《概率论与数理统计》习题及答案

填　空　题

填空题

1．设事件 A,B 都不发生的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.8$，则 A,B 中至少有一个不发生的概率为_________.

解：$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

$$=1-0.8+P(AB)=0.3$$

$P(AB)=0.1$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$

2．设 $P(A)=0.4,\ P(A\cup B)=0.7$，那么

（1）若 A,B 互不相容，则 $P(B)=$_________;

（2）若 A,B 相互独立，则 $P(B)=$_________.

解：（1）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\Rightarrow P(B)$

$$=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.7-0.4=0.3$$

（由已知 $AB=\phi$）

（2）$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.7-0.4+P(A)P(B)=0.3+0.4P(B)$

$$0.6P(B)=0.3\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$$

3．设 A,B 是任意两个事件，则 $P\{\overline{A}\cup B(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=$______.

解：$P\{(\overline{A}\cup B)\}(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=P\{(\overline{A}A\cup\overline{A}B)\cup(AB\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{AB})\}$

$$=P\{(\overline{A}B\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{AB})\}$$

$$=P\{(AB\cup B\overline{B})(\overline{AB})\}=P\{(AB)(\overline{AB})\}=P(\phi)=0.$$

4．设事件 A,B,C 两两独立，且 $ABC=\varnothing,\ P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$，$P(A\cup B\cup C)=9/16$，则 $P(A)=$_________.

解：$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=3P(A)-3[P(A)]^2$$

$$16[P(A)]^2-16P(A)+3=0.$$

$$P(A)=\frac{3}{4} \text{ 或 } P(A)=\frac{1}{4}\text{，由 } P(A)<\frac{1}{2} \quad \therefore \quad P(A)=\frac{1}{4}.$$

5．设事件 A,B 满足：$P(B\mid A)=P(\overline{B}\mid \overline{A})=\frac{1}{3}$，$P(A)=\frac{1}{3}$，则 $P(B)=$__________.

解：$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{A})}=\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}$

$$=\frac{1-\frac{1}{3}-P(B)+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

（因为$P(AB)=P(A)P(B/A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$）

$\therefore \quad P(B)=\frac{5}{9}$.

6．设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$1/9$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$__________.

解：由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$ 知 $P(A-B)=P(B-A)$

即 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$ 故 $P(A)=P(B)$，从而 $P(\overline{A})=P(\overline{B})$，由题意：

$\frac{1}{9}=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[P(\overline{A})]^2$，所以 $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$

故 $P(A)=\frac{2}{3}$.

（由 A,B 独立$\Rightarrow$ $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均独立）

7．设 $X\sim B(2,p),\ Y\sim B(3,p)$，若 $P(X\ge 1)=5/9$，则 $P(Y\ge 1)=$________.

解：$X\sim B(2,\ p) \qquad P(X=k)=C_2^k p^k(1-p)^{2-k} \quad k=0,1,2$

$Y\sim B(3,\ p) \qquad P(Y=k)=C_3^k p^k(1-p)^{3-k} \quad k=0,1,2,3.$

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-C_2^0p^0(1-p)^2=1-(1-p)^2=\frac{5}{9}$

$(1-p)^2=\frac{4}{9} \qquad 1-p=\frac{2}{3} \qquad p=\frac{1}{3}$

$\therefore \quad P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1-p)^3=1-(\frac{2}{3})^3=\frac{19}{27}$.

8．设 $X \sim P(\lambda)$，且 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $P(X \geq 1)=$ __________，$P(0<X^2<3)=$ __________.

解：$P(X=1)=\dfrac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda=\dfrac{\lambda^2}{2} \Rightarrow \lambda=2(\lambda>0)$

$$P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=1-e^{-2}$$

$$P(0<X^2<3)=P(X=1)=2e^{-2}$$

9．设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A\sin x, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

则 $A=$ __________，$P\left(|X|<\dfrac{\pi}{6}\right)=$ __________.

解：$F(x)$ 为连续函数，$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} F(x)=\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} F(x)=F(\dfrac{\pi}{2})$

$$1=A\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow A=1.$$

$$P(|X|<\frac{\pi}{6})=P(-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6})=F(\frac{\pi}{6})-F(-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

10．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

则 $A=$ __________，X 的分布函数 $F(x)=$ __________.

解：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty} Ax^2e^{-2x}dx=A(-\frac{1}{2})\left[x^2e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} 2xe^{-2x}dx\right]$

$$=A(-\frac{1}{2})\int_0^{+\infty} xde^{-2x}=\frac{A}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx=-\frac{A}{4}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{A}{4}=1$$

$A=4$.

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x f(x)dx=4\int_0^x x^2e^{-2x}dx=4\int_0^x u^2e^{-2u}du=1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}, & x>0\\ 0\ , & x\le 0\end{cases}$$

11．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0\ , & \text{其他.}\end{cases}$$

现对 X 进行三次独立重复观察，用 Y 表示事件 $(X\le 1/2)$ 出现的次数，则 $P(Y=2)=$__________.

解：$Y\sim B(3,\ p)$，其中 $p=P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

$$P(Y=2)=C_3^2p^2(1-p)=3\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$

12．设随机变量 X 服从 $[-a,\ a]$ 上均匀分布，其中 $a>0$.

（1）若 $P(X>1)=1/3$，则 $a=$__________；

（2）若 $P(X<1/2)=0.7$，则 $a=$__________；

（3）若 $P(|X|<1)=P(|X|>1)$，则 $a=$__________.

解：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & x\in[-a,\ a]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（1）$P(X>1)=\frac{1}{3}=\int_1^a\frac{1}{2a}dx=\frac{1}{2a}(a-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}=\frac{1}{3}\Rightarrow a=3.$

（2）$P(X<\frac{1}{2})=0.7=\int_{-a}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2a}dx=\frac{1}{2a}(\frac{1}{2}+a)=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2}=0.7\Rightarrow a=\frac{5}{4}$

（3）$P(|X|<1)=P(|X|>1)=1-P(|X|\le 1)=1-P(|X|<1)$

$\therefore\ P(|X|<1)=\frac{1}{2}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2a}dx=\frac{1}{2a}\cdot 2=\frac{1}{a}\Rightarrow a=2.$

13．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且关于 y 的方程 $y^2+y+X=0$ 有实根的概率为 $1/2$，则 $\mu=$__________.

解：$y^2+y+X=0$ 有实根 $\Leftrightarrow\Delta=1-4X\ge 0\Leftrightarrow X\le\frac{1}{4}$

$$P(X\le\frac{1}{4})=\frac{1}{2}\Rightarrow F(\frac{1}{4})=\Phi(\frac{\frac{1}{4}-\mu}{\sigma})=\Phi(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow\ \mu=\frac{1}{4}.$$

14．设随机变量 X 服从 $(0,\ 2)$ 上均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,\ 4)$ 内

的密度函数为 $f_Y(y)=$__________.

解：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x\in(0,\ 2)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=\begin{cases}P(|X|\le\sqrt{y}) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}f_X(\sqrt{y})\cdot\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}+f_X(-\sqrt{y})\cdot\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4\sqrt{y}} & 0<y<4\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

当 $Y=X^2$ 在（0，4）内时 $f_Y(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

15．设 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $Y=\min(X,\ 2)$ 的分布函数 $F_Y(y)=$__________.

解$_1$：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\min(X,\ 2)\le y)=1-P(\min(X,\ 2)>y)$

$$=1-P(X>y,\ 2>y)$$

$$=\begin{cases}1-P(X>y)=P(X\le y)=F_X(y)=0 & y\le 0\\ F_X(y)=1-e^{-y} & 0<y<2\\ 1-0=1 & y\ge 2\end{cases}$$

解$_2$：设 X 的分布函数为 $F_X(x)$，2 的分布函数为 $F_2(z)$，则

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0\ , & x\le 0;\end{cases}\qquad F_2(z)=\begin{cases}0, & z<2,\\ 1, & z\ge 2;\end{cases}$$

$$F_Y(y)=1-[1-F_X(y)][1-F_2(y)]$$

$$=\begin{cases}0\ , & y\le 0,\\ 1-e^{-y}, & 0<y<2,\\ 1\ , & y\ge 2.\end{cases}$$

16．设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim B(1,p),\ 0<p<1$，

$i=1,2,\cdots,n$，则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim$__________.

解：$\because\ X_i\sim B(1,p)\qquad \therefore\ X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$

17．设 X 服从泊松分布.（1）若 $P(X\geq 1)=1-e^{-2}$，则 $EX^2=$__________；（2）若 $EX^2=12$，则 $P(X\geq 1)=$__________.

解：$P(X=K)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\qquad \lambda>0$

（1）$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\dfrac{\lambda^{\circ}}{0!}e^{-\lambda}=1-e^{-\lambda}=1-e^{-2}$

$\therefore\ \lambda=2.$

$DX=\lambda=EX^2-(EX)^2=EX^2-\lambda^2\quad\therefore\ EX^2=\lambda+\lambda^2=2+4=6$

（2）$EX^2=12=\lambda+\lambda^2\quad \lambda^2+\lambda-12=0\qquad(\lambda+4)(\lambda-3)=0,\quad\lambda=3$

$P(X\geq 1)=1-e^{-\lambda}=1-e^{-3}$

18．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-x^2+2x-1},\ -\infty<x<+\infty$，则 $A=$________，$EX=$_________，$DX=$_________.

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-(x-1)^2}dx=A\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dx}$

$$=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dx}\ dx\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$EX=1$，$DX=\dfrac{1}{2}$.

19．设 X 表示 10 次独立重复射击中命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 $EX^2=$__________.

解：$X\sim B(10,0.4)\quad EX=np=10\times0.4=4\quad DX=npq=4\times0.6=2.4$

$EX^2=DX+(EX)^2=2.4+16=18.4$

20．设一次试验成功的概率为 p，现进行 100 次独立重复试验，当 $p=$________时，成功次数的标准差的值最大，其最大值为________.

解：$DX = npq = 100p(1-p) = -100p^2 + 100p = (-100)(p-\frac{1}{2}) + 25$

$p = \frac{1}{2}$，$\sqrt{DX}$ 有最大值为 5.

21．设 X 服从参数为 λ 的指数分布，且 $P(X \ge 1) = e^{-2}$，则 $EX^2 =$______.

解：$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ $P(X \ge 1) = 1-P(X<1) = 1-F(1) = e^{-2}$

$1-(1-e^{-\lambda}) = e^{-2} \Rightarrow \lambda = 2$.

$EX = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$，$DX = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$，$\therefore$ $EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

22．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} x, & a<x<b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad 0<a<b,$$

且 $EX^2 = 2$，则 $a =$________，$b =$________.

解：$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b xdx = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2) \Rightarrow b^2-a^2 = 2$ ①

$EX^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}(b^4-a^4) = \frac{1}{4}(b^2-a^2)(b^2+a^2)$

$= \frac{1}{2}(a^2+b^2) = 2 \Rightarrow a^2+b^2 = 4$ ②

解（1）（2）联立方程有：$a=1, \quad b=\sqrt{3}$.

23．设随机变量 X,Y 同分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x\theta^2, & 0<x<1/\theta, \\ 0\ , & \text{其他}, \end{cases} \qquad \theta>0,$$

若 $E(CX+2Y) = 1/\theta$，则 $C =$________.

解：$EX = \int_0^{\frac{1}{\theta}} 2x^2\theta^2 dx = \theta^2 \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{\theta}} = \frac{2}{3\theta} = EY$

$E(CX+2Y) = CEX + 2EY = (C+2)\frac{2}{3\theta} = \frac{1}{\theta}$

$(C+2)\frac{2}{3} = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

24．一批产品的次品率为 0.1，从中任取 5 件产品，则所取产品中的次品数的数学期望为________，均方差为________.

解：设 X 表示所取产品的次品数，则 $X \sim B(5,\ 0.1)$.

$$EX = np = 5\times 0.1 = 0.5,\quad DX = npq = 0.45\text{，}\sqrt{DX} = \sqrt{\frac{45}{100}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

25．某盒中有 2 个白球和 3 个黑球，10 个人依次摸球，每人摸出 2 个球，然后放回盒中，下一个人再摸，则 10 个人总共摸到白球数的数学期望为______.

解：设 X_i 表示第 i 个人模到白球的个数，X 表示 10 个人总共摸到白球数，则 $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$

X_i	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$EX_i = 1\times\frac{6}{10} + 2\times\frac{1}{10} = \frac{8}{10}$$

$$EX = 10EX_i = 10\times\frac{8}{10} = 8$$

26．设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布列为

(X,Y)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
P	0.4	0.2	a	b

若 $E(XY) = 0.8$，$a =$________，$b =$_________.

解：$EXY = 0.2 + 2b = 0.8 \Rightarrow b = 0.3$

$a + b = 1 - 0.4 - 0.2 = 0.4 \Rightarrow a = 0.1$

27. 设 X,Y 独立，且均服从 $N\left(1,\ \frac{1}{5}\right)$，若 $D(X-aY+1) = E[(X-aY+1)^2]$，则 $a =$_________，$E|X-aY+1| =$_________.

解：$D(X-aY+1) = E[(X-aY+1)^2] \Rightarrow E(X-aY+1) = 0$.

$EX - aEY + 1 = 0$，$1 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 2$.

令 $Z = X - aY + 1,\quad EZ = 0,\quad DZ = DX + a^2 DY = 1$.

$\therefore\quad Z \sim N(0,\ 1)$

$$\therefore\quad E|Z| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

28. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)] = 1$，则 $\lambda =$_________.

解：$E[(X-1)(X-2)] = E(X^2 - 3X + 2) = EX^2 - 3EX + 2 = 1$

$\because \quad X \sim P(\lambda) \quad \therefore EX = DX = \lambda,\ DX = EX^2 - (EX)^2 \Rightarrow EX^2 = \lambda + \lambda^2$

$\therefore \quad \lambda + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 1 \ \Rightarrow\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 1$.

29．设 X, Y 是两个随机变量，且 $DX = 1,\ DY = 1/4,\ \rho_{XY} = 1/3$，则 $D(X - 3Y) =$ _________.

解：$D(X - 3Y) = DX + D(3Y) - 2\operatorname{cov}(X, 3Y) = DX + 9DY - 6\operatorname{cov}(X, Y)$

$$= 1 + \frac{9}{4} - 6 \cdot \rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 1 + \frac{9}{4} - 6 \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$$

30．设 $EX = 1$，$EY = 2$，$DX = 1$，$DY = 4$，$\rho_{XY} = 0.6$，则 $E(2X - Y + 1)^2 =$ _________.

解：$E(2X - Y + 1) = 2EX - EY + 1 = 1$，$\rho_{XY} = 0.6 = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$

$\therefore \quad \operatorname{cov}(X, Y) = 0.6 \times 1 \times 2 = 1.2 \qquad \operatorname{cov}(C, Y) = 0$，$C$ 常数

$$D(2X - Y + 1) = D(2X + 1) + DY - 2\operatorname{cov}[(2X + 1),\ Y]$$

$$= 4DX + DY - 4\operatorname{cov}(X, Y) = 4 + 4 - 4 \times 1.2 = 3.2$$

$$E(2X - Y + 1)^2 = D(2X - Y + 1) + [E(2X - Y + 1)]^2 = 3.2 + 1^2 = 4.2\ .$$

31．设随机变量 X 的数学期望为 μ，方差为 σ^2，则由切比雪夫不等式知 $P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq$ _________.

解：$P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq \dfrac{DX}{\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \dfrac{1}{4}$.

32．设总体 $X \sim P(\lambda), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的一个样本，则 $E\overline{X} =$ ________，$D\overline{X} =$ _________.

解：$X \sim P(\lambda) \quad EX_i = DX_i = \lambda \quad E\overline{X} = \lambda \quad D\overline{X} = \dfrac{\lambda}{n}$

33．设总体 $X \sim U[a, b], X_1, X_2, \cdots X_n$ 为 X 的一个样本，则 $E\overline{X} =$ _______，$D\overline{X} =$ _________.

解：$X \sim U[a, b] \qquad EX = \dfrac{a + b}{2} \qquad DX = \dfrac{(b - a)^2}{12}$

$$E\overline{X} = \frac{a + b}{2} \qquad D\overline{X} = \frac{(b - a)^2}{12n}$$

34．设总体 $X \sim N(0,\ \sigma^2),\ X_1, X_2, \cdots, X_6$ 为来自 X 的一个样本，设 $Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$，则当 $C =$ ________ 时，$CY \sim \chi^2(2)$.

解：$E(X_1+X_2+X_3)=E(X_4+X_5+X_6)=0$

$D(X_1+X_2+X_3)=D(X_4+X_5+X_6)=3DX_i=3\sigma^2$

$D[\frac{1}{\sqrt{3}\sigma}(X_1+X_2+X_3)]=\frac{1}{3\sigma^2}D(X_1+X_2+X_3)=1$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{3}\sigma}(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,\ 1)$，

$\frac{1}{\sqrt{3}\sigma}(X_4+X_5+X_6)\sim N(0,1)$ 且独立

$\therefore\ C=\frac{1}{3\sigma^2}$

35．设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，若 $P(\bar{X}>\mu+aS)=0.95$，则 $a=$__________.

解：$P(\bar{X}>\mu+aS)=P(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{16}\ge a\sqrt{16})=P(t\ge -t_{0.05}(15))=0.95$

查 t 分布表 $4a=-t_{0.05}(15)=-1.75\Rightarrow a=-0.4383.$

36．设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是正态总体 X 的样本，记

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6),\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,\quad Z=\sqrt{2}(Y_1-Y_2)/S,$$

则 $Z\sim$__________.

解：设总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 则 $Y_1\sim N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{6})$　$Y_2\sim N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{3})$

且 $Y_1\,Y_2$ 独立，$\frac{Y_1-Y_2}{\sigma}\sqrt{2}\sim N(0,\ 1)$，而 $\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$.

故 $Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{\frac{Y_1-Y_2}{\sigma}\sqrt{2}}{\sqrt{2S^2/\sigma^2/2}}\sim t(2)$.

37．设总体 $X\sim U[-\theta,\theta](\theta>0)$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本，则 θ 的一个矩估计为__________.

解：$EX=\frac{\theta-\theta}{2}=0,\quad DX=\frac{(2\theta)^2}{12}=\frac{\theta^2}{3},\quad \mu_1=EX=\int_{-\theta}^{\theta}x\frac{1}{2\theta}dx=0$

$\mu_2=EX^2=DX+(EX)^2=DX=\frac{\theta^2}{3}\Rightarrow\theta^2=3\mu_2\Rightarrow\hat{\theta}=\sqrt{3a_2}$

其中 $a_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

38．设总体 X 的方差为 1，根据来自 X 的容量为 100 的样本，测得样本均值为 5，则 X 的数学期望的置信度近似为 0.95 的置信区间为________.

解：∵ X 不是正态总体，应用中心极限定理

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nEX}{\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-EX}{1}\times 10 \dot{\sim} N(0,\ 1) \qquad \alpha=0.05$$

$$\Phi(\mu_{\alpha/2})=1-0.05/2=0.975\Rightarrow \mu_{0.025}=1.96$$

使 $P(|u|<\mu_{0.025})=P(|\frac{\bar{X}-EX}{1}\times 10|<1.96)=0.95$

EX 的置信区间为 $(\bar{X}-1.96\times\frac{1}{10},\ \bar{X}+1.96\times\frac{1}{10})=(4.804,\ 5,196)$

39．设由来自总体 $N(\mu,\ 0.9^2)$ 的容量为 9 的简单随机样本其样本均值为 $\bar{x}=5$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_________.

解：$\bar{\chi}=5,\ \sigma=0.9,\ n=9,\ \alpha=1-0.95=0.05,\ u_{\alpha/2}=\mu_{0.025}=1.96$

故置信限为：$\bar{\chi}\pm\mu_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5\pm 1.96\frac{0.9}{3}=5\pm 1.96\times 0.3=5\pm 0.588$

∴ 置信区间为 $(4.412,\quad 5.588)$