1.　アルゴリズムとプログラミング

アルゴリズム設計，手続き型プログラム，計算量，データ構造，再帰，整列アルゴリズム，探索アルゴリズム

2. 計算機システムとシステムプログラム

計算機システム分野：数の表現，演算制御，命令実行制御，記憶制御，入出力制御システムプログラム分野：プロセス管理，処理装置管理，記憶管理，入出力管理，ファイル管理

3. 離散構造

集合・命題，関係，漸化式，論理関数，ブール代数，最簡積和形，命題論理，述語論理，導出原理，グラフ

4.　計算理論

語・言語，有限オートマトン，正規表現・言語，形式文法とそのクラス，導出・認識・構文解析，文脈自由文法・言語，プッシュダウンオートマトン

5. ネットワーク

情報源符号化・通信路符号化，階層化モデル，プロトコルとインターフェース，各層プロトコルの設計・仕様・評価手法，ネットワークアプリケーション

6.　電子回路と論理設計

ダイオード・トランジスタ，MOSFET，アナログ電子回路，演算増幅器，記憶素子，数の表現，論理代数と論理関数，組合せ論理回路，順序回路，算術演算回路

7. 数学解析と信号処理

- 微分方程式
- フーリエ級数
- ラプラス変換
- Z 変換
- 連続時間信号のフーリエ解析
- 離散時間信号のフーリエ解析
- 複素関数
- 信号の演算
- サンプリング
- フィルタ

7.1 ラプラス変換

【ラプラス変換】

$t \geq 0 < \infty$ の連続関数 $f(t)$ について，

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{7.1.1}$$

が収束するとき，$F(s)$ を $f(t)$ の**ラプラス変換**という．

7.1.1 代表的なラプラス変換

【指数関数のラプラス変換】

$s > a$ のとき，

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \tag{7.1.2}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s-a)t}dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)T} - \left(-\frac{1}{s-a}\right) \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

【三角関数のラプラス変換】

a を実定数として，

$$\mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{a}{s^2+a^2} \tag{7.1.3}$$

証明. $e^{ia} = \cos a + i\sin a$ より，

$$\cos a = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}, \quad \sin a = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \tag{7.1.4}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos at](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{iat}](s) + \mathcal{L}[e^{-iat}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-(ia)^2} \\
&= \frac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin at](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}](s) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{iat}](s) - \mathcal{L}[e^{-iat}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2ia}{s^2-(ia)^2} \\
&= \frac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned}
$$

【双曲線関数のラプラス変換】

a を実定数として,

$$
\mathcal{L}[\cosh at](s) = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at](s) = \frac{a}{s^2-a^2} \tag{7.1.5}
$$

証明. 双曲線関数を以下のように定義する.

$$
\cosh a = \frac{e^a+e^{-a}}{2}, \quad \sinh a = \frac{e^a-e^{-a}}{2} \tag{7.1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cosh at](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{at}](s) + \mathcal{L}[e^{-at}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-a^2} \\
&= \frac{s}{s^2-a^2}
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sinh at](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{at}](s) - \mathcal{L}[e^{-at}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\frac{2a}{s^2-a^2} \\
&= \frac{a}{s^2-a^2}
\end{aligned}
$$

【多項式のラプラス変換】

$$
\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{7.1.7}
$$

証明. $F_n(s) = \mathcal{L}[t^n](s)$ と定義して,

$$
\begin{aligned}
F_n(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \left[t^n\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty nt^{n-1}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt \\
&= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}](s) = \frac{n}{s}F_{n-1}(s) \\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}F_0(s) \\
F_0(s) &= \mathcal{L}[t^0](s) = \int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} \\
\therefore F_n(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}
$$

7.1.2 ラプラス変換の性質

【線形性】

連続関数 f(t)，g(t) がラプラス変換可能なら，次が成り立つ．

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s) \tag{7.1.8}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s) &= \int_0^\infty (af(t)+bg(t))\,e^{-st}dt \\
&= a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\
&= a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s)
\end{aligned}$$

【像の移動法則】

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a) \tag{7.1.9}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt \\
&= \mathcal{L}[f(t)](s-a) = F(s-a)
\end{aligned}$$

【微分法則】

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)](s) &= sF(s) - f(0) && (7.1.10)\\
\mathcal{L}[f''(t)](s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) && (7.1.11)\\
&\vdots && (7.1.12)\\
\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n)}(s) && (7.1.13)
\end{aligned}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f''(t)](s) &= \mathcal{L}[(f'(t))'](s) \\
&= s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) = s\,(sF(s) - f(0)) - f'(0) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

同様に

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n)}(s)$$

【像の微分法則】

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}F(s), \quad \mathcal{L}[t^n f(t)] = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n F(s) \tag{7.1.14}$$

証明. $F_n(s) = \left(-\dfrac{d}{ds}\right)^n F_0(s)$ として，

$$\begin{aligned} F_1(s) &= -\frac{d}{ds}F_0(s) = \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{-st}f(t)\right\}dt = \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[tf(t)](s) \\ F_2(s) &= \left(-\frac{d}{ds}\right)F_1(s) = \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial s}\left\{tf(t)e^{-st}\right\}dt = \int_0^\infty t^2 f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[t^2 f(t)](s) \end{aligned}$$

同様に

$$F_n(s) = \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

【相似法則】

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{7.1.15}$$

証明.

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt \overset{u=at}{=} \int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

【たたみ込み】

畳み込みを次の式で定義する．

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{7.1.16}$$

このとき，畳み込みのラプラス変換は次のようにラプラス変換の積となる．

$$\mathcal{L}[f * g(t)](s) = F(s)G(s) \tag{7.1.17}$$

証明.

$$F(s)G(s) = G(s)\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)G(s)e^{-s\tau}d\tau$$

ここで，

$$\begin{aligned} G(s)e^{-s\tau} &= \int_0^\infty e^{-sx}g(x)dxe^{-s\tau} = \int_0^\infty g(x)e^{-s(x+\tau)}dx \\ &\overset{t=x+\tau}{=} \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt \end{aligned}$$

なので，もとの式に代入して，

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt\right\}d\tau$$

領域 $D: t \geq \tau, \tau \geq 0$ は領域 $D': 0 \leq \tau \leq t, t \geq 0$ と等しいため，次のようになる．

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}d\tau dt \\ &= \int_0^\infty \left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt = \mathcal{L}[f * g(t)](s) \end{aligned}$$

7.1.3 ラプラス変換表

1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$

1	$\frac{1}{s}$

7.1.4 ラプラス変換が存在する条件

7.1.5 ラプラス変換の応用

【特殊な積分】

ラプラス変換を用いることで，いくつかの特殊な積分を簡単に解ける．以下に例を示す．

【ディリクレ積分】

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \tag{7.1.18}$$

証明.

$$J(s) = \mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-st} dt$$

と定義する．像の微分法則 (式 7.1.14) より，

$$\frac{dJ}{ds}(s) = -\mathcal{L}\left[t\frac{\sin t}{t}\right](s) = -\mathcal{L}[\sin t](s) = -\frac{1}{s^2+1}$$

となるので，任意定数 C について次の式が成り立つ．

$$J(s) = -\arcsin s + C$$

$\lim_{s\to\infty} J(s) = 0$，$\lim_{s\to\infty} = \frac{\pi}{2}$ より，$C = \frac{\pi}{2}$ である．したがって，$J(0) = \frac{\pi}{2}$ より，

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

【常微分方程式】

7.1.6 まとめ

7.2 z 変換

7.3 フーリエ変換

7.4 変換表