概率论与数理统计总复习

事件间的关系与事件的运算

1. 事件间的关系

① 包含关系：事件*A*发生必然导致*B*发生，记为$A \subset B$

② 相等关系：$A \subset B$且$B \subset A$，记为***A*=*B***。

③ 积事件：事件*A*与*B*同时发生，记为***AB***。

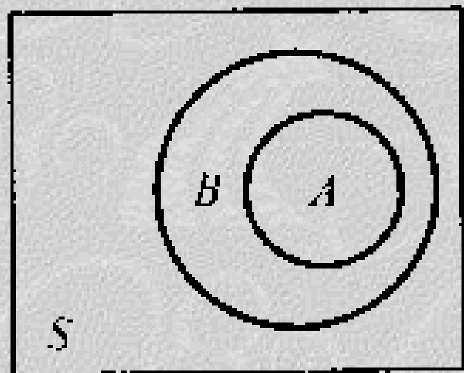
④ 和事件：事件*A*或*B*至少有一个发生，记为$A \cup B$

⑤ 差事件：事件*A*发生而*B*不发生，记为***A*−*B***。

⑥ 互斥事件：事件*A*、*B*不能同时发生，即 $AB = \phi$ ，又称*A*、*B*为互不相容事件。

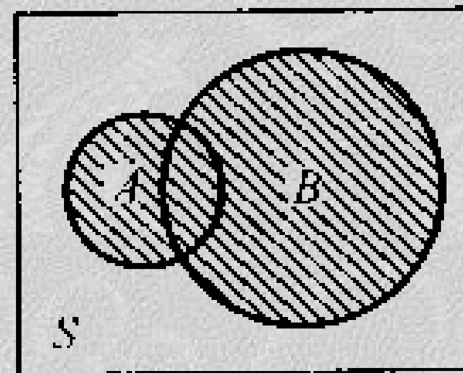
⑦ 逆事件：“*A*不发生”这一事件称为*A*的逆事件，记为$\overline{A}$，*A*与$\overline{A}$又称为对立事件。

$$A\overline{A} = \phi, A \cup \overline{A} = S \Rightarrow \overline{A} = S - A$$



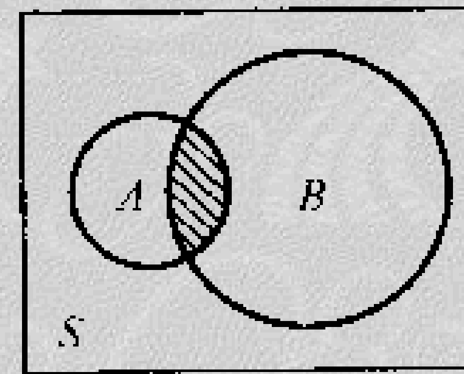
$A \subset B$

图 1－1



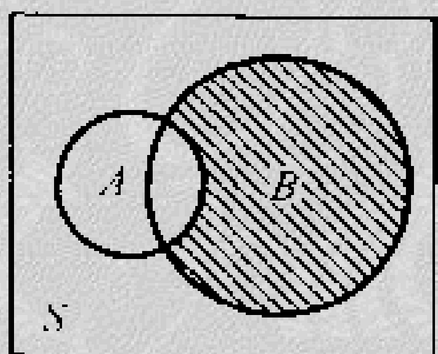
$A \cup B$

图 1－2



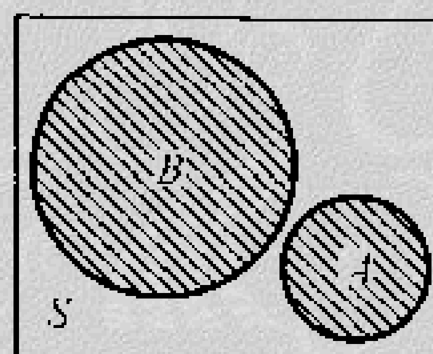
$A \cap B$

图 1－3



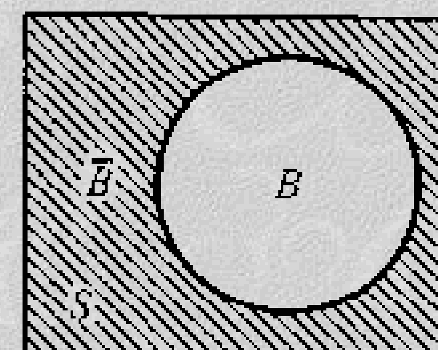
$B-A$

图 1－4



$A \cap B=\varnothing$

图 1－5



$B \cup \bar{B}=S, B \cap \bar{B}=\varnothing$

图 1－6

2. 事件的运算律

① 交换律： $A \cup B = B \cup A;\ AB = BA$

② 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$

$(AB)C = A(BC)$

③ 分配律： $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC);$

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

④ 对偶律（De Morgan德摩根律）：

$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B};\quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B};$

⑤ 减法： $A - B = A\overline{B}$

概率：做n次重复试验，事件A发生的次数记为n_A，当n很大时，若频率 n_A/n稳定在常数P附近，则称P为随机事件A发生的概率，记作$P(A)=P$。

$$f_n(A) \to P(A)(n \to \infty)$$

- **概率的公理化定义**：设E是随机试验，S是样本空间，对E的每个随机事件A，赋予一个实数$P(A)$，若它满足：

① **非负性**：$0 \le P(A) \le 1$

② **规范性**：$P(S)=1$，S为样本空间（必然事件）

③ **可列可加性**：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中 $A_i A_j = \phi, i \ne j$

则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

则称$P(A)$为事件A的发生**概率**。

概率的性质

1. 有限可加性：有限个两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$
2. $\overline{A}$ 是**A**的对立事件，则 $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
3. $A \subset B$ 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，当**A**，**B**互斥即 $AB = \phi$ 时 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. $P(\phi) = 0,\ P(S) = 1$
6. $P(A) \leq 1$

- 推广：$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

等可能概型（古典概型）

预备知识：排列、组合

1. **分类计数原理(加法原理)：** 设完成一件事有k类方法，每类分别有 $m_1, m_2, \cdots, m_k$种方法，则完成这件事情共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 种方法.
2. **分步计数原理(乘法原理)：** 设完成一件事有k个步骤，第一步有m_1种方法，…，第k步有 m_k种方法，则完成这件事情共有 $m_1 m_2 \cdots m_k$种方法.
3. **排列：** 从n个不同元素中取出m个元素，按一定次序排成一列.

   排列数： 从n个不同元素中取出m个元素的所有排列的个数记为A_n^m， $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

- **注：** $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$，$0! = 1$

4. **组合：**从n个不同元素中取出m个元素并成一组(与顺序无关).

组合数：从n个不同元素中取出m个元素的所有组合的个数，记为 C_n^m,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

等可能概型（古典概型）

1. 定义：具有以下性质的随机试验称为等可能概型

   ① 试验的样本空间的元素只有有限个

   ② 试验中每个基本事件发生的可能性相同

2. 等可能概型中事件概率的计算公式：

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

n为随机试验的总的结果数，即样本点的总数，k为事件A包含的结果数。

条件概率

1. **定义**：事件A已发生的条件下事件B发生的概率，称为**条件概率**，记为$P(B|A)$。

例 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正面的情况，设A={至少有一次为正面H}，B={两次掷出同一面}，求$P(B|A)$

解：样本空间$S=\{HH, HT, TH, TT\}$，$A=\{HH, HT, TH\}$，$B=\{HH, TT\}$。则可得：

$$P(B|A)=1/3$$

条件概率的计算公式：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{AB\text{中包含的基本事件}}{A\text{中包含的基本事件}}$$

乘法定理：设$P(A)>0$，则有$P(AB)=P(B|A)P(A)$

推广：$P(AB)>0$，则有$P(ABC)=P(C|AB)P(AB)$

$$= P(C|AB)\,P(B|A)P(A)$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为n个事件$(n \geq 2)$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$= P(A_n \mid A_1, A_2, \cdots A_{n-1})P(A_{n-1} \mid A_1, A_2, \cdots A_{n-2})\cdots P(A_2 \mid A_1)P(A_1)$$

全概率公式

- **划分**：设S为试验E的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为E的一组事件，若

  ① $B_iB_j=\phi, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$

  ② $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$

  则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间S的一个划分.

- 例 E：掷骰子观察点数

  $$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$

  $B_1=\{1,2,3\}$，$B_2=\{4,5\}$，$B_3=\{6\}$ 是S的一个划分

  $C_1=\{1,2,3\}$，$C_2=\{3,4\}$，$C_3=\{5,6\}$ 不是S的一个划分

全概率公式

- 定理：设随机试验E的样本空间为S，A为E的事件. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为S的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 则 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$ ，称之为全概率公式。

- 注：全概率公式给出我们一个用来计算在众多原因 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的作用下事件A发生概率的方法.（由因得果）

贝叶斯公式（由果溯因）

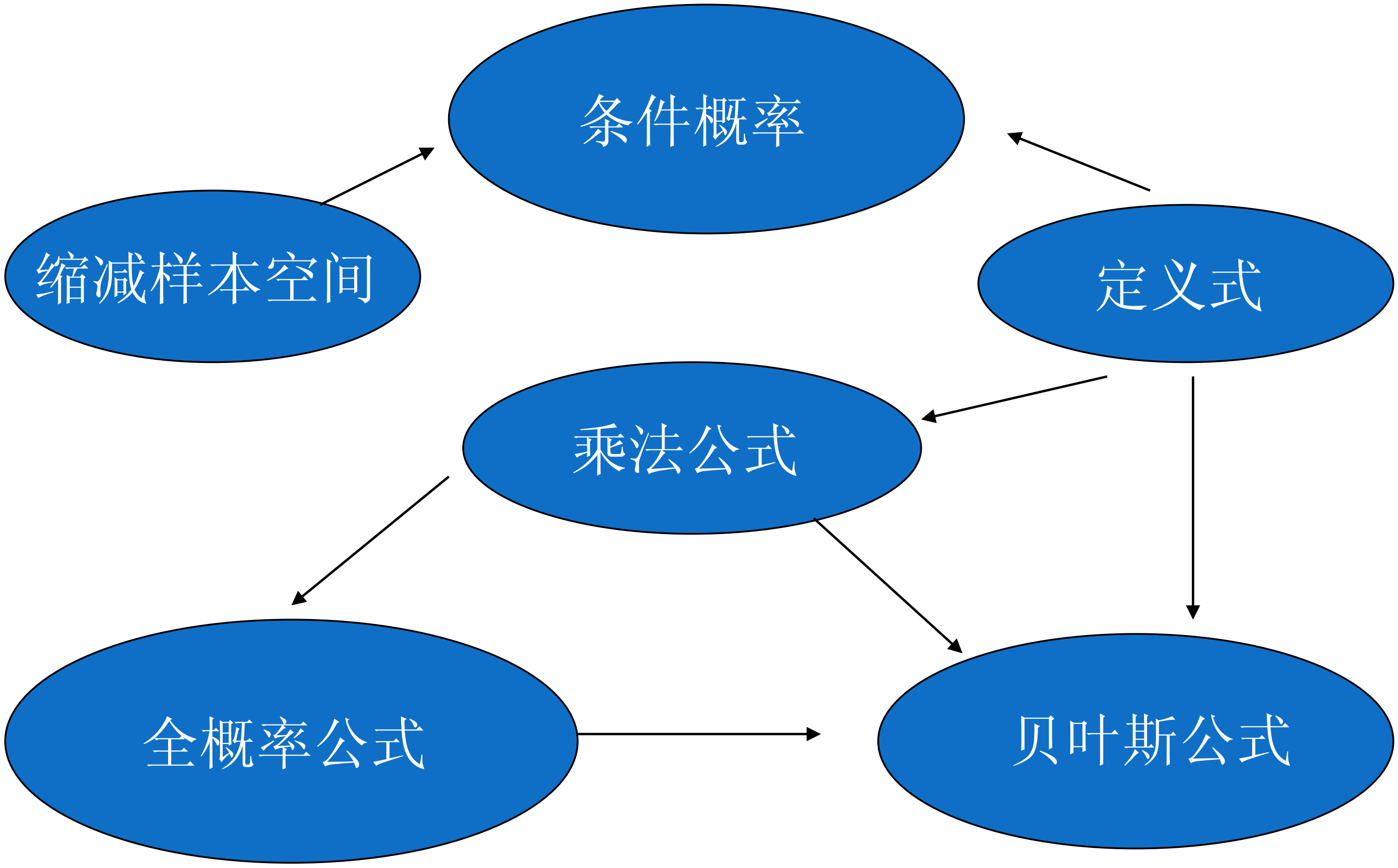
- 设E的样本空间为S，A为E的事件. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为S的一个划分，且$P(A)>0, P(B_i)>0. (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)}$$

为贝叶斯（**Bayes**）公式.

- 称 $P(B_i)$ 为先验概率；
- 称 $P(B_i\,|\,A)$ 为后验概率.

条件概率小结



独立性

- 独立事件：两事件A、B，A发生对B发生没有影响，B发生也对A没有影响，则称两事件相互独立. 即$P(A|B)=P(A)$ 且$P(B|A)=P(B)$，则$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$
- 例 抛甲，乙两枚硬币，A={甲出现正面H}，B={乙出现正面H}，问A，B同时发生的概率.
- 定理 四对事件 A,B; $\bar{A},B$; $A,\bar{B}$; $\bar{A},\bar{B}$; 中有一对相互独立，则另外三对也相互独立.
- 独立与互斥的区别：

  A，B相互独立：$P(AB)=P(A)P(B)$；

  A，B互斥：$P(AB)=0$。

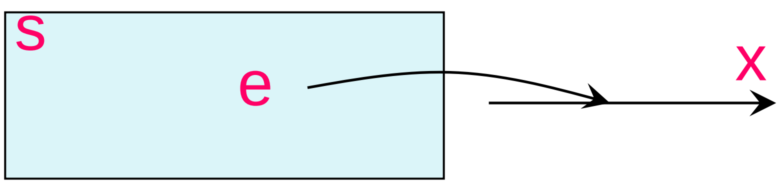
多个事件的独立

定义：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个随机事件，若对$2 \le k \le n$,

均有：$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right)$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立

- **定义** 随机试验的结果可以用一个实值变量表示，这个变量的取值是随机的，但又服从一定的统计规律性，这种变量称为随机变量，通常用X，Y，Z表示。
- **中心问题**：将试验结果数量化



X=f(e)—为S上的单值函数，X为实数

- 随机变量分为离散型和连续型：
  1. **离散型**：X的取值是有限个或可列无限个。
  2. **连续型**：X的取值是连续的。

分布律

$P\{X=x_k\}=p_k (k=1,2,\cdots)$ 称为离散型随机变量***X***的**分布律**，分布律可用列表的方式直观的表示出来

$\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

分布律（概率分布）

1、写出可能取值——即写出了样本点

2、写出相应的概率——即写出了每一个样本点出现的概率

三种重要的离散型随机变量

1. 两点分布，又称为(0−1)分布

- (0−1)分布的分布律为

X	0	1
p_k	1-*p*	*p*

- 也可以写为 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$
- 对随机实验，若样本空间只包括两个元素，即 $S=\{e_1,e_2\}$，则一定能在**S**上定义一个服从(0−1)分布的随机变量，令

$$X=\begin{cases}0 & e=e_1\\ 1 & e=e_2\end{cases}$$

- 例 抛硬币一次，定义随机变量**X**为出现正面的次数，则

$$X=\begin{cases}0 & \text{反面}\\ 1 & \text{正面}\end{cases}$$

X	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. 二项分布

- 随机试验E只有两个可能结果：A和$\overline{A}$，则称E为伯努利试验。设$P(A)=p\,(0<p<1)$, 则$P(\overline{A})=1-p$
- 将伯努利试验独立地重复进行n次，称为n重伯努利试验。
- X表示n重伯努利试验中事件A发生的次数，X所有可能取值k=0, 1, 2, ···, n。求$P\{X=k\}$
- $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\ , k = 0,1,2,\cdots,n$
- 记$q=1-p$，$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (q+p)^n = 1$
- 随机变量X服从参数为n, p的二项分布，记为$X \sim b(n, p)$
- 当n=1时，即为(0–1)分布。

3. 泊松分布(Poisson分布)

若随机变量X的概率分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots,\ \lambda>0$$

称X服从参数为λ的泊松分布，记 $X\sim\pi(\lambda)$

Poisson定理

设$\lambda>0$是一个常数，n是任意正整数，设 $np_n=\lambda$，则对于任一固定的非负整数k，有

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

二项分布与泊松分布有以下近似公式：

当$n \geq 20, p \leq 0.05$时，

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \text{其中}\ \lambda = np$$

当 $n \geq 100$，$np \leq 10$ 时近似公式近似效果更佳。

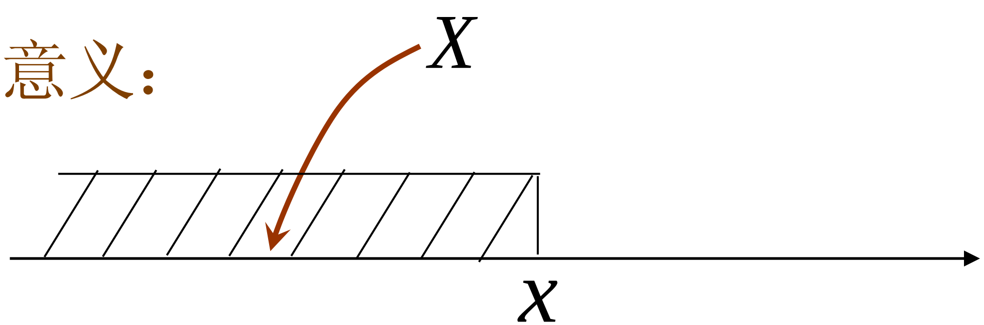
分布函数

定义： 设X为一个随机变量，x是任意实数，函数 $F(x)=P\{X\le x\}$ 称为随机变量X的概率分布函数，简称**分布函数**。

由分布函数的定义，有

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$F(x)$的几何意义：



注: 分布函数$F(x)$在x处的函数值表示x落在区间 $(-\infty, x]$ 上的概率。

分布函数

$F(x)$的性质：

(1) $0 \le F(x) \le 1, F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(2) $\boldsymbol{F(x)}$**是一个不减函数**

$\because \quad 0 \le P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

(3)对于离散型随机变量，若分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$

则其分布函数 $F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\}$

概率密度

定义：对于随机变量X的分布函数 $F(x)$，若存在非负的函数 $f(x)$，使对于任意实数 x，有：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

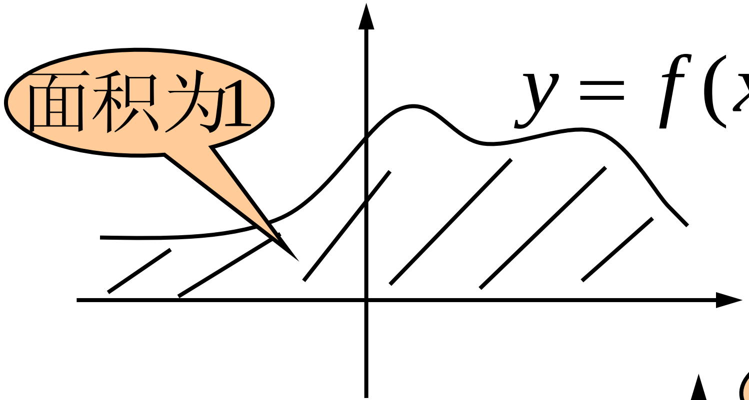
则称X为连续型随机变量，

其中$f(x)$ 称为X的概率密度函数，简称**概率密度**。

$f(x)$的性质：

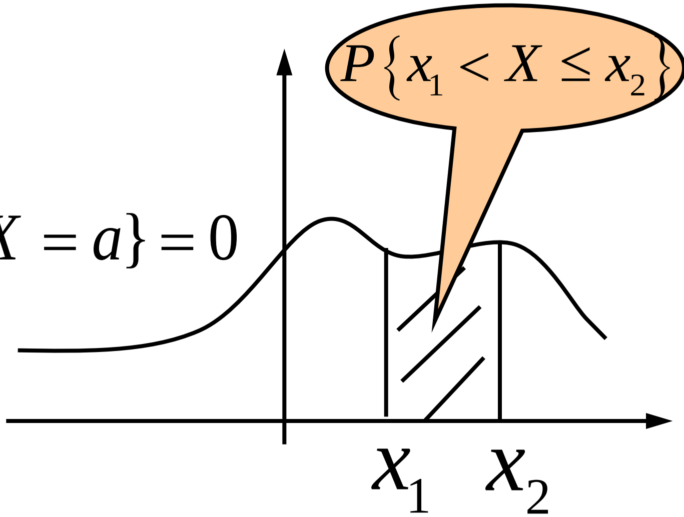
1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$



3) 对于任意的实数x_1，$x_2(x_2 > x_1)$

$$P\left\{x_1 < X \leq x_2\right\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \Rightarrow P\{X = a\} = 0$$



4) 在$f(x)$连续点x, $F'(x) = f(x)$

即在$f(x)$的连续点

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X \leq x+\Delta x\}}{\Delta x}$$

三种重要的连续型随机变量

1. 均匀分布

- **定义**：设连续型随机变量X具有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称X在区间(a, b)上服从**均匀分布**。记为$X \sim U(a,b)$

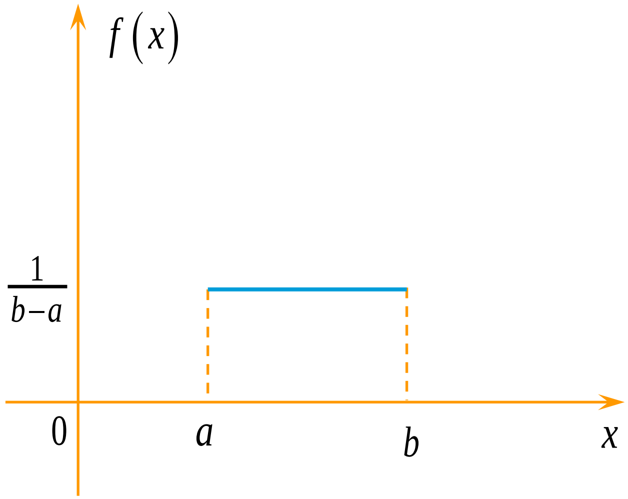
- **注**：X落在(a, b)上任一子区间内的概率只依赖于子区间的长度，而与位置无关。

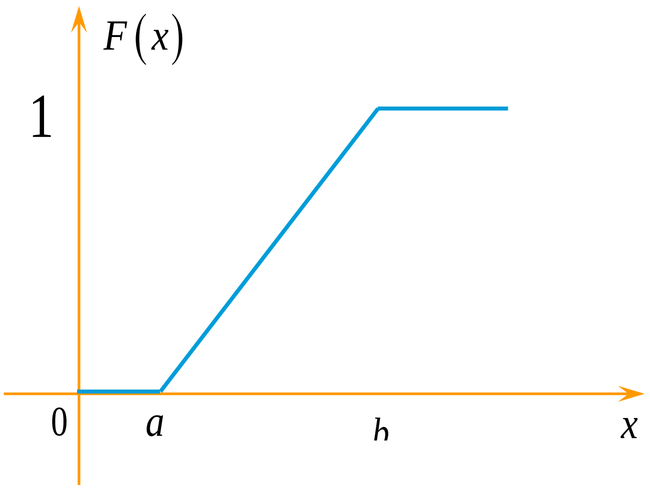
设 $a \le c < c+l \le b$

$$\Rightarrow P\{c < X < c+l\} = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{l}{b-a} \quad \text{----与}c\text{无关}$$

- 均匀分布的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$





2. 指数分布

- 定义：连续型随机变量**X**的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad(\theta>0)$$

称**X**服从参数为θ 的指数分布，记为$X\sim EP(\theta)$

- 指数分布的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\end{cases}\qquad(\theta>0)$$

三种重要的连续型随机变量

3. 正态分布

1. 定义：设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$为常数，则称X服从参数为μ,σ的正态分布（也称为Gauss分布），记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

2. $f(x)$图形的性质：

① 关于 $x=\mu$ 对称

结论：$\forall h>0, P\{\mu-h<x\le\mu\}=P\{\mu<x\le\mu+h\}$

② 当 $x=\mu$ 时，取得最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

③ σ固定，改变 μ，$f(x)$的图形不变，沿x轴平移

μ 固定，改变 σ，由最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$知，$\sigma$ 越小，图形越尖，X落在 μ 附近的概率越大。

④ $x\to\pm\infty$时，$f(x)\to 0$，即曲线以X轴为渐近线。

3. 分布函数$F(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

4. 标准正态分布

$\mu=0,\sigma=1$ 时，称**X**服从标准正态分布，$X\sim N(0,1)$

概率密度函数 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

分布函数 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

结论：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

$\Phi(x)$的函数值见标准正态分布表

例 $X\sim N(0,1)$，求 $P\{-2.01<X\leq 3.25\}$

5. 正态分布转变为标准正态分布

引理 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

结论：

I. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则它的分布函数，可写成：

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

II. $$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{\frac{x_1-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x_2-\mu}{\sigma}\}$$

$$=\Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$$

III. 正态分布的问题都可以通过线性变换转化为标准正态分布，然后查书中标准正态分布表得解

- 例 $X\sim N(1,4)$，求 $P\{0<X\le 1.6\}$

随机变量的函数的分布

问题提出：已知随机变量X的概率分布，且已知Y=g(X)， 求Y的概率分布。

1. **离散型**

离散型随机变量的函数分布律的求法：

1. 找出Y=g(X)的所有可能取值
2. 找出每个值对应的X取值，将对应概率相加

例 设随机变量X具有分布律

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

求 $Y=X^2$ 的分布律。

关键是找出Y的等价事件。

2. 连续型

连续型随机变量的函数分布的求法：

1. 求Y=g(X)的取值范围
2. 分段讨论
   ① 在取值范围外的y，$f_Y(y)=0$
   ② 在取值范围内的y，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=P\{X\le g^{-1}(y)\}=F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y)=\left(F_Y(y)\right)'=\left(F_X(g^{-1}(y))\right)'=f_X(g^{-1}(y))\cdot(g^{-1}(y))'$$

定理：设$X \sim f_X(x), -\infty < x < +\infty$，$g'(x) > 0$ (或$g'(x) < 0$)。$Y = g(X)$, 则Y具有概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$,

$h(y) = x \Leftrightarrow y = g(x)$

随机变量的数字特征

- 1. 期望的定义、定理、性质及求解
- 2. 方差的定义、性质及求解
- 3. 六个重要分布的数学期望和方差
- 4. 切比雪夫不等式

数学期望的定义

定义: 设离散型随机变量X的分布律为：$P(X=x_k)=p_k \quad k=1,2,\cdots$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$的和为随机变量$X$

的数学期望，记为$E(X)$,即 $\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k}$

定义: 设连续型随机变量X的概率概率为$f(x)$,若积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛（即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx<\infty$）

则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量X的数学期望，记为$E(X)$

即 $\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$

数学期望简称期望，又称均值。

定理

定理：设Y是随机变量X的函数：$Y=g(X)\left(g\text{是连续函数}\right)$，

- X是离散型随机变量，它的分布律为：

  $P(X=x_k)=p_k$，$k=1,2,\cdots$

  若$\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$绝对收敛，则有$\boxed{E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k}$

- X是连续型随机变量，它的概率密度为$f(x)$

  若$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$ 绝对收敛

  则有$\boxed{E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx}$

定理的重要意义在于我们求$E(Y)$时，不必算出Y的分布律或概率密度，而只要利用X的分布律或概率密度就可以了。

$E(X)$的性质

1. 设C是常数，则有$E(C)=C$

2. 设X是一个随机变量，C是常数，则有$E(CX)=CE(X)$

3. 设X,Y是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

将上面三项合起来就是：$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$

4. 设X,Y是相互独立的随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$

方差

定义：

设X是一个随机变量，若$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$存在，则称其为$X$的方差，记为$D(X)$或$Var(X)$，即$\boxed{D(X)=Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}}$

将$\sqrt{D(X)}$记为$\sigma(X)$,称为X的标准差或均方差，
它是与随机变量X具有相同量纲的量。

方差$D(X)$刻画了X取值的分散程度，它是衡量X取值分散程度的一个尺度。若X取值比较集中，则$D(X)$较小，反之，若X取值比较分散，则$D(X)$较大。

对于**离散型**随机变量X，其分布律为：$P(X=x_k)=p_k \quad k=1,2,\cdots$

$$\boxed{D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k}$$

对于**连续型**随机变量X，其概率密度为$f(x)$，

$$\boxed{D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx}$$

此外，利用数学期望的性质，可得方差得**计算公式**：

$$\boxed{D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$$

事实上，$D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}=E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\}$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

方差的性质

1. 设C是常数，则$D(C)=0$

2. 设X是随机变量，C是常数，则有$D(CX)=C^2D(X)$

3. 设X,Y是两个随机变量，

   则有$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

   特别，若X,Y相互独立，则有$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

   综合上述三项，设X,Y相互独立，a,b,c是常数，

   则$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)$

4. $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=C)=1$ 且$C=E(X)$

   $\Leftrightarrow X$以概率1取常数$C=E(X)$

独立的n个正态变量的线性组合仍服从正态分布：

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)\quad i=1,2,\cdots n$ 且它们相互独立

则它们的线性组合：

$$C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$
$$\sim N(C_0 + C_1\mu_1 + \cdots + C_n\mu_n, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \cdots + C_n^2\sigma_n^2)$$

$C_1, C_2 \cdots C_n$是不全为0的常数

如：$X \sim N(1,3)$，$Y \sim N(2,4)$且X, Y相互独立，

则$Z = 2X - 3Y \sim N(-4, 48)$

一般若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

6种常见分布的期望与方差

分布	分布律或密度函数	数学期望	方差
0－1分布	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1\text{-}p)$
二项分布$b(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$	np	$np(1\text{-}p)$
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$P(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $k=0,1,\ldots,$	λ	λ
均匀分布$U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $EP(\theta)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$	θ	θ^2
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2

定理 (切比雪夫不等式)

设X是随机变量，若$D(X)$存在，则对任何 $\varepsilon>0$，有

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

切比雪夫不等式的等价形式

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

注:

1. 切比雪夫不等式可用来估计不是服从正态分布的随机变量落在$E(X)$附近的概率。

2. 切比雪夫不等式的主要作用是进行概率论的理论研究。

样本及抽样分布

- 1.样本的定义（独立同分布）
- 2.统计量的定义和判别
- 3.统计学三大分布的定义和图形轮廓
- 4.三大分布的分位点定义

样本

- 总体：试验中全部可能的观察值（研究对象的全体，如一批灯泡），一个总体对应于一个随机变量*X*。
- 个体：每个可能观察值称为个体（组成总体的每个元素，如某个灯泡）
- 抽样：从总体*X*中抽取有限个个体对总体进行观察的取值过程。
- 随机样本：随机抽取的*n*个个体的集合$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，*n*为样本容量。
- 简单随机样本：满足以下两个条件的随机样本$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$
  1. 每个X_i与*X*同分布
  2. $X_1,X_2,\ldots,X_n$是相互独立的随机变量

[说明]：后面提到的样本均指简单随机样本。

统计量

- **统计量：** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体X的样本，则函数 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$如果不包含任何未知参数则称为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$的一个统计量。

简言之，样本的不含任何未知参数的函数。

思考题：

设在总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取样本(X_1, X_2, X_3)，其中μ已知，σ^2未知

指出在 (1) $X_1 + X_2 + X_3$ (2) $X_2 + 2\mu$ (3) $\max(X_1, X_2, X_3)$

(4) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{3} X_i^2$ (5) $|X_3 - X_1|$

哪些是统计量，哪些不是统计量，为什么？

答：只有(4)不是统计量。

常用的统计量

1. 样本平均值：$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
2. 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2} - n\overline{X}^2\right)$
3. 样本均方差：$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$
4. 样本***k***阶（原点）矩：$A_k = \overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ k}, k = 1, 2, \cdots$
5. 样本***k***阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k, k = 2, 3, \cdots$

统计学三大分布

定义：设随机变量$X_1,X_2,\cdots X_n$相互独立，$X_i\sim N(0,1)\ (i=1,2,\cdots,n)$

则称 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ (1)

服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$

自由度指(1)式右端包含的独立变量的个数

定义：设$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$,并且$X,Y$相互独立，

则称随机变量$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为n的t分布，记为$t\sim t(n)$

定义：设$U\sim\chi^2(n_1),V\sim\chi^2(n_2)$，且$U,V$独立，

则称随机变量$F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$服从自由度(n_1,n_2)的F分布，记为$F\sim F(n_1,n_2)$

其中n_1称为第一自由度，n_2称为第二自由度

χ^2分布的一些重要性质:

1. 设$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2)=n, D(\chi^2)=2n$

2. 设$Y_1 \sim \chi^2(n_1), Y_2 \sim \chi^2(n_2)$,且$Y_1, Y_2$相互独立，则有$Y_1+Y_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

性质2称为χ^2分布的可加性，可推广到有限个的情形:

设$Y_i \sim \chi^2(n_i)$,且$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$相互独立，则$\sum_{i=1}^{m} Y_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$

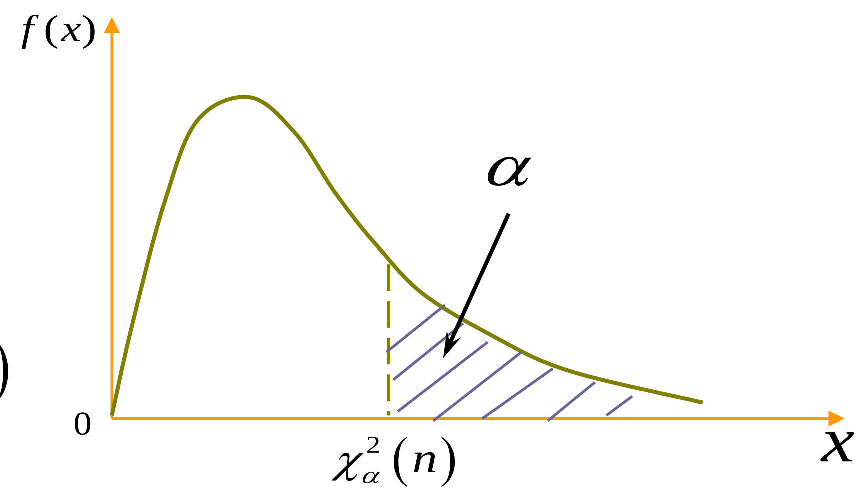
对给定的概率$\alpha, 0<\alpha<1$,

称满足条件$\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty} f(y)dy=\alpha$

的点$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的

上α分位点,上α分位点$\chi_\alpha^2(n)$

的值可查χ^2分布表.



χ^2分布的分位点

例: $\alpha=0.1, n=25 \quad \chi_{0.1}^{2}(25)=34.381$

t分布

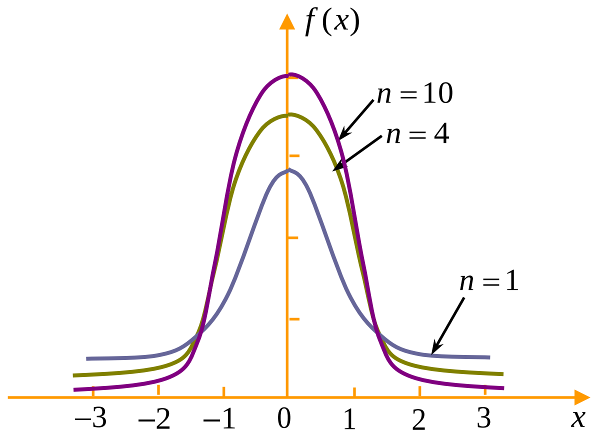
定义： 设$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,并且$X, Y$相互独立，

则称随机变量$t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为$n$的$t$分布，记为$t \sim t(n)$

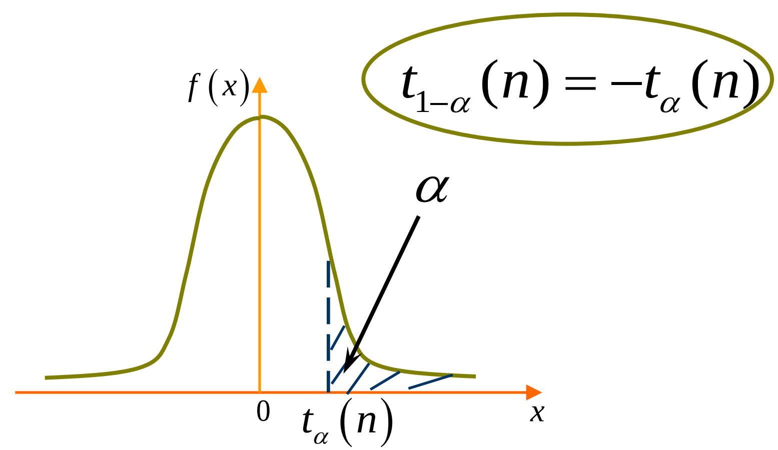
$t(n)$分布的概率密度为：$h(t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < t < +\infty$

对给定的α，$0<\alpha<1$,称满足条件$\int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)dt = \alpha$的点$t_\alpha(n)$

为$t(n)$分布的上α分位点。t分布的上α分位点可查t分布表



t分布的密度函数



t分布的分位点

F分布

定义： 设$U\sim\chi^2(n_1),V\sim\chi^2(n_2)$，且$X,Y$独立，

则称随机变量$F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$服从自由度(n_1,n_2)的F分布，记为$F\sim F(n_1,n_2)$

其中n_1称为第一自由度，n_2称为第二自由度

性质：$F\sim F(n_1,n_2)$,则$F^{-1}\sim F(n_2,n_1)$

$F(n_1,n_2)$分布的概率密度为：

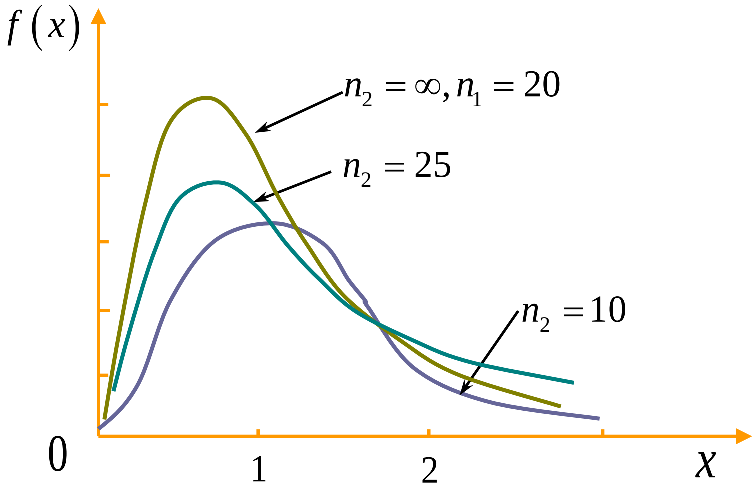
$$\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left[(n_1+n_2)/2\right](n_1/n_2)^{n_1/2}y^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)\left[1+(n_1y/n_2)\right]^{(n_1+n_2)/2}}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于给定的α，$0<\alpha<1$,称满足条件$\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty} f(x;n_1,n_2)dx=\alpha$的点$F_\alpha(n_1,n_2)$为$F(n_1,n_2)$分布的上$\alpha$分位点。$F_\alpha(n_1,n_2)$的值可查$F$分布表

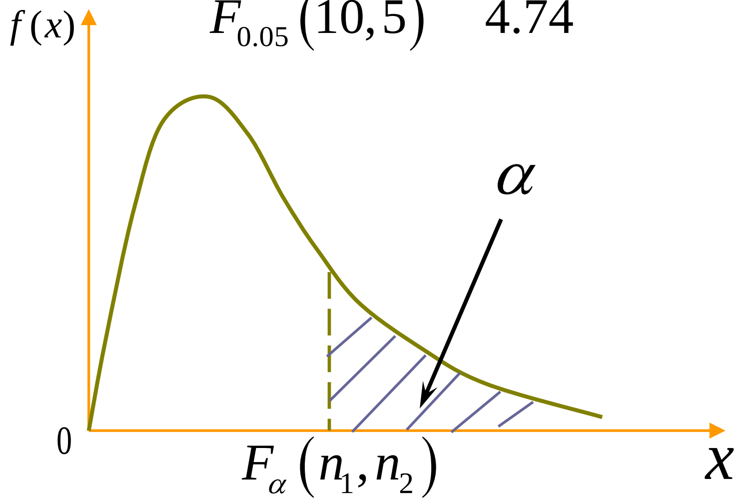
$$\boxed{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=[F_\alpha(n_2,n_1)]^{-1}}$$

例如： $F_{0.95}(5,10)$

$$=\frac{1}{F_{0.05}(10,5)}=\frac{1}{4.74}=0.211.$$



F分布的密度函数

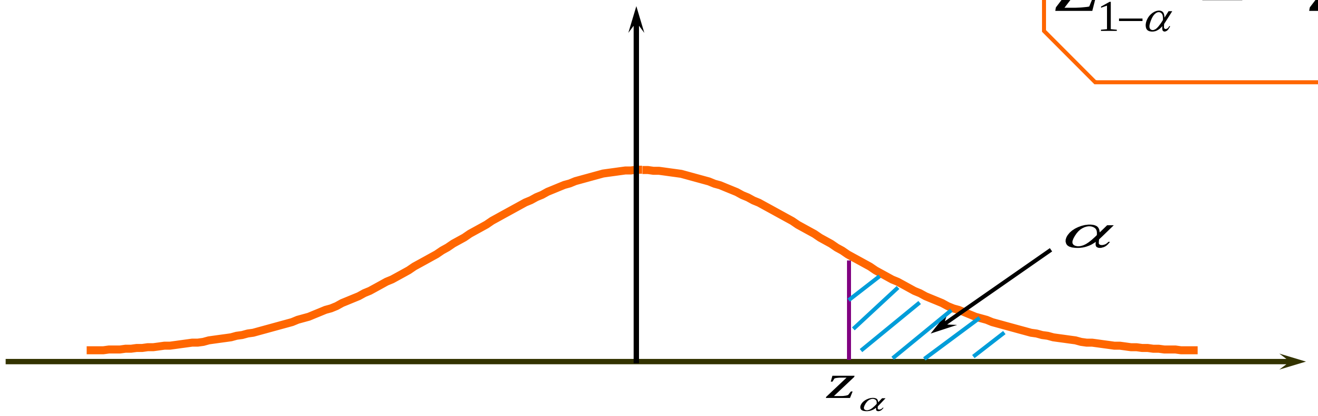


F分布的分位点

此外,设$X \sim N(0,1)$,若Z_α满足条件$P\{X > Z_\alpha\} = \alpha, 0 < \alpha < 1$

则称点Z_α为标准正态分布的上α分位点。

$$Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$$



参数估计

- 1. 矩估计法（三步法）
- 2. 最大似然估计法（三步法）
- 3. 估计量三大评选标准的定义及证明

  （无偏性、有效性、相合性）
- 4. 单个正态总体均值和方差的区间估计

矩估计法

设总体X的分布函数为$F\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$,$\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$是待估计的未知参数，假定总体$X$的$k$阶原点矩$E\left(X^k\right)$存在，

则有：$E\left(X^v\right)=\mu_v\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)\quad v=1,2,\cdots,k$,对于样本$X=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$,

其v阶样本矩是：$A_v=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^v\quad v=1,2,\cdots,k$

用样本矩作为总体矩的估计，即令：
$$\begin{cases}\mu_1\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_1\\ \mu_2\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_2\\ \qquad\vdots\\ \mu_k\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_k\end{cases}$$

解此方程即得$\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$的一个矩估计量$\left(\widehat{\theta_1,\theta_2,\cdots},\hat{\theta}_k\right)$

最大似然估计的求法

1. 单参数

① 写出似然函数 $L(\theta)$

② 求 $\hat{\theta}$，使得$L(\hat{\theta})$为$L(\theta)$的最大值，求法如下：

求使得方程 $L'(\theta)=0$的θ

又 $L(\theta)$与$\ln L(\theta)$在同一θ 处取得极值，因此，θ 的最大似然估计值可从方程$(\ln L(\theta))'=0$ 中求得

称 $(\ln L(\theta))'=0$ 为似然方程

最大似然估计法

2. 双参数

- 似然函数

$$L(\theta_1,\theta_2)=p\left(x_1;\theta_1,\theta_2\right)\cdot p\left(x_2;\theta_1,\theta_2\right)\cdots\cdots p\left(x_n;\theta_1,\theta_2\right)$$

- 似然方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2}=0\end{cases}$$

估计量的评选标准

对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价好坏？

通常用三条标准检验：<u>无偏性</u>，<u>有效性</u>，<u>相合性</u>

- ## 无偏性

定义：若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，满足$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的一个无偏估计量。

若$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta$，那么$\left|E\left(\theta\right)-\theta\right|$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\theta\right)=\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量

有效性

定义：设$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$是$\theta$的两个无偏估计，

如果$D\left(\hat{\theta}_1\right) \le D\left(\hat{\theta}_2\right)$，对一切$\theta \in \Theta$成立，

且至少对某一个$\theta \in \Theta$上式中的不等式成立，

则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

相合性

定义：设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，$\hat{\theta}$依概率收敛于θ,

即$\forall\varepsilon>0$，有：$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}=0$成立，

则称$\hat{\theta}$为θ的相合估计量或一致估计量

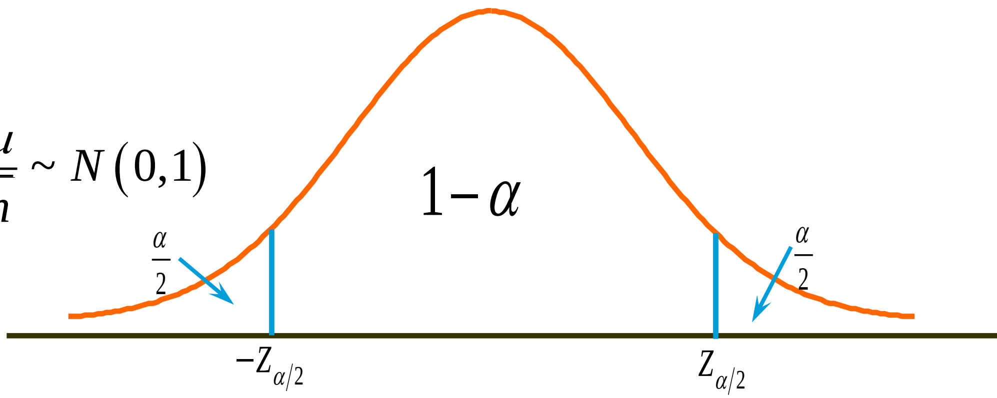
正态总体均值与方差的区间估计

单个正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的情形

$X_1, X_2, \cdots, X_n$来自$N\left(\mu,\sigma^2\right)$, $\bar{X}$和S^2分别为样本均值和方差,置信度为$1-\alpha$

1. 均值μ的置信区间

(1) σ^2已知时



$\bar{X}$是μ的无偏估计，由 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

有$P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < Z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$

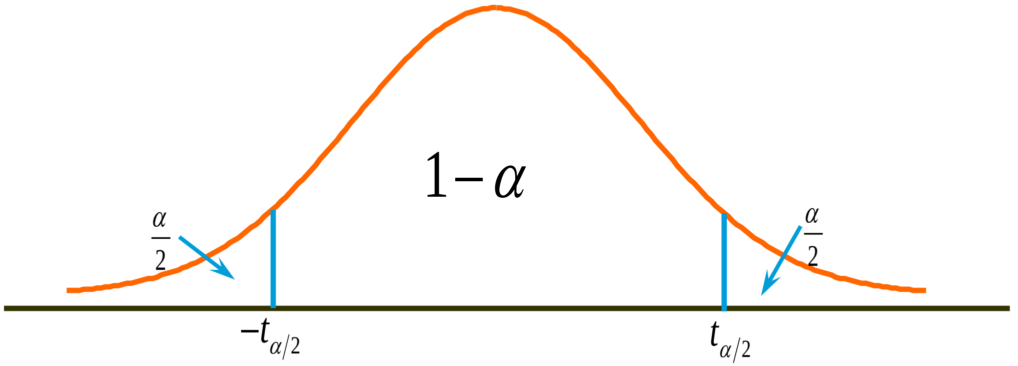
即$P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$

置信区间为：$\boxed{\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}, \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)}$

(2) σ^2未知时

有：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



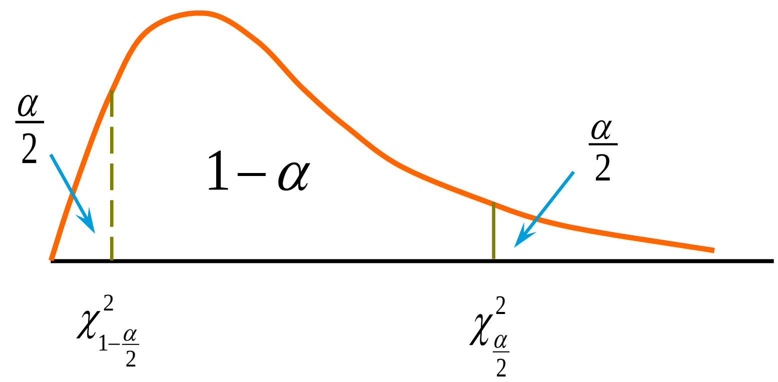
$$有P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$即P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

置信区间为：$\boxed{\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)}$

2. 方差σ^2的置信区间

设μ未知



有：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

有$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$

思考题：
均方差σ的置信度为1-α的置信区间是什么？

置信区间为：$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)}$

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限 (置信度$1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	W 的 分 布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu}=\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha}$ $\underline{\mu}=\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha}$
	μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\overline{\mu}=\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$ $\underline{\mu}=\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\underline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}+Z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}-Z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\underline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$

假设检验

- 1. 假设检验的定义
- 2. 假设检验的三步法
- 3. 单个正态总体均值和方差的假设检验统计量和拒绝域

问题：设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ已知，μ未知。给定 μ_0，问 $\mu=\mu_0$？

假设 H_0: $\mu=\mu_0$，H_1: $\mu \neq \mu_0$.

H_0 称为原假设(零假设)，H_1 称为备择假设(对立假设)。

通过某种方式确定常数k。若 $|\bar{x}-\mu_0|<k$，则接受 H_0，若 $|\bar{x}-\mu_0| \geq k$，则拒绝 H_0 （接受 H_1）。

犯两类错误的概率：

若 H_0 为真而被拒绝，我们称为犯第一类错误(又称犯"弃真"错误，其概率记为α。一般， $\alpha \leq 0.1$.

若 H_0 为假而被接受，我们称为犯第二类错误(又称犯"取伪"错误，其概率记为β。

记 $P(\text{拒绝}H_0 | H_0\text{为真}) = \alpha = P_{\mu_0}(\text{拒绝}H_0)$.

取检验统计量为 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$\alpha = P(|\bar{X} - \mu_0| \ge k) = P\left(|Z| \ge \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 2P\left(Z \ge \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

即 $$P\left(Z \ge \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

我们称拒绝H_0的区域W为拒绝域，将接受 H_0 的区域称为接受域。

H_0的拒绝域为W={ | Z | ≥ $z_{\alpha/2}$ }，

H_0的接受域为$\overline{W}$={ | Z | < $z_{\alpha/2}$ }。

Z检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\lvert Z\rvert\geq z_{\alpha/2}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$Z\leq -z_{\alpha}$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$Z\geq z_{\alpha}$

t 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leq -t_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geq t_{\alpha}$

关于σ^2的检验（χ^2检验法）

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ （μ 未知）	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

基本初等函数导数公式表1

函数y=f(x)	导函数 $y'=f'(x)$
y=c	$y'=0$
$y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in R$)	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
$y=a^x$ ($a>0, a\neq 0$)	$y'=a^x\ln a$
$y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1, x>0$)	$y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$
y=lnx	$y'=\frac{1}{x}$

基本初等函数导数公式表2

函数y=f(x)	导函数 $y'=f'(x)$
y=sinx	$y'=\cos x$
y=cosx	$y'=-\sin x$
y=tanx	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
y=cotx	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

基本求导公式

1. $c' = 0$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

3. $(a^{x})' = a^{x}\ln a$

4. $(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$

5. $(\log_{a} x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\tan x)' = \sec^{2} x$

10. $(\cot x)' = -\csc^{2} x$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

15. $(\sec x)' = \sec x \tan x$

16. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

函数的和、差、积、商的求导法则

设函数$u=u(x)$及$v=v(x)$在点x可导，则$u\pm v$，

$u\cdot v$， $\frac{u}{v}(v\neq 0)$在点x处也可导，且

1. $\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'}$ 可以推广到有限个

2. $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$

特别地， $(Cu)'=Cu'$. C为常数.

3. $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$