1 Bevezetés

A cikk három stratégiát tárgyal:

- meek(szelíd)
- optimistic(optimista)
- prudent(körültekintő)

A parkolót egy félegyenesnek tekintik ahol a cél a félegyenes vége ami az ábrák bal oldalán lesz, az autók pedig pontok amelyek egy állandó λ mértékben jobbról érkeznek és egész értékekre parkolnak.Az autó leparkolásának idejét nem veszik figyelembe. A legérdekesebb eset amikor λ nagyobb 1-nél és a parkoló autók száma nagy.

- A szelíd stratégia: a sorban parkoló utolsó autó után biztosan van egy szabad hely és azt el foglalja.
- Az optimista stratégia: elmegy a célig, majd elindul visszafele és az első szabad helyre leparkol.
- A körültekintő stratégia: feltételezi, hogy van szabad hely a sorban, elindul a cél fele és leparkol az első üres helyre.

Mindegyik stratégiának megvan az előnye és a hátránya. A szelíd stratégia hamar talál parkoló helyet, de sokat kell gyalogolnia, továbbá folyamatosan tolja jobbra a sort, mert balról mennek el az autók viszont csak jobbról kerülnek be a sorba és emiatt kihasználatlan a parkoló nagy része. Az optimista mindig a célhoz legközelebbi helyre parkol, de sok időt tölt el a parkolással. A körültekintő az első elérhető helyre parkol, de ha tele van a sor elmegy teljesen a végéig és vissza kell menjen, valamint ha van is hely valószínűleg nem a legközelebbi helyre parkol.

2 Az autók dinamikája

A parkolás alap jellemzője a parkoló autók száma $N(t)$ egy adott t idő pillanatban. Ha eltekintünk a leparkolás idejétől, a véletlenszerű változó $N(t)$ független a parkolási stratégiától. A valószínűségi eloszlás $P_N(t)$ amelyre N darab parkoló autó van a t időben, a következő egyenlettel írható le

$$\frac{dP_N}{dt} = \lambda P_{N-1} + (N+1)P_{N+1} - (\lambda + N)P_N \tag{1}$$

Az első kifejezés a jobb oldalon a P_N növekedésért van jelen, ugyanis az N. autó parkolásakor $N-1$ autó van a parkolóban. A második kifejezés szintén, hiszen egy autó akkor hagyja el a parkolót amikor abban $N+1$ van. Az utolsó viszont már a csökkenésért, mert ha N autó parkol egy adott pillanatban vagy parkolni fog egy autó vagy elmegy egy. Az egyenlet (1) megoldása megkapható generátor függvény segítségével. Ha kezdetben a parkoló üres, $P_N(0) = \delta_{N,0}$, a parkoló autók eloszlása a Poisson-eloszlást követ.

$$P_N(t) = \frac{[\lambda(1-e^{-t})]^N}{N!} e^{-\lambda(1-e^{-t})} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\lambda^N}{N!} e^{-\lambda} \tag{2}$$

A (2) egyenletből az autók átlagos száma $\langle N(t)\rangle = \lambda(1-e^{-t})$, ami hosszútávon λ-hoz közelít. A valós szám ingadozik az $\langle N\rangle = \lambda$ érték körül, $\sqrt{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2} = \lambda$ szórással.
A parkoló kiürülésének az ideje meghatározható Kolmogorov-egyenlet segítségével.

$$t_n = p_n t_{n+1} + q_n t_{n-1} + \delta t_n \tag{3}$$

A fenti egyenlet szerint t_n idő alatt ürül ki a parkoló n darab autó esetén. A jobb oldal első kifejezése az új autó leparkolását jelzi, aminek $p_n = \lambda/(\lambda+n)$ esélye van. A második kifejezés egy autó kilépését jelzi a parkolóból, melynek esélye $q_n = n/(\lambda+n)$. Végezetül a $\delta t_n = 1/(\lambda+n)$ kifejezés azt az időt jelzi amíg a parkoló autók száma eggyel nö vagy csökken.
A (3) egyenlet megoldása, amikor n darab autóra a következő:

$$t_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j!}{\lambda!} \sum_{i\geqslant j} \frac{\lambda^i}{i!} \tag{4}$$

3 A szelíd stratégia

Ez a stratégia nem hatékony ha a parkoló forgalma magas, ugyanis a sor folyamatosan tolódik el jobbra es rengeteg el nem foglalt hely lesz a sor elején. Tekintsük a lefoglalt hely hosszát l-nek abban az esetben, ha $\lambda \to \infty$, ilyenkor annak az esélye, hogy egy x távolságra parkol autó a legjobboldalibbtól $p(x) = e^{-x/\lambda}$. Ahhoz, hogy megbecsüljük ezt a távolságot felhasználjuk azt a tényt miszerint annak az esélye, hogy parkol autó a legjobboldalibbtól egy l vagy nagyobb távolságra a következő:

$$\sum_{x\geqslant l} e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{e^{-\frac{l}{\lambda}}}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}} \simeq \lambda e^{-\frac{l}{\lambda}} \tag{5}$$

Ha ezt a mennyiséget megfeleltetjük egynek a következőt kapjuk:

$$l = \lambda \ln \lambda \tag{6}$$

Ebből látható, hogy a lefoglalt hely kicsi a parkoló méretéhez viszonyítva.

4 A bizakodó stratégia

Ennek a stratégiának a kulcsa, hogy bármely i hely elfoglalása kizárólag az $1, 2, ..., i$ helyektől függ, az ettől jobbra helyezkedőek figyelmen kívül hagyhatóak.

Ha σ_i-vel jelöljük a i. hely elfoglaltsága, akkor ez a következő képpen néz ki:

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \text{ foglalt,} \\ 0 & \text{ha } i \text{ szabad} \end{cases} \tag{7}$$

Az autók sűrűsége $\rho_1 = \langle \sigma_1 \rangle$ az első helyen a következő egyenletet adja:

$$\frac{d\rho_1}{dt} \equiv \rho_1 = \lambda(1 - \rho_1) - \rho_1 \tag{8}$$

miszerint ha a hely üres λ sebességgel foglalódik el, míg ha el van foglalva 1 sebességgel ürül ki. Ennek a megoldása:

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda}[1 - e^{-(1+\lambda)t}] \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\lambda}{1+\lambda} \tag{9}$$

Ezen logika mentén haladva az autók sűrűsége egy $k \geqslant 2$ helyen a következő egyenletet adja:

$$\dot{\rho}_k = \lambda\langle(1 - \sigma_k)\prod_{j=1}^{k-1}\sigma_j\rangle - \rho_k \tag{10}$$

4.1 k=2 esetén

Ha $k = 2$, a 10 egyenlet a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_2 &= \lambda\rho_1 - \rho_2 - \lambda\langle\sigma_1\sigma_2\rangle = \lambda\rho_1 - \rho - \lambda\rho_{12} \\ \dot{\rho}_{12} &= \lambda\langle(1-\sigma_1)\sigma_2\rangle + \lambda\langle\rho_1(1-\rho_2)\rangle - 2\rho_{12} = \lambda(\rho_1 + \rho_2) - 2(1+\lambda)\rho_{12} \end{aligned}$$

ahol $p_{12} \equiv \langle\sigma_1\sigma_2\rangle$.
A teljes időfüggő megoldást ezekre egyenletek elemi, de nehézkes. Az állandó helyzetben:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda\rho_1 - \rho_2 - \lambda\rho_{12} \\ 0 &= \lambda(\rho_1 + \rho_2) - 2(1+\lambda)\rho_{12} \end{aligned}$$

amiből következik:

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2} \\ \frac{\rho_2}{\rho_{12}} &= \frac{\lambda+2}{\lambda+1} \end{aligned}$$

4.2 k=3 esetén

Az egyenlet sűrűségre a harmadik helyen:

$$\dot{\rho}_3 = \lambda(\rho_{12} - \rho_{123}) - \rho_3 \tag{11}$$

ami magában foglalja a $\rho_{123} = \langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle$ átlagot, ami teljesíti a következő egyenletet

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{123} &= \lambda\langle(1-\sigma_1)\sigma_2\sigma_3\rangle + \lambda\langle\sigma_1(1-\sigma_2)\sigma_3\rangle + \lambda\langle\sigma_1\sigma_2(1-\sigma_3)\rangle - 3\rho_{123} \\ &= \lambda(\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{13}) - 3(1+\lambda)\rho_{123} \end{aligned} \tag{12}$$

Az előző esetből tudjuk $\rho_{12} = \langle\sigma_1\sigma_2\rangle$, $\rho_{13} = \langle\sigma_1\sigma_3\rangle$ és $\rho_{23} = \langle\sigma_2\sigma_3\rangle$, amiből következik:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{13} &= \lambda\langle(1-\rho_1)\rho_3\rangle + \lambda\langle\rho_1\rho_2(1-\rho_3)\rangle - 2\rho_{13} \\ &= \lambda(\rho_3 + \rho_{12} - \rho_{123}) - (2+\lambda)\rho_{23} \\ \dot{\rho}_{23} &= \lambda\langle\sigma_1(1-\sigma_2)\sigma_3\rangle + \lambda\langle\sigma_1\sigma_2(1-\sigma_3)\rangle - 2\rho 23 \\ &= \lambda(\rho_{13} + \rho_{12} - 2\rho 123) - 2\rho 23 \end{aligned} \tag{13}$$

Megoldva az (12) és (13) egyenleteket, a következőt kapjuk:

$$\rho_{123} = \frac{\lambda^3}{\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 6} \tag{14}$$

a mennyiségek függvényében a többi sűrűség a következőképpen adható meg:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_3}{\rho_{123}} &= \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 6}{\lambda^2 + 2\lambda + 2} \\ \frac{\rho_3}{\rho_{123}} &= \frac{\lambda + 3}{\lambda + 2} \\ \frac{\rho_{13}}{\rho_{123}} &= \frac{(\lambda+1)(\lambda^2 + 4\lambda + 6)}{(\lambda+2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)}\end{aligned}$$

4.3 Csonkító közelítés

A pontos megoldások hamar bonyolulttá válnak, viszont egyszerűsíthetők közelítéssel felhasználva, hogy $\rho_{12} = \rho_1\rho_2$. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\rho_2^{MF} &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda + 1} \\ \rho_{12}^{MF} &= \frac{\lambda^3}{(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda + 1)}\end{aligned}$$

ahol MF a középmező(mean-field) sűrűséget jelöli. Ugyan ezt alkalmazva a $\rho_{12} = \rho_1\rho_2$ és $\rho_{123} = \rho_1\rho_2\rho_3$ megkapjuk, hogy:

$$\rho_3^{MF} = \frac{\lambda^4}{\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1} \tag{15}$$

Ez a módszer annál közelebb van a valós értékekhez minél nagyobb a forgalom.

4.4 Viselkedés nagy k-ra

Mivel a többoldali korreláció nehézkes és a csonkító közelítés eléggé pontos nagy forgalom esetén, fókuszáljunk a nagy k viselkedésére közelítéssel. Így a stabil állapotra megkapjuk, hogy:

$$\rho_{k+1} = \frac{\lambda \prod_{j=1}^{k} \rho_j}{1 + \lambda \prod_{j=1}^{k} \rho_j} \tag{16}$$

ami leegyszerűsíthető:

$$\rho_{k+1} = \frac{\rho_k^2}{1 - \rho_k + \rho_k^2} \tag{17}$$

Kezdve $\rho_1 = \lambda/(1+\lambda)$-tól, lépkedve haladva, eljutunk:

$$n_{k+1} - n_k = \epsilon n_k^2 \left[1 - \frac{\epsilon^2 n_k^2}{1 - \epsilon n_k + \epsilon^2 n_k^2}\right] \tag{18}$$

ahol $\epsilon = 1/(1+\lambda)$ és az eredmény az $1 - \rho_k = \epsilon n_k$ alakban van írva. Ahol ha kicseréljük a különbséget a következőt kapjuk:

$$\frac{dn_k}{dk} = \epsilon n_k^2 \tag{19}$$

aminek a megoldása, ha a határfeltétel $n_1 = 1$:

$$n_k = \frac{1}{1 - \epsilon(k-1)} = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2 - k} \tag{20}$$

vagy

$$\rho_k = 1 - \frac{1}{\lambda + 2 - k} \tag{21}$$

Ez a megoldás használható egy csomópontra, ahol $\lambda - k$ jóval nagyobb egynél, de az eltérés csökken ahogy a k növekszik.

4.5 Helyek felszabadulása

Legyen V_k az esélye annak, hogy az első üres hely a k. helyen van

$$V_k = \left\langle \prod_{j=1}^{k-1} \sigma_j (1 - \sigma_k) \right\rangle \tag{22}$$

ami, csonkítással a következőt adja

$$V_k = \epsilon n_k \prod_{j=1}^{k-1} \rho_j \tag{23}$$

Ha vesszük a logaritmusát, kicserélve az összeget integrálra és felhasználva $\rho_k = 1 - \frac{1}{\lambda+2-k}$ azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{k-1} \ln \rho_j \simeq \int_1^k dj \ln \left(1 - \frac{1}{\lambda + 2 - k} \right) \simeq - \int_1^k \frac{dj}{\lambda + 2 - j} = \ln \frac{\lambda + 2 - k}{\lambda + 1} \quad (24)$$

Összehasonlítva a (20)-val

$$\prod_{j=1}^{k-1} \rho_j \simeq \frac{1}{n_k} \quad (25)$$

Tehát az első üresedés esélye egyenletesen eloszlik $[0, \lambda]$ tartományon

$$V_k = \begin{cases} \epsilon & k < \lambda \\ 0 & k > \lambda \end{cases} \quad (26)$$

amiből az átlag elhelyezkedése az első üres helynek a következő:

$$v_1 \equiv \langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\lambda} k V_k = \frac{\lambda}{2} \quad (27)$$

5 A körültekintő stratégia

A több dimenzióssága a parkolásnak bonyolultabb a körültekintő stratégiának. Kiemelkedő jellemzője ennek a stratégiának, hogy sok üres hely van közel a célhoz, ugyanis az érkező autók a legjobboldalibb helyet foglalják el, így a közelebbi helyek üresen maradnak.

jobb fordítás a many-body-ra

Mind a bizakodó, mind a körültekintő stratégia esetén az átlag hossza L a folytonosan lefoglalt parkolóhelyeknek aszimptotikus viselkedést mutat $L \simeq \lambda + a\lambda^{1/2}$, pontosabban

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{L - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = a \quad (28)$$

Az amplitúdó $a > 0$ nagyobb a körültekintő stratégia esetén. A fenti egyenlet szerint az üres helyek száma $a\sqrt{\lambda}$ ként nö. Tehát mind a bizakodó, mind a körültekintő stratégia hatékonynak mondható mivel nagy forgalom esetén kevés a szabad hely.