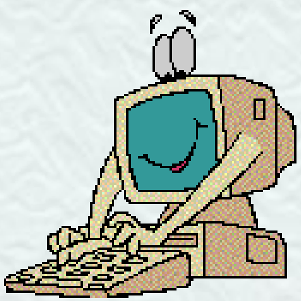
例10 设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布,其中 a, b 未知, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值,求 a,b 的最大似然估计量.

解 记 $x_{(l)} = \min(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$x_{(h)} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

X 的概率密度为

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



因为$a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$等价于$a \le x_{(l)}, x_{(h)} \le b$,

作为a, b的函数的似然函数为

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{(l)},\ b \ge x_{(h)}, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是对于满足条件 $a \le x_{(l)},\ b \ge x_{(h)}$的任意$a,b$有

$$L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{(h)}-x_{(l)})^n},$$

即似然函数 $L(a,b)$ 在 $a = x_{(l)}$，$b = x_{(h)}$ 时

取到最大值 $(x_{(h)} - x_{(l)})^{-n}$,

a, b 的最大似然估计值

$$\hat{a} = x_{(l)} = \min_{1\le i\le n} x_i, \qquad \hat{b} = x_{(h)} = \max_{1\le i\le n} x_i,$$

a, b 的最大似然估计量

$$\hat{a} = \min_{1\le i\le n} X_i, \qquad \hat{b} = \max_{1\le i\le n} X_i .$$

最大似然估计的性质

设 θ 的函数 $u=u(\theta), \theta\in\Theta$ 具有单值反函数 $\theta=\theta(u), u\in\mathcal{U}$. 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

证明 因为 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计值,

所以 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$,

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值,

由于 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}=\theta(\hat{u})$,

故 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta(\hat{u}))=\max\limits_{u\in\mathcal{U}}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta(u))$,

于是 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$是$u(\theta)$的最大似然估计.

此性质可以推广到总体分布中含有多个未知参数的情况.

如例9中σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,

函数 $u=u(\sigma^2)=\sqrt{\sigma^2}$ 有单值反函数 $\sigma^2=u^2(u\geq 0)$,

故标准差 σ 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

三、小结

两种求点估计的方法: $\begin{cases} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{cases}$

在统计问题中往往先使用最大似然估计法, 在最大似然估计法使用不方便时, 再用矩估计法.

似然函数 $L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta)$

或 $L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta);$