

第二节 估计量的评选标准

- 一、问题的提出
- 二、无偏性
- 三、有效性
- 四、相合性
- 五、小结



一、问题的提出

从前一节可以看到, 对于同一个参数, 用不同的估计方法求出的估计量可能不相同。而且, 很明显, 原则上任何统计量都可以作为未知参数的估计量。

问题

(1) 对于同一个参数究竟采用哪一个估计量好?

(2) 评价估计量的标准是什么?



下面介绍几个常用标准。



二、无偏性

若 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的一个样本,
 $\theta \in \Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数,
(Θ 是 θ 的取值范围)

若估计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的数学期望
 $E(\hat{\theta})$ 存在, 且对于任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称
 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

无偏估计的实际意义: 无系统误差.

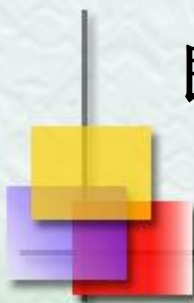


例1 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ ($k \geq 1$) 存在, 又设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 X 的一个样本, 试证明不论总体服从什么分布, k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

证 因为 X_1, X_2, \dots, X_n 与 X 同分布,

故有 $E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

即 $E(A_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^k) = \mu_k.$



故 k 阶样本矩 A_k 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

特别的:

不论总体 X 服从什么分布,
只要它的数学期望存在,

\bar{X} 总是总体 X 的数学期望 $\mu_1 = E(X)$ 的无偏估计量.



例2 对于均值 μ , 方差 $\sigma^2 > 0$ 都存在的总体, 若

μ, σ^2 均为未知, 则 σ^2 的估计量 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

是有偏的(即不是无偏估计).

证
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = A_2 - \bar{X}^2,$$

因为 $E(A_2) = \mu_2 = \sigma^2 + \mu^2,$

又因为 $E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2,$

所以 $E(\hat{\sigma}^2) = E(A_2 - \bar{X}^2) = E(A_2) - E(\bar{X}^2)$



$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2, \text{ 所以 } \hat{\sigma}^2 \text{ 是有偏的.}$$

若以 $\frac{n}{n-1}$ 乘 $\hat{\sigma}^2$, 所得到的估计量就是无偏的.

(这种方法称为**无偏化**).

$$E\left(\frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2\right) = \frac{n}{n-1} E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2.$$

$$\text{因为 } \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

即 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 故通常取 S^2 作 σ^2 的估计量.



例3 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 试求 σ^2 的无偏估计量.

解 由第六章第二节定理二知 $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$,

$$E\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma}\right) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-1}{2}-1} dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} dx = \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$



$$E(S) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma,$$

故 S 不是 σ 的无偏估计量,

$$\sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} S \text{ 是 } \sigma \text{ 的无偏估计量.}$$



例4 设总体 X 在 $[0, \theta]$ 上服从均匀分布, 参数 $\theta > 0$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本, 试证明 $2\bar{X}$ 和 $\frac{n}{n+1} \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计.

证 因为 $E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$,
所以 $2\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

因为 $X_h = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\text{所以 } E(X_h) &= \int_0^\theta x \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx \\ &= \frac{n}{n+1} \theta,\end{aligned}$$



$$\text{故有 } E\left(\frac{n+1}{n} X_h\right) = \theta,$$

故 $\frac{n}{n+1} \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 也是 θ 的无偏估计量.



例5 设总体 X 服从参数为 θ 的指数分布, 概率密度

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中参数 $\theta > 0$, 又设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本, 试证 \bar{X} 和 $nZ = n[\min(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ 都是 θ 的无偏估计.

证明 因为 $E(\bar{X}) = E(X) = \theta$,

所以 \bar{X} 是 θ 的无偏估计量.



而 $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从参数为 $\frac{\theta}{n}$ 的指数分布,

$$\text{概率密度 } f_{\min}(x; \theta) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{nx}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{故知 } E(Z) = \frac{\theta}{n}, \quad E(nZ) = \theta,$$

所以 nZ 也是 θ 的无偏估计量.

由以上两例可知,一个参数可以有不同的无偏估计量.



三、有效性

比较参数 θ 的两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$,如果在样本容量 n 相同的情况下, $\hat{\theta}_1$ 的观察值在真值 θ 的附近较 $\hat{\theta}_2$ 更密集,则认为 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度,所以无偏估计以方差小者为好.

设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量,若有 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.



例6 (续例5)

试证当 $n > 1$ 时, θ 的无偏估计量 \bar{X} 较 nZ 有效.

证明 由于 $D(X) = \theta^2$, 故有 $D(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n}$,

又因为 $D(Z) = \frac{\theta^2}{n^2}$, 故有 $D(nZ) = \theta^2$,

当 $n > 1$ 时, $D(nZ) > D(\bar{X})$,

故 θ 的无偏估计量 \bar{X} 较 nZ 有效.



例7 (续例4) 在例4中已证明 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$

和 $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 都是 θ 的无偏估计量, 现证当 $n \geq 2$ 时, $\hat{\theta}_2$ 较 $\hat{\theta}_1$ 有效.

证明 由于 $D(\hat{\theta}_1) = 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n} D(X) = \frac{\theta^2}{3n}$,

$$D(\hat{\theta}_2) = D\left(\frac{n+1}{n} X_h\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D(X_h),$$

又因为 $E(X_h) = \frac{n+1}{n} \theta$,



$$E(X_h^2) = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} x^{n+1} dx = \frac{n}{n+2} \theta^2,$$

$$D(X_h) = E(X_h^2) - [E(X_h)]^2$$

$$= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2,$$

$$\text{故 } D(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2,$$



又 $n \geq 2$, 所以 $D(\hat{\theta}_2) < D(\hat{\theta}_1)$, $\hat{\theta}_2$ 较 $\hat{\theta}_1$ 有效.



四、相合性

若 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量,
若对于任意 $\theta \in \Theta$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$
依概率收敛于 θ , 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量.

例如 由第六章第二节知, 样本 $k (k \geq 1)$ 阶矩是
总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ 的相合估计量,
进而若待估参数 $\theta = g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, 其中 g 为连续
函数, 则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n) = g(A_1, A_2, \dots, A_n)$ 是 θ 的相合估计量.



例8 试证：样本均值 \bar{X} 是总体均值 μ 的相合估计

量，样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 及样本的二阶

中心矩 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 都是总体方差 σ^2 的相合

估计量.

证明 由大数定律知,

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

所以 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是 μ 的相合估计量.



$$\begin{aligned} \text{又 } B_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = A_2 - \bar{X}^2, \\ &\quad (A_2 \text{ 是样本二阶原点矩}) \end{aligned}$$

由大数定律知,

$$A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ 依概率收敛于 } E(X^2),$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 依概率收敛于 } E(X),$$



故 $B_2 = A_2 - \bar{X}^2$

依概率收敛于 $E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$,

所以 B_2 是 σ^2 的相合估计量.

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1$,



所以 $S^2 = \frac{n}{n-1} B_2$ 也是 σ^2 的相合估计量.



五、小结

估计量的评选的三个标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性

相合性是对估计量的一个基本要求,不具备相合性的估计量是不予以考虑的.

由最大似然估计法得到的估计量,在一定条件下也具有相合性. 估计量的相合性只有当样本容量相当大时,才能显示出优越性,这在实际中往往难以做到,因此,在工程中往往使用无偏性和有效性这两个标准.

