1.　アルゴリズムとプログラミング

アルゴリズム設計，手続き型プログラム，計算量，データ構造，再帰，整列アルゴリズム，探索アルゴリズム

2. 計算機システムとシステムプログラム

計算機システム分野：数の表現，演算制御，命令実行制御，記憶制御，入出力制御システムプログラム分野：プロセス管理，処理装置管理，記憶管理，入出力管理，ファイル管理

2.1 オペレーティングシステム

2.1.1 OS の役割

1. ハードウェア機構の隠蔽
2. ハードウェア装置の管理
3. ソフトウェア実行時の保護

2.2 プロセス管理

ここで，プロセスとはプログラムとメモリに割り付けられるプロセス領域のことである．イメージとしては図 2.2.1 のような，プロセス領域の箱に格納されている任意のプログラムで，プロセス領域が異なれば，プログラムが同じでも別のプロセスとして扱われる．

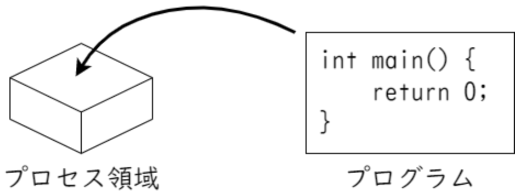

図 2.2.1: プロセスのイメージ

プロセス管理とは，OS によって行われる次のような処理である．

- プロセス状態の管理
- 実行しているプロセスの切り替え (プロセススイッチ)
- プロセスの生成と消去
- プロセス実行順序の決定 (プロセススケジューリング)
- プロセスからの実行フローの生成と管理
- 複数プロセスの同期
- 複数プロセス間の通信

2.2.1 プロセス状態

2.2.2 プロセススケジューリング

2.2.3 プロセス同期

2.2.4 プロセス間通信

2.3 メモリ管理

2.4 入出力制御

3. 離散構造

集合・命題，関係，漸化式，論理関数，ブール代数，最簡積和形，命題論理，述語論理，導出原理，グラフ

4.　計算理論

語・言語，有限オートマトン，正規表現・言語，形式文法とそのクラス，導出・認識・構文解析，文脈自由文法・言語，プッシュダウンオートマトン

5. ネットワーク

情報源符号化・通信路符号化，階層化モデル，プロトコルとインターフェース，各層プロトコルの設計・仕様・評価手法，ネットワークアプリケーション

6.　電子回路と論理設計

ダイオード・トランジスタ，MOSFET，アナログ電子回路，演算増幅器，記憶素子，数の表現，論理代数と論理関数，組合せ論理回路，順序回路，算術演算回路

7. 数学解析と信号処理

- 微分方程式
- フーリエ級数
- ラプラス変換
- Z 変換
- 連続時間信号のフーリエ解析
- 離散時間信号のフーリエ解析
- 複素関数
- 信号の演算
- サンプリング
- フィルタ

7.1 ラプラス変換

【ラプラス変換】

$t \geq 0 < \infty$ の連続関数 $f(t)$ について，

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{7.1.1}$$

が収束するとき，$F(s)$ を $f(t)$ の**ラプラス変換**という．

7.1.1 代表的なラプラス変換

【指数関数のラプラス変換】

$s > a$ のとき，

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \tag{7.1.2}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s-a)t}dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)T} - \left(-\frac{1}{s-a}\right) \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

【三角関数のラプラス変換】

a を実定数として，

$$\mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{a}{s^2+a^2} \tag{7.1.3}$$

証明. $e^{ia} = \cos a + i\sin a$ より，

$$\cos a = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}, \quad \sin a = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \tag{7.1.4}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos at](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{iat}](s) + \mathcal{L}[e^{-iat}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-(ia)^2} \\
&= \frac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin at](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}](s) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{iat}](s) - \mathcal{L}[e^{-iat}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2ia}{s^2-(ia)^2} \\
&= \frac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

【双曲線関数のラプラス変換】

a を実定数として，

$$\mathcal{L}[\cosh at](s) = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at](s) = \frac{a}{s^2-a^2} \tag{7.1.5}$$

証明. 双曲線関数を以下のように定義する．

$$\cosh a = \frac{e^a+e^{-a}}{2}, \quad \sinh a = \frac{e^a-e^{-a}}{2} \tag{7.1.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cosh at](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{at}](s) + \mathcal{L}[e^{-at}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-a^2} \\
&= \frac{s}{s^2-a^2}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sinh at](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{at}](s) - \mathcal{L}[e^{-at}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\frac{2a}{s^2-a^2} \\
&= \frac{a}{s^2-a^2}
\end{aligned}$$

【多項式のラプラス変換】

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{7.1.7}$$

証明. $F_n(s) = \mathcal{L}[t^n](s)$ と定義して，

$$\begin{aligned}
F_n(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \left[t^n\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty nt^{n-1}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt \\
&= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}](s) = \frac{n}{s}F_{n-1}(s) \\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}F_0(s) \\
F_0(s) &= \mathcal{L}[t^0](s) = \int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} \\
\therefore F_n(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

7.1.2 ラプラス変換の性質

【線形性】

連続関数 f(t)，g(t) がラプラス変換可能なら，次が成り立つ．

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s) \tag{7.1.8}$$

証明.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s) &= \int_0^\infty (af(t)+bg(t))\,e^{-st}dt \\ &= a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\ &= a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s)\end{aligned}$$

【像の移動法則】

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a) \tag{7.1.9}$$

証明.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt \\ &= \mathcal{L}[f(t)](s-a) = F(s-a)\end{aligned}$$

【微分法則】

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0) \tag{7.1.10}$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{7.1.11}$$

$$\vdots \tag{7.1.12}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n)}(s) \tag{7.1.13}$$

証明.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)](s) &= \mathcal{L}[(f'(t))'](s) \\ &= s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) = s\,(sF(s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

同様に

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n)}(s)$$

【像の微分法則】

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}F(s), \quad \mathcal{L}[t^n f(t)] = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n F(s) \tag{7.1.14}$$

証明. $F_n(s) = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n F_0(s)$ として，

$$\begin{aligned} F_1(s) &= -\frac{d}{ds}F_0(s) = \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{-st}f(t)\right\}dt = \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[tf(t)](s) \\ F_2(s) &= \left(-\frac{d}{ds}\right)F_1(s) = \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial s}\left\{tf(t)e^{-st}\right\}dt = \int_0^\infty t^2 f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[t^2 f(t)](s) \end{aligned}$$

同様に

$$F_n(s) = \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

【相似法則】

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{7.1.15}$$

証明.

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt \overset{u=at}{=} \int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

【たたみ込み】

畳み込みを次の式で定義する．

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{7.1.16}$$

このとき，畳み込みのラプラス変換は次のようにラプラス変換の積となる．

$$\mathcal{L}[f * g(t)](s) = F(s)G(s) \tag{7.1.17}$$

証明.

$$F(s)G(s) = G(s)\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)G(s)e^{-s\tau}d\tau$$

ここで，

$$\begin{aligned} G(s)e^{-s\tau} &= \int_0^\infty e^{-sx}g(x)dxe^{-s\tau} = \int_0^\infty g(x)e^{-s(x+\tau)}dx \\ &\overset{t=x+\tau}{=} \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt \end{aligned}$$

なので，もとの式に代入して，

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt\right\}d\tau$$

領域 $D: t \geq \tau, \tau \geq 0$ は領域 $D': 0 \leq \tau \leq t, t \geq 0$ と等しいため，次のようになる．

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}d\tau dt \\ &= \int_0^\infty \left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt = \mathcal{L}[f * g(t)](s) \end{aligned}$$

7.1.3 ラプラス変換表

1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$

1	$\frac{1}{s}$

7.1.4 ラプラス変換が存在する条件

7.1.5 ラプラス変換の応用

【特殊な積分】

ラプラス変換を用いることで，いくつかの特殊な積分を簡単に解ける．以下に例を示す．

【ディリクレ積分】

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \tag{7.1.18}$$

証明.

$$J(s) = \mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-st} dt$$

と定義する．像の微分法則 (式 7.1.14) より，

$$\frac{dJ}{ds}(s) = -\mathcal{L}\left[t\frac{\sin t}{t}\right](s) = -\mathcal{L}[\sin t](s) = -\frac{1}{s^2+1}$$

となるので，任意定数 C について次の式が成り立つ．

$$J(s) = -\arcsin s + C$$

$\lim_{s\to\infty} J(s) = 0$，$\lim_{s\to\infty} = \frac{\pi}{2}$ より，$C = \frac{\pi}{2}$ である．したがって，$J(0) = \frac{\pi}{2}$ より，

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

【常微分方程式】

7.1.6 まとめ

7.2 z 変換

7.3 フーリエ変換

7.4 変換表