

TD IA-2026修正案

IA教学团队

1 TD5：约束满意度（CSP）与逻辑满意度（SAT）

练习5：数独的SAT建模（4x4示例）

陈述：对 4×4 的网格问题进行建模（为简化计算）。分析变量数量和公式数量。

1	2		
		2	1
2	4		
		4	2

图1 – 4x4数独实例待解示例

修正提案

1. 变量定义

我们定义命题变量 $x_{i,j,k}$ 如下：

$$x_{i,j,k} \text{ 真} \quad \text{单元格 (行 } i, \text{ 列 } j) \text{ 包含值 } k$$

对于4x4数独： $i, j, k \in \{1..4\}$ 。

变量数量的计算：

$$4 \text{ (行)} \times 4 \text{ (列)} \times 4 \text{ (值)} = 64 \text{ 个变量。}$$

2. 约束（公式）

A. 初始状态表示约束若网格在(2,3)位置存在2，则

添加单元条款： $(x_{2,3,2})$ 。

B. 约束条件：“每个单元格至少包含一个值” 对于每个单元格 (i, j) ，必须至少有一个值为真：

$$\forall i, j: (x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee x_{i,3} \vee x_{i,4})$$

对于第一行 $(i=1)$ 和第一列 $(j=1)$ 的单元格，计算结果为：

$$(x_{1,1,1} \vee x_{1,1,2} \vee x_{1,1,3} \vee x_{1,1,4})$$

每个案例1个条款 \times 16个案例 = 16个公式。

C. 约束条件：“每个单元格最多只能包含一个值” 这里可以有两种建模方式。

—解决方案1：逻辑方法（蕴含） 说：“如果某个单元格的值为 k ，那么它就不能有其他值。”

以(1,1)坐标点为例，其数值为1：

$$x_{1,1} = \neg(x_{1,2} \vee x_{1,3} \vee x_{1,4})$$

每格4个公式 \times 16格 = **64个公式**。

$$B + C \text{ (溶液1)} : 16 + 64 = 80 \text{ 个公式。}$$

—解决方案2：CNF方法（排他对——异或） 解决器更倾向于使用简单子句。同一单元格内禁止所有值对的组合。

对于给定的单元格，禁止：

$$\neg(\neg x_{i,j_1} \vee \neg x_{i,j_2})$$

$\neg(\neg x_{i,j_1} \vee \neg x_{i,j_3}) \dots$ 以此类推。

在4个数值中，共有6种可能的配对组合。

每个案例6个条款 \times 16个案例 = **96个公式**。

$$B + C \text{ 总数 (方案2)} : 16 + 96 = 112 \text{ 个条款。}$$

D. 有效性约束（行、列、方格） 为确保网格有效，只需规定**每个数字在每组（行、列、方格）中至少出现一次即可**。

逻辑推理：由于每行有4个格子且共有4个可能的数字，若每个数字至少出现一次，那么它们都会恰好出现一次（抽屉原理），前提是满足格子（B和C）的约束条件。

—对于行：对于每一行 i 和每一个值 k ， k 至少出现一次。示例（第1行必须包含1）：

$$(x_{1,1} \vee x_{1,2} \vee x_{1,3} \vee x_{1,4})$$

4行 \times 4值 = **16个公式**。

—对于列：同上。

4列 \times 4值 = **16个公式**。

—对于方块：同上。

4个方格 \times 4个数值 = **16个公式**。

注意：无需在此处添加行/列的唯一性约束（AMO），因为前文约束的组合已隐含了这些约束条件。

总体摘要（标准CNF溶液）：

$$112 \text{ (案例)} + 48 \text{ (有效性)} + \text{单一条款 (索引)} = \mathbf{160 \text{ 条款} + \text{索引。}}$$

TD 6: SAT与CSP的比较

标准	SAT方法(4x4)	CSP方法(4x4)
变量	64 variables booléennes ($x_{i,j,k}$)	16个整数变量 (X_i, j)
多发性骨髓瘤	{0,1} (真/假)	{1, 2, 3, 4}
约束	80 112种逻辑公式 (CNF条款, 基础层级)	12个全局约束 (AllDifferent, 高级)
分辨率	超高速求解器	更便于建模的紧凑型结构

结论: CSP通过整数变量实现了更紧凑的建模 (“高级”），而SAT (“低层级”) 虽然变量数量激增，但得益于高度优化的求解器。