Correction TD IA - 2026

Équipe Pédagogique IA

1 TD1 : Résolution de problèmes et Recherche

Exercice 1 : Le problème des 8 dames

Énoncé : Modélisez le problème de 8 dames en détaillant l'espace d'états, les actions, le modèle de transition, les états but. Détaillez les premiers deux niveaux de l'arbre de recherche. Analysez l'arbre correspondant.

Proposition de Corrigé

Il existe plusieurs modélisations. Nous présentons ici la modélisation **incrémentale par colonnes** (plus efficace que la modélisation naïve par placement libre).

1. Modélisation formelle

— **Hypothèse :** On sait qu'une solution valide contient exactement une dame par colonne. On peut donc restreindre la recherche à placer la $k^{\text{ème}}$ dame dans la colonne k.

— **État initial (s_0) :** Une liste vide [] (aucune dame sur l'échiquier).

— **Espace d'états (S) :** Un état est représenté par une liste (ou un vecteur) de longueur k (avec $0 \leq k \leq 8$), où le i-ème élément représente la ligne de la dame dans la i-ème colonne. *Exemple :* $p = [1, 5, 8]$ signifie qu'il y a des dames en (Col 1, Ligne 1), (Col 2, Ligne 5) et (Col 3, Ligne 8).

— **Actions ($A(s)$) :** Ajouter une dame dans la colonne de gauche la plus vide (colonne $k+1$). *Contrainte :* On ne place la dame que sur une ligne qui n'est pas déjà attaquée par les dames présentes (pas de conflit de ligne). Plus formellement, pour tout i (nouvelle dame) et pour tout $j < i$ (dame déjà placée), $p_i \neq p_j$.

— **Modèle de transition :** Passe de l'état $[p_1, \ldots, p_k]$ à l'état $[p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}]$ avec, pour tout i, $p_i \in [1, 8]$.

— **Test de but :** La liste contient 8 dames ($k = 8$) et aucune attaque mutuelle n'est détectée. *Formalisation :* Si on représente la configuration par un vecteur p où $p[i]$ est la ligne de la reine dans la colonne i, la condition pour que deux reines i et j s'attaquent diagonalement est :

$$|p[i] - p[j]| = |i - j|$$

Le but est atteint si cette égalité n'est jamais vérifiée pour aucune paire (i, j) distincte.

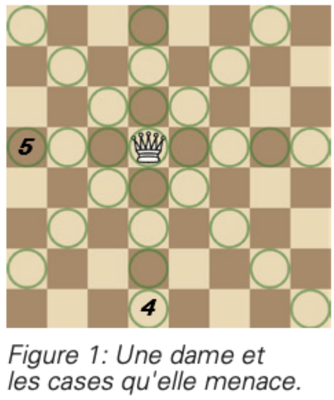

FIGURE 1 – 4ème dame : $p[4] = 5$

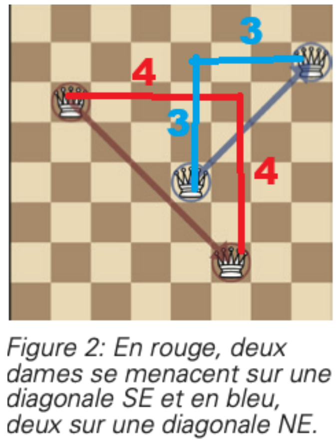

FIGURE 2 – Diagonale : $|p[i] - p[j]| = |i - j|$

2. Arbre de recherche (2 premiers niveaux)

Si l'on considère la modélisation par *permutations* (on s'interdit uniquement de mettre deux dames sur la même ligne pour simplifier la visualisation de l'arbre, les diagonales étant vérifiées ensuite) :

- **Niveau 0 (Racine) :** État vide [].
- **Niveau 1 :** On place la 1ère dame dans la colonne 1. Il y a **8 actions possibles** (lignes 1 à 8).
  $\rightarrow$ États : [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].
- **Niveau 2 :** Pour chaque nœud du niveau 1, on place une dame dans la colonne 2. Comme on ne peut pas réutiliser la ligne déjà prise :
  $\rightarrow$ Pour le nœud [1], les fils sont : $[1, 2], [1, 3], \ldots, [1, 8]$ (7 fils).
  $\rightarrow$ Pour le nœud [2], les fils sont : $[2, 1], [2, 3], \ldots, [2, 8]$ (7 fils).
  Total au niveau 2 : $8 \times 7 = 56$ nœuds.

3. Analyse de l'arbre

- **Profondeur (d) : 8**. (On s'arrête dès que les 8 colonnes sont remplies).
- **Facteur de branchage (b) :** Il n'est pas constant.
  - À la racine : $b = 8$.
  - Au niveau 1 : $b = 7$.
  - Au niveau k : $b = 8 - k$.
- **Nombre de feuilles :** Correspond au nombre de permutations possibles des 8 lignes :

$$8! = 40\,320 \text{ feuilles.}$$

  (Note : C'est beaucoup plus efficace que la modélisation naïve qui autorise n'importe quelle case, donnant $64!/56! \approx 1.7 \times 10^{14}$ feuilles).
- **Nombre d'états total :** La somme des arrangements : $\sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{(8-k)!} = 69\,281$ états.

2 TD2 : Recherche non informée

Sujet : Implémentation et comparaison de DFS et de BFS pour le jeu du taquin.

Voir le notebook Jupyter de correction (Python) disponible sur l'espace Moodle du cours pour le code source et les courbes de performance.