北京化工大学 2016——2017 学年第一学期

《线性代数》期末考试试卷

课程代码	M	A	T	1	1	5	0	0	T

班级：__________姓名：___________学号：_________任课教师：____________分数：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$A^T$ 为 A 的转置矩阵，则行列式 $\left|A^T A\right|$______________.

2．矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 的逆阵 $A^{-1}=$ ____________________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，并且 $PA=B$,

则 $P=$ ________________.

4. 设 3 阶矩阵 A 的秩 $r(A)=1$，$\eta_1=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\end{pmatrix}^T,\eta_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,\eta_3=\begin{pmatrix}5 & 0 & k\end{pmatrix}^T$ 是方程组 $AX=0$ 的 3 个解向量，则常数 $k=$ ________.

5. 设 4 阶矩阵 A 满足 $\left|2E+A\right|=0,\ AA^T=4E,\ \left|A\right|<0,$ 其中 E 为 4 阶单位矩阵，则伴随矩阵 A^* 必有一个特征值为_____________.

6.（**注：仅 3.0 学分的专业做此题**）若实对称矩阵 A 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 X^TAX 的规范形为_________________________.

6*.（**注：仅 3.5 学分的专业做此题**）设 $ax^2+2bxy+cy^2=1(a>0)$ 为一椭圆的方程，则 a,b,c 满足关系式_____________.

二、计算题（每小题 14 分，共 70 分）

7. 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足方程 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&9\\1&8\\1&5\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

8. 讨论当参数 a ,b 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1. \end{cases}$

（1）无解；　(2) 有唯一解；　(3) 有无穷多解，并在此时用导出组的基础解系表示其通解.

9. 设 $f\left(x\right)=x^2+3x-5$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2）求 $f\left(\boldsymbol{A}\right)$ 的特征值和特征向量.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 有二重特征值.

（1）求 a；（2）判断 $\boldsymbol{A}$ 是否能对角化？

11. 已知实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2-2x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+2ax_2x_3+4x_1x_3$,$(a>0)$ 经过正交变换化为标准形 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

(1) 求 a,b 的值及所用的正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$.

(2)***（注：仅 3.0 学分的专业做此问）**确定该二次型的正定性.

四. 证明题（12 分）

12. （**注：仅** 3.0 **学分的专业做此题**）设向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)K,$$

其中 K 为 $s\times t$ 矩阵，且 A 组线性无关．证明 B 组线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $r(K)=t$．

12*. **（注：仅 3.5 学分的专业做此题**）设 A、B 是两个 n 阶非零矩阵，满足 $AB=\mathbf{0}, A^*\neq\mathbf{0}$．若 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\alpha_k$ 是齐次线性方程组 $BX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，α 是任意一个 n 维列向量．证明 $B\alpha$ 可由 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\alpha_k,\alpha$ 线性表示，并问何时线性表示是惟一的．