

1. アルゴリズムとプログラミング

アルゴリズム設計，手続き型プログラム，計算量，データ構造，再帰，整列アルゴリズム，探索アルゴリズム

2. 計算機システムとシステムプログラム

計算機システム分野：数の表現，演算制御，命令実行制御，記憶制御，入出力制御
システムプログラム分野：プロセス管理，処理装置管理，記憶管理，入出力管理，ファイル管理

3. 離散構造

集合・命題，関係，漸化式，論理関数，ブール代数，最簡積和形，命題論理，述語論理，導出原理，グラフ

4. 計算理論

語・言語，有限オートマトン，正規表現・言語，形式文法とそのクラス，導出・認識・構文解析，文脈自由文法・言語，プッシュダウンオートマトン

5. ネットワーク

情報源符号化・通信路符号化，階層化モデル，プロトコルとインターフェース，各層プロトコルの設計・仕様・評価手法，ネットワークアプリケーション

6. 電子回路と論理設計

ダイオード・トランジスタ，MOSFET，アナログ電子回路，演算増幅器，記憶素子，数の表現，論理代数と論理関数，
組合せ論理回路，順序回路，算術演算回路

7. 数学解析と信号処理

- 微分方程式
- フーリエ級数
- ラプラス変換
- Z変換
- 連続時間信号のフーリエ解析
- 離散時間信号のフーリエ解析
- 複素関数
- 信号の演算
- サンプリング
- フィルタ

7.1 ラプラス変換

【ラプラス変換】

$t \geq 0 < \infty$ の連続関数 $f(t)$ について,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (7.1.1)$$

が収束するとき, $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換という.

7.1.1 代表的なラプラス変換

【指数関数のラプラス変換】

$s > a$ のとき,

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \quad (7.1.2)$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s-a)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)T} - \left(-\frac{1}{s-a} \right) \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

【三角関数のラプラス変換】

a を実定数として,

$$\mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (7.1.3)$$

証明. $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ より,

$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}, \quad \sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \quad (7.1.4)$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos at](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right](s) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}[e^{iat}](s) + \mathcal{L}[e^{-iat}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 - (ia)^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin at](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right](s) = \frac{1}{2i} \left(\mathcal{L}[e^{iat}](s) - \mathcal{L}[e^{-iat}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia} \right) = \frac{1}{2i} \frac{2ia}{s^2 - (ia)^2} \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2}\end{aligned}$$

【双曲線関数のラプラス変換】

a を実定数として,

$$\mathcal{L}[\cosh at](s) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at](s) = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (7.1.5)$$

証明. 双曲線関数を以下のように定義する.

$$\cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}, \quad \sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \quad (7.1.6)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cosh at](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right](s) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}[e^{at}](s) + \mathcal{L}[e^{-at}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - a} + \frac{1}{s + a} \right) = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 - a^2} \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sinh at](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right](s) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}[e^{at}](s) - \mathcal{L}[e^{-at}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - a} - \frac{1}{s + a} \right) = \frac{1}{2} \frac{2a}{s^2 - a^2} \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

【多項式のラプラス変換】

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (7.1.7)$$

証明. $F_n(s) = \mathcal{L}[t^n](s)$ と定義して,

$$\begin{aligned}F_n(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \left[t^n \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty n t^{n-1} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt \\ &= \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}](s) = \frac{n}{s} F_{n-1}(s) \\ &= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} \cdots \frac{1}{s} F_0(s) \\ F_0(s) &= \mathcal{L}[t^0](s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} \\ \therefore F_n(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

【線形性】

連続関数 $f(t)$, $g(t)$ がラプラス変換可能なら、次が成り立つ.

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s) \quad (7.1.8)$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[af(t) + bg(t)](s) &= \int_0^{\infty} (af(t) + bg(t)) e^{-st} dt \\ &= a \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt + b \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ &= a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s) \end{aligned}$$

【像の移動法則】

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = F(s - a) \quad (7.1.9)$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) &= \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt \\ &= \mathcal{L}[f(t)](s - a) = F(s - a) \end{aligned}$$

【微分法則】

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0) \quad (7.1.10)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (7.1.11)$$

$$\vdots \quad (7.1.12)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \quad (7.1.13)$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = [f(t) e^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) s e^{-st} dt = -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)](s) &= \mathcal{L}[(f'(t))'](s) \\ &= s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

同様に

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

【像の微分法則】

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}F(s), \quad \mathcal{L}[t^n f(t)] = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n F(s) \quad (7.1.14)$$

証明. $F_n(s) = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n F_0(s)$ として,

$$F_1(s) = -\frac{d}{ds}F_0(s) = \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial s} \{e^{-st}f(t)\} dt = \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[tf(t)](s)$$

$$F_2(s) = \left(-\frac{d}{ds}\right)F_1(s) = \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial s} \{t f(t) e^{-st}\} dt = \int_0^\infty t^2 f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[t^2 f(t)](s)$$

同様に

$$F_n(s) = \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

【相似法則】

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7.1.15)$$

証明.

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty f(at) e^{-st} dt \stackrel{u=at}{=} \int_0^\infty f(u) e^{-\frac{s}{a}u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

【たたみ込み】

畳み込みを次の式で定義する.

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (7.1.16)$$

このとき, 畳み込みのラプラス変換は次のようにラプラス変換の積となる.

$$\mathcal{L}[f * g(t)](s) = F(s)G(s) \quad (7.1.17)$$

証明.

$$F(s)G(s) = G(s) \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^\infty f(\tau) G(s) e^{-s\tau} d\tau$$

ここで,

$$G(s) e^{-s\tau} = \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx e^{-s\tau} = \int_0^\infty g(x) e^{-s(x+\tau)} dx \\ \stackrel{t=x+\tau}{=} \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-st} dt$$

なので, もとの式に代入して,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-st} dt \right\} d\tau$$

領域 $D: t \geq \tau, \tau \geq 0$ は領域 $D': 0 \leq \tau \leq t, t \geq 0$ と等しいため, 次のようになる.

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) e^{-st} d\tau dt \\ = \int_0^\infty \left\{ \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} dt = \mathcal{L}[f * g(t)](s)$$

7.1.3 ラプラス変換表

1	$\frac{1}{s}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	

1	$\frac{1}{s}$
---	---------------

7.1.4 ラプラス変換が存在する条件

7.1.5 ラプラス変換の応用

【特殊な積分】

【常微分方程式】

7.1.6 まとめ

7.2 z変換

7.3 フーリエ変換

7.4 変換表