条件概率

一、条件概率

二、乘法定理

三、全概率公式与贝叶斯公式

四、小结

一、条件概率

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息(条件)下求事件的概率.

1. 引例 将一枚硬币抛掷两次,观察其出现正反两面的情况,设事件 A 为 “至少有一次为正面”,事件 B 为 “两次掷出同一面”. 现在来求已知事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率.

分析

设 H 为正面, T 为反面.

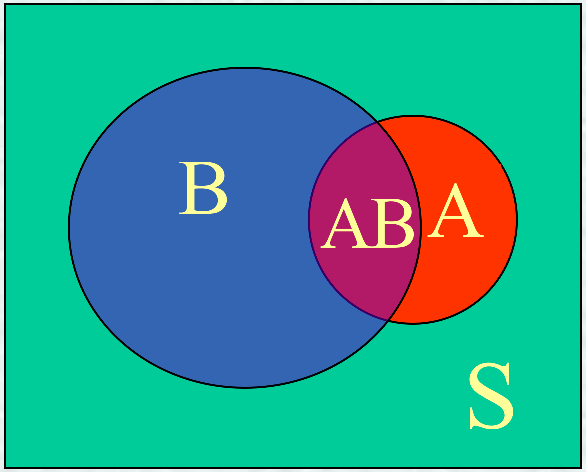
$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

$$A = \{HH, HT, TH\}, \quad B = \{HH, TT\}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率,记为

$P(B|A)$, 则 $$P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(A)} \neq P(B).$$

2. 定义



设 A, B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

例如，掷一颗均匀骰子，A={掷出2点}，

B={掷出偶数点}，　$P(A)=1/6$，　$P(A|B)=?$

已知事件B发生，此时试验

所有可……，

改变样本空间

B中共……是

等可能的，……在集A中，

于是$P(A|B)=$

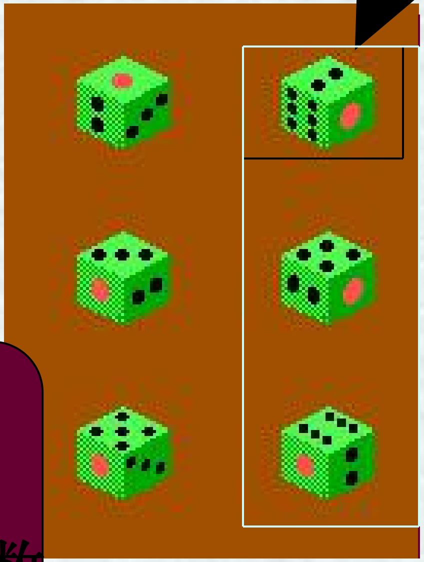
在缩减样本空间中A所含样本点个数

容易看到

$$P(A|B)=\frac{1}{3}$$

B发生后的缩减样本空间所含样本点总数

掷骰子



3. 性质

(1) 非负性：$P(B|A) \geq 0;$

(2) 规范性：$P(S|B)=1,\ P(\varnothing|B)=0;$

(3) $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B);$

(4) $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B).$

(5) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两不相容的事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

条件概率有两种计算方法：

1. 公式： $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

2. 改变样本空间——适用简单问题

一般 $P(A|B)\neq P(A)$

例1 某工厂生产100个产品, 其中有50个一等品、40个二等品，10个废品. 规定一、二等品都为合格品。从产品中任取1件，设事件A为“取到的是一等品”、事件B为“取到的是合格品”. 若任取一件为合格品，求该件为一等品的概率$P(A|B)$.

解:

$$P\left(A \mid B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{50}{90}$$

例2 掷两颗均匀骰子,已知第一颗掷出6点,问“掷出点数之和不小于10”的概率是多少?

解: 设A={掷出点数之和不小于10}

B={第一颗掷出6点}

应用定义

解法1: $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

解法2: $$P(A|B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

在B发生后的缩减样本空间中计算

例3 当掷五枚相同硬币时，已知至少出现两个正面的情况下，问正面数刚好是三个的条件概率？

解： 设A={至少出现两个正面}，B={出现三个正面}

则有

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{1-P(\overline{A})}$$

$\overline{A}$ ：至多一个正面，即一个正面或无正面

$$P(B\mid A)=\frac{\dfrac{C_5^3}{2^5}}{1-\dfrac{5}{2^5}-\dfrac{1}{2^5}}=\frac{5}{13}$$

例4 设A、B为两个事件，且 $0<P(A)<1,\ P(B)>0$，$P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$，证明 $P(AB)=P(A)P(B)$

证明：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B\mid \overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B-A)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{P(B-AB)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

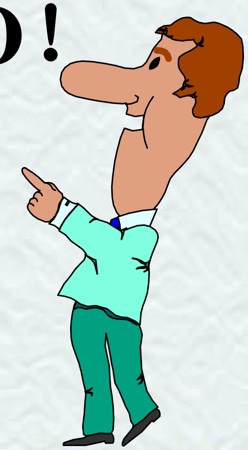
则： $P(AB)\left[1-P(A)\right]=P(A)\left[P(B)-P(AB)\right]$

故：$P(AB)=P(A)P(B)$

例5 监狱看守通知三个囚犯，在他们中要随机地选出一个处决，而把另外两个释放. 囚犯甲请求看守秘密地告诉他,另外两个囚犯中谁将获得自由.

因为我已经知道他们两人中至少有一人要获得自由，所以你泄露这点消息是无妨的.

NO!



如果你知道了你的同伙中谁将获释，那么，你自己被处决的概率就由1/3增加到1/2,因为你就成了剩下的两个囚犯中的一个了.

对于看守的上述理由,你是怎么想的?

解：记 A={因犯甲被处决}, B={因犯乙被处决}

C={因犯丙被处决}

依题意，$P(A)=1/3$,

$P(A|\overline{B})=P(A)\,/\,[1-P(B)]=1/2$,

$P(A|\overline{C})=1/2$,

看守说得对.

二、 乘法公式

由条件概率的定义：$P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

若已知$P(B)$, $P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$.

即：若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$ (2)

将A、B的位置对调，有

若 $P(A)>0$,则$P(BA)=P(A)P(B|A)$

而 $P(AB)=P(BA)$

故 $P(A)>0$,则$P(AB)=P(A)P(B|A)$ (3)

(2)和(3)式都称为乘法公式, 利用它们可计算两个事件同时发生的概率

拓展:

设 $P(A)>0$, 则有 $P(AB)=P(B|A)P(A).$

设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$, 则有

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

推广　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geq 2$,

且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\times P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\times\cdots\times P(A_2|A_1)P(A_1).$$

注意$P(A)$与$P(A \mid B)$的区别！

每一个随机试验都是在一定条件下进行的，设A是随机试验的一个事件，则$P(A)$是在该试验条件下事件A发生的可能性大小.

而条件概率$P(A|B)$是在原条件下又添加“B发生”这个条件时A发生的可能性大小，即$P(A|B)$仍是概率.

$P(A)$与$P(A|B)$的区别在于两者发生的条件不同,它们是两个不同的概念,在数值上一般也不同.

条件概率$P(A|B)$与$P(A)$数值关系

条件概率$P(A|B)$是在原条件下又添加"B发生"这个条件时A发生的可能性大小.

条件概率$P(A|B)$与$P(A)$数值关系谁大？一定是条件概率大吗？

不一定！！！

例：事件*A*、*B*，*P(A)=0.7* , *P(B)=0.5*，求条件概率 P(B|A) 的最大值和最小值

解：

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{0.7}$$

又 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

显然 $P(A\cup B)$ 最大 ，$P(AB)$最小

$A\supset B$ ，$P(AB)$最大

$0.5+0.7-1=0.2\le P(AB)\le P(B)=0.5$

显然 $P(A \cup B)$ 最大，, $P(AB)$最小

$A \supset B$ ，$P(AB)$最大

$$0.5+0.7-1=0.2 \le P(AB) \le P(B)=0.5$$

$$\frac{2}{7}=\frac{0.2}{0.7} \le P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{0.7} \le \frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}$$

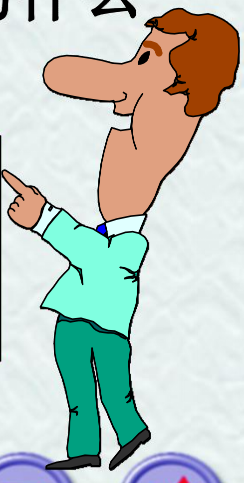
应用——抽签原理

例6： 一场精彩的足球赛将要举行，5个球迷好不容易才搞到一张入场券.大家都想去,只好用抽签的方法来解决.

入场券

5张同样的卡片，只有一张上写有“入场券”，其余的什么也没写. 将它们放在一起，洗匀，让5个人依次抽取.

“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大.”



后抽比先抽的确实吃亏吗？

解： 我们用A_i表示“第i个人抽到入场券”

$i=1,2,3,4,5.$

则$\overline{A_i}$表示“第i个人未抽到入场券”

显然，$P(A_1)=1/5$，$P(\overline{A_1})=4/5$

也就是说，

第1个人抽到入场券的概率是1/5.

由于 $A_2=\overline{A}_1A_2$

若第2个人抽到入场券，第1个人肯定没抽到.

由乘法公式

$$P(A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)$$

也就是要想第2个人抽到入场券，必须第1个人未抽到，

计算得：

$$P(A_2)=(4/5)(1/4)=1/5$$

同理，第3个人要抽到“入场券”，必须第1、第2个人都没有抽到. 因此

$$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=(4/5)(3/4)(1/3)=1/5$$

继续做下去就会发现, 每个人抽到“入场券”的概率都是1/5.

这就是有关抽签顺序问题的正确解答.

也就是说，抽签不必争先恐后.

抽签原理——无放回抽样

例14： 设袋中有r个红球，s个白球，现有n（$n\le r+s$)个人，一次随机地从袋子中抽取一个球，每次取出后不放回，令随机事件$A_n:(n\le r+s)$为事件“第n次取到白球”

求：$P(A_n)$

解

$$P(A_1)=\frac{s}{r+s}$$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})$$

$$=\frac{s}{s+r}\cdot\frac{s-1}{s+r-1}+\frac{r}{s+r}\cdot\frac{s}{s+r-1}=\frac{s}{s+r}$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{s}{s+r}\cdot\frac{s-1}{s+r-1}$$

$$P(A_1\overline{A_2})=P(A_1)P(\overline{A_2}\mid A_1)=\frac{s}{s+r}\cdot\frac{r}{s+r-1}$$

$$P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})=\frac{r}{s+r}\cdot\frac{s}{s+r-1}$$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid \overline{A_1})=\frac{r}{s+r}\cdot\frac{r-1}{s+r-1}$$

$$P(A_3)=P(A_1A_2)P\left(A_3\mid A_1A_2\right)+P(A_1\overline{A_2})P\left(A_3\mid A_1\overline{A_2}\right)+$$
$$P(\overline{A_1}A_2)P\left(A_3\mid \overline{A_1}A_2\right)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})P\left(A_3\mid \overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$$

$$=\frac{s}{s+r}$$ 与n无关，和抽签次序无关

例8 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为1/2,若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为7/10 , 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为9/10.试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以$A_i\,(i=1,2,3)$表示事件"透镜第 i 次落下打破",

以B 表示事件“透镜落下三次而未打破”.

因为 $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

所以 $P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})$

$$=(1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{200}.$$

例9 对含有5%废品的100件产品进行抽样检查，整批产品被拒绝接收的条件是在被抽查的5件产品（不放回抽样）中至少有一件是废品，试问该批产品被拒收的概率是多少？

解 $A_i=\{\text{第}\,i\,\text{次被抽查产品为合格品}\},(i=1,2,3,4,5)$

令$A = A_1A_2A_3A_4A_5$，则被拒收的概率为$P(\overline{A})=1-P(A)$

而

$$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4A_5)$$
$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)P(A_4\mid A_1A_2A_3)P(A_5\mid A_1A_2A_3A_4)$$

$P(A_1)=95\%$ $\quad P(A_2\mid A_1)=94/99$ $\quad P(A_3\mid A_1A_2)=93/98$

$P(A_4\mid A_1A_2A_3)=92/97$ $\quad P(A_5\mid A_1A_2A_3A_4)=91/96$

例10 市场上供应的灯泡中，甲产品占60%，乙厂占40%，甲厂产品的合格率是90%，乙厂的合格率是80%。若用A表示甲厂的产品，B表示产品为合格品，求：

1. 已知买到的是甲厂的一个产品，合格率是多少？
2. 买到一个产品是甲厂生产的合格灯泡的概率？

解：

$$P(B \mid A) = 90\%$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}) = P(B \mid A) P(A) = \frac{90}{100} \times \frac{60}{100} = 0.54$$

例11 10道题签，6道数学题，4道文学题，抽签答题，某人对数学题有80%的把握，对文学题有90%的把握，现随机取一个签，求：

1. 抽到数学题而且回答正确的概率
2. 抽到文学题而且回答正确的概率

解：A—抽到数学题　　B—抽到文学题　　C—回答正确

$$P(A)=\frac{6}{10},P(B)=\frac{4}{10},P\left(C\mid A\right)=80\%,P\left(C\mid B\right)=90\%$$

$$P(AC)=P(A)P\left(C\mid A\right)=\frac{6}{10}\times 80\%=48\%$$

$$P(BC)=P(B)P\left(C\mid B\right)=\frac{4}{10}\times 90\%=36\%$$

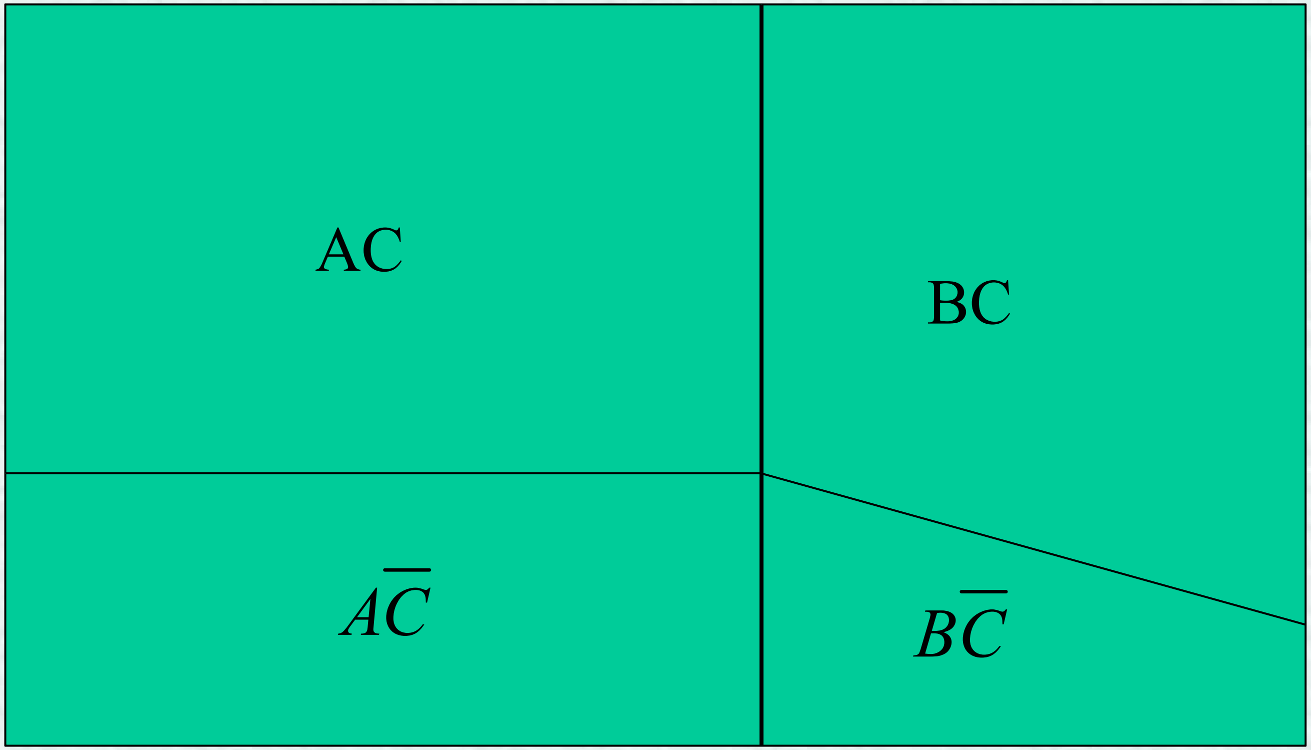
3. 答对题的概率是多少？

$$P(AC)=P(A)P\left(C\mid A\right)=\frac{6}{10}\times 80\%=48\%$$

$$P(BC)=P(B)P\left(C\mid B\right)=\frac{4}{10}\times 90\%=36\%$$

$$P(C)=48\%+36\%$$

为什么可用 二者相加之和，有何理论依据——全概率公式



$$C = AC \cup BC \quad , \quad AC \cap BC = \phi$$

$$P(C) = P(AC) + P(BC)$$

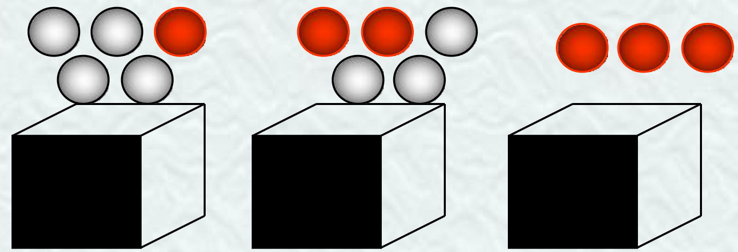
$$= P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B)$$

例12 有三个箱子，分别编号为1,2,3，1号箱装有1个红球4个白球，2号箱装有2红3白球，3号箱装有3红球. 某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，求取得红球的概率.

解：记 A_i={球取自i号箱}，

$i=1,2,3$;

B ={取得红球}

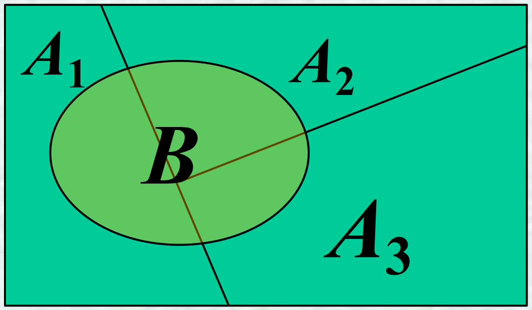


B发生总是伴随 … 之一同时发生，

运用加法公式得

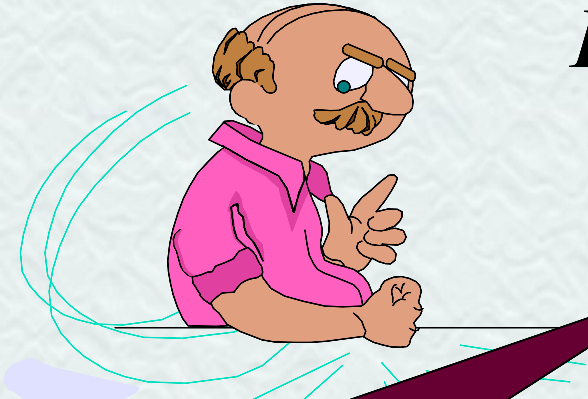
即 $B= A_1B+A_2$ … A_3B，

且 A_1B、A_2B … A_3B两两互斥



$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$$



对求和中的每一项运用乘法公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

代入数据计算得：$P(B)=8/15$

将此例中所用的方法推广到一般的情形，就得到在概率计算中常用的全概率公式.

三、全概率公式与贝叶斯公式

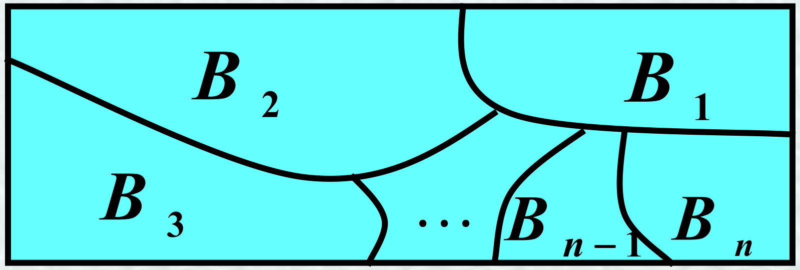
1. 样本空间的划分

定义　设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件, 若

(i)　$B_i B_j = \varnothing, i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n;$

(ii)　$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S.$

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.



2. 全概率公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S, A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分 ,且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

全概率公式

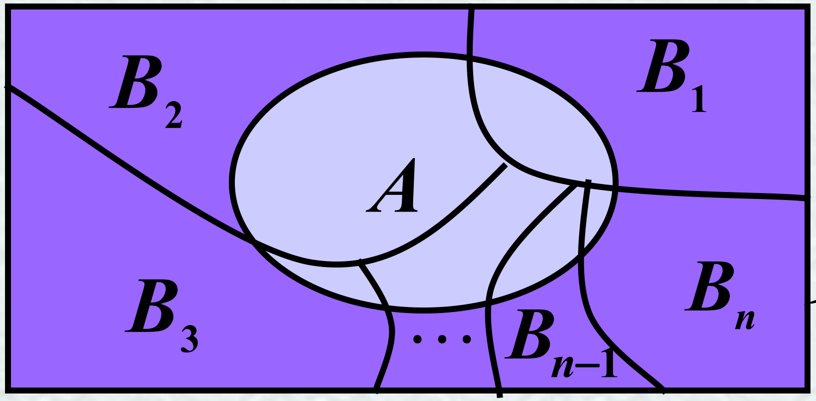
证明 $A = AS = A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)$

$$= AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n$$

由 $B_iB_j=\varnothing \Rightarrow (AB_i)(AB_j)=\varnothing$

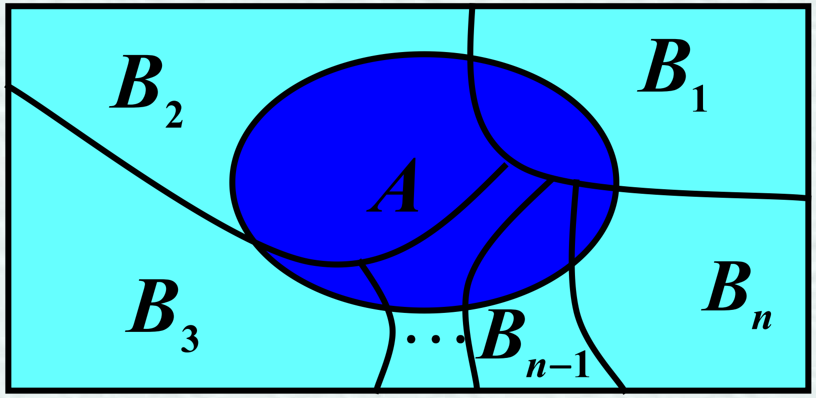
$$\Rightarrow P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$

图示



化整为零
各个击破

说明　全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题,分解为若干个简单事件的概率计算问题,最后应用概率的可加性求出最终结果.



全概率公式:

设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是两两互斥的事件，且$P(A_i)>0$， $i=1,2,\ldots,n$, 另有一事件B, 它总是与$A_1, A_2, \ldots ,A_n$之一同时发生，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

全概率公式的来由, 不难由上式看出:

"全"部概率$P(B)$被分解成了许多部分之和.

它的理论和实用意义在于:

在较复杂情况下直接计算$P(B)$不易,但B总是伴随着某个A_i出现，适当地去构造这一组A_i往往可以简化计算.

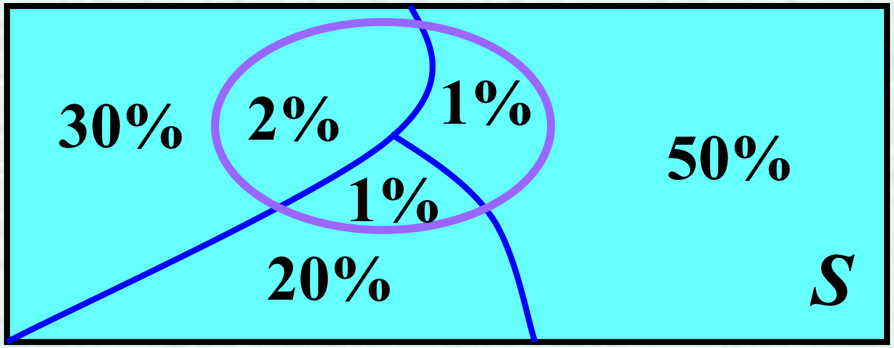
例13 有一批同一型号的产品，已知其中由一厂生产的占 30%，二厂生产的占 50%，三厂生产的占 20%，又知这三个厂的产品次品率分别为2%，1%，1%，问从这批产品中任取一件是次品的概率是多少?

解 设事件 A 为"任取一件为次品"，

事件 B_i 为"任取一件为 i 厂的产品", $i = 1,2,3.$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S,$$

$$B_i B_j = \varnothing, \quad i, j = 1,2,3.$$



由全概率公式得

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3).$$

$$P(B_1)=0.3,\ \ P(B_2)=0.5,\ \ P(B_3)=0.2,$$

$$P(A|B_1)=0.02,\ P(A|B_2)=0.01,\ P(A|B_3)=0.01,$$

故 $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$

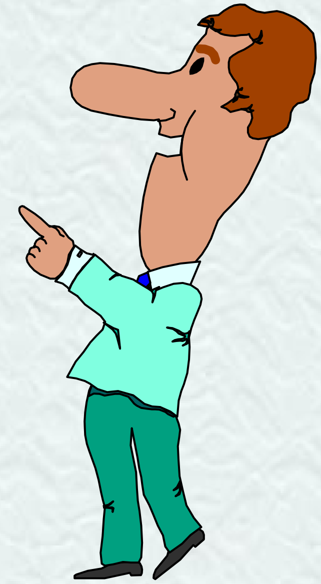
$$=0.02\times 0.3+0.01\times 0.5+0.01\times 0.2=0.013.$$

我们还可以从另一个角度去理解 全概率公式.

某一事件B的发生有各种可能的原因(i=1,2,…,n)，如果B是由原因A_i所引起，则B发生的概率是

$$P(BA_i)=P(A_i)P(B|A_i)$$

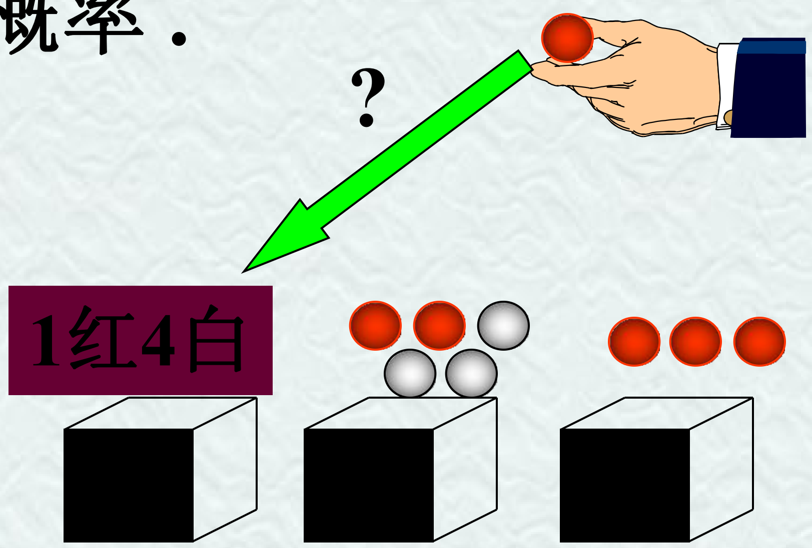
每一原因都可能导致B发生，故B发生的概率是各原因引起B发生概率的总和，即全概率公式.



由此可以形象地把全概率公式看成为“由原因推结果”，每个原因对结果的发生有一定的“作用”，即结果发生的可能性与各种原因的“作用”大小有关。因此全概率公式是一种加权平均，表达了它们之间的关系 。

如果因果互换了，从果到因，那就是贝叶斯公式了。

有三个箱子，分别编号为1,2,3，1号箱装有1个红球4个白球，2号箱装有2红球3白球，3号箱装有3红球. 某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，发现是红球,求该球是取自1号箱的概率 .

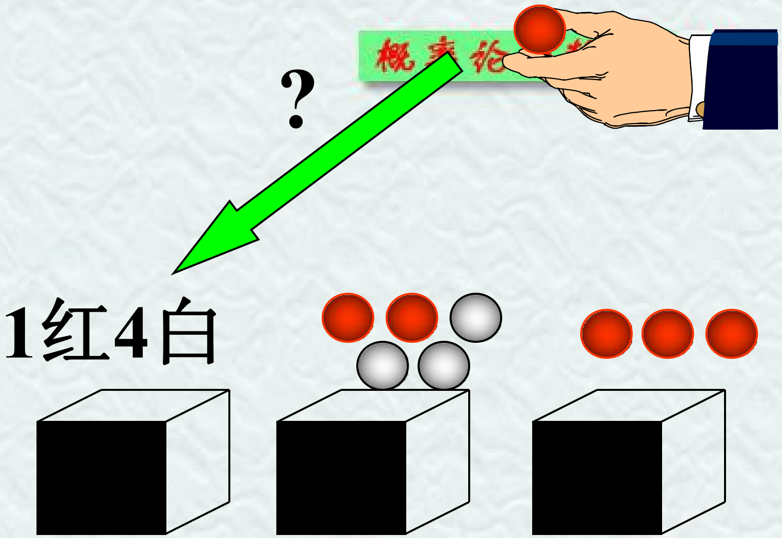


或者问:该球取自哪号箱的可能性最大?

这一类问题在实际中更为常见，它所求的是条件概率，是已知某结果发生条件下，求各原因发生可能性大小.

记 A_i={球取自i号箱}, i=1,2,3;

B ={取得红球}



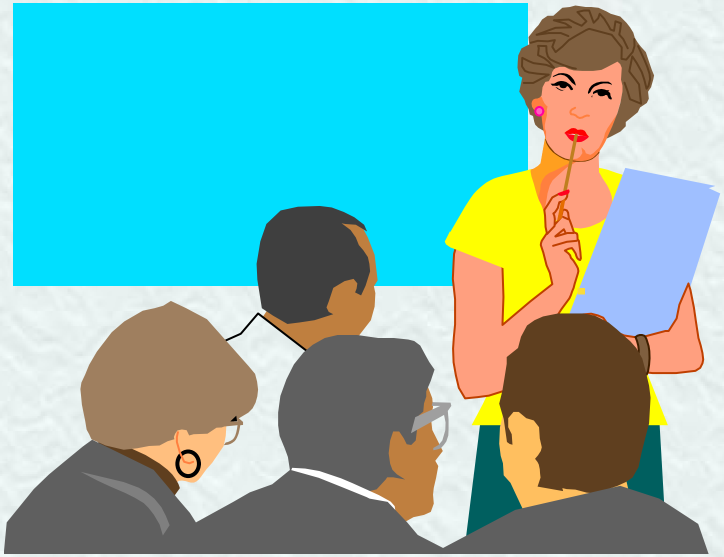
求$P(A_1|B)$

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

运用全概率公式
计算$P(B)$

将这里得到的公式一般化，就得到贝叶斯公式

贝叶斯公式在实际中有很多应用，它可以帮助人们确定某结果（事件 B）发生的最可能原因.



3. 贝叶斯公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S. A 为 E 的事件, B_1, $B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$, $(i = 1,2,\cdots,n)$, 则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

称此为**贝叶斯公式**.

证明

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

例15 某电子设备制造厂所用 的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下 的数据：

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在 仓库中是均匀混合的,且无区别的标志.

(1) 在仓库中随机地取一只 元件,求它是次品的概率;

(2) 在仓库中随机地取一只 元件,若已知取到的是次品,为分析此次品出自何厂 ,需求出此次品由三家工厂生产的概率分别 是多少. 试求这些概率 .

解 设 A 表示"取到的是一只次品", $B_i\ (i=1,2,3)$ 表示"所取到的产品是由第 i 家工厂提供的".

则 B_1, B_2, B_3 是样本空间 S 的一个划分,

且 $P(B_1)=0.15,\quad P(B_2)=0.80,\quad P(B_3)=0.05,$

$$P(A|B_1)=0.02,\quad P(A|B_2)=0.01,\quad P(A|B_3)=0.03.$$

(1) 由全概率公式得

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$

$$=0.0125.$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times 0.15}{0.0125}=0.24.$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=0.64,$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=0.12.$$

故这只次品来自第 2 家工厂的可能性最大 .

例16 对以往数据分析结果表 明，当机器调整得良好时，产品的合格率为 98%，而当机器发生某种故障时，其合格率为 55%. 每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格 品时，机器调整得良好的概率是多少？

解 设 A 为事件“产品合格”，

B 为事件“机器调整良好”.

则有

$$P(A|B)=0.98,\qquad P(A|\overline{B})=0.55,$$

$$P(B)=0.95,\qquad P(\overline{B})=0.05,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.98\times 0.95}{0.98\times 0.95+0.55\times 0.05}=0.97.$$

即当生产出第一件产品 是合格品时,此时机器调整良好的概率为 0.97.

贝叶斯公式
$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

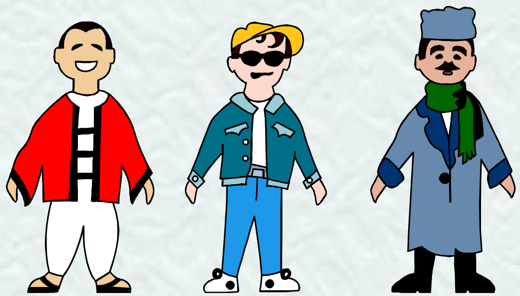
在贝叶斯公式中，$P(A_i)$和$P(A_i \mid B)$分别称为原

贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化。

$P(A_i)(i=1,2,\ldots,n)$是在没有进一步信息（不知道事件B是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识.

当有了新的信息（知道B发生），人们对诸事件发生可能性大小$P(A_i \mid B)$有了新的估计.

例如，某地发生了一个案件，怀疑对象有甲、乙、丙三人.



丙 乙 甲

偏小

在不了解案情细节(事件B)之前，侦破人员根据过去的前科，对他们作案的可能性有一个估计，设为

$\mathrm{P}(A_1)$ $\mathrm{P}(A_2)$ $\mathrm{P}(A_3)$

知道B发生后

但在知道案情细节后,这个估计就有了变化.

$P(A_1 \mid B)$ $P(A_2 \mid B)$ $P(A_3 \mid B)$

最大

比如原来认为作案可能性较小的某甲，现在变成了重点嫌疑犯.

例17 根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下的效果：若以 A 表示事件"试验反应为阳性"，以 C 表示事件"被诊断者患有癌症"，则有 $P(A|C)=0.95$, $P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$. 现在对自然人群进行普查，设被试验的人患有癌症的概率为0.005，即 $P(C)=0.005$, 试求 $P(C|A)$.

解 因为 $P(A|C)=0.95$,

$$P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.05,$$

$$P(C)=0.005,\quad P(\overline{C})=0.995,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(C|A)=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})}$$

$$=0.087.$$

即平均1000个具有阳性反应的人中大约只有87人患有癌症.

四、小结

1.条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ ⟶ 乘法定理

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$

全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

2. 条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别.

$P(AB)$ 表示在样本空间 S 中, AB 发生的概率,而 $P(B|A)$表示在缩小的样本空间 S_A 中, B 发生的概率.用古典概率公式,则

$$P(B|A)=\frac{AB\text{ 中基本事件数}}{S_A\text{ 中基本事件数}},$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 中基本事件数}}{S\text{ 中基本事件数}},$$

一般来说, $P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大.