



MATHONOMICON

VOL. 1 101 (ONE-O-ONE)

Table des matières

| | |
|---------------------------------|---|
| Table des matières | 2 |
| Introduction | 3 |
| 1 Briques de base | 9 |
| 1.1 Algèbre Booléenne | 9 |

Introduction

Comme les plus perspicaces d'entre vous l'auront compris en lisant le titre du présent document, il s'agit ici de parler de maths. Pourquoi donc ? Les mathématiques sont je pense laissées de côté de nos jours. Non pas dans le sens où peu de gens les étudient : rien ne serait plus faux. Je parle de la quasi-absence de vulgarisation en la matière. Alors qu'il ne pas difficile de trouver des ouvrages de vulgarisation de physique rendant accessibles des concepts aussi alambiqués que la relativité générale à tout être de bonne volonté, on ne peut que déplorer l'absence de médias équivalents pour les mathématiques. Par ailleurs, la façon dont elles sont présentées dans le système français,¹ bien qu'ayant des vertues pédagogiques indéniables et permettant de donner rapidement les outils de base pour les calculs de la vie courante, ne donne pas, à mon sens, une vision de ce que sont vraiment les mathématiques. Tout au plus apprend-on une série de recettes de cuisine nous permettant de résoudre des problèmes bien précis. Certes cela peut d'avérer utile. Certes encore il se trouve des gens pour considérer que c'est faire des maths que de faire cela. Il n'en reste pas moins que réduire ce domaine des sciences à cela est *un poil* réducteur. D'autant plus que cette partie est loin d'être la plus intéressante.

Avant de terminer mes élucubrations d'une légitimité douteuse sur la qualité de l'enseignement des maths, sachez qu'il n'est absolument pas nécessaire d'avoir des connaissances de bases pour lire ce livre. Gardez également à l'esprit que, quand bien même vous auriez eu du mal à suivre les cours que vous aviez à l'école, le contenu ici est différent. Du coup, même si vous aviez du mal, j'ai bon espoir que vous me compreniez. À la condition bien évidemment que vous y mettiez du vôtre.²

Une autre des motivations qui m'ont poussé à écrire ce *mathonicon* vient du constat que la connaissance donne le pouvoir. La contraposée est tout particulièrement vraie : l'absence de connaissance entraîne l'absence de pouvoir. Il est infiniment plus facile de manipuler une personne en l'entraînant sur un terrain qu'elle ne connaît qu'en la laissant parmi les éléments qu'elle maîtrise. Par exemple, l'utilisation politique actuelle des statistiques³ fait bondir n'importe

1. D'un autre côté, ce n'est pas forcément beaucoup mieux ailleurs d'après ce que j'ai vu.

2. Non parce que sinon vous pouvez toujours courir : la connaissance ne va vous tomber toute seule dans le bec ! Ah, mais !

3. En dépit du fait qu'il ne s'agisse pas vraiment de mathématiques, j'ai décidé de traiter (fort superficiellement, je suis tout sauf un spécialiste en la matière) le sujet ici au motif que quand même, ça sert pas mal ces trucs.

quelle personne ayant un tant soit peu de connaissances sur le sujet. Par exemple, corrélation n'est pas causalité ; mais j'y reviendrai en temps utile.

Plus généralement, la pensée mathématique est à la base de la pensée scientifique. Par conséquent, une fois que vous aurez pris le “coup d'esprit” (on ne peut pas vraiment parler de coup de main), vous serez à même de porter un regard critique sur les discours “scientifiques” des différents illuminés capables d'affirmer, par exemple, que la fin du monde est pour 2012, “preuve à l'appui”. Affirmer qu'une chose est vraie sans pouvoir le démontrer, c'est en réalité ne rien dire. Les matheux le savent mieux que quiconque, eux dont le cœur de métier est de précisément de démontrer de nouveaux théorèmes. J'espère sincèrement que vous serez convaincus de cela après avoir lu le mathonicon et, surtout, j'espère que vous saurez juger efficacement de la qualité d'une argumentation au sens strictement logique, sans tenir compte des artifices rhétoriques.

Un autre intérêt basement pragmatique de la connaissance des mathématiques provient d'un constat très simple : un autre ordinateur n'est rien de plus qu'une machine à calculer. Il n'est rien de moins non plus. Par conséquent, pour espérer comprendre comment fonctionne ces bestioles à un niveau plus avancé que “lolilol facebook et msn c'est trop bien”,⁴ il est extrêmement utile d'avoir de bonnes bases en maths. En fait, si vous voulez vous mettre sérieusement à l'administration de systèmes ou, pire, à la programmation, il est impensable de ne pas avoir un bagage suffisant en maths.

Pour toutes ces raisons, je me suis lancé dans la folle entreprise de rédiger un document se voulant une bible des matheux. Non pas dans le sens où il contiendra toutes les connaissances actuelles car une vie, la mienne en l'occurrence, n'y suffirait. En fait, je l'envisage comme un moyen de fournir à tout un chacun un aperçu de l'étendue réelle des mathématiques. Plus même qu'un aperçu, j'ose croire fournir également les bases théoriques qui permettent une compréhension réelles des résultats évoqués : il ne s'agit pas de savoir réciter les théorèmes que je mentionne tout au long du mathonicon mais bien de les intégrer, des les intérioriser presque à tel point que vous ne réfléchirez même plus avant des les utiliser. Vous remarquerez immédiatement les confusions entre contraposées et réciproques et vous penserez à des structures algébrique quand on vous parlera d'anneaux. Un autre avantage, c'est que vous pourrez vous extasier sur la complexité de ce qui vous entoure. Vous ne pourrez plus manquer la dimension fractale des côtes de Bretagne et vous apprécierez à leur juste valeur les algorithmes qui vous ont permis de télécharger ce document. Cette capacité à remarquer une beauté que tant ignore est je trouve infiniment précieuse.

Mais pourquoi donc me lancer dans une entreprise de la sorte ? Laissez-moi moi contourner habilement cette question on vous contant une histoire. Une histoire on ne peut plus vraie car facilement vérifiable (les moteurs de recherche sont vos amis). Vous n'êtes probablement pas sans avoir qu'il y a de cela plusieurs dizaines d'années nous nous somme joyeusement entretués à l'échelle mondiale, qui coulant des bateaux dans l'Atlantique depuis son sous-marin, qui massacrant avec force enthousiasme des centaines de civils à Beijing, qui enfin recouvrant une ville de dispositifs explosifs déclenchés par simple contact.⁵ Avant même que l'on en arrive

4. Allons, on en connaît tous des comme ça. C'est pas grave hein, on les aime quand même. Même s'ils sont très vilains. Parce qu'ils sont très très vilains, hein !

5. U-boat pendant la bataille de l'Atlantique, sac de Pékin et n'importe quel bombardement de n'importe quel

là, les Polonais avaient un mauvais pressentiment vis-à-vis de leur voisin Germain. De plus, celui-ci avait pris durant les années 20-30 l'habitude de chiffrer ses communications, c'est à dire d'appliquer une transformation mathématique à ses messages de façon à les rendre inintelligibles pour quiconque les intercepterait. Le processus était bien évidemment réversible pour peu que l'on connaisse une certaine clé, c'est à dire *grosso modo* un mot de passe. Les Polonais, et l'avenir prouvera qu'ils ont bien fait, ce sont donc attelés à la tâche de décoder ces messages sans connaître ne serait-ce que le fonctionnement exact de la machine utilisée par les Allemands. Et bien évidemment, sans avoir *a priori* aucune information sur les clefs utilisées. Cela peut sembler difficile mais ce serait en réalité un doux euphémisme que de dire cela : les mathématiques impliquées (études des permutations) ne sont pas franchement triviales et, même en ayant les connaissances adéquates, il faut encore avoir les idées et la créativité nécessaires à la découverte d'une solution.

Lors donc, un mathématicien polonais, Marian Rejewski, à force d'astuces, de persévérance et d'innovations⁶ est parvenu à percer cette protection des messages. Non seulement il a compris le fonctionnement de la machine utilisée par les Allemands (ENIGMA) mais il a également conçu et construit des machines en automatisant le décryptage : les premières bombes cryptographiques. Ces machines sont les ancêtres des ordinateurs tels que celui que vous utilisez probablement pour lire ce tome du Mathonomicon. Néanmoins, le passage d'une machine spécialisée à une machine programmable pouvant accomplir est le fait d'un autre génie, plus connu, Alan Turing. Mais revenons à notre ami Marian. Juste avant que les nazis envahissent la Pologne, il fuit en direction de la France (alors encore libre) et y rencontra justement M. Turing à qui il présenta ces travaux et le fonctionnement de ses bombes cryptographiques. Turing compris la leçon et retourna en Angleterre, à Bletchey Park où il industrialisa la cryptanalyse d'ENIGMA : les alliés connaissaient ainsi en temps quasi-réel des messages que les Allemands croyaient naïvement sécurisés. D'où victoire dans la bataille de l'Atlantique (c'est facile de couler des U-boats quand on sait où ils sont) puis, moins directement certes, victoire des alliés. Tout cela grâce à une bande de mathématiciens parmi lesquels seul Turing, père de l'informatique, deviendra (un peu) célèbre. Marian retournera en Pologne et vivra dans le plus complet anonymat pendant des années. Tout au plus y'a-t-il *une* statue à sa gloire, quelque part en Pologne. Pourtant, qui sait ce que nous serions s'il n'avait pas été là ?

Je ne prétends pas combattre le nazisme en écrivant et en diffusant librement le Mathonomicon. Mais j'ose croire que j'accomplis une bonne action. Qui sait, peut-être aidera-t-il un jour à un jeune cryptanalyste à déchiffrer les communications d'une dictature ? Je pense que je ne pourrais pas rêver plus belle récompense pour le travail que j'ai fourni ici. Néanmoins, comme l'histoire de Marian Rejewski le montre,⁷ les mathématiciens sont souvent condamnés à rester dans l'ombre. Bien que leur action soit d'une importance cruciale, elle est presque toujours cachée. Difficile d'intéresser un public profane avec des équations sur un tableau noir. De la même façon, je ne m'attends pas à ce que vous ressentiez une émotion incroyable en lisant ce livre. Je pense néanmoins que si vous en prenez la lecture à cœur, votre mode de pensée sera

ville par n'importe quelle alliance pour ceux qui auraient du mal à suivre mes allusions.

6. Il a aussi un peu corrompu un officer allemand. Parce que oui, des fois on peut tricher.

7. Parce que vous croyiez que je vous avait raconté tout ça pour la déconne ?

un peu modifié.

Qui suis-je donc pour écrire ce bouquin me demanderez-vous ? Léo de mon prénom, je référerai à ma modeste personne tout au long de cet ouvrage en l'appelant par ce qu'elle est : "votre serviteur". Tout au plus ajouterai-je que je suis un matheux versé dans une moindre mesure dans d'autre sciences, d'où des exemples que j'espère variés pour illustrer les différents concepts que je présente ici.

Le Mathonomicon se découpe en deux tomes. Le premier, "101"⁸ présente les concepts que j'estime basiques non pas dans le sens où ils sont faciles d'accès, même si cela s'avère être le cas, mais dans le sens où ils sont aux fondations de la construction des mathématiques. Le second, "Serious Business" passe au niveau supérieur et aborde des thèmes plus complexes tout en approfondissant ceux déjà traités. Toutefois, si vous lisez le second après le premier, tout se passera bien.

Vous pouvez lire ce document dans l'ordre, auquel cas vous profiterez de la progression logique et de la difficulté progressive des thèmes abordés que je me suis évertué à mettre en place. Si vous vous intéressez à un sujet plus spécifique, vous trouverez en figure un "GOA⁹ de dépendances", c'est à dire une représentation schématique des chapitres pré-requis pour un chapitre donné.

La progression logique évoquée précédemment est très proche de celle de mon cours de maths de première année de prépa, que mon professeur de l'époque soit remercié ici. Certes, un remerciement anonyme n'est pas follement impressionnant mais on ne me taxera pas d'ingratitude. Le nom même de cet ouvrage est une référence direct au Cryptonomicon, livre fictif mentionné dans le roman Cryptonomicon de Neal Stephenson. Le Cryptonomicon, tel que décrit dans ce roman (à qui il a donné son nom, vous suivez ?¹⁰) est un livre écrit à plusieurs mains décrivant l'état de l'art de la cryptographie. Je ne prétends cependant pas décrire l'état de l'art des mathématiques ici, encore une fois ma vie n'y suffirait pas. Ce nom est lui-même une référence au Necromicon évoqué par Lovecraft. Je serais extrêmement flatté si ce livre servait à invoquer Cthulhu mais je n'y crois pas trop.

Enfin, au niveau de la forme, sachez que j'ai fait de mon mieux pour maintenir un certain humour. Ne soyez donc pas surpris si certains exemples sont bizarres, cocasses, voire franchement débiles. Ils n'en sont pas moins pertinents. En théorie. Le *Poignant's guide to Ruby*, pour ceux qui connaissent, m'a donné l'idée de traiter le sujet sans me prendre au sérieux voire même en pétant volontier un câble de-ci de-là. Puisse son auteur en être remercié.

J'évoque évidemment les concepts sous leur vrais noms. Ils peuvent être intimidant : ne vous laissez pas faire et lisez tout de même : vous leur montrerez bientôt qui est le patron. Enfin, de bonnes âmes n'ont pas manqué de me relire ; qu'il s'agisse de corriger mon orthographe périliciteuse ou de "tester" une analogie explicative. Qu'elles trouvent ici toute ma gratitude et toutes mes excuses pour la petite part de santé de mentale qu'elles n'auront pas manqué de perdre dans le procédé. J'ai tâché de citer mes sources lorsque je me souvenais où j'avais appris

8. Prononcez "ouane-o-ouane", à l'anglaise. Il est de coutume de donner le numéro 101 au cours d'introduction dans les universités américaines.

9. Graphe Orienté Acyclique. Vous verrez cela bientôt !

10. Yo dawg ! I heard you like books so I put a Cryptonomicon in your Cryptonomicon so you could read while you read !

telle ou telle notion. Néanmoins, il est fort probable que les-dites sources soient en anglais : mes plus plates excuses aux lecteurs exclusivement francophones.

Je pense avoir suffisamment blablatté et je tiens à assurer les lecteurs parvenus jusqu'ici de mon plus profond respect. Le plus dur est passé, plus jamais vous ne lirez de tels pavés dans ce livre. Passons maintenant sans plus attendre aux choses sérieuses.

Chapitre 1

Briques de base

Le présent chapitre étant le premier, je m'en vais commencer par le commencement. En l'occurrence, l'algèbre Booléenne est au cœur de la pensée mathématique. Les notions d'équivalence, d'implications, de conjonction, etc. sont tous simplement incontournables aussi nous n'allons pas essayer de les contourner. Une fois la logique booléenne acquise, on corsera le tout en raisonnant sur des ensembles d'abord de façon intuitive puis plus rigoureusement en utilisant des quantificateurs. Ensuite, on utilisera ces magnifiques outils conceptuels pour construire les entiers (le genre de truc qui est vaguement utile puisqu'il se trouve absolument au *centre* des maths) et pour voir la notion de fonction (qui est à ranger juste à côté des entiers).

1.1 Algèbre Booléenne

Nommée ainsi en l'honneur de M. Boole, mathématicien britannique du XIX^{ème} siècle, l'algèbre de Boole traite des relations logiques de base qu'il peut exister entre différentes déclarations. Comme nous allons le voir, on peut associer des variables à ces déclarations et, en fait, ce sont ces variables que nous allons étudier. Les-dites variables seront nommées ici x , y ou encore x_1 , x_2 , etc., comme l'exige une tradition impliquant DesCartes et des matheux arabes.

1.1.1 Opérations de base

Pour passer des déclarations (ou affirmations) aux variables, il suffit de procéder de la façon suivante.

Mettons que j'affirme que "je porte un pantalon". C'est mon droit le plus strict et, si vous voulez mon avis, c'est plutôt mieux comme ça. Créons la variable x de telle façon que x vaille 1 si ma déclaration est vraie et 0 si elle fausse. Si vous démontrez que $x = 1$, alors vous savez que je porte un pantalon. Dans le cas contraire, vous savez qu'il faut détourner poliment les yeux. Bien.

J'affirme maintenant que "je porte un T-shirt". Associons à cette déclaration la variable y , de la même façon que précédemment. Comme vous êtes une personne de bonnes mœurs, vous

voulez vous assurer de ce que je porte au moins un pantalon *ou* un T-shirt. Et comme vous êtes une personne pressée, vous ne voulez pas perdre de temps à regarder deux variables pour le savoir, en l'occurrence x et y . Vous aimeriez bien en créer une qui vous donne directement l'information voulue. En fait, vous voudriez une variable z telle que :

- Si $x = 1$, alors $z = 1$ (si je porte un pantalon, vous êtes content).
- Si $y = 1$, alors $z = 1$ (si je porte un T-shirt, vous êtes content).
- Si $x = 0$ et $y = 0$, alors $z = 0$ (si je ne porte ni pantalon ni T-shirt, vous n'êtes *pas* content).

Ceci peut se réécrire d'une façon un peu plus redondante mais plus facilement généralisable en utilisant une table de vérité. On appelle ainsi un tableau qui regroupe toutes les valeurs possibles des variables considérées (ici, x et y) et qui donne pour chaque combinaison la valeur d'une autre variable (ici, z). La figure 1.1 donne celle qui nous intéresse.

| x | y | z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Figure 1.1: Votre première table de vérité ! Que d'émotions !

Vous noterez qu'en fait, z est vrai (c'est-à-dire "vaut") si x *ou* y le sont. Du coup, on peut écrire tout simplement que " $z = x \text{ OU } y$ ". Comme on est décidément très pressés, on peut écrire ça de façon plus compact : $z = x \vee y$. La table de vérité figure 1.1 est donc tout simplement celle du **OU** logique.

Une personne extrêmement à cheval sur le code vestimentaire serait cependant rassurée de savoir que je porte un pantalon **ET** un T-shirt. Dans ce cas, elle peut se créer une nouvelle variable u obéissant à la table de vérité figure 1.2.

| x | y | u |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Figure 1.2: La table de vérité du ET logique

Fort logiquement,¹ on peut écrire que $u = x \text{ ET } y$. Là encore, on peut l'abrégé en $u = x \wedge y$.

Imaginons maintenant que je possède une chemise hawaïenne.² Créons encore une nouvelle variable h qui soit comme précédemment vraie (c'est-à-dire égale à 1) si je la porte et fausse

1. Ce qui est plutôt une bonne chose dans la mesure où le présent chapitre prétend vous inculquer les bases de la logique formelle

2. Ce n'est bien sûr pas le cas, j'ai une dignité quand même. C'est juste pour l'exemple.

dans le cas contraire (donc égale à 0). Dans ce cas, si on associe une variable v à votre bonheur d'esthète, il est nécessaire que h et v aient des valeurs opposées : si l'un est vrai, l'autre doit être faux (et vice-versa). La table de vérité de la relation que vous voulez est donnée figure 1.3.

| x | v |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Figure 1.3: La table de vérité du NON logique

Comme toujours, il existe une façon croquignollette d'exprimer l'idée que v a la valeur opposée de celle de h . On dit que v est la **négation** de h et on le note $v = \neg h$.

Vous connaissez maintenant toutes les opérations logiques de base, vous êtes donc prêt à construire un ordinateur et à démontrer l'incomplétude de Gödel. Les opérations en question sont :

Disjonction C'est à dire prendre le OU de deux variables. On la note avec le symbole \vee .

Conjonction C'est à dire prendre le ET de deux variables. On la note avec le symbole \wedge .

Négation C'est à dire prendre la valeur opposée d'une variable. On la note avec le symbole \neg .

On appelle **formule** un ensemble de variables logiques liées par ces relations, par exemple $(x \wedge \neg y) \vee z$ ou bien $\neg x \vee ((y \wedge z) \vee u)$

1.1.2 Creusons un peu plus

1.1.3 Un exemple : résoudre un sudoku

Problème

J'imagine que vous savez tous ce qu'est un sudoku mais, dans le cas où certains de mes lecteurs bien-aimés l'ignoraient, laissez-moi vous en rappeler le principe. On dispose d'une grille de 9 cases par 9 cases et on doit la remplir avec des chiffres (entre 1 et 9) de telle façon que :

- Le même chiffre n'apparaisse pas deux fois sur une même ligne.
- Le même chiffre n'apparaisse pas deux fois sur une même colonne.
- Le même chiffre n'apparaisse pas deux fois dans l'un des 9 sous-carrés de taille 3x3.

Une instance de sudoku correspond à une telle grille partiellement remplie. Le but du jeu est de finir de la remplir en respectant les règles sus-mentionnées. Qu'est-ce que ça fait classe de placer "sus-mentionné" dans un texte, ça fait tout de suite très sérieux.

En bon matheux, résoudre *une* grille *particulière* ne nous intéresse pas. Ce qu'on veut, c'est résoudre le cas général ; c'est à dire trouver une stratégie efficace pour résoudre rapidement n'importe quelle instance. À la condition d'avoir le programme qui va bien, on peut le faire en utilisant des formules logiques.

Stratégie

Vu que j'ai cassé le suspens en disant qu'on allait le faire en utilisant des formules logiques, je ne peux pas vous demander de trouver cette idée. Surtout que bon, vu que c'est dans une sous-section "exemple" d'une partie sur l'algèbre de Boole, vous pouviez vous douter qu'on allait s'en servir. Mais je m'égare.

Pour pouvoir écrire une formule logique, il nous faut des variables. Ça me semble être un début raisonnable, j'espère que vous serez d'accord. J'impose unilatéralement l'ensemble de variables suivant : les $x_{i,j,k}$.

Il y a trois indices³ qui correspondent à trois données. i est, comme ce sera très souvent le cas ici, l'indice de la ligne d'une case. j est celui de sa colonne. Jusque là ça va (j'espère). Maintenant, qu'est-ce que c'est que ce k ? En fait, on va associer à chaque case 9 variables correspondant aux neuf chiffres pouvant y résider. k correspond à ces 9 chiffres.

Ces variables sont telles que si il y a le chiffre k dans la case de la ligne i qui est dans la colonne j , alors $x_{i,j,k}$ est vrai ; i, j, k pouvant varier entre 1 et 9. Par exemple, si $x_{1,1,1}$ est vrai, alors il y a un 1 dans la première case de la première ligne. Si $x_{9,9,5}$ est vrai, alors il y a 5 dans la case tout en bas à droite. Si $x_{5,5,1}$ est faux alors il n'y a pas de 1 dans la case en plein milieu de la grille. Vous suivez ?

Mais pourquoi est-ce qu'on s'embête avec ces variables me demanderez-vous ? Pour en faire une jolie formule vous répondrai-je ! En effet, les différentes contraintes évoquées précédemment peuvent se traduire en formules logiques utilisant des ET, des OU et des NON.

- *Pas deux fois le même chiffre dans une même ligne* : Cette condition peut être réécrite en disant qu'il est impossible d'avoir $x_{i,j,k}$ et $x_{i,j',k}$ vrai en même temps ; c'est à dire que sur la ligne i ; les cases dans les colonnes j et j' ne peuvent pas toutes les deux avoir la valeur k . En d'autres termes, pour toutes les lignes d'indice i allant de 1 à 9 :

$$\neg(x_{i,j,k} \wedge x_{i,j',k}) \quad (1.1)$$

- *Pas deux fois le même chiffre dans une même colonne* : Cett

3. C'est les petites lettres après le nom générique de la variable, en l'occurrence i, j et k .