扎堆学社竭诚为您服务

扎堆学社

线性代数期末资料

欢迎关注扎堆学社微信平台

学无止境，获取更多资料

出品人：肖建启（1-3章）

张许婧（4-5章）

卫帅文（6-7章）

张含　鲁育文（誊写）

龙思源（校对）

出品日期：2017年6月9日

发放日期：2018年1月3日

第一章 矩阵及其运算

1.1 矩阵的概念

一、矩阵的定义：把数据组中的数据按某种方式或者顺序排成一个长方形数表，如由$m\times n$个数排成的m行n列数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个m行n列矩阵，简称$m\times n$矩阵，其中a_{ij}为第i行第j列处的数，i称为a_{ij}的行指标，j称为a_{ij}的列指标。

二、几种特殊矩阵

1. 空矩阵：只有零行零列的矩阵。

2. 增广矩阵：对于线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$
，若将各个未知量的系数$a_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$和常数项$(j=1,2\cdots m)$排成矩阵，并记为

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

称矩阵$\tilde{A}$为线性方程组的增广矩阵。

3. 零矩阵：由零组成的矩阵，如$O_{1\times1}=(0)$，$O_{1\times2}=(0\ \ 0)$

4. 行矩阵：只有一行的矩阵，如$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$

5. 列矩阵：只有一列的矩阵，如$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

6. n阶方阵：若矩阵的行数m与列数n相等，即$m=n$，则称$A=(a_{ij})_{m\times n}$为n阶方阵，其中，从左上角到右下角的直线叫做主对角线，其上元素为对角元。

7. 对角矩阵：若n阶方阵A的所有非对角元$a_{ij}(i\neq j)$皆为0，则称A为对角矩阵

8. 数量矩阵：若n阶对角矩阵A中对角线上元素相等，则称A为数量矩阵。

9. 单位矩阵：若n阶对角矩阵A中对角线上元素都等于1，即$a_{ii}=1$，则称A为单位矩阵。

10. 上(下)三角形矩阵：若n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$中$a_{ij}=0\ (i>j)$则称A为上三角形矩阵；若n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$中$a_{ij}=0\ (i<j)$则称A为下三角形矩阵

11. 行阶梯形矩阵：(1) 零行(即元素全为0的行)位于非零行的下方

(2) 各非零行的首非零元(即左起第一个不为零的元素)都在其上一行首非零元右边的列中.

12. 简化行阶梯形矩阵：(1) 是行阶梯形矩阵.

(2) 各非零行的首非零元都是1

(3) 每个首非零元所在列的其余元都是0.

△注：以上特殊矩阵中，对角矩阵、单位矩阵以及(简化)行阶梯形矩阵都比较重要，在后续章节中出现频率较高，应牢记。

1.2. 矩阵的运算

一、矩阵的加法：只有同型矩阵(行数、列数相等的矩阵)，若两个同型矩阵A、B对应位置元素也相等，则称A和B相等，即A=B.

如：$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&-1&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&-4\end{pmatrix}$ $A+B=\begin{pmatrix}3&1&5\\2&2&0\end{pmatrix}$

同理：定义A的负矩阵为$-A$，且$A+(-A)=0$.

二、矩阵的数乘：设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是一个矩阵，k是一个数，定义$kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$，称kA为数k与矩阵A的乘积，简称矩阵的数乘。

数乘满足如下运算规律：$1\cdot A=A$；$k(lA)=(kl)A$

$k(A+B)=kA+kB$；$(k+l)A=kA+lA$.

三、矩阵的乘法：设$m\times s$的矩阵A和$s\times n$的矩阵B，定义一个$m\times n$矩阵C，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ \left(\begin{matrix}i=1,2,\cdots,m\\j=1,2,\cdots,n\end{matrix}\right)$$

△注：只有当矩阵A的列数等于B的行数时，A与B的乘积C才有定义，且C的行数和列数分别等于A的行数与B的列数．

[例] 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\9&8&5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&9\\1&1&0\end{pmatrix}$，求AB．

解：

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&1\\9&8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&9\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+1\times1+1\times1 & 2\times2+1\times1+1\times1 & 2\times0+1\times9+1\times0\\9\times1+8\times1+5\times1 & 9\times2+8\times1+5\times1 & 9\times0+8\times9+5\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&6&9\\22&31&72\end{pmatrix}$$

上题中A的列数＝B的行数，但如果为BA，则不满足，BA无定义。

四．方阵的幂与多项式．

1.运算：设A为n阶方阵，k为非负整数，则(1) $A^0=E_n$；(2) $A^1=A$；(3) $A^{k+1}=A^k\cdot A$

2.题型：(1) 拆分法

[例] 求3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的n次幂 A^n

解：$A=E_3+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\therefore A^n=(E_3+B)^n=C_n^0B^0\cdot E_3^n+C_n^1B^1E_3^{n-1}+C_n^2B^2E_3^{n-2}+C_n^3B^3\cdot E_3^{n-3}+\cdots$$

△注意：$B^n(n\geq3)=0$（可证）

$$\therefore A^n=C_n^2\begin{pmatrix}0&0&a^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+C_n^1\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&na&nb+\frac{n(n-1)}{2}a^2\\0&1&na\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(2) 特例：对角矩阵的n次方等于其主对角线元素的n次方，即．

$$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix}$$

五、矩阵的转置

1、定义：设 $m\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，

则称 $n\times m$ 矩阵 $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为A的转置矩阵。

如 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

2、转置矩阵的运算规律：

(1) $(A^T)^T=A$　　(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(3) $(kA)^T=kA^T$　　(4) $(AB)^T=B^T\cdot A^T \rightarrow (ABC)^T=C^TB^TA^T$

六、对称矩阵

1、定义：若 $A^T=A$，则称A为对称矩阵，若 $A^T=-A$，则称A为反对称矩阵。

其中对称矩阵满足：$a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2\cdots n)$ 且A为方阵；

反对称矩阵满足：$a_{ij}=-a_{ji}\ (i\neq j)$　$a_{ii}=0\ (i,j=1,2\cdots n)$，A为方阵。

2、结论：(1) 若A、B均为对称矩阵（反对称矩阵），则 $A+B$，kA 也是对称矩阵（反对称矩阵）

(2) 设A、B均为对称矩阵，则AB为对称矩阵当且仅当 $AB=BA$。

(3) 对任意矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，AA^T 与 A^TA 都是对称矩阵。

△注：实对称矩阵是指矩阵中元素都为实数的矩阵。

1.3 逆矩阵

一、定义：设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B使得 $AB=BA=E$，则称A为可逆矩阵，简称A可逆，并称B为A的逆矩阵，记为 $A^{-1}=B$.（注：$A\neq 0$ 并不意味其逆矩阵不存在，即不是所有矩阵都存在逆矩阵）

二、结论：(1) 若A是B的逆矩阵，则B也是A的逆矩阵

(2) 单位矩阵E可逆，且$E^{-1}=E$

(3) 对角矩阵$D=diag(d_1, d_2 \cdots d_n)$，在$d_1, d_2 \cdots d_n \neq 0$时，有
$D^{-1}=diag(d_1^{-1}\ d_2^{-1} \cdots d_n^{-1})$

(4) 二阶矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$在$ad-bc\neq 0$时可逆，且$A^{-1}=$
$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

三、运算规律

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$ (2) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (4) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

1.5 矩阵的初等变换与初等矩阵

一、初等变换

1. 换法变换：交换矩阵某两行的位置。符号：$r_i \leftrightarrow r_j$

2. 倍法变换：用一个非零数$k(k\neq 0)$去乘矩阵某一行的元素。符号：kr_i

3. 消法变换：把某一行的倍数加到另一行对应位置上去。符号：r_j+kr_i

[例] 对矩阵A做变换：$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ -3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

△注：若将以上变换中的行换为列，则记号r变为c，称为矩阵的初等列变换。初等行变换和初等列变换统称为初等变换。

二、定理：任意$m\times n$矩阵总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵。同理，也可以变换为简化行阶梯形矩阵。

[例] 将A化为简化行阶梯形矩阵。

$$A=\begin{pmatrix}7&0&7&-3&3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\\boxed{1}&0&1&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{pmatrix}$$

移至第一行，方便化简

$$\xrightarrow[\text{(首非零元下方元素全化为零)}]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1\\r_4-7r_1}}\left(\begin{array}{c:cccc}1&0&1&-1&-3\\\hdashline 0&-1&2&-1&2\\0&\boxed{1}&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(除去首非零元所在行和列，对其右下角元素进行首非零元)}]{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\\frac{1}{4}r_4}}\left(\begin{array}{c:cccc}\boxed{1}&0&1&-1&-3\\\hdashline 0&\boxed{1}&-2&3&10\\0&-1&2&-1&2\\0&0&0&1&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cc:ccc}\boxed{1}&0&1&-1&-3\\0&\boxed{1}&-2&3&10\\\hdashline 0&0&0&\boxed{2}&12\\0&0&0&1&6\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}r_3\\r_4-r_3\\r_1+r_3\\r_2-3r_3}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

三、标准矩阵

如果一个非零矩阵的左上角为单位矩阵，其他位置的元素都为零，则称这个矩阵为标准型矩阵，若采用分块矩阵的形式可表示为

$$\begin{pmatrix}E_2\\O_2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}E_4&O_{4\times1}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}E_3&O_{3\times2}\\O_{1\times3}&O_{1\times2}\end{pmatrix}\quad E_3$$

1.6 用初等变换求逆矩阵

一、方法：首先构造一个 $n\times2n$ 矩阵 $M=(A\,\vdots\,E)$；其左面 n 行 n 列为矩阵 A 右边 n 行 n 列为单位矩阵，然后对 $M=(A\,\vdots\,E)$ 进行初等行变换，当 A 被化为单位矩阵时，E 就被化为 A^{-1}，即 $(A\,\vdots\,E)\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}}(E\,\vdots\,A^{-1})$

［例］ 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&9\\1&2&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解：$\because (A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\1&1&9&0&1&0\\1&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{r_2+(-1)r_1\\r_3+(-1)r_1}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&0&9&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\substack{r_1+(-1)r_3\\\frac{1}{9}r_2\\r_2\leftrightarrow r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{9}&-\frac{1}{9}&0\end{array}\right)\quad\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&0&1\\-\frac{1}{9}&-\frac{1}{9}&0\end{pmatrix}$$

二、题型

1、若矩阵方程 $AX=B$，显然 $X=A^{-1}B$，则 $(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等变换}} (E \vdots X)$

2、若矩阵方程 $XA=B$，显然 $X=BA^{-1}$，则 $\begin{pmatrix} A \\ \hdashline B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} E \\ \hdashline X \end{pmatrix}$

3、若矩阵方程 $AXB=C$，显然 $X=A^{-1}CB^{-1}$

△注：对于2来说，由于列变换运用较少，由于 $X=BA^{-1}$，可利用 $(A \vdots E) \rightarrow (E \vdots A^{-1})$ 求出 A^{-1}，再运用矩阵乘法。

[例] 求矩阵 X 满足方程 $AX=2X+B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 求 X.

解：由 $AX=2X+B$ 得 $(A-2E)X=B$，记作 $C=A-2E$，则 $CX=B$

由 $(A \vdots B) \rightarrow (E \vdots X)$ 得

$$(C \vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+(-1)r_1} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-r_2]{\substack{r_2+r_3 \\ r_1+(-1)r_3}} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

第二章 行列式

一、定义

含有两个未知量，两个方程的线性方程组一般形式为$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，称D为系数行列式。

对于三阶行列式 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$

（主对角线前为加，副对角线为减）

二、逆序（用于确定每一项前面的符号）

在一个排列中，若两个数前者大于后者，则称这两个数构成一个逆序，一个排列中所含逆序的总数称为该排列的逆序数，排列 $j_1, j_2, j_3, j_4 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 j_3 j_4 \cdots j_n)$，逆序数为偶数的排列为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

如：排列 5 3 4 1 2 中 $\tau(5\,3\,4\,1\,2)=8$，所在行列式中

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\underset{\tau=0}{a_{11}a_{22}a_{33}}+\underset{\tau=2}{a_{12}a_{23}a_{31}}+\underset{\tau=2}{a_{13}a_{21}a_{32}}-\underset{\tau=1}{a_{11}a_{23}a_{32}}-\underset{\tau=1}{a_{12}a_{21}a_{33}}-\underset{\tau=3}{a_{13}a_{22}a_{31}}$$

容易看出，三阶行列式共6项，每一项都取自不同行不同列的3个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，也就是说偶排列前为正号，奇排列前为负号。

三、行列式的性质

1、行列式和它的转置行列式相等。

2、交换行列式两行，行列式变换符号。

3、若行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零。

4、用数k去乘行列式的某一行(列)，等于用数k去乘行列式。

5、行列式中某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号外面。

6、若行列式中有两行元素对应成比例，则该行列式的值为零。

四、行列式的计算.

1、最基本方法：将行列式按行展开。首先介绍几个概念，在n阶行列式中划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列，余下的$(n-1)^2$个元素按照原来的相对位置构成一个n-1阶行列式，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

上式即为元素a_{11}的余子式，记为M_{ij}，称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式，而行列式的值便等于它的任意一行(列)的各元素与其相应代数余子式的乘积之和，即 $D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$.

根据此性质，我们通常会对行列式进行简化，若在某一行(列)中出现较多"0"计算更简便。

[例] 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

解：原式 $\xlongequal{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$ (此时第2列中除第2个元素为-1外其余全为0.方便计算)

$$=-1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+dc_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix}=abcd+ab+cd+ad+1$$

2、范德蒙行列式

符合形式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$ 满足第1行元素均为1，后行与前行之比为a_i，每一个a_i的方幂次数都是从0到$n-1$逐一升高，而它的结果

$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdots(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$

若将其进行转置，则 $V_n=\begin{vmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&\cdots&a_2^{n-1}\\1&a_3&\cdots&a_3^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$ 区别在于该行列式按列递升，但结果相同.

[例] 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\3&3^2&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}$

解：对比该行列式特点：按列递升但缺少0次幂，改造如下：

原式 $=2\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}\\3&3^2&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}$ （上步运算将第2行提出2，同理每一行可继续提出$2,3,4\ldots n$）

$=2\cdot3\cdot4\cdots n\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}=n!(n-1)!(n-2)!\cdots2!\,1!$

3、行和值相等的行列式的计算.

(1) 特点：每一行各元素的和相等。

(2) 方法：将所有的列加到第一列，再提出第一列的公因子，最后分别用第一列的适当倍数加到其余各列，可化为三角形行列式.

[例] 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$ （满足行和值相等，行和 $=x+\sum_{i=1}^{n}a_i$）

解：原式 $=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_2+(-a_1)c_1}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x-a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-a_1 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+(-a_2)c_1}$

$(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}\xlongequal{依次相加}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_{n-1} \end{vmatrix}$

$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$

4、箭形行列式的计算.

(1) 特点：除了第一行，第一列以及主对角线元素外，其余元素都为零.

(2) 方法：利用行列式性质将箭头的一个边都化为零，转化为三角形行列式。

[例] 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ $a_i\neq 0,\ i=1,2\ldots n.$

解：原式 $\xlongequal{c_1+(-\frac{c_1}{a_1})c_2}\begin{vmatrix} a_0-\frac{c_1b_1}{a_1} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}\xlongequal{c_1+(-\frac{c_2}{a_2})c_3}$

$$\begin{vmatrix} a_0-\frac{c_1b_1}{a_1}-\frac{c_2b_2}{a_2} & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{依次减}}} \begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)a_1\cdot a_2\cdots a_n.$$

5、利用加边升阶法进行计算.

(1) 特点：除主对角元素外，各行对应的元素分别相同或成比例。

(2) 方法：把原来的n阶行列式通过增加一行和一列的办法化为与原来行列式相等的n+1阶行列式，即加边升阶。

[例] $D_n = \begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$ $x_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots n.$ (满足除主对角线元素之外，各行成比例)

首先对D_n进行加边

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_na_1 & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}_{n+1} \quad \text{(按第一列展开)}$$

此时把第一行的$-a_1,-a_2\cdots-a_n$倍加到第二、三…最后一行.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i}\right)x_1x_2\cdots x_n.$$

(得到箭形行列式)

6、逐行相减法.

(1) 特点：每相邻两行(列)之间有一部分元素相同(成比例)，这些相同(成比例)元素都集中在某个"角上"(或左(右)上(下)角)

(2) 方法：采用相邻两行(或列)相减的方法，所化成的零元素集中在某个角上，由此化为三角形行列式。

[例] $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&2&3&\cdots&n-1&n\\3&3&3&\cdots&n-1&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n-1&n-1&\cdots&n-1&n\\n&n&n&\cdots&n&n\end{vmatrix}$ (满足成比例且处于右上角)

$$\xlongequal[\substack{r_1+(-1)r_2\\ r_2+(-1)r_3\\ \cdots\\ r_{n-1}+(-1)r_n}]{}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0&0\\-1&-1&0&\cdots&0&0\\-1&-1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&-1&0\\n&n&n&\cdots&n&n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\cdot n$$ (利用下三角形计算)

7. 递推公式法

(1) 特点：利用展开定理，可以找到 D_n 与 D_{n-1} 的关系。

(2) 方法：利用展开定理，找到 D_n 与 D_{n-1} 的等式关系，依次递推。

[例] $D_n=\begin{vmatrix}2&0&0&\cdots&0&2\\-1&2&0&\cdots&0&2\\0&-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&2\\0&0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}2D_{n-1}+2(-1)^{1+n}(-1)^{n-1}$

上三角形得出

$$=2D_{n-1}+2$$
$$=2(2D_{n-2}+2)+2$$
$$=2^2D_{n-2}+2^2+2$$
$$=2^{n-2}D_2+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2$$

$D_2=\begin{vmatrix}2&0\\-1&2\end{vmatrix}$ $D_2=\begin{vmatrix}2&2\\-1&2\end{vmatrix}$ ∵我们的展开是向右下角延伸，

$\therefore D_2=\begin{vmatrix}2&2\\-1&2\end{vmatrix}$

$\therefore$ 原式 $=6\cdot2^{n-2}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2$

第三章 线性方程组解的判定及求解

一、线性方程组的概念

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其中x_i为未知量，a_{ij}为系数，b_i是常数项，当b_i中至少有一个不为0时，为非齐次线性方程组；当b_i全为0时，为齐次线性方程组。

(1) 系数矩阵：$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

(2) 增广矩阵：$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

(3) 秩的概念：设A为$m\times n$矩阵，若矩阵A中有一个r阶子式不为零，而A中所有的$r+1$阶子式(存在的话)均为零，则称r为矩阵A的秩，记为$R(A)$规定零矩阵的秩为零。

(4) 计算矩阵的秩：将矩阵化为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中的非零行数即为矩阵的秩。

二、线性方程组有解的判定与求解

1、齐次线性方程组

(1) 齐次线性方程组$AX=0$只有零解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于未知量的个数，即$R(A)=n$

(2) 齐次线性方程组$AX=0$有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩小于未知量的个数，即$R(A)<n$

(3) 解题步骤：① 由线性方程写出系数矩阵 ② 将系数矩阵化为简化行阶梯形矩阵 ③ 由简化行阶梯形矩阵得变量关系 ④ 代值求解.

[例] 解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_2]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A) = 2 < n = 4$ ∴ 有非零解.

$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$ 令 $x_2 = C_1$，$x_4 = C_2$

则 $\begin{cases} x_1 = C_1 + C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = 2C_2 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$，像 x_2，x_4 通常称为自由未知量，即可以取任意值.

2、非齐次线性方程组.

(1) 无解的充分必要条件是 $R(A) \neq R(\bar{A})$

(2) 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(\bar{A}) = n$

(3) 有无穷多解的充分必要条件是 $R(A) = R(\bar{A}) < n$

(4) 步骤：① 写出系数矩阵和增广矩阵 ② 化为简化行阶梯形矩阵 ③ 由简化行阶梯形矩阵得变量关系 ④ 求解.

[例] 1 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 + x_4 = -1 \end{cases}$

解: 系数矩阵 $\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&-1&1&1\\3&2&-2&2&3\\2&-1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&-1&1&1\\0&-7&1&-1&0\\0&-7&1&-1&3\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&-1&1&1\\0&-7&1&-1&0\\0&0&0&0&-3\end{array}\right)$ $\because R(A)=2<R(\bar{A})=3$ $\therefore$ 无解

[例] 2: λ取何值时, 方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=1\\x_1+x_2+\lambda x_3=1\end{cases}$ (1) 无解 (2) 有无穷多解 (3) 有唯一解.

解: $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3\Leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\\lambda&1&1&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3-\lambda r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda-\lambda^2&1-\lambda\end{array}\right)$

$\therefore$ ① 当$\lambda=-2$时, $R(A)=2<R(\bar{A})=3$ 无解

② 当$\lambda=1$时, $R(A)=R(\bar{A})=1<3$ 有无穷多解

③ 当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时, $R(A)=R(\bar{A})=3$ 有唯一解

第四章 向量

一. n维向量的概念：

n个数组成的有序数组，记作 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$

向量的坐标：数 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 称为 α 的坐标或第 i 个分量

向量的相等：对应分量相等，即 $\alpha=\beta$

二. n维向量的线性运算及性质

1. 加法：设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则 $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,+\cdots,a_n+b_n)^T$

2. 数乘：设有常数 k 和向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$. 则 $k\alpha=(k\alpha_1,k\alpha_2,\cdots,k\alpha_n)^T$

3. 性质：

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

$\alpha+0=\alpha$（零向量作用）

$\alpha+(-\alpha)=0$（负向量作用）

$(kl)\alpha=k(l\alpha)$

$1\cdot\alpha=\alpha$

$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

三. 向量与向量组之间的线性表示

1. 定义：给定n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和向量 β，如果存在个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 成立，则称向量 β 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 的一个线性组合，亦称 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 线性表示。

2. 判定：向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

$\Updownarrow$ 充要条件

矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$ 和矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$ 有相同的秩。

四. 向量组的线性相关与线性无关

1. 线性相关：存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

$\Updownarrow$ 充要条件

矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的秩小于向量的个数 s.

（方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解）

2. 线性无关：仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

$\Updownarrow$ 充要条件

矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的秩等于向量个数 s

（方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 只有零解）.

五. 线性相关的重要性质及定理

1. 若向量组线性无关，则分量维数增加后，得到的新向量组线性无关
若向量组线性相关，则分量维数减少后，得到的新向量组线性相关
2. 在向量组中，若向量的个数大于维数，则该向量组必然线性相关，
且$(n+1)$个n维向量必线性相关。
3. 3个等价定理.
(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$、线性相关(或无关).
$\Updownarrow$ 充要条件
至少一个向量是其余向量的线性组合
(2) 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 有非零解
(3) 以向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$所构成的矩阵的秩小于向量组的个数$R<S$ 或 $(R=S)$
六、两个向量组的线性表示及其等价
1. 概念：设有两个向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 II: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，若II中的每一个向量
$\beta_j (j=1, 2, \cdots, t)$ 都可以由向量组 I 线性表示，则称向量组 II 可以由向量
组 I 线性表示。
即 $\beta_j = k_{j1}\alpha_1 + k_{j2}\alpha_2 + \cdots + k_{js}\alpha_s \ (j=1, 2, \cdots t)$
或表示为矩阵的形式 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{t1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{t2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1s} & k_{2s} & \cdots & k_{ts} \end{pmatrix}$

△ 注：一个向量能否由一向量线性表示的问题，可转化为线性方程组是否有解的判
定问题，并且方程组的一个解就是线性表示的组合系数。
故 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性表示
$\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_s\alpha_s = \beta$ 有解
$\Leftrightarrow$ $R(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \beta)$
2. 两个向量组的等价：两个向量组可以互相线性表示，记作 $T_1 \cong T_2$
3. 两个向量组线性相关的性质定理
若n维向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，则
① 若 $t>s$，则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关
② 两个线性无关的等价的向量组，必包含相同个数的向量。

七、向量组的极大无关组和秩

1. 极大无关组：对于向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$，

满足：① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 线性无关；② 任意 $r+1$ 个向量线性相关

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组的一个极大线性无关组。

例：设向量组 T：$\alpha_1=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,0,0)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,0)^T$，$\alpha_4=(c_1,c_2,c_3,0)^T$

验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大无关组，并将 α_4 用这个极大无关组表示。

解：① 找无关：$e_1=(1,0,0)^T$，$e_2=(0,1,0)^T$，$e_3=(0,0,1)^T$ 线性无关，

故其延长向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性无关

② 证相关：$\because \alpha_4=(c_1,c_2,c_3,0)^T=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

③ 得无关组 $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为极大无关组。

△ 注：只含零向量的向量组无极大无关组。

2. 向量组的秩：向量组中极大无关组所含向量的个数。

(1) 两个向量组秩之间的关系：等价向量组的秩相等，两个相同的秩的向量组不一定等价；两个向量组有相同的秩，并且其中一个可以被另一个线性表示，则这两个向量组等价。

(2) 向量组的秩与矩阵秩的关系

三者基本等价，向量组化为矩阵的秩（列秩/行秩）相同。

即矩阵行秩 = 矩阵列秩 = 矩阵的秩

八、向量的内积，长度，夹角及施密特正交化

1. 内积：$\langle\alpha,\beta\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$

长度：$\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

夹角：$\theta=\arccos\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}$ $\quad\theta\in[0,\pi]$

当 $\theta=0 \Leftrightarrow \alpha,\beta$ 垂直，称 α 与 β 正交

2. 正交基：设向量空间 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 两两正交，则称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 为 V 的正交基，若 α 为单位向量则为标准正交基。

施密特正交化：设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是一组线性无关的向量组.

取 $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \cdot \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s = \alpha_s - \dfrac{\langle \alpha_s, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \cdots - \dfrac{\langle \alpha_s, \beta_{s-1} \rangle}{\langle \beta_{s-1}, \beta_{s-1} \rangle} \beta_{s-1} \end{cases}$

则向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$是正交的向量组，且与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$等价.

单位化：　$\gamma_1 = \dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \cdots, r_s = \dfrac{\beta_s}{\|\beta_s\|}$

3. 正交矩阵：$A^TA = E$，　A为正交矩阵

∵ $A^{-1} = A^T$ 且A为可逆矩阵，故$(A^T)^T A^T = AA^T = E$．A^T为正交矩阵

(1) n阶方阵A是正交矩阵 ⟺ A的列(行)向量组是R^n的一组标准正交基

(2) 性质：正交矩阵行列式$= \pm 1$；　正交矩阵的乘积为正交矩阵

第五章 线性方程组解的性质与解的结构

一、线性方程组的三种形式

1、一般形式
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_n \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

2、矩阵形式：$AX=\beta$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n) \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

3、向量形式：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

二、齐次线性方程组的基础解系

1、定义：若向量组$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_{n-r}$满足解向量 $A\xi_i=0$，$i=1,2\ldots n-r$

线性无关，即$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0 \Leftrightarrow k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$

代表作用：即$AX=0$的任一解都可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$线性表示出，则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为方程组$AX=0$的一个基础解系。

2、有解

(1) 齐次方程有解
- ① 方程组有非零解
- ② 系数矩阵A的列向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性相关
- ③ 存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots k_n$使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$
- ④ 系数矩阵的秩小于未知量个数，$R(A)<n$
- ⑤ 系数矩阵的列向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$的秩小于未知量的个数，则$R<n$

(2) 非齐次方程有解
- ① 方程组有解（唯一或无穷多）
- ② 常数项向量b可由系数矩阵A的列向量组。
- ③ 两个向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$和$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,b$等价。
- ④ 系数矩阵与增广矩阵有相同的秩，即$R(A)=R(\widehat{A})$。
- ⑤ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$和向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$有相同的秩。

三、齐次线性方程组解的结构与解的判定

1、性质：

(1) 若向量 ξ_1，ξ_2 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的两个解，则 $\xi_1+\xi_2$ 仍为其解。

(2) 若向量 ξ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，C 为任意实数，则 $C\xi$ 仍为其解。

(3) n 元齐次线性方程组解向量个数．若 $R=r<n$，则必有基础解系，且其所含解向量个数 $=n-r$

(4) 如果齐次线性方程组有非零解，则它的通解就是基础解系的线性组合当齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系为 ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-r} 时，其通解 ξ 可以表示为 $\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$．($k_1$，$k_2\cdots k_{n-r}$ 为任意常数)

2、判定：　$r(A)=n$　只有零解

　　　　　$r(A)<n$　有非零解．

四、非齐次线性方程组解的结构与判定．

1、性质：

(1) 若 η_1，η_2 为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解，则 $\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$ 也为方程组的解。

(2) 若 η_1，η_2 为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 为 $AX=b$ 的解

2、判定：　$r(A)\neq r(A\,\vdots\,\beta)$　无解

　　　　　$r(A)=r(A\,\vdots\,\beta)=n$　有唯一解

　　　　　$r(A)=r(A\,\vdots\,\beta)<n$　有无穷多解．

五、线性方程组求解的克莱姆法则（仅适用方程个数与未知量的个数相等的情况）

若线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$
的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

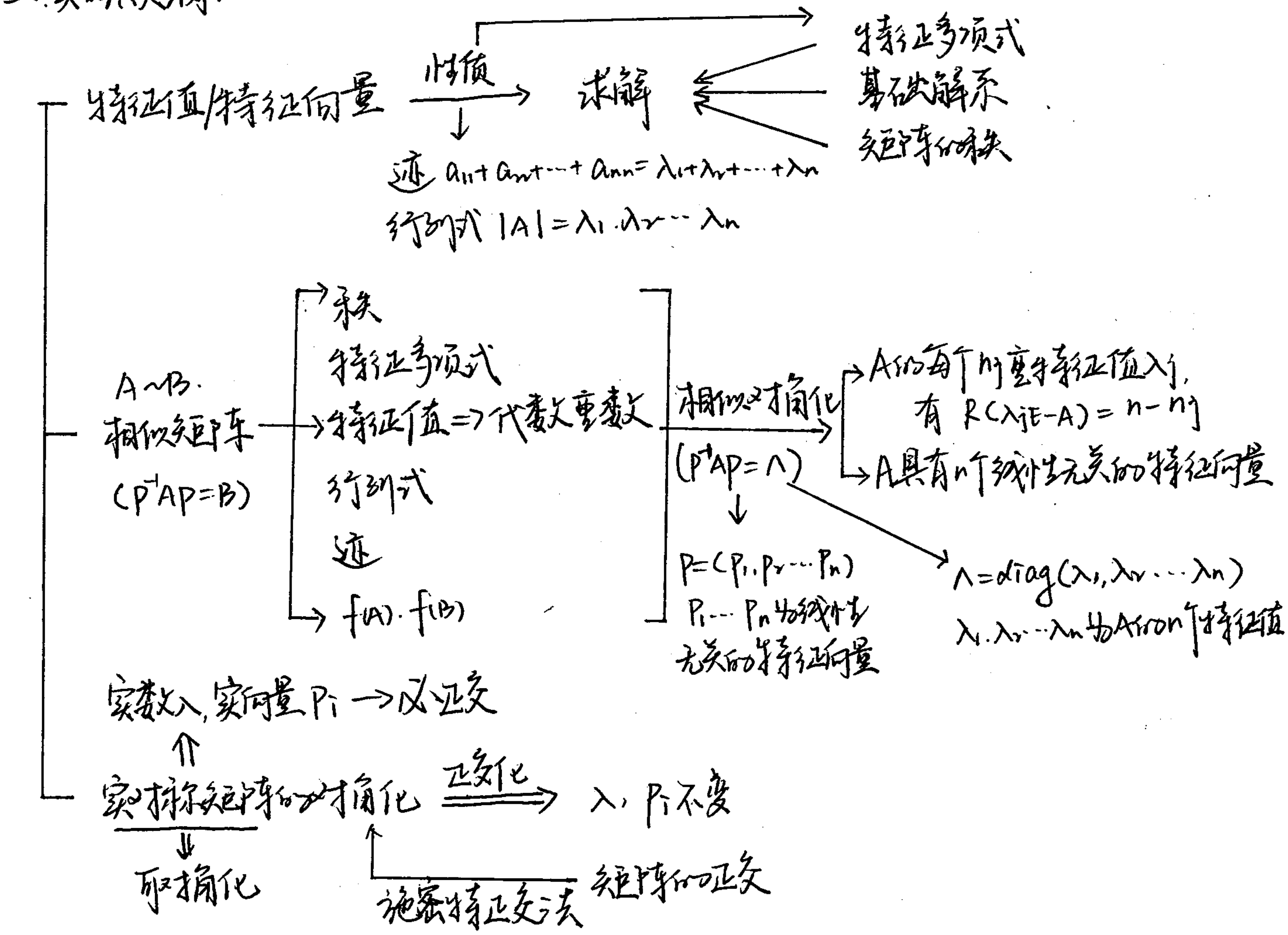
则线性方程组有解，并且解是唯一的．解可以表示为 $x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$，$\cdots x_n=\frac{D_n}{D}$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式.

即
$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_1 & a_{n,j+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第六章 矩阵的特征值和相似对角化

一、知识大纲：



二、题型归纳：

1、特征值和特征向量：

[题型①] 求矩阵的特征值和特征向量

(1) 常见的矩阵可分为具体矩阵和抽象矩阵。具体矩阵一般会据给出的数值，求特征值/特征向量；抽象矩阵无具体表达式，其常见于f(A)中，通过含A的方程或函数确定A的特征值，与新式所对应的特征值之间的关系。

(2) 特征值和特征向量的计算步骤

I、写出矩阵的特征方程 $|\lambda E-A|=0$，求出λ即为特征值。

II、将每个特征值λ代入齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$，求齐次线性方程组的非零解X，即为所求特征向量。

（该步骤涉及"求方程组基础解系"的内容，请看课本P174-P176）

例1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$ 的特征向量和特征值。

解: A的特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

特征值 $\lambda_1=1$. $\lambda_2=2$. $\lambda_3=3$.

$\lambda=1$ 时, $E-A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 基础解系 $P_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ∴特征向量 $K_1P_1\ (K_1\neq0)$

同理可得 $\lambda_2=2$ 时. $P_2=(1,1,0)^T$ 特征向量 $K_2P_2\ (K_2\neq0)$

$\lambda_3=3$ 时. $P_3=(\frac{1}{2},1,1)^T$ 特征向量 $K_3P_3\ (K_3\neq0)$

△注: 本题中每个特征值λ对应的只会是一个基础解系, 若出现 $\lambda E-A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.
基础解系个数≥2, 则参照课本P174 左下角例题。

○建议选做 P198 T5. P199 T8 《一本通》P73 例5-3.

例2. 已知矩阵A满足 $A^3=5A^2-6A$, 求A的特征值。

解: 设矩阵A的特征值为λ, λ对应特征向量为X, 则 $AX=\lambda X$, 同时乘A得

$A^2X=A(\lambda X)=\lambda(AX)=\lambda^2X$ 同理得 $A^nX=\lambda^nX$.

∴ $(A^3-5A^2+6A)X=A^3X-5A^2X+6AX=\lambda^3X-5\lambda^2X+6\lambda X=(\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda)X$.

且 $A^3=5A^2-6A$ 得 $(A^3-5A^2+6A)X=0$, 且 $X\neq0$, 则 $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0$

得 $\lambda_1=0$. $\lambda_2=2$. $\lambda_3=3$. 则特征值为0, 2, 3.

△可得结论: 若 $f(A)=A^k+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_kA^k=0$, 则 $f(\lambda)=\lambda^k+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_k\lambda^k=0$

○建议选做: P198 T6. 《一本通》P75 例5-8.

[题型②] 有关特征值和特征向量性质的题目

(1) 详细内容见课本性质 6.1. 6.2; 定理 6.1. 6.2; 推论 6.1; 《一本通》P73.

(2) 该部分与"求特征值"题型综合出现, 建议复习 P195 证明部分。

例1. 设4阶可逆矩阵A有一特征值为3, 则矩阵 $9(A^{-1})^2-3A^{-1}+2E$ 有一个特征值为?

解: 特征值 $=9(\frac{1}{3})^2-3\times\frac{1}{3}+2\times1=2$

例2. 设3阶矩阵A的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, 求 $|E+\frac{1}{6}A^*|$ 的值.

解: 由题意得. A的特征值为-1. 2. 3. $|A|=-1\cdot2\cdot3=-6$. A^{-1} 特征值 $-1. \frac{1}{2}. \frac{1}{3}$

A^*的特征值 $=|A|\lambda_n^{-1}$，即 $6,-3,-2$.

$E+\frac{1}{6}A^*$的特征值为 $2,\frac{1}{2},\frac{2}{3}$

$\left|E+\frac{1}{6}A^*\right|=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

○ 建议选做 P122 T2.3.9 ；《一本通》P74 例5-5

2. 相似矩阵：

[题型①] 有关相似矩阵性质的题目

(1) 性质：若 $A\sim B$，则

Ⅰ. A与B有相同的秩，$r(A)=r(B)$.

Ⅱ. A与B有完全相同的特征多项式，即 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

Ⅲ. A与B有完全相同的特征值，即 λ_0 是A的特征值当且仅当它是B的特征值，且有相同的代数重数。

Ⅳ. A与B具有相同的行列式，即 $|A|=|B|$

Ⅴ. A与B具有相同的迹，即 $tr(A)=tr(B)$

Ⅵ. $f(A)$和$f(B)$也相似，其中 $f(x)$ 是一个多项式

(2) 后续学习相似对角化时，形如 $P=(P_3,-2P_3,3P_1)$，Λ中仍取其原先特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，即 P_1,P_2,P_3 之前的系数不改变其特征值。

例1. 设A,B为n阶矩阵，且A与B相似，E为n阶单位矩阵，则（ ）

A. $\lambda E-A=\lambda E-B$　　　　B. A与B有相同的特征值与特征向量.

C. A与B都相似于一个对角阵　　　D. 对任意常数t，$tE-A$与$tE-B$相似.

解：A：$|\lambda E-A|=|\lambda E-B| \nRightarrow \lambda E-A=\lambda E-B$

B：特征向量无法判定

C：若A,B不可对角化，则无法相似于Λ.

D：设 $f(x)=t-x$，则 $f(A)\sim f(B)$，即 $tE-A\sim tE-B$.

[题型②] 有关两矩阵相似的判定

(1) 第一步：观察特征值是否相同，若 $\lambda_{ai}\neq\lambda_{bi}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则排除.

第二步：利用定理6.5中其它性质作为必要条件判定.

第三步：利用传递性，$A\sim\Lambda$，$B\sim\Lambda$，则 $A\sim B$. 常用 $r(\lambda E-A)=n-n_j=r(\lambda E-B)$

选取 n_j 重特征值，求出A,B对应特征多项式所对矩阵的秩不相等，则排除。

(2) 该部分涉及相似判定的必要条件和充分条件，应采用必要条件排除，再采用充分条件确定。

例1. 下列矩阵中，与$M=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$相似的矩阵是（ ）

A. $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$ B. $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$ C. $C=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&0&-1\end{bmatrix}$ D. $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\3&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$

解：① 对于对角矩阵M，特征值为2, 2, -1. A, B, C, D特征值中只有D为2, -1, -1. 排除

② ∵ $\lambda=2$是M的二重特征值，则$R(2E-M)=n-n_0=1$.

求A, B, C的特征多项式所对应的矩阵$2E-A$, $2E-B$, $2E-C$，经初等行变换，只有$2E-C$的秩为1. 故选C。

○ 建议选做：P207 T10；P223 T6. T12

[题型③] 有关矩阵可对角化的判定：

(1) 矩阵可对角化的条件：

I. 两个充要条件：A有n个线性无关的特征向量；对A的任意特征值λ_i ($i=1,2,\cdots n$)，均有$n-n_i=r(\lambda_i E-A)$，其中n_i为λ_i的重数。

II. 一个充分条件：n阶矩阵A可对角化的一个充分条件是A有n个互不相同的特征值。

(2) 矩阵对角化的方法.

A可对角化 ⟹ ∃可逆矩阵$P=(p_1, p_2\cdots p_n)$，使得$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1, \lambda_2\cdots\lambda_n)$.

例1. 设A是3阶矩阵，特征值分别是$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$，对应的特征向量分别为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. 若$P=(\alpha_3, 3\alpha_2, -\alpha_1)$，则$P^{-1}AP=$ ____。

解：∵ $P=(\alpha_3, 3\alpha_2, -\alpha_1)$. A的特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$.

∴ $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}=diag(-1,2,1)$

3. 实对称矩阵的对角化.

[题型①] 有关实对称矩阵的性质. ○《一本通》P183. 例5~20

(1) 课本定理6.8 6.9 6.10内容及其证明.

(2) 复习矩阵的"正交"部分内容.

[题型②] 求正交矩阵Q，将实对称矩阵化为对角矩阵 ○ P211. 例6.17. 6.18. P215. T4

(1) 复习施密特正交法.

(2) 实对称矩阵A ⟹ 必可对角化 ⟹ $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$

第七章 二次型

一、知识大纲：

式 ⇒ 矩阵　　反求矩阵中待定参数

⇑　　⇑

二次型与对称矩阵 ⟶ 二次型标准化 ⟶ 二次型求参 ⟶ 合同 ※

$f(x_1,x_2,x_3)$（式）　X（矩）

$\boxed{\Uparrow}$　有误，颠倒

相似

A对称⇔B对称
$R(A)=R(B)$ 且特征值
λ与重数n_0和k
相同

化二次型为标准型 ⟶ 正交变换法 ⇒ $Q=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$. $X=QY$. $f(x_1\cdots x_n)$

⟶ 配方法 ⇒ 求正交变换式

⟶ ※初等变换法 ⇒ $(A \mid E) \to (\Lambda \mid C)$　P340 例7.10

秩、特征值
P. $r-P$. $P-(r-p)$
⇑

二次型的不变量和惯性 ⇒ 规范性

二、题型归纳

1. 二次型与对称矩阵

[题型①] 判断两矩阵是否合同：

(1) 二次型的两种表述方法以及三种线性变换较简单，按课本要求复习。

(2) 对于合同 $B=C^TAC$，当C为正交矩阵时，有$C^T=C^{-1}$，与后续正交变换法有关。

(3) 基本判定法：

I. 若两个同阶实对称矩阵相似，则这两个矩阵必定合同。

II. 若两个同阶实对称矩阵有相同的特征值和重数，则它们必定合同。

(4) 判断时除了以上判定法，还需使用7-3中的惯性定理。

例1：设$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ 则在实数域上与A合同的矩阵为（　）

A. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　B $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　C $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　D $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

解：求特征值，相同则必合同，选D.

0 建议选做 P233 T4.T6

2. 化二次型为标准型.

[题型①] 利用三种方法化二次型为标准型.

(1) 熟悉课本上提到的有关3种化法的例题.

(2). 正交变换法:

(I) 写出对应的二次型矩阵，并求其特征值和特征向量.

(II) 将特征向量单位正交化. $(r_1, r_2 \cdots r_n)=Q$. 得正交变换 $X=QY$

(III) $f(x_1, x_2, x_3)=g(y_1, y_2, y_3)$

○ 建议选做 P261. T16. T17. 《一本通》P95. 例6.7. 6-8

[题型②] 求正交变换, 将二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

解: 化为二次型f矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & 2\\ -4 & 2 & 4\end{bmatrix}$ 由 $|\lambda E-A|=0$ 得:

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & -2\\ 4 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9). \quad \lambda_1=\lambda_2=0 \quad \lambda_3=9.$$

λ_1 对应特征向量为 $\alpha_1=(2,1,0)^T$. $\alpha_2=(-2,0,1)^T$

正交化得: $\beta_1=\alpha_1=(2,1,0)^T$. $\beta_2=\alpha_2-\frac{\beta_1^T\alpha_2}{\beta_1^T\beta_1}\beta_2=(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -1)$

$r_1=(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)^T$. $r_2=(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{3})^T$

λ_3 对应特征向量为 $\alpha_3=(1,-2,2)$. $r_3=(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

正交矩阵 $Q=(r_1, r_2, r_3)=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$, $X=QY$

令 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$ $\therefore f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=9y_3^2$ ○ P237: 例7.8. P261: T10

3. 二次型的惯性和不变量.

(1) 一个二次型经可逆线性变换后, 秩 $R(A)$ 保持不变. ($R(A)$ 等于标准形的项数)

(2). 明白惯性定理中: $X=CY$. $X=PZ$. $p=q$. 展开式中 p. $r-p$. $p-(r-p)$ 的含义.

(3). 变换前后 p. $r-p$. $p-(r-p)$ 值不变, 即可通过 $g(y_1, y_2, y_3)$ 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 惯性指数.

○ 建议选做 P245. 例7.13. P246: 4(3)