วิชา 204451 Algorithm Design and Analysis ส่งงานที่ https://hw.cs.science.cmu.ac.th

รหัสนักศึกษา 640510636 ชื่อสกุล นางสาวอามิตา โพธิกลาง ตอนที่ 002

Assignment4 (ศ. 7 ก.ค. 66) : กำหนดส่งงาน : จ. 24 ก.ค. 66 (เวลา 23.59 น.)

ให้นักศึกษา

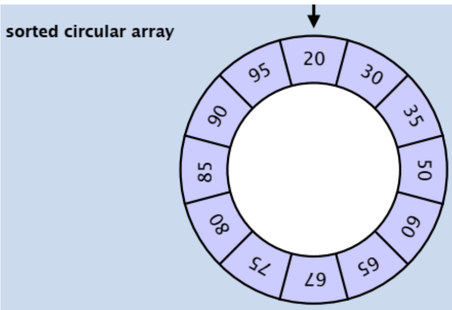
1. เขียนคำตอบตามโจทย์กำหนดด้วยลายมือ แล้วถ่ายรูป (นามสกุล .jpg) หรือไฟล์ pdf ส่งที่เว็บส่งการบ้านภาควิชาฯ
2. ตั้งชื่อไฟล์ในรูปแบบ assign_x_id เมื่อ x คือหมายเลข Assignment และ id คือ รหัสนักศึกษา (กรณีส่งหลายไฟล์ให้ตั้งชื่อเป็น assign_01_id_a.jpg โดย a หมายถึง ลำดับไฟล์ แล้วทำการ zip รวมทุกไฟล์ส่งในงาน Assignment เดียวกันด้วยชื่อ assign_01_id.zip แทน)
3. ส่งงานภายในวันเวลาที่กำหนด หากส่งเลยกำหนดให้ชี้แจงเหตุผลกับอ. ประจำ section (พิจารณาคะแนนตามเหตุผล)

ให้คำนวณหาค่า T(n) ของการแก้ปัญหาต่อไปนี้

(a) การค้นหาใน array ที่เรียงแล้วแบบวงกลม

กำหนดอาเรย์ที่เรียงแล้วแบบวงกลมขนาด n ช่องและสมาชิก x มาให้ จงหาอัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพที่ตัดสินได้ว่า x อยู่ในอาเรย์หรือไม่

ใช้ Binary Search $\rightarrow O(n\log n)$



ตัวอย่างในรูปสมมติว่าข้อมูลในอาเรย์เป็น 80,85,90,95,20,30,35,50,60,65,67,75 และ x คือ 20

(b) ช่วงว่างที่กว้างที่สุด

กำหนด *n* timestamps $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ของไฟล์ที่ถูกส่งมาให้เครื่องเซิร์ฟเวอร์ จงหาอัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพที่หาช่วงว่างที่นานที่สุดที่ไม่มีไฟล์ถูกส่งมายังเครื่องเซิร์ฟเวอร์

เรียงด้วย Sorting $\rightarrow O(n\log n)$

let time = 0 $\rightarrow O(1)$

find different of two timestamp $i \rightarrow n \rightarrow O(n)$

$\therefore$ ได้ $O(n\log n)$ #

(2) กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

```
Void Method1(A[1..n]):
    if n = 2 and A[1] > A[2]
        swap (A[1],A[2])
    else if n > 2
        m ← ⌈ 2n/3 ⌉
        method1(A[1 .. m])
        method1(A[n – m + 1 .. n])
        method1( A[1 .. m])
```

ให้หาสมการ Tn() ของเวลาในการทำงานของ method1 ข้างต้น

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{if } n = 2 \\ 3T(2n/3) + O(1) & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

และวิเคราะห์เพื่อแก้สมการ T(n) ข้างต้น

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(2n/3) + 1 \\ &= 3^2 T(2^2 n/3^2) + 2 \\ &= 3^2 T(2^3 n/3^2) + 3 \\ &\ \vdots \\ &= 3^k T(2^k n/3^k) + k \end{aligned}$$

จาก $\frac{2^k n}{3^k} = 2 \rightarrow n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^k \rightarrow k = \frac{\log n - 1}{\log 3 - 1} = \frac{\log\left(\frac{n}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)} = \log_{\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &= 3^{\log_{\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}\right)} T(2) + \log_{\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{n}{2}^{\log_2 3} + \log_{\left(\frac{3}{2}\right)} n - \log_{\left(\frac{3}{2}\right)} 2 \\ &= O(n^{\log_2 3}) \# \end{aligned}$$

วิชา 204451 Algorithm Design and Analysis ส่งงานที่ https://hw.cs.science.cmu.ac.th

รหัสนักศึกษา 640510636 ชื่อสกุล นางสาวอามิตา โพธิ์กลาง ตอนที่ 002

(2) จง**แสดงวิธีทำ**เพื่อหาคำตอบของสมการ Recurrence relation ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เพื่อวิเคราะห์หาเวลาในการทำงาน (Running Time) โดยจัดให้อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุด

A) ให้ใช้วิธี Iterative Substitute Method หรือ Recursion Tree Method

B) และวิธี Master Theorem

กำหนดสมการ Recurrence relationดังนี้ (1 ข้อ ให้ทำ 2 วิธี)

1) $T(n) = T(n-1) + 1$
2) $T(n) = 3T(n/3) + c,\ T(1)=c$
3) $T(n) = 4T(n/4) + n,\ T(1) = c$
4) $T(n) = 3T(n/4) + n^2,\ T(1)=c$
5) $T(n) = 4T(n/2) + n^3,\ T(1)= c$
6) $T(n) = 4T(n/4) + n\log n,\ T(1)= c$
7) $T(n) = T(n/2) + T(n/8) + n,\ T(1)= c$

1. $T(n) = T(n-1)+1$

a). $T(n) = T(n-1)+1$
$= T(n-2)+2$
$= T(n-3)+3$
$\vdots$
$= T(n-k)+k$

จาก $T(1) = 1$ จะได้ $n-k=1 \rightarrow k = n-1$

$T(n) = T(1)+(n-1)$
$= 1+n-1 = n = O(n)$

b.) ใช้ master theorem ไม่ได้ ไม่อยู่ในรูป $aT(n/b)+f(n)$

2. $T(n) = 3T(n/3)+c,\ T(1) = c$

a.) $T(n) = 3T(n/3)+c$
$= 3^2T(n/3^2)+[3(1)+1]c$
$= 3^3T(n/3^3)+[3(2)+1]c$
$\vdots$
$= 3^kT(n/3^k)+[3(k-1)+1]c$

จาก $\frac{n}{3^k} = 1 \rightarrow n = 3^k \rightarrow \log_3 n = k$

$T(n) = nT(1) + 3c\log_3 n + c$
$= cn + \frac{3c\log n}{\log 3} + 3 = O(n)$

b) $a = 3,\ b = 3,\ f(n) = c$
$f(n) = \Theta(1),\ \log_3 3 = 1$
* case 1.
$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_3 3})$
$= \Theta(n)$ #

3. $T(n) = 4T(n/4)+n,\ T(1) = c$

a.) $T(n) = 4T(n/4)+n$
$= 4^2T(n/4^2)+2n$
$= 4^3T(n/4^3)+3n$
$\vdots$
$= 4^kT(n/4^k)+kn$

จาก $\frac{n}{4^k} = 1 \rightarrow n = 4^k \rightarrow k = \log n$

$T(n) = nT(1) + n\log n$
$= (n+n\log n = O(n\log n)$

b.) $a=4,\ b=4,\ f(n) = n$
$n^{\log_b a} = n = n$
*case
$T(n) = \theta(n\log n)$ #

4. $T(n) = 3T(n/4)+n^2,\ T(1) = c$

a.) $= 3(3T(n/16)+(n/4)^2)+n^2$
$= 3^2T(n/16)+3(n/4)^2+n^2$
$\vdots$
$= 3^kT(n/4^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 3i\left(\frac{n}{4i}\right)^2$

$\left(\frac{n^2}{4^0}\right)\sum\left(\frac{3i}{4i}\right)^i$
$= n^2 \cdot \sum\left(\frac{3}{4}\right)^i$
$= n^2 \cdot \left(\frac{1}{1-3/4}\right)$
$= 4n^2$

b) $a = 3,\ b = 4,\ f(n) = n^2$
$f(n) : \Theta(n^2),\ \log_4 3 < 2$
* case
$\therefore T(n) = \theta(n^2)$

5. $T(n) = 4T(n/2)+n^3,\ T(1) = c$

a. $T(n) = 4T(n/2)+n^3$
$= 4(4T(n/4)+(n/2)^3)+n^3$
$= 4^2T(n/4)+4(n/2)^3+n^3$
$= 4^2(4T(n/8)+(n/4)^3)+4(n/2)^3+n^2$
$= 4^3T(n/8)+4^2(n/4)^3+4(n/2)^3+n^3$
$\vdots$
$= 4^kT(n/2^k)+4^{k-1}(n/2^{k-1})^3+\ldots+4(n/2)^3+n^3$

stop ที่ $n/2^k = 1,\ k = \log n$

$T(n) = 4^{\log n}T(1)+4^{\log n-1}(n/2)^3+\ldots+4(n/2)^3+n^3$

$T(n) = O(n^3)$

b.) 4, $b = 2,\ f(n) = n^3$
$n^{\log_2 4} = n^2 < n^3$
และสำหรับ $\frac{\cancel{4}n^3}{\cancel{8}2} \leq cn^3 \rightarrow c \geq \frac{1}{2}$
$\therefore$ ที่ $c = \frac{1}{2} < 1$ ทำให้ $T(n) = n^3$

6. $T(n) = 4T(n/4) + n\log n,\ T(1) = c$

a. $T(n) = 4T(n/4)+n\log n$
$= 4[4T(n/4^2)+\frac{n}{4}\log(\frac{n}{4})]+n\log n$
$= 4^2T(n/4^2)+2n\log n - 2n$
$= 4^2[4T(n/4^3)+\frac{n}{4^2}\log(\frac{n}{4^2})]+2n\log n-2n$
$= 4^3T(n/4^3)+3n\log n-4n-2n$
$\vdots$
$= 4^kT(n/4^k)+kn\log n-2n[(k-1)+\ldots+2+1]$
$= 4^kT(n/4^k)+kn\log n - n(k^2-k)$

จาก $\frac{n}{4^k} = 1 \rightarrow n = 4^k \rightarrow k = \frac{\log n}{2}$

$T(n) = nT(1) + \frac{1}{2}n\log^2 n - \frac{1}{4}n\log^2 n + \frac{1}{2}\log n$

$= cn + \frac{1}{4}n\log^2 n + \frac{1}{2}\log n$

$= O(n\log^2 n)$

b.) $a = 4$, $b = 4$, $f(n) = n\log n$

$n^{\log_b a} = n < n\log n$

แต่สำหรับ $4\left(\frac{n}{4}\right)\log\left(\frac{n}{4}\right) \le cn\log n$

$n\log n - 2n \le cn\log n$

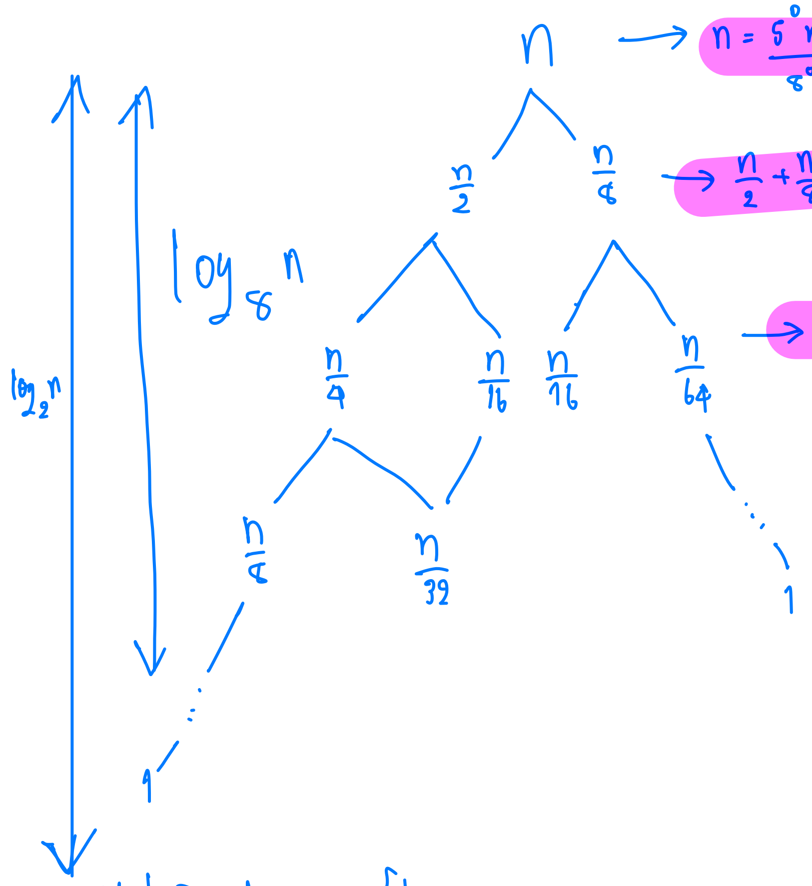
$1 - \frac{2}{\log n} \le c$

ที่ให้ค่า c ที่เป็นไปได้ $c \geq 1$

∴ ไม่มีค่า $c < 1$ ที่จะใช้ master theorem ไม่ได้

---

7. $T(n) = T(n/2) + T(n/8) + n$, $T(1) = c$



$n = \frac{5^0 n}{8^0}$

$\frac{n}{2} + \frac{n}{8} = \frac{5n}{8} = \frac{5^1 n}{8^1}$

$\frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{64} = \frac{25n}{64} = \frac{5^2 n}{8^2}$

มีไม่เกิน $\log_2 n$ ชั้น

ได้ว่า $\frac{5^{\log_2 n} n}{8^n} + \dots + \frac{5^2 n}{8^2} + \frac{5n}{8} + n = n\left[\left(\frac{5}{8}\right)^{\log n} + \dots + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^1 + \left(\frac{5}{8}\right)^0\right]$

$= n\left[\frac{8}{3} - \frac{5^{\log n + 1}}{3 \cdot 8^{\log_2 n}}\right] = \frac{8n}{3} - \frac{5n^{1+\log_2 5}}{3 \cdot n^3}$

$= \frac{8n}{3} - \frac{5}{3}n^{\log 5 - 2} = O(n)$

b.) ใช้ master theorem ไม่ได้เพราะไม่อยู่ในรูป $aT(n/b) + f(n)$