



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ Μ.Κ. & Α.Ε.
Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου

Διπλωματική Εργασία

**ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ, ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΘΗΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ
ΔΙΠΟΔΟΥ ΡΟΜΠΟΤ ΜΕ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΥ
ΒΗΜΑΤΙΣΜΟΥ**

Αικατερίνη Σμυρλή

Επιβλέπων Καθηγητής: Ε. Γ. Παπαδόπουλος

ΑΘΗΝΑ 2017

Περίληψη

Η μελέτη της μηχανικής του ανθρώπινου περιπατήματος ανέδειξε τη φυσική ιδιότητα ορισμένων δίποδων μηχανών να εκτελούν βηματισμούς παθητικά. Μέχρι σήμερα έχουν μελετηθεί πλήθος δίποδων μοντέλων, κάθε ένα από τα οποία παρουσιάζει ομοιότητες με την ανθρώπινη φυσιολογία και κατ' επέκταση με τη δυναμική του ανθρώπινου περιπατήματος. Σε αυτή την εργασία μελετάται η παθητική δυναμική ενός σύνθετου μηχανικού δίποδου μοντέλου, το οποίο περιέχει στοιχεία εμπέδησης κατά μήκος των σκελών του, ημικυκλικά πέλματα με στοιχεία αδρανείας, και σημειακή μάζα στη θέση του ισχίου.

Οι περισσότερες ήδη υπάρχουσες μελέτες για την παθητική δυναμική των δίποδων μηχανών έχουν θεωρήσει απαραμόρφωτα σκέλη, και συνεπώς αδυνατούν να προσομοιώσουν την φάση διπλής στήριξης που είναι αναγκαία για την ομαλή μεταφορά της στήριξης από το ένα σκέλος στο επόμενο κατά το βηματισμό. Αντί αυτής, έχει καθιερωθεί να θεωρείται ότι η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά τις κρούσεις με το έδαφος. Οι απώλειες τέτοιων μοντέλων προκύπτουν αριθμητικά από την συνθήκη διατήρησης της στροφορμής και δεν ορίζονται από κάποιο συντελεστή απωλειών ή απόσβεσης. Το μοντέλο που μελετάται σε αυτή την εργασία περιλαμβάνει στοιχεία ελαστικότητας και απόσβεσης, και συνεπώς προσομοιώνει πλήρως την κρούση και τη σταδιακή αποφόρτιση του ενός σκέλους και φόρτιση του επόμενου, κατά τη φάση διπλής στήριξης.

Ημικυκλικά πέλματα με στοιχεία αδράνειας έχουν συμπεριληφθεί σε πολλές μελέτες, καθώς έχει αποδειχθεί η σημασία των ημικυκλικών σκελών στην προσομοίωση της δυναμικής συνεισφοράς των αστραγάλων κατά το ανθρώπινο περιπάτημα. Εξίσου σημαντικά θεωρούνται τα στοιχεία αδράνειας, καθώς επιτρέπουν τη δυναμική μελέτη της προώθησης των σκελών προς τα εμπρός.

Το μοντέλο που τελικά συντίθεται από τα παραπάνω μηχανικά στοιχεία αδιαστατοποιείται, ώστε τα αποτελέσματα της μελέτης να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σχεδιασμό σε πολλές κλίμακες. Με βάση το αδιάστατο πλέον μοντέλο, εκτελούνται προσομοιώσεις οι οποίες επαληθεύουν την εγκυρότητά του. Στη συνέχεια εξάγονται συμπεράσματα για την αντιστοιχία των επιμέρους μηχανικών στοιχείων με την παθητική συμπεριφορά του μοντέλου που αυτά συνθέτουν. Τα συμπεράσματα αυτά είναι σημαντικά καθώς προκύπτουν από ένα μοντέλο το οποίο παρουσιάζει μεγάλο βαθμό μηχανικής ομοιότητας με τα ανθρώπινα κάτω άκρα.

Στη συνέχεια διερευνάται και αναλύεται μία σχεδιαστική λύση η οποία θα επιτρέπει την αναπαραγωγή της παθητικής δυναμικής σε οριζόντιο επίπεδο, όπου δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενες λύσεις της παθητικής δυναμικής και πρέπει να εισαχθούν στο μοντέλο στοιχεία επενέργησης. Μια τέτοια λύση είναι απαραίτητη κατά την κατασκευή δίποδων ρομπότ, τα οποία θα κληθούν να εκτελέσουν βηματισμούς σε διαφορετικής κλίσης εδάφη.

Για την κατά το δυνατό πιο στότερη αναπαραγωγή των παθητικών βηματισμών, αποδεικνύεται ότι το επενεργούμενο μοντέλο θα πρέπει να επεκταθεί με την προσθήκη ενός επιπλέον στοιχείου: μίας έκκεντρης μάζας που θα λειτουργεί ως αντίβαρο, με δυνατότητα περιστροφής γύρω από το σύνδεσμο του ισχίου. Το αποτέλεσμα αυτό συναντά την ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία για δίποδα με κορμό, παρουσιάζει όμως σχεδιαστικές διαφορές συγκριτικά με αυτή, διότι προέκυψε με στόχο την καλύτερη αξιοποίηση της έκκεντρης μάζας ως αντίβαρο σε μία πειραματική διάταξη, και όχι την ομοιότητα με

τον ανθρώπινο σχεδιασμό. Επιπλέον, παρουσιάζεται σχήμα ελέγχου το οποίο παρέχει στο επαυξημένο αυτό νέο σύστημα ευστάθεια και χαμηλή ενεργειακή κατανάλωση.

Συνοπτικά, η εργασία εξερευνεί την αντιστοιχία του σύνθετου δίποδου μοντέλου με τον άνθρωπο, και παρουσιάζει τις δυνατότητες αξιοποίησης της παθητικής του δυναμικής τόσο στο σχεδιασμό ενεργειακά οικονομικών κινούμενων ρομπότ, όσο και κατά το σχεδιασμό τεχνητών κάτω άκρων.

Abstract

Through the study of human gait mechanics, there has emerged a special class of bipedal machines, which exhibit walking on negative slopes as a natural passive-dynamic mode. To date, numerous such models have been proposed and studied, each bearing some degree of resemblance to the human locomotor's structure and dynamic behavior. This thesis studies the passive dynamics of a relatively complex bipedal walking model that includes compliant elements along its two legs, semicircular feet of non-negligible mass, and a point mass attached at the hip joint.

Most of the published research on the passive dynamics of bipedal machines have made the assumption of rigid feet and thus fail to simulate the dynamics during the double stance phase of walking, which enables the gradual support transfer from one leg to another observed during human gait. Instead, they assume that the system's angular momentum is conserved during the impact that occurs at heelstrike. Energetic losses in such models are only present due to the velocity incontinuity just-before and just-after the collision, which is computed via the conservation of angular momentum. The model studied in the present work includes elastic and damping elements, allowing for detailed simulation of the heelstrike collision as well as for the study of the gradual support transfer between the two compliant legs.

The addition of semicircular feet with inertial properties has been proposed in previous works, as it has been proven that such feet profiles can act as a substitute of ankle joints. The point masses attached to the feet are equally important, as they allow the dynamic study of their pendulum-like motion during swing phase.

The model composed of the above elements is analytically described and later converted to its dimensionless form, in order to extract results that are independent of scale. This dimensionless model is then numerically simulated, providing results that confirm its validity. Based on these simulations, cause-and-effect relationships are drawn between each of the model's elements and the resulting passive dynamics. These deductions are reliable since they result from a detailed model that bears many structural similarities to the human lower-limb anatomy.

The attention is then shifted towards finding a way of reproducing the biped's passive dynamic behavior on flat terrain of zero incline. Such conditions do not passively produce a sustainable gait, so a means of actuation must be introduced to the model in order to achieve a walking pattern. This step is essential towards the design of bipedal robots, which must often walk on level or irregular ground.

With a goal of reproducing a gait that is as close as possible to the biped's original passive-dynamic behavior, it is shown that the actuated biped must be extended with the addition of an extra link at the hip joint, to act as a counterweight and house the stators of the legs' actuators. This conclusion is coherent with many studies' choice of providing the biped with a torso. However, it presents differences in its design, as it has been adopted for its use as a torsional counterweight and not for its resemblance to the human body structure. A control scheme that stabilizes this extended system whilst minimizing the energetic cost of walking is then developed.

In summary, this work studies the relationship between the model of a biped and the human gait, and provides useful guidelines for the design of efficient walking robots and lower limb prosthetics.

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Abstract	5
Περιεχόμενα	7
Κατάλογος Σχημάτων.....	9
Κατάλογος Πινάκων	11
1 Εισαγωγή.....	13
1.1 Σκοπός Εργασίας	13
1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	13
1.3 Δομή Εργασίας	15
2 Στοιχεία Θεωρίας	17
2.1 Εισαγωγή	17
2.2 Μηχανικά συστήματα	17
2.2.1 Το σύστημα μάζα-ελατήριο-απόσβεση	17
2.2.2 Το εκκρεμές σε πεδίο βαρύτητας	20
2.3 Στοιχεία δυναμικής συστημάτων.....	22
2.3.1 Μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων με τη μέθοδο Lagrange	22
2.3.2 Πολλαπλασιαστές Lagrange για την ικανοποίηση περιορισμών	23
2.3.3 Διαστατική Ανάλυση, Παραμετροποίηση και Αδιάστατες Διαφορικές Εξισώσεις.....	24
2.3.4 Περιοδικές Λύσεις Μη Γραμμικών Συστημάτων	27
3 Δυναμικό Μοντέλο	31
3.1 Εισαγωγή	31
3.2 Μηχανικό μοντέλο	31
3.2.1 Διπλό εκκρεμές	32
3.2.2 Ελαστικότητα παραμόρφωσης των σκελών	32
3.2.3 Απόσβεση παραμόρφωσης των σκελών	33
3.2.4 Κυκλική διαμόρφωση κάτω άκρων	33
3.2.5 Γωνία κλίσης εδάφους	34
3.2.6 Σημειακές μάζες	34
3.3 Γενικευμένες μεταβλητές του μοντέλου	35
3.4 Φάσεις λειτουργίας του μοντέλου	35
3.4.1 Φάση προώθησης	37
3.4.2 Φάση διπλής στήριξης	38
3.5 Συνθήκες εναλλαγής φάσεων	41
3.5.1 Τερματισμός φάσης προώθησης : Heelstrike	41
3.5.2 Τερματισμός φάσης διπλής στήριξης : Toe-off	42
3.6 Συνάρτηση βηματισμού	42
4 Προσαρμογή του μοντέλου στον άνθρωπο	45
4.1 Εισαγωγή	45
4.2 Αδιαστατοποίηση συστήματος.....	45
4.3 Αδιάστατες παράμετροι	46
4.4 Ορισμός διαστημάτων επιλογής και ονομαστικών τιμών αδιάστατων παραμέτρων	47
4.4.1 Διαστήματα επιλογής τιμών αδιάστατων παραμέτρων	47
4.4.2 Ονομαστικές τιμές παραμέτρων.....	48

5 Παθητικό περπάτημα	49
5.1 Εισαγωγή	49
5.2 Εύρεση περιοδικών λύσεων	49
5.3 Μελέτη βηματισμού στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας	50
5.3.1 Στοιχεία διανύσματος κατάστασης	50
5.3.2 Κίνηση ισχίου	53
5.3.3 Πορτραίτο φάσεων και ευστάθεια βηματισμού	57
5.4 Μελέτη βηματισμών με μεταβολή των παραμέτρων	59
5.4.1 Ευστάθεια βηματισμού	59
5.4.2 Μέση ταχύτητα βηματισμού	62
5.4.3 RMS επιταχύνσεις κέντρου μάζας	63
5.4.4 Κατακόρυφη μετατόπιση ισχίου	67
5.4.5 Συχνότητα βηματισμού	69
5.4.6 Ενεργειακές απώλειες βηματισμού	73
5.5 Συμπεράσματα	74
6 Περπάτημα με Επενέργηση	77
6.1 Εισαγωγή	77
6.2 Επιλογές επενέργησης	77
6.2.1 Αριθμός επενεργούμενων βαθμών ελευθερίας	77
6.2.2 Αρχιτεκτονική Νόμου Ελέγχου	78
6.2.3 Έλεγχος Βασισμένος στην Παθητική Δυναμική	79
6.2.4 Στροφική επενέργηση	82
6.3 Επαυξημένο Επενεργούμενο Μοντέλο	84
6.3.1 Μοντελοποίηση	84
6.3.2 Δυναμικές Εξισώσεις	85
6.3.3 Σφάλμα Ανάδρασης	87
6.3.4 Σταθερός Επενεργούμενος Βηματισμός	87
6.4 Διερεύνηση Σχεδιασμού Εκκεντρότητας	93
6.4.1 Ευστάθεια βηματισμού	93
6.4.2 Σύγκριση με τον παθητικό βηματισμό	95
6.4.3 Μέση κατανάλωση ισχύος	96
6.4.4 Αποδοτικότητα βηματισμού	97
6.5 Σύνθετο σχήμα ελέγχου με μη γραμμικούς PD όρους	99
6.5.1 Ευστάθεια βηματισμού	100
6.5.2 Σύγκριση με τον παθητικό βηματισμό	101
6.5.3 Αποδοτικότητα βηματισμού	102
6.5.4 Ισχύς κινητήρων	103
6.5.5 Μέγιστη ροπή κινητήρων	104
6.5.6 Επιλογή κερδών	104
6.5.7 Ευσταθής επενεργούμενος βηματισμός	106
6.6 Συμπεράσματα	108
7 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία	111
7.1 Συμπεράσματα	111
7.2 Μελλοντική Εργασία	112
7.3 Συνεισφορά Εργασίας	113
8 Βιβλιογραφία	115
9 Παράτημα Α	119

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2-1.	Το σύστημα μάζα-ελατήριο-απόσβεση.....	17
Σχήμα 2-2.	Παραμετρική διερεύνηση απόκρισης συστήματος μάζας-ελατηρίου-απόσβεσης.....	19
Σχήμα 2-3.	Το σύστημα εκκρεμές σε πεδίο βαρύτητας.....	20
Σχήμα 2-4 .	Μεταβολή της φυσικής συχνότητας με το εύρος της ταλάντωσης για εκκρεμές.....	22
Σχήμα 2-5.	Απεικόνιση Poincaré στη γενική περίπτωση.....	28
Σχήμα 2-6 .	Απεικόνιση Poincaré σταθερού σημείου.....	28
Σχήμα 3-1.	Το πλήρες μηχανικό μοντέλο.....	31
Σχήμα 3-2.	Γενικευμένες μεταβλητές του μοντέλου.....	35
Σχήμα 3-3.	Το μοντέλο κατά τη φάση προώθησης.....	36
Σχήμα 3-4.	Το μοντέλο κατά τη φάση διπλής στήριξης.....	36
Σχήμα 3-5.	Προώθηση του μοντέλου κατά τη φάση διπλής στήριξης. (a) Εκκίνηση της φάσης διπλής στήριξης κατά το HS. (b) Προώθηση κατά τη φάση διπλής στήριξης. (c) Γεωμετρία περιορισμών κατά τη φάση διπλής στήριξης.....	39
Σχήμα 3-6.	Περιπτώσεις επαφής πέλματος-εδάφους.....	41
Σχήμα 5-1:	Μεταβλητές κατάστασης κατά το σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας.....	51
Σχήμα 5-2:	Περιοδική μεταβολή κατάστασης ενός εκ των δύο σκελών κατά τη διάρκεια 4 βημάτων.....	52
Σχήμα 5-3:	Μετατοπίσεις ισχίου στους δύο άξονες κατά το σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο.....	54
Σχήμα 5-4:	Ταχύτητες ισχίου στους δύο άξονες κατά το σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο.....	54
Σχήμα 5-5:	Επιταχύνσεις στους δύο άξονες κατά το σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο..	55
Σχήμα 5-6:	(a) Πειραματικές μετρήσεις οριζόντιας και κατακόρυφης επιτάχυνσης ισχίου, κατά το ανθρώπινο περπάτημα, μετρημένες σε g. Πηγή:[23] . (b) Επιταχύνσεις προσομοίωσης.....	56
Σχήμα 5-7:	Πορτραίτο φάσης γωνίας του ενός σκέλους κατά τον σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο.....	58
Σχήμα 5-8:	Πορτραίτο φάσης γωνίας του ενός σκέλους κατά τον σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο, με αρχικές συνθήκες εκτός της σταθερής τροχιάς και σύγκλιση εντός 3 βημάτων.....	58
Σχήμα 5-9:	Μέτρο μέγιστης ιδιοτιμής συνάρτησης βηματισμού για μεταβολές των αδιάστατων παραμέτρων από την ονομαστική τους τιμή.	60
Σχήμα 5-10:	Μέση ταχύτητα βηματισμού για μεταβολές των αδιάστατων παραμέτρων από την ονομαστική τους τιμή.	64
Σχήμα 5-11:	RMS κατακόρυφες επιταχύνσεις στη θέση του ισχίου ως συνάρτηση της μέσης ταχύτητας βηματισμού για μεταβολή των παραμέτρων.....	65
Σχήμα 5-12:	RMS κατακόρυφες επιταχύνσεις στη θέση του ισχίου ως συνάρτηση της μέσης ταχύτητας βηματισμού από πειραματικά δεδομένα.	66
Σχήμα 5-13:	Κατακόρυφη μετατόπιση του ισχίου κατά το βηματισμό ως συνάρτηση των παραμέτρων του μοντέλου.	68
Σχήμα 5-14:	Σύγκριση θεωρητικών κατακόρυφων μετατοπίσεων ισχίου Δy_{th} (5-7) με τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων Δy .	69
Σχήμα 5-15:	Συσχέτιση μήκους βήματος με μέση οριζόντια ταχύτητα βηματισμών.....	70

Σχήμα 5-16: Συχνότητες βηματισμών σε σύγκριση με τις αντίστοιχες ίδιοσυχνότητες υποσυστημάτων...	72
.....
Σχήμα 5-17: Συντελεστής COT ως συνάρτηση της μέσης οριζόντιας ταχύτητας βηματισμού.	74
Σχήμα 6-1: Θεωρητικές ισχείς εισόδου σε πλήρως επενεργούμενο σύστημα σε οριζόντιο επίπεδο, για πλήρη αναπαραγωγή του παθητικού βηματισμού στο κεκλιμένο επίπεδο.	80
Σχήμα 6-2: Συμπληρωματικοί όροι επενέργησης για την αντιστάθμιση της βαρύτητας στο οριζόντιο επίπεδο.	81
Σχήμα 6-3: Συνισταμένη ροπή αντίδρασης κινητήρων για ένα βήμα κατά τον ονομαστικό βηματισμό σε οριζόντιο επίπεδο.	83
Σχήμα 6-4: Σχηματική παράσταση του επαυξημένου επενεργούμενου μοντέλου.	84
Σχήμα 6-5: Επιλογή ροπής αντίβαρου για σταθερό βηματισμό ονομαστικών συνθηκών σε οριζόντιο επίπεδο.	85
Σχήμα 6-6: Κατάσταση κεντρικού συνδέσμου ισχίου για σταθερό επενεργούμενο βηματισμό ονομαστικού σημείου σε οριζόντιο επίπεδο.	88
Σχήμα 6-7: Ροπές στον κεντρικό σύνδεσμο του ισχίου κατά το σταθερό επενεργούμενο βηματισμό ονομαστικών παραμέτρων σε οριζόντιο έδαφος.	89
Σχήμα 6-8: Σύγκριση διαγραμμάτων φάσης παθητικού και επενεργούμενου βηματισμού σταθερού σημείου, στις ονομαστικές τιμές των αδιάστατων παραμέτρων.	90
Σχήμα 6-9: Απόκριση φάσης γωνίας αντίβαρου επενεργούμενου μοντέλου σε αρχικές συνθήκες εκτός της σταθερής τροχιάς, για μοντέλο σε ονομαστικές συνθήκες.	91
Σχήμα 6-10: Ισχύς κινητήρων για σταθερό επενεργούμενο βηματισμό ονομαστικών παραμέτρων σε οριζόντιο επίπεδο.	92
Σχήμα 6-11: Ροή ισχύος κατά επενεργούμενο σταθερό βηματισμό οριζοντίου επιπέδου, σε ονομαστικές τιμές παραμέτρων.	93
Σχήμα 6-12: Τόπος ριζών συνάρτησης βηματισμού για μεταβολή του μήκους αντίβαρου.	94
Σχήμα 6-13: Απόκλιση επενεργούμενης από παθητική τροχιά, για μοντέλα σε σταθερό βηματισμό, με παραμέτρους στις ονομαστικές τιμές.	96
Σχήμα 6-14: Ισχείς του επενεργούμενου συστήματος για σταθερούς βηματισμούς στο οριζόντιο επίπεδο, με μεταβολή της απόστασης αντίβαρου.	97
Σχήμα 6-15: Συντελεστής COT για σταθερούς επενεργούμενους βηματισμούς οριζοντίου επιπέδου με μεταβολή της απόστασης αντίβαρου.	98
Σχήμα 6-16: Μέγιστρες ιδιοτιμές επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ [m], με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.	101
Σχήμα 6-17: Απόκλιση επενεργούμενης από παθητική τροχιά, επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ m, με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.	102
Σχήμα 6-18: Συντελεστής COT επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ m, με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.	103
Σχήμα 6-19: Μέση κατανάλωση ισχύος επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ m, με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.	104
Σχήμα 6-20: Μέγιστη ασκούμενη από κινητήρες ροπή, επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ m, με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.	105
Σχήμα 6-21: Σύγκλιση κατάστασης αντιβάρου, στο επαυξημένο ονομαστικό σύστημα με σύνθετο νόμο ελέγχου και επιλογή κερδών (6-29). (a) Γωνία. (b) Ταχύτητα.	107
Σχήμα 6-22: Απόκριση φάσης γωνίας αντίβαρου επενεργούμενου μοντέλου σύνθετου ελεγκτή σε αρχικές συνθήκες εκτός της ονομαστικής τροχιάς.	107
Σχήμα 6-23: Ροπή εισόδου στο αντίβαρο, επενεργούμενου μοντέλου σύνθετου ελεγκτή, σε αρχικές συνθήκες εκτός της ονομαστικής τροχιάς.	108

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2-1. Θεμελιώδεις και προκύπτουσες διαστάσεις στο σύστημα S.I.....	24
Πίνακας 4-1. Αδιάστατες παράμετροι μοντέλου	46
Πίνακας 4-2. Ονομαστικές τιμές αδιάστατων παραμέτρων.....	48
Πίνακας 6-1. Συντελεστής COT μεθόδων μετακίνησης. Πηγή: [10]	99

1 Εισαγωγή

1.1 Σκοπός Εργασίας

Η εργασία αυτή έχει σκοπό τη μελέτη του δίποδου βηματισμού που εκτελεί ο άνθρωπος μέσω της ανάπτυξης ενός απλουστευμένου μηχανικού μοντέλου. Συγκεκριμένα, η προσοχή εστιάζεται σε ιδιαίτερους βηματισμούς, οι οποίοι προκύπτουν ως αποτέλεσμα της παθητικής δυναμικής του ανθρώπινου σώματος και απαιτούν από τον άνθρωπο ελάχιστη έως καθόλου παρέμβαση: τόσο στο σχεδιασμό του βήματος από τον εγκέφαλο, όσο στην επενέργηση στα σκέλη από το μυϊκό ιστό. Εάν τέτοιοι βηματισμοί υπάρχουν στον άνθρωπο, τότε ένα επαρκώς λεπτομερές μηχανικό μοντέλο, που θα διέπεται από παρόμοια δυναμική, θα μπορεί να εκτελέσει βήματα χωρίς κάποιο σχήμα ελέγχου και χωρίς επενέργηση από κινητήρες. Τα βήματα αυτά αποτελούν λύση της παθητικής δυναμικής του μοντέλου, και ο βηματισμός που αυτά συνθέτουν αναφέρεται ως «παθητικό περπάτημα».

Με αφετηρία αυτό το μοντέλο, ενδιαφέρει η διερεύνηση των σχεδιαστικών παραμέτρων του, με σκοπό την επίτευξη επιθυμητών χαρακτηριστικών κατά τον παθητικό βηματισμό. Μια τέτοια μελέτη είναι απαραίτητη για την κατανόηση της ανθρώπινης φυσιολογίας και του πώς αυτή έχει διαμορφωθεί ώστε να διευκολύνει ενεργειακά την δίποδη μετακίνηση. Τα αποτελέσματα της διερεύνησης θα αποτελέσουν οδηγό για το σχεδιασμό πειραματικών δίποδων ρομπότ τα οποία θα μετακινούνται με ελάχιστη κατανάλωση ενέργειας. Τέλος, τα σχεδιαστικά συμπεράσματα θα μπορούν να κατευθύνουν την ανάπτυξη προσθετικών σκελών με δυναμική συμπεριφορά κατά το δυνατό πλησιέστερη στη φυσιολογική.

Τελικός στόχος της εργασίας αποτελεί ο σχεδιασμός νόμου ελέγχου ώστε να επιτευχθεί αναπαραγωγή των βηματισμών σε συνθήκες πέρα από αυτές που απαιτούνται για το παθητικό περπάτημα. Αυτό είναι απαραίτητο όταν γίνεται λόγος για κατασκευή πειραματικών διατάξεων και κινούμενων ρομπότ, καθώς ο σχεδιασμός σε αυτή τη περίπτωση αφορά κυρίως τις μη ιδανικές συνθήκες λειτουργίας.

1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Η παθητική φύση του περπατήματος έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητικών ομάδων. Οι πρώτες μελέτες επικεντρώθηκαν στη μελέτη της παθητικής δυναμικής που παρουσιάζουν ορισμένες απλές δίποδες διαμορφώσεις. Ταυτόχρονα, κατασκευάσθηκαν πειραματικά πρωτότυπα και μελετήθηκε η επίδραση που έχουν στη δυναμική τους τα επιμέρους στοιχεία τους. Σταδιακά τα μοντέλα εμπλουτίστηκαν με επιπλέον στοιχεία ώστε να μπορούν να αποτυπωθούν περισσότερο περίπλοκες συμπεριφορές που παρατηρούνταν στο ανθρώπινο περπάτημα. Οι θεωρητικές μελέτες στράφηκαν στην αναπαραγωγή του παθητικού βηματισμού σε συνθήκες όπου αυτός δεν ευνοείται, με πλήθος σχημάτων ελέγχου, με σκοπό την οικονομική λειτουργία των πειραματικών δίποδων μοντέλων και την σταδιακή ενσωμάτωση της έρευνας στην βιομηχανία των κινούμενων ρομπότ, όπου υπάρχει ανταγωνισμός από ήδη παγιωμένες οικονομικές μορφές μετακίνησης, όπως είναι τα τροχοφόρα οχήματα.

Πρωτοποριακή θεωρείται η μελέτη των Mochon και McMahon [24] οι οποίοι έδειξαν την παθητική φύση της προώθησης των ελεύθερων σκελών κατά το περπάτημα, σε μοντέλο το οποίο περιείχε διαμόρφωση γονάτου. Αργότερα ο McGeer [21] [22] μελέτησε διεξοδικά πλήθος δίποδων μοντέλων, με τα οποία διερεύνησε την καταλληλότητα επιπλέον στοιχείων όπως ημικυκλικά πέλματα, σκέλη με στοιχεία αδράνειας, αποσβέσεις στο ισχίο, κορμό, ανομοιομορφία σκελών κ.ά., και προχώρησε σε πειράματα με την κατασκευή πειραματικών, μη επενεργούμενων διατάξεων, οι οποίες πράγματι εκτέλεσαν βηματισμούς σε κεκλιμένο επίπεδο. Ακόμα, πρότεινε μεθόδους επενέργησης οι οποίες ενέπνευσαν πολλές από τις μελέτες που ακολούθησαν.

Οι Garcia et al. [12] εισήγαγαν το απλούστερο από τα μοντέλα που έχουν προταθεί έως και σήμερα, το οποίο περιλαμβάνει μόνο τρεις σημειακές μάζες και δύο γραμμικά, απαραμόρφωτα σκέλη, αλλά παρά την απλότητά του έδωσε σημαντικά συμπεράσματα μέσα από τις πολλές εφαρμογές στις οποίες χρησιμοποιήθηκε [116][37].

Ο Alexander [1] εισήγαγε την ελαστικότητα των σκελών στα δίποδα μοντέλα για να μελετήσει τη σχέση ανάμεσα σε ελαστικότητα και ταχύτητα βηματισμού. Άλλοι ερευνητές, όπως στο [27] επέκτειναν την έρευνα σε αυτή τη κατεύθυνση και μελέτησαν την επίδραση των στοιχείων ελαστικότητας έξω από τα όρια του περπατήματος, κάνοντας αναφορά σε παθητικό τρέξιμο. Στο [20] μελετήθηκε η επίδραση των στοιχείων ελαστικότητας και απόσβεσης στα σκέλη στη μορφή της τροχιάς που διανύει το ισχίο κατά το βηματισμό.

Πολλές από τις μελέτες στο παθητικό περπάτημα ενσωμάτωσαν το στοιχείο του κορμού όπως είχε αρχικά προταθεί από τον McGeer και αναζήτησαν πιο ευσταθείς περιοδικούς βηματισμούς με το επαυξημένο αυτό μοντέλο. Σε αυτές ο κορμός στηρίζεται σε ορθή θέση είτε κατασκευαστικά [37] είτε με τη χρήση ελατηρίων [9] είτε με επενεργητές και έλεγχο θέσης [15].

Ορισμένες μελέτες εστίασαν στη συσχέτιση βηματισμών που προκύπτουν από πραγματικές μετρήσεις με τα επιμέρους στοιχεία των μοντέλων που υπέθεσαν εν ισχύ, ορίζοντας έτσι μια αντιστοιχία παραμέτρων με την ανθρώπινη φυσιολογία. Οι Gard et al. [13] χρησιμοποίησαν το δίποδο μοντέλο με απαραμόρφωτα ημικυκλικά πέλματα για να ποσοτικοποιήσουν την κατακόρυφη μετατόπιση του ισχίου κατά το περπάτημα. Οι Bertos et al. [8] χρησιμοποίησαν μοντέλο με ημικυκλικά πέλματα και παραμέτρους εμπέδησης ώστε από τις μετρούμενες ταλαντώσεις του ισχίου κατά το βάδισμα να προσδιορίσουν την ελαστικότητα και απόσβεση του συστήματος των σκελών. Οι Usherwood et al. [36] υπέδειξαν ότι το άνω φράγμα που φαίνεται να υπάρχει στη ταχύτητα βηματισμού των ανθρώπων οφείλεται στη λειτουργία των σκελών ως εκκρεμών.

Τα δίποδα μοντέλα για το περπάτημα παρουσιάζουν επαναλαμβανόμενες λύσεις σε κατηφορικό έδαφος, όπου αναπληρώνεται η ενέργεια που χάνεται είτε από τις αποσβέσεις που τυχόν αυτά περιλαμβάνουν είτε από τις κρούσεις τους με το έδαφος. Μεγάλο τμήμα της βιβλιογραφίας ασχολείται με το σχεδιασμό νόμων ελέγχου που θα προσφέρουν στα δίποδα την ικανότητα να περπατήσουν εξίσου αποδοτικά και σε οριζόντιο επίπεδο, με τη χρήση επενεργητών για εισαγωγή ενέργειας στο σύστημα.

Από τις πρώτες αναφορές στο ζήτημα αυτό αποτελεί η δουλειά των Espiau et al. [11] οι οποίοι πρώτοι πρότειναν την απαλοιφή των βαρυτικών όρων μέσω επενεργητών σε απλό, πλήρως επενεργούμενο μοντέλο. Την εισαγωγή ενέργειας στο μοντέλο αυτό παρείχαν κινητήρες σε αστράγαλο και ισχίο, θεώρηση που ακολούθησαν πολλές από τις εργασίες που ακολούθησαν,

κάνοντας αναφορά σε νόμους ελέγχου της ενέργειας του συστήματος. Αξιοσημείωτες είναι οι μελέτες των Asano et al. [6] [7] και του Spong [34] [35].

Η προσαρμογή όμως κινητήρων στη θέση των αστραγάλων δεν έγινε πλήρως αποδεκτή, κυρίως λόγω της κατασκευαστικής δυσκολίας που αυτή η υπόθεση εισήγαγε στα ρομπότ προς κατασκευή. Οι Asano et al. [2] [3] [4] δημοσίευσαν μια σειρά από μελέτες σχετικά με την χρήση ημικυκλικών πελμάτων, όπου απέδειξαν ότι τα ημικυκλικά πέλματα ισοδυναμούν με εισαγωγή κινητήρων στους αστραγάλους. Η ροπή όμως που παρέχουν στο σύστημα τα πέλματα αυτά είναι συγκεκριμένη και εξαρτάται από τη εκάστοτε γεωμετρία τους.

Εναλλακτική προσέγγιση στο ζήτημα παρείχαν μελέτες που ενσωμάτωσαν στοιχείο κορμού σε επενεργούμενα συστήματα δίποδων ρομπότ, για την έδραση δύο κινητήρων στο σώμα τους. Οι Narukawa et al. χρησιμοποιήσαν απλό έλεγχο θέσης PD για τη θέση του κορμού και του ελεύθερου σκέλους, αρχικά σε απλό μοντέλο τριών ράβδων [25] και αργότερα σε πιο σύνθετο με γόνατα και ημικυκλικά πέλματα [26]. Οι Sasaki et al. [31] συνδύασαν PD νόμο ελέγχου για τον κορμό ικανοποιώντας ταυτόχρονα νόμο ελέγχου βασισμένο στην ενέργεια του συστήματος. Τέλος, οι Asano et al. [5] συνδύασαν τα παραπάνω, σε ένα μοντέλο με ημικυκλικά πέλματα και κορμό, με νόμο ελέγχου που διαμορφώνει την ανάκτηση ενέργειας του συστήματος.

Οι παραπάνω μελέτες έχουν εξερευνήσει πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις για το επενεργούμενο περπάτημα δίποδων ρομπότ, αλλά στο σύνολό τους έχουν αγνοήσει την ελαστικότητα και τις αποσβέσεις που συνοδεύουν τον ενδοτικό χαρακτήρα των πραγματικών κατασκευών. Ως αποτέλεσμα, δεν ανταποκρίνονται πλήρως στις πειραματικές συνθήκες που διέπουν τις πειραματικές κατασκευές. Σημαντικότερα, αγνοούν τις δυνατότητες που προσφέρει η αναγνώριση και εκμετάλλευση των ενδοτικών αυτών στοιχείων κατά τον σχεδιασμό τόσο των δίποδων ρομπότ όσο και των νόμων ελέγχου που αυτά χρησιμοποιούν για την εκτέλεση βηματισμών.

1.3 Δομή Εργασίας

Η παρούσα εργασία αναπτύσσεται σταδιακά σε έξι μέρη.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μία σύντομη αναφορά στα στοιχεία θεωρίας και στις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο της εργασίας. Οι ενότητες του κεφαλαίου αυτού είναι γενικές και δεν παρουσιάζονται σε αυτές εφαρμογές που αφορούν το συγκεκριμένο μοντέλο που θα μελετηθεί.

Η εισαγωγή στο μοντέλο γίνεται στο Κεφάλαιο 3, όπου αναλύονται οι σχεδιαστικές επιλογές που έχουν εφαρμοσθεί στο μοντέλο, αναγράφεται αναλυτικά η παθητική δυναμική του και ορίζεται μαθηματικά το βήμα ως διακριτή συνάρτηση των αρχικών συνθηκών.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται μία επεξεργασία των διαφορικών εξισώσεων του προηγούμενου κεφαλαίου, με σκοπό την ανάδειξη του ελάχιστου αριθμού πεπερασμένων παραμέτρων που ορίζουν πλήρως το μοντέλο. Στο ίδιο κεφάλαιο δίνονται ονομαστικές τιμές στις παραμέτρους αυτές με σκοπό την προσαρμογή του μοντέλου στην ανθρώπινη κλίμακα.

Το Κεφάλαιο 5 παραλαμβάνει το προσαρμοσμένο μοντέλο και παρουσιάζει αναλυτικά την επίλυσή της παθητικής δυναμικής του, σε κεκλιμένο κατηφορικό επίπεδο. Γίνεται εκτενής αναφορά στα χαρακτηριστικά της λύσης για το παθητικό μοντέλο με παραμέτρους στις ονομαστικές τους τιμές, αλλά και στην μεταβολή των χαρακτηριστικών αυτών όταν οι παράμετροι αποκλίνουν από τις τιμές

αυτές. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η κατά το δυνατό πληρέστερη διερεύνηση της συμπεριφοράς των παθητικών λύσεων του μοντέλου.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται ένα τροποποιημένο μοντέλο το οποίο αναπαράγει κατά το δυνατό ακριβέστερα τους παθητικούς βηματισμούς του Κεφαλαίου 5, αυτή τη φορά όμως στο οριζόντιο επίπεδο, όπου δεν είναι εφικτό το παθητικό περπάτημα.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 συνοψίζονται τα αποτελέσματα της μελέτης και γίνονται προτάσεις για μελλοντική εργασία.

2 Στοιχεία Θεωρίας

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά τα στοιχεία θεωρίας στα οποία στηρίχτηκε η εργασία. Όσα ακολουθούν αποτελούν ειδικά κεφάλαια των πεδίων της μηχανικής, των μαθηματικών και του αυτομάτου ελέγχου. Η οργάνωση του κεφαλαίου σε ενότητες ακολουθεί αυτή την κατάταξη.

Στην Ενότητα 2.2 παρουσιάζονται τα βασικά μηχανικά συστήματα ελατήριο-απόσβεση-μάζα και εκκρεμές, τα οποία συνθέτουν τον προς μελέτη μηχανισμό. Από τη μελέτη των συστημάτων αυτών είναι δυνατό να προκύψουν ποιοτικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του σύνθετου μηχανισμού.

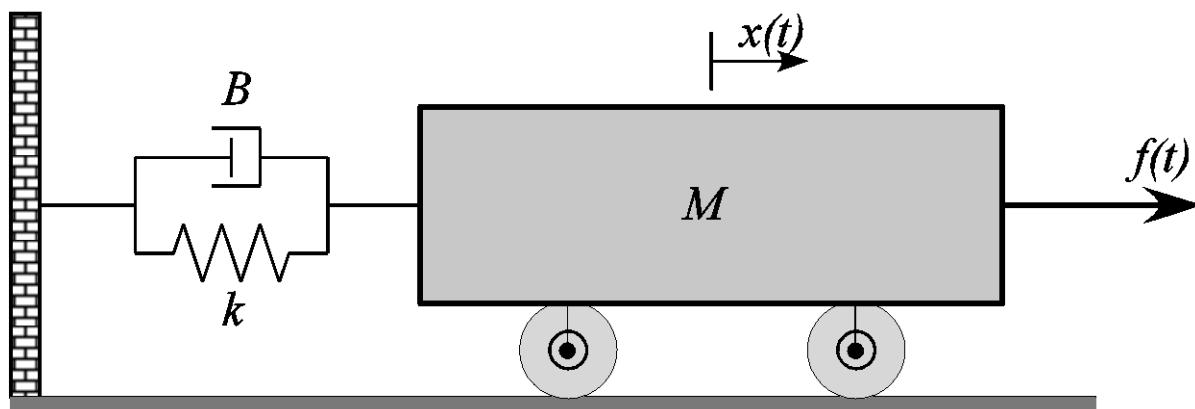
Στην Ενότητα 2.3 αναλύονται κάποια επιλεγμένα κεφάλαια από το πεδίο της δυναμικής συστημάτων, σχετικά με τη μοντελοποίηση, επεξεργασία και ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων. Σκοπός της ανάλυσης αυτής είναι η κατανόηση από πλευράς του αναγνώστη συγκεκριμένων εφαρμογών από τα επόμενα κεφάλαια.

2.2 Μηχανικά συστήματα

Τα συστατικά στοιχεία του μηχανισμού που θα μελετηθεί είναι τα δεύτερης τάξης συστήματα μάζα-ελατήριο-απόσβεση και εκκρεμές. Εδώ παρουσιάζονται τα συστήματα αυτά.

2.2.1 Το σύστημα μάζα-ελατήριο-απόσβεση

Το σύστημα αυτό αποτελείται από μία μάζα M η οποία μπορεί να κυλίεται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο. Η μάζα είναι συνδεδεμένη με απαραμόρφωτο τοίχο μέσω των στοιχείων εμπέδησης k και B . Το κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας δεν επηρεάζει το σύστημα εφόσον οι τριβές με το έδαφος παραμένουν μηδενικές.



Σχήμα 2-1. Το σύστημα μάζα-ελατήριο-απόσβεση.

Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας που αντιστοιχεί στην μετατόπιση x της μάζας από τη θέση ισορροπίας της. Η συμπεριφορά του συστήματος υπό την επίδραση χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης $f(t)$ περιγράφεται από τη δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση (2-1).

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (2-1)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ύστερα από διαίρεση των δύο μελών της με τον όρο της μάζας στη μορφή (2-2).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M} x = \frac{f(t)}{M} \equiv f^*(t) \quad (2-2)$$

Τελικά η εξίσωση που περιγράφει το σύστημα λαμβάνει τη μορφή (2-3), η οποία εισάγει τους όρους του συντελεστή απόσβεσης ζ και της φυσικής συχνότητας ω_n .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = f^*(t) \quad (2-3)$$

Σύγκριση των δύο τελευταίων εξισώσεων ορίζει τις τιμές των χαρακτηριστικών αυτών τιμών του συστήματος όπως φαίνεται στις εξισώσεις (2-4) και (2-5).

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{kM}} \quad (2-4)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (2-5)$$

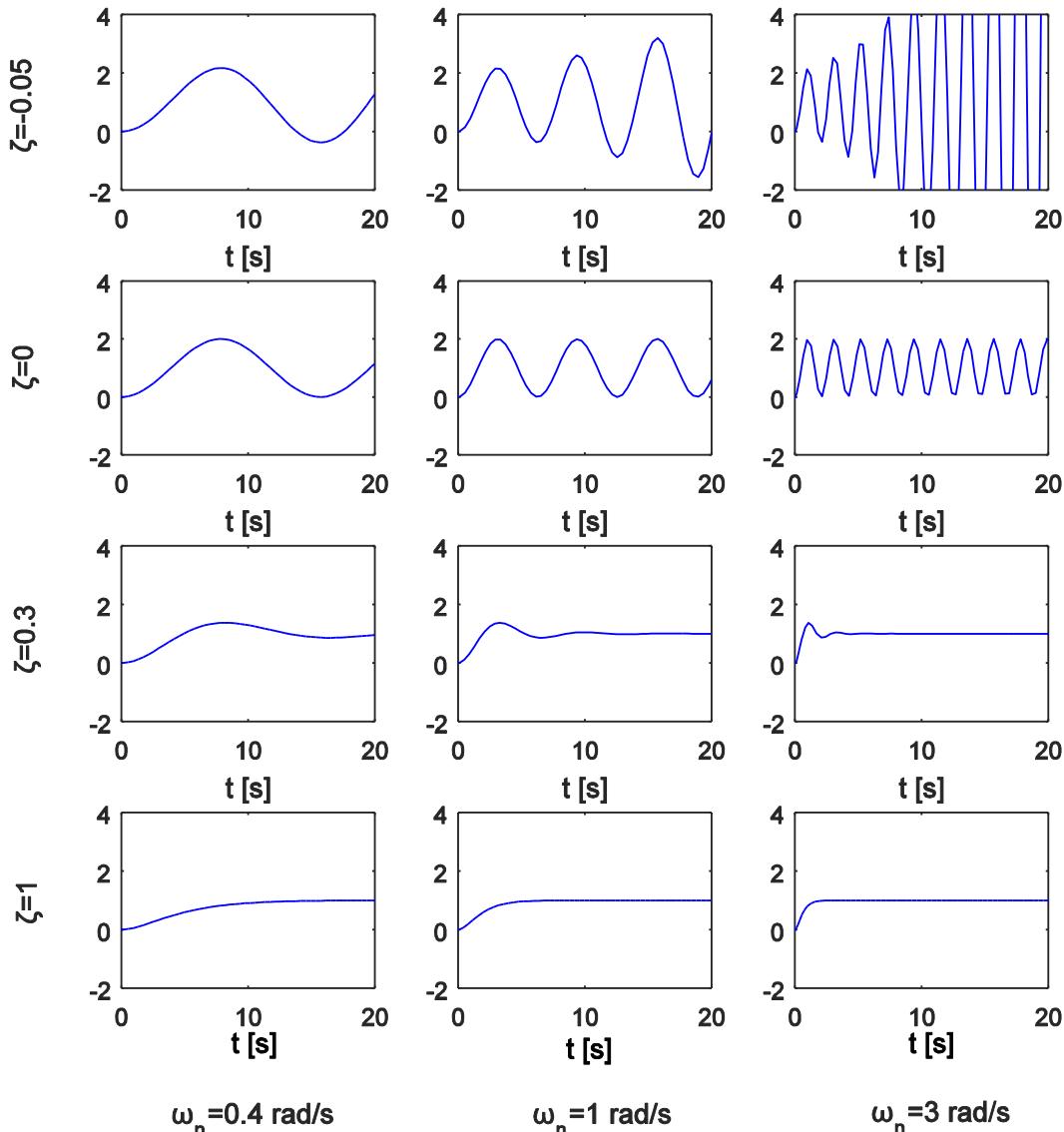
Ο συντελεστής απόσβεσης και η ιδιοσυχνότητα ορίζουν πλήρως το ελεύθερο σύστημα μάζας-ελατηρίου-απόσβεσης και καθορίζουν τη συμπεριφορά του σε τυχόν διεγέρουσες δυνάμεις όπως η f^* .

Ο συντελεστής απόσβεσης ορίζει το ρυθμό με τον οποίο αφαιρείται (ή σπανιότερα προστίθεται) ενέργεια στο σύστημα και καθορίζει τη μετάβαση του συστήματος προς την κατάσταση ισορροπίας. Αρνητικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης (εδώ θα σήμαινε αρνητική σταθερά απόσβεσης) ερμηνεύονται ως προσθήκη ενέργειας στο σύστημα και το οδηγούν στην αστάθεια, αφού οι μεταβλητές κατάστασης σε αυτή τη περίπτωση τείνουν σε απείρως μεγάλου εύρους ταλάντωση. Μηδενικός συντελεστής απόσβεσης συνεπάγεται διατήρηση της ενέργειας του συστήματος και οδηγεί σε μη αποσβενόμενη ταλάντωση η οποία συνεχίζεται επ' άπειρο. Θετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης αντιστοιχούν σε απώλεια ενέργειας λόγω των αποσβέσεων. Θετικές τιμές κοντά στο μηδέν φράσσουν εκθετικά το πλάτος της ταλαντωτικής συμπεριφοράς και οδηγούν το σύστημα σε ισορροπία. Όσο ο συντελεστής απόσβεσης πλησιάζει τη μονάδα, η ταλαντωτική συμπεριφορά φθίνει, και η απόκριση τείνει στην σταθερή κατάσταση χωρίς υπερακοντίσεις για συντελεστή απόσβεσης ίσο ή μεγαλύτερο από τη μονάδα.

Η φυσική συχνότητα ορίζει τη συχνότητα της ταλάντωσης όταν το σύστημα δεν υποβάλλεται σε περιοδική διεγέρουσα δύναμη, αλλά αφήνεται να ταλαντωθεί όπως ορίζει η δυναμική του. Μεγαλύτερη φυσική συχνότητα συνεπάγεται «γρηγορότερες» ταλαντώσεις μικρότερης περιόδου. Όταν η διεγέρουσα δύναμη είναι περιοδική, αυτή επιβάλλει τη συχνότητά της στο σύστημα και η ταλάντωση του συστήματος καθίσταται εξαναγκασμένη. Η συχνότητα ταλάντωσης είναι εύκολο να προσδιορισθεί από τα διαγράμματα απόκρισης, σε αντίθεση με τον συντελεστή απόσβεσης για τον οποίο μπορούν να ληφθούν μόνο προσεγγίσεις μέσω των διαγραμμάτων.

Ενδεικτικά απεικονίζονται οι αποκρίσεις συστημάτων μάζας-ελατηρίου-απόσβεσης σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας, για διαφορετικούς συνδυασμούς συντελεστή απόσβεσης και φυσικής συχνότητας.

Απόκριση $x(t)$ [m] σε διέγερση $f^*(t)=1 \text{ m/s}^2$



Σχήμα 2-2. Παραμετρική διερεύνηση απόκρισης συστήματος μάζας-ελατηρίου-απόσβεσης.

Στα διαγράμματα αυτά είναι εμφανή τα όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Μεγαλύτεροι συντελεστές απόσβεσης ζ συνεισφέρουν προς την ευστάθεια του συστήματος, ενώ οι φυσικές συχνότητες ω_n επηρεάζουν την περίοδο της ταλάντωσης, με μεγαλύτερες συχνότητες να καθιστούν το σύστημα πιο γρήγορο.

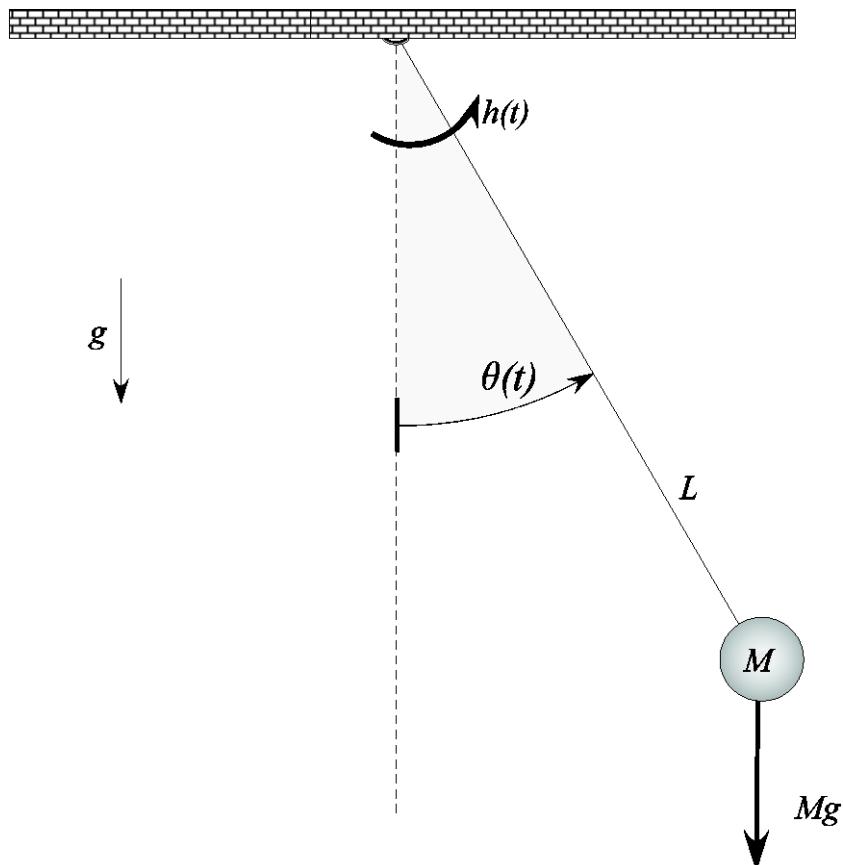
Στο πλαίσιο του συγκεκριμένου συστήματος, από τον ορισμό (2-5) της φυσικής συχνότητας, προκύπτει ότι αυτή εξαρτάται μόνο από τη σταθερά του ελατηρίου k και την μάζα M . Συγκεκριμένα, η φυσική συχνότητα ω_n αυξάνεται με αύξηση της σταθεράς ελατηρίου ενώ μειώνεται με αύξηση της μάζας.

Αντίστοιχα συμπεράσματα μπορούν να ληφθούν για το συντελεστή απόσβεσης. Αύξηση της τιμής της απόσβεσης B του συστήματος αυξάνει αναλογικά τον συντελεστή απόσβεσης ζ . Αντίθετα, αύξηση της μάζας M ή της σταθεράς του ελατηρίου k μειώνει το συντελεστή απόσβεσης, με μικρότερη όμως επίδραση στην τελική τιμή του, λόγω της ρίζας που υπάρχει στον παρονομαστή της (2-4).

Τα παραπάνω ποιοτικά και ποσοτικά συμπεράσματα θα φανούν χρήσιμα κατά τη μελέτη του σύνθετου μηχανισμού που θα μελετηθεί σε επόμενα κεφάλαια.

2.2.2 Το εκκρεμές σε πεδίο βαρύτητας

Το σύστημα αυτό αποτελείται από μία μάζα M η οποία κρέμεται από απαραμόρφωτο τοίχο μέσω επίσης απαραμόρφωτης και αβαρούς ράβδου με μήκος L . Το εκκρεμές βρίσκεται σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση g . Οι τριβές θεωρούνται μηδενικές επομένως το σύστημα δεν έχει απώλειες.



Σχήμα 2-3. Το σύστημα εκκρεμές σε πεδίο βαρύτητας.

Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας, τη γωνία θ . Η συμπεριφορά του συστήματος υπό την επενέργεια ροπής $h(t)$ περιγράφεται από τη δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση (2-6).

$$ML^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + MgL\sin\theta = h(t) \quad (2-6)$$

Όπως φαίνεται από τη διαφορική εξίσωση, το σύστημα είναι ισχυρά μη γραμμικό για μεγάλες τιμές της γωνίας θ . Σε μικρές όμως γωνίες ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\forall \theta \in [-4^\circ, 4] \text{ ισχύει ότι } |\theta - \sin(\theta)| < 10^{-3} \quad (2-7)$$

Επομένως μπορεί, εφόσον το επιτρέπει η επιθυμητή ακρίβεια, να γραφεί η (2-6) στη γραμμικοποιημένη μορφή (2-8).

$$ML^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + MgL\theta = h(t) \quad (2-8)$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή της (2-3) εάν διαιρεθεί με τον συντελεστή του όρου δεύτερης τάξης. Η τελική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = \frac{h(t)}{ML^2} \equiv h^*(t) \quad (2-9)$$

Η γραμμικοποιημένη αυτή εξίσωση είναι της ίδιας μορφής με την εξίσωση του συστήματος μάζα-ελατήριο-απόσβεση. Όπως σε κάθε σύστημα δεύτερης τάξης, μπορούν και εδώ να προσδιοριστούν ο συντελεστής απόσβεσης και η φυσική συχνότητα του συστήματος. Εδώ δεν υπάρχουν αποσβέσεις, επομένως οι χαρακτηριστικές παράμετροι θα είναι:

$$\zeta = 0 \quad (2-10)$$

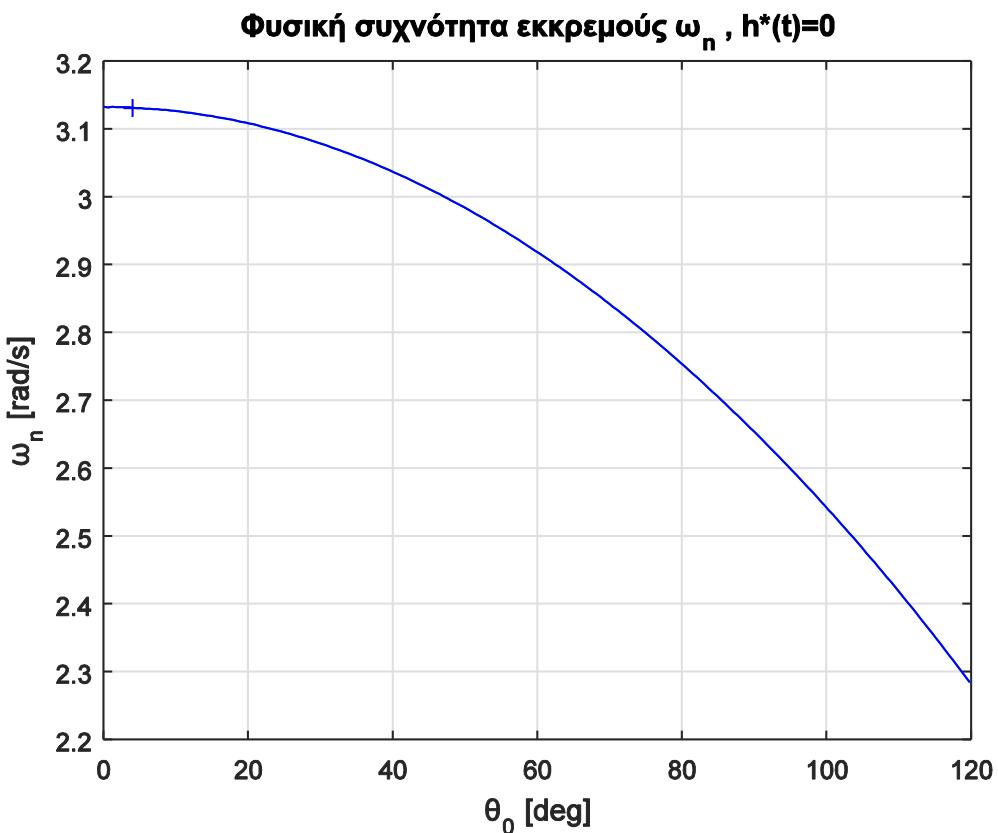
$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (2-11)$$

Παρατηρείται ότι η φυσική συχνότητα της ταλάντωσης στο εκκρεμές είναι ανεξάρτητη της αναρτημένης μάζας. Θεωρώντας την επιτάχυνση της βαρύτητας g σταθερή, προκύπτει ότι η φυσική συχνότητα ω_n του εκκρεμούς είναι συνάρτηση μόνο του μήκους L της ράβδου. Συγκεκριμένα, η φυσική συχνότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του μήκους αυτού.

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν με ικανοποιητική ακρίβεια για ταλάντωση σε μικρό εύρος γωνιών γύρω από τη θέση ισορροπίας. Όσο το εύρος γωνιών τις οποίες λαμβάνει το εκκρεμές αυξάνεται, τόσο το σύστημα αποκλίνει από την συμπεριφορά που αναμένεται με βάση την γραμμική ανάλυση.

Για τη μελέτη της συμπεριφοράς του εκκρεμούς στη μη γραμμική περιοχή, εκτελέσθηκαν προσομοιώσεις απόκρισης σε αρχικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, εκκρεμές μοναδιαίας μάζας και μοναδιαίου μήκους ράβδου αφέθηκε να ταλαντωθεί ελεύθερα από πλήθος αρχικών θέσεων στο εύρος $[0^\circ, 120^\circ]$, με μηδενική αρχική ταχύτητα και χωρίς την επίδραση εξωτερικής ροπής. Επειδή το σύστημα που μελετάται δεν περιέχει κάποιο στοιχείο απόσβεσης, το εκκρεμές εκτελεί περιοδική κίνηση με πλάτος ταλάντωσης σταθερό και ίσο σε μέτρο με την αρχική απόκλιση από τη θέση ισορροπίας. Επομένως για αρχικές συνθήκες εκτός του εύρους όπου επιτρέπεται η γραμμικοποίηση, είναι αναμενόμενο οι ταλαντώσεις να μην υπακούν στο μαθηματικό μοντέλο ταλάντωσης δεύτερης τάξης.

Το Σχήμα 2-4 παρουσιάζει τη μεταβολή στη φυσική συχνότητα ω_n της ταλάντωσης για διαφορετικές αρχικές συνθήκες θ_0 . Στο σχήμα έχει σημειωθεί με κατακόρυφη γραμμή το τέλος της περιοχής γραμμικής συμπεριφοράς. Είναι εμφανές ότι η φυσική συχνότητα διατηρείται σχεδόν σταθερή για μικρές γωνίες, ενώ φθίνει με αύξοντα ρυθμό όσο η ταλάντωση αποκτά μεγαλύτερο πλάτος. Τελικά μπορεί να ληφθεί το συμπέρασμα ότι το εκκρεμές σε πεδίο βαρύτητας, χωρίς την ενέργεια κάποιας εξωτερικής ροπής, γίνεται πιο αργό για μεγαλύτερα πλάτη ταλάντωσης.



Σχήμα 2-4 . Μεταβολή της φυσικής συχνότητας με το εύρος της ταλάντωσης για εκκρεμές.

2.3 Στοιχεία δυναμικής συστημάτων

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν σε θεωρητικό επίπεδο οι μεθοδολογίες που χρησιμοποιήθηκαν για την μοντελοποίηση του συστήματος, την επεξεργασία των διαφορικών εξισώσεων που το περιγράφουν και την ανάλυση της συμπεριφοράς του.

2.3.1 Μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων με τη μέθοδο Lagrange

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τα συστήματα του προηγούμενου κεφαλαίου προκύπτουν άμεσα μέσω της ανάλυσης των δυνάμεων των μηχανισμών και της εφαρμογής του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Για περισσότερο περίπλοκα συστήματα, όπως συστήματα με παραπάνω από έναν βαθμό ελευθερίας, η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται δυσκολότερα. Αντί αυτής χρησιμοποιούνται ενεργειακές μέθοδοι, όπως οι μέθοδοι Lagrange.

Η μέθοδος Lagrange βασίζεται στην αρχή διατήρησης της ενέργειας. Στο πλαίσιο της μεθοδολογίας προσδιορίζονται αρχικά οι γενικευμένες μεταβλητές q_k οι οποίες για ολόνομα συστήματα είναι ίσες σε πλήθος με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας N , και περιγράφουν πλήρως την κατάσταση του συστήματος κάθε στιγμή.

Στη συνέχεια υπολογίζεται η συνάρτηση L ως η διαφορά της κινητικής T από την δυναμική ενέργεια U του συστήματος και γράφεται ως συνάρτηση των γενικευμένων μεταβλητών.

$$L = T - U \quad (2-12)$$

Επίσης ως συνάρτηση των γενικευμένων μεταβλητών εκφράζεται η ισχύς των απωλειών του συστήματος, P_c . Τέλος προσδιορίζονται οι εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα και υπολογίζεται η ισχύς τους, P_t .

Τελικά για κάθε βαθμό ελευθερίας προκύπτει μία διαφορική εξίσωση μέσω της εξίσωσης Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}_k}, \quad k=1\dots N \quad (2-13)$$

Για ένα σύστημα N βαθμών ελευθερίας προκύπτουν N διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική του. Για το σύστημα της παρούσας εργασίας όπου υπάρχουν 4 βαθμοί ελευθερίας, εφαρμόσθηκε αυτή η μεθοδολογία για τον προσδιορισμό των διαφορικών εξισώσεων που το διέπουν.

2.3.2 Πολλαπλασιαστές Lagrange για την ικανοποίηση περιορισμών

Πολλές φορές είναι επιθυμητό το σύστημα να ικανοποιεί κάποιους ισοτικούς ολόνομους περιορισμούς, έστω M σε πλήθος. Ο j -οστός περιορισμός, όπου $j=1\dots M$, μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$s_j(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0 \quad (2-14)$$

Παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης στα μηχανικά συστήματα αποτελεί η μη ελαστική επαφή και αλληλεπίδραση ανάμεσα στο σύστημα και το περιβάλλον του. Τότε οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος θα πρέπει να επαυξηθούν και να συμπεριλάβουν τις δυνάμεις από την αλληλεπίδραση αυτή, οι οποίες όμως στη γενική περίπτωση δεν είναι γνωστές.

Για τον προσδιορισμό τους, εισάγονται στο πρόβλημα M επιπλέον μεταβλητές λ_j , $j=1\dots M$, οι οποίες ονομάζονται πολλαπλασιαστές Lagrange. Κάθε μεταβλητή λ_j πολλαπλασιάζει τον αντίστοιχο περιορισμό s_j , και το γινόμενό τους προστίθεται στη συνάρτηση Lagrange:

$$L^* = L + \sum_{j=1}^M \lambda_j s_j \quad (2-15)$$

Στη συνέχεια η μεθοδολογία για τον προσδιορισμό των N διαφορικών εξισώσεων ακολουθείται κατά την προηγούμενη ενότητα, με παραγώγιση όμως της επαυξημένης συνάρτησης Lagrange L^* . Έτσι για την k -διαφορική εξίσωση προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial s_j}{\partial q_k} + \frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}_k} \quad (2-16)$$

Με τον τρόπο αυτό οι N διαφορικές εξισώσεις περιλαμβάνουν $N+M$ αγνώστους: τις N μεταβλητές κατάστασης και τους M πολλαπλασιαστές Lagrange. Για να είναι επιλύσιμο το σύστημα απαιτούνται επιπλέον M στο πλήθος εξισώσεις: αυτές είναι οι εξισώσεις των περιορισμών (2-14). Έτσι κάθε στιγμή υπάρχει λύση για τις μεταβλητές του συστήματος: τις γενικευμένες μεταβλητές και τους πολλαπλασιαστές Lagrange.

Στη (2-16) κάθε όρος αντιπροσωπεύει μία γενικευμένη δύναμη η οποία επενεργεί στη διεύθυνση της γενικευμένης μεταβλητής q_k . Κάθε j -όρος του αθροίσματος στη σχέση αυτή αντιπροσωπεύει κατά αντιστοιχία την απαραίτητη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο σύστημα στην k -κατεύθυνση ώστε να ικανοποιείται ο j -περιορισμός. Η δύναμη αυτή είναι:

$$\lambda_j \frac{\partial s_j}{\partial q_k} \triangleq F_{j,k} \quad (2-17)$$

Ο ρόλος του πολλαπλασιαστή Lagrange είναι να λάβει κάθε στιγμή την απαραίτητη τιμή ώστε να αναπτυχθούν οι αναγκαίες δυνάμεις για την ικανοποίηση του περιορισμού. Είναι εμφανής τώρα ο μη ενδοτικός χαρακτήρας της μεθόδου: δεν επιτρέπει οποιαδήποτε ελαστικού τύπου παραβίαση των περιορισμών. Για το λόγο αυτό η μέθοδος είναι κατάλληλη για επαφή μηχανισμών με απαραμόρφωτα στοιχεία του περιβάλλοντος, αλλά ακατάλληλη σε περίπτωση επαφής με παραμορφώσιμα στοιχεία.

2.3.3 Διαστατική Ανάλυση, Παραμετροποίηση και Αδιάστατες Διαφορικές Εξισώσεις

Διαστατική Ανάλυση

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την δυναμική πορεία ενός φυσικού φαινομένου περιέχουν μεταβλητές και παραμέτρους που αντιστοιχούν σε φυσικές ποσότητες όπως είναι η μάζα, το μήκος και ο χρόνος. Τα μεγέθη αυτά δεν ορίζονται από έναν μόνο αριθμό, αλλά συνοδεύονται από μονάδες διαστάσεων αντιπροσωπευτικές του είδους τους. Οι διαστάσεις αυτές μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με το σύστημα μέτρησης: στο παγκόσμιο σύστημα (S.I.) το οποίο ακολουθείται ευρύτερα, η μάζα μετριέται σε χιλιόγραμμα, το μήκος σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

Άλλες φυσικές ποσότητες οι οποίες εμπλέκονται στη μελέτη φυσικών συστημάτων είναι η ενέργεια, η ισχύς, η δύναμη κλπ. Και για αυτές τις ποσότητες υπάρχουν στο S.I. οι αντίστοιχες διαστάσεις, τις οποίες παρουσιάζει ο Πίνακας 2-1. Οι διαστάσεις αυτές ονομάζονται προκύπτουσες, αφού μπορούν να προκύψουν από τις διαστάσεις της μάζας, του μήκους και του χρόνου, οι οποίες ονομάζονται θεμελιώδεις.

Πίνακας 2-1. Θεμελιώδεις και προκύπτουσες διαστάσεις στο σύστημα S.I.

Φυσική ποσότητα	Σύμβολο	Μονάδες (S.I.)	Ολογράφως
Μάζα	M	$[M] = kg$	Χιλιόγραμμα
Μήκος	L	$[L] = m$	Μέτρα
Χρόνος	T	$[T] = s$	Δευτερόλεπτα
Ταχύτητα	v	$[M / T] = m / s$	-
Επιτάχυνση	a	$[M / T^2] = m / s^2$	-
Δύναμη	F	$[ML / T^2] = kg \cdot m / s^2 \triangleq N$	Newton
Ενέργεια	E	$[ML^2 / T^2] = kg \cdot m^2 / s^2 \triangleq J$	Joule
Ισχύς	P	$[ML^2 / s^3] = kg \cdot m^2 / s^3 \triangleq W$	Watt

Μελετώντας τις διαστάσεις ενός φυσικού μεγέθους, είναι δυνατό να προκύψουν συμπεράσματα για τη σχέση που συνδέει το μέγεθος αυτό με άλλα φυσικά μεγέθη. Για παράδειγμα, μπορεί να

παρατηρηθεί ότι οι μονάδες μέτρησης της ταχύτητας αποτελούν το πηλίκο των διαστάσεων μήκους και χρόνου. Η παρατήρηση αυτή υπονοεί ότι η ταχύτητα ως μέγεθος πρέπει να αποτελεί πηλίκο μιας απόστασης και μιας χρονικής διάρκειας, το οποίο όπως είναι γνωστό ισχύει. Με την ίδια λογική είναι δυνατό να προκύψουν πιο χρήσιμα συμπεράσματα για φυσικές ποσότητες που εμπλέκονται σε προβλήματα και για τα οποία δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή η σχέση που τα προσδιορίζει. Αυτού του είδους η εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τις διαστάσεις φυσικών μεγεθών ονομάζεται διαστατική ανάλυση. Η διαστατική ανάλυση δεν απαιτεί γνώση ή επίλυση των εξισώσεων που διέπουν το σύστημα και έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πρώιμο στάδιο της μελέτης.

Παραμετροποίηση

Όταν είναι γνωστές οι εξισώσεις του συστήματος, η επίλυσή τους μπορεί να γίνει αναλυτικά ή και αριθμητικά, προσδιορίζοντας σταθερές τιμές για τις παραμέτρους και αρχικές τιμές για τις μεταβλητές. Στα μη γραμμικά συστήματα η επίλυση γίνεται συνήθως αριθμητικά με τη μορφή προσομοιώσεων, και ίσως χρειαστούν πολλές προσομοιώσεις στο πλαίσιο μιας μελέτης. Εάν είναι επιθυμητή η διερεύνηση της συμπεριφοράς του συστήματος όταν μεταβάλλονται οι τιμές των παραμέτρων του, αυξάνεται ακόμα περισσότερο το υπολογιστικό κόστος της μελέτης.

Ορισμένοι όμως συνδυασμοί των τιμών των παραμέτρων ίσως οδηγήσουν σε όμοια συστήματα με ίδια συμπεριφορά, και είναι χρήσιμο να μπορεί να προβλεφθεί αυτή η ομοιότητα ώστε να περιορισθεί ο αριθμός των επιλύσεων. Η διαδικασία της διερεύνησης της ομοιότητας συστημάτων γίνεται μέσω του ορισμού χαρακτηριστικών παραμέτρων για το σύστημα και ονομάζεται παραμετροποίηση.

Ένα πρώτο παράδειγμα παραμετροποίησης στο σύστημα μάζα-ελατήριο απόσβεση αποτελεί η (2-3) για μηδενική είσοδο, συνοδευόμενη από τις χαρακτηριστικές παραμέτρους «συντελεστής απόσβεσης ζ » και «φυσική συχνότητα ω_n » που ορίζονται στις (2-4) και (2-5). Στην αντίστοιχη ενότητα συζητήθηκε η εξάρτηση της απόκρισης αρχικών συνθηκών του συστήματος από τις δύο αυτές παραμέτρους. Στην εφαρμογή αυτή μηδενικής εισόδου, αρκεί η μεταβολή των δύο χαρακτηριστικών παραμέτρων για την πλήρη διερεύνηση της συμπεριφοράς του συστήματος.

Στην περίπτωση όμως μη μηδενικής εισόδου στο ίδιο σύστημα, οι παράμετροι αυτοί δεν αρκούν για τον πλήρη χαρακτηρισμό του συστήματος: δύο συστήματα με τα ίδια ζ και ω_n μπορεί να συμπεριφέρονται διαφορετικά ανάλογα με την είσοδό τους. Επομένως ανάλογα με την εφαρμογή, θα πρέπει να ορισθούν διαφορετικές παράμετροι για το ίδιο σύστημα, με βάση τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Στο σύστημα μάζα-ελατήριο-απόσβεση, η διαφορική εξίσωση (2-1) για αρμονική είσοδο γράφεται:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \sin(\omega t) \quad (2-18)$$

Οι μεταβλητές του συστήματος, x και t , έχουν διαστάσεις μήκους και χρόνου αντίστοιχα. Εάν ορισθεί μια κλίμακα για τα μεγέθη αυτά, είναι δυνατός ο μετασχηματισμός των διαφορικών εξισώσεων σε πιο διαχειρίσιμη μορφή. Μια τέτοια ανάθεση κλίμακας θα είναι της μορφής:

$$u = \frac{x}{a}, \tau = \frac{t}{b} \quad (2-19)$$

Οι ποσότητες a και b δεν έχουν ορισθεί ακόμα αλλά έχουν διαστάσεις μήκους και χρόνου κατ' αντιστοιχία με τις μεταβλητές x και t . Αντικατάσταση στην (2-18) δίνει την μετασχηματισμένη μορφή:

$$\frac{Ma}{b^2} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{Ba}{b} \frac{du}{dt} + kau = f_0 \sin(\omega b t) \quad (2-20)$$

Ο ορισμός των κλιμάκων a και b δεν είναι μονοσήμαντος, αλλά η επιλογή τους θα καθορίσει την μορφή των παραμέτρων. Μια τέτοια επιλογή είναι:

$$a = \frac{f_0}{\omega^2 M}, \quad b = \frac{1}{\omega} \quad (2-21)$$

Με την επιλογή αυτή των κλιμάκων η (2-20) γίνεται:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{B}{\omega M} \frac{du}{dt} + \frac{k}{\omega^2 M} u = \sin(\tau) \quad (2-22)$$

Και τελικά ορίζονται οι παράμετροι για το σύστημα:

$$\beta' = \frac{B}{\omega M}, \quad \kappa' = \frac{k}{\omega^2 M} \quad (2-23)$$

Το οποίο γράφεται στη μορφή:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \beta' \frac{du}{dt} + \kappa' u = \sin(\tau) \quad (2-24)$$

Καθίσταται τώρα εμφανές ότι για την πλήρη μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος σε αρμονική είσοδο, αρκεί η να διερευνηθεί ή επίδραση που έχει η μεταβολή των χαρακτηριστικών παραμέτρων β' και κ' στην απόκρισή του.

Αδιάστατη Μορφή Διαφορικών Εξισώσεων

Στην προηγούμενη παράγραφο δόθηκαν δύο παραδείγματα παραμετροποίησης του συστήματος μάζα-ελατήριο-απόσβεση. Οι παραμετροποιήσεις αυτές έχουν μια βασική διαφορά ως προς τη φύση των χαρακτηριστικών παραμέτρων στις οποίες καταλήγουν.

Στην περίπτωση μηδενικής εισόδου, επιλέχθηκαν οι παράμετροι ζ και ω_n για τον χαρακτηρισμό του συστήματος. Από τις παραμέτρους αυτές, ο συντελεστής απόσβεσης ζ δεν έχει διαστάσεις, ενώ η φυσική συχνότητα ω_n έχει διάσταση συχνότητας:

$$[\omega_n] = \frac{1}{s} \quad (2-25)$$

Συνολικά η διαφορική εξίσωση (2-3) είναι γραμμένη σε διαστάσεις επιτάχυνσης. Αυτό σημαίνει ότι συστήματα που περιέχουν μεγαλύτερες επιταχύνσεις, λόγω διαφορετικού πλάτους ταλάντωσης ή διαφορετικής συχνότητας της λύσης $x(t)$, περιγράφονται από όμοιες αλλά όχι ταυτόσημες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες θα επιλυθούν ξεχωριστά.

Στην δεύτερη περίπτωση όπου η είσοδος είναι αρμονική, οι παράμετροι β' και κ' που επιλέχθηκαν είναι και οι δύο αδιάστατες. Η διαφορική εξίσωση (2-24) στην οποία κατέληξε η παραμετροποίηση είναι επίσης σε αδιάστατη μορφή.

Γενικά σε περίπλοκα μηχανικά συστήματα προτιμάται η παραμετροποίηση με αδιάστατες παραμέτρους και η επίλυση αδιάστατων διαφορικών εξισώσεων, έναντι της αρχικής διαφορικής εξίσωσης η οποία περιέχει τις διαστάσεις των συμμετεχόντων φυσικών μεγεθών. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι η ανάγκη απόκτησης γενικών αποτελεσμάτων ανεξαρτήτως κλίμακας. Σε

πολλές περιπτώσεις, για τη μελέτη της συμπεριφοράς συστημάτων μεγάλων διαστάσεων δεν μπορούν να εκτελεσθούν πειράματα για τεχνικούς ή οικονομικούς λόγους, και έτσι προτιμάται η κατασκευή και μελέτη δυναμικά όμοιων συστημάτων μικρότερων διαστάσεων. Τα δύο αυτά συστήματα χαρακτηρίζονται από την ίδια αδιάστατη διαφορική εξίσωση και δίνουν όμοιες λύσεις. Η αναγωγή στις εκάστοτε διαστάσεις γίνεται με χρήση της κλίμακας που έχει ορισθεί για το κάθε σύστημα.

Κατ' αντιστοιχία προτιμούνται οι αδιάστατες μορφές των διαφορικών εξισώσεων προς οικονομία υπολογιστικού χρόνου. Μελετώντας το παράδειγμα αρμονικής φόρτισης του συστήματος μάζα-ελατήριο-απόσβεση μέσω της (2-24) είναι εμφανές ότι το πλάτος της αρμονικής φόρτισης, f_0 , δεν επηρεάζει την επίλυση της αδιάστατης διαφορικής εξίσωσης. Η γνώση του μεγέθους της δύναμης είναι χρήσιμη μόνο κατά την ανάθεση κλίμακας στη λύση $x(t)$, μέσω της σχέσης:

$$x = ua = u \frac{f_0}{\omega^2 M} \quad (2-26)$$

Επομένως σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι αρκεί η επίλυση της αδιάστατης διαφορικής εξίσωσης μία μόνο φορά ώστε να προκύψουν οι αποκρίσεις θέσης του ταλαντωτή για μεγάλο πλήθος αρμονικών φορτίσεων. Τέτοια συμπεράσματα είναι στρατηγικής σημασίας κατά το σχεδιασμό της προσέγγισης και επίλυσης ενός προβλήματος μέσω προσομοιώσεων ή πειραμάτων.

2.3.4 Περιοδικές Λύσεις Μη Γραμμικών Συστημάτων

Απεικόνιση Poincaré

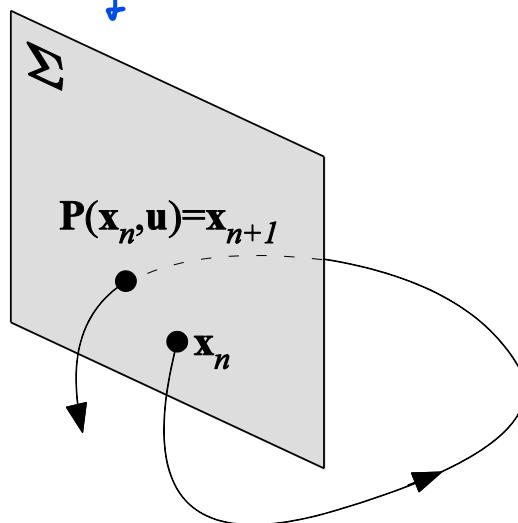
Η συμπεριφορά συστημάτων είναι δυνατό να εμφανίζει περιοδικότητα στο πεδίο του χρόνου. Για τις περιοδικές συμπεριφορές, μπορούν να προσδιοριστούν ορισμένες χαρακτηριστικές θέσεις τις οποίες λαμβάνει το σύστημα σε κάθε επανάληψη.

Παραδείγματα τέτοιων θέσεων είναι η θέση ισορροπίας και οι ακραίες θέσεις του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Εάν ο αρμονικός ταλαντωτής περιέχει στοιχείο απόσβεσης, τότε σε κάθε επανάληψη οι θέσεις αυτές θα έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά: ο ταλαντωτής θα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με διαρκώς μειούμενη ταχύτητα, ενώ το πλάτος της ταλάντωσης και συνεπώς η απόσταση των ακραίων θέσεων από τη θέση ισορροπίας θα μειώνεται. Το αντίθετο θα συμβεί σε αρμονικό ταλαντωτή με στοιχείο πρόσδωσης ενέργειας. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα χαρακτηριστικά των προσδιορίσιμων θέσεων μεταβάλλονται, επομένως η κατάσταση του συστήματος, που περιέχει θέσεις και ταχύτητες, επίσης μεταβάλλεται. **Αντίθετα, εάν ο ταλαντωτής δεν περιέχει στοιχείο απώλειας ή πρόσδωσης ενέργειας τότε το σύστημα έχει πλήρως επαναλήψιμη συμπεριφορά και οι θέσεις αυτές διατηρούν σταθερά χαρακτηριστικά, άρα γίνεται λόγος για επαναλήψιμη κατάσταση.**

Για ένα γνωστό περιοδικό σύστημα με επίσης γνωστή είσοδο u , η κατάσταση του συστήματος κατά τη διέλευσή του από κάποια προσδιορισμένη θέση αρκεί για να ορίσει την κατάσταση που θα έχει το σύστημα την επόμενη φορά που θα διέλθει από τη θέση αυτή. Η συσχέτιση αυτή των καταστάσεων κατά τις δύο διαδοχικές διελεύσεις είναι πρακτικά μια «απεικόνιση», όπως υποδεικνύει η σχέση:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}) \quad (2-27)$$

Στη γενική περίπτωση, η (2-27) παριστά ένα μη γραμμικό διακριτό σύστημα. Η απεικόνιση την οποία συμβολίζει ονομάζεται απεικόνιση Poincaré. Οι προσδιορισμένες θέσεις στις οποίες σημειώνεται και συγκρίνεται η κατάσταση ονομάζονται τομές Poincaré και συμβολίζονται Σ .



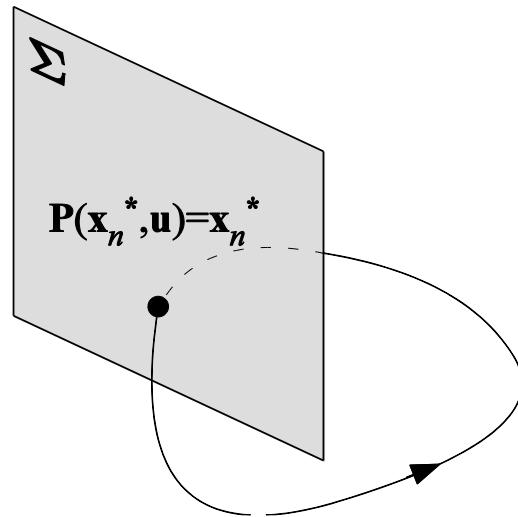
Σχήμα 2-5. Απεικόνιση Poincaré στη γενική περίπτωση.

Σταθερά Σημεία

Στα μη γραμμικά συστήματα, η περιοδική μεταβολή της κατάστασης δεν είναι εύκολο να προβλεφθεί. Η επαναληψιμότητα στις καταστάσεις μπορεί να γραφεί σε αντιστοιχία με την (2-27) ως εξής:

$$\mathbf{x}_n^* \equiv \mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{P}(\mathbf{x}_n^*, \mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{x}_n^* - \mathbf{P}(\mathbf{x}_n^*, \mathbf{u}) = 0 \quad (2-28)$$

Οι καταστάσεις \mathbf{x}^* που επαληθεύουν την τελευταία εξίσωση ονομάζονται σταθερά σημεία του συστήματος και εάν δοθούν ως αρχικές συνθήκες κατά την επίλυσή του, οι λύσεις θα είναι περιοδικές.



Σχήμα 2-6 . Απεικόνιση Poincaré σταθερού σημείου.

Όμως η συνάρτηση απεικόνισης \mathbf{P} δεν είναι γενικά γραμμική και η αναλυτική επίλυση της (2-28) θα απαιτούσε την ολοκλήρωση της μη γραμμικής συνάρτησης στο χρονικό εύρος μίας περιόδου. Αυτό δεν είναι εφικτό για περίπλοκα συστήματα, οπότε και επιλέγεται να γίνει η επίλυση αριθμητικά.

Στην παρούσα εργασία, ακολουθώντας την μεθοδολογία που έχει εφαρμοσθεί σε παρόμοια προβλήματα της βιβλιογραφίας, επιλέγεται η επίλυση με επαναληπτική αριθμητική μέθοδο **Newton-Raphson**, η οποία συνίσταται σε διαδοχικούς υπολογισμούς των όρων:

$$\mathbf{x}_n^{(k+1)} = \mathbf{x}_n^{(k)} + (\mathbf{I} - \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}_n^{(k)}))^{-1} [\mathbf{P}(\mathbf{x}_n^{(k)}) - \mathbf{x}_n^{(k)}] \quad (2-29)$$

Οι επαναλήψεις των υπολογισμών (2-29) συνεχίζονται έως ότου ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι για N στοιχεία στο διάνυσμα κατάστασης \mathbf{x}_n , ο όρος $\nabla \mathbf{P}$ απαιτεί για τον υπολογισμό του ($2N$) κλήσεις της συνάρτησης \mathbf{P} , άρα η (2-29) συνολικά απαιτεί $(2N+1)$ υπολογισμούς της \mathbf{P} . Επομένως θα πρέπει να λαμβάνεται προσοχή στην επιλογή του κριτηρίου τερματισμού, ώστε να περιορίζονται οι χρονοβόρες επαναλήψεις διατηρώντας ταυτόχρονα την επιθυμητή ακρίβεια στη λύση \mathbf{x}_n^* .

3 Δυναμικό Μοντέλο

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το δυναμικό μοντέλο που περιγράφει το σύστημα του δισκελούς μηχανισμού.

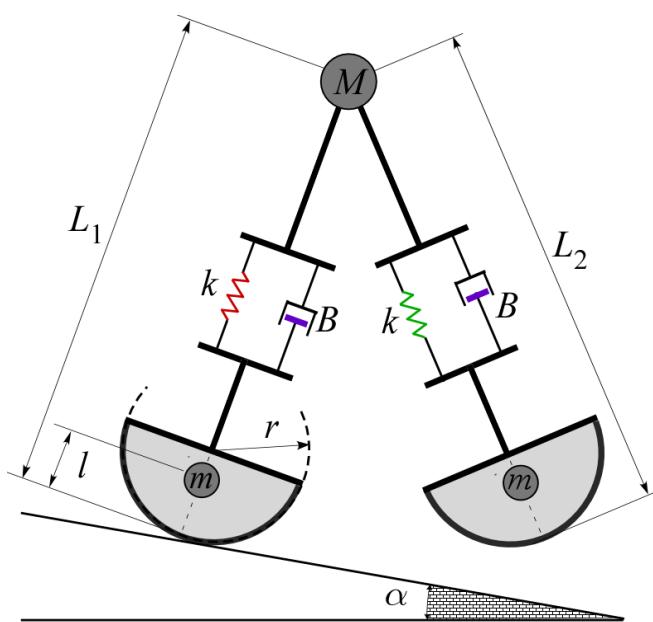
Στην Ενότητα 3.2 περιγράφεται το μηχανικό μοντέλο και αναλύονται τα στοιχεία τα οποία το αποτελούν. Ακόμα, αναφέρονται και επεξηγούνται τυχόν παραδοχές που έχουν ληφθεί για τα στοιχεία αυτά. Στην Ενότητα 3.3 ορίζονται οι γενικευμένες μεταβλητές που περιγράφουν την κατάσταση του μοντέλου.

Στην Ενότητα 3.4 περιγράφονται οι δύο φάσεις λειτουργίας για το σύστημα κατ' αναλογία με το ανθρώπινο περπάτημα και παρουσιάζεται η μαθηματική περιγραφή του συστήματος κατά τις δύο αυτές φάσεις λειτουργίας, υπό τη μορφή συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια, στην Ενότητα 3.5 ορίζονται μαθηματικά οι συνθήκες της εναλλαγής ανάμεσα στις φάσεις λειτουργίας.

Τέλος, στην Ενότητα 3.6 ορίζεται η αλληλουχία που θα συνθέσει τη συνάρτηση βηματισμού του μοντέλου.

3.2 Μηχανικό μοντέλο

Στην προσπάθεια μοντελοποίησης της δυναμικής που διέπει το ανθρώπινο περπάτημα έχουν προταθεί πλήθος μηχανικών μοντέλων. Ορισμένα από αυτά περιέχουν νέα στοιχεία τα οποία ενσωματώνουν μια χαρακτηριστική συμπεριφορά και δίνουν περισσότερο ακριβείς προσομοιώσεις. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας έγινε μια προσπάθεια ενσωμάτωσης σε ένα μοντέλο αρκετών από τα στοιχεία που έχουν αποδειχθεί αντιπροσωπευτικά της πραγματικής ανθρώπινης διαμόρφωσης. Συγκεκριμένα το μοντέλο που επιλέχθηκε παρουσιάζεται, κατά τη γενική περίπτωση λειτουργίας του, στην εικόνα που ακολουθεί.



Σχήμα 3-1. Το πλήρες μηχανικό μοντέλο.

Συνοπτικά, το μοντέλο αποτελείται από δύο εύκαμπτα σκέλη, «1» και «2», σταθεράς ελατηρίου k και αρχικού μήκους L_{nat} τα οποία λειτουργούν ως εκκρεμή: το σκέλος «1» αντιστοιχεί στο πόδι που στηρίζει το σώμα κατά το περπάτημα και μοντελοποιείται ως ένα ανάστροφο εκκρεμές, ενώ το σκέλος «2» αντιστοιχεί στο πόδι που προωθείται προς τα εμπρός και μοντελοποιείται με ένα κλασικό εκκρεμές. Τα πόδια εκτός από το στοιχείο ελαστικότητας έχουν μοντελοποιηθεί ώστε να περιλαμβάνουν και στοιχείο απόσβεσης B , συνδεδεμένο παράλληλα με το ελατήριο. Τα κάτω άκρα των ποδιών παρουσιάζουν κυκλική διαμόρφωση ακτίνας r . Ο όλος μηχανισμός ενεργεί σε επίπεδο με κλίση α .

Τα δύο πόδια συνδέονται με άρθρωση στο άνω μέρος τους στη θέση του ισχίου. Στη θέση αυτή έχει προσαρτηθεί η κύρια μάζα M , ενώ υπάρχουν δευτερεύουσες μάζες m στην περιοχή των πελμάτων.

Στις επόμενες υποενότητες ακολουθεί αναλυτικότερη περιγραφή των βασικών στοιχείων που αναφέρονται παραπάνω και επεξηγείται ο ρόλος τους στο μοντέλο, η αντιστοιχία τους στον άνθρωπο και η πρόταση υλοποίησής τους σε μελλοντική κατασκευή πειραματικής διάταξης.

3.2.1 Διπλό εκκρεμές

Έχει αποδειχθεί ότι το μοντέλο της συνεργασίας δύο εκκρεμών, ενός ανάστροφου για το σκέλος σε επαφή με το έδαφος και ενός ορθού για το προωθούμενο σκέλος, προσομοιώνει με μεγάλη ομοιότητα το ανθρώπινο περπάτημα. Μάλιστα το μοντέλο αυτό προτιμάται έναντι άλλων λόγω της παθητικής του δυναμικής, η οποία επιτρέπει την εμπρόσθια κίνηση μέσω μιας επαλληλίας «ελεγχόμενων πτώσεων». Για το σκοπό αυτό επιλέχθηκε αυτή η προσέγγιση κατά την επιλογή μοντέλου, ώστε να μελετηθεί η παθητική δυναμική που προσφέρει η δίποδη διαμόρφωση.

Το μοντέλο του διπλού εκκρεμούς απαιτεί να γίνει μια σημαντική παραδοχή: κατά την κίνηση των εκκρεμών στις προσομοιώσεις, αυτά θα πρέπει να επιτρέπεται να διέρχονται εσωτερικά του εδάφους, αφού δεν περιέχονται διαμορφώσεις γονάτων που να επιτρέπουν κάποια αναδίπλωση ή τηλεσκοπικού μηχανισμού για τη βράχυνση των σκελών.

Το πρόβλημα αυτό έχει αντιμετωπιστεί στις πειραματικές διατάξεις που έχουν κατασκευασθεί μέχρι τώρα, είτε με τη χρήση ειδικά διαμορφωμένων διαδρόμων στους οποίους εκτελείται το πείραμα, είτε με σχεδιασμό ο οποίος να οδηγεί την τηλεσκοπική παραμόρφωση των άκρων ώστε αυτά να βραχύνονται και να μην υπάρχει επαφή με το έδαφος.

3.2.2 Ελαστικότητα παραμόρφωσης των σκελών

Η κύρια κίνηση που προσδιορίζεται ως ανθρώπινο περπάτημα είναι η μεταφορά κατά μήκος μιας επιλεγμένης κατεύθυνσης στο οριζόντιο επίπεδο. Ωστόσο, είναι γνωστό πως το περπάτημα περιλαμβάνει και μια δευτερεύουσα ταλαντωτική κίνηση της μέσης στην κατακόρυφη διεύθυνση. Η κίνηση αυτή είναι γενικά ομαλή και δεν επιβάλλει απότομες επιταχύνσεις η επιβραδύνσεις στο άνω μισό του ανθρώπινου σώματος, οι οποίες θα μπορούσαν να βλάψουν τα ζωτικά όργανα που υπάρχουν εκεί.

Ο άνθρωπος στην πραγματικότητα χρησιμοποιεί ποικίλους τρόπους ώστε να εξομαλύνει την κίνησή του. Κατά κύριο λόγο, η ύπαρξη γονάτων προσδίδει παραπάνω βαθμούς ελευθερίας και επιτρέπει πιο επιδέξιες κινήσεις. Ακόμα, κατά την εναλλαγή των ποδιών, η μεταφορά της στήριξης

γίνεται σταδιακά από το ένα πόδι στο άλλο και όχι ακαριαία. **Το περπάτημα δηλαδή προϋποθέτει κάποιο βαθμό ενδοτικότητας.** Για να είναι δυνατή η προσομοίωση αυτής της ενδοτικότητας από το μοντέλο χωρίς γόνατα, είναι απαραίτητο να επιτρέπεται η ελαστική παραμόρφωση των σκελών.

Τα ελατήρια του μοντέλου είναι γραμμικά και έχουν σταθερά ελατηρίου k και αρχικό μήκος L_{nat} . Το μήκος αυτό μεταβάλλεται κατά το βηματισμό: η μεταβλητή L_1 αντιστοιχεί στο σκέλος «1» και η μεταβλητή L_2 αντιστοιχεί στο σκέλος «2». Στα ελατήρια αποθηκεύεται δυναμική ενέργεια κατά την παραμόρφωσή τους:

$$U_k = k(L_{nat} - L)^2 \quad (3-1)$$

Σε πειραματικές διατάξεις, η σταθερά ελατηρίου υπολογίζεται ως το ισοδύναμο «άθροισμα» της ελαστικότητας του υλικού κατασκευής των πτοδιών και των εγκατεστημένων ελατηρίων. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και σε διατάξεις δίποδων που έχουν υλοποιηθεί χωρίς ελατήρια κατά το μήκος των σκελών τους, υπάρχει αντιστοιχία με το μοντέλο, λόγω του μέτρου Young των χρησιμοποιούμενων υλικών.

3.2.3 Απόσβεση παραμόρφωσης των σκελών

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε για τη μηχανική του περπατήματος περιλαμβάνει στοιχεία απόσβεσης τα οποία ενεργούν στην ταχύτητα παραμόρφωσης των σκελών. Εν γένει, κάθε παραμόρφωση υπόκειται σε κάποιας μορφής τριβή με αποτέλεσμα οι ταλαντωτικές συμπεριφορές να φθίνουν προς μια σταθερή κατάσταση. Το ίδιο ισχύει και για το ανθρώπινο περπάτημα, όπου η απόσβεση πραγματοποιείται μέσω των ιστών των κάτω άκρων.

Τα στοιχεία απόσβεσης του μοντέλου συνδέονται άρρηκτα με τις ενεργειακές του απώλειες. Οι ενεργειακές απώλειες, τις οποίες προσομοιώνει το μοντέλο μέσω των στοιχείων απόσβεσης, είναι ενδεικτικές της «προσπάθειας» από πλευράς του ανθρώπου ώστε να επιτευχθεί κάποια κίνηση. Αρκετές μελέτες έχουν συσχετίσει τα προϊόντα της ανθρώπινης μεταβολικής δραστηριότητας με τα διάφορα είδη κίνησης. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για απαιτητικές κινήσεις, όπως είναι το τρέξιμο, τα επίπεδα κατανάλωσης ενέργειας είναι γενικά υψηλότερα απ' ότι για το περπάτημα.

Στο μοντέλο, τα στοιχεία απόσβεσης ακολουθούν το μοντέλο της ιξώδους τριβής και έχουν σταθερά απόσβεσης B . Η απώλεια ενέργειας από τις αποσβέσεις εξαρτάται και από την ταχύτητα παραμόρφωσης των σκελών:

$$U_B = B\dot{L} \quad (3-2)$$

Στις πειραματικές διατάξεις υπάρχουν πάντα απώλειες ενέργειας κατά την σχετική κίνηση δύο μελών λόγω τριβής αλλά και κατά τις ανελαστικές κρούσεις λόγω θερμότητας. Ακόμα, υπάρχουν στοιχεία απόσβεσης τα οποία προσαρτώνται στα σκέλη και αφαιρούν ενέργεια από το σύστημα ενώ ταυτόχρονα περιορίζουν τις ταλαντώσεις.

3.2.4 Κυκλική διαμόρφωση κάτω άκρων

Το μηχανικό μοντέλο περιλαμβάνει κυκλικής διαμόρφωσης «πέλματα» για την επαφή με το έδαφος. Κατά το ανθρώπινο περπάτημα, από το «heel-strike» έως το «toe-off» η θέση του κέντρου πίεσης από το πέλμα στο έδαφος μετατοπίζεται ομαλά προς τα εμπρός χάρη στη λειτουργία των αστραγάλων. Ακόμα, η δυνατότητα αυτή προσαρμογής της σχετικής γωνίας πέλματος-σκέλους επιτρέπει την ομαλότερη εναλλαγή στήριξης κατά το βηματισμό.

Στη βιβλιογραφία έχει προταθεί η χρήση ημικυκλικών áκρων στα σκέλη αντί των σημειακών, ώστε να αποδοθεί αυτή η λειτουργία και στα μοντέλα που έχουν κατασκευασθεί. Η χρήση κυκλικών áκρων προσφέρει την ομαλή προώθηση του κέντρου πίεσης κατά μήκος των πελμάτων χωρίς την προσθήκη αρθρώσεων στη θέση των αστραγάλων. Ακόμα, μελετώντας την κίνηση του ανάστροφου εκκρεμούς, αποδεικνύεται ότι η χρήση κυκλικών πελμάτων οδηγεί σε ομαλότερες κινήσεις του κέντρου μάζας, παρόμοιες με αυτές που θα εκτελούσε ένας μηχανισμός με πιο μακριά σκέλη.

Η μοντέλοποίηση της επαφής του ημικυκλικού πέλματος με το έδαφος ακολουθεί τη σύμβαση της κύλισης χωρίς ολίσθηση: τα ημικυκλικά πέλματα κυλίονται πάνω στο έδαφος χωρίς να υπάρχει ολίσθηση, ώστε να ισχύει ότι για περιστροφή κατά γωνία θ το κέντρο του κύκλου μετατοπίζεται κατά:

$$x = r\theta \quad (3-3)$$

3.2.5 Γωνία κλίσης εδάφους

Το μοντέλο μελετάται στη γενική περίπτωση περπατήματος σε κεκλιμένο κατηφορικό επίπεδο με κλίση α . Η τιμή της γωνίας φυσικά μπορεί να λάβει πλήθος τιμών, επιτρέποντας έτσι την κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο ή ακόμα και σε ανηφορικό έδαφος.

Ένα σώμα που κινείται στο πεδίο βαρύτητας έχει ανάλογα με τη θέση του ένα επίπεδο δυναμικής ενέργειας: κατά την ελεύθερη πτώση σωμάτων αυτά επιταχύνονται καθώς η δυναμική τους ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική. Το ίδιο συμβαίνει και κατά την κατάβαση του δίποδου μηχανισμού κατά το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου: κατάβαση απόστασης x παράλληλα με το κεκλιμένο έδαφος για ένα σώμα μάζας M μεταφράζεται σε ανάκτηση κινητικής ενέργειας κατά το ποσό:

$$U_a = Mgh = Mgxs \sin \alpha \quad (3-4)$$

Η μελέτη του παθητικού περπατήματος εστιάζεται στην εύρεση βηματισμών, με τους οποίους το δίποδο θα διανύει το κεκλιμένο επίπεδο ανακτώντας ακριβώς τόση ενέργεια κατά την κατάβασή του στο δυναμικό πεδίο, όση χάνεται λόγω των στοιχείων απόσβεσης που αυτό περιλαμβάνει. Το βαρυτικό δυναμικό είναι δηλαδή αυτό που επιτρέπει την παθητική κατάβαση.

3.2.6 Σημειακές μάζες

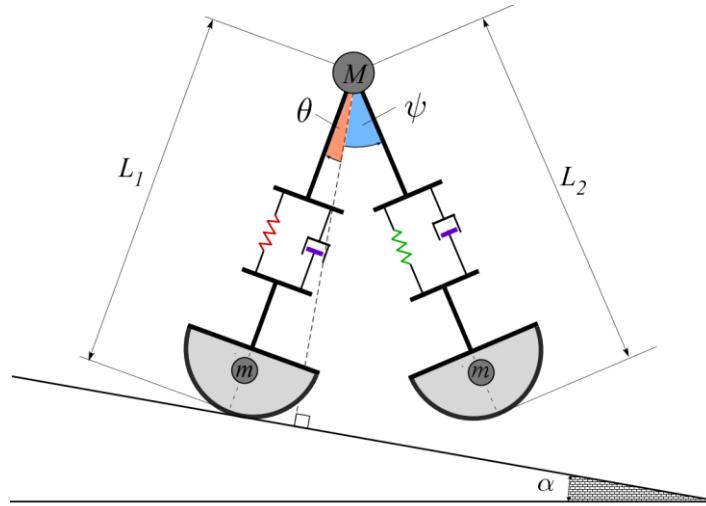
Το μοντέλο περιλαμβάνει τρεις σημειακές μάζες: την κύρια μάζα M και δύο δευτερεύουσες μάζες στα πέλματα m .

Η κυρίως μάζα M είναι σημαντικά μεγαλύτερη σε μέγεθος συγκριτικά με τις δευτερεύουσες, αντιπροσωπεύει το μεγαλύτερο ποσοστό της μάζας του ανθρώπου και είναι τοποθετημένη στην θέση της άρθρωσης που αντιστοιχεί στο ισχίο.

Οι δευτερεύουσες μάζες m τοποθετούνται σε απόσταση l από το κάτω áκρο του πέλματος όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-1. Για όλες τις κατανομές μάζας σε σχεδιασμούς ποδιών μπορούν να προσδιοριστούν οι κατάλληλες τιμές για τις μεταβλητές m και l ώστε το μοντέλο να είναι αντιπροσωπευτικό της πραγματικότητας. Η σημαντικότερη όμως συνεισφορά των σημειακών μαζών στα πέλματα του μοντέλου είναι ότι δίνουν την δυνατότητα μελέτης της δυναμικής του εκκρεμούς κατά τη φάση προώθησης του ελεύθερου ποδιού προς τα εμπρός.

3.3 Γενικευμένες μεταβλητές του μοντέλου

Οι γενικευμένες μεταβλητές του μοντέλου είναι ένα ελάχιστο σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους μεταβλητών το οποίο περιγράφει κάθε στιγμή την κατάσταση του μηχανισμού. Για το συγκεκριμένο μοντέλο, αυτές είναι τέσσερις στον αριθμό: οι δύο γωνίες φ και θ και τα δύο μήκη L_1 και L_2 των σκελών.



Σχήμα 3-2. Γενικευμένες μεταβλητές του μοντέλου.

Στο Σχήμα 3-2 παρουσιάζονται οι μεταβλητές αυτές. Ο σχηματισμός στον οποίο βρίσκεται κάθε στιγμή το πρώτο σκέλος ορίζεται πλήρως από το μήκος του, L_1 , και την γωνία που σχηματίζει ο άξονάς του με την κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο, θ . Εάν είναι γνωστά αυτά, τότε για τον προσδιορισμό της θέσης του δεύτερου σκέλους αρκεί το μήκος L_2 και η γωνία ψ που σχηματίζει το δεύτερο σκέλος με την κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο.

Επομένως γνώση της τιμής των μεταβλητών αυτών κάθε στιγμή αρκεί για τον προσδιορισμό του σχηματισμού του δίποδου. Όμως αυτές οι τέσσερις μεταβλητές δεν είναι πάντα ανεξάρτητες μεταξύ τους: όταν και τα δύο πόδια βρίσκονται σε επαφή με το έδαφος δύο από αυτές μπορούν να προκύψουν ως συνάρτηση των άλλων δύο, λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης και της συνθήκης επαφής, κάτι που θα συζητηθεί στις επόμενες ενότητες.

Τέλος, όσον αφορά τις γωνίες θ και ψ , αξίζει να σημειωθεί ότι θεωρήθηκε ότι κατά τη διάρκεια ενός βήματος αυτές αυξάνονται. Επομένως, η θετική φορά για τη μέτρηση της γωνίας θ είναι η αριολογιακή, ενώ για την ψ η ανθωρολογιακή, όπως έχει σημειωθεί στο Σχήμα 3-2.

3.4 Φάσεις λειτουργίας του μοντέλου

Το περπάτημα στα ζώα αναγνωρίζεται ως ο ευσταθής περιοδικός βηματισμός χαμηλής ταχύτητας, κατά τον οποίο το σώμα προωθείται προς τα εμπρός και υπάρχει πάντα ένα τουλάχιστον άκρο σε επαφή με το έδαφος. Κατά το δίποδο περπάτημα, αναγνωρίζονται δύο φάσεις στην κίνηση κάθε σκέλους: η φάση εδάφους και η φάση ππήσης.

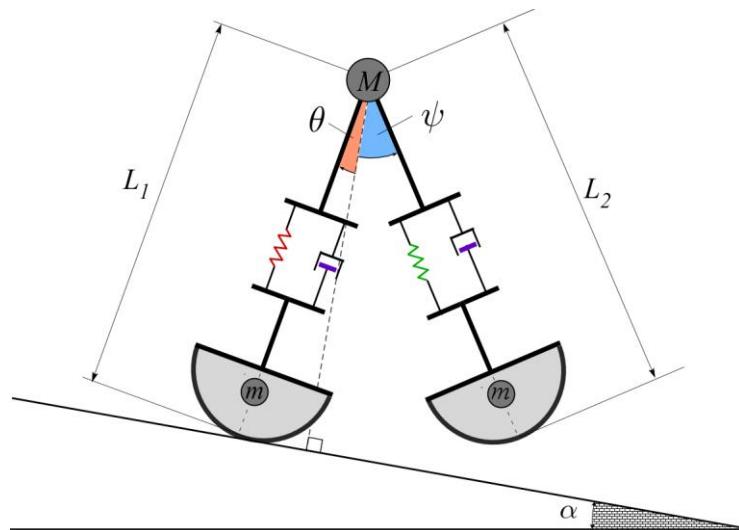
Η φάση εδάφους για ένα σκέλος ξεκινά με το «Heel-Strike» (HS) όπου η φτέρνα έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με το έδαφος και λήγει με το «Toe-Off» (TO) όπου το μπροστινό μέρος του πέλματος, τα δάχτυλα, αποχωρίζονται το έδαφος. Στη διάρκεια της φάσης αυτής το σκέλος

παραλαμβάνει σταδιακά το βάρος ολόκληρου του ανθρώπου, μεταφέρει το σώμα προς τα εμπρός και τελικά αποφορτίζεται και ετοιμάζεται να αφήσει το έδαφος και να συνεχίσει στη φάση πτήσης.

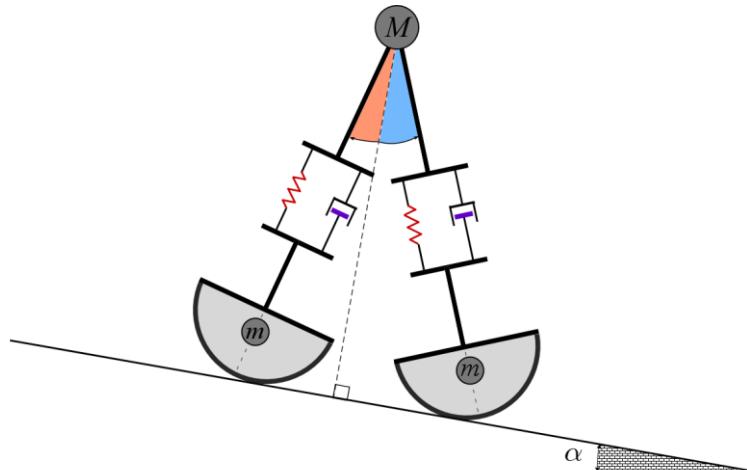
Κατά τη διάρκεια της φάσης πτήσης, η οποία ξεκινά με το ΤΟ και τελειώνει με το HS, το σκέλος είναι κατά κύριο λόγο αφόρτιστο και προωθείται, με ελάχιστη ροπή από το ισχίο, προς τα εμπρός ώστε να παραλάβει το βάρος του ανθρώπου στην επόμενη φάση εδάφους.

Εστιάζοντας στη συνεργασία των δύο σκελών κατά το περπάτημα, σημειώνεται ότι κάθε χρονική στιγμή ένα τουλάχιστον από τα δύο άκρα του δίποδου βρίσκεται σε φάση εδάφους. Το άλλο σκέλος μπορεί να είναι σε φάση πτήσης ή επίσης να βρίσκεται σε φάση εδάφους. Έτσι μακροσκοπικά αναγνωρίζονται αντίστοιχα η φάση προώθησης και η φάση διπλής στήριξης για το δίποδο περπάτημα.

Στην εργασία αυτή έχουν μοντελοποιηθεί οι δύο αυτές φάσεις και οι προσομοιώσεις γίνονται με επάλληλη επίλυση των μοντέλων που αντιστοιχούν σε αυτές. Στο Σχήμα 3-3 απεικονίζεται το μοντέλο κατά τη λειτουργία του στη φάση προώθησης ενώ το Σχήμα 3-4 δείχνει το μοντέλο στη φάση διπλής στήριξης.



Σχήμα 3-3. Το μοντέλο κατά τη φάση προώθησης.



Σχήμα 3-4. Το μοντέλο κατά τη φάση διπλής στήριξης.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μαθηματική περιγραφή κάθε φάσης.

3.4.1 Φάση προώθησης

Κατά τη φάση προώθησης υπάρχουν τέσσερις ανεξάρτητες γενικευμένες μεταβλητές όπως αυτές ορίσθηκαν στην Ενότητα 3.3. Επομένως το σύστημα σε αυτή τη φάση περιγράφεται από ένα σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων.

Οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος προέκυψαν με τη μέθοδο Lagrange όπως έχει περιγραφεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Το σύστημα που προέκυψε είναι της μορφής:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3-5)$$

Τα μητρώα αδρανείας \mathbf{M} , όρων φυγόκεντρων και Coriolis \mathbf{C} , ελαστικότητας \mathbf{K} , και βαρυτικών δυνάμεων \mathbf{G} , αναγράφονται αναλυτικά στα παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{L}_1 \\ \ddot{L}_2 \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3-6)$$

$$m_{11} = M[(L_1 - r)^2 + r^2 + 2r(L_1 - r)\cos\theta] + m\{(L_1 - r)^2 + (L_1 - l)^2 + 2r^2 + 2r[(L_1 - r) + (l - r)]\cos\theta\}$$

$$m_{12} = (M + m)r\sin\theta$$

$$m_{13} = m(L_2 - l)[(L_1 - r)\cos(\psi + \theta) + r\cos\psi]$$

$$m_{14} = m[(L_1 - r)\sin(\psi + \theta) + r\sin\psi]$$

$$m_{22} = M + m$$

$$m_{23} = m(L_2 - l)\sin(\psi + \theta)$$

$$m_{24} = -m\cos(\psi + \theta)$$

$$m_{33} = m(L_2 - l)^2$$

$$m_{34} = 0$$

$$m_{44} = m$$

$$c_{11} = -\{[M(L_1 - r) + m[(L_1 - r) + (l - r)]r\sin\theta]\dot{\theta}$$

$$c_{12} = 2(M + m)(L_1 - r + r\cos\theta)\dot{\theta}$$

$$c_{13} = -m[(L_2 - l)r\sin\psi + (L_1 - r)(L_2 - l)\sin(\psi + \theta)]\dot{\psi}$$

$$c_{14} = 2m[(L_1 - r)\cos(\psi + \theta) + r\cos\psi]\dot{\psi}$$

$$c_{21} = -(M + m)(L_1 - r)\dot{\theta}$$

$$c_{22} = B$$

$$c_{23} = m(L_2 - l)\cos(\psi + \theta)\dot{\psi}$$

$$c_{24} = 2m\sin(\psi + \theta)\dot{\psi}$$

$$c_{31} = -m(L_1 - r)(L_2 - l)\sin(\psi + \theta)\dot{\theta}$$

$$c_{32} = 2m(L_2 - l)\cos(\psi + \theta)\dot{\theta}$$

$$c_{33} = 0$$

$$c_{34} = 2m(L_2 - l)\dot{\psi}$$

$$\begin{aligned}
c_{41} &= m(L_1 - r)\cos(\psi + \theta)\dot{\theta} \\
c_{42} &= 2m\sin(\psi + \theta)\dot{\theta} \\
c_{43} &= -m(L_2 - l)\dot{\psi} \\
c_{44} &= B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0 \\
k_2 &= k(L_1 - L_{nat}) \\
k_3 &= 0 \\
k_4 &= k(L_2 - L_{nat})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= g\{(M+m)[r\sin a + (L_1 - r)\sin(a - \theta)] + m[r\sin a + (l - r)\sin(a - \theta)]\} \\
g_2 &= g(M+m)\cos(a - \theta) \\
g_3 &= gm(L_2 - l)\sin(a + \psi) \\
g_4 &= -gm\cos(a + \psi)
\end{aligned}$$

3.4.2 Φάση διπλής στήριξης

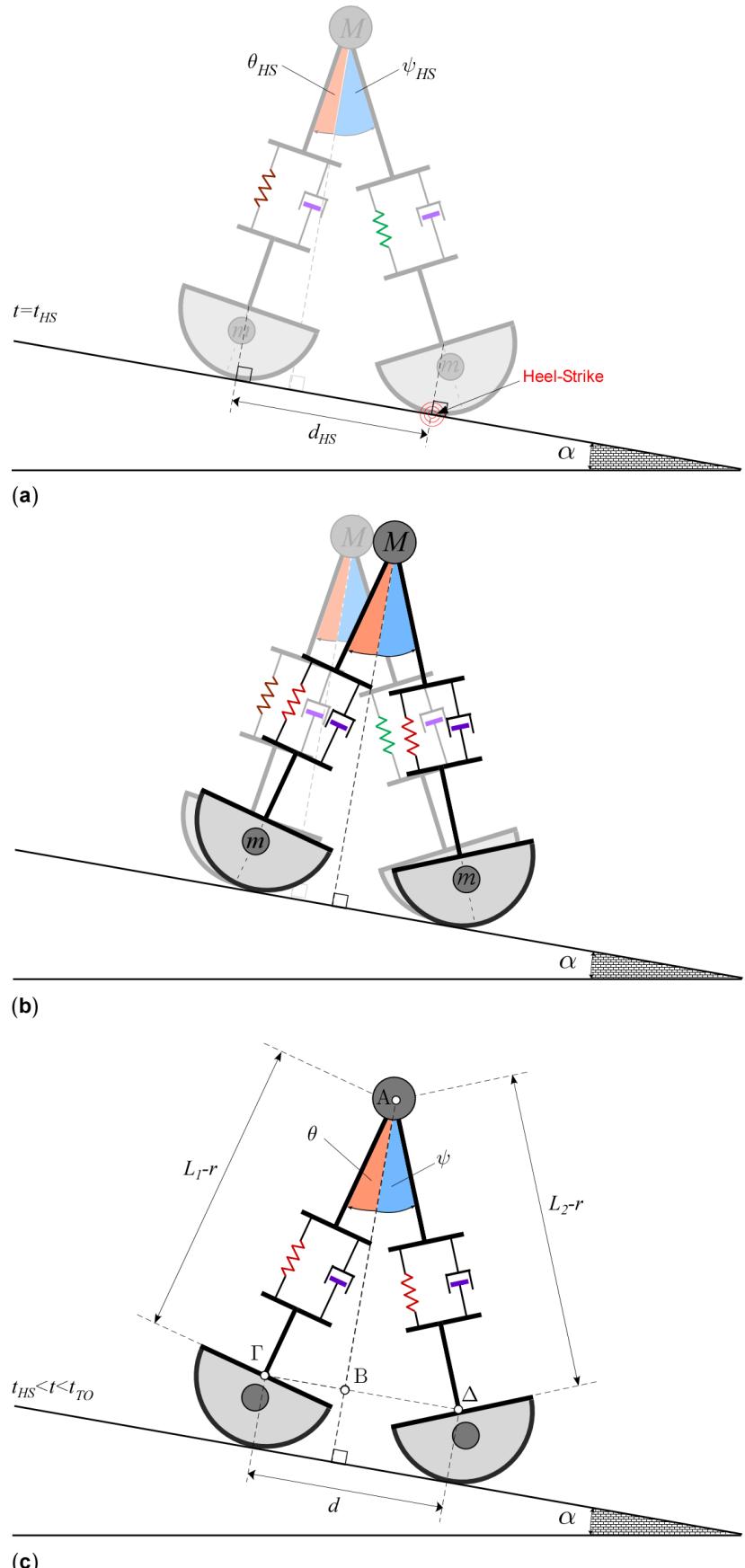
Κατά τη φάση διπλής στήριξης το μοντέλο διατηρεί την δυναμική του, όμως προστίθενται κάποιοι όροι γενικευμένων δυνάμεων ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί της επαφής του μέχρι πρότινος προωθούμενου άκρου με το έδαφος.

Οι περιορισμοί αυτοί είναι δύο: η συνθήκη μη ολίσθησης και η συνθήκη επαφής με το έδαφος. Η συνθήκη μη ολίσθησης υποθέτει ότι κατά την επαφή ενός άκρου με το έδαφος, δεν υπάρχει ολίσθηση και άρα το κέντρο των κυκλικών πελμάτων προωθείται κατά το μήκος τόξου που ορίζει η αντίστοιχη γωνιακή μετατόπιση. Η συνθήκη επαφής περιλαμβάνει τη θεώρηση μη παραμορφώσιμων τόξων, και υποθέτει ότι το κέντρο του κύκλου που ορίζει κάθε πέλμα απέχει απόσταση r από το έδαφος, όσο το αντίστοιχο σκέλος βρίσκεται σε φάση εδάφους.

Το Σχήμα 3-5 παρουσιάζει το μοντέλο κατά την αρχή της φάσης διπλής στήριξης, στο HS (a), αλλά και σε αργότερη χρονική στιγμή κατά την ίδια φάση (b), πριν δηλαδή το TO, όπου έχει υπάρξει μεταβολή των γωνιών θ και ψ . Όπως προκύπτει εύκολα από το Σχήμα 3-5 (c), εάν είναι γνωστή η απόσταση d των κέντρων των πελμάτων κατά το HS, έστω d_{HS} , καθώς και οι αντίστοιχες τιμές των γενικευμένων μεταβλητών θ_{HS} και ψ_{HS} εκείνη τη στιγμή, και δεδομένων των συνθηκών μη ολίσθησης και επαφής εδάφους, τότε μπορούν να γραφούν για την τυχαία χρονική στιγμή της φάσης διπλής στήριξης δύο εξισώσεις περιορισμών. Αυτές είναι:

$$\begin{aligned}
AB &= (L_1 - r)\cos\theta = (L_2 - r)\cos\psi \\
\Rightarrow s_1(\mathbf{q}) &= (L_1 - r)\cos\theta - (L_2 - r)\cos\psi = 0
\end{aligned} \tag{3-7}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\Delta &= d = (L_1 - r)\sin\theta + (L_2 - r)\sin\psi \\
\Rightarrow s_2(\mathbf{q}) &= d_{HS} + r(\theta_{HS} - \theta + \psi_{HS} - \psi) - (L_1 - r)\sin\theta - (L_2 - r)\sin\psi = 0
\end{aligned} \tag{3-8}$$



Σχήμα 3-5. Προώθηση του μοντέλου κατά τη φάση διπλής στήριξης. (a) Εκκίνηση της φάσης διπλής στήριξης κατά το HS. (b) Προώθηση κατά τη φάση διπλής στήριξης. (c) Γεωμετρία περιορισμών κατά τη φάση διπλής στήριξης.

Σύμφωνα με την μεθοδολογία για την ικανοποίηση περιορισμών μέσω πολλαπλασιαστών Lagrange, οι διαφορικές εξισώσεις επαυξάνονται με όρους της μορφής (2-17), ενώ πλέον οι λύσεις πρέπει να ικανοποιούν και τις εξισώσεις των περιορισμών. Επομένως το σύστημα στη φάση αυτή περιγράφεται από τις εξής εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ s_1(\mathbf{q}) &= 0 \\ s_2(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \quad (3-9)$$

Στην (3-9) τα μητρώα \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} , \mathbf{G} είναι τα ίδια που έχουν ορισθεί για το σύστημα στη φάση προώθησης, στην (3-6). Το 2×1 διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda}$ είναι το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange ενώ ο 4×2 πίνακας $\boldsymbol{\Pi}$ περιέχει τους όρους:

$$\boldsymbol{\Pi}[k, j] = \pi_{kj} = \frac{\partial s_j}{\partial q_k} \quad k = 1 \dots 4, \quad j = 1 \dots 2 \quad (3-10)$$

Εκτελώντας τις πράξεις που ορίζονται στην (3-10) στις εξισώσεις των περιορισμών (3-7) και (3-8) προκύπτουν οι γενικευμένες δυνάμεις λόγω των περιορισμών στο σύστημα (3-9) ως εξής:

$$\mathbf{f}_{\text{constr.}} = \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \\ \pi_{41} & \pi_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= (L_1 - r) \sin \theta \\ \pi_{12} &= r + (L_1 - r) \cos \theta \\ \pi_{21} &= -\cos \theta \\ \pi_{22} &= \sin \theta \\ \pi_{31} &= -(L_2 - r) \sin \psi \\ \pi_{32} &= r + (L_2 - r) \cos \psi \\ \pi_{41} &= \cos \psi \\ \pi_{42} &= \sin \psi \end{aligned}$$

Το σύστημα που επιλύεται για την φάση αυτή περιέχει τέσσερις διαφορικές εξισώσεις και δύο αλγεβρικές εξισώσεις περιορισμών, ενώ πλέον υπάρχουν πέρα από τις τέσσερις γενικευμένες μεταβλητές q_k δύο επιπλέον άγνωστοι λ_j . Επομένως πρόκειται για σύστημα έξι εξισώσεων με έξι αγνώστους.

Το διάνυσμα $\mathbf{f}_{\text{constr.}}$ θα δίνει κάθε στιγμή στο σύστημα την κατάλληλη δύναμη ώστε να το εξαναγκάζει να ικανοποιεί τους περιορισμούς $s_{1,2}$. Το μειονέκτημα χρήσης της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange για την ικανοποίηση των περιορισμών είναι ότι δεν επιτρέπει την παραμικρή παραβίαση των περιορισμών αυτών, άρα δεν προσφέρει ελαστικό χαρακτήρα στην κρούση του πέλματος με το έδαφος την στιγμή HS. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη πολύ μεγάλων επιταχύνσεων άρα και δυνάμεων στο πέλμα, οι οποίες στην πραγματικότητα περιορίζονται λόγω ενδοτικότητας κατά την κρούση. Όμως η ελαστικότητα του σκέλους εξομαλύνει τις επιταχύνσεις στην θέση του ισχίου, όπου είναι σημαντικό να υπάρχει ομαλή κίνηση.

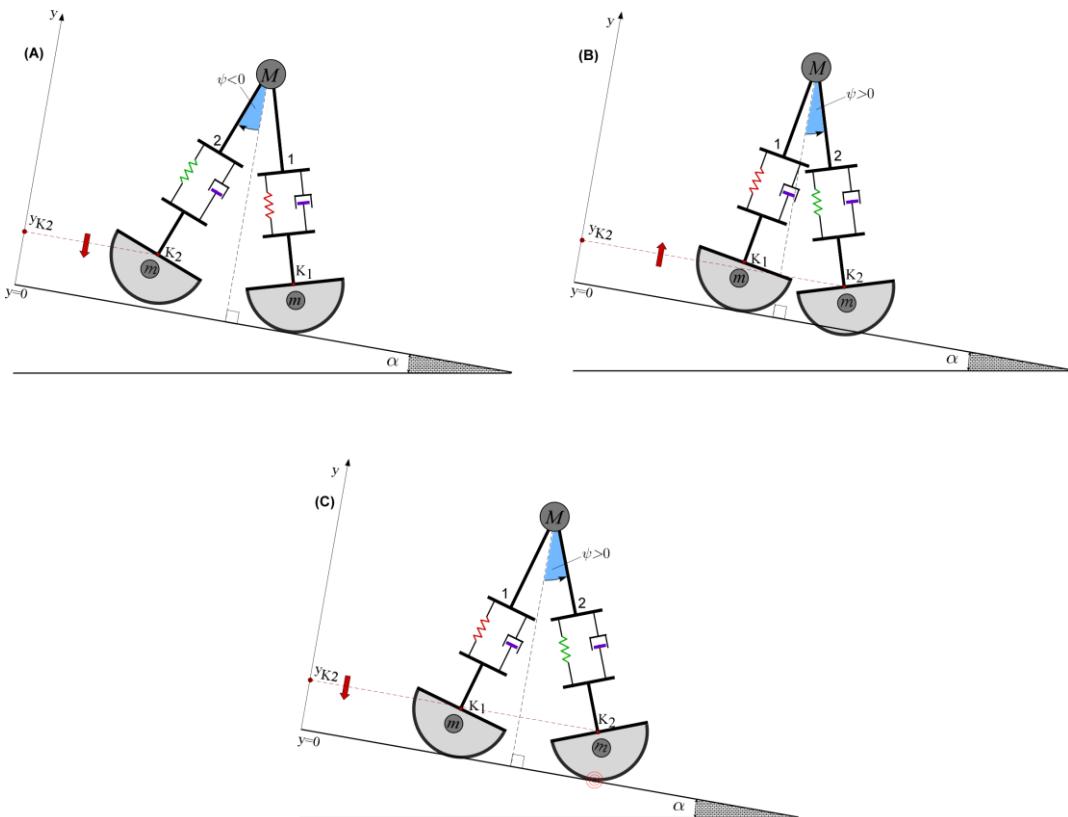
3.5 Συνθήκες εναλλαγής φάσεων

Η επίλυση του μοντέλου γίνεται αριθμητικά στο περιβάλλον Simulink του πακέτου Matlab. Για να επιτευχθεί ο βηματισμός, πρέπει να εναλλάσσονται οι δύο φάσεις, προώθησης και διπλής στήριξης, όποτε αυτό είναι αναγκαίο, και να επιλέγεται το επόμενο μοντέλο για επίλυση. Αυτό απαιτεί τον ορισμό συνθηκών που θα λειτουργούν ως «διακόπτες», τερματίζοντας την εκάστοτε επίλυση ώστε να εκκινήσει η επόμενη.

Όπως έχει ήδη συζητηθεί, ο τερματισμός της φάσης προώθησης ονομάζεται heelstrike (HS) ενώ αντίστοιχα ο τερματισμός της φάσης διπλής στήριξης ονομάζεται toe-off (TO). Στην ενότητα αυτή ορίζονται μαθηματικά οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να τερματίσει η κάθε φάση.

3.5.1 Τερματισμός φάσης προώθησης : Heelstrike

Η φάση προώθησης τερματίζεται όταν το σκέλος που βρίσκεται σε φάση ππήσης έρθει σε επαφή με το έδαφος, ή αντίστοιχα όταν το κέντρο του κυκλικού πέλματος K_2 απέχει από το έδαφος κατά την ακτίνα r . Επειδή όμως στο μοντέλο που εξετάζεται εδώ δεν υπάρχουν γόνατα, το πέλμα του σκέλους αυτού βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος πάνω από μία φορά κατά την προώθησή του προς τα εμπρός, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-6.



Σχήμα 3-6. Περιπτώσεις επαφής πέλματος-εδάφους.

Από τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στο παραπάνω σχήμα, η (Α) αντιστοιχεί στην πρώτη επικείμενη «σύγκρουση» του πέλματος με το έδαφος κατά την εκκίνηση του βήματος. Στη θέση αυτή η επαφή με το έδαφος θα πρέπει να αγνοηθεί και να συνεχίσει να επιλύεται η φάση προώθησης, αφού η διέλευση του πέλματος πέρα από την ευθεία του εδάφους αποτελεί απλούστευση του

μοντέλου και δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Ομοίως, η (B) επίσης θα πρέπει να αγνοηθεί, καθώς ούτε αυτή η επαφή με το έδαφος θα αντιστοιχεί στον τερματισμό του βήματος, αλλά είναι απαραίτητη για την προώθηση του σκέλους προς τα εμπρός, δεδομένης της προηγούμενης διέλευσης του πέλματος από την θέση $y=0$. Τέλος, η (C) είναι η επιθυμητή θέση τερματισμού του βήματος, όπου το σκέλος έχει προωθηθεί εμπρός του σώματος και ξεκινά την κατάβασή του προς το έδαφος.

Για τον αποκλεισμό των περιπτώσεων (A) και (B), έχουν ορισθεί τρεις συνθήκες οι οποίες θα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα ώστε να αναγνωρισθεί το heelstrike:

- Συνθήκη επαφής με το έδαφος, η οποία **ικανοποιείται και στις τρεις περιπτώσεις (A) (B) και (C)**:

$$y_{K_2} = r + (L_1 - r)\cos\theta - (L_2 - r)\cos\psi = r \quad (3-12)$$

- Συνθήκη προώθησης σκέλους σε πτήση, η οποία **ικανοποιείται στις περιπτώσεις (B) και (C)**:

$$\underline{\psi > 0} \quad (3-13)$$

- Συνθήκη κατάβασης σκέλους σε πτήση, που **ικανοποιείται στις περιπτώσεις (A) και (C)**:

$$\frac{d}{dt}[(L_1 - r)\cos\theta - (L_2 - r)\cos\psi] < 0 \quad (3-14)$$

3.5.2 Τερματισμός φάσης διπλής στήριξης : Toe-off

Οι περιορισμοί που έχουν εισαχθεί στη φάση διπλής στήριξης είναι γεωμετρικοί και θα παρέχουν στο σύστημα οσοδήποτε μεγάλες δυνάμεις χρειαστεί ώστε να ικανοποιούνται. Για το λόγο αυτό, είναι σημαντικό να ορισθεί η συνθήκη τερματισμού της φάσης αυτής η οποία θα ανταποκρίνεται στην φυσική συμπεριφορά του συστήματος.

Κατά την προώθηση του μοντέλου προς τα εμπρός, το σκέλος «1» σταδιακά αποφορτίζεται καθώς το βάρος μεταφέρεται στο σκέλος «2». Αυτή η αποφόρτιση συνοδεύεται από την αντίστοιχη επιμήκυνση, και τελικά το ελατήριο καταλήγει να εφελκύεται προσπαθώντας να αποκολλήσει το πέλμα από το έδαφος. Για το σκοπό αυτό, ορίσθηκε το **toe-off** ώστε όταν η εφελκυστική δύναμη του ελατηρίου του σκέλους «1» υπερνικήσει τη συνιστώσα του βάρους του πέλματος, mg , σε εκείνη τη διεύθυνση, το σκέλος θα πρέπει να απελευθερωθεί από την επαφή του με το έδαφος. Η παραπάνω πρόταση λαμβάνει την εξής μαθηματική περιγραφή:

$$k(L_1 - L_{nat}) - mg \cos(\alpha - \theta) > 0 \quad (3-15)$$

3.6 Συνάρτηση βηματισμού

Στα παραπάνω έχουν ορισθεί αναλυτικά οι δύο φάσεις του περπατήματος και οι συνθήκες εναλλαγής τους. Στην παρούσα ενότητα θα ορισθεί η συνεργασία τους προς σχηματισμό της συνάρτησης βηματισμού, δηλαδή της **συνάρτησης που παραλαμβάνει την κατάσταση του συστήματος στην αρχή ενός βήματος, επιλύει τις δυναμικές εξισώσεις και των δύο φάσεων και τελικά επιστρέφει την κατάσταση στο τέλος του βήματος, ή ισοδύναμα, στην αρχή του επόμενου βήματος**. Το διάνυσμα της κατάστασης περιέχει τις γενικευμένες μεταβλητές του μοντέλου και τις ταχύτητές τους:

$$\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}, L_1, \dot{L}_1, \psi, \dot{\psi}, L_2, \dot{L}_2]^T \quad (3-16)$$

Ως αρχή του n-οστού βήματος ορίζεται η εκκίνηση της φάσης προώθησης. Τότε το διάνυσμα κατάστασης είναι \mathbf{x}_n . Η φάση προώθησης επιλύεται με αυτές τις αρχικές συνθήκες, και όταν αναγνωρισθεί το συμβάν HS η φάση αυτή τερματίζεται και η τελευταία καταγεγραμμένη τιμή του διανύσματος $\mathbf{x}_{n,HS}$ εισέρχεται ως αρχική συνθήκη στην φάση διπλής στήριξης. Τελικά, με το συμβάν TO τερματίζεται και η φάση αυτή, και προκύπτει η τελευταία τιμή της κατάστασης κατά το βήμα, $\mathbf{x}_{n,TO}$. Συμβολίζοντας με f_1 τη διαδικασία αντιστοίχισης της αρχικής κατάστασης \mathbf{x}_n στην κατάσταση $\mathbf{x}_{n,HS}$ μέσω της επίλυσης της φάσης προώθησης (3-5), και με f_2 την αντιστοίχιση της κατάστασης $\mathbf{x}_{n,HS}$ στην κατάσταση $\mathbf{x}_{n,TO}$ μέσω της επίλυσης της φάσης διπλής στήριξης (3-9), τα παραπάνω μπορούν να γραφούν:

$$\mathbf{x}_{n,TO} = f_2(\mathbf{x}_{n,HS}) = f_2(f_1(\mathbf{x}_n)) \quad (3-17)$$

Στη συνέχεια, θα πρέπει να ανατεθούν οι αρχικές συνθήκες για το επόμενο βήμα. Επειδή το μοντέλο ασχολείται με το βηματισμό χωρίς διαφοροποίηση ανάμεσα σε δεξί και αριστερό σκέλος, οι αρχικές συνθήκες του σκέλους «2» θα είναι οι τελικές συνθήκες του σκέλους «1», αφού αυτό είναι που θα εκκινήσει τη φάση πτήσης, και αντίστροφα. Εξ' αιτίας της διαφορετικής φοράς ορισμού των γωνιών θ και ψ , πρέπει να ακολουθήσει αντίστροφή των προσήμων που αντιστοιχούν σε αυτές, ώστε τα αποτελέσματα να είναι συμβατά. Τα παραπάνω περιγράφονται από τις εξισώσεις (3-18):

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= -\psi_{n,TO}, \quad \psi_{n+1} = -\theta_{n,TO} \\ \dot{\theta}_{n+1} &= -\dot{\psi}_{n,TO}, \quad \dot{\psi}_{n+1} = -\dot{\theta}_{n,TO} \\ L_{1,n+1} &= L_{2,n,TO}, \quad L_{2,n+1} = L_{1,n,TO} \\ \dot{L}_{1,n+1} &= \dot{L}_{2,n,TO}, \quad \dot{L}_{2,n+1} = \dot{L}_{1,n,TO} \end{aligned} \quad (3-18)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί υλοποιούνται μέσω πολλαπλασιασμού με τον πίνακα μετασχηματισμού \mathbf{T} :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n,TO} \triangleq \mathbf{T}\mathbf{x}_{n,TO} \quad (3-19)$$

Συνολικά, ο συνδυασμός των (3-17) και (3-19) δίνει την συνάρτηση βηματισμού \mathbf{P} , η οποία συνδέει την κατάσταση στην αρχή του n-οστού βήματος, \mathbf{x}_n , με την κατάσταση στην αρχή του n+1 βήματος, \mathbf{x}_{n+1} :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}f_2(f_1(\mathbf{x}_n)) \triangleq \mathbf{P}(\mathbf{x}_n) \quad (3-20)$$

Η συνάρτηση \mathbf{P} μπορεί να θεωρηθεί ως μια απεικόνιση Poincaré, ενώ η αντίστοιχη τομή Poincaré όπου εξετάζεται η κατάσταση του συστήματος, είναι η αρχή του κάθε βήματος.

4 Προσαρμογή του μοντέλου στον άνθρωπο

4.1 Εισαγωγή

Το μοντέλο που παρουσιάσθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο περιέχει πλήθος μεταβλητών, διαφορετικές τιμές των οποίων οδηγούν σε διαφορετική εξέλιξη της συμπεριφοράς του συστήματος. Με σκοπό την μελέτη του ανθρώπινου περιπατήματος και τη μίμησή του από το απλοποιημένο μηχανικό μοντέλο, είναι απαραίτητη η επιλογή των παραμέτρων αυτών ώστε να ανταποκρίνονται στο φυσικό σύστημα.

Στην Ενότητα 4.2 παρουσιάζεται η διαδικασία αδιαστατοποίησης του συστήματος. Στην Ενότητα 4.3 αναλύονται οι αδιάστατες παράμετροι που ορίζουν τη συμπεριφορά του μοντέλου. Τέλος, στην Ενότητα 4.4 καθορίζονται τα διαστήματα επιλογής των αδιάστατων παραμέτρων ώστε να ανταποκρίνονται στις τιμές που συναντώνται στον άνθρωπο, και ορίζονται οι ονομαστικές τιμές τους.

4.2 Αδιαστατοποίηση συστήματος

Όπως έχει επεξηγηθεί στην Ενότητα 3.3 του Κεφαλαίου 2, ο μετασχηματισμός του συστήματος σε αδιάστατη μορφή μπορεί να δώσει σημαντικές πληροφορίες για τη λειτουργία του.

Εδώ αδιαστατοποιούνται οι μεταβλητές κατάστασης σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{t}{s} \\ \theta^* &= \theta, \quad \dot{\theta}^* = \dot{\theta}s, \quad \ddot{\theta}^* = \ddot{\theta}s^2 \\ L_1^* &= \frac{L_1}{L_{nat}}, \quad \dot{L}_1^* = \frac{\dot{L}_1}{L_{nat}}s, \quad \ddot{L}_1^* = \frac{\ddot{L}_1}{L_{nat}}s^2 \\ \psi^* &= \psi, \quad \dot{\psi}^* = \dot{\psi}s, \quad \ddot{\psi}^* = \ddot{\psi}s^2 \\ L_2^* &= \frac{L_2}{L_{nat}}, \quad \dot{L}_2^* = \frac{\dot{L}_2}{L_{nat}}s, \quad \ddot{L}_2^* = \frac{\ddot{L}_2}{L_{nat}}s^2 \end{aligned} \tag{4-1}$$

όπου s η χρονική κλίμακα, σε μονάδες χρόνου, που επιλέγεται για την αδιαστατοποίηση.

Επομένως το διάνυσμα κατάστασης του αδιάστατου συστήματος γράφεται:

$$\mathbf{q}^* = [\theta^*, L_1^*, \psi^*, L_2^*]^T \tag{4-2}$$

Ως χρονική κλίμακα για την αδιαστατοποίηση επιλέγεται η πιο αργή ιδιοσυχνότητα του συστήματος, η οποία είναι αυτή του εκκρεμούς:

$$s = \sqrt{\frac{L_{nat}}{g}} \tag{4-3}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στις διαφορικές εξισώσεις (3-9) προκύπτει η αδιάστατη μορφή των διαφορικών εξισώσεων του συστήματος, οι οποίες αναγράφονται αναλυτικά στο Παράρτημα A. Σε αυτές εντοπίζονται έξι αδιάστατες παράμετροι, όπως παρουσιάζει ο Πίνακας 4-1. Η τιμή αυτών των παραμέτρων ορίζει την απόκριση του συστήματος σε αρχικές συνθήκες και συνεπώς διαμορφώνει την παθητική δυναμική του.

Πίνακας 4-1. Αδιάστατες παράμετροι μοντέλου

Όνομασία παραμέτρου	Σύμβολο	Ορισμός
Συντελεστής κύλισης	ρ	$\rho = \frac{r}{L_{nat}}$
Λόγος μαζών	μ	$\mu = \frac{m}{M}$
Συντελεστής κατανομής μάζας πέλματος	λ	$\lambda = \frac{l}{L_{nat}}$
Αδιάστατη σταθερά ελατηρίου	κ	$\kappa = \frac{kL_{nat}}{Mg}$
Αδιάστατη σταθερά απόσβεσης	β	$\beta = \frac{B}{M} \sqrt{\frac{L_{nat}}{g}}$
Γωνία κατάβασης	α	—

4.3 Αδιάστατες παράμετροι

Στην παρούσα ενότητα αναλύονται οι αδιάστατες παράμετροι του μοντέλου και επεξηγείται η φυσική σημασία τους.

Ο συντελεστής κύλισης ρ ορίζει έμμεσα την ακτίνα των κυκλικών πελμάτων. Με αύξηση του συντελεστή κύλισης, τα πέλματα αποκτούν μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας: απείρως μεγάλες τιμές του ρ θα έδιναν θεωρητικά γραμμικά πέλματα. Το μοντέλο μπορεί να επιλυθεί και με μηδενικό συντελεστή κύλισης, όπου οι προσομοιώσεις ταυτίζονται με τα μοντέλα που δεν περιέχουν διαμόρφωση πέλματος.

Ο λόγος μαζών μ είναι η μία από τις δύο παραμέτρους για τον καθορισμό της αδρανειακής κατανομής στο δίποδο μοντέλο και εκφράζει την τιμή της μάζας στα πέλματα ως ποσοστό της μάζας στο ισχίο. Θεωρητικά, μηδενικός μ θα όριζε αβαρή πέλματα και θα αντιστοιχούσε στα μοντέλα που δεν περιλαμβάνουν κατανομή μάζας στα σκέλη. Όμως τα μοντέλα αυτά δεν λαμβάνουν υπ' όψιν τους την παθητική δυναμική της φάσης πτήσης, η οποία είναι σημαντικό στοιχείο της μελέτης στο χωρίς επενέργηση σύστημα. Επομένως στο πλαίσιο της εργασίας αυτής ο συντελεστής μαζών είναι μη μηδενικός.

Ο συντελεστής κατανομής μάζας πέλματος λ είναι η δεύτερη από τις δύο παραμέτρους που ορίζουν την θέση της μάζας των πελμάτων και συνεπώς της συνολική ροπή αδράνειας του μοντέλου. Εξ' ορισμού ο συντελεστής λ παίρνει τιμές από μηδέν έως ένα, αφού υπόκειται σε γεωμετρικούς περιορισμούς. Μικρές τιμές του λ τοποθετούν τις μάζες των σκελών πιο κοντά στα πέλματα, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για μεγαλύτερες τιμές του λ . Μελετώντας το σκέλος σε φάση πτήσης ως

εκκρεμούς, προκύπτει ότι μικρές τιμές του λ δίνουν μεγαλύτερο μήκος στο εκκρεμές και συνεπώς μικρότερη συχνότητα ταλάντωσης.

Η αδιάστατη σταθερά ελατηρίου κ αντιστοιχεί στην ελαστικότητα των σκελών: μεγαλύτερες σταθερές κ οδηγούν σε περισσότερο δύσκαμπτα σκέλη. Αυτή η άμεση αντιστοιχία της αδιάστατης σταθεράς με την ελαστικότητα του μοντέλου οδηγεί σε μεταβολή της συχνότητας βηματισμού με την μεταβολή του κ : μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου συνεπάγονται «γρηγορότερες» διαμήκεις ταλαντώσεις των σκελών και τελικά οδηγούν σε βηματισμό μεγαλύτερης συχνότητας, όπως θα παρουσιαστεί σε επόμενη ενότητα.

Η αδιάστατη σταθερά απόσβεσης β ορίζει τον ρυθμό απώλειας ενέργειας μέσω της απόσβεσης των ταλαντώσεων στους τηλεσκοπικούς βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου. Μεγαλύτερες τιμές του β οδηγούν σε μεγαλύτερες τιμές της απόσβεσης, άρα και σε γρηγορότερα αποσβεννύμενες ταλαντώσεις.

Τέλος, η γωνία κατάβασης α αποτελεί ειδική περίπτωση αδιάστατης παραμέτρου, καθώς είναι εξ ορισμού αδιάστατη και δεν προκύπτει από άλλες, διαστατές παραμέτρους. Μεγαλύτερες γωνίες κατάβασης οδηγούν σε ταχύτερη ανάκτηση ενέργειας από το βαρυτικό πεδίο και άρα αναμένεται να οδηγούν σε βηματισμούς όπου υπάρχει μεγαλύτερη απώλεια ενέργειας μέσω των αποσβέσεων στους διαμήκεις βαθμούς ελευθερίας.

4.4 Ορισμός διαστημάτων επιλογής και ονομαστικών τιμών αδιάστατων παραμέτρων

4.4.1 Διαστήματα επιλογής τιμών αδιάστατων παραμέτρων

Η επιλογή των διαστημάτων για τις τιμές των αδιάστατων παραμέτρων έγινε μέσω πρώτου προσδιορισμού των αντίστοιχων διαστημάτων για τις διαστατές παραμέτρους, ώστε οι τελευταίες να ανταποκρίνονται στον άνθρωπο. Στη συνέχεια μέσω των σχέσεων ορισμού τους, προσδιορίστηκαν τα διαστήματα στα οποία κυμαίνονται οι αδιάστατες παράμετροι του μοντέλου.

Το διάστημα τιμών για την κυρίως μάζα M του μοντέλου ορίστηκε ώστε να κυμαίνεται γύρω από μια μέση τιμή \bar{M} με απόκλιση έως ΔM :

$$\begin{aligned} \bar{M} - \Delta M &\leq M \leq \bar{M} + \Delta M \\ 80kg - 30kg &\leq M \leq 80kg + 30kg \\ 50kg &\leq M \leq 110kg \end{aligned} \quad (4-4)$$

Το διάστημα στο οποίο μεταβάλλεται το φυσικό μήκος των ελατηρίων-σκελών είναι:

$$0.75m \leq L_{nat} \leq 1.05m \quad (4-5)$$

Η μέση τιμή του μήκους αυτού επιλέχθηκε ίση με τη μονάδα, ώστε να διευκολύνονται και οι πρόχειροι υπολογισμοί:

$$\bar{L}_{nat} = 1m \quad (4-6)$$

Για τη σταθερά k των ελατηρίων, επιλέχθηκε το ακόλουθο διάστημα το οποίο περιλαμβάνει τις περισσότερες από τις τιμές που έχουν συναντηθεί σε σχετική βιβλιογραφία:

$$10000N/m \leq k \leq 50000N/m \quad (4-7)$$

Αντίστοιχα για τη σταθερά απόσβεσης B επιλέχθηκε το διάστημα τιμών:

$$250Nm / s \leq B \leq 1750Nm / s \quad (4-8)$$

Τελικά το διάστημα επιλογής της αδιάστατης σταθεράς ελατηρίου κ προκύπτει μέσω αντικατάστασης των παραπάνω στη σχέση ορισμού (Πίνακας 4-1):

$$\underline{7 \leq \kappa \leq 64} \quad (4-9)$$

Αντίστοιχα για την αδιάστατη σταθερά απόσβεσης β προκύπτει το διάστημα:

$$\underline{1 \leq \beta \leq 7} \quad (4-10)$$

Η επιλογή των διαστημάτων για τις υπόλοιπες παραμέτρους δεν βασίστηκε σε βιβλιογραφικές πηγές, αλλά επιλέχθηκαν με βάση τη φυσική ερμηνεία τους, το ρόλο τους στο μοντέλο αλλά και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων. Τα διαστήματα αυτά είναι:

$$\begin{aligned} &\underline{0 \leq \rho \leq 0.4} \\ &\underline{0.01 \leq \mu \leq 0.1} \\ &\underline{0 \leq \lambda \leq 0.2} \\ &\underline{-5^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ} \end{aligned} \quad (4-11)$$

4.4.2 Ονομαστικές τιμές παραμέτρων

Για την μελέτη του δίποδου μηχανισμού είναι χρήσιμο να ορισθούν, εκτός από τις περιοχές επιλογής των αδιάστατων παραμέτρων, και ονομαστικές τιμές εντός των περιοχών αυτών. Οι ονομαστικές τιμές θα ορίζουν το ονομαστικό μοντέλο, στο οποίο θα εκτελεσθούν οι περισσότερες από τις προσομοιώσεις. Ακόμα, κατά τη μελέτη της συμπεριφοράς του μοντέλου για μεταβολή των παραμέτρων του, θα μεταβάλλεται κάθε φορά μία από αυτές, ενώ οι υπόλοιπες θα παραμένουν στην ονομαστική τιμή τους.

Η επιλογή των ονομαστικών τιμών για τις παραμέτρους έγινε με κριτήριο την ευστάθεια του βηματισμού, όπως αυτή θα ορισθεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο. Συνοπτικά, επιλέχθηκε μέσω επαναληπτικής διαδικασίας ο συνδυασμός τιμών παραμέτρων για τον οποίο το μοντέλο εκτελεί στις προσομοιώσεις την κατάβαση του κεκλιμένου επιπέδου, ελαχιστοποιώντας την πιθανότητα να αποκλίνει από το βηματισμό του λόγω διαταραχών.

Ο Πίνακας 4-2 παρουσιάζει τις τιμές που επιλέχθηκαν ως ονομαστικές, καθώς και το πλήρες διάστημα επιλογής των παραμέτρων.

Πίνακας 4-2. Ονομαστικές τιμές αδιάστατων παραμέτρων

Ονομασία παραμέτρου	Σύμβολο	Ελάχιστη τιμή	Ονομαστική τιμή	Μέγιστη τιμή
Συντελεστής κύλισης	ρ	0	0.363	0.4
Λόγος μαζών	μ	0.01	0.016	0.1
Συντελεστής κατανομής μάζας πέλματος	λ	0	0.14	0.2
Αδιάστατη σταθερά ελατηρίου	κ	7	29.7	64
Αδιάστατη σταθερά απόσβεσης	β	1	3.63	7
Γωνία κατάβασης	α	-5°	-2°	0°

5 Παθητικό περπάτημα

5.1 Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό επικεντρώνεται στη λειτουργία παθητικού περπατήματος του δίποδου μηχανισμού, η οποία προκύπτει από την εύρεση περιοδικών λύσεων της συνάρτησης βηματισμού \mathbf{P} , όταν οι εξισώσεις που συνθέτουν την \mathbf{P} δεν υπόκεινται σε κάποια εξωτερική επενέργηση. Στην Ενότητα 5.2 περιγράφεται η διαδικασία αναζήτησης αυτών των περιοδικών λύσεων, \mathbf{x}^* , υπολογιστικά.

Στην Ενότητα 5.3 μελετάται το ονομαστικό σημείο λειτουργίας του μηχανισμού, το οποίο αποτελεί τη λύση για τις ονομαστικές τιμές των αδιάστατων παραμέτρων. Στην Ενότητα 5.4 μελετάται η επίδραση που έχει η μεταβολή των αδιάστατων παραμέτρων στις λύσεις αυτές. Τέλος, στην Ενότητα 5.5 εξάγονται τα συμπεράσματα από τη μελέτη του παθητικού περπατήματος.

5.2 Εύρεση περιοδικών λύσεων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσθηκαν τα διαστήματα επιλογής των τιμών των αδιάστατων παραμέτρων που ορίζουν την δυναμική του μοντέλου. **Κάθε συνδυασμός των παραμέτρων αυτών αντιστοιχεί σε διαφορετική συμπεριφορά των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων. Είναι απαραίτητο να μπορούν να βρεθούν αυτές οι λύσεις ώστε να μελετηθεί το περπάτημα που προκύπτει ως αποτέλεσμα της παθητικής δυναμικής.**

Για τον προσδιορισμό των περιοδικών λύσεων που συντελούν το βηματισμό, επιλύεται αριθμητικά η (5-1) η οποία οδηγεί στην εύρεση περιοδικά επαναλαμβανόμενων λύσεων της συνάρτησης βηματισμού (3-20):

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{P}(\mathbf{x}_n) \quad (5-1)$$

Οι προσομοιώσεις για την επίλυση της \mathbf{P} έγιναν μέσω του περιβάλλοντος Simulink του πακέτου Matlab, χρησιμοποιώντας **αλγόριθμο variable-step Dormand-Prince με μέγιστο χρονικό βήμα κατά 50 φορές μικρότερο της πιο μικρής περιόδου του συστήματος, αυτής του ελατηρίου:**

$$t_{\max} = \frac{1}{50} \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (5-2)$$

Οι παράμετροι relative και absolute tolerance του επιλυτή ορίσθηκαν 10^{-6} και 10^{-6} αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές επιλέχθηκαν ώστε να είναι επαρκώς μικρές για τα επιθυμητά επίπεδα ακρίβειας, χωρίς ωστόσο να επιτρέπουν στα αριθμητικά σφάλματα να επηρεάζουν σημαντικά τη λύση.

Για τη σύγκλιση στη λύση επιλέχθηκε η βασισμένη στη μέθοδο Newton-Raphson (2-29), με την οποία υπολογίσθηκε ο $\mathbf{x}_n^{<k+1>}$ όρος σε κάθε k -επανάληψη. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή ο όρος $\nabla \mathbf{P}$ περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

$$\nabla \mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \psi} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_1} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \dot{L}_1} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_2} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \dot{L}_2} \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

Ο j -όρος αυτού του διανύσματος είναι ένα 8×1 διάνυσμα παραγώγων, που υποδεικνύει το πώς μεταβάλλονται οι 8 όροι του διανύσματος κατάστασης \mathbf{x}_{n+1} με μικρή μεταβολή του j -όρου του διανύσματος \mathbf{x}_n . Οι παράγωγοι αυτοί υπολογίσθηκαν αριθμητικά με τη μέθοδο των κεντρικών

διαφορών. Επομένως για κάθε έναν από τους 8 όρους παραγώγων, η τιμή της συνάρτησης P υπολογίσθηκε 2 φορές.

Συνολικά για κάθε υπολογισμό του πίνακα ∇P μεσολάβησαν 16 υπολογισμοί της συνάρτησης P , ενώ ένας ακόμα υπολογισμός της P είναι απαραίτητος για τον προσδιορισμό όλων των όρων της (2-29). Επομένως είναι απαραίτητη η προσεκτική επιλογή κριτηρίου τερματισμού ώστε να εξοικονομείται υπολογιστικός χρόνος. Το κριτήριο τερματισμού επιλέχθηκε:

$$\left\| \mathbf{x}_n^{} - \mathbf{x}_n^{} \right\|_\infty < 10^{-6} \quad (5-4)$$

Τελικά η διαδικασία αυτή οδηγεί στην εύρεση της περιοδικής λύσης \mathbf{x}^* η οποία αποτελεί σταθερό σημείο της απεικόνισης Poincaré P κατά την αρχή κάθε βήματος. Για τη διερεύνηση της παθητικής δυναμικής σε μοντέλα με διαφορετικές παραμέτρους, χρειάστηκε να βρεθούν τα σταθερά αυτά σημεία για πλήθος διαφορετικών μοντέλων. Παρόμοια μοντέλα έχουν, από παρατήρηση, σταθερά σημεία τα οποία δεν απέχουν κατά πολύ μεταξύ τους. Επομένως η διαδικασία εύρεσης σταθερών σημείων εκτελέσθηκε διαδοχικά για τις διάφορες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων, εκκινώντας από ήδη γνωστές λύσεις παραπλήσιων μοντέλων.

5.3 Μελέτη βηματισμού στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας

Οι περιοδικές λύσεις που προσδιορίστηκαν με τη μέθοδο της προηγούμενης ενότητας οδηγούν σε επαναλαμβανόμενους βηματισμούς του δίποδου. Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ορισμένα από τα χαρακτηριστικά αυτών των βηματισμών, για το μοντέλο στο οποίο όλες οι παράμετροι λαμβάνουν τις ονομαστικές τιμές τους, όπως αυτές ορίσθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (Πίνακας 4-2).

5.3.1 Στοιχεία διανύσματος κατάστασης

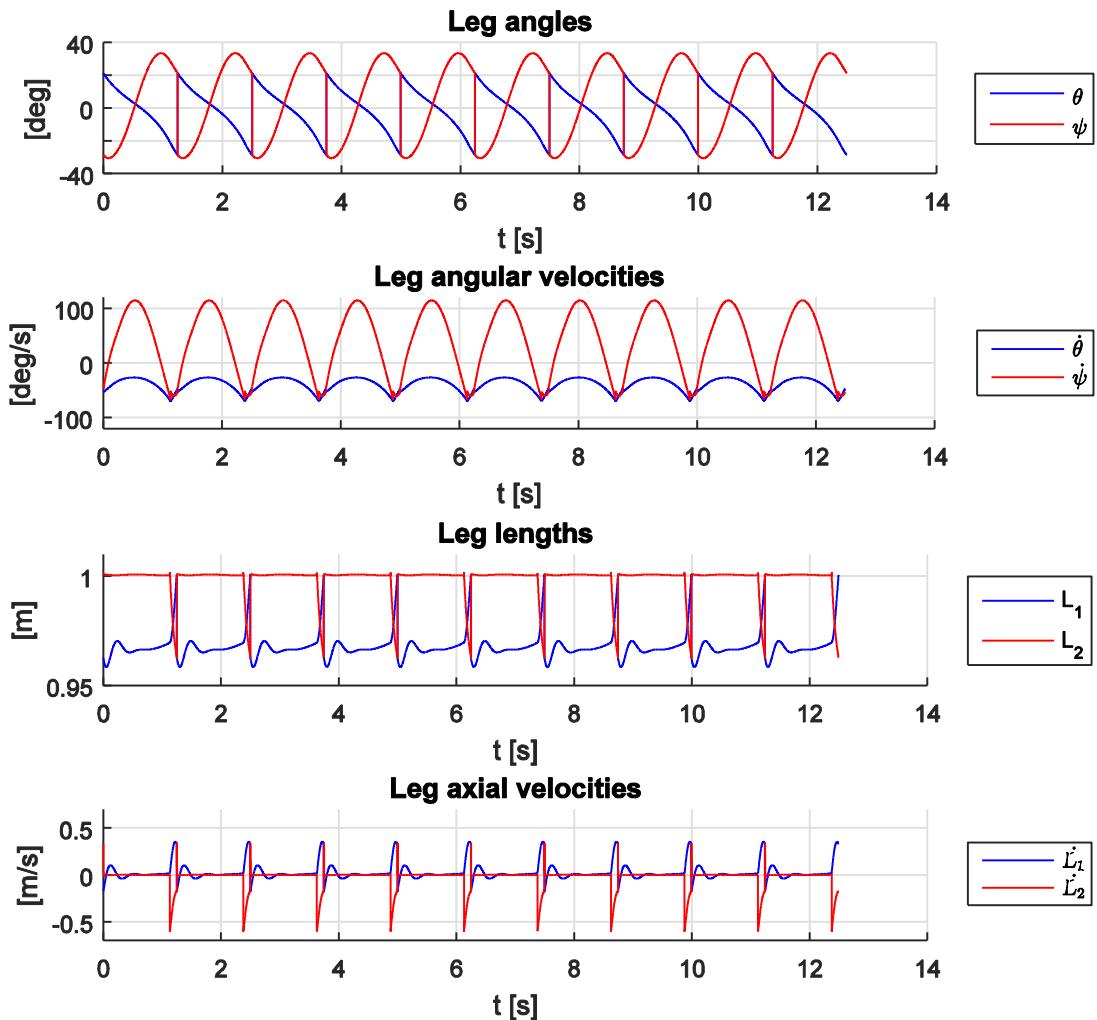
Η επαναληψιμότητα του βηματισμού συνεπάγεται ότι ανά τακτά χρονικά διαστήματα, διάρκειας μίας περιόδου, η κατάσταση του συστήματος επαναλαμβάνεται. Αυτό επεκτείνεται σε κάθε μία από τις 8 μεταβλητές κατάστασης του μοντέλου: στους 4 βαθμούς ελευθερίας και στις ταχύτητές τους.

Είναι επιθυμητό να καταγραφεί αυτή η επαναληψιμότητα και να προσδιοριστούν τα όρια στα οποία κυμαίνονται οι τιμές των μεταβλητών κατάστασης. Ακόμα, είναι σκόπιμο να υπάρξει αντιστοιχία ανάμεσα στη συμπεριφορά αυτή του μοντέλου, με τα όσα έχει βρεθεί ότι ισχύουν κατά τη διάρκεια του ανθρώπινου περιπατήματος, με σκοπό μία πρώτη αξιολόγηση της καταλληλότητας του μοντέλου.

Στο Σχήμα 5-1 παρουσιάζονται τα στοιχεία του διανύσματος κατάστασης ως συνάρτηση του χρόνου για χρονική διάρκεια 10 βημάτων. Οι προσομοιώσεις εκκίνησαν από το σταθερό σημείο \mathbf{x}^* για το ονομαστικό μοντέλο, το οποίο προσδιορίσθηκε με τη μέθοδο της προηγούμενης ενότητας. Οι μεταβλητές κατάστασης έχουν σημειωθεί ανά δύο στο ίδιο γράφημα.

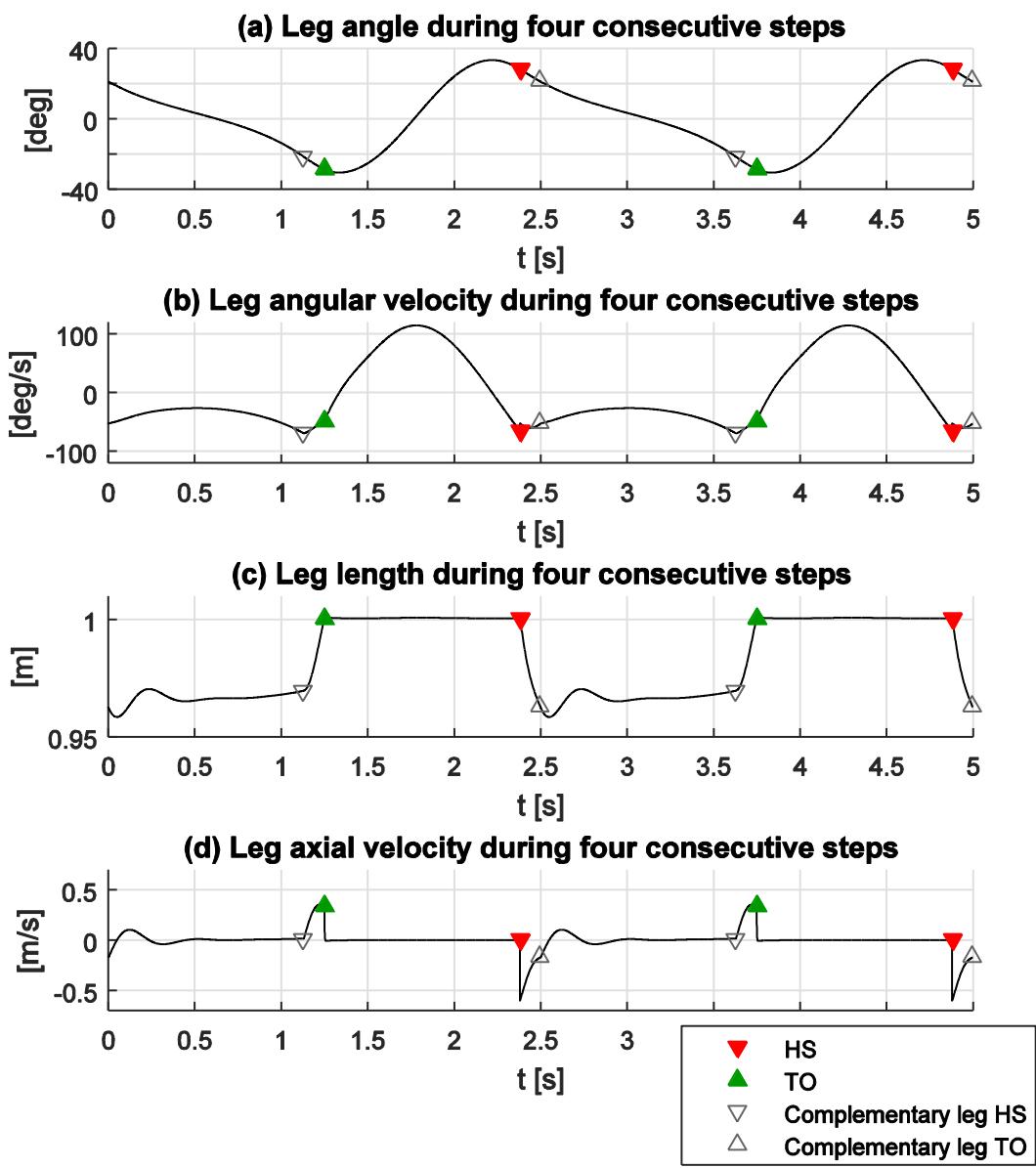
Λόγω του τρόπου ορισμού της συνάρτησης βηματισμού, δεν υπάρχει διάκριση σε δεξί και αριστερό σκέλος στις μεταβλητές κατάστασης του δίποδου μοντέλου. Αντί αυτού, το μοντέλο αντιλαμβάνεται τα σκέλη «1» και «2» στα οποία αντιστοιχούν οι γωνίες θ και ψ αντίστοιχα. Στην πραγματικότητα, το κάθε ένα από τα δύο σκέλη του δίποδου θα εκτελεί διαδοχικά για ένα βήμα την τροχιά του σκέλους «1» και της γωνίας θ , ενώ για το επόμενο την τροχιά του σκέλους «2» και της γωνίας ψ . Τα παραπάνω παρουσιάζονται στο Σχήμα 5-2, όπου έχει σημειωθεί η τροχιά ενός εκ των δύο σκελών για 4 συνεχόμενα βήματα, δεδομένης αυτής της εναλλαγής. Στο ίδιο γράφημα έχουν

σημειωθεί τα γεγονότα HS και TO τόσο για το ίδιο το σκέλος που μελετάται, όσο και για το συμπληρωματικό του.



Σχήμα 5-1: Μεταβλητές κατάστασης κατά το σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας.

Το γράφημα (a) στο Σχήμα 5-2 παρουσιάζει τις γωνίες που διαγράφουν τα σκέλη κατά το βηματισμό. Θετική φορά ορισμού της συνδυασμένης γωνίας έχει ληφθεί η φορά της γωνίας ψ , δηλαδή η ανθωρολογιακή. Αυτή φαίνεται ότι αυξάνεται ανάμεσα στα γεγονότα TO και HS, καθώς το ελεύθερο σκέλος προωθείται προς τα εμπρός. Στο ίδιο διάστημα η κίνηση μετατρέπεται από επιταχυνόμενη σε επιβραδυνόμενη, κάτι το οποίο είναι εμφανές από το προφίλ της γωνιακής ταχύτητας, η οποία έχει σημειωθεί στο ακριβώς επόμενο γράφημα. Η φορά περιστροφής του σκέλους αλλάζει κατά τη φάση στήριξης, οπότε ανάμεσα στα γεγονότα HS και TO η γωνία φθίνει καθώς η ταχύτητά της είναι αρνητική.



Σχήμα 5-2: Περιοδική μεταβολή κατάστασης ενός εκ των δύο σκελών κατά τη διάρκεια 4 βημάτων.

Το διάγραμμα των γωνιών (a) είναι ομαλή συνάρτηση του χρόνου, όμως το γράφημα των ταχυτήτων (b) παρουσιάζει ορισμένες ασυνέχειες κατά το HS. Αυτό οφείλεται στον κρουστικό παλμό που δημιουργεί η κρούση του σκέλους με το έδαφος.

Όσον αφορά την αξονική παραμόρφωση των ελαστικών σκελών, είναι εμφανές στο διάγραμμα (c) ότι στη φάση ππήσης, αυτά παραμένουν σχεδόν απαραμόρφωτα καθώς η μάζα στα πέλματα είναι αρκετά μικρή και δεν αρκεί για την παραμόρφωση των ελατηρίων. Κατά τη φάση στήριξης όμως οι παραμορφώσεις φτάνουν το 4% του φυσικού μήκους, ως απόκριση στην κρούση με το έδαφος και την σταθερή βαρυτική δύναμη που ασκεί στο σκέλος στήριξης η μάζα M . Τις στιγμές της κρούσης είναι και εδώ παρούσες οι ασυνέχειες στην ταχύτητα παραμόρφωσης (d).

Στα διαγράμματα του Σχήματος 5-2 είναι επίσης εμφανής η επίπτωση της κίνησης του δεύτερου από τα δύο σκέλη στη συμπεριφορά του σκέλους που μελετάται. Στο διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας (b), φαίνεται η γωνιακή επιτάχυνση που προκαλείται στο υπό μελέτη σκέλος κατά την κρούση του δεύτερου σκέλους με το έδαφος. Το HS φαίνεται να επιταχύνει την προώθηση του δίποδου προς τα εμπρός με αυτόν τον τρόπο. Στο (c), του μήκους σκέλους, παρατηρείται η επιμήκυνση του μέχρι πρότινος σκέλους στήριξης κατά τη φάση διπλής στήριξης, όπου σταδιακά αυτό αποφορτίζεται καθώς το βάρος μεταφέρεται στο συμπληρωματικό σκέλος που μόλις εκτέλεσε HS.

5.3.2 Κίνηση ισχίου

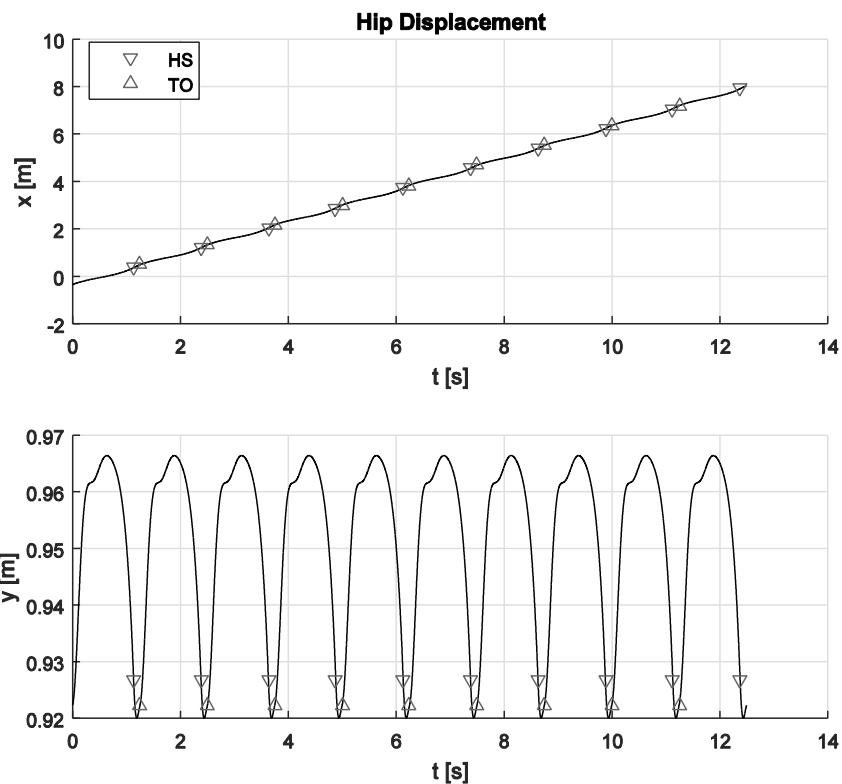
Μία πολύ σημαντική επιδίωξη για τα δίποδα ζώα είναι η ομαλή κίνηση του κορμού τους κατά τη διάρκεια της μετακίνησής τους. Το περπάτημα ικανοποιεί αυτή τη προδιαγραφή, προφυλάσσοντας έτσι τα ζωτικά όργανα που βρίσκονται στον κορμό από απότομες αλλαγές στην κινητική τους κατάσταση.

Σε δίποδα ρομπότ είναι απαραίτητο να τεθεί η ίδια προδιαγραφή, με σκοπό την προφύλαξη τυχόν φορτίου ή των ηλεκτρονικών που στεγάζονται στη θέση του κεντρικού συνδέσμου στο ισχίο. Στο μοντέλο που μελετάται η θέση αυτή αντιστοιχεί στη θέση της κύριας μάζας M . Επομένως σε αυτή την ενότητα θα μελετηθεί η κίνηση της θέσης αυτής.

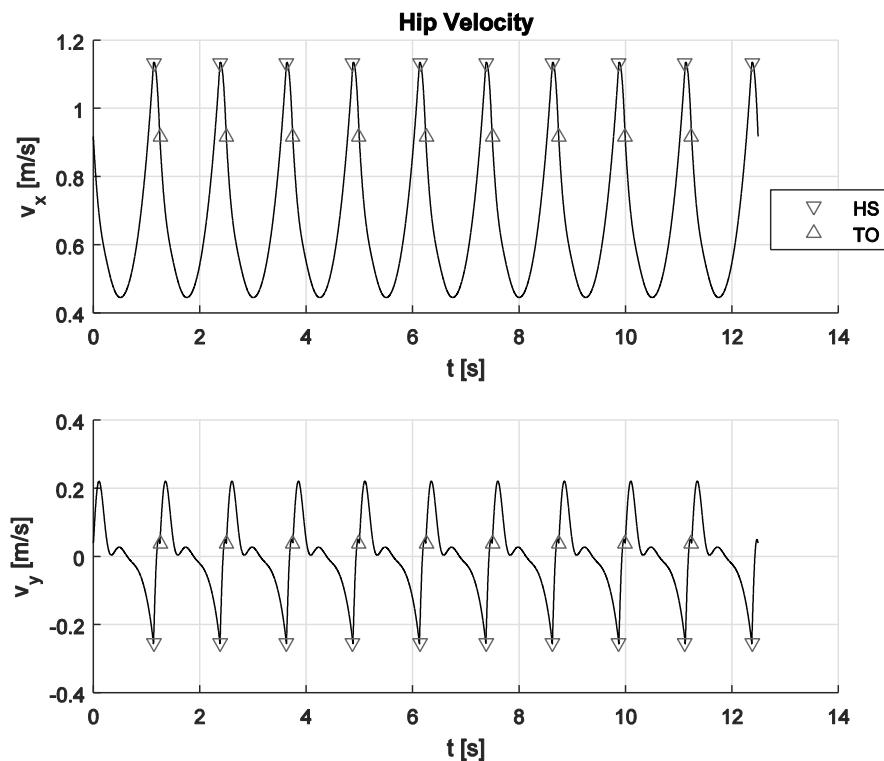
Η μελέτη της κίνησης περιλαμβάνει την μελέτη της θέσης της μάζας M , τόσο σε άξονα παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο, στο εξής «οριζόντιος» άξονας x_M , όσο και στον κάθετο σε αυτόν, «κατακόρυφο» άξονα y_M . Στο πλαίσιο του βηματισμού, η οριζόντια θέση της μάζας M θα πρέπει να είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου, ενώ η κατακόρυφη θέση αναμένεται να παρουσιάζει ταλαντωτική συμπεριφορά γύρω από μία μέση τιμή. Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι επιθυμητή η κατά το δυνατόν ομαλότερη κατακόρυφη μετατόπιση, ώστε να αποφεύγεται η άσκηση μεγάλων αδρανειακών δυνάμεων στη θέση αυτή.

Οι θέσεις της μέσης στους δύο αυτούς άξονες, x_M και y_M , κατά το σταθερό περπάτημα στο σταθερό σημείο σημειώνονται στο Σχήμα 5-3, όπου έχουν σημειωθεί και τα γεγονότα HS και TO. Πράγματι η οριζόντια θέση του ισχίου αυξάνεται με το χρόνο. Η μετατόπιση που επιτυγχάνεται με κάθε βηματισμό, δηλαδή το μήκος βήματος, S_I , είναι περίπου 0.8 m, μέγεθος εντός του εύρους μήκους βήματος που παρατηρείται σε ανθρώπους. Η κατακόρυφη μετατόπιση παρουσιάζει ταλαντώσεις εύρους περίπου 5 cm. Και το μέγεθος αυτό είναι σε αντιστοιχία με το εύρος των ταλαντώσεων που έχουν μετρηθεί σε ανθρώπους κατά το περπάτημα.

Εκτός από τη μελέτη των θέσεων, είναι σημαντικό να καταγραφούν και οι ταχύτητες που αναπτύσσει ο μηχανισμός στη θέση του ισχίου, v_x και v_y , για τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα αντίστοιχα. Αυτές καταγράφονται στο Σχήμα 5-4. Η οριζόντια ταχύτητα του ισχίου παρουσιάζει ταλαντώσεις γύρω από μία μέση τιμή η οποία βρίσκεται περίπου στα 0.7 m/s. Η μέση αυτή θετική τιμή ευθύνεται για την συνολική προώθηση του μοντέλου προς τα εμπρός. Η οριζόντια ταχύτητα v_x παραμένει θετική καθ' όλη τη διάρκεια του βήματος, το οποίο συνεισφέρει στην αποδοτικότητα του βηματισμού: δεν καταναλώνεται ενέργεια για αλλαγές πορείας.



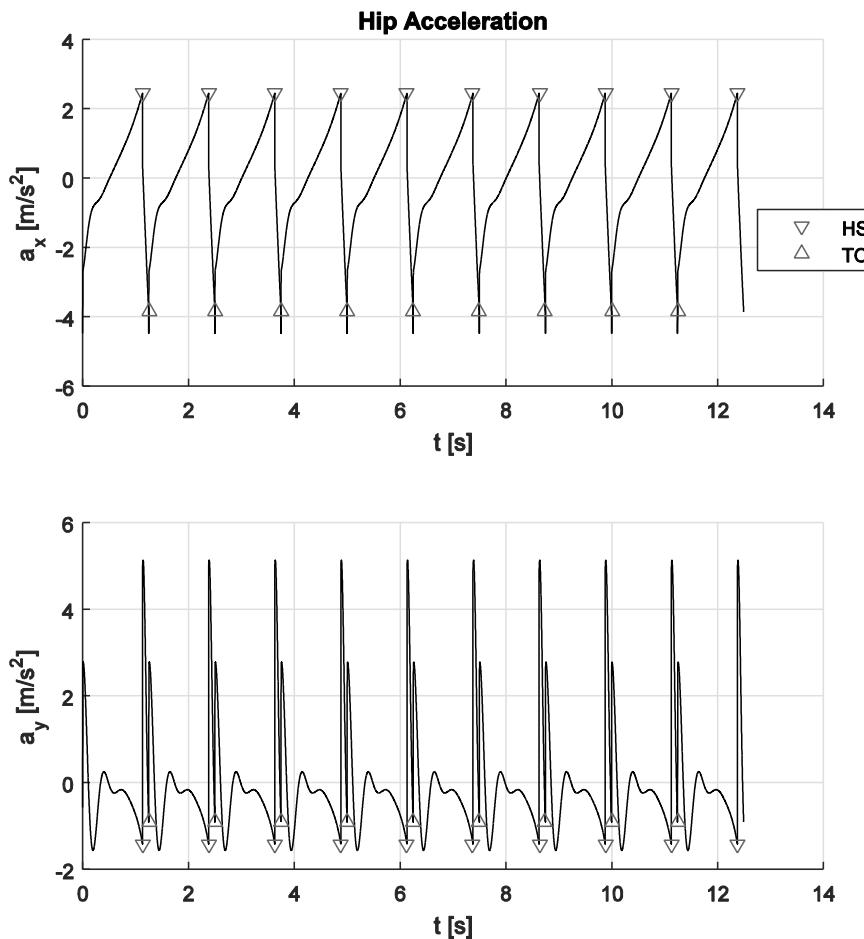
Σχήμα 5-3: Μετατοπίσεις ισχίου στους δύο άξονες κατά το σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο.



Σχήμα 5-4: Ταχύτητες ισχίου στους δύο άξονες κατά το σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο.

Για την κατακόρυφη ταχύτητα v_y , παρατηρείται ότι αυτή ταλαντώνεται γύρω από το μηδέν. Το πρόσημό της αλλάζει μετά από κάθε HS με κρουστική ασυνέχεια και διατηρείται σε μηδενικές σχεδόν τιμές μέχρι το TO. Αυτό συμβαίνει λόγω της κινηματικής σύμπλεξης που προκαλεί στο μηχανισμό η ταυτόχρονη επαφή και των δύο σκελών με το έδαφος κατά τη φάση διπλής στήριξης: δύο ελατήρια σε παράλληλη σύνδεση είναι λιγότερο ενδοτικά από ένα. Από το TO μέχρι το HS η ταχύτητα παρουσιάζει γενικά μειούμενη συμπεριφορά καθώς το σκέλος στήριξης συμπιέζεται υπό το βάρος της μάζας M .

Τέλος, σημαντικό ρόλο έχουν και οι επιταχύνσεις a_x και a_y , οι οποίες συνδέονται άμεσα με τις αδρανειακές δυνάμεις που υφίσταται η θέση αυτή, και παρουσιάζονται στο Σχήμα 5-5.



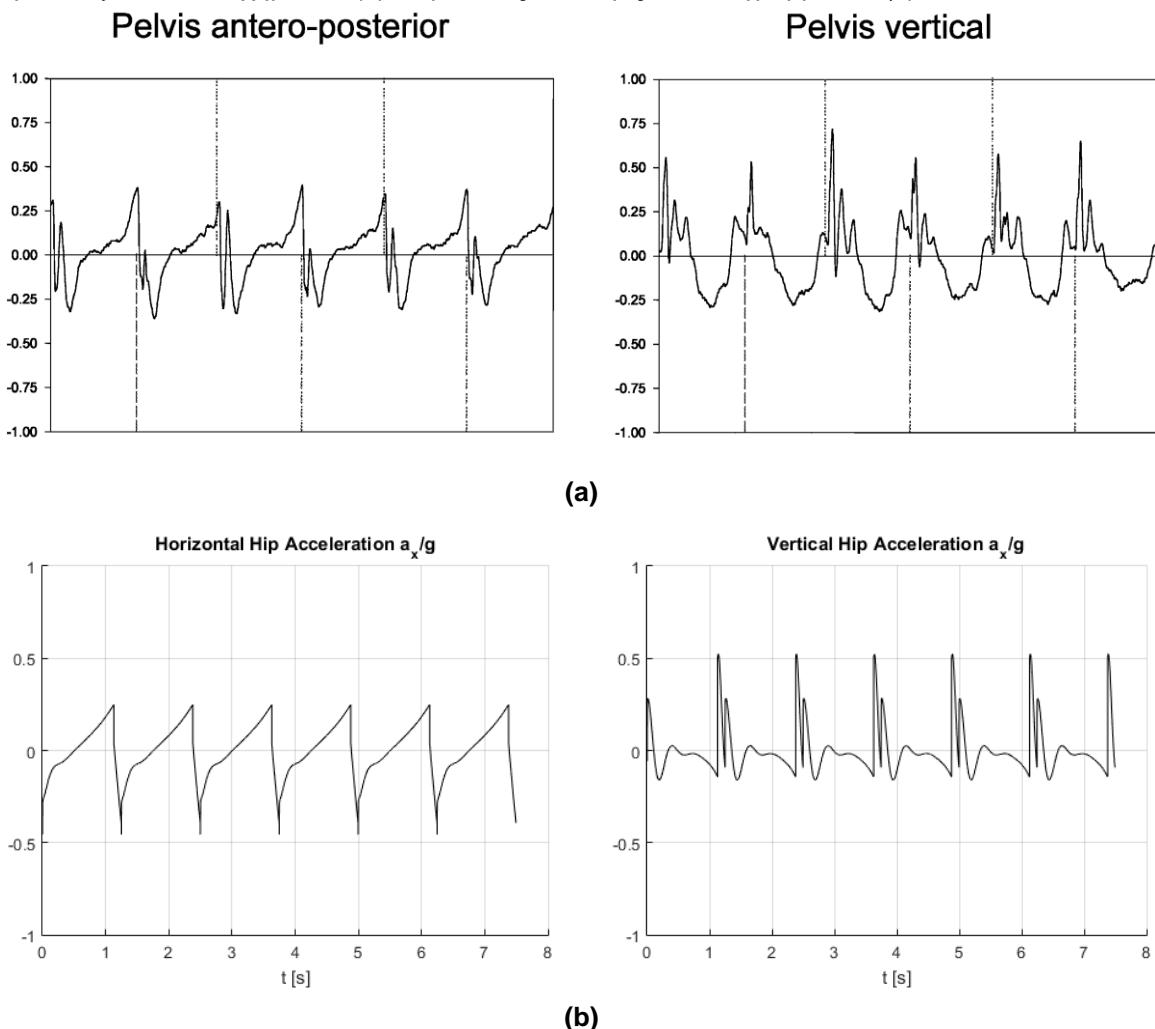
Σχήμα 5-5: Επιταχύνσεις στους δύο άξονες κατά το σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο.

Για τις οριζόντιες επιταχύνσεις a_x , παρατηρείται ότι σε κάθε HS το ισχίο δέχεται κρουστικό οριζόντιο φορτίο της τάξης του $0.7g$. Στη συνέχεια όμως επιταχύνεται σταδιακά λόγω της ελαστικής ενέργειας που έχει αποθηκευτεί στα ελαστικά σκέλη κατά την κρούση με το έδαφος. Συνολικά οι επιταχύνσεις στον οριζόντιο άξονα παρουσιάζουν ταλάντωση γύρω από το μηδέν, το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς το δίποδο πορεύεται με σταθερή μέση ταχύτητα στον σταθερό βηματισμό, χωρίς να επιταχύνει ή να επιβραδύνει. Η μέγιστη επιβράδυνση που ασκείται συνολικά στο ισχίο σε αυτόν τον άξονα είναι της τάξης των $0.4g$.

Η κατακόρυφη επιτάχυνση a_y επίσης παρουσιάζει σημαντική διακύμανση στο χρονικό διάστημα μετά από κάθε HS. Συγκεκριμένα, η κρουστική είσοδος προκαλεί και σε αυτόν τον άξονα μεταβολή της επιτάχυνσης κατά $0.7g$, τιμή σχεδόν ίδια με την αντίστοιχη οριζόντια μεταβολή στην επιτάχυνση, λόγω της γωνίας που σχηματίζει το σκέλος με το έδαφος κατά το HS, η οποία σύμφωνα με το διάγραμμα γωνιών στο Σχήμα 5-2 είναι κοντά στις 30° . Οι μέγιστες κατακόρυφες επιταχύνσεις που ασκούνται στο ισχίο αγγίζουν τα $0.5g$.

Σύγκριση επιταχύνσεων με πειραματικά δεδομένα

Στο Σχήμα 5-6 (a) παρουσιάζονται πειραματικές μετρήσεις επιταχύνσεων στη θέση του ισχίου κατά το ανθρώπινο βάδισμα για 6 βήματα, οι οποίες έχουν ληφθεί από τη δημοσίευση των Menz et al [23]. Το διάγραμμα με τίτλο «Pelvis antero-posterior» αντιστοιχεί στις τιμές οριζόντιας επιτάχυνσης a_x στο Σχήμα 5-5, ενώ το δεύτερο διάγραμμα, με τίτλο «Pelvis vertical» αντιστοιχεί στις τιμές της κατακόρυφης επιτάχυνσης a_y . Οι τιμές στον κατακόρυφο άξονα αναφέρονται σε ποσοστό της σταθεράς βαρύτητας g . Για διευκόλυνση της σύγκρισης, οι πειραματικές μετρήσεις επιτάχυνσης παρουσιάζονται στο Σχήμα 5-6 (b) σε μονάδες ανάλογες των διαγραμμάτων (a).



Σχήμα 5-6: (a) Πειραματικές μετρήσεις οριζόντιας και κατακόρυφης επιτάχυνσης ισχίου, κατά το ανθρώπινο περπάτημα, μετρημένες σε g . Πηγή:[23] . (b) Επιταχύνσεις προσομοίωσης.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης με αυτά που έχουν προκύψει από τις πειραματικές μελέτες, φαίνεται να υπάρχει μία αντιστοιχία όχι μόνο στη μορφή αλλά και στις τιμές που λαμβάνουν.

Συγκεκριμένα, η οριζόντια επιτάχυνση μειώνεται σχεδόν ακαριαία μετά το HS τόσο στις πειραματικές μετρήσεις όσο και στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, ενώ στη συνέχεια, μετά το TO, αυξάνεται σχεδόν μονότονα μέχρι το επόμενο HS. Η συνολική διακύμανση στις πειραματικές μετρήσεις οριζόντιας επιτάχυνσης πλησιάζει τα $0.7g$ που έδωσαν οι προσομοιώσεις. Η μέγιστη επιβράδυνση πλησιάζει και στα πειραματικά αποτελέσματα τα

Η κατακόρυφη επιτάχυνση επίσης ομοιότητα ανάμεσα σε πειραματικές μετρήσεις και αποτελέσματα προσομοιώσεων, με τιμές που κυμαίνονται σε εύρος $0.9g$. Η μέγιστη τιμή αυτών των επιταχύνσεων στις πειραματικές μετρήσεις προσεγγίζει τα $0.7g$.

Η ομοιότητα που παρατηρείται στα διαγράμματα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κατά το περπάτημα, ο άνθρωπος τείνει να εκμεταλλευτεί την παθητική δυναμική που του εξασφαλίζουν τα κάτω άκρα του, ελαχιστοποιώντας τις απώλειες και περιορίζοντας την κόπωση κατά το βηματισμό.

5.3.3 Πορτραίτο φάσεων και ευστάθεια βηματισμού

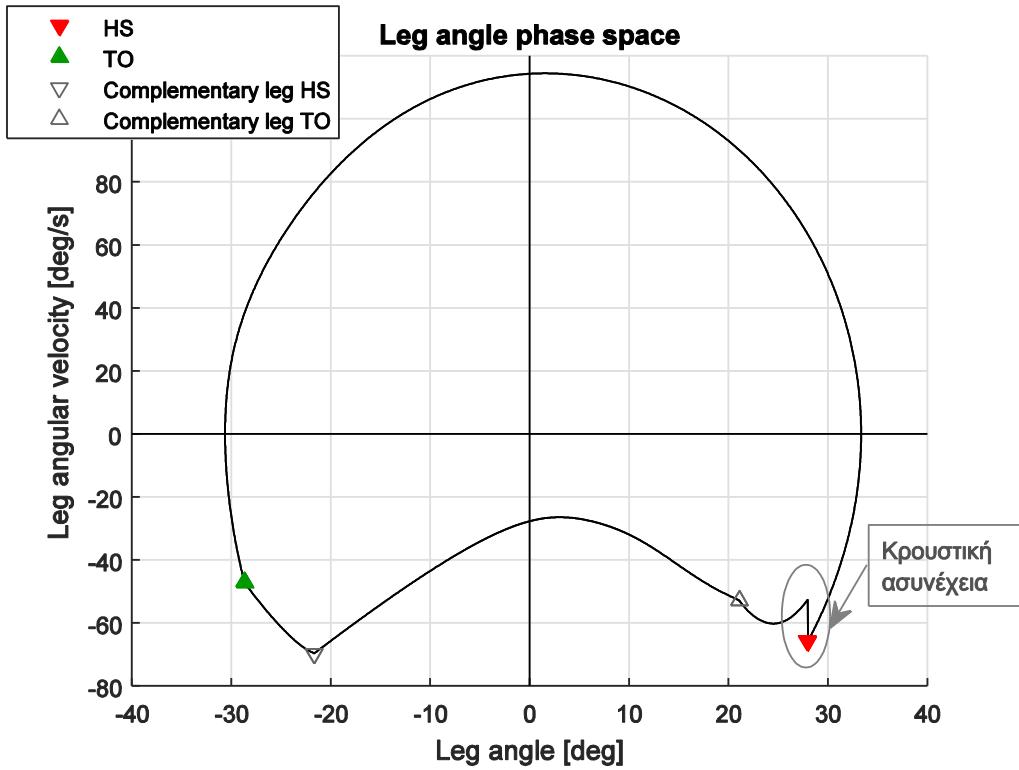
Στο πορτραίτο φάσεων αποτυπώνονται οι γενικευμένες μεταβλητές και οι ταχύτητές τους, όπως αυτές μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια ενός φαινομένου. Σε περιοδικά επαναλαμβανόμενα μοντέλα, το πορτραίτο των φάσεων είναι μια κλειστή καμπύλη, η οποία επαναδιαγράφεται σε κάθε περίοδο. Σε μη πλήρως περιοδικά φαινόμενα, το πορτραίτο των φάσεων λαμβάνει τη μορφή ανοικτής καμπύλης, αφού η κατάσταση του συστήματος δεν είναι επαναλαμβανόμενη.

Στα σταθερά σημεία της συνάρτησης βηματισμού, όπου η κατάσταση είναι επαναλαμβανόμενη και ο βηματισμός περιοδικός, το πορτραίτο φάσεων είναι κλειστής μορφής, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-7 για την γωνία ενός εκ των δύο σκελών και την ταχύτητά της.

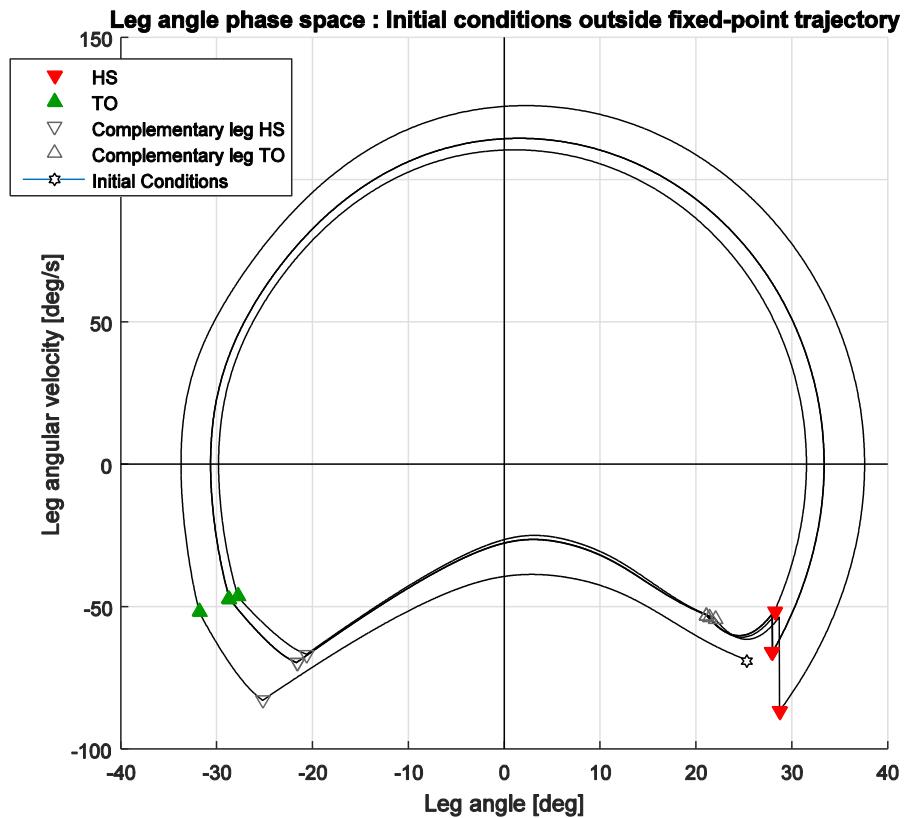
Στο πορτραίτο φάσης του σχήματος αυτού είναι εμφανής η σταθερή τροχιά που ακολουθούν στο χώρο φάσης οι γωνίες των σκελών κατά το σταθερό βηματισμό. Το διάγραμμα διαβάζεται με την ωρολογιακή φορά. Είναι εμφανής η κρουστική ασυνέχεια ταχύτητας που προκαλεί η κρούση του σκέλους με το έδαφος κατά το HS.

Τα πορτραίτα των φάσεων προσφέρουν μια οπτικοποίηση της ευστάθειας του βηματισμού, χωρίς να εισάγονται ακόμη μαθηματικοί ορισμοί. Όταν το σύστημα βρίσκεται αρκετά κοντά σε μία ευσταθή τροχιά, ή ισοδύναμα σε ένα ευσταθές σταθερό σημείο, τότε ακόμα και εάν ξεκινάει από διαφορετική περιοχή του πορτραίτου φάσεων, τελικά συγκλίνει στην κλειστή καμπύλη που χαρακτηρίζει τα επαναλαμβανόμενα φαινόμενα. Αυτή είναι και μια διαισθητική περιγραφή της ευστάθειας του σταθερού σημείου: μικρές αποκλίσεις ή διαταραχές από την επαναλαμβανόμενη τροχιά, τελικά αποσβένονται και το σύστημα επιστρέφει στην σταθερή λειτουργία του.

Τα παραπάνω παρουσιάζονται για το δίποδο στην λειτουργία ονομαστικών παραμέτρων στο Σχήμα 5-8, όπου έχει σημειωθεί η γωνία ενός σκέλους και η ταχύτητά της κατά τον βηματισμό, όταν οι αρχικές συνθήκες παρουσιάζουν μικρή απόκλιση από τις τιμές τους για λειτουργία στο σταθερό σημείο. Παρατηρείται ότι ύστερα από τρία βήματα, η τροχιά έχει συγκλίνει στη τροχιά σταθερού βηματισμού.



Σχήμα 5-7: Πορτραίτο φάσης γωνίας του ενός σκέλους κατά τον σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο.



Σχήμα 5-8: Πορτραίτο φάσης γωνίας του ενός σκέλους κατά τον σταθερό βηματισμό στο ονομαστικό σημείο, με αρχικές συνθήκες εκτός της σταθερής τροχιάς και σύγκλιση εντός 3 βημάτων.

5.4 Μελέτη βηματισμών με μεταβολή των παραμέτρων

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσθηκαν αναλυτικά τα χαρακτηριστικά του βηματισμού για ονομαστικές τιμές των έξι αδιάστατων παραμέτρων που ορίζουν το μοντέλο. Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθεί το πώς αυτά τα χαρακτηριστικά αλλάζουν, όταν μεταβάλλονται οι αδιάστατες παράμετροι του συστήματος εντός των πλαισίων που ορίσθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η μελέτη αυτή είναι αναγκαία για την πλήρη κατανόηση του μοντέλου, καθώς τα αποτελέσματα υποδεικνύουν τη σχέση αιτιότητας ανάμεσα στην επιλογή των παραμέτρων και στα χαρακτηριστικά του βηματισμού που επιτυγχάνεται με αυτές. Κατά συνέπεια, τα συμπεράσματά της θα κατευθύνουν τις σχεδιαστικές επιλογές για την κατασκευή ενός δίποδου ή ενός τμήματος αυτού, όταν είναι γνωστά τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του βηματισμού προς επίτευξη.

5.4.1 Ευστάθεια βηματισμού

Ένα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά των επαναλαμβανόμενων βηματισμών είναι η ευστάθεια που παρουσιάζουν τα σταθερά σημεία \mathbf{x}^* . Ευσταθείς βηματισμοί επαναλαμβάνονται διαρκώς, καθώς μικρές παρεκκλίσεις στις αρχικές συνθήκες κάθε βήματος αποσβέννυνται ύστερα από κάποιο αριθμό βημάτων, και ο δίποδος μηχανισμός επανέρχεται στην επαναλαμβανόμενη λειτουργία σταθερού σημείου. Οι παρεκκλίσεις αυτές στο πλαίσιο των προσομοιώσεων αντιστοιχούν σε αριθμητικά σφάλματα που προκύπτουν κατά την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Αντίθετα, ασταθείς βηματισμοί τείνουν να αποκλίνουν από τα σταθερά σημεία, και συνήθως οδηγούν σε πτώση του δίποδου ύστερα από μερικά βήματα στις προσομοιώσεις.

Την παρούσα εργασία ενδιαφέρει ο προσδιορισμός των ευσταθών βηματισμών του δίποδου. Η εύρεση τέτοιων λύσεων σε δίποδους μηχανισμούς οδηγεί σε ένα σημαντικό συμπέρασμα για το ανθρώπινο περπάτημα: εάν είναι δυνατή η κατ' αυτό τον τρόπο κίνηση αποκλειστικά χάρη στα κατασκευαστικά στοιχεία του δίποδου, και δεν υπάρχει ανάγκη διορθωτικής επενέργησης και περίπλοκων σχημάτων ελέγχου, υποδεικνύεται ότι το περπάτημα είναι ο πλέον αποδοτικός τρόπος μετακίνησης για τον άνθρωπο. Ακόμα, όσον αφορά την μελλοντική κατασκευή ενός δίποδου ρομπότ για την πειραματική μελέτη του περπατήματος, είναι σημαντικό να έχουν προσδιοριστεί τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά που θα προσδώσουν στο ρομπότ ευστάθεια στην παθητική δυναμική του.

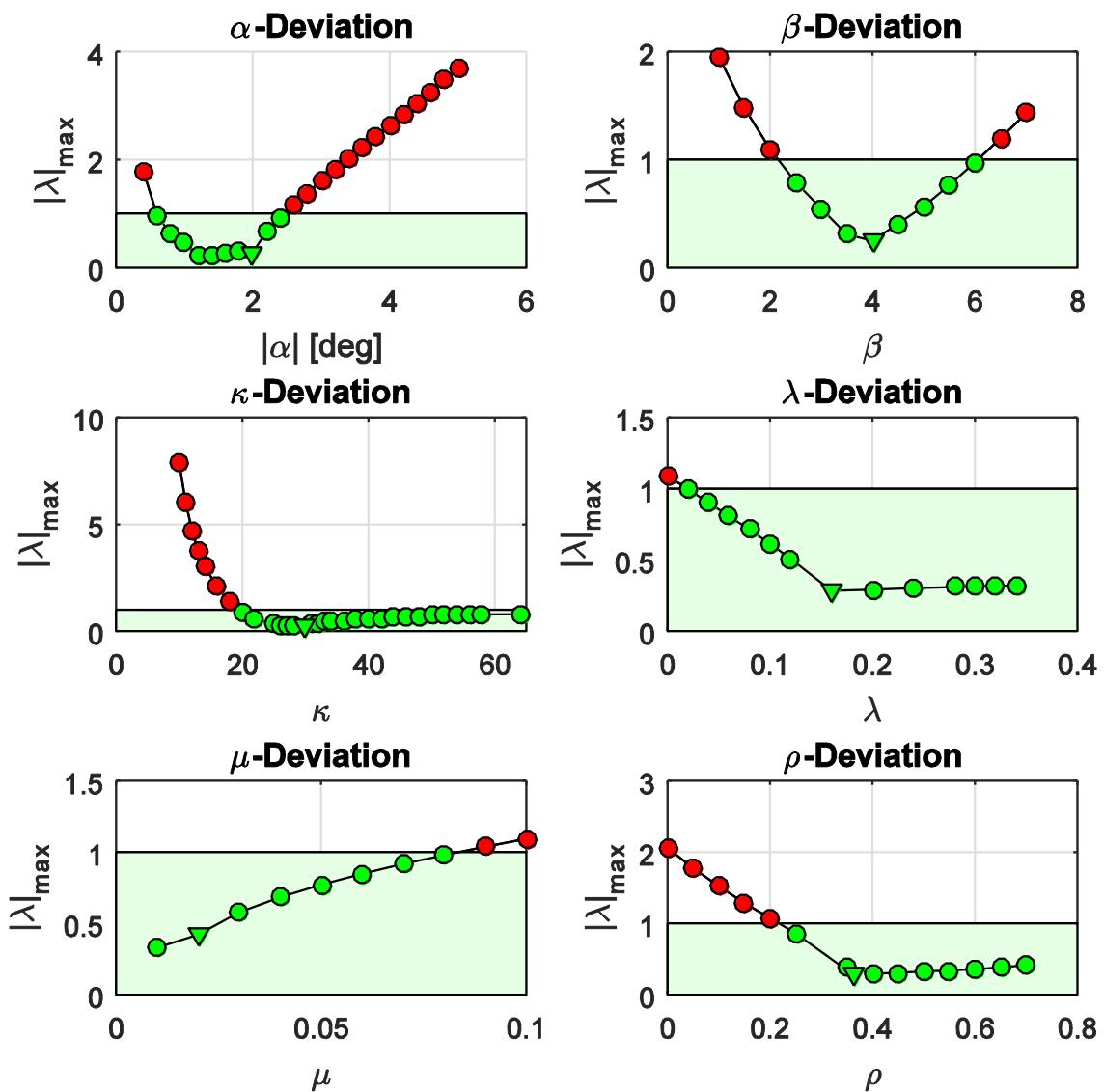
Για τη μελέτη της ευστάθειας ενός σταθερού σημείου, η κατάσταση στην αρχή κάθε βήματος μεταβάλλεται από την ονομαστική τιμή της, \mathbf{x}^* , κατά μικρά $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ της τάξεως του 10^{-6} , ώστε τελικά η απόκλιση από το σταθερό σημείο να περιγράφεται από την γραμμική διακριτή διαφορική εξίσωση:

$$\Delta \mathbf{x}_{n+1}^* = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x}_n^* \triangleq \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}_n^* \quad (5-5)$$

Ο πίνακας \mathbf{A} στην περίπτωση που μελετάται είναι ένας 8×8 πίνακας. Η περιοδική λύση \mathbf{x}^* είναι ευσταθής όταν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} του διακριτού συστήματος βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου του μιγαδικού επιπέδου, ή ισοδύναμα, έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας. Επομένως για κάθε σταθερό σημείο που προκύπτει ως περιοδική λύση του συστήματος για δεδομένο

συνδυασμό παραμέτρων υπολογίζονται οι ιδιοτιμές αυτές και προκύπτουν συμπεράσματα για την ευστάθειά του.

Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου μέγιστης ιδιοτιμής της συνάρτησης βηματισμού, για μεταβολή των αδιάστατων παραμέτρων εντός των πεδίων επιλογής τους, όπως αυτά έχουν ορισθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Κατά την μεταβολή καθεμιάς από τις έξι παραμέτρους, οι υπόλοιπες διατηρήθηκαν στις ονομαστικές τιμές τους. Προσομοιώσεις στις οποίες δεν επιτεύχθηκε ούτε ένα βήμα δεν έχουν περιληφθεί στα αποτελέσματα. Οι ονομαστικές τιμές σημειώνονται στα παρακάτω διαγράμματα με το σύμβολο « ∇ ».



Σχήμα 5-9: Μέτρο μέγιστης ιδιοτιμής συνάρτησης βηματισμού για μεταβολές των αδιάστατων παραμέτρων από την ονομαστική τους τιμή.

Ιδιοτιμές με μέτρο μικρότερο της μονάδας αντιστοιχούν σε ευσταθείς βηματισμούς. Στα διαγράμματα που προηγήθηκαν αυτές οι λύσεις έχουν σημειωθεί με πράσινο χρώμα, ενώ αντίθετα οι ασταθείς λύσεις έχουν σημειωθεί με κόκκινο χρώμα.

Παρατηρείται από τα διαγράμματα ότι η παράμετρος κλίσης εδάφους, α , ορίζει μια περιοχή ευστάθειας για το δίποδο μηχανισμό: πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές της κλίσης εδάφους οδηγούν σε ασταθείς βηματισμούς. Η παρατήρηση αυτή είναι αναμενόμενη, δεδομένου ότι στις προσομοιώσεις από τις οποίες προέκυψε το διάγραμμα, οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου και ειδικά η παράμετρος β που αντιστοιχεί στις αποσβέσεις και άρα στην απώλεια ενέργειας, παραμένουν σταθερές. Για σταθερό ρυθμό απώλειας ενέργειας, η εισαγωγή ενέργειας στο σύστημα περιορίζεται από την απαίτηση ενεργειακής ισορροπίας στο επαναλαμβανόμενο περπάτημα: εάν υπάρχει μεγαλύτερη είσοδος ενέργειας στο σύστημα λόγω της κλίσης, απ' ότι έξοδος λόγω των αποσβέσεων, τότε το δίποδο θα επιταχυνθεί και θα απομακρυνθεί από το σταθερό σημείο. Αντίθετα, μικρότερη είσοδος από έξοδο ενέργειας θα οδηγούσε σε επιβράδυνση και πτώση του δίποδου. Για μικρές μεταβολές της παραμέτρου α το περπάτημα μπορεί να προσαρμοσθεί ώστε να διατηρηθεί η ενεργειακή ισορροπία. Για μεγαλύτερες μεταβολές όμως δεν υπάρχει βηματισμός που θα οδηγεί σε ενεργειακή ευστάθεια. Αυτές οι λύσεις είναι ασταθείς.

Ακριβώς η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται και για τις προσομοιώσεις όπου μεταβάλλεται η αδιάστατη σταθερά απόσβεσης β . Πολύ μεγάλες και πολύ μικρές τιμές της β οδηγούν σε ασταθείς βηματισμούς, με τον ίδιο μηχανισμό που περιγράφει στα παραπάνω για την παράμετρο α . Το παρόμοιο παραβολικό προφίλ που παρατηρείται στα διαγράμματα και των δύο παραμέτρων είναι αποτέλεσμα της ενεργειακής σύζευξης που υπάρχει ανάμεσα στα δύο στοιχεία του μοντέλου στα οποία αντιστοιχούν οι αδιάστατες παράμετροι α και β .

Όσον αφορά την αδιάστατη παράμετρο ελαστικότητας κ , οι προσομοιώσεις δείχνουν ότι ο βηματισμός δεν είναι ευσταθής για πολύ ενδοτικά ελατήρια, ενώ η ευστάθεια βελτιώνεται σημαντικά όσο η κ αυξάνεται. Η αδυναμία διατήρησης του βηματισμού για μικρές κ οφείλεται στην ανάγκη υποστήριξης από τα σκέλη της κυρίως μάζας M στο ισχίο του μοντέλου. Παρατηρείται ότι ενώ για απαραμόρφωτα σχεδόν σκέλη ο βηματισμός διατηρείται ευσταθής, το διάγραμμα της μέγιστης ιδιοτιμής παρουσιάζει ελάχιστο σε ενδιάμεση τιμή της παραμέτρου κ . Αυτό υποδεικνύει την ανάγκη ύπαρξης ελαστικότητας στα σκέλη του μοντέλου, όταν σκοπός είναι η επίτευξη ενεργειακά συμφέροντων βηματισμών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση ότι για πολύ μεγάλες τιμές της κ η μέγιστη ιδιοτιμή του βηματισμού δεν μειώνεται ούτε ξεπερνάει τη μονάδα, αλλά τείνει προς μία σταθερή τιμή μικρότερη της μονάδας.

Οι αδιάστατες παράμετροι λ και μ επίσης επηρεάζουν την ευστάθεια των βηματισμών, μέσω της διαμόρφωσης της ροπής αδράνειας των σκελών του μοντέλου. Παρατηρείται ότι υπάρχει σημαντικό πλεονέκτημα για μη μηδενικές τιμές της λ , οι οποίες αντιστοιχούν στην τοποθέτηση των δευτερεουσών μαζών στα κάτω άκρα των σκελών. Συγκεκριμένα, στο συγκεκριμένο ονομαστικό σημείο λειτουργίας, μηδενικό λ θα παρήγαγε ασταθή βηματισμό. Φυσικά σε πραγματικές κατασκευές η παράμετρος λ δεν θα είχε ποτέ μηδενική τιμή αφού δεν είναι δυνατόν το κέντρο μάζας του σκέλους να βρίσκεται στο πέλμα του. Επίσης σχετικά με την κατανομή μάζας, τα διαγράμματα δείχνουν ότι μεγάλες τιμές της παραμέτρου μ , δηλαδή σχετικά βαριά σκέλη, οδηγούν σε ασταθή βηματισμό. Επομένως συνολικά οι μάζες στα σκέλη θα πρέπει να είναι μικρού βάρους και να τοποθετούνται

σχετικά κοντά στο σύνδεσμο του ισχίου, ή ισοδύναμα, τα σκέλη να έχουν μικρή ροπή αδράνειας ως προς το σύνδεσμο αυτό.

Τέλος, οι προσομοιώσεις δείχνουν τη σημασία της χρήσης καμπύλων πελμάτων στην ευκολία βηματισμού. Ο συντελεστής κύλισης ρ , ο οποίος ορίζει την ακτίνα των πελμάτων, οδηγεί σε ευστάθεια του βηματισμού καθώς αυξάνεται από το μηδέν. Το μοντέλο με μηδενικό ρ αντιστοιχεί σε σκέλη με σημειακό άκρο-πέλμα, και είναι ασταθές όταν οι υπόλοιπες παράμετροι είναι στο ονομαστικό τους σημείο. Μεγαλύτερες τιμές του ρ εξομαλύνουν τον βηματισμό και διευκολύνουν την προώθηση του κέντρου μάζας προς τα εμπρός, επαυξάνοντας στην πράξη το ενεργό μήκος των σκελών. Συνολικά είναι εμφανές ότι η χρήση καμπύλων πελμάτων προσφέρει σημαντικό πλεονέκτημα όσον αφορά την επίτευξη ευσταθών βηματισμών από το μοντέλο.

Επιλογή ονομαστικών τιμών παραμέτρων με κριτήριο την ευστάθεια

Όπως είναι εμφανές από τα παραπάνω, αλλαγές σε έστω μία από τις αδιάστατες παραμέτρους του μοντέλου είναι δυνατόν να μεταβάλλουν κατά πολύ τα χαρακτηριστικά του βηματισμού και να οδηγήσουν σε αστάθειες, ακόμα και όταν οι υπόλοιπες παράμετροι διατηρούνται σταθερές. Όταν επιλεγεί να αντικατασταθεί μία από τις παραμέτρους αυτές και το ονομαστικό σημείο αλλάζει, τότε ταυτόχρονα θα πρέπει να ανανεωθούν όλα τα παραπάνω διαγράμματα, καθώς οι υπολογισμοί θα πρέπει να γίνουν για το νέο ονομαστικό σημείο. Η δυσκολία προσδιορισμού της μορφής των διαγραμμάτων αυξάνεται όταν είναι επιθυμητό να αλλάξουν παραπάνω από μία παράμετροι.

Επομένως ο προσδιορισμός του συνδυασμού των αδιάστατων παραμέτρων ο οποίος θα είναι βέλτιστος με κριτήριο την ευστάθεια του βηματισμού, είναι μια διαδικασία που αναγκαστικά προκύπτει μέσω επαναλήψεων και κυκλικών μεταβολών των παραμέτρων. Με αυτόν ακριβώς τον τρόπο προσδιορίσθηκε το ονομαστικό σημείο που σημειώνεται στα διαγράμματα στο Σχήμα 5-9. Όπως φαίνεται στα διαγράμματα αυτά, το ονομαστικό σημείο που έχει επιλεγεί βρίσκεται σε θέση τοπικού ελαχίστου σε όλα σχεδόν τα διαγράμματα, άρα όλες οι αδιάστατες παράμετροι βρίσκονται στη βέλτιστη τιμή τους.

Η βέλτιστοποίηση έγινε προσαρμόζοντας τη μεθοδολογία *steepest descend* κυκλικά, με αντικειμενική συνάρτηση το μέτρο της μέγιστης ιδιοτιμής της συνάρτησης βηματισμού **P**. Αρχικά υπολογίστηκε η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης για μεταβολή της τιμής της *i*-παραμέτρου, στη συνέχεια μεταβλήθηκε η παράμετρος αυτή κατά την αντίθετη φορά της παραγώγου και κατά μέτρο 10% της τιμής της παραγώγου. Ακολούθησε ανανέωση του διαγράμματος μέγιστης ιδιοτιμής για την επόμενη στη κυκλική αλληλουχία παράμετρο *i+1*. Η διαδικασία αυτή συνεχίστηκε μέχρι την μεταβολή και της τελευταίας από τις 6 παραμέτρους. Η παραπάνω κυκλική αλληλουχία εκτελέσθηκε επαναληπτικά μέχρι την σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης σε μία ικανοποιητική λύση, η οποία αποτέλεσε το ονομαστικό σημείο λειτουργίας.

5.4.2 Μέση ταχύτητα βηματισμού

Κατά τη μελέτη της παθητικής κίνησης, παρουσιάζει ενδιαφέρον η καταγραφή της μέσης οριζόντιας ταχύτητας με την οποία κινείται η κυρίως μάζα του δίποδου, δηλαδή η μέση ταχύτητα κατάβασης στο κεκλιμένο επίπεδο. Η οριζόντια ταχύτητα προκύπτει ως αποτέλεσμα της παθητικής δυναμικής του δίποδου, και είναι χρήσιμο να μελετηθεί η επίδραση που έχει κάθε παράμετρος του μοντέλου στην

ταχύτητα αυτή, καθώς και να προσδιορισθεί το εύρος των επιτεύξιμων ταχυτήτων. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν να επιλεγούν συνδυασμοί αδιάστατων παραμέτρων για την επίτευξη δεδομένης ταχύτητας βηματισμού.

Κατά τη διάρκεια ενός βήματος, η ταχύτητα στο οριζόντιο επίπεδο δεν έχει σταθερή τιμή, αλλά κυμαίνεται όπως έχει παρουσιασθεί στην προηγούμενη ενότητα. Όταν συγκρίνονται διαφορετικοί βηματισμοί μεταξύ τους, έχει νόημα η μελέτη της μεταβολής της μέσης τιμής αυτών των διακυμάνσεων ως συνάρτηση των τιμών των αδιάστατων παραμέτρων. Η μέση τιμή \bar{v}_x της οριζόντιας ταχύτητας $v_x(t)$, για κάθε βηματισμό υπολογίσθηκε από την προσομοίωση μέσω της σχέσης:

$$\bar{v}_x = \frac{\int_{t=0}^{t=t_{\max}} v_x(t) dt}{t_{\max}} \quad (5-6)$$

Στη (5-6) με t_{\max} έχει σημειωθεί ο χρόνος στο τέλος της προσομοίωσης, δηλαδή κατά το τελευταίο στιγμιότυπο του βηματισμού.

Στο Σχήμα 5-10 έχει καταγραφεί η μεταβολή της μέσης αυτής οριζόντιας ταχύτητας για μεταβολή μίας κάθε φορά από τις αδιάστατες παραμέτρους του μοντέλου. Οι υπόλοιπες παράμετροι βρίσκονται στην ονομαστική τους τιμή. Η ονομαστική τιμή κάθε παραμέτρου σημειώνεται στο διάγραμμα με το σύμβολο « ∇ ». Σημεία με πράσινο χρώμα αντιστοιχούν σε ευσταθείς βηματισμούς σύμφωνα με τον ορισμό της προηγούμενης υποενότητας. Αντίθετα, σημεία με κόκκινο χρώμα αντιστοιχούν σε ασταθείς βηματισμούς.

Παρατηρείται ότι η ταχύτητα αυξάνεται με αύξηση των παραμέτρων κλίσης εδάφους α , αδιάστατης σταθεράς ελατηρίου κ και του συντελεστή κύλισης ρ . Αύξηση της παραμέτρου κλίσης εδάφους πάνω από κάποιο όριο οδηγεί σε αστάθεια στον ταχύτερο βηματισμό, για τους ενεργειακούς λόγους που έχουν αναλυθεί στην προηγούμενη υποενότητα. Αντίθετα, ο βηματισμός μπορεί να επιταχυνθεί με ευσταθή τρόπο, όταν αυξάνονται οι κ και ρ . Αύξηση της κ επιταχύνει το σύστημα μέσω της αυξημένης ιδιοσυχνότητας των ελατηρίων, κάτι το οποίο θα συζητηθεί εκτενέστερα σε επόμενη υποενότητα. Αύξηση του ρ αυξάνει την γραμμική ταχύτητα του ισχίου για σταθερή γωνιακή ταχύτητα, άρα και την προβολή αυτής στον οριζόντιο άξονα.

Αντίθετα, αύξηση της αδιάστατης παραμέτρου απόσβεσης β επιβραδύνει το σύστημα ως προς την κίνησή του στον οριζόντιο άξονα. Δεδομένου ότι η κλίση του εδάφους, α , παραμένει σταθερή, το σύστημα πρέπει συνολικά να μειώσει τις ταχύτητες των μελών του ώστε οι απώλειες να διατηρηθούν στα ίδια επίπεδα παρά την αύξηση του β .

Τέλος, οι παράμετροι λ και μ έχουν μικρή συνεισφορά στην οριζόντια ταχύτητα των βηματισμών. Από αυτές μπορεί να ληφθεί το συμπέρασμα ότι μικρότερη ροπή αδράνειας των σκελών τείνει να επιταχύνει ελαφρώς το βηματισμό, αφού οι ροπές που ασκούνται στα σκέλη λόγω του βαρυτικού πεδίου βρίσκουν μικρότερη αντίσταση στο να τα επιταχύνουν στροφικά.

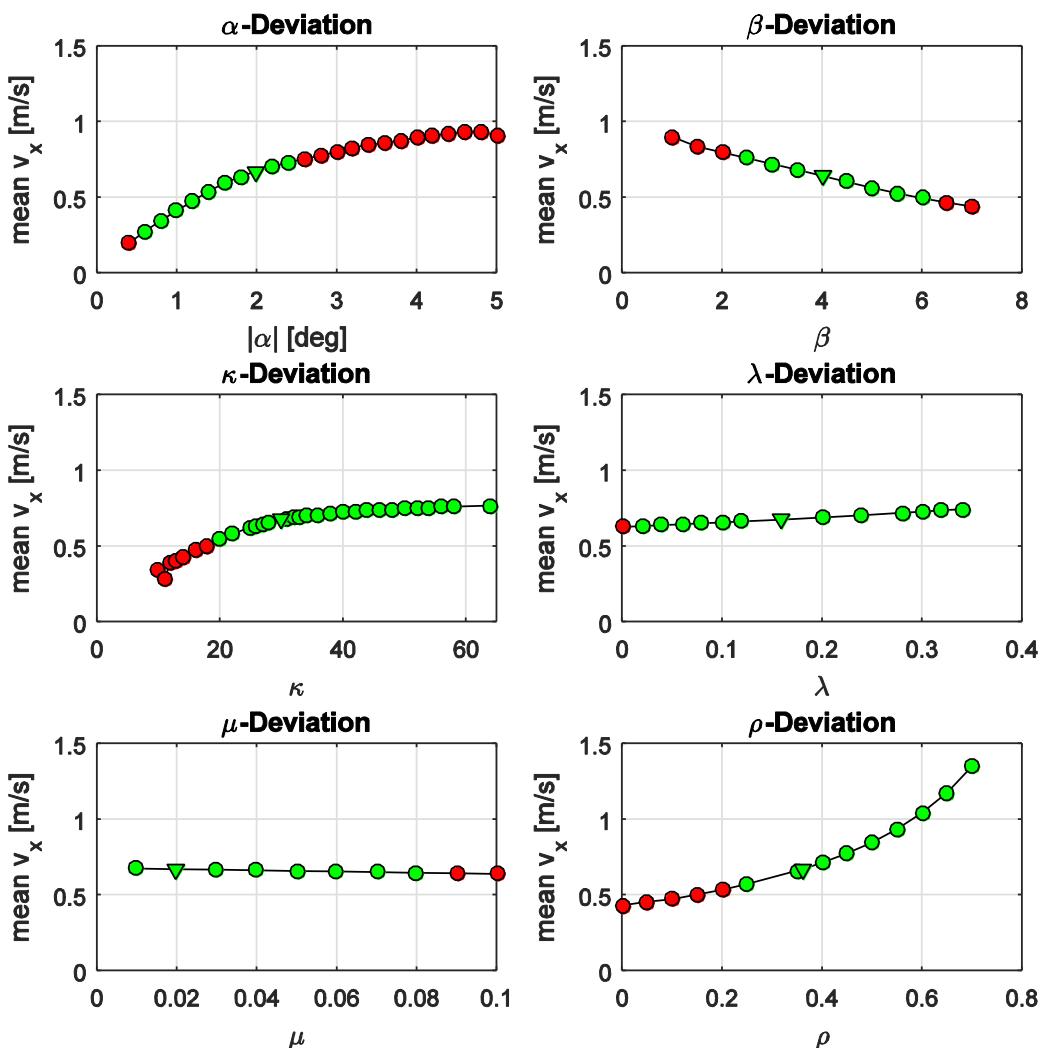
5.4.3 RMS επιταχύνσεις κέντρου μάζας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι επιταχύνσεις της κύριας μάζας M στη θέση του ισχίου είναι ενδεικτικές των δυνάμεων που ασκούνται στη θέση αυτή. Επομένως, είναι χρήσιμο να καταγραφεί η σχέση ανάμεσα στις αδιάστατες παραμέτρους του μοντέλου και στις επιταχύνσεις που ασκούνται στο ισχίο,

ώστε να μπορούν να ληφθούν οι κατάλληλες σχεδιαστικές αποφάσεις και να εξασφαλισθεί η αντοχή των μελών του μηχανισμού.

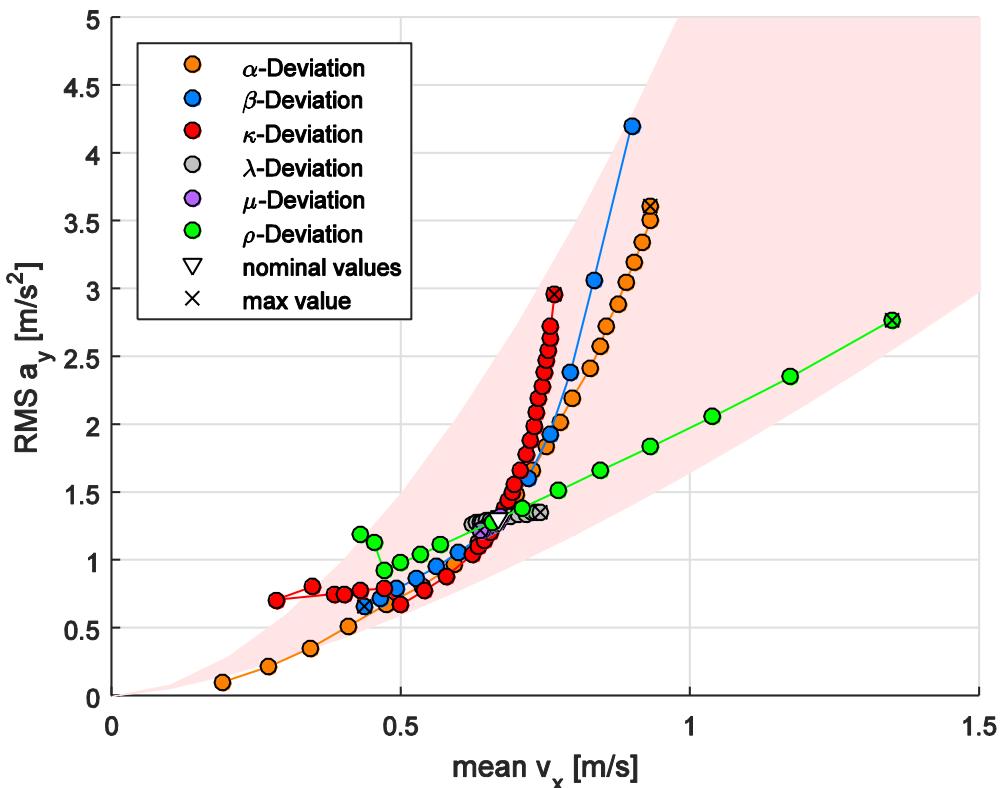
Οι τιμές των επιταχύνσεων είναι επίσης ενδεικτικές της καταλληλότητας του μοντέλου για τη μελέτη του ανθρώπινου περπατήματος. Από την παραμετρική αυτή ανάλυση μπορούν να προκύψουν συμπεράσματα για τον βέλτιστο συνδυασμό των αδιάστατων παραμέτρων, ώστε το μοντέλο να αντιστοιχεί στο ανθρώπινο περπάτημα με κριτήριο την αντιστοιχία των τιμών των επιταχύνσεων.

Ένα τρίτο κίνητρο για την διερεύνηση αυτή δίνεται από το χώρο των προσθετικών μελών: κατά το σχεδιασμό προσθετικών μελών είναι σημαντικό οι δυνάμεις που ασκούνται στη θέση της σύνδεσης του προσθετικού σκέλους με το σώμα του παραλήπτη, να είναι συμβατές με αυτές που θα παραλάμβανε κατά το βηματισμό με το φυσικό του σκέλος. Επομένως τα παρακάτω διαγράμματα μπορούν να παράγουν συμπεράσματα για το σχεδιασμό όχι μόνο δίποδων ρομπότ για την μελέτη του περπατήματος, αλλά και προσθετικών μελών που θα παρέχουν άνεση κατά τη μετακίνηση.



Σχήμα 5-10: Μέση ταχύτητα βηματισμού για μεταβολές των αδιάστατων παραμέτρων από την ονομαστική τους τιμή.

Στο Σχήμα 5-11 παρουσιάζεται η συσχέτιση μέσης οριζόντιας ταχύτητας, \bar{v}_x , και της μέσης (RMS) κατακόρυφης επιτάχυνσης, $a_{y,RMS}$, για μεταβολή κάθε φορά μίας από τις αδιάστατες παραμέτρους του μοντέλου. Ο χρωματικός κώδικας υποδεικνύει την παράμετρο της οποίας η μεταβολή οδηγεί σε κάθε βηματισμό που σημειώνεται στο διάγραμμα. Ο βηματισμός που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της εκάστοτε παραμέτρου έχει σημειωθεί με το σύμβολο « x ». Το ονομαστικό σημείο, όπου όλες οι παράμετροι έχουν την ονομαστική τους τιμή, έχει σημειωθεί με το σύμβολο « ∇ ».



Σχήμα 5-11: RMS κατακόρυφες επιταχύνσεις στη θέση του ισχίου ως συνάρτηση της μέσης ταχύτητας βηματισμού για μεταβολή των παραμέτρων.

Από το Σχήμα 5-11 είναι εμφανής μια σχέση αύξουσας παραβολικής μορφής ανάμεσα σε ταχύτητα και επιτάχυνση, η οποία υποδεικνύει γενικά μεγαλύτερες καταπονήσεις για ταχύτερους βηματισμούς. Η παρατήρηση αυτή είναι αναμενόμενη καθώς μεγαλύτερες ταχύτητες μεταφράζονται σε μεγαλύτερη ορμή, η μεταβολή της οποίας κατά την κρούση με το έδαφος αντιστοιχεί σε μεγαλύτερες κατά μέτρο επιταχύνσεις της κυρίως μάζας M .

Εστιάζοντας στην επίπτωση που έχει η μεταβολή της παραμέτρου κλίσης εδάφους, α , στο προφίλ των επιταχύνσεων, παρατηρείται ότι μεγαλύτερες κλίσεις εδάφους οδηγούν σε μεγαλύτερες καταπονήσεις του ισχίου. Μάλιστα, η σχέση ανάμεσα σε ταχύτητα και επιτάχυνση είναι εκθετικής μορφής για τους βηματισμούς που προκύπτουν από μεταβαλλόμενη κλίση εδάφους.

Παρατηρείται από το διάγραμμα ότι βηματισμοί που προκύπτουν για μεγάλο συντελεστή κύλισης ρ πετυχαίνουν εξίσου μεγάλες ταχύτητες με αυτές που προκύπτουν για μεγάλες κλίσεις α , διατηρώντας όμως τις επιταχύνσεις σε σημαντικά μικρότερα επίπεδα. Επομένως, αύξηση του συντελεστή ρ είναι προτιμότερη έναντι αύξησης της κλίσης, εάν είναι επιθυμητή η κίνηση με μεγάλες

ταχύτητες. Φυσικά ο συντελεστής ρ είναι κατασκευαστική παράμετρος και δεν είναι εύκολη η αλλαγή του μετά την κατασκευή.

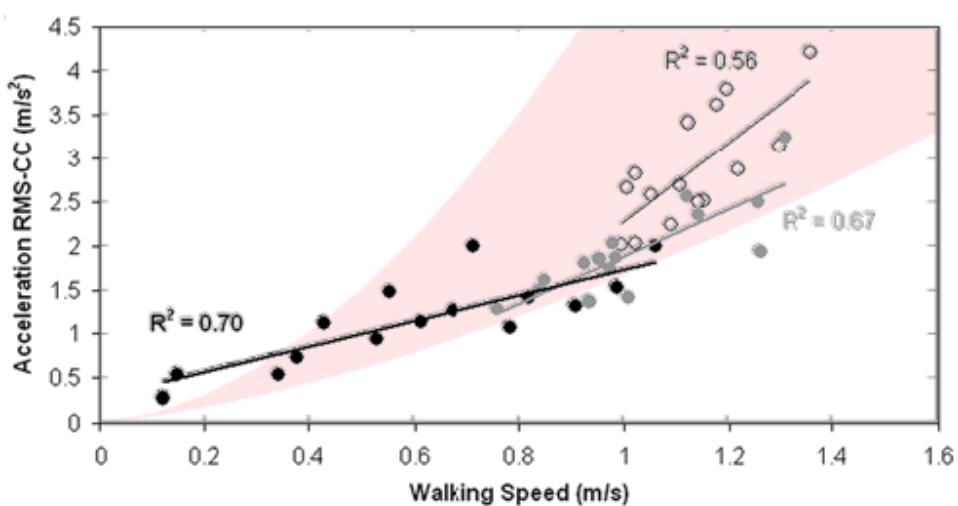
Όσον αφορά την αδιάστατη σταθερά απόσβεσης β , παρατηρείται ότι μικρές τιμές της παραμέτρου οδηγούν σε μεγάλες επιταχύνσεις στο ισχίο. Αυτό συμβαίνει διότι μειώνοντας την β σταδιακά χάνεται η αποσβετική ικανότητα των σκελών και οι κραδασμοί της κρούσης των πελμάτων με το έδαφος μεταφέρονται ευκολότερα στο ισχίο. Αντίστροφα, αύξηση της β μειώνει την καταπόνηση στη θέση αυτή, έως ένα ορισμένο όριο, πάνω από το οποίο η αύξηση της απόσβεσης δεν προσφέρει κάποια περαιτέρω ελάττωση των επιταχύνσεων. Επομένως δεν έχει νόημα η υπέρμετρη αύξηση της παραμέτρου β όταν στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των επιταχύνσεων στο ισχίο.

Η παράμετρος αδιάστατης σταθεράς ελατηρίου, κ , επίσης επηρεάζει το προφίλ των επιταχύνσεων. Αύξηση της κ καθιστά τα ελατήρια λιγότερο εύκαμπτα, με αποτέλεσμα αυτά να μεταφέρουν αμεσότερα τις καταπονήσεις από τα πέλματα στη θέση της άρθρωσης του ισχίου. Αντίθετα, μικρότερες κ αντιστοιχούν σε ενδοτικότερα σκέλη, τα οποία επιτρέπουν την εξομάλυνση των κινήσεων στην θέση του ισχίου και επομένως οδηγούν σε μικρότερες επιταχύνσεις στη θέση αυτή.

Οι παράμετροι μ και λ , οι οποίες ορίζουν την ροπή αδράνειας των σκελών ως προς την άρθρωση στο ισχίο, δεν έχουν σημαντική επίδραση στο προφίλ των επιταχύνσεων, ενώ όπως έχει ήδη αναφερθεί, ελάχιστα επηρεάζουν την τιμή της μέσης οριζόντιας ταχύτητας.

Σύγκριση επιταχύνσεων με πειραματικά δεδομένα

Οι μέση τιμή των κατακόρυφων επιταχύνσεων έχει μετρηθεί πειραματικά από πολλές ερευνητικές ομάδες. Μία τέτοια μελέτη [17] από τους Iosa et al., συσχέτισε τις RMS τιμές των μετρούμενων επιταχύνσεων με τις ταχύτητες βηματισμού, τόσο σε φυσιολογικούς ανθρώπους όσο και σε ανθρώπους που έχουν υποστεί εγκεφαλικό και παρουσιάζουν δυσκολία στο βηματισμό. Στο Σχήμα 5-12 με λευκούς κύκλους έχουν σημειωθεί οι φυσιολογικοί βηματισμοί, ενώ με γκρι και μαύρους κύκλους έχουν σημειωθεί οι βηματισμοί ασθενών με μειωμένη και περιορισμένη κινητικότητα αντίστοιχα. Στο Σχήμα 5-12 έχει σημειωθεί σε υπέρθεση με σκίαση η περιοχή τιμών του Σχήματος 5-11.



Σχήμα 5-12: RMS κατακόρυφες επιταχύνσεις στη θέση του ισχίου ως συνάρτηση της μέσης ταχύτητας βηματισμού από πειραματικά δεδομένα.

Συγκρίνοντας το Σχήμα 5-12 με το Σχήμα 5-11 παρατηρείται ότι το παραβολικό προφίλ στη συσχέτιση ταχύτητας και επιτάχυνσης εμφανίζεται και σε πειραματικές μετρήσεις. Ακόμα, οι τιμές των ταχυτήτων και επιταχύνσεων βρίσκονται εντός των ίδιων διαστημάτων και στα δύο διαγράμματα. Τα αποτελέσματα αυτά είναι ενθαρρυντικά για την ισχύ των προσομοιώσεων και την αξιολόγηση του μοντέλου όσον αφορά την ομοιότητά του με τον άνθρωπο και δείχνουν ότι ο άνθρωπος περπατά κοντά σε αποδοτικά σημεία λειτουργίας.

5.4.4 Κατακόρυφη μετατόπιση ισχίου

Το εύρος της ταλάντωσης, Δy , που εκτελεί ο σύνδεσμος του ισχίου στον κατακόρυφο άξονα πρέπει και αυτό να προσδιοριστεί ως συνάρτηση των αδιάστατων παραμέτρων του μοντέλου. Η μελέτη αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη εάν υπάρχουν τέτοιου είδους προδιαγραφές που θα πρέπει να ικανοποιούνται από ένα πειραματικό δίποδο, ή εάν ενδιαφέρει η κατασκευή ενός προσθετικού μέλους. Στην δεύτερη περίπτωση, θα πρέπει η τροχιά του ισχίου του παραλήπτη του προσθετικού σκέλους να έχει παρόμοιο μοτίβο είτε αυτός στηρίζεται στο φυσικό του πόδι είτε στο προσθετικό σκέλος, ώστε ο βηματισμός του να παρουσιάζει ομοιομορφία και να μην είναι επίπονος.

Στο Σχήμα 5-13 παρουσιάζεται η μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης του ισχίου κατά τον παθητικό βηματισμό που προκύπτει μεταβάλλοντας κάθε φορά μία μόνο από τις αδιάστατες παραμέτρου, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν στην ονομαστική τιμή τους. Η ονομαστική θέση έχει σημειωθεί και εδώ με το σύμβολο « ∇ ». Με πράσινο χρώμα σημειώνονται οι βηματισμοί οι οποίοι έχουν βρεθεί ευσταθείς, ενώ με κόκκινο σημειώνονται οι ασταθείς βηματισμοί.

Παρατηρείται ότι την σημαντικότερη επίδραση στην τιμή της κατακόρυφης μετατόπισης του ισχίου κατά το βηματισμό, την έχουν οι παράμετροι κλίσης εδάφους, α , αδιάστατης απόσβεσης, β , καθώς και ο συντελεστής κύλισης, ρ . Αύξηση των παραμέτρων α και ρ αυξάνει την τιμή του εύρους αυτού της ταλάντωσης του ισχίου, ενώ αντίθετα αύξηση της β την μειώνει.

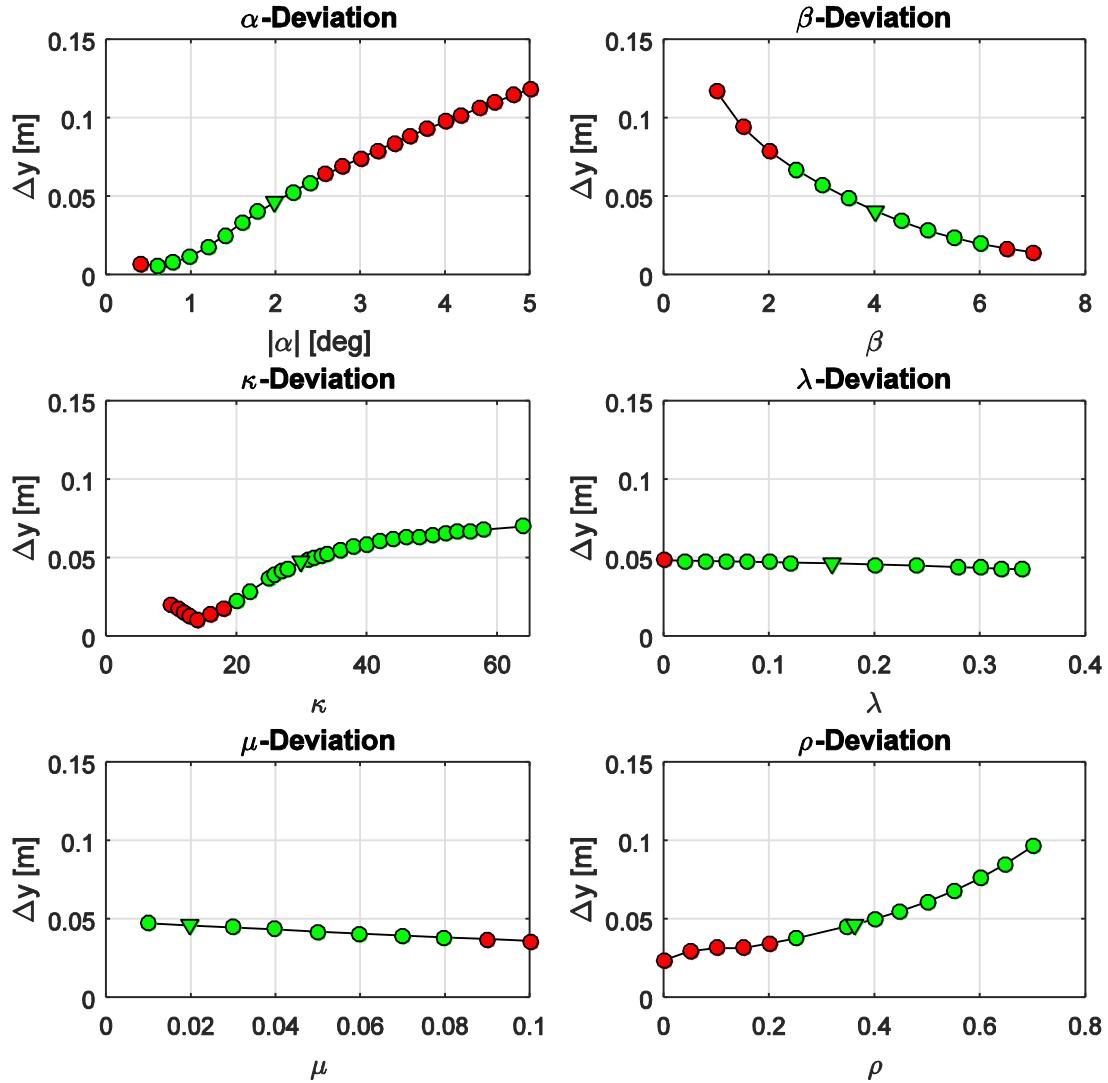
Η παράμετρος κλίσης εδάφους α εισάγει, καθώς αυξάνεται, μεγαλύτερα κρουστικά φορτία στο δίποδο μοντέλο, καθώς αυτό καλείται να κατηφορίσει υπό όλο και μεγαλύτερη κλίση. Στα γραμμικά ελατήρια, όπως είναι τα σκέλη στο διαμήκη άξονά τους, η απόκριση θέσης σε κρουστική είσοδο, ή ισοδύναμα η αρχική μετατόπιση του ελεύθερου άκρου τους, αυξάνεται με αύξηση της τιμής του κρουστικού φορτίου που τους ασκείται. Επομένως η αύξηση του Δy καθώς αυξάνεται η παράμετρος α είναι αναμενόμενη.

Ο συντελεστής κύλισης ρ αυξανόμενος πάνω από κάποια τιμή επίσης αυξάνει το Δy . Αυτό όμως συμβαίνει λόγω των μεγαλύτερων γωνιακών μετατοπίσεων που παρατηρούνται στους βηματισμούς με μεγαλύτερο συντελεστή ρ . Μεγαλύτερες στροφές του σκέλους στήριξης κατά το περπάτημα οδηγούν σε μεγαλύτερες κατακόρυφες μετατοπίσεις του ισχίου.

Η παράμετρος β αυξάνει την αντίσταση που βρίσκουν τα σκέλη κατά τη διαμήκη ταλάντωσή τους, επομένως μειώνει το εύρος Δy των ταλαντώσεων που αυτά εκτελούν. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος για τον οποίο έχουν συμπεριληφθεί στο μοντέλο τα απόσβετικά στοιχεία: ώστε να εξομαλύνεται η κίνηση του κεντρικού συνδέσμου στο ισχίο με σκοπό την ελάττωση της καταπόνησής του.

Σχετικά με την επίδραση που έχει η παράμετρος κ στο εύρος των κατακόρυφων ταλαντώσεων του ισχίου, παρατηρείται ότι το Δy παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο σε μικρή σχετικά τιμή της κ , ο βηματισμός όμως κατά τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ασταθής. Στη συνέχεια το εύρος ταλάντωσης

αυξάνεται με φθίνουσα παράγωγο έως ότου προσεγγίσει μια σχεδόν σταθερή τιμή για τους ευσταθείς βηματισμούς με πολύ υψηλές τιμές της κ , οι οποίες αντιστοιχούν σε απαραμόρφωτα σκέλη.



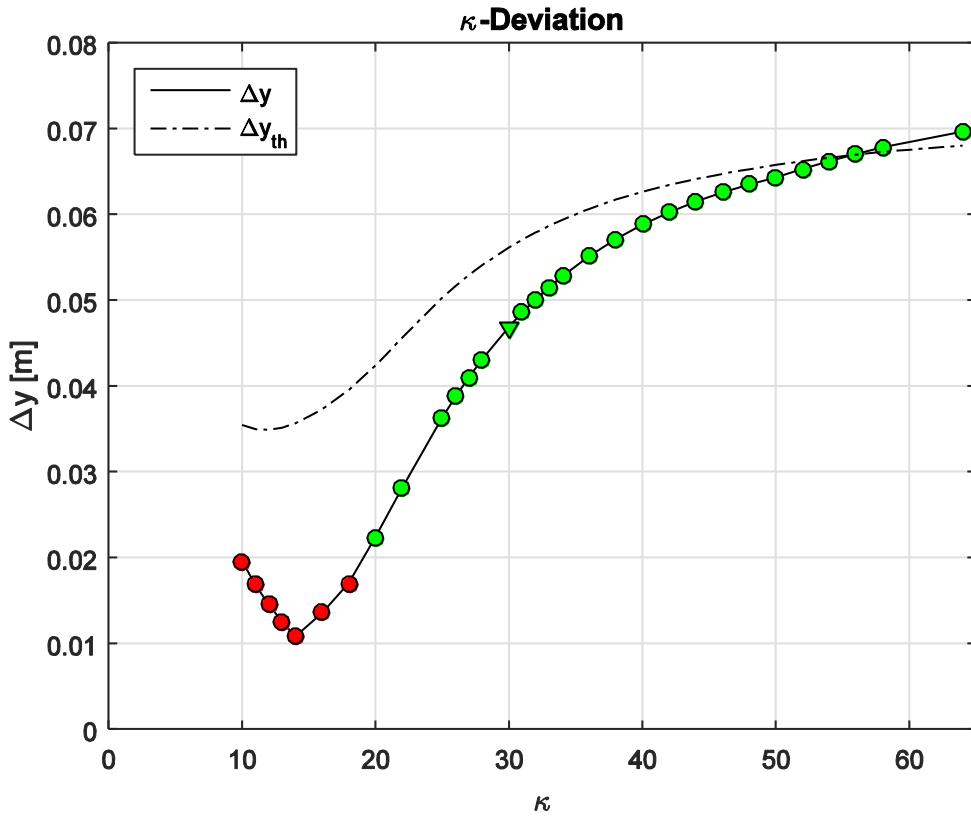
Σχήμα 5-13: Κατακόρυφη μετατόπιση του ισχίου κατά το βηματισμό ως συνάρτηση των παραμέτρων του μοντέλου.

Έχει προταθεί στο [13] ότι για απαραμόρφωτα σκέλη το εύρος αυτό δίνεται προσεγγιστικά από τον τύπο:

$$\Delta y_{th} = \frac{S_l^2 (L_{nat} - r)}{8 L_{nat}^2} \quad (5-7)$$

Στην παραπάνω εξίσωση με S_l συμβολίζεται το μήκος βήματος, με r η ακτίνα του κυκλικού πέλματος, και με L_{nat} το σταθερό μήκος των απαραμόρφωτων σκελών. Επομένως αναμένεται το εύρος της κατακόρυφης ταλάντωσης να συγκλίνει σε αυτή την τιμή καθώς η αδιάστατη σταθερά του ελατηρίου

λαμβάνει μεγάλες τιμές. Στο Σχήμα 5-14 συγκρίνονται τα αποτελέσματα Δy των προσομοιώσεων με τις θεωρητικές τιμές Δy_{th} που υποδεικνύει η (5-7).



Σχήμα 5-14: Σύγκριση θεωρητικών κατακόρυφων μετατοπίσεων ισχίου Δy_{th} (5-7) με τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων Δy .

Πράγματι είναι εμφανής η σύγκλιση του εύρους ταλάντωσης του ισχίου στον κατακόρυφο άξονα στις τιμές που ορίζονται από την θεωρία, όταν η αδιάστατη σταθερά ελατηρίου κ λάβει επαρκώς μεγάλες τιμές. Επομένως προκύπτει το συμπέρασμα ότι για τιμές κ στο άνω όριο του εύρους που μελετάται, το μοντέλο συμπεριφέρεται σχεδόν σαν να είχε απαραμόρφωτα σκέλη.

Κλείνοντας αυτή τη διερεύνηση, αξίζει να σημειωθεί ότι οι παράμετροι μ και λ που ορίζουν την αδράνεια των σκελών, δεν φαίνεται να επηρεάζουν το εύρος Δy της κατακόρυφης ταλάντωσης.

5.4.5 Συχνότητα βηματισμού

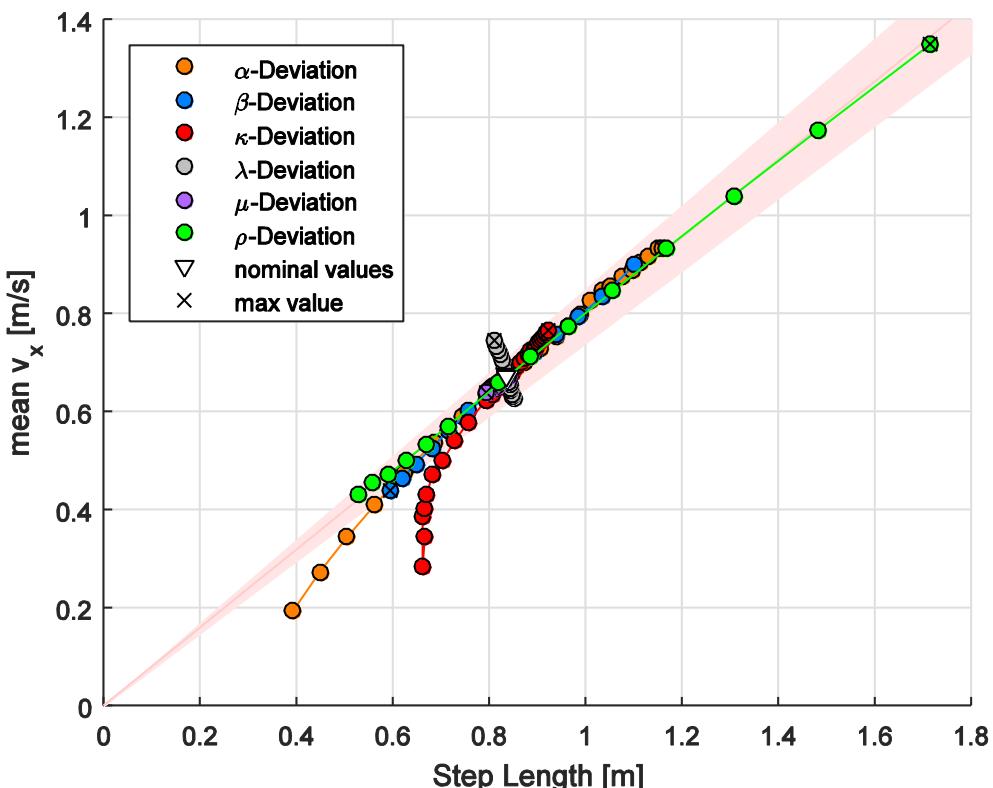
Η συχνότητα με την οποία επαναλαμβάνεται ο περιοδικός βηματισμός του μοντέλου προκύπτει και αυτή ως αποτέλεσμα της παθητικής δυναμικής του. Συγκεκριμένα, εξαρτάται από τις ιδιοσυχνότητες των υποσυστημάτων του: των ελαστικών σκελών και των εκκρεμών που το συνθέτουν.

Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2, χρησιμοποιώντας τις αρχές της διαστατικής ανάλυσης, μπορεί να προκύψει αναλυτική σχέση για την συχνότητα εάν είναι γνωστά άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη για το βηματισμό. Δεδομένου ότι η ταχύτητα \bar{v}_x έχει μονάδες [m/s] ενώ το μήκος του βήματος S_l έχει μονάδες [m], υποδεικνύεται ότι η συχνότητα μπορεί να προκύψει από το πηλικό της ταχύτητας προς το μήκος βήματος, μέγεθος το οποίο θα έχει μονάδες συχνότητας [s^{-1}]. Μπορεί δηλαδή να υπολογισθεί η συχνότητα χωρίς μεγάλο σφάλμα από τη σχέση:

$$f = \frac{\bar{v}_x}{S_l}$$

(5-8)

Στο Σχήμα 5-15 έχει αποτυπωθεί η σχέση ανάμεσα στα μεγέθη \bar{v}_x και S_l , για βηματισμούς σταθερού σημείου που προκύπτουν μεταβάλλοντας κάθε φορά μία από τις αδιάστατες παραμέτρους, ενώ οι υπόλοιπες διατηρούνται στις ονομαστικές τιμές τους. Τα ζεύγη τιμών (\bar{v}_x, S_l) που έχουν σημειωθεί στο διάγραμμα έχουν χρωματισθεί ανάλογα με την παράμετρο στης οποίας την μεταβολή αντιστοιχούν.



Σχήμα 5-15: Συσχέτιση μήκους βήματος με μέση οριζόντια ταχύτητα βηματισμών.

Παρατηρείται ότι με εξαίρεση τους βηματισμούς που αντιστοιχούν σε διαφορετικές παραμέτρους αδιάστατης σταθεράς ελατηρίου, κ , συντελεστή κατανομής μάζας πέλματος, λ , και κλίσης εδάφους, α , οι υπόλοιπες προσομοιώσεις δίνουν σημεία τα οποία κείνται σχεδόν όλα σε μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επομένως για τα σημεία αυτά, τα οποία όλα έχουν τις σταθερές κ , λ και α στις ονομαστικές τιμές τους, η σχέση ανάμεσα σε ταχύτητα και μήκος βήματος είναι της μορφής:

$$\bar{v}_x = f S_l \quad (5-9)$$

Σύμφωνα όμως με τα παραπάνω για την διαστατική ανάλυση, ο συντελεστής f θα έχει μονάδες συχνότητας. Από την γραμμική σχέση που φαίνεται να κυριαρχεί στο παραπάνω διάγραμμα, η f φαίνεται να έχει σταθερή τιμή για όλες τις προσομοιώσεις που διατηρούν τις κ και λ στις ονομαστικές τιμές τους. Επομένως αυτή η συχνότητα βηματισμού f του συστήματος δεν εξαρτάται από τις υπόλοιπες αδιάστατες παραμέτρους, παρά μόνο από τις κ , λ και α .

Η μεταβολή των τελευταίων δίνει σημεία εκτός της ευθείας και συνεπώς αλλάζει την συχνότητα του βηματισμού. Πράγματι, το σύστημα αποτελείται από τα υποσυστήματα μάζα-ελατήριο-απόσβεση

και εκκρεμές. Οι ιδιοσυχνότητες αυτών των υποσυστημάτων αλλάζουν με μεταβολή των παραμέτρων κ και λ , αλλάζοντας έτσι την συχνότητα με την οποία λειτουργεί το σύστημα. Η παράμετρος α ορίζει την μορφή της εξωτερικής διέγερσης του συστήματος, δηλαδή τη συχνότητα των κρούσεων με το κεκλιμένο έδαφος.

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθεί η επίδραση που έχει η δυναμική των υποσυστημάτων στη δυναμική του πλήρους μοντέλου. Επομένως η προσοχή στρέφεται στις ιδιοσυχνότητες των υποσυστημάτων μάζα-ελατήριο-απόσβεση και του εκκρεμούς, τα οποία απαρτίζουν το πλήρες σύστημα. Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν μέσω των σχέσεων για τις φυσικές συχνότητες ω_n με χρήση της σχέσης:

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (5-10)$$

Πιο αναλυτικά, το υποσύστημα των ελατηρίων στο πόδι στήριξης έχει ιδιοσυχνότητα:

$$f_{1a} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa g}{L_{nat}}} \quad (5-11)$$

ενώ η αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα στο ελεύθερο σκέλος είναι:

$$f_{1\beta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa g}{\mu L_{nat}}} \quad (5-12)$$

Επιπλέον, θεωρώντας $L_1 \cong L_2 \cong L_{nat}$, η ιδιοσυχνότητα πλήρους ταλάντωσης των εκκρεμών δίνεται προσεγγιστικά από τον τύπο :

$$f_2' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{1-\lambda} L_{nat}} \quad (5-13)$$

Όταν όμως ενδιαφέρει η συχνότητα με την οποία επαναλαμβάνεται το μισό φαινόμενο, δηλαδή η προώθηση του εκκρεμούς κατά τη μία φορά, ως συχνότητα του φαινομένου λαμβάνεται:

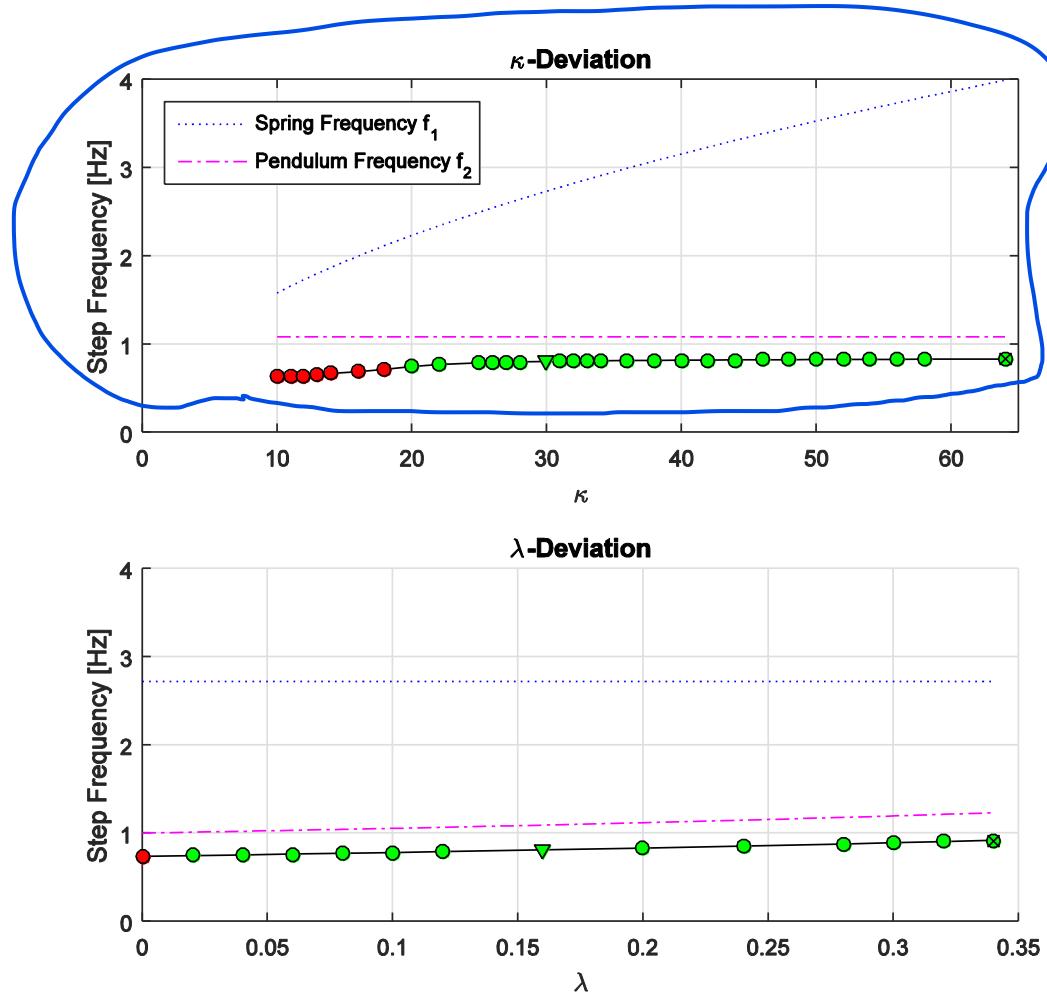
$$f_2 = 2f_2' \quad (5-14)$$

Από τις (5-11) και (5-14) φαίνεται ότι οι δύο ιδιοσυχνότητες των υποσυστημάτων είναι αύξουσες συναρτήσεις των παραμέτρων κ και λ . Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πραγματική ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης του εκκρεμούς, f_2 , θα είναι στην πραγματικότητα μικρότερη από την τιμή που προκύπτει από τη σχέση ορισμού της. Οπως έχει βρεθεί στην Ενότητα 2.2.2 αυτό συμβαίνει όταν η γωνία στο εκκρεμές λαμβάνει τιμές για τις οποίες δεν ισχύει η παραδοχή γραμμικοποίησης του ημιτόνου (2-7).

Τελικά, εξετάζοντας τις παραπάνω ιδιοσυχνότητες, προκύπτει ότι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος επηρεάζεται από τις αδιάστατες παραμέτρους κ , λ και μ . Όμως από το Σχήμα 5-15 φαίνεται ότι η παράμετρος μ δεν αλλάζει σημαντικά τη συχνότητα βηματισμού: η ιδιοσυχνότητα του ελεύθερου σκέλους ως ελατήριο δεν φαίνεται να διαμορφώνει το σύστημα. Μπορεί να προκύψει δηλαδή το συμπέρασμα ότι το ελεύθερο σκέλος χαρακτηρίζεται δυναμικά περισσότερο από την ιδιότητά του ως εκκρεμές, και συνεπώς από την σταθερά λ , παρά από την ελαστικότητά του, η οποία θα εισήγαγε και επίδραση της σταθεράς μ . Επομένως για την ιδιοτιμή της ελαστικής συμπεριφοράς του συστήματος, αρκεί η f_{1a} :

$$f_1 \cong f_{1a} \quad (5-15)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μορφή της μεταβολής της συχνότητας με μεταβολή των κ και λ , σε σύγκριση με τις ιδιοτιμές των υποσυστημάτων f_1 και f_2 . Στο σχήμα 5-16 καταγράφονται οι συχνότητες βηματισμού των προσομοιώσεων για μεταβολή των δύο αυτών παραμέτρων, καθώς επίσης και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ελατηρίου και εκκρεμούς όπως αυτές προκύπτουν μέσω των (5-11) και (5-14).



Σχήμα 5-16: Συχνότητες βηματισμών σε σύγκριση με τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες υποσυστημάτων.

Από το Σχήμα 5-16 είναι εμφανές ότι αύξηση των παραμέτρων κ και λ αυξάνει ελαφρά την συχνότητα του βηματισμού. Αύξηση της παραμέτρου κ πάνω από ένα όριο δεν καταφέρνει να αυξήσει περαιτέρω την συχνότητα βηματισμού, αφού το σύστημα «περιμένει» την κίνηση του σκέλους-εκκρεμούς. Αντίθετα, αύξηση της παραμέτρου λ αυξάνει σταθερά την συχνότητα του βηματισμού.

Όλοι οι βηματισμοί έχουν συχνότητα κοντά στην ιδιοσυχνότητα της κίνησης του εκκρεμούς. Αυτό συμβαίνει διότι η προώθηση των σκελών προς τα εμπρός είναι σημαντικά πιο αργή διαδικασία και εμφανίζει μικρότερη συχνότητα, άρα καθορίζει την συνολική κίνηση του μοντέλου. Η μικρή υστέρηση που παρουσιάζει η τιμή της συχνότητας βηματισμού συγκριτικά με την συχνότητα προώθησης του εκκρεμούς οφείλεται στα μεγάλα εύρη της γωνιακής ταλάντωσης των σκελών: μεγαλύτερα εύρη ταλάντωσης στα εκκρεμή παρουσιάζουν μικρότερες ιδιοσυχνότητες απ' ό,τι προβλέπει η (2-11).

5.4.6 Ενεργειακές απώλειες βηματισμού

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των ενεργειακών απωλειών του δίποδου κατά την παθητική κατάβασή του στο κεκλιμένο επίπεδο. Για το λόγο αυτό υπολογίζεται η μέση τιμή των ενεργειακών απωλειών, για τους σταθερούς βηματισμούς που προκύπτουν με μεταβολή κάθε φορά μίας από τις αδιάστατες παραμέτρους, διατηρώντας τις υπόλοιπες στις ονομαστικές τιμές τους. Η σχέση που δίνει την στιγμιαία ισχύ των απωλειών στο σύστημα είναι:

$$P_{loss} = B(\dot{L}_1^2 + \dot{L}_2^2) \quad (5-16)$$

Η ενέργεια που χάνεται μέσω των αποσβέσεων είναι τότε:

$$E_{loss} = \int_{t=0}^{t=t_{max}} P_{loss}(t) dt \quad (5-17)$$

Οι στιγμιαίες απώλειες ενέργειας κατά την κρούση του μοντέλου με το έδαφος θεωρείται αμελητέα, επομένως οι ενεργειακοί υπολογισμοί αφορούν στις απώλειες των αποσβέσεων. Επειδή σε πλήρως επαναλαμβανόμενους βηματισμούς η ενεργειακή στάθμη του μηχανισμού παραμένει σταθερή, η ενέργεια που χάνει το δίποδο από τις αποσβέσεις θα είναι ίση με την ενέργεια που ανακτά μέσω της κατάβασης στο βαρυτικό πεδίο. Μπορεί να γραφεί δηλαδή:

$$\int_{t=0}^{t=t_{max}} P_{loss}(t) dt = \int_{t=0}^{t=t_{max}} P_{in}(t) dt \quad (5-18)$$

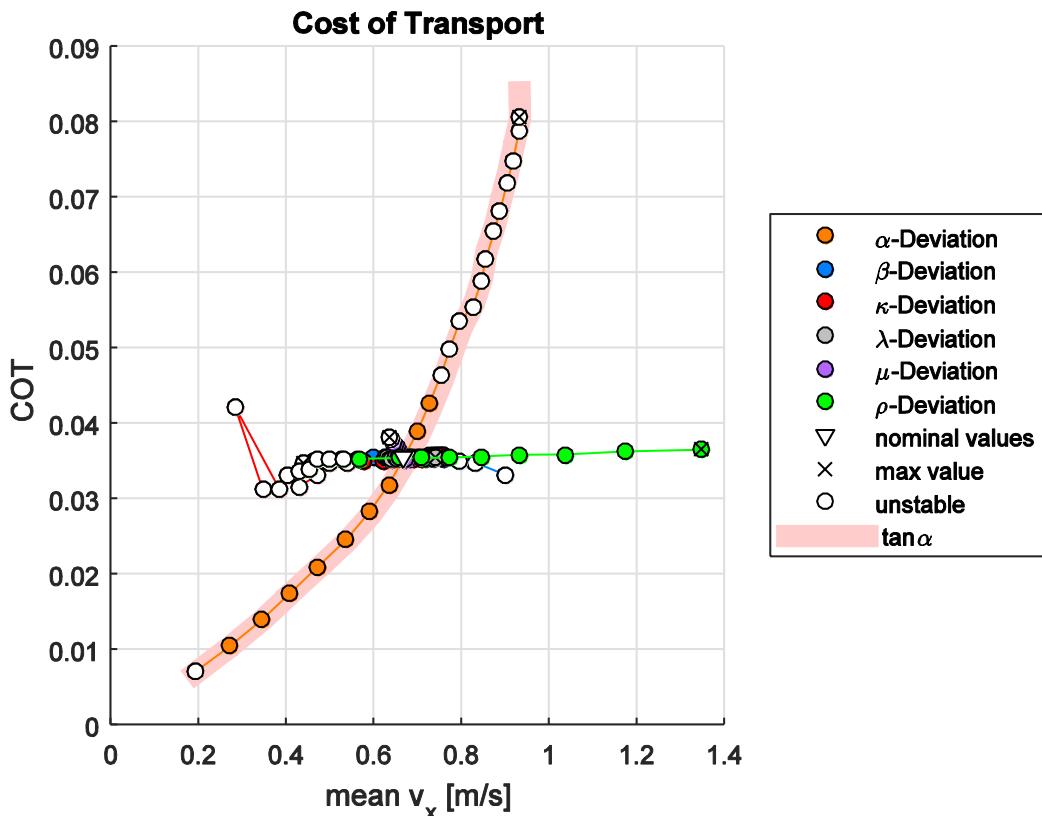
Για το λόγο αυτό στη θέση κάποιου συντελεστή απωλειών χρησιμοποιείται ο συντελεστής κόστους μεταφοράς COT, ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της συνολικά εισερχόμενης στο σύστημα ενέργειας, προς το γινόμενο του βάρους επί τη συνολική απόσταση που διανύει το δίποδο, για κάποιο χρονικό διάστημα:

$$COT = \frac{\int_{t=0}^{t=t_{max}} P_{in}(t) dt}{(M + 2m) g \int_{t=0}^{t=t_{max}} v_x(t) dt} \equiv \frac{\int_{t=0}^{t=t_{max}} P_{loss}(t) dt}{(M + 2m) g \int_{t=0}^{t=t_{max}} v_x(t) dt} \quad (5-19)$$

Επειδή τα δύο μεγέθη, απώλειες και οριζόντια ταχύτητα, καταγράφονται για το ίδιο χρονικό διάστημα, η (5-19) μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά και ως:

$$COT = \frac{\int_{t=0}^{t=t_{max}} P_{loss}(t) dt}{(M + 2m) g \frac{\int_{t=0}^{t=t_{max}} v_x(t) dt}{t_{max}}} \approx \frac{\bar{P}_{loss}}{(M + 2m) g \bar{v}_x} \quad (5-20)$$

Στο Σχήμα 5-17 καταγράφεται ο συντελεστής COT ως συνάρτηση της μέσης οριζόντιας ταχύτητας, \bar{v}_x , για τους ονομαστικούς βηματισμούς που προκύπτουν με μεταβολή μίας κάθε φορά από τις αδιάστατες παραμέτρους του συστήματος.



Σχήμα 5-17: Συντελεστής COT ως συνάρτηση της μέσης οριζόντιας ταχύτητας βηματισμού.

Από το Σχήμα 5-17 παρατηρείται ότι για βηματισμούς στην ίδια κλίση εδάφους α , ο συντελεστής COT παραμένει γενικά σταθερός. Εξαίρεση αποτελούν ασταθείς βηματισμοί, οι οποίοι έχουν σημειωθεί με λευκό κύκλο, καθώς και οι βηματισμοί που προκύπτουν από μεταβολή της παραμέτρου μ . Αυτό είναι λογικό αφού η παράμετρος αυτή καθορίζει την τιμή της μάζας πέλματος m , που συμμετέχει στη (5-20) για τον καθορισμό του COT.

Στο ίδιο διάγραμμα έχει σημειωθεί για κάθε προσομοίωση που προκύπτει από μεταβολή της γωνίας κλίσης εδάφους α , η τιμή της εφαπτομένης της γωνίας αυτής. Παρατηρείται ότι η τιμή του συντελεστή COT συμπίπτει με την τιμή της εφαπτομένης του κεκλιμένου επιπέδου στον οποίο εκτελείται ο παθητικός βηματισμός. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί χαρακτηριστικό του παθητικού περπατήματος και έχει διατυπωθεί σε σχετικές μελέτες [21] [116].

5.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό διερευνήθηκε η συνάρτηση βηματισμού για πολλούς συνδυασμούς των αδιάστατων παραμέτρων που καθορίζουν το παθητικό δίποδο μοντέλο. Η εκτέλεση παθητικών βηματισμών οι οποίοι παρουσιάζουν «φυσική» μορφή, είναι ενθαρρυντική ένδειξη για την εγκυρότητα του δυναμικού μοντέλου και της συνάρτησης βηματισμού που έχει ορισθεί.

Κάθε συνδυασμός των παραμέτρων δίνει διαφορετική λύση ή ισοδύναμα, διαφορετικής μορφής βηματισμό. Ορισμένοι από τους συνδυασμούς οδηγούν σε πλήρως επαναλαμβανόμενους, ευσταθείς παθητικούς βηματισμούς, ενώ άλλοι δεν καταλήγουν σε δίποδο ικανό να εκτελέσει παραπάνω από

ένα βήμα. Ένας από τους συνδυασμούς που παρουσίασε ευσταθή βηματισμό επιλέχθηκε ως ονομαστικός, συνθέτοντας έτσι το ονομαστικό δίποδο μοντέλο.

Αρχικά, για τις ονομαστικές τιμές των αδιάστατων παραμέτρων, ο βηματισμός που προέκυψε ως λύση παρουσιάστηκε αναλυτικά, δίνοντας έτσι πληροφορίες τόσο για την δυναμική συμπεριφορά των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος, όσο και για τα χαρακτηριστικά του βηματισμού. Η λύση αυτή αξιολογήθηκε με κριτήριο το προφίλ των επιταχύνσεων του ισχίου, μέσω σύγκρισης με πειραματικά δεδομένα που έχουν δημοσιευθεί. Παρατηρήθηκαν σημαντικές ομοιότητες ανάμεσα σε πειραματικά δεδομένα και στα αποτελέσματα της προσομοίωσης, επομένως μπορούν να εξαχθούν τα εξής συμπεράσματα: Αρχικά, ότι το μοντέλο είναι ικανό να προσομοιώσει σε ικανοποιητικό βαθμό τον ανθρώπινο βηματισμό, και στη συνέχεια ότι οι ονομαστικές παράμετροι του μοντέλου το καθιστούν συγκρίσιμο με την κατασκευή των κάτω άκρων ανθρώπου.

Σε δεύτερο στάδιο εκτελέσθηκε μια σειρά από παραμετρικές διερευνήσεις για τις αδιάστατες παραμέτρους του μοντέλου. Με αυτές προσδιορίσθηκε η συμπεριφορά του μοντέλου για μεταβολή των αδιάστατων παραμέτρων που το ορίζουν, και βρέθηκαν τα όρια εντός των οποίων είναι συμφέρον να κυμαίνονται οι παράμετροι αυτές με σκοπό την επίτευξη επαναλαμβανόμενων βηματισμών από το παθητικό μοντέλο. Η εγκυρότητα του μοντέλου εξακριβώθηκε για δεύτερη φορά μέσω της σύγκρισης των μέσων τιμών των επιταχύνσεων με πειραματικά δεδομένα από τη βιβλιογραφία, αυτή τη φορά όμως για πολλούς συνδυασμούς των αδιάστατων παραμέτρων.

Συνολικά, η συμπεριφορά του μοντέλου παρουσίασε αναμενόμενα χαρακτηριστικά, τα οποία μπορούν να αιτιολογηθούν πλήρως, και διαισθητικά μέσω της γνώσης για το ανθρώπινο περπάτημα, αλλά και αναλυτικά από μελέτη των υποσυστημάτων που συνθέτουν τον πλήρη μηχανισμό.

Τα αποτελέσματα της μέχρι τώρα μελέτης μπορούν να αποτελέσουν οδηγό κατά τον σχεδιασμό τόσο δίποδων παθητικών ρομπότ, όσο και προσθετικών μελών, καθώς συσχετίζουν αδιάστατες κατασκευαστικές παραμέτρους με επιθυμητή συμπεριφορά. Σε περίπτωση που ενδιαφέρει κάποιο άλλο χαρακτηριστικό ως κριτήριο επιλογής των παραμέτρων, αυτό μπορεί να παραχθεί μέσω περαιτέρω προσομοιώσεων στο περιβάλλον Simulink.

Τελικά, το συγκεκριμένο μοντέλο παρουσιάζει ενδιαφέρον συγκριτικά με ήδη υπάρχοντα κυρίως λόγω των περισσότερων σχεδιαστικών επιλογών που προσφέρει. Τα στοιχεία που περιλαμβάνει καθιστούν την κίνησή του συγκρίσιμη με το ανθρώπινο περπάτημα και δίνουν τη δυνατότητα διερεύνησης ως προς τα χαρακτηριστικά που θα πρέπει να έχει μία δίποδη ρομποτική κατασκευή ή ένα προσθετικό κάτω άκρο.

6 Περπάτημα με Επενέργηση

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η προσθήκη επενεργητών στο δίποδο μοντέλο, με σκοπό την επίτευξη βηματισμών σε έδαφος μηδενικής κλίσης.

Όπως αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά το περπάτημα στο κεκλιμένο επίπεδο, το μοντέλο ανακτά την ενέργεια που χάνει στις αποσβέσεις του, μέσω της κατάβασής του στο βαρυτικό πεδίο. Κατ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να διατηρεί την κινητική του ενέργεια σε σταθερά επίπεδα κατά την κατάβασή του, με αποτέλεσμα να επιτυγχάνονται πλήρως επαναλήψιμοι βηματισμοί.

Τα παραπάνω δεν μπορούν να επιτευχθούν σε οριζόντιο επίπεδο, καθώς το δίποδο δεν αλλάζει επίπεδο βαρυτικής ενέργειας στα διαδοχικά του βήματα, και επομένως δεν αναπληρώνει τις απώλειές του με αυτόν τον τρόπο. Είναι φανερό ότι για να καταφέρει το μοντέλο να εκτελέσει επαναλαμβανόμενους βηματισμούς στο οριζόντιο επίπεδο, θα πρέπει να ενσωματωθεί σε αυτό μία πηγή ισχύος, η οποία θα εισάγει στο σύστημα την ενέργεια που χάνεται στις αποσβέσεις. Το μοντέλο λοιπόν θα πρέπει να τροποποιηθεί και να εισαχθούν σε αυτό επενεργητές.

Στην Ενότητα 6.2 παρουσιάζονται οι επιλογές που υπάρχουν για τα σχήματα ελέγχου που θα παρέχουν αυτή την επενέργηση. Στην Ενότητα 6.3 παρουσιάζεται ένα επαυξημένο επενεργούμενο μοντέλο και ο σταθερός βηματισμός που τελικά επιτυγχάνεται με το βασισμένο σε μοντέλο σχήμα επενέργησης. Στην Ενότητα 6.4 γίνεται μια παραμετρική διερεύνηση για τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του επαυξημένου μοντέλου. Στην Ενότητα 6.5 το σχήμα ελέγχου επεκτείνεται με την προσθήκη μη γραμμικών PD όρων, οι οποίοι εξασφαλίζουν ευρωστία στο σύστημα.

Τέλος, στην Ενότητα 6.5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν για το περπάτημα με επενέργηση.

6.2 Επιλογές επενέργησης

Το ζήτημα της επενέργησης στα δίποδα ρομπότ έχει αναλυθεί σε πολλές εργασίες και έχουν προταθεί αρκετές λύσεις. Ένας κοινός πρώτος στόχος στην έρευνα αυτή είναι η υλοποίηση σχημάτων επενέργησης τα οποία θα είναι ενεργειακά αποδοτικά. Ένα δεύτερο κριτήριο στην αξιολόγηση κάθε σχήματος επενέργησης είναι το είδος του βηματισμού στον οποίο οδηγεί: είναι επιθυμητό οι παραγόμενοι βηματισμοί να είναι κατά το δυνατό «φυσικοί», δηλαδή **να εκμεταλλεύονται την παθητική δυναμική του μοντέλου** και να μην την παραγράφουν με κάποιο πολύ επεμβατικό σχήμα ελέγχου.

Στις υποενότητες που ακολουθούν θα αναφερθούν οι επιλογές που διερευνήθηκαν όσον αφορά στην επενέργηση του μοντέλου και θα αναλυθεί η λύση που τελικά επιλέχθηκε.

6.2.1 Αριθμός επενεργούμενων βαθμών ελευθερίας

Το μοντέλο που μελετάται στο πλαίσιο της εργασίας αυτής έχει 4 βαθμούς ελευθερίας: τις δύο γωνίες των σκελών του και τα δύο μήκη τους. **Η επενέργηση στις γωνίες υλοποιείται γενικά σε ρομπότ μέσω περιστροφικών κινητήρων**, και δεν παρουσιάζει σημαντικά τεχνολογικά προβλήματα. Αντίθετα,

δεν είναι εύκολο να υλοποιηθεί γραμμική επενέργηση όταν γίνεται λόγος για φορητά, κινούμενα ρομπότ.

Φυσικά, στη βιβλιογραφία υπάρχουν υλοποιήσεις που ενσωματώνουν τέτοιες πρακτικές πλήρους επενέργησης, όμως στην παρούσα εργασία αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας θα αφεθούν ελεύθεροι, με σκοπό την αναζήτηση μίας οικονομικής, πρακτικής και ελάχιστα επεμβατικής λύσης ελέγχου. Γενικά, επενέργηση σε περισσότερους βαθμούς ελευθερίας συνεπάγεται μεγαλύτερη συνολική κατανάλωση ισχύος, αλλά και δυσκολότερος μηχανολογικός σχεδιασμός, καθώς είτε θα πρέπει να προσαρμοσθεί η κατασκευή ώστε να αντιστοιχεί στο ήδη υπάρχον δυναμικό μοντέλο, είτε θα πρέπει να αναδιατυπωθούν οι εξισώσεις του συστήματος ώστε να περιγράφουν κάποιο περισσότερο πολύπλοκο, επαυξημένο σύστημα. Επομένως είναι προτιμητέο να επιτευχθεί η επιθυμητή δυναμική συμπεριφορά, με όσο το δυνατό λιγότερους επενεργούμενους βαθμούς ελευθερίας.

Κατά συνέπεια το τελικό σύστημα χαρακτηρίζεται ως υπο-επενεργούμενο, αφού επιλέγεται να μην υπάρχει επενέργηση στους γραμμικούς βαθμούς ελευθερίας. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα είναι πάντα εφικτό να επιτευχθεί οποιαδήποτε επιθυμητή συμπεριφορά, καθώς ο μόνος έλεγχος που μπορεί να εφαρμοσθεί αφορά τους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας.

6.2.2 Αρχιτεκτονική Νόμου Ελέγχου

Όσον αφορά την αρχιτεκτονική του σχήματος επενέργησης, έχουν προταθεί εξίσου πολυάριθμες υλοποιήσεις. Σε πολλές εργασίες έχουν ενσωματωθεί γραμμικοί ελεγκτές PD οι οποίοι οδηγούν τα σκέλη στις επιθυμητές θέσεις κατά το βηματισμό. Σε συστήματα στα οποία δεν έχει γίνει αναλυτική μοντελοποίηση, ο έλεγχος αυτός προσφέρει ικανοποιητική απόκριση όταν τα κέρδη του βρόχου είναι επαρκώς μεγάλα. Μεγάλα κέρδη όμως οδηγούν σε μεγαλύτερες ροπές όταν η απόκλιση από την κατάσταση-στόχο είναι μεγάλη, επομένως συνήθως τέτοια σχήματα ελέγχου δεν πλεονεκτούν από πλευράς ενεργειακής κατανάλωσης. Ακόμα, παρουσιάζουν το επιπλέον χαρακτηριστικό ότι δεν εκμεταλλεύονται την παθητική δυναμική των υπό έλεγχο συστημάτων, αλλά αντίθετα επιβάλλουν στο σύστημα την δική τους συμπεριφορά.

Για τους παραπάνω λόγους και δεδομένων των στόχων του σχεδιασμού δίποδων ρομπότ, έχει επικρατήσει ο έλεγχος βασισμένος στο μοντέλο (Model Based Control), ο οποίος και έχει επιλεγεί στο πλαίσιο της εργασίας αυτής. Ο βασισμένος σε μοντέλο έλεγχος γενικά εκμεταλλεύεται τη γνώση των δυναμικών εξισώσεων ενός μοντέλου, συμπληρώνοντας ή αφαιρώντας, μέσω της επενέργησης, όρους που τελικά διαμορφώνουν την δυναμική του συστήματος κατά τον επιθυμητό τρόπο. Αυτό το σχήμα ελέγχου μελετάται αρχικά ως προς την επάρκειά του προς μετατροπή του συστήματος σε ευσταθές.

Για την εξασφάλιση όμως της ευστάθειας του βηματισμού, αποδεικνύεται ότι είναι απαραίτητη η προσθήκη βιοθητικών όρων, οι οποίοι θα διορθώνουν μεγάλες αποκλίσεις της πραγματικής από την επιθυμητή κατάσταση. Για τους λόγους που αναφέρθηκαν, προτιμήθηκε η επέκταση του σχήματος ελέγχου με την προσθήκη μη γραμμικών όρων PD, οι οποίοι θα επεμβαίνουν μόνο όταν το σφάλμα κατάστασης είναι επαρκώς μεγάλο. Αυτή η προσέγγιση μελετάται σε δεύτερο στάδιο.

6.2.3 Έλεγχος Βασισμένος στην Παθητική Δυναμική

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε ανάλυση της παθητικής δυναμικής του ρομπότ και της συμπεριφοράς που αυτή επιβάλλει κατά την κατάβαση κεκλιμένων επιπέδων. Αυτές οι γνώσεις είναι χρήσιμες κατά το σχεδιασμό σχημάτων ελέγχου βασισμένων σε μοντέλο.

Συγκεκριμένα, από τις δυναμικές εξισώσεις του μοντέλου είναι δυνατό να εντοπισθούν οι όροι τους οποίους συνεισφέρει η βαρύτητα κατά το παθητικό περπάτημα σε γωνία κλίσης α . Αυτοί οι όροι βρίσκονται στο διάνυσμα \mathbf{G} των δυναμικών εξισώσεων:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g\{(M+m)[r \sin a + (L_1 - r) \sin(a - \theta)] + m[r \sin a + (l - r) \sin(a - \theta)]\} \\ g(M+m)\cos(a - \theta) \\ gm(L_2 - l)\sin(a + \psi) \\ -gm\cos(a + \psi) \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

Όταν ο βηματισμός εκτελείται στο οριζόντιο επίπεδο, η γωνία α λαμβάνει μηδενική τιμή, επομένως η συνεισφορά της βαρύτητας στις δυναμικές εξισώσεις είναι:

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{G}(\mathbf{q})|_{\alpha=0} = \begin{bmatrix} g\{(M+m)[(L_1 - r) \sin(-\theta)] + m[(l - r) \sin(-\theta)]\} \\ g(M+m)\cos(-\theta) \\ gm(L_2 - l)\sin(\psi) \\ -gm\cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

Έστω ότι το σύστημα καλείται να εκτελέσει βηματισμούς στο οριζόντιο επίπεδο, με όσο το δυνατό πλησιέστερη συμπεριφορά της κατάστασής του σε αυτή που θα εκτελούσε με παθητικό βηματισμό σε κεκλιμένο επίπεδο. Θα πρέπει με κάποιο τρόπο το μητρώο \mathbf{G}_0 να αντικατασταθεί από το μητρώο \mathbf{G} . Ισοδύναμα, θα πρέπει να βρεθεί διάνυσμα επενέργησης \mathbf{u}_g^* ώστε οι (6-3) και (6-4) να ταυτίζονται:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = 0 \quad (6-3)$$

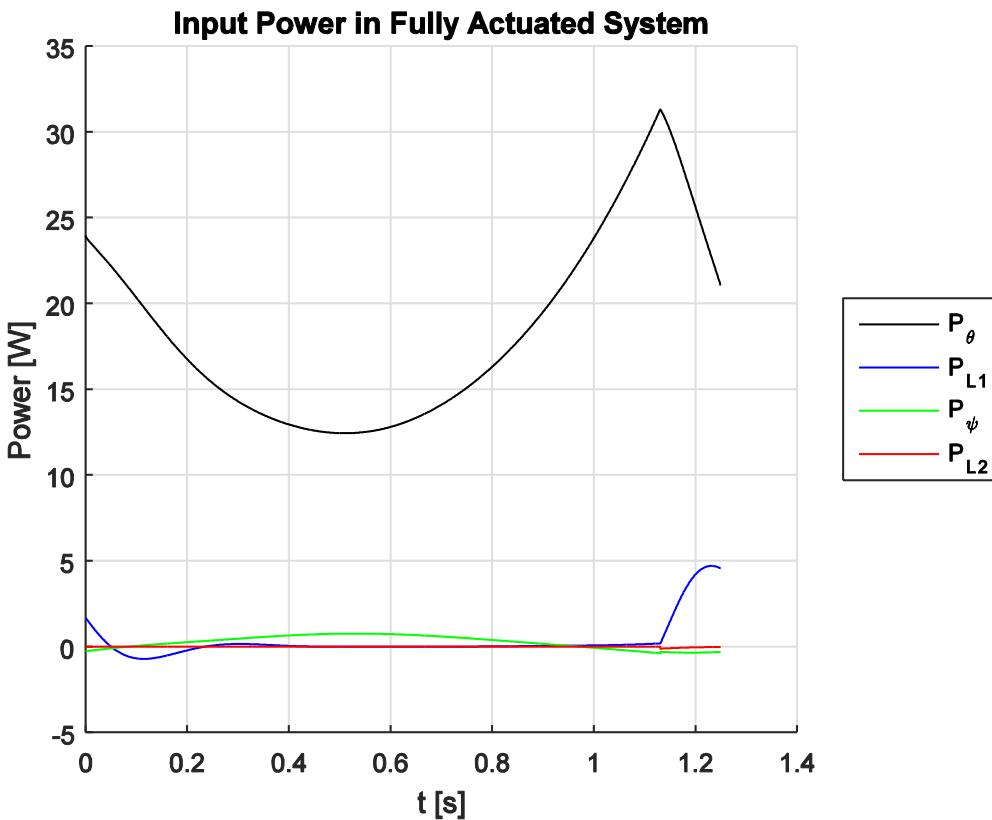
$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_0(\mathbf{q}) = \mathbf{u}_g^* \quad (6-4)$$

Για να ταυτίζονται οι δύο αυτές εξισώσεις, θα πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{u}_g^* = \mathbf{G}_0(\mathbf{q}) - \mathbf{G}(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} u_{g1} \\ u_{g2} \\ u_{g3} \\ u_{g4} \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

Έστω ότι υλοποιείται το σύστημα της (6-4), όπου το διάνυσμα εισόδου \mathbf{u}_g^* ορίζεται από την (6-5). Εάν υπάρχει επενέργηση και στους 4 βαθμούς ελευθερίας, οι όροι του διανύσματος εισόδου αντιστοιχούν σε ροτές και δυνάμεις, και επομένως πολλαπλασιασμός τους με τις αντίστοιχες ταχύτητες, $\dot{\mathbf{q}}$, θα δώσει την ισχύ που προσφέρεται στο σύστημα από τον κάθε όρο επενέργησης.

Στο Σχήμα 6-1 παρουσιάζονται οι ισχείς εισόδου στο θεωρητικό, πλήρως επενεργούμενο σύστημα, όπως προκύπτουν από τις παραπάνω εξισώσεις και υπολογίζονται μέσω προσομοιώσεων του παθητικού μοντέλου σε λειτουργία σταθερού βηματισμού. Οι αδιάστατες παράμετροι του μοντέλου έχουν λάβει για τις προσομοιώσεις τις ονομαστικές τιμές που ορίζει ο Πίνακας 4-2.



Σχήμα 6-1: Θεωρητικές ισχείς εισόδου σε πλήρως επενεργούμενο σύστημα σε οριζόντιο επίπεδο, για πλήρη αναπαραγωγή του παθητικού βηματισμού στο κεκλιμένο επίπεδο.

Από το διάγραμμα αυτό είναι φανερό ότι η ισχύς που εισάγεται στο σύστημα μέσω της επενέργησης του σκέλους στήριξης, P_θ , είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες εισόδους ισχύος στο σύστημα. Αυτό συνεπάγεται ότι οι υπόλοιποι επενεργητές δεν συνεισφέρουν εξίσου σημαντικά στο σύστημα, και επομένως η ενσωμάτωσή τους στο μοντέλο μπορεί να παραληφθεί. Φυσικά κατά τον βηματισμό πολλών βημάτων, τα σκέλη εναλλάσσονται μεταξύ τους ως προς τον ρόλο τους, επομένως δεν είναι δυνατό να μην ενσωματωθεί επενέργηση και στους δύο στροφικούς βαθμούς ελευθερίας, άρα η τοποθέτηση κινητήρα στην γωνία ψ δεν μπορεί να παραληφθεί κατασκευαστικά. Όμως το Σχήμα 6-1 αποδεικνύει ότι η εισαγωγή επενέργησης στους γραμμικούς βαθμούς ελευθερίας δεν είναι υψηστης σημασίας στην ενεργειακή ισορροπία του συστήματος.

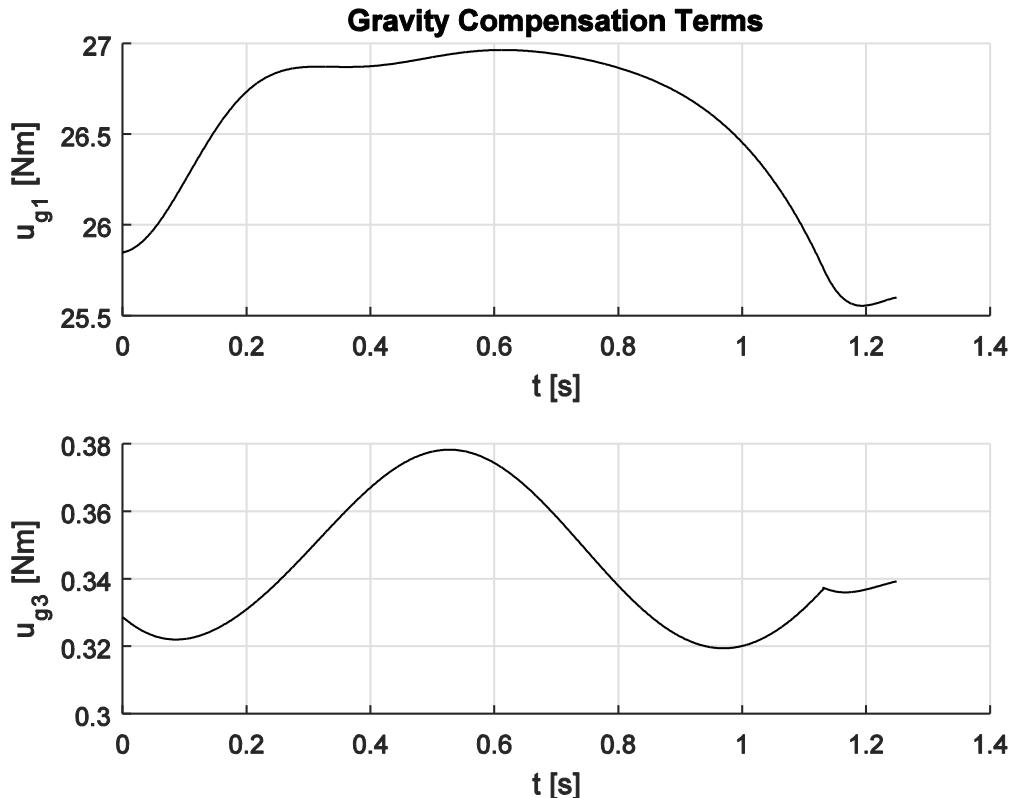
Αφού έχει αποφασιστεί ότι δεν θα υπάρξει επενέργηση στους γραμμικούς βαθμούς ελευθερίας, οι όροι u_{g2} και u_{g4} θα είναι μηδέν στο διάνυσμα επενέργησης u_g που τελικά θα εφαρμοσθεί στο σύστημα. Αυτό φυσικά θα έχει ως αποτέλεσμα η δυναμική που θα επιτευχθεί στο επενεργούμενο σύστημα οριζοντίου επιπέδου να μην ταυτίζεται πλήρως με την αντίστοιχη παθητική δυναμική κεκλιμένου επιπέδου. Σε επόμενη ενότητα θα εξεταστεί η απόκλιση που τελικά υπάρχει ανάμεσα σε επενεργούμενο και παθητικό μοντέλο.

Όσον αφορά στους όρους στροφικής επενέργησης, είναι χρήσιμο να βρεθεί η μορφή τους. Για το σκοπό αυτό εκτελέστηκαν προσομοιώσεις στο παθητικό περπάτημα σε γωνία κλίσης α και καταγράφηκαν οι όροι u_{g1} και u_{g3} .

$$u_{g1} = g[(M+m)[(L_1 - r)(\sin(-\theta) - \sin(a-\theta)) - r \sin a] + m[(l-r)(\sin(-\theta) - \sin(a-\theta)) - r \sin a]] \quad (6-6)$$

$$u_{g3} = gm(L_2 - l)[\sin(\psi) - \sin(a+\psi)] \quad (6-7)$$

Στο Σχήμα 6-2 έχουν καταγραφεί οι όροι αυτοί, οι οποίοι είναι απαραίτητοι ώστε να διορθώσουν τους βαρυτικούς όρους, ως συνάρτηση του χρόνου κατά τη διάρκεια ενός βήματος, όταν οι παράμετροι του μοντέλου βρίσκονται στις ονομαστικές τιμές τους, και εδώ όπως τις παρουσιάζει ο Πίνακας 4-2.



Σχήμα 6-2: Συμπληρωματικοί όροι επενέργησης για την αντιστάθμιση της βαρύτητας στο οριζόντιο επίπεδο.

Παρατηρείται ότι οι όροι u_{g1} που αφορούν στη γωνία θ του σκέλους στήριξης είναι κατά δύο περίπου τάξεις μεγέθους μεγαλύτεροι των όρων u_{g3} που αφορούν στη γωνία ψ του ελεύθερου σκέλους.

Δεδομένων των περιορισμών που έχουν ληφθεί ως προς την απουσία επενέργησης στους γραμμικούς βαθμούς ελευθερίας, είναι σημαντικό να εισάγονται στο σύστημα ροπές όσο το δυνατό πιο όμοιες με αυτές που ορίζουν οι όροι u_{g1} και u_{g3} , ώστε να υπάρχει καλύτερη ταύτιση παθητικού με ενεργητικό περπάτημα. Η είσοδος \mathbf{u}_g που ιδανικά εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτή είναι πράγματι βασισμένη στην παθητική δυναμική, καθώς η μορφή εισόδου στο σύστημα λαμβάνεται μέσω της μελέτης του παθητικού περπατήματος. Αυτή η είσοδος γράφεται τελικά:

$$\mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} u_{g1} \\ 0 \\ u_{g3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

6.2.4 Στροφική επενέργηση

Επενέργηση με έναν κινητήρα

Μία πρώτη προσέγγιση στο ζήτημα της στροφικής επενέργησης είναι η προσθήκη ενός κινητήρα στη θέση της άρθρωσης του ισχίου, ο οποίος θα εδράζεται στα δύο σκέλη του μοντέλου. Σε αυτή τη περίπτωση η ροπή που θα παρέχεται στα δύο σκέλη θα είναι η ίδια, και θα είναι αυτή που θα αναπτύσσεται μεταξύ του δρομέα και του στάτη του κινητήρα. Οι δυναμικές εξισώσεις του μοντέλου θα λάβουν τότε την μορφή (χωρίς βλάβη της γενικότητας αναγράφονται εδώ στη φάση προώθησης):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \quad (6-9)$$

Όπως φαίνεται όμως από το Σχήμα 6-2, για την όσο το δυνατό ακριβέστερη αναπαράσταση του παθητικού βηματισμού, πρέπει να εισαχθούν στο σύστημα σημαντικά διαφορετικές ροπές στους δύο βαθμούς ελευθερίας. Η διαφορά στην τάξη μεγέθους των δύο όρων u_{g1} και u_{g3} είναι μεγάλη και η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος θα μεταβληθεί πολύ εάν εφαρμοσθεί μία τιμή κοινή και για τις δύο εισόδους: το σύστημα δεν θα συμπεριφέρεται πλέον με τα χαρακτηριστικά του παθητικού βηματισμού. Αυτήν την εργασία ενδιαφέρει η αναπαράσταση του παθητικού περπατήματος σε οριζόντιο επίπεδο, επομένως η λύση αυτή, αν και τεχνολογικά ευκολότερη, απορρίπτεται.

Επενέργηση με δύο κινητήρες, στον αστράγαλο και στο ισχίο

Σε πολλές μελέτες που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της διαφορετικής επενέργησης στα δίποδα ρομπότ, επιλέγεται η λύση προσθήκης ενός κινητήρα στη θέση του αστραγάλου, ο οποίος θα κινεί το σκέλος στήριξης στροφικά, σε σχέση με το έδαφος. Ο δεύτερος κινητήρας τοποθετείται στη θέση του ισχίου και συνδέει τα δύο σκέλη, επιτρέποντας έτσι την ανεξαρτησία των κινήσεων σκέλους στήριξης και ελεύθερου σκέλους.

Μία τέτοια πρακτική είναι εύκολα υλοποιήσιμη εάν το μοντέλο περιλαμβάνει βαθμό ελευθερίας στον αστράγαλο και επίπεδο πέλμα. Τότε το πέλμα βρίσκεται σε συνεχή επαφή με το έδαφος και ο κινητήρας στον αστράγαλο μπορεί να επενεργήσει στο σύστημα. Σε αντίθετη περίπτωση, η υλοποίηση αυτού του σχήματος παρουσιάζει τεχνικές δυσκολίες, σχετικές με την προσαρμογή του ενός άκρου του κινητήρα στο έδαφος, σε νέα θέση σε κάθε νέο βήμα.

Αν και η μελέτη προσανατολίζεται στην επίτευξη ανεξάρτητων κινήσεων στα δύο σκέλη, επειδή το συγκεκριμένο μοντέλο που μελετάται δεν περιλαμβάνει τον βαθμό ελευθερίας στον αστράγαλο, η λύση αυτή δεν είναι εφικτή και δεν θα εφαρμοσθεί στη συνέχεια.

Επενέργηση με δύο κινητήρες, ανάμεσα σε κάθε σκέλος και σε ενδιάμεσο σύνδεσμο

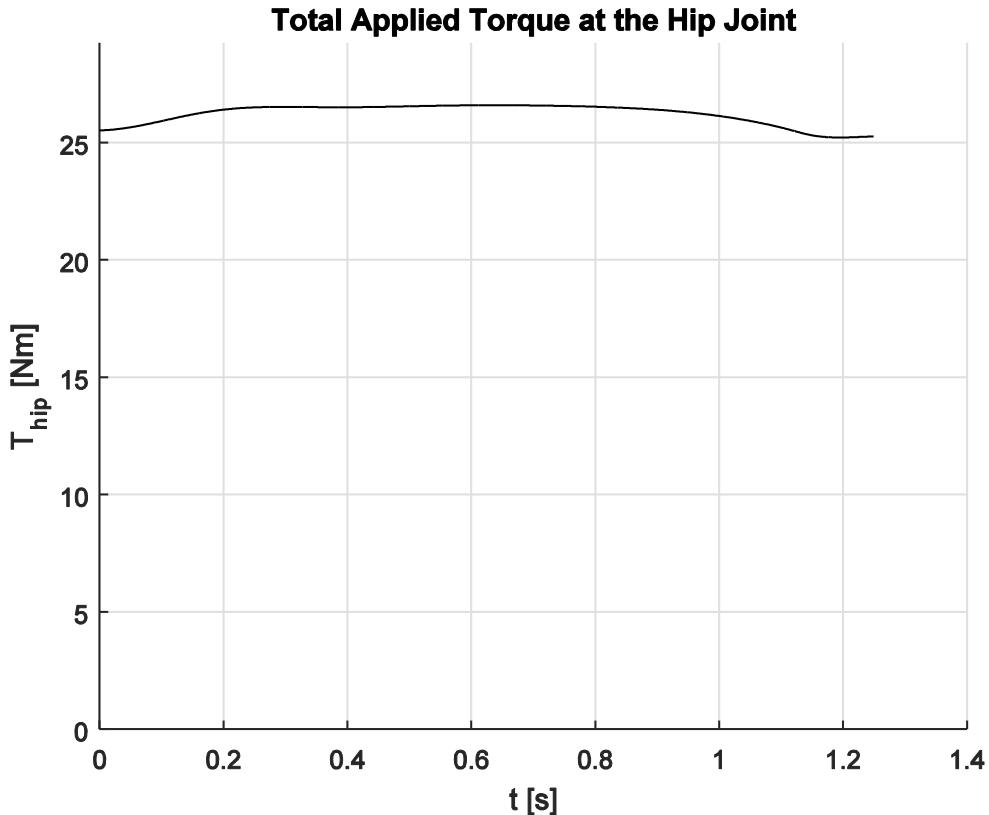
Για να επιτευχθεί η επιθυμητή σε κάθε σκέλος επενέργηση, είναι δυνατή η προσάρτηση των δύο κινητήρων σε ενδιάμεσο σύνδεσμο, ο οποίος θα βρίσκεται στη θέση του ισχίου ανάμεσα στα δύο σκέλη. Στην πραγματικότητα, μια τέτοια υλοποίηση απαντάται και στον άνθρωπο, όπου ο κορμός προβάλλει την απαραίτητη κάθε φορά αντίσταση για να αναπτυχθεί ροπή σε κάθε πόδι, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει την ανεξάρτητη κίνηση των ποδιών.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, ο ενδιάμεσος σύνδεσμος θα παραλαμβάνει τις αντιδράσεις των επιθυμητών σε κάθε σκέλος ροπών, η συνισταμένη των οποίων, T_{hip} , ορίζεται με ανθωρολογιακή φορά και δίνεται από τη σχέση:

$$T_{hip} = u_{g1} - u_{g3} \quad (6-10)$$

Τα πρόσημα των όρων στην (6-10) έχουν προκύψει με βάση τη θετική φορά ορισμού των γωνιών θ και ψ , και δεδομένου ότι η T_{hip} πρόκειται για την συνισταμένη αντίδραση των αναγκαίων στα σκέλη ροπών.

Στο διάγραμμα που ακολουθεί σημειώνεται η συνισταμένη ροπή T_{hip} στον κεντρικό σύνδεσμο του ισχίου, για αναπαραγωγή του σταθερού βηματισμού του ονομαστικού μοντέλου όπως το ορίζει ο Πίνακας 4-2, σε οριζόντιο επίπεδο.



Σχήμα 6-3: Συνισταμένη ροπή αντίδρασης κινητήρων για ένα βήμα κατά τον ονομαστικό βηματισμό σε οριζόντιο επίπεδο.

Παρατηρείται ότι η T_{hip} έχει σχεδόν σταθερή τιμή για το συγκεκριμένο βηματισμό, με μικρές διακυμάνσεις κατά τη διάρκεια του βήματος. Επομένως, εάν ο σύνδεσμος έχει ροπή αδράνειας I_{hip} , θα αρχίσει να περιστρέφεται με σταθερή σχεδόν επιπτάχυνση a_{hip} :

$$T_{hip} = I_{hip}a_{hip} \triangleq I_{hip}\ddot{\theta} \quad (6-11)$$

Στην (6-11) με την μεταβλητή $\ddot{\theta}$ συμβολίζεται η γωνία περιστροφής του κεντρικού συνδέσμου γύρω από τον άξονα του ισχίου. Η γωνία αυτή θα λαμβάνει απείρως μεγάλες τιμές αν η συνισταμένη ροπή στο σύνδεσμο είναι πράγματι σταθερή σε μέγεθος και φορά, καθ' όλη τη διάρκεια του βηματισμού. Θα πρέπει λοιπόν να σταθεροποιηθεί ο κεντρικός σύνδεσμος, εισάγοντας επιπλέον πηγές ροπής σε αυτόν.

6.3 Επαυξημένο Επενεργούμενο Μοντέλο

6.3.1 Μοντελοποίηση

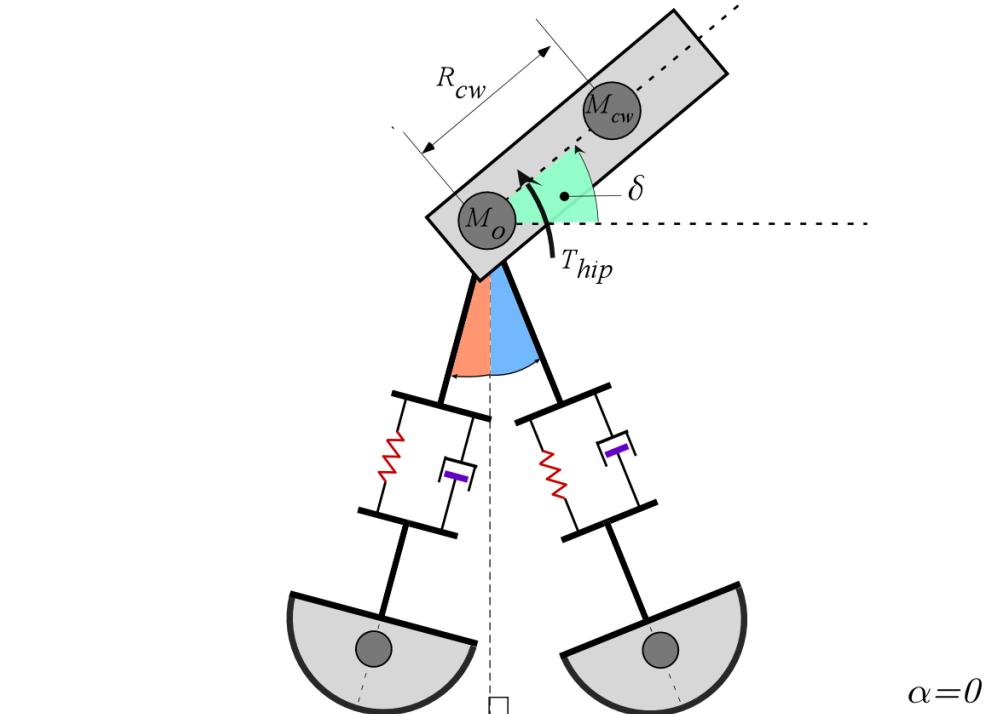
Η πιο εύκολα υλοποιήσιμη λύση για την εισαγωγή μίας επιπλέον ροπής, σχεδόν σταθερή σε μέτρο, είναι η κατασκευή του κεντρικού συνδέσμου ώστε να είναι έκκεντρος ως προς την κατανομή μάζας του. Η κύρια μάζα M στη θέση του ισχίου σε αυτή τη περίπτωση θα αντιστοιχεί στο άθροισμα της κεντρικής σημειακής μάζας, M_o , η οποία θα βρίσκεται πάνω στον άξονα του ισχίου, και της έκκεντρης μάζας του αντίβαρου, M_{cw} :

$$M = M_0 + M_{cw} \quad (6-12)$$

Η έκκεντρη μάζα M_{cw} θα βρίσκεται σε απόσταση R_{cw} και θα σχηματίζει γωνία δ με το επίπεδο στο οποίο εκτελείται ο βηματισμός. Άρα θα δημιουργεί κάθε στιγμή ροπή:

$$T_{cw} = gM_{cw}R_{cw} \cos(\delta) \quad (6-13)$$

Το επαυξημένο μοντέλο που περιγράφεται από τα παραπάνω παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-4.



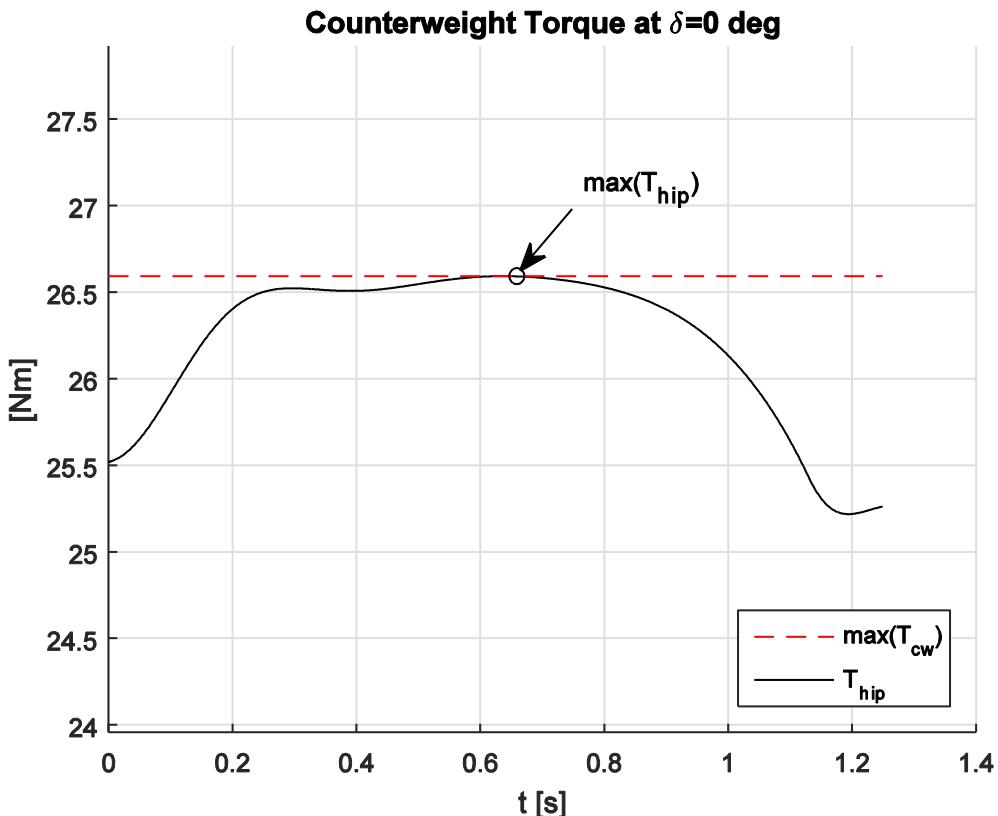
Σχήμα 6-4: Σχηματική παράσταση του επαυξημένου επενεργούμενου μοντέλου.

Εάν επιτευχθεί περιορισμός της μεταβολής της γωνίας δ σε επαρκώς μικρό διάστημα τιμών, τότε η ροπή που δημιουργεί το αντίβαρο θα είναι σχεδόν σταθερή σε μέτρο και φορά. Επομένως είναι δυνατό να βρεθούν συνδυασμοί M_{cw} και R_{cw} ώστε οι γωνιακές ταλαντώσεις της δ να φράσσονται και η δημιουργούμενη ροπή στον άξονα να αντισταθμίζει την αντίδραση των κινητήρων.

Η μέγιστη ροπή που προκαλείται από το μηχανισμό του αντίβαρου επιτυγχάνεται για $\delta=0^\circ$. Ως σχεδιαστική προδιαγραφή θα ληφθεί η ισοδυναμία αυτής της μέγιστης ροπής με την μέγιστη ροπή που ασκείται στον σύνδεσμο από τους κινητήρες:

$$\max(T_{cw}) = T_{cw}|_{\delta=0} = gM_{cw}R_{cw} \triangleq \max(T_{hip}) = \max(u_{g1} - u_{g3}) \quad (6-14)$$

Η επιλογή αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-5, σε σύγκριση με την μεταβολή της T_{hip} κατά τον σταθερό βηματισμό ονομαστικών παραμέτρων.



Σχήμα 6-5: Επιλογή ροπής αντίβαρου για σταθερό βηματισμό ονομαστικών συνθηκών σε οριζόντιο επίπεδο.

Ο μηχανισμός του αντιβάρου σε συγκεκριμένη θέση παρέχει στο κεντρικό σύνδεσμο σταθερή ροπή, ενώ η ροπή από τους κινητήρες μεταβάλλεται διαρκώς. Επομένως το αντίβαρο δεν μπορεί να παραμείνει σε μία θέση, καθώς η συνισταμένη ροπή σε αυτό θα μεταβάλλεται κατά τον βηματισμό, επιταχύνοντας ή επιβραδύνοντάς το. Η δυναμική αυτή θα πρέπει να μοντελοποιηθεί ώστε να εκτελεσθούν νέες προσομοιώσεις και να εξετασθεί η αποτελεσματικότητα της χρήσης του μηχανισμού του αντίβαρου για την αντιστάθμιση της ροπής των κινητήρων.

6.3.2 Δυναμικές Εξισώσεις

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το νέο μοντέλο αποτελούν επαύξηση των εξισώσεων για το παθητικό μοντέλο. Το μοντέλο περιγράφεται εδώ για τη φάση προώθησης, ενώ οι αντίστοιχες εξισώσεις της φάσης διπλής στήριξης περιέχουν και τους όρους του διανύσματος περιορισμών $\mathbf{f}_{\text{constr.}}$ καθώς και τους περιορισμούς s , όπως ακριβώς στην (3-9).

Οι εξισώσεις του συστήματος αναγράφονται στην (6-15). Οι όροι που προϋπήρχαν για την περιγραφή του παθητικού μοντέλου (άνω 4×4 σύστημα) δεν έχουν μεταβληθεί και δεν θα επαναδιατυπωθούν. Οι νέοι όροι, μερικοί εκ των οποίων αντιστοιχούν στη δυναμική του νέου κεντρικού συνδέσμου, ενώ άλλοι συμπλέκουν μεταξύ τους τα δύο υποσυστήματα, διατυπώνονται στη συνέχεια:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}_g \quad (6-15)$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{L}_1 \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{L}_2 \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{L}_1 \\ \dot{\psi} \\ \dot{L}_2 \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{g1} \\ 0 \\ u_{g3} \\ 0 \\ u_{g1} - u_{g3} \end{bmatrix}$$

$$m_{15} = -M_{cw}R_{cw}[(L_1 - r)\sin(\delta + \theta) + r\sin(\delta)]$$

$$m_{25} = M_{cw}R_{cw}\cos(\delta + \theta)$$

$$m_{35} = 0$$

$$m_{45} = 0$$

$$m_{55} = M_{cw}R_{cw}^2$$

$$c_{15} = -M_{cw}R_{cw}[(L_1 - r)\cos(\delta + \theta) + r\cos\delta]\dot{\delta}$$

$$c_{25} = -M_{cw}R_{cw}\sin(\delta + \theta)\dot{\delta}$$

$$c_{35} = 0$$

$$c_{45} = 0$$

$$c_{55} = 0$$

$$c_{51} = -M_{cw}R_{cw}(L_1 - r)\cos(\delta + \theta)\dot{\theta}$$

$$c_{52} = -2M_{cw}R_{cw}\sin(\delta + \theta)\dot{\theta}$$

$$c_{53} = 0$$

$$c_{54} = 0$$

$$k_5 = 0$$

$$g_5 = gM_{cw}R_{cw}\cos(\alpha + \delta)$$

Από τη μελέτη της τελευταίας εξίσωσης, παρατηρείται ότι εάν ο βαρυτικός όρος g_5 , που αντιστοιχεί στην ροπή του αντίβαρου, είναι κοντά αριθμητικά στον όρο εισόδου T_{hip} , τότε οι όροι επιτάχυνσης της γωνίας δ θα παραμένουν μικροί, καθώς δεν θα υπάρχει αρκετή ροπή για να επιταχύνει το σύνδεσμο. Μάλιστα, μεγαλύτεροι όροι m_{55} θα περιορίζουν ακόμα περισσότερο την γωνιακή επιτάχυνση του κεντρικού συνδέσμου, καθώς η αυξημένη αδράνεια που ορίζουν θα εμποδίζει την μεταβολή της κινητικής του κατάστασης. Περιορισμός των επιταχύνσεων επίσης περιορίζει τους όρους ταχύτητας και μετατόπισης, περιορίζοντας έτσι και την επίδραση που έχει αυτός ο βαθμός ελευθερίας στις υπόλοιπες εξισώσεις κατάστασης, αποσυμπλέκοντας δηλαδή τα δύο υποσυστήματα.

Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι η μελέτη του παθητικού 4x4 συστήματος μπορεί να φανεί χρήσιμη στο 5x5 επαυξημένο σύστημα, καθώς αν βρεθεί λύση που να σταθεροποιεί τον πέμπτο βαθμό ελευθερίας σε μικρές τιμές, το υποσύστημα 4x4 δεν θα επηρεάζεται σημαντικά. Με βάση αυτή την παρατήρηση, η αναζήτηση για τις λύσεις σταθερού βηματισμού για το επαυξημένο σύστημα εκκίνησε από τις ήδη υπάρχουσες λύσεις για το παθητικό σύστημα, με μηδενικές αρχικές συνθήκες για τον βαθμό ελευθερίας της γωνίας δ . Η νέα συνάρτηση βηματισμού εμπεριέχει πλέον την είσοδο

u_g , και είναι αυτή που χρησιμοποιείται με βάση την (2-29) για τον προσδιορισμό των νέων σταθερών σημείων.

6.3.3 Σφάλμα Ανάδρασης

Σε επενεργούμενα συστήματα, των οποίων η επενέργηση εξαρτάται από την κατάστασή τους, είναι απαραίτητη η χρήση αισθητήρων ώστε να υπολογίζεται κάθε φορά η κατάλληλη είσοδος.

Οι αισθητήρες όμως εισάγουν στις μετρήσεις κατάστασης ένα σφάλμα, το οποίο μπορεί να επηρεάσει την απόκριση του συστήματος, ειδικά σε περιπτώσεις όπου ο έλεγχος είναι βασισμένος σε μοντέλο, όπως εδώ. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να μοντελοποιηθεί στατιστικά αυτό το σφάλμα ανάδρασης και να μελετηθεί η συμπεριφορά του ελεγκτή, άρα και του συστήματος, υπό την επίδρασή του.

Στο μοντέλο επενέργησης (6-8), οι μεταβλητές που συμμετέχουν είναι οι δύο γωνίες και τα δύο μήκη των σκελών. Ιδανικά λοιπόν θα πρέπει να υπάρχει ανάδραση στις δύο γωνίες και στα δύο μήκη, και συνεπώς πρέπει να επιλεχθούν οι αντίστοιχοι κωδικοποιητές.

Για τις γωνίες, υποτίθεται παλμογεννήτρια (encoder) 2048 θέσεων. Το σφάλμα που προστίθεται σε κάθε μέτρηση έχει στατιστικό χαρακτήρα, με μέγιστη πιθανή τιμή το μισό της διακριτικής ικανότητας του οργάνου. Επομένως για τη μέση τιμή μ_a και την τυπική απόκλιση σ_a της κατανομής του γωνιακού σφάλματος θα ισχύει:

$$\mu_a = 0^\circ \quad (6-16)$$

$$\sigma_a = \frac{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{360^\circ}{2048} \right) \right]}{3} \quad (6-17)$$

Για τα μήκη, επιλέχθηκε γραμμική παλμογεννήτρια 1000 θέσεων ανά 25.4 [mm] (1 inch). Κατ' αυτόν τον τρόπο το σφάλμα θα έχει μέση τιμή μ_l και τυπική απόκλιση σ_l :

$$\mu_l = 0 \quad (6-18)$$

$$\sigma_l = \frac{1}{2} \left(\frac{0.0254[m]}{1000} \right) \quad (6-19)$$

6.3.4 Σταθερός Επενεργούμενος Βηματισμός

Για τις επόμενες προσομοιώσεις αυτής της ενότητας, το μήκος R_{cw} της θέσης του αντίβαρου έχει ληφθεί με δοκιμές ώστε να εξασφαλίζεται η επαναληψιμότητα στον βηματισμό:

$$R_{cw} = 0.5m \quad (6-20)$$

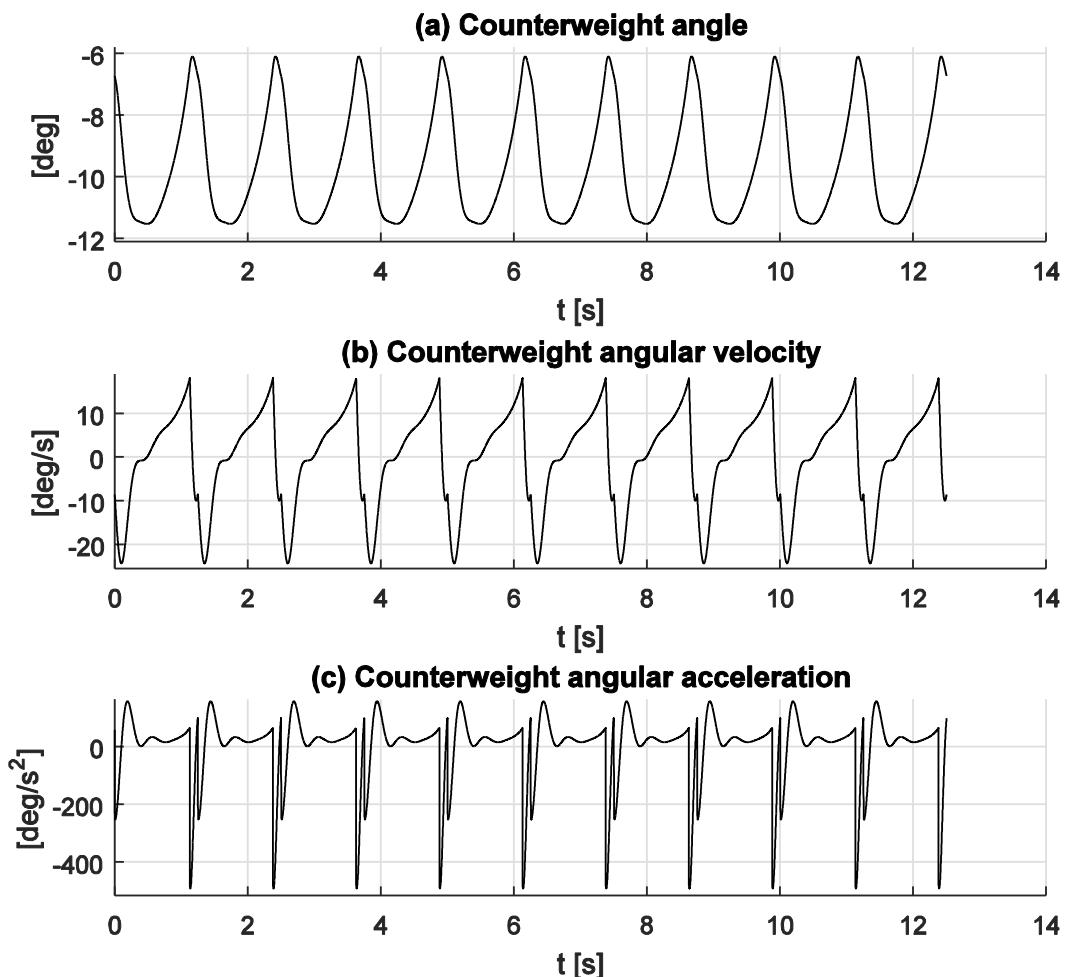
Η αντίστοιχη τιμή για τη μάζα M_{cw} προκύπτει από την (6-14) για το βηματισμό αυτό:

$$M_{cw} = 4.11kg \quad (6-21)$$

Το επαυξημένο σύστημα που περιγράφεται από τις (6-15),(6-20) και (6-21), με τιμές των αδιάστατων παραμέτρων όπως ορίζει ο Πίνακας 4-2, με μηδενική όμως γωνία κλίσης εδάφους α , και με τα στατιστικά σφάλματα ανάδρασης όπως αυτά προκύπτουν από τις (6-16)-(6-19), έχει πράγματι επαναλαμβανόμενη λύση η οποία αποτελεί το σταθερό σημείο του. Στον σταθερό αυτό βηματισμό εκτελέσθηκαν προσομοιώσεις, στις οποίες το επενεργούμενο δίποδο εκτέλεσε με επιτυχία 200 συνεχόμενα βήματα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Δυναμική Συμπεριφορά Γωνίας Κεντρικού Συνδέσμου

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση της συμπεριφοράς της μεταβλητής δ κατά τη διάρκεια αυτών των βημάτων, καθώς οι υπόλοιπες μεταβλητές έχουν ήδη μελετηθεί στο παθητικό μοντέλο. Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η μεταβολή της γωνίας δ , καθώς και η ταχύτητα και η επιπτάχυνσή της, για χρονικό διάστημα 10 βημάτων:



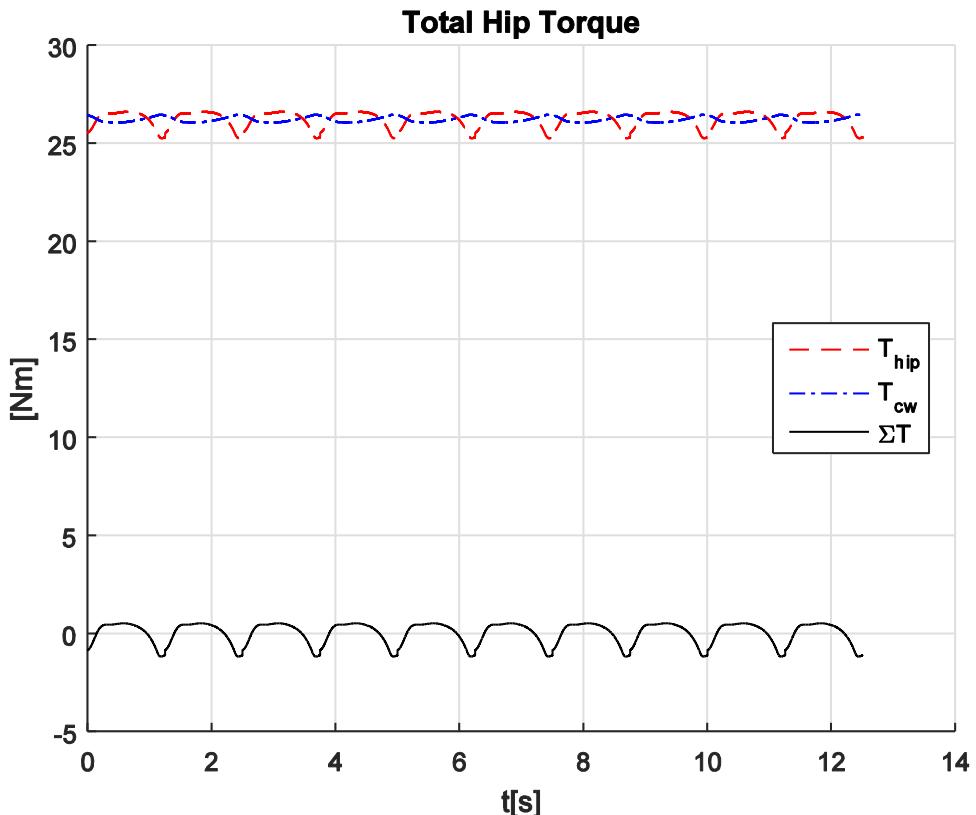
Σχήμα 6-6: Κατάσταση κεντρικού συνδέσμου ισχίου για σταθερό επενεργούμενο βηματισμό ονομαστικού σημείου σε οριζόντιο επίπεδο.

Από το Σχήμα 6-6 (a) παρατηρείται ότι ο σύνδεσμος παρουσιάζει κατά το βηματισμό ταλάντωση περιορισμένου εύρους, με διακύμανση μικρότερη από 6° . Αυτή η φραγμένη κίνηση είναι που επιτρέπει το περπάτημα στο οριζόντιο επίπεδο με την ιδιαιτερότητα της διαφορετικής επενέργησης σε κάθε σκέλος.

Συνισταμένη Ροπή στον Κεντρικό Σύνδεσμο

Η δυναμική συμπεριφορά του αντίβαρου οδηγεί στην άσκηση μεταβλητής ροπής στο κεντρικό σύνδεσμο. Ως αποτέλεσμα, η συνισταμένη ροπή στον σύνδεσμο αυτό μεταβάλλεται ως το άθροισμα τριών χρονικά μεταβαλλόμενων ροπών: των δύο αντιδράσεων των κινητήρων, συνολικής επίδρασης

T_{hip} , και της ροπής του αντίβαρου T_{cw} . Η συνισταμένη ροπή στο ισχίο, ΣT , κατά τον επενεργούμενο βηματισμό σταθερού σημείου με τις παραμέτρους στις ονομαστικές τους τιμές και σε μηδενική κλίση εδάφους παρουσιάζεται για το ίδιο χρονικό διάστημα 10 βημάτων στο Σχήμα 6-7.



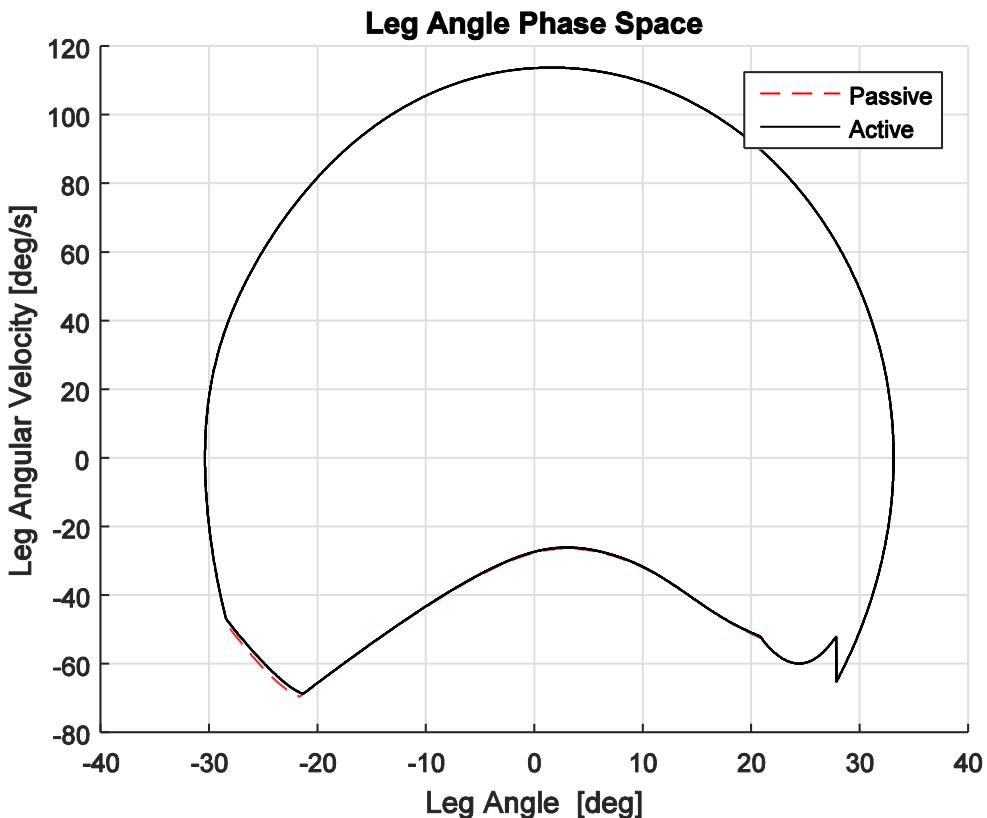
Σχήμα 6-7: Ροπές στον κεντρικό σύνδεσμο του ισχίου κατά το σταθερό επενεργούμενο βηματισμό ονομαστικών παραμέτρων σε οριζόντιο έδαφος.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-7, η προσθήκη του αντιβάρου έχει καταφέρει να ισορροπήσει τον κεντρικό σύνδεσμο, περιορίζοντας την συνισταμένη σε αυτόν ροπή σε μικρές τιμές γύρω από το μηδέν. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ο κεντρικός σύνδεσμος επιταχύνεται και επιβραδύνεται, χωρίς να ξεφεύγει από την φραγμένη περιοδική ταλάντωση που εκτελεί.

Σύγκριση με τον Παθητικό Βηματισμό

Το σχήμα ελέγχου που έχει συζητηθεί και εφαρμόζεται στο σύστημα, εξυπηρετεί την όσο το δυνατό ακριβέστερη αναπαραγωγή του παθητικού βηματισμού κατάβασης κεκλιμένων επιπέδων, από επενεργούμενο βηματισμό σε οριζόντιο επίπεδο. Είναι σημαντικό να διαπιστωθεί η πιστότητα αυτής της αναπαραγωγής, ώστε να είναι δυνατή η επέκταση των συμπερασμάτων που έχουν αποκτηθεί από την παθητική μελέτη στο νέο σύστημα.

Για το σκοπό αυτό στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το διάγραμμα φάσης των γωνιών των σκελών για δύο συνεχόμενα βήματα. Στο διάγραμμα αυτό έχει σημειωθεί τόσο ο παθητικός σταθερός βηματισμός ονομαστικών παραμέτρων, όσο και ο επενεργούμενος βηματισμός που τον «μιμείται».



Σχήμα 6-8: Σύγκριση διαγραμμάτων φάσης παθητικού και επενεργούμενου βηματισμού σταθερού σημείου, στις ονομαστικές τιμές των αδιάστατων παραμέτρων.

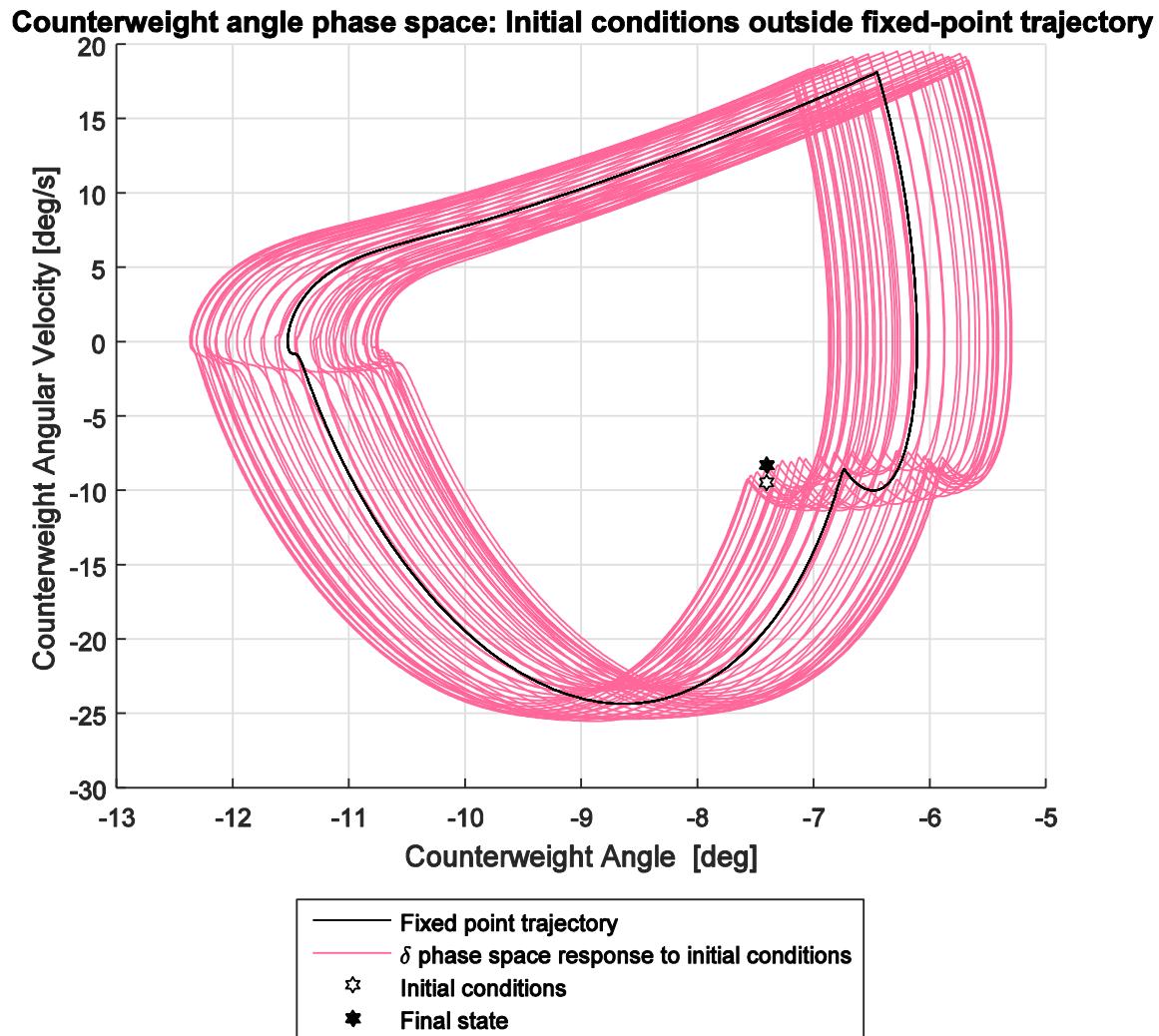
Από το Σχήμα 6-8 είναι εμφανές ότι το επενεργούμενο δίποδο έχει καταφέρει να αναπαράγει με μεγάλη ομοιότητα τον παθητικό βηματισμό. **Το ότι η κατάσταση των γωνιών συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο σε παθητικό και επενεργούμενο μοντέλο είναι αποτέλεσμα της δυναμικής αποσύμπλεξης** του δίποδου από το μηχανισμό του αντιβάρου. Κατά συνέπεια, τα συμπεράσματα που έχουν ληφθεί για το παθητικό βηματισμό μπορούν να επεκταθούν στον επενεργούμενο, χωρίς σημαντικό σφάλμα. Το σχήμα ελέγχου καταφέρνει να διατηρήσει τα χαρακτηριστικά της παθητικής δυναμικής του δίποδου, οδηγώντας σε έναν επενεργούμενο βηματισμό που μοιάζει «φυσικός».

Ευστάθεια βηματισμού

Ο παθητικός βηματισμός έχει μελετηθεί ως προς την ευστάθειά του και έχει βρεθεί ευσταθής. Όμως, παρά την σχετική απεμπλοκή των υποσυστημάτων που έχει παρατηρηθεί από τη μελέτη του επενεργούμενου βηματισμού, **δεν μπορεί να επεκταθεί αυτό το συμπέρασμα ευστάθειας** και σε αυτόν. Ο λόγος είναι **ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας**, ο οποίος **μπορεί να καθιστά το σύστημα ασταθές, ακόμα και εάν οι υπόλοιπες μεταβλητές κατάστασης παρουσιάζουν ευσταθή συμπεριφορά**.

Όπως έγινε και στο παθητικό περπάτημα, και εδώ είναι **δυνατό να ληφθεί ένα πρώτο συμπέρασμα για την ευστάθεια του βηματισμού, μεταβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες και παρατηρώντας την απόκριση στο διάγραμμα φάσης**: εάν η αρχική απόκλιση από την σταθερή τροχιά αποσβέννυται εντός ολίγων βημάτων, ο βηματισμός είναι ευσταθής. Αντίθετα, εάν το σύστημα αποκλίνει όλο και περισσότερο από τη σταθερή τροχιά του μετά την αρχική απόκλιση, τότε είναι ασταθές.

Στο Σχήμα 6-9 έχει σημειωθεί το διάγραμμα φάσης της κατάστασης που αντιστοιχεί στη γωνία δ , για το σταθερό σημείο του επενεργούμενου ονομαστικού βηματισμού, καθώς και για την απόκριση 50 βήματων, σε αρχικές συνθήκες της κατάστασης δ ελαφρώς εκτός της τροχιάς σταθερού σημείου.



Σχήμα 6-9: Απόκριση φάσης γωνίας αντίβαρου επενεργούμενου μοντέλου σε αρχικές συνθήκες εκτός της σταθερής τροχιάς, για μοντέλο σε ονομαστικές συνθήκες.

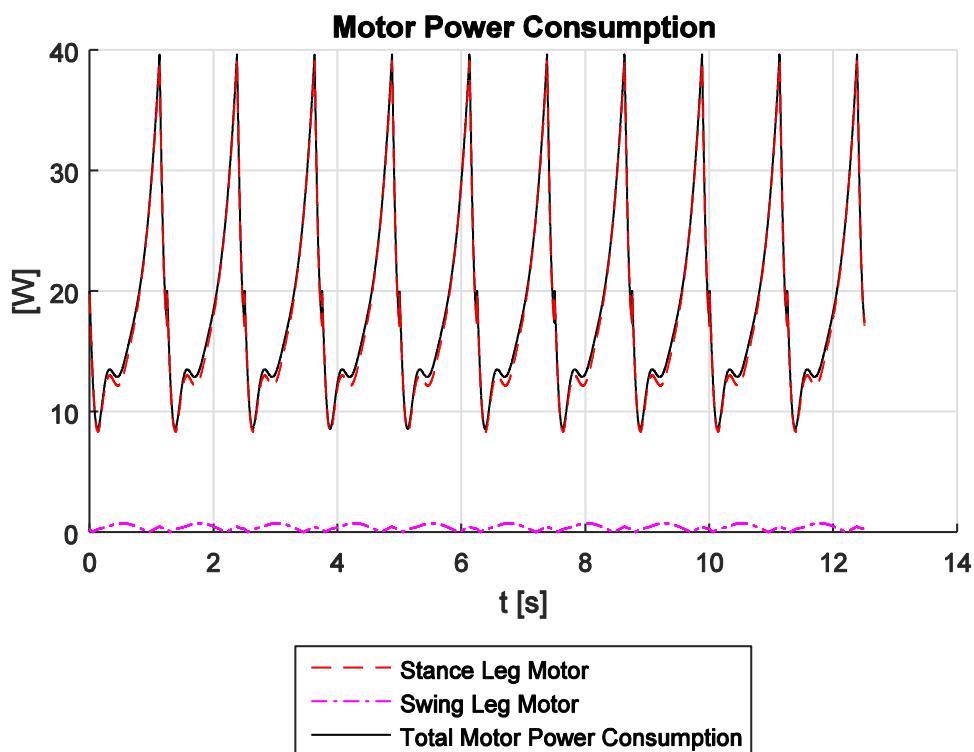
Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-9, η κατάσταση δ δεν επιστρέφει στην σταθερή τροχιά της, αλλά ούτε αποκλίνει στα πρώτα 50 βήματα προς απείρως μεγάλες τιμές. Προσομοιώσεις έδειξαν ότι μετά από 500 περίπου βήματα χάνεται η δυνατότητα διατήρησης της τροχιάς και το δίποδο χάνει την ισορροπία του σημειώνοντας πτώση. Αυτό ερμηνεύεται ως οριακή ευστάθεια, και αναμένεται να παρατηρηθούν ιδιοτιμές οι οποίες θα βρίσκονται ελαφρώς εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Κατανάλωση Ισχύος

Οι κινητήρες που έχουν προσαρτηθεί στο επαυξημένο μοντέλο υπακούν στο νόμο ελέγχου που έχει καθοριστεί και παρέχουν κάθε στιγμή στο δίποδο την απαραίτητη ισχύ. Η ισχύς για κάθε σκέλος, καθώς και η συνολική ισχύς υπολογίζονται κατά τα εξής:

$$\begin{aligned} P_\theta &= \left| u_{g1} (\dot{\theta} + \dot{\delta}) \right| \\ P_\psi &= \left| u_{g3} (\dot{\psi} + \dot{\delta}) \right| \\ P_{in} &= P_\theta + P_\psi \end{aligned} \quad (6-22)$$

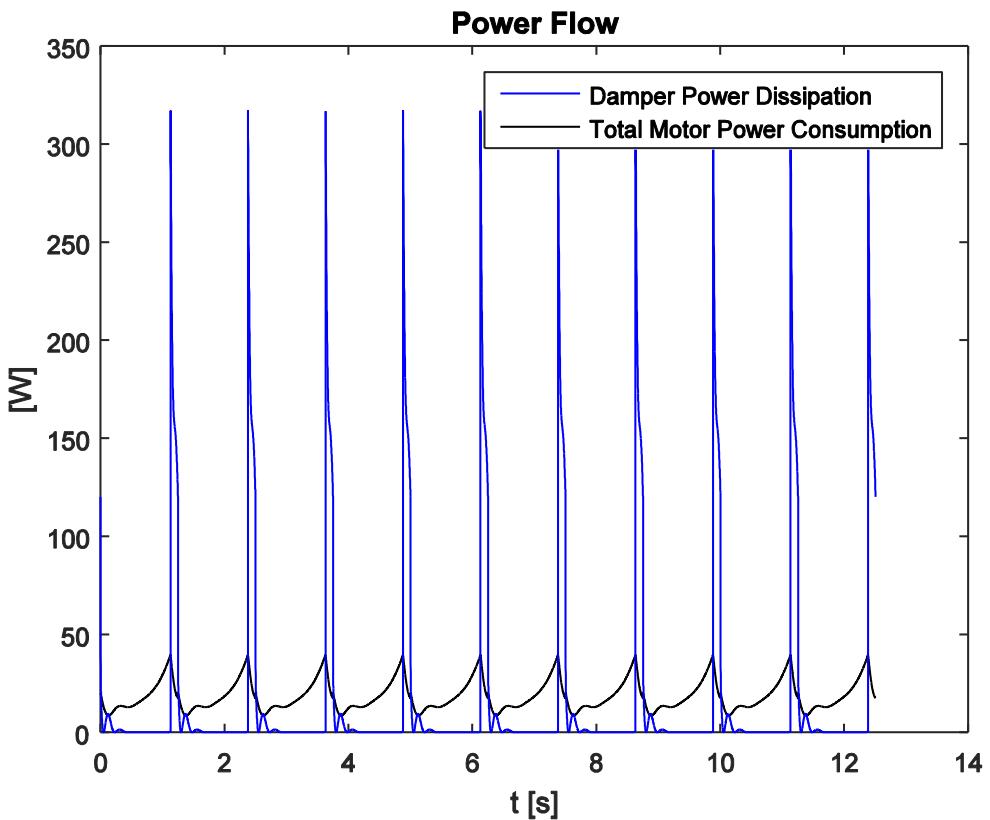
Η απόλοτος τιμή έχει εισαχθεί στις παραπάνω σχέσεις διότι θεωρείται ότι ο κινητήρας δεν αναγεννά ισχύ, δεν συνδέεται δηλαδή με μπαταρία κατά τη λειτουργία του ως γεννήτρια. Στο διάγραμμα που ακολουθεί έχουν σημειωθεί αυτές οι ισχείς κατά τον επενεργούμενο σταθερό βηματισμό οριζοντίου επιπέδου στο δίποδο ονομαστικών παραμέτρων.



Σχήμα 6-10: Ισχύς κινητήρων για σταθερό επενεργούμενο βηματισμό ονομαστικών παραμέτρων σε οριζόντιο επίπεδο.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-11 ισχύς που εισάγεται στο σκέλος στήριξης είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την ισχύ εισόδου στο σκέλος προώθησης, κάτιο το οποίο έχει ήδη παρατηρηθεί στην αρχή του κεφαλαίου.

Ταυτόχρονα, ισχύς εγκαταλείπει το σύστημα καθώς υπάρχουν απώλειες στις αποσβέσεις των σκελών. Το Σχήμα 6-11 παρουσιάζει το προφίλ διάχυσης της ισχύος από τις αποσβέσεις, συγκριτικά με το προφίλ εισόδου ισχύος από τους κινητήρες. Πρόκειται δηλαδή για καταγραφή της ροής ισχύος στο σύστημα.



Σχήμα 6-11: Ροή ισχύος κατά επενεργούμενο σταθερό βηματισμό οριζοντίου επιπέδου, σε ονομαστικές τιμές παραμέτρων.

Παρατηρείται ότι η απώλεια ισχύος συγκεντρώνεται γύρω από το HS, καθώς τότε διεγείρονται οι γραμμικοί βαθμοί ελευθερίας των σκελών, οι οποίοι περιλαμβάνουν τις μοναδικές αποσβέσεις του μοντέλου. Αντίθετα, η είσοδος ενέργειας στο σύστημα γίνεται σταδιακά καθ' όλη τη διάρκεια του βηματισμού, επιταχύνοντας έτσι το δίποδο προς τα εμπρός, μέχρις ότου εκ νέου επιβραδυνθεί λόγω της απότομης απώλειας ενέργειας κατά το HS.

6.4 Διερεύνηση Σχεδιασμού Εκκεντρότητας

Στην προηγούμενη ενότητα επιλέχθηκαν για τις παραμέτρους M_{cw} και R_{cw} του έκκεντρου του κεντρικού συνδέσμου, ορισμένες τιμές οι οποίες προέκυψαν από δοκιμές. Σε αυτήν την ενότητα θα διερευνηθεί η επιλογή αυτή για το μοντέλο ονομαστικών αδιάστατων παραμέτρων, μεταβάλλοντας την τιμή του μήκους R_{cw} και διατηρώντας την ροπή του αντίβαρου σταθερή, μέσω της σχέσεως (6-14).

Οι τιμές στις οποίες θα κυμανθεί η παράμετρος R_{cw} είναι:

$$0.30m \leq R_{cw} \leq 1.46m \quad (6-23)$$

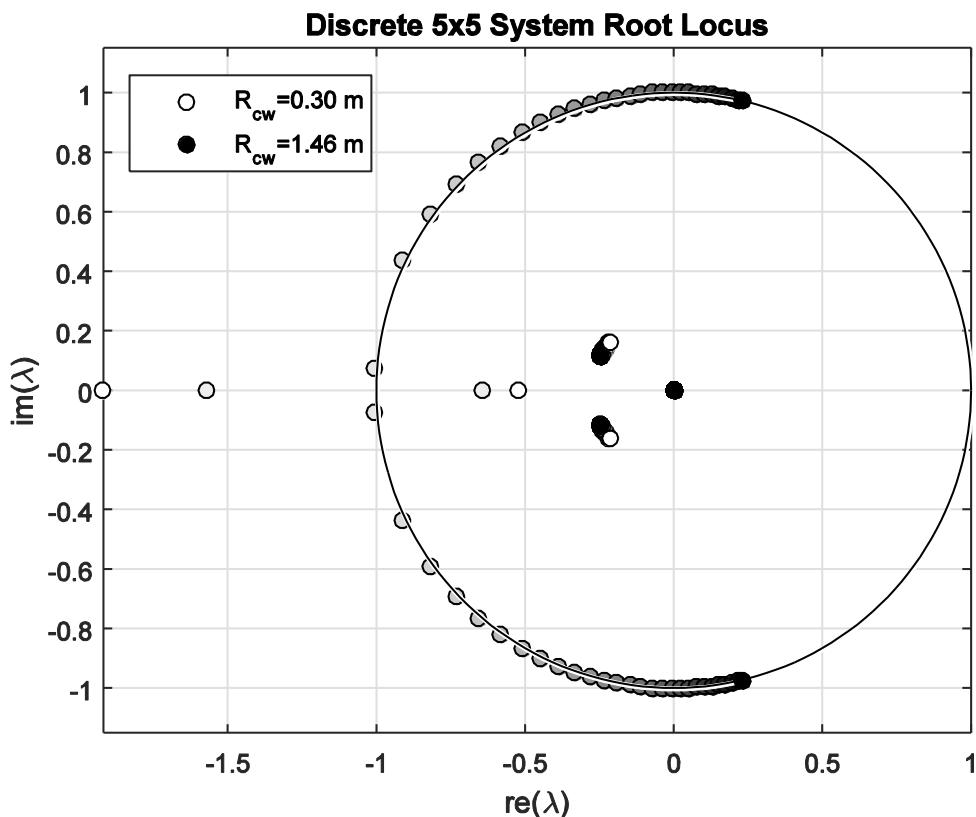
Στα παρακάτω θα μελετηθεί η επίδραση που έχει η τιμή αυτή στα χαρακτηριστικά του βηματισμού που προκύπτει.

6.4.1 Ευστάθεια βηματισμού

Η ευστάθεια της διακριτής συνάρτησης βηματισμού του επενεργούμενου συστήματος προκύπτει μέσω της μεθοδολογίας που έχει ήδη συζητηθεί. Συγκεκριμένα, υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα

Α της (5-5) για το επαυξημένο τώρα σύστημα, και αναζητούνται τα σταθερά σημεία της συνάρτησης βηματισμού.

Οι ιδιοτιμές αυτές για τα σταθερά σημεία που προκύπτουν για μεταβολή της τιμής R_{cw} καταγράφονται στον διακριτό τόπο ριζών που ακολουθεί. Στο Σχήμα 6-12 υπάρχει χρωματικός κώδικας: σκουρότερες αποχρώσεις των σημείων αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές των βηματισμών που προκύπτουν για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου R_{cw} . Στο ίδιο διάγραμμα έχει σημειωθεί ο μοναδιαίος κύκλος για ευκολότερο χαρακτηρισμό της ευστάθειας των ιδιοτιμών. Ιδιοτιμές εκτός του μοναδιαίου κύκλου χαρακτηρίζονται ως ασταθείς. Ιδιοτιμές πάνω στον μοναδιαίο κύκλο χαρακτηρίζονται ως οριακά ευσταθείς, ενώ τέλος ιδιοτιμές εντός του κύκλου είναι ευσταθείς.



Σχήμα 6-12: Τόπος ριζών συνάρτησης βηματισμού για μεταβολή του μήκους αντίβαρου.

Παρατηρείται ότι για μεγαλύτερα μήκη αντίβαρου ο βηματισμός καθίσταται όλο και λιγότερο ασταθής, μέχρις ότου η μεγαλύτερη ιδιοτιμή αγγίζει τον μοναδιαίο κύκλο. Στη συνέχεια, περαιτέρω αύξηση του R_{cw} δεν βελτιώνει την ευστάθεια, και οι λύσεις παραμένουν οριακά ευσταθείς. Αυτό δικαιολογεί το διάγραμμα φάσης της γωνίας δ στο Σχήμα 6-9, η οποία παρουσιάζει διακυμάνσεις γύρω από την ονομαστική τροχιά της. Οι ιδιοτιμές δεν εισέρχονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, καθώς το σύστημα δεν μπορεί να συγκλίνει σε ονομαστική τροχιά. Αυτό οφείλεται στην προσθήκη του συνδέσμου στο ισχίο, ο οποίος δε βρίσκεται σε σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Για να σταθεροποιηθεί πλήρως αυτός ο βαθμός ελευθερίας θα πρέπει να εισαχθεί έλεγχος θέσης ο οποίος θα εμποδίζει την δ από το να αποκλίνει σημαντικά απ' την τροχιά της. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό διατηρώντας την πιστότητα του βηματισμού στην παθητική τροχιά, θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα.

6.4.2 Σύγκριση με τον παθητικό βηματισμό

Σκοπός του σχήματος επενέργησης που χρησιμοποιείται είναι η πιστή αναπαραγωγή του παθητικού βηματισμού κεκλιμένου επιπέδου, όταν το δίποδο περπατά στο οριζόντιο επίπεδο. Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσθηκε στο Σχήμα 6-8 ενδεικτικά για μία επιλογή των M_{cw} και R_{cw} το διάγραμμα φάσης γωνίας σκελών, τόσο για το παθητικό όσο και για το επενεργούμενο περπάτημα. Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται να υπάρχει μικρή απόκλιση ανάμεσα στις δύο τροχιές στον χώρο των φάσεων.

Για να γίνει σύγκριση ανάμεσα σε πολλές επιλογές για τα M_{cw} και R_{cw} , θα πρέπει να υπάρξει μια ποσοτικοποίηση αυτής της απόκλισης. Ως κριτήριο σύγκρισης επιλέχθηκε το αδιάστατο άθροισμα απολύτων σφαλμάτων $e_{traj.}$ των κοινών βαθμών ελευθερίας παθητικού και επενεργούμενου μοντέλου $q_i^{passive}$ και q_i^{active} αντίστοιχα, που ορίζεται από την (6-24) για προσομοιώσεις των δύο συστημάτων με χρονική διάρκεια $t_{max}-t_{min}$:

$$e_{traj.} = \sum_{q_i=1}^4 \left\{ \frac{1}{t_{max} - t_{min}} \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{|q_i^{passive}(t) - q_i^{active}(t)|}{\max(|q_i^{passive}|_{t=t_{min}}^{t=t_{max}})} dt \right\} + \sum_{q_i=1}^4 \left\{ \frac{1}{t_{max} - t_{min}} \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{|\dot{q}_i^{passive}(t) - \dot{q}_i^{active}(t)|}{\max(|\dot{q}_i^{passive}|_{t=t_{min}}^{t=t_{max}})} dt \right\} \quad (6-24)$$

Η τιμή του απόλυτου σφάλματος υπολογίζεται για το άθροισμα των 4 βαθμών ελευθερίας του 4x4 υποσυστήματος και των ταχυτήτων τους. Οι μεταβλητές κατάστασης που αντιστοιχούν στο κεντρικό σύνδεσμο δεν συμμετέχουν στον υπολογισμό του σφάλματος καθώς δεν απαντώνται στο παθητικό σύστημα. Το άθροισμα υπολογίζεται για χρονικό διάστημα 5 βημάτων.

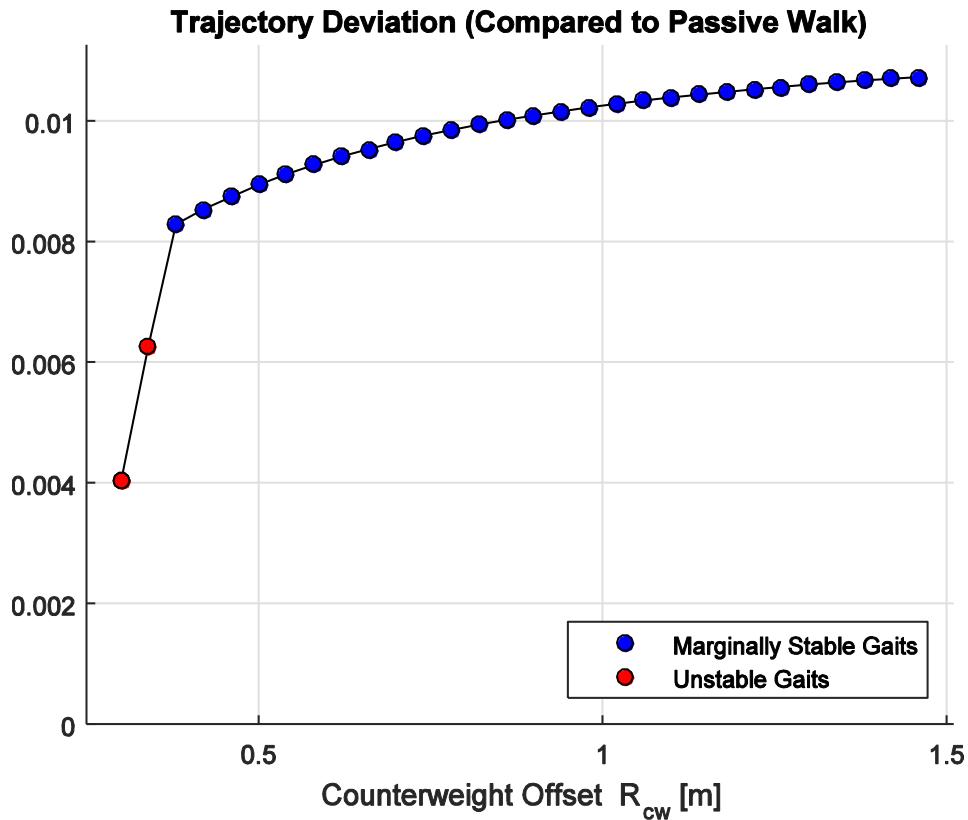
Στο Σχήμα 6-13 σημειώνεται η τιμή του $e_{traj.}$ για τα σταθερά σημεία που προκύπτουν για το επενεργούμενο σύστημα με μεταβολή της παραμέτρου R_{cw} . Οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου έχουν τις ονομαστικές τους τιμές. Στο επενεργούμενο περπάτημα, το έδαφος έχει μηδενική κλίση. Ασταθείς λύσεις, αυτές που βρέθηκαν στην προηγούμενη υποενότητα να έχουν ιδιοτιμές εκτός του μοναδιαίου κύκλου, έχουν σημειωθεί με κόκκινο χρώμα, ενώ οριακά ευσταθείς βηματισμοί έχουν σημειωθεί με μπλε χρώμα.

Παρατηρείται ότι μεγάλες τιμές του μήκους του αντίβαρου R_{cw} , οδηγούν σε μεγαλύτερες αποκλίσεις ανάμεσα σε παθητική και επενεργούμενη τροχιά. Αυτό οφείλεται στις επιπλέον δυνάμεις τύπου Coriolis ή στις φυγόκεντρες δυνάμεις που ασκεί το αντίβαρο στον κεντρικό σύνδεσμο κατά την ταλάντωσή του, οι οποίες επηρεάζουν την δυναμική του 4x4 υποσυστήματος καθώς το μέτρο τους αυξάνεται όλο και περισσότερο με αύξηση της απόστασης R_{cw} της μάζας M_{cw} από τον άξονα περιστροφής της, για την ίδια γωνιακή ταχύτητα του κεντρικού συνδέσμου.

Ταυτόχρονα, παρατηρείται ότι πολύ μικρή επιλογή για την απόσταση R_{cw} παρουσιάζει μικρότερο σφάλμα $e_{traj.}$, αλλά είναι στην πραγματικότητα ανεπιθύμητη, καθώς οι βηματισμοί αυτοί είναι ασταθείς. Στον υπολογισμό του σφάλματος δεν περιέχεται η ασταθείς σε αυτές τις προσομοιώσεις γωνία δ και η ταχύτητά της. Όταν αυτές οι καταστάσεις είναι ασταθείς, αυτό δεν αποτυπώνεται στο μέτρο απόκλισης $e_{traj.}$ το οποίο παραμένει σε χαμηλά επίπεδα.

Επομένως θα πρέπει να υπάρξει προσεκτική επιλογή του μήκους R_{cw} ώστε η απόκλιση της επενεργούμενης από την παθητική τροχιά να διατηρείται σε μικρά επίπεδα, χωρίς να θυσιάζεται η δυνατότητα του μηχανισμού να εκτελέσει ευσταθείς βηματισμούς. Η επιλογή της (6-20) για το μήκος

R_{cw} παρουσιάζει αδιάστατη απόκλιση μικρότερη από 1% ενώ ο βηματισμός παραμένει οριακά ευσταθής.



Σχήμα 6-13: Απόκλιση επενεργούμενης από παθητική τροχιά, για μοντέλα σε σταθερό βηματισμό, με παραμέτρους στις ονομαστικές τιμές.

6.4.3 Μέση κατανάλωση ισχύος

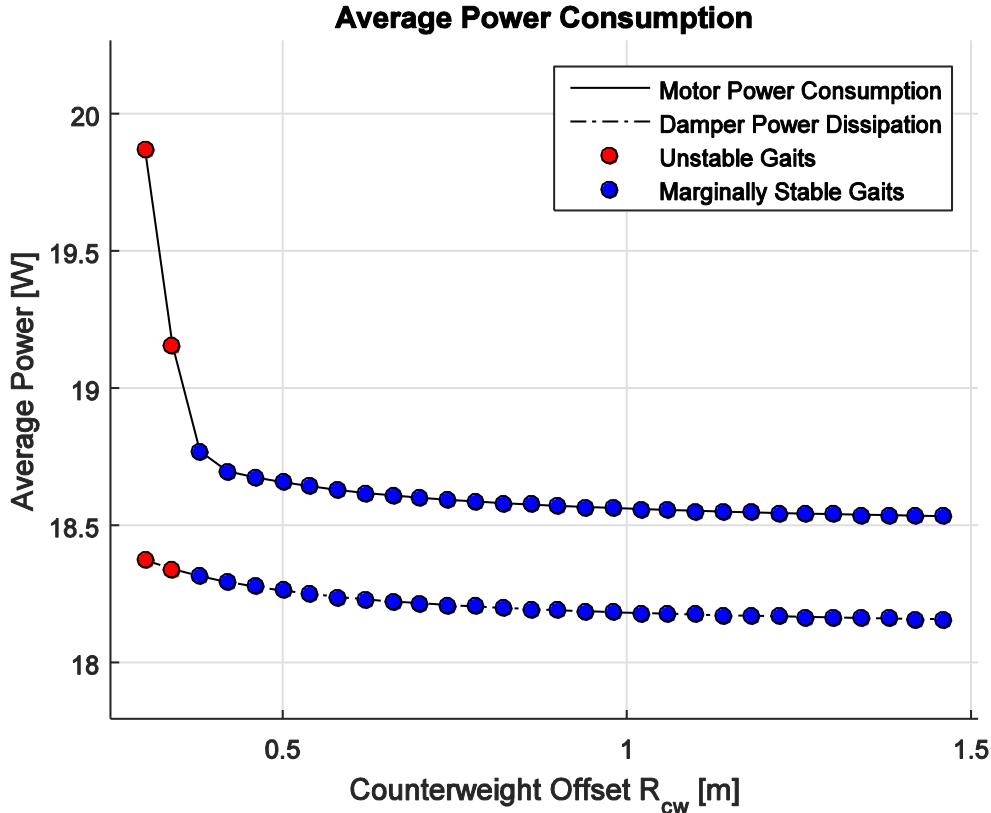
Μεγάλη σημασία κατά το επενεργούμενο περπάτημα έχει η κατανάλωση της ισχύος που απαιτείται για την επίτευξη του βηματισμού. Αυτή συνδέεται άρρηκτα με το επίπεδο των απωλειών του συστήματος λόγω των αποσβέσεων.

Όπως παρουσιάστηκε στο Σχήμα 6-11 για μία επιλογή της απόστασης R_{cw} , οι ισχείς αυτές παρουσιάζουν περιοδικές διακυμάνσεις κατά τον επαναλαμβανόμενο βηματισμό. Σε αυτή την ενότητα θα συγκριθεί η μέση τιμή των τιμών των ισχύων κατά τη διάρκεια διαφόρων βηματισμών, με παράμετρο την απόσταση R_{cw} .

Στο Σχήμα 6-14 έχει σημειωθεί, για κάθε σταθερό βηματισμό που προκύπτει για μεταβλητή απόσταση αντίβαρου R_{cw} , τόσο η μέση κατανάλωση ισχύος από τους κινητήρες, όσο και η μέση διασπορά ισχύος στις αποσβέσεις. Και σε αυτό το διάγραμμα ασταθείς βηματισμοί έχουν σημειωθεί με κόκκινο χρώμα, ενώ οι οριακά ευσταθείς βηματισμοί είναι σημειωμένοι με μπλε χρώμα.

Όπως φαίνεται, η μέση ισχύς των κινητήρων είναι σταθερά μεγαλύτερη της μέσης ισχύος απωλειών, αν και το δύτιδο δεν επιταχύνεται κατά το σταθερό βηματισμό του. Αυτό οφείλεται στο ότι ο κινητήρας δεν ανακτά ενέργεια κατά την πέδηση, και συνεπώς η ισχύς ορίζεται με τη χρήση απόλυτων τιμών, όπως στις (6-22).

Για πολύ μικρές τιμές του R_{cw} που οδηγούν σε ασταθείς βηματισμούς, η κατανάλωση ισχύος λαμβάνει μεγάλες τιμές. Αντίθετα, οριακά ευσταθή συστήματα απαιτούν μικρότερη είσοδο ισχύος για παραμονή στις σταθερές τροχιές τους. Για την επιλογή του R_{cw} από την (6-20), η κατανάλωση ισχύος λαμβάνει τιμή μικρότερη από τα 19 [W].



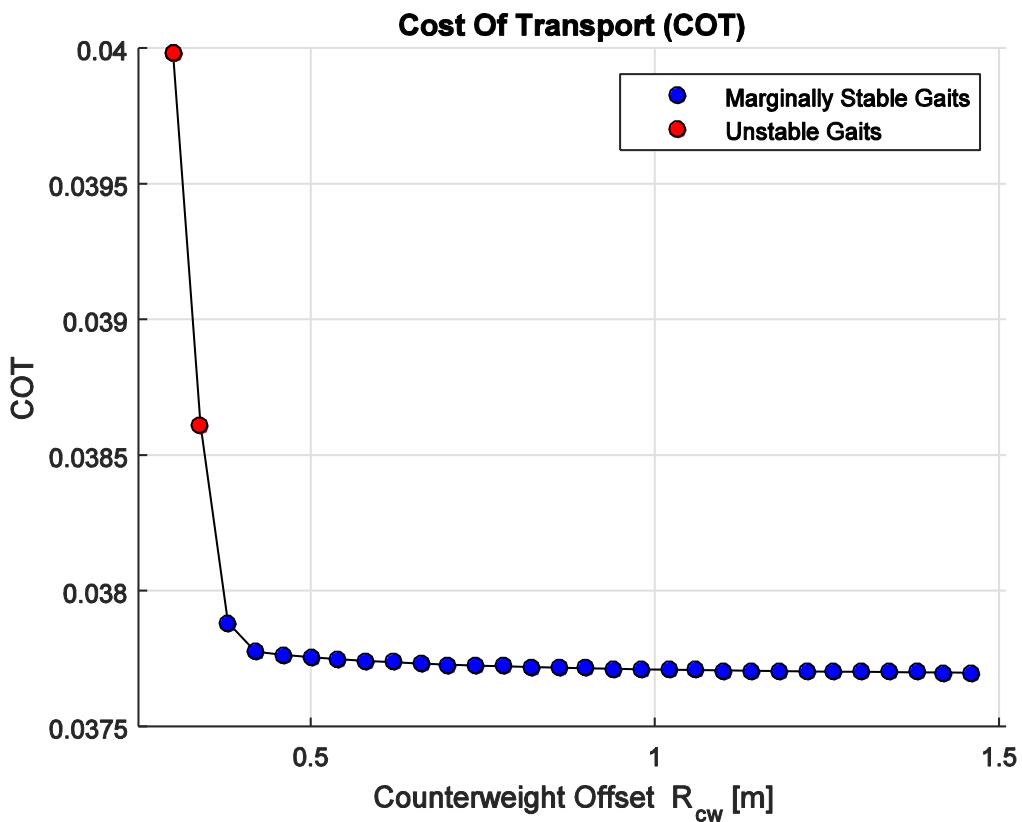
Σχήμα 6-14: Ισχείς του επενεργούμενου συστήματος για σταθερούς βηματισμούς στο οριζόντιο επίπεδο, με μεταβολή της απόστασης αντίβαρου.

6.4.4 Αποδοτικότητα βηματισμού

Η κατανάλωση ισχύος για το επενεργούμενο περπάτημα του δίποδου σε οριζόντιο επίπεδο θα πρέπει να συγκριθεί με άλλες μεθόδους μεταφοράς για να χαρακτηρισθεί ο βηματισμός ως προς την αποδοτικότητά του. Για το σκοπό αυτό έχει επικρατήσει να χρησιμοποιείται ο συντελεστής COT (Cost Of Transport), ο οποίος έχει ήδη ορισθεί στην (5-19). Στην επενεργούμενη λειτουργία, η ισχύς P_{in} προκύπτει από τους κινητήρες. Υπενθυμίζεται για τον COT:

$$COT = \frac{\int_{t=0}^{t=t_{\max}} P_{in}(t) dt}{(M + 2m)g \int_{t=0}^{t=t_{\max}} v_x(t) dt} \quad (6-25)$$

Στο Σχήμα 6-15 παρουσιάζονται οι τιμές του συντελεστή COT για τους σταθερούς επενεργούμενους βηματισμούς οριζόντιου επιπέδου που επιτυγχάνονται με μεταβολή της απόστασης αντίβαρου R_{cw} , και ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου βρίσκονται στις ονομαστικές τιμές τους. Ασταθείς βηματισμοί είναι σημειωμένοι με κόκκινο χρώμα, ενώ οριακά ευσταθείς βηματισμοί είναι σημειωμένοι με μπλε.



Σχήμα 6-15: Συντελεστής COT για σταθερούς επενεργούμενους βηματισμούς οριζόντιου επιπέδου με μεταβολή της απόστασης αντίβαρου.

Όπως παρατηρείται, ο συντελεστής COT συμπεριφέρεται κατ' αντιστοιχία με την μέση κατανάλωση ισχύος στους κινητήρες, λαμβάνοντας μεγαλύτερες τιμές για τους ασταθείς βηματισμούς που προκύπτουν για μικρές τιμές R_{cw} . Για την επιλογή R_{cw} που έχει γίνει στην (6-20) και για βηματισμό ονομαστικών τιμών παραμέτρων, ο συντελεστής είναι μικρότερος από 0.038 σε ταχύτητα 0.66 [m/s], και μικράνει ακόμα περισσότερο για μεγαλύτερες απόστασεις αντίβαρου.

Για μηχανές που τροφοδοτούνται παθητικά από τη βαρύτητα, όπως είναι το δίποδο σε κεκλιμένο επίπεδο, όπως συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 5, ο συντελεστής COT ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας α . Για τον παθητικό βηματισμό ονομαστικών τιμών παραμέτρων αυτός υπολογίζεται:

$$COT|_{\alpha=-2^\circ} = \tan(|\alpha|) = 0.0349 \quad (6-26)$$

Εφ' όσον στο επενεργούμενο μοντέλο οριζόντιου επιπέδου επιτυγχάνεται βηματισμός ο οποίος σχεδόν ταυτίζεται δυναμικά με αυτόν στο κεκλιμένο επίπεδο, οι απώλειες του μοντέλου σε αποσβέσεις αναμένεται να είναι ίδιες. Επειδή το δίποδο στο οριζόντιο επίπεδο εκτελεί επαναλαμβανόμενη κίνηση, η συνολική μηχανική του ενέργεια διατηρείται σταθερή. Επομένως η ενέργεια που εισάγεται στο δίποδο κάθε στιγμή από τους κινητήρες θα ταυτίζεται με αυτή που θα του προσέφερε η κατάβαση στο βαρυτικό πεδίο, αν η κίνηση γινόταν σε κεκλιμένο επίπεδο. Ο συντελεστής COT θα έπρεπε να είναι ο ίδιος με αυτόν που υπολογίζεται από την (6-26).

Η διαφορά ανάμεσα στις τιμές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 6-15 και στην τιμή της (6-26) οφείλεται στο ότι το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό, και η ενέργεια που προσφέρει στα σώματα που κινούνται σε αυτό δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που αυτά εκτελούν, άρα ούτε και από την στιγμιαία

ταχύτητα που αυτά έχουν κατά την μετακίνησή τους. Αντίθετα, σε κινητήρες που δεν προσφέρουν τη δυνατότητα αναγέννησης ενέργειας κατά την πέδηση, καταναλώνεται ισχύς για το «φρενάρισμα», καθώς το ελεύθερο σκέλος αλλάζει την φορά περιστροφής του ακριβώς πριν το HS.

Ο συντελεστής COT του δίποδου ρομπότ μπορεί να συγκριθεί με αντίστοιχα μεγέθη για την κατανάλωση ενέργειας κατά το ανθρώπινο περπάτημα. Σύμφωνα με την δημοσίευση των Collins και Ruina για τον άνθρωπο ο συντελεστής COT είναι περίπου 0.05, μέγεθος το οποίο προκύπτει από μεταβολικές μελέτες για το ανθρώπινο περπάτημα [10]. Από την ίδια δημοσίευση παρατίθεται ο ακόλουθος πίνακας, ο οποίος συγκρίνει τους συντελεστές COT για μεθόδους μετακίνησης:

Πίνακας 6-1. Συντελεστής COT μεθόδων μετακίνησης. Πηγή: [10]

	Σύμβολο
Honda's Asimo	1.6
TU Delft's Denise	0.08
MIT's Spring Flamingo	0.07
Collin's Robot	0.055
McGeer's Dynamite	0.04
Ανθρώπινο Περπάτημα	0.05
Ελικόπτερο	0.4
Boeing 747	0.05
Αυτοκίνητο	0.015
Ποδηλάτης	0.01

Είναι εμφανές ότι η μετακίνηση με τροχοφόρα οχήματα είναι σημαντικά αποδοτικότερη από την μετακίνηση με δίποδα ρομπότ. Τα δίποδα ρομπότ υπερτερούν όμως των τροχοφόρων σε δυσπρόσιτες περιοχές, όπου η πρόσφυση των τροχών περιορίζεται από ανομοιομορφίες εδάφους. Όπως και ο άνθρωπος, τα δίποδα ρομπότ έχουν τη δυνατότητα εξερεύνησης τέτοιων περιοχών.

Η λεπτομέρεια στο νόμο ελέγχου έχει ως συνέπεια την χαμηλή κατανάλωση ενέργειας· ελεγκτές τύπου PD καταναλώνουν γενικά περισσότερη ενέργεια απ' ότι ένα πιο στοχευμένο σχήμα, βασισμένο στην παθητική δυναμική του μηχανισμού. Όμως η παθητική δυναμική στη περίπτωση των δίποδων ρομπότ δεν είναι ικανή ώστε να εξασφαλίσει ευρωστία έναντι αντίξων συνθηκών. Επομένως, είναι αναγκαίο να βρεθεί μια ισορροπία, η οποία ανάλογα με την εφαρμογή θα ικανοποιεί τόσο τα κριτήρια ευστάθειας, όσο και τους ενεργειακούς περιορισμούς που τίθενται κάθε φορά.

6.5 Σύνθετο σχήμα ελέγχου με μη γραμμικούς PD όρους

Όπως έχει αναλυθεί, ο νόμος ελέγχου βασισμένος στην παθητική δυναμική οδηγεί σε μικρές καταναλώσεις ισχύος στους κινητήρες, καθώς ένα τέτοιο σχήμα ελέγχου σέβεται την παθητική δυναμική του μηχανισμού και την «χρησιμοποιεί» προς όφελος του, συμπληρώνοντας ή αφαιρώντας

κάθε φορά μόνο ότι είναι απαραίτητο. Ομως στο επαυξημένο μοντέλο, ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας οδηγεί το σύστημα σε οριακά ευσταθή συμπεριφορά, καθώς εύκολα το αντίβαρο του κεντρικού συνδέσμου μπορεί να ξεφύγει από την περιοχή ισορροπίας του και να αρχίσει να περιστρέφεται ανεξέλεγκτα γύρω από την άρθρωση του ισχίου.

Γραμμικοί PD όροι έχουν χρησιμοποιηθεί στη βιβλιογραφία για την κατάσταση του αντιβάρου, οδηγώντας σε δυναμική συμπεριφορά που παραγράφει την παθητική δυναμική και απαιτεί μεγαλύτερη κατανάλωση ενέργειας [25] [31]. Ένας τρόπος να εξασφαλισθεί η ευστάθεια στο σύστημα, χωρίς όμως να παραγράφεται η παθητική δυναμική του δίποδου από το σχήμα ελέγχου, είναι η προσθήκη μη αναλογικών με το σφάλμα PD όρων για τη θέση και την ταχύτητα του αντιβάρου, στο ήδη υπάρχον σχήμα. Αυτοί ιδανικά θα ορίζουν μεγάλες δυνάμεις επαναφοράς σε μεγάλες αποκλίσεις από την κατάσταση-στόχο του κεντρικού συνδέσμου, ενώ για μικρές αποκλίσεις, η συνεισφορά τους θα είναι αμελητέα.

Για να αποφευχθεί η κλαδική έκφραση ενός τέτοιου σχήματος, προτιμάται η προσθήκη μη γραμμικών όρων τύπου PD στον ελεγκτή του κινητήρα ανάμεσα σε σκέλος στήριξης και αντίβαρο. Η επιλογή αυτή του κινητήρα βασίζεται στο γεγονός ότι στο σκέλος στήριξης αναπτύσσονται δυνάμεις και ροπές αντίδρασης από το έδαφος, και η προσθήκη της επιπλέον αυτής ροπής δε θα επηρεάσει σημαντικά τη δυναμική συμπεριφορά του. Το νέο διάνυσμα εισόδου θα είναι τότε:

$$\mathbf{u}_{g,PD} = \begin{bmatrix} u_{g1,PD} \\ 0 \\ u_{g3} \\ 0 \\ u_{g1,PD} - u_{g3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{g1} - K_p(\delta - \delta_d)^3 - K_d(\dot{\delta} - \dot{\delta}_d)^3 \\ 0 \\ u_{g3} \\ 0 \\ u_{g1} - K_p(\delta - \delta_d)^3 - K_d(\dot{\delta} - \dot{\delta}_d)^3 - u_{g3} \end{bmatrix} \quad (6-27)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, οι όροι u_{g1} και u_{g3} ορίζονται όπως στις (6-6) και (6-7), ενώ οι όροι K_p και K_d αντιστοιχούν στα κέρδη σφάλματος θέσης και ταχύτητας αντίστοιχα. Ο δείκτης «d» στις μεταβλητές θέσης και ταχύτητας του αντίβαρου αντιστοιχεί στις επιθυμητές τιμές αυτών, οι οποίες έχουν προκύψει ως η μέση τιμή των αντίστοιχων μεγεθών στις προσομοιώσεις του σχήματος βασισμένου στην παθητική δυναμική, όπως αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα 6-6 (a) και (b). Οι όροι των σφαλμάτων θέσης και ταχύτητας υψώνονται στην τρίτη δύναμη, ώστε να διατηρούν μικρές τιμές για σφάλμα μικρότερο της μονάδας, συγκριτικά με αυτές που θα λάμβαναν σε ένα γραμμικό PD σχήμα ελέγχου. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η δυναμική του συστήματος στην κανονική του λειτουργία, όπου η γωνία δ και η ταχύτητά της δεν αποκλίνουν σημαντικά από την επιθυμητή, δεν παραγράφεται, ενώ μεγάλες αποκλίσεις που προκύπτουν από τυχόν διαταραχές αποσβαίνουν αμέσως.

6.5.1 Ευστάθεια βηματισμού

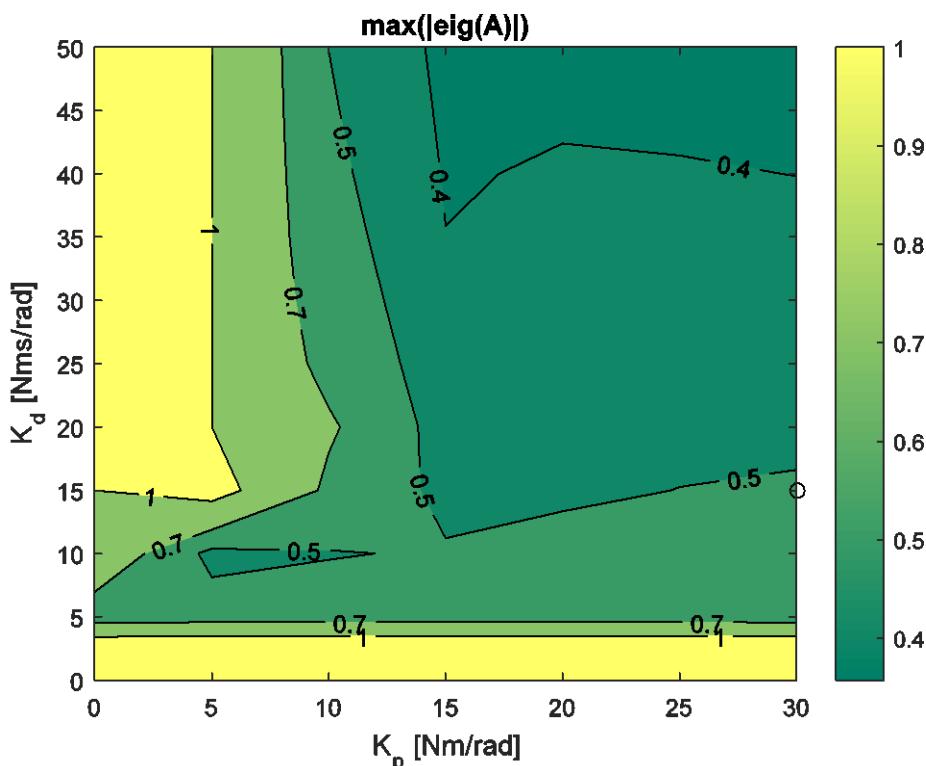
Η τροποποίηση του σχήματος ελέγχου με αυτόν τον τρόπο έχει κύριο σκοπό την εξασφάλιση ευστάθειας στο επαυξημένο σύστημα, κατά το περπάτημα στο οριζόντιο επίπεδο. Θα πρέπει λοιπόν να διερευνηθεί η καταλληλότητά του ως προς την επίτευξη αυτού του στόχου.

Στο Σχήμα 6-12 είχε σχεδιαστεί ο τόπος ριζών για μεταβλητά μήκη αντίβαρων του επαυξημένου μηχανισμού, για το δίποδο ονομαστικών τιμών παραμέτρων σε σταθερό βηματισμό. Εκεί είναι εμφανές ότι για μήκος αντίβαρου 0.3 [m], με απλό σχήμα ελέγχου βασισμένο στην παθητική

δυναμική, το επαυξημένο σύστημα είναι ασταθές, καθώς η μέγιστη σε μέτρο ιδιοτιμή του βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, έχει μέτρο δηλαδή μεγαλύτερο της μονάδας. Θα πρέπει να μελετηθεί εάν για τον σχεδιασμό αυτόν του επαυξημένου δίποδου, ο σύνθετος νόμος ελέγχου είναι ικανός να καταστήσει το σύστημα ευσταθές. Επομένως στη συνέχεια θα μελετηθεί το επαυξημένο δίποδο ονομαστικών συνθηκών όπως το ορίζει ο Πίνακας 4-2, με μήκος αντιβάρου που ορίζεται:

$$R_{cw} = 0.3\text{m} \quad (6-28)$$

Η απλή επενέργηση βασισμένη στην παθητική δυναμική αντιστοιχεί σε νέο νόμο ελέγχου, $\mathbf{u}_{g,PD}$, με σταθερές K_p και K_d ίσες με το μηδέν. Για να διαπιστωθεί η καταλληλότητα του σύνθετου νόμου ελέγχου, στο Σχήμα 6-16 σημειώνεται το μέτρο της μεγαλύτερης ιδιοτιμής της συνάρτησης βηματισμού του συστήματος αυτού, με τον σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορους συνδυασμούς των κερδών K_p και K_d .



Σχήμα 6-16: Μέγιστες ιδιοτιμές επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ [m], με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.

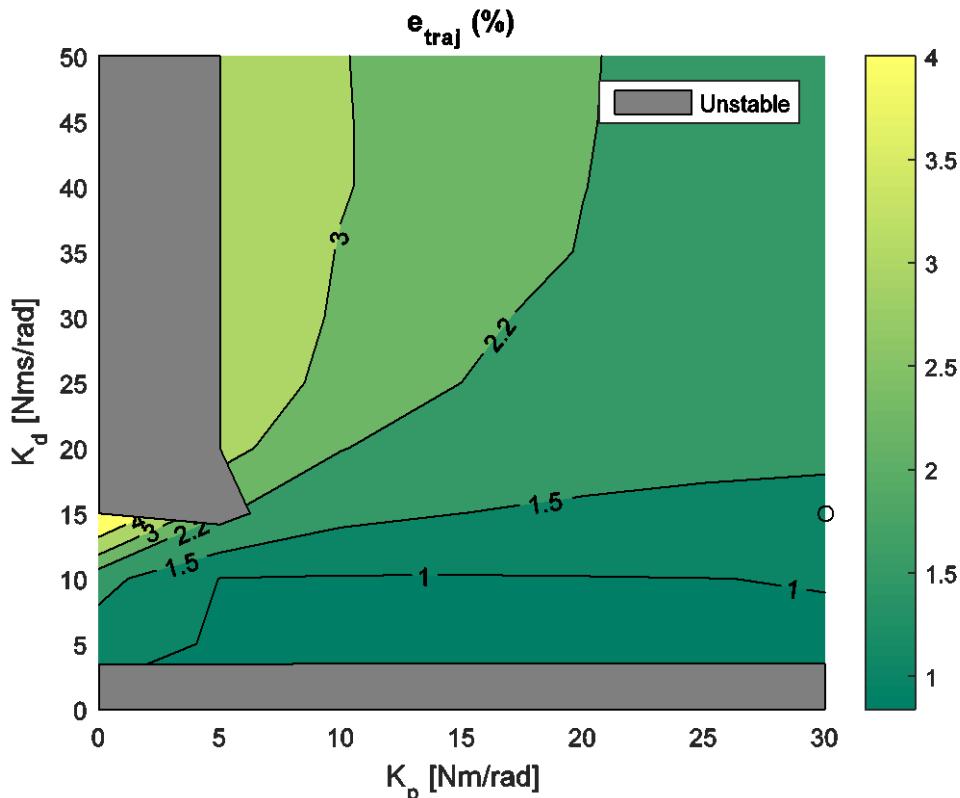
Αρχικά παρατηρείται ότι πράγματι, για μηδενικά κέρδη, το σύστημα είναι ασταθές. Όπως όμως φαίνεται, το σύνθετο σχήμα ελέγχου είναι κατάλληλο για την εξασφάλιση ευστάθειας στο σύστημα, καθώς υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί των κερδών του μη γραμμικού PD τμήματος του νόμου ελέγχου για τους οποίους ο βηματισμός στο οριζόντιο επίπεδο είναι ευσταθής. Αυτό δίνει την δυνατότητα επιλογής από πλήθος συνδυασμών κερδών, άρα της ικανοποίησης περισσότερων από ένα κριτηρίων επιλογής.

6.5.2 Σύγκριση με τον παθητικό βηματισμό

Πολύ σημαντικός παράγοντας στην επιλογή κερδών του ελεγκτή, είναι η ομοιότητα του βηματισμού που επιτυγχάνεται με τον παθητικό βηματισμό που προσπαθεί να αναπαράγει. Στο Σχήμα 6-17

σημειώνεται η απόκλιση e_{traj} όπως αυτή έχει ορισθεί στην (6-24) για διαφορετικούς συνδυασμούς κερδών ελεγκτή.

Συγκριτικά με το σχήμα Σχήμα 6-13, εδώ εμφανίζονται γενικά μεγαλύτερες αποκλίσεις λόγω των PD όρων, όμως παρατηρείται ότι η τροχιά του επενεργούμενου βηματισμού δεν αποκλίνει σημαντικά από την παθητική τροχιά. Συγκεκριμένα, πολλοί συνδυασμοί κερδών οδηγούν σε ευσταθή βηματισμό με απόκλιση **τροχιάς μικρότερη από 1.5%**. Η μη γραμμική φύση των όρων PD του ελεγκτή συμβάλλει σε αυτή τη συμπεριφορά, καθώς δεν επιβάλλει στο σύστημα μεγάλες ροπές για μικρές αποκλίσεις από την κατάσταση-στόχο.



Σχήμα 6-17: Απόκλιση επενεργούμενης από παθητική τροχιά, επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ m, με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.

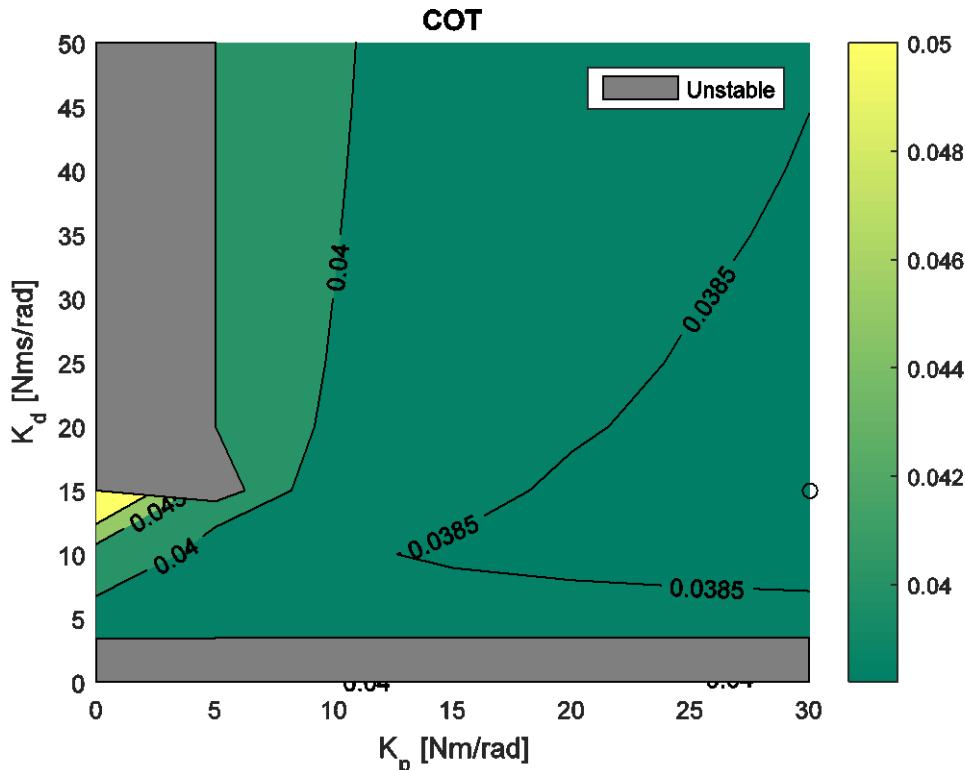
6.5.3 Αποδοτικότητα βηματισμού

Τα παραπάνω αποτελέσματα για την ευστάθεια του επαυξημένου συστήματος με το σύνθετο νόμο ελέγχου και την ομοιότητα με τον παθητικό βηματισμό **είναι μεν ενθαρρυντικά, αλλά πρέπει να εξετασθεί η αποδοτικότητα που θα είχε ένα τέτοιο σχήμα επενέργησης πριν εξαχθούν συμπεράσματα για την χρησιμότητα ενός τέτοιου σχήματος ελέγχου.**

Στο Σχήμα 6-18 σημειώνεται ο συντελεστής COT για το επαυξημένο σύστημα ονομαστικών παραμέτρων και με μήκος αντίβαρου όπως ορίζεται από την (6-28), με το σύνθετο σχήμα ελέγχου και για διάφορους συνδυασμούς των κερδών K_p και K_d .

Παρατηρείται ότι οι ευσταθείς πλέον βηματισμοί παρουσιάζουν αποδοτικότητα συγκρίσιμη με αυτή των οριακά ευσταθών βηματισμών που προέκυψαν από το σχήμα ελέγχου παθητικής δυναμικής.

Για κέρδος K_p κοντά στην τιμή 30 [Nm/rad] και κέρδος K_d 15 [Nms/rad], οι βηματισμοί παρουσιάζουν COT μικρότερο από 0.0383, τιμή μεγαλύτερη του απλού, βασισμένου στην παθητική δυναμική σχήματος ελέγχου. Η τιμή αυτή παραμένει όμως από τις πειραματικές διατάξεις που αναγράφει ο Πίνακας 6-1. Επομένως προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο σύνθετος νόμος ελέγχου που εφαρμόζεται εδώ σε συνδυασμό με το μηχανισμό του αντίβαρου, μπορεί να καταστήσει το δίποδο εύρωστα ευσταθές αλλά και οικονομικά ανταγωνιστικό.

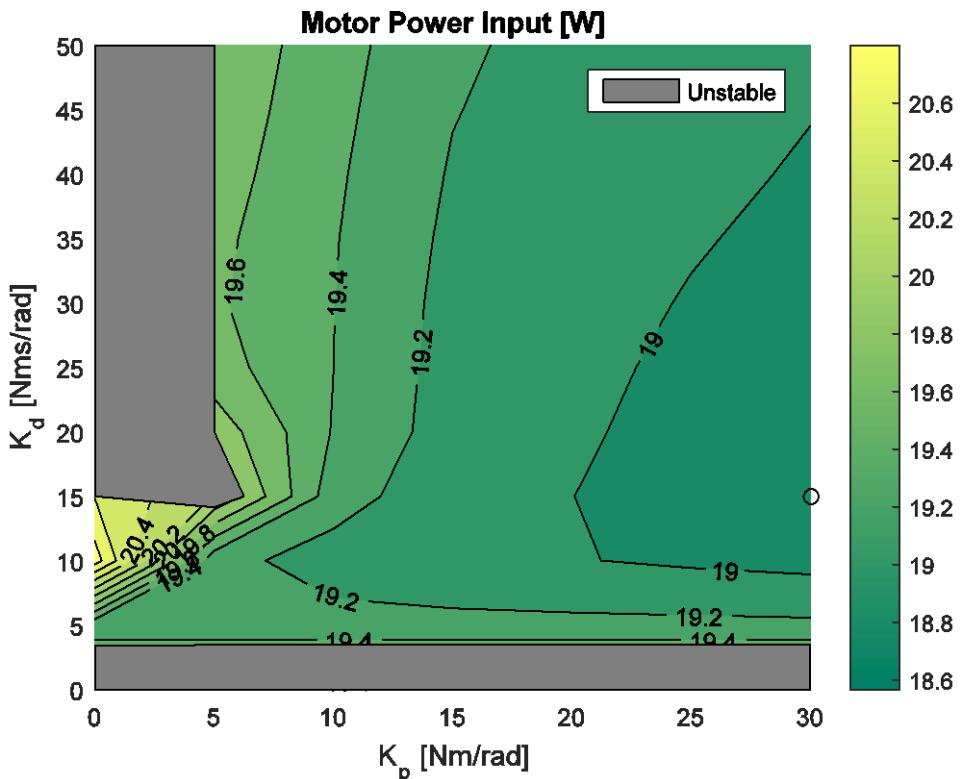


Σχήμα 6-18: Συντελεστής COT επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ m, με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.

6.5.4 Ισχύς κινητήρων

Με την ίδια διαδικασία μπορεί να προσδιορισθεί η συνολικά καταναλισκόμενη ισχύς από τους κινητήρες, όπως αυτή ορίζεται από την (6-22). Για το σύστημα με μήκος αντίβαρου αυτό της (6-28) με σχήμα επενέργησης βασισμένο στην παθητική δυναμική, η ισχύς εισόδου στο σύστημα λάμβανε πολύ μεγάλες τιμές, λόγω της αστάθειας του συστήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-10. Με τον σύνθετο ελεγκτή, που περιλαμβάνει τους PD όρους, βρέθηκε ότι το σύστημα μπορεί να γίνει ευσταθές, επομένως ενδιαφέρει να διερευνηθεί η κατανάλωση ισχύος που απαιτείται για να επιτευχθούν οι ευσταθείς βηματισμοί. Στο Σχήμα 6-19 παρουσιάζεται η μέση κατανάλωση ισχύος για το επαυξημένο σύστημα ονομαστικών παραμέτρων, όπως αυτό έχει ήδη περιγραφεί.

Παρατηρείται ότι η κατανάλωση ισχύος κυμαίνεται σε πολλά επίπεδα, αλλά παρουσιάζονται ορισμένα ελάχιστα για κάποιους συνδυασμούς κερδών, τα οποία φτάνουν τα 18.6 [W] σε ευσταθή βηματισμό. Η τιμή αυτή είναι συγκρίσιμη με τις ελάχιστες τιμές στο Σχήμα 6-14, οι οποίες αντιστοιχούν σε μεγαλύτερα μήκη αντίβαρου.



Σχήμα 6-19: Μέση κατανάλωση ισχύος επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ m, με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.

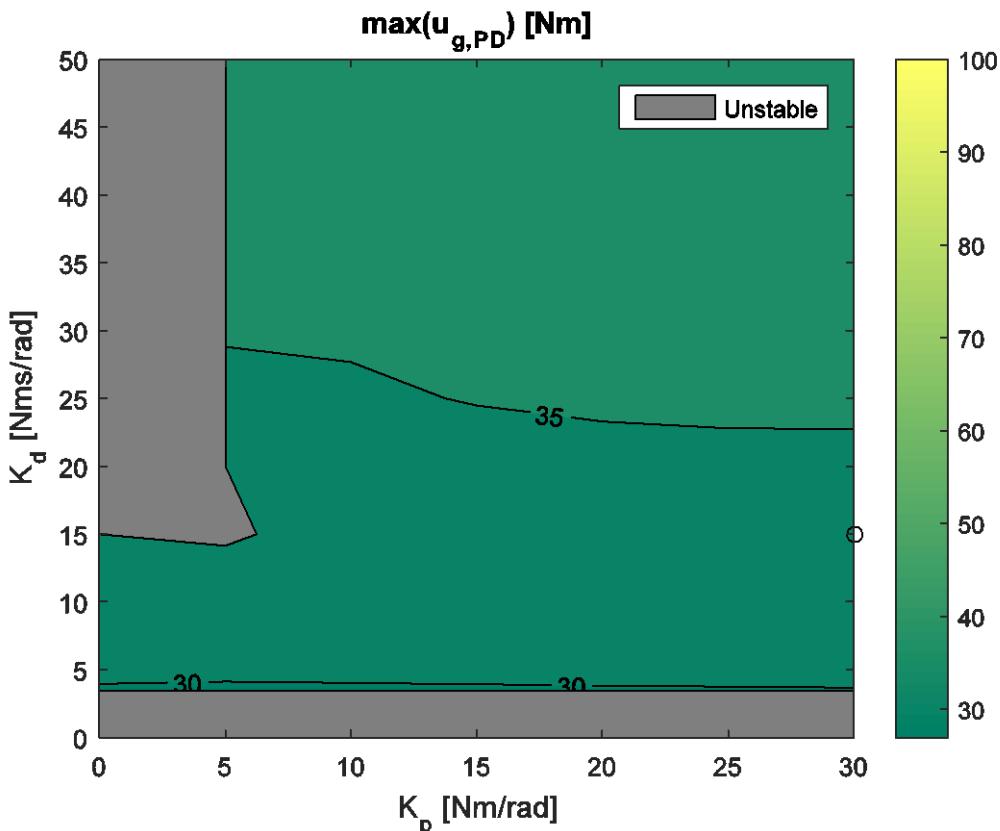
6.5.5 Μέγιστη ροπή κινητήρων

Τελευταίο αντικείμενο διερεύνησης αποτελεί η ροπή που καλούνται να προσφέρουν οι κινητήρες στο σύστημα σύμφωνα με το νόμο ελέγχου (6-27). Συγκεκριμένα, ενδιαφέρει η μέγιστη κατ' απόλυτο τιμή της ροπής αυτής να λαμβάνει επαρκώς μικρές τιμές, ώστε να μπορεί να αποδοθεί από έναν συνδυασμό κινητήρα – μειωτήρα.

Για το σκοπό αυτό στο Σχήμα 6-20 παρουσιάζεται η μέγιστη ασκούμενη από κινητήρες ροπή για διάφορους συνδυασμούς κερδών ελεγκτή. Παρατηρείται ότι για την ευσταθή περιοχή επιλογής κερδών, οι ροπές περιορίζονται κάτω από τα 60 [Nm] για μεταφορά μάζας 80 [kg]. Μάλιστα, μεγάλο εύρος επιλογής τιμών των κερδών δίνει ροπές μικρότερες των 35 [Nm]. Αυτή η τάξη μεγέθους διευκολύνει την επιλογή επενεργητή καθώς βρίσκεται εντός των ορίων που συνήθως τίθενται για ρομπότ με πόδια. Συγκεκριμένα, για κέρδος K_p 30 [Nm/rad] και κέρδος K_d 15 [Nms/rad], η ροπή των κινητήρων παρουσιάζει μέγιστο μικρότερο από 34 [Nm].

6.5.6 Επιλογή κερδών

Στα παραπάνω βρέθηκε ότι με το σύνθετο σχήμα ελέγχου, το οποίο περιέχει και όρους βασισμένους στην παθητική δυναμική αλλά και μη γραμμικούς PD όρους, είναι δυνατή η εξασφάλιση της ευστάθειας σε βηματισμούς που μέχρι πρότινος ήταν ασταθείς, με διατήρηση του κόστους μετακίνησης σε χαμηλά επίπεδα, μεγάλη ομοιότητα της επενεργούμενης τροχιάς με την αντίστοιχη παθητική, και απαιτήσεις ισχύος και ροπής που δεν περιορίζουν την επιλογή επενεργητών.



Σχήμα 6-20: Μέγιστη ασκούμενη από κινητήρες ροπή, επαυξημένου ονομαστικού συστήματος για $R_{cw}=0.3$ m, με σύνθετο νόμο ελέγχου, για διάφορα κέρδη μη γραμμικού PD.

Η απόκλιση τροχιάς στο Σχήμα 6-17, η κατανάλωση ισχύος στο Σχήμα 6-19, και η ασκούμενη ροπή στο Σχήμα 6-20 παραμένουν σε επιτρεπτά επίπεδα για όλους σχεδόν τους ευσταθείς συνδυασμούς κερδών ελεγκτή. Συγκεκριμένα, η απόκλιση τροχιάς παραμένει κάτω από 4%, η ισχύς περιορίζεται σε τιμές μικρότερες των 21 [W] και η ροπές δεν ξεπερνούν τα 60 [Nm]. Επομένως, τα σημαντικότερα κριτήρια για την επιλογή των κερδών είναι η ευστάθεια και το ανηγμένο κόστος μετακίνησης.

Για την επιλογή λοιπόν των κερδών του μη γραμμικού PD τμήματος του ελεγκτή, θα πρέπει να συγκριθεί το Σχήμα 6-16 με το Σχήμα 6-18. Συγκρίνοντας τα δύο σχήματα, παρατηρείται ότι η περιοχή ελαχίστου του συντελεστή COT βρίσκεται εντός της περιοχής ευστάθειας βηματισμού. Επομένως γίνεται η ακόλουθη επιλογή για τα κέρδη:

$$\begin{aligned} K_p &= 30 \text{ Nm/rad} \\ K_d &= 15 \text{ Nms/rad} \end{aligned} \tag{6-29}$$

Η επιλογή αυτή έχει σημειωθεί με κύκλο στα Σχήματα 6-16 έως 6-20.

Για τον συνδυασμό αυτό κερδών του σύνθετου ελεγκτή (6-27) στο δίποδο ονομαστικών παραμέτρων με μήκος αντίβαρου από την (6-28), προκύπτουν στον σταθερό βηματισμό οριζοντίου επιπέδου τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μεγέθη, όπως έχουν ορισθεί σε προηγούμενες ενότητες και παρουσιάζονται στον Πίνακα 6-2:

Πίνακας 6-2. Χαρακτηριστικά επιλεγμένου βηματισμού

Χαρακτηριστικό	Τιμή
Μέτρο μέγιστης ιδιοτιμής	0.5071
COT	0.0382
Μέση κατανάλωση ισχύος από κινητήρες, P_{in}	18.90 W
Απόκλιση τροχιάς από παθητικό βηματισμό, e_{traj}	1.42%
Μέγιστη ασκούμενη από κινητήρες ροπή, $u_{gl,PD}$	33.94 Nm

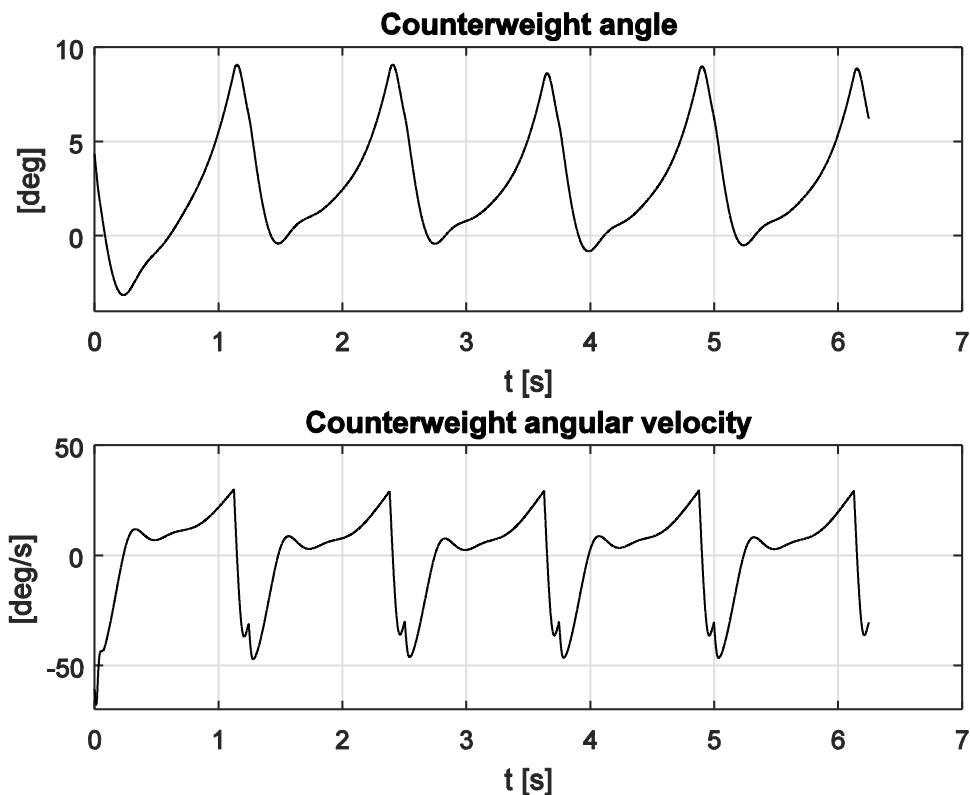
6.5.7 Ευσταθής επενεργούμενος βηματισμός

Η επιλογή που έχει γίνει για τα κέρδη δίνει ευσταθείς ιδιοτιμές στη γραμμικοποιημένη μορφή της και ικανοποιητικά χαρακτηριστικά στον σταθερό βηματισμό. Είναι όμως απαραίτητο να ελεγχθεί η ευστάθεια του μη γραμμικού συστήματος μέσω προσομοίωσης και να παρατηρηθεί η συμπεριφορά του διπόδου στην μεταβατική κατάσταση, καθώς δηλαδή θα τείνει σε σταθερό βηματισμό εκκινώντας από αρχικές συνθήκες εκτός σταθερής τροχιάς.

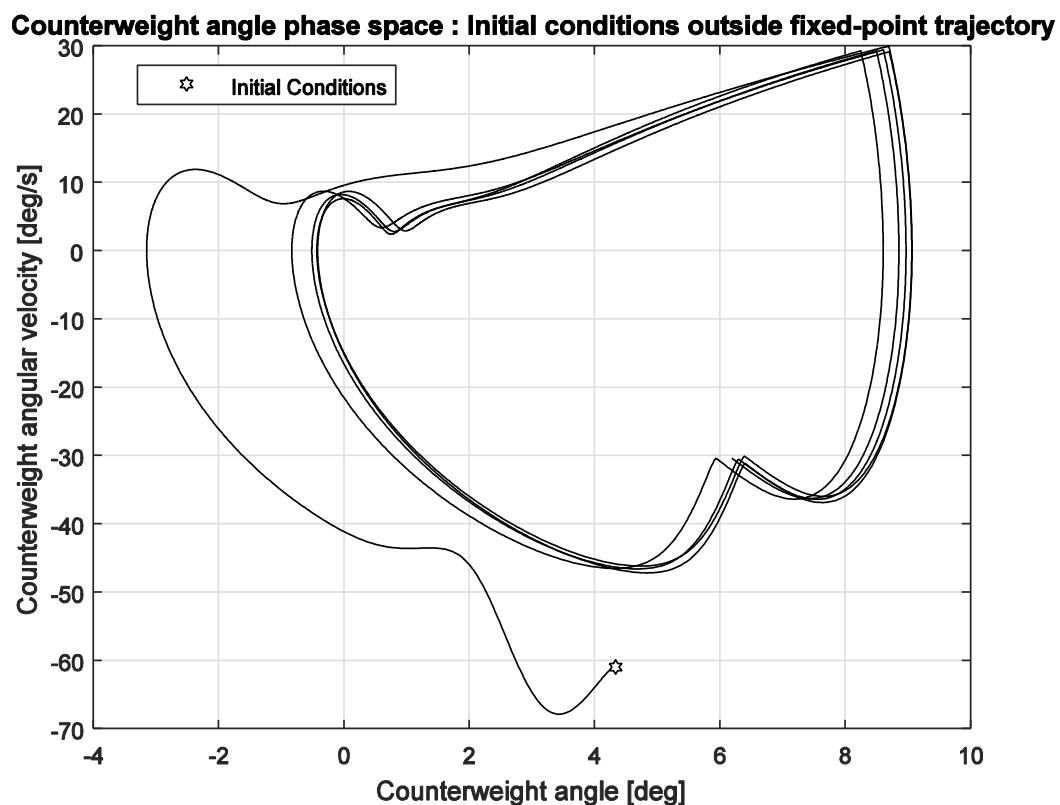
Για το σκοπό αυτό με την επιλογή κερδών ελεγκτή (6-29) παρουσιάζεται στο Σχήμα 6-21 η απόκριση των μεταβλητών κατάστασης που αντιστοιχούν στην γωνία αντιβάρου δ και την ταχύτητά της, όταν οι αρχικές συνθήκες δεν ανήκουν στην τροχιά σταθερού σημείου του επαυξημένου συστήματος.

Παρατηρείται ότι η κατάσταση συγκλίνει αμέσως στην σταθερή τροχιά της, εντός του πρώτου βήματος. Το Σχήμα 6-21 (a) πρέπει να συγκριθεί με το Σχήμα 6-6 (a) όπου ο ελεγκτής περιέχει μόνο τους βαρυτικούς και όχι τους PD όρους. Η γωνία αντιβάρου με το σύνθετο νόμο ελέγχου, στο Σχήμα 6-21 (a) λαμβάνει διαφορετικές τιμές από την κατάσταση-στόχο "d" της (6-27) που έχει προκύψει από τον απλό νόμο ελέγχου του Σχήματος 6-6 (a). Αυτό οφείλεται στην μη γραμμική δυναμική του συστήματος, η οποία το οδηγεί να συμπεριφέρεται με διαφορετικό τρόπο από ό,τι αναμένεται σε γραμμικά συστήματα που ελέγχονται από PD ελεγκτές.

Η σύγκλιση στην ονομαστική τροχιά γίνεται πιο εμφανής στο διάγραμμα φάσης στο Σχήμα 6-22. Είναι εμφανές, σε αντίθεση με το Σχήμα 6-9 που αντιστοιχεί στον απλό ελεγκτή, ότι ο ελεγκτής PD καταφέρνει να επαναφέρει το σύστημα σε σταθερή τροχιά ακόμα και για μεγάλες αρχικές αποκλίσεις της κατάστασης.

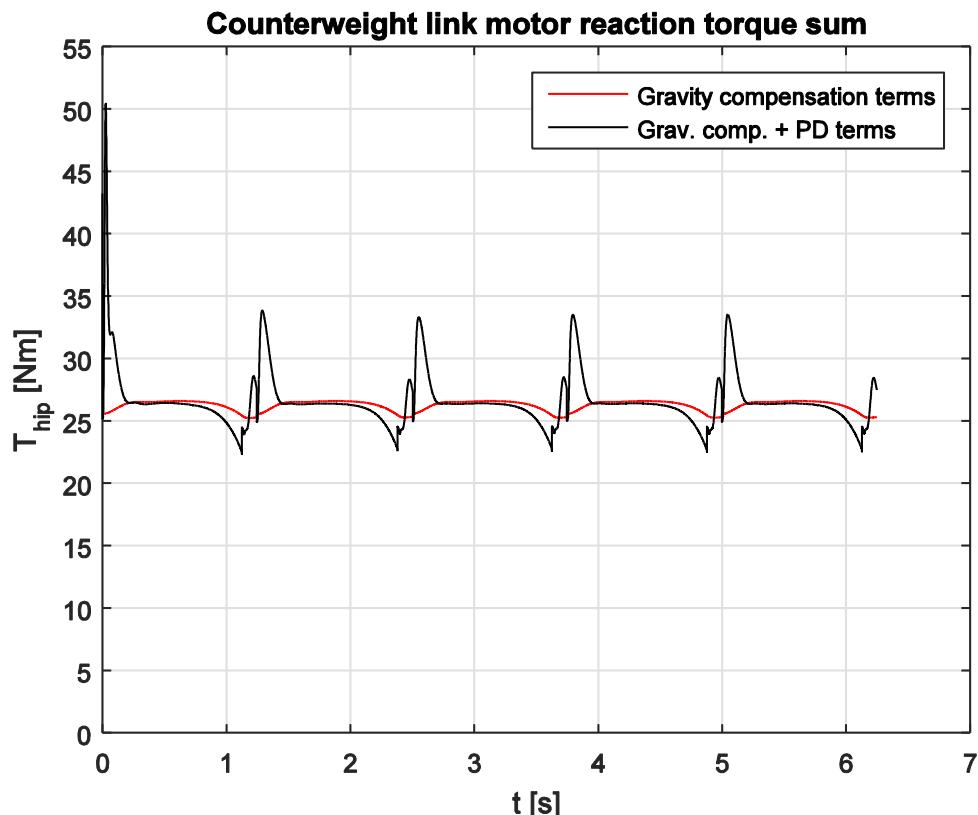


Σχήμα 6-21: Σύγκλιση κατάστασης αντιβάρου, στο επαυξημένο ονομαστικό σύστημα με σύνθετο νόμο ελέγχου και επιλογή κερδών (6-29). (a) Γωνία. (b) Ταχύτητα.



Σχήμα 6-22: Απόκριση φάσης γωνίας αντίβαρου επενεργούμενου μοντέλου σύνθετου ελεγκτή σε αρχικές συνθήκες εκτός της ονομαστικής τροχιάς.

Οι ροτές που ασκούνται από τον ελεγκτή στο αντίβαρο παρουσιάζονται στο Σχήμα 6-23. Αρχικά η επέμβαση των PD όρων είναι σημαντική, καθώς οι αρχικές συνθήκες της προσομοίωσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-22, απέχουν κατά πολύ της σταθερής τροχιάς. Παρατηρείται όμως ότι μετά τη σύγκλιση στην ονομαστική τροχιά που επιτυγχάνεται κατά το πρώτο βήμα, ο PD επεμβαίνει μόνο στην αρχή κάθε βήματος, ώστε να επαναφέρει το αντίβαρο στην επιθυμητή κατάσταση, ενώ στο μεγαλύτερο ποσοστό της διάρκειας των σταθερών βημάτων η είσοδος αποτελείται μόνο από τους βαρυτικούς όρους του ελεγκτή.



Σχήμα 6-23: Ροπή εισόδου στο αντίβαρο, επενεργούμενου μοντέλου σύνθετου ελεγκτή, σε αρχικές συνθήκες εκτός της ονομαστικής τροχιάς.

Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική για την καταλληλότητα του σχήματος ελέγχου. Αυτός άλλωστε ήταν και ο λόγος επιλογής του μη γραμμικού PD ως συμπλήρωμα στον βασισμένο στην παθητική δυναμική έλεγχο: η ελάχιστη επέμβαση στην δυναμική κατάσταση, με σκοπό την ομοιότητα με την παθητική συμπεριφορά και την οικονομία στην επενέργηση.

6.6 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο προσεγγίστηκε το πρόβλημα της επίτευξης βηματισμού σε οριζόντιο επίπεδο, με την προσθήκη επενέργησης στο μέχρι πρότινος παθητικό δίποδο. Αρχικά διερευνήθηκε η μορφή που θα πρέπει να έχει το σύστημα επενέργησης, και επιλέχθηκε επενέργηση με νόμο ελέγχου βασισμένο σε μοντέλο, σε δύο από τους πέντε βαθμούς ελευθερίας, καθιστώντας έτσι το τελικό μοντέλο υποεπενεργούμενο.

Για την επίτευξη της κίνησης αυτής, το μοντέλο επεκτάθηκε με την προσθήκη ενός κεντρικού περιστροφικού συνδέσμου στη θέση του ισχίου, ο οποίος κρίθηκε απαραίτητος για την έδραση δύο κινητήρων που θα κινούν ξεχωριστά τα δύο σκέλη του μοντέλου. Το νέο μοντέλο περιγράφη αναλυτικά και βρέθηκαν επαναλαμβανόμενες λύσεις του υπό δύο σχήματα ελέγχου. Αρχικά εφαρμόσθηκε απλό σχήμα ελέγχου, βασισμένου σε μοντέλο, το οποίο στη συνέχεια επεκτάθηκε με την προσθήκη μη γραμμικών PD όρων.

Οι λύσεις που προέκυψαν από αυτά τα σχήματα ελέγχου μελετήθηκαν ως προς την ομοιότητα του βηματισμού που επιτυγχάνουν με τον παθητικό βηματισμό που προσπαθούν να αναπαράξουν, αλλά και ως προς τα χαρακτηριστικά ενεργειακής κατανάλωσής τους. Επιπλέον έγιναν διερευνήσεις οι οποίες αντιστοίχισαν τόσο τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του αντίβαρου στον κεντρικό σύνδεσμο, όσο και τα κέρδη του σύνθετου ελεγκτή, με την δυναμική συμπεριφορά του νέου μοντέλου.

Οι νέες λύσεις, οι βηματισμοί δηλαδή του επαυξημένου μοντέλου στο οριζόντιο επίπεδο παρουσίασαν επαναληψιμότητα. Στην περίπτωση του απλού, βασισμένου στο μοντέλο σχήματος ελέγχου, το σύστημα δεν ήταν ευσταθές, καθώς το σχήμα αυτό παρέχει στο 4x4 υποσύστημα των σκελών ακριβώς ό,τι χρειάζεται για να κινηθεί με κάποιον ορισμένο τρόπο, χωρίς να ασχολείται με την κατάσταση του κεντρικού συνδέσμου που δρα ως αντίβαρο στο 5x5 σύστημα. Με την προσθήκη όμως των PD όρων το σύστημα μετατρέπεται σε ευσταθές, καθώς αυτοί επεμβαίνουν διορθωτικά όποτε χρειάζεται στην κατάσταση του κεντρικού συνδέσμου, και δε του επιτρέπουν να ξεφύγει από το επιθυμητό εύρος τιμών του.

Άλλες μελέτες της βιβλιογραφίας έχουν επίσης ασχοληθεί με τον σχεδιασμό πολύ-επίπεδων νόμων ελέγχου, οι οποίοι και εγγυώνται την σύγκλιση του βηματισμού σε κάποια ονομαστική τροχιά. Αυτό όμως συνήθως συνεπάγεται μεγαλύτερες ενεργειακές καταναλώσεις, καθώς απαιτείται μεγαλύτερη επέμβαση από τους κινητήρες και παραγκωνίζεται η παθητική δυναμική του συστήματος. Με το σύνθετο σχήμα ελέγχου που εφαρμόσθηκε σε αυτή την εργασία, ο συντελεστής COT του επενεργούμενου βηματισμού λαμβάνει ανταγωνιστικά χαμηλές τιμές.

Συμπερασματικά, στο κεφάλαιο αυτό αποδείχθηκε ότι το επαυξημένο μοντέλο μπορεί να καταστεί ευσταθές, και παρουσιάσθηκε το σχήμα ελέγχου που εξασφαλίζει την ευστάθεια.

7 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

Σε αυτήν την εργασία μοντελοποιήθηκε και μελετήθηκε το ανθρώπινο περπάτημα με χρήση ενός απλοποιημένου μηχανικού μοντέλου. Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται τα συμπεράσματα της μελέτης, προτείνονται ορισμένες κατευθύνσεις επέκτασής της που παρουσιάζουν ερευνητικό ενδιαφέρον, και αναφέρονται ορισμένα ερευνητικά σημεία στα οποία συνεισφέρει η εργασία.

7.1 Συμπεράσματα

Οι προσομοιώσεις που εκτελέσθηκαν με βάση το απλοποιημένο μηχανικό μοντέλο ανέδειξαν την παθητική μηχανική που το δέπει, η οποία το οδηγεί να εκτελεί επαναλαμβανόμενους βηματισμούς όταν βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο, χωρίς την ανάγκη για περατέρω επενέργηση.

Η συμπεριφορά αυτή οδηγεί σε σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με την φυσιολογία των κάτω άκρων του ανθρώπου. Ένας μηχανισμός χωρίς την ικανότητα «σκέψης» ή «δράσης» αποδεικνύεται ότι μπορεί να εκτελέσει επαναλαμβανόμενα βήματα χάρη στα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του, τα οποία επιλέχθηκαν ώστε να αντιστοιχούν σε δομές του ανθρώπινου σώματος. Αυτό υποδεικνύει ότι ο ανθρώπινος σχεδιασμός ευνοεί την εκτέλεση βημάτων, χωρίς την ανάγκη «κατάστρωσης σχεδίου» από τον εγκέφαλο ή «οδήγησης» των σκελών από τους μύες. Ο άνθρωπος μπορεί να περπατάει παθητικά, αποκλειστικά χάρη στη μορφή των κάτω άκρων του.

Σε συνθήκες διαφορετικές από αυτές που ευνοούν την εμφάνιση των παθητικών λύσεων του μοντέλου, αποδείχθηκε ότι είναι δυνατό να επιτευχθούν βηματισμοί με ελάχιστη κατανάλωση ενέργειας. Η αντιστοιχία ανάμεσα σε άνθρωπο και μοντέλο επιτρέπει ένα δεύτερο σημαντικό συμπέρασμα όσον αφορά τον άνθρωπο: η προσπάθεια που θα πρέπει να καταβάλλει σε συνθήκες που δεν ευνοούν την παθητική κίνηση των σκελών του είναι περιορισμένη.

Τα παραπάνω εξηγούν την αυθόρυμη τάση του ανθρώπου να μετακινείται περπατώντας, καθώς πρόκειται για έναν τρόπο μετακίνησης που ευνοείται από την κατασκευή των κάτω άκρων, είναι ενεργειακά οικονομικός και συνεπώς όχι επίπονος, και χρειάζεται μικρή έως καθόλου προσπάθεια.

Σε πολλές περιπτώσεις η δομή των κάτω ανθρώπινων άκρων παρουσιάζει αποκλίσεις από τον ιδανικό σχεδιασμό, οι οποίες δυσκολεύουν το περπάτημα. Η αντιστοιχία τότε ανάμεσα σε άνθρωπο και μοντέλο μπορεί να λειτουργήσει με την αντίθετη φορά, και να αντληθούν συμπεράσματα σχετικά με τα μηχανικά πρόσθετα που θα πρέπει να προσαρμοσθούν στο σώμα του ασθενούς ώστε να ανακτηθούν οι δυναμικές ιδιότητες που έχουν χαθεί. Η διερεύνηση που έγινε σχετικά με τις σχεδιαστικές παραμέτρους του μοντέλου έδωσε κατευθύνσεις για την κατασκευή προσθετικών μελών αντιστοιχίζοντας τιμές παραμέτρων με προκύπτουσες δυναμικές συμπεριφορές.

Τέλος, σχετικά με την κατασκευή πειραματικής δίποδης διάταξης, η παραμετρική διερεύνηση απέδειξε ότι είναι δυνατό να κατασκευασθούν παθητικές μηχανές τέτοιου τύπου, οι οποίες θα εκτελούν επαναλαμβανόμενους βηματισμούς σε κεκλιμένο επίπεδο. Επίσης βρέθηκε ότι με μικρή επενέργηση είναι δυνατή η ευσταθής μετακίνηση και σε οριζόντιο επίπεδο, αρκεί το δίποδο να τροποποιηθεί με την προσθήκη ενός επιπλέον στροφικού συνδέσμου και κατάλληλου νόμου ελέγχου ώστε να είναι δυνατή η έδραση δύο κινητήρων στα δύο σκέλη.

7.2 Μελλοντική Εργασία

Οι μελλοντικές επεκτάσεις αυτής της μελέτης μπορούν να χωρισθούν σε πειραματικές και θεωρητικές.

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων έδωσαν σημαντικές πληροφορίες για την λειτουργία του μηχανισμού. Το μοντέλο όμως με το οποίο εκτελέσθηκαν οι προσομοιώσεις, αν και περισσότερο σύνθετο από τα μοντέλα άλλων μελετών για το περπάτημα, έχει προκύψει από ορισμένες παραδοχές, οι οποίες επηρεάζουν σε κάποιο βαθμό τα αποτελέσματα. Με τις θεωρητικές ενδείξεις θετικές, ένα δεύτερο βήμα είναι η κατασκευή πειραματικού μοντέλου ώστε να διαπιστωθούν και στην πράξη τα όσα βρέθηκαν για το παθητικό περπάτημα μέσω των προσομοιώσεων. Μια τέτοια κατασκευή θα πρέπει να βασιστεί τις αρχές της διαστατικής ανάλυσης, ώστε το ρομπότ που θα κατασκευασθεί να παρουσιάζει ομοιότητα με αυτά των προσομοιώσεων, και η δυναμική συμπεριφορά του να είναι συγκρίσιμη με αυτή του μοντέλου που μελετήθηκε.

Την κατασκευή του παθητικού ρομπότ θα πρέπει να ακολουθήσει η επαύξηση του πειραματικού μοντέλου με την προσθήκη κεντρικού συνδέσμου και την έδραση κινητήρων, με τους οποίους θα δοκιμασθεί στην πράξη το σχήμα ελέγχου που τελικά προτάθηκε. Ακόμα, θα ήταν χρήσιμο να δοκιμασθούν και άλλα σχήματα ελέγχου που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία, ή να προταθούν νέα, και να συγκριθούν τα πειραματικά αποτελέσματα με κριτήρια ευστάθειας και ενεργειακής κατανάλωσης.

Σε θεωρητικό επίπεδο, ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση των δυνατοτήτων που θα προσέφερε στο μοντέλο μία μεταβλητή σταθερά απόσβεσης $B(t)$. Μια τέτοια υλοποίηση είναι εφικτή με τη χρήση υδραυλικών στοιχείων για τη μεταβολή της αντίστασης που προβάλλει η απόσβεση στη μεταβολή της ταχύτητας των άκρων της. Το δίποδο μοντέλο με επενέργηση είναι υποεπενεργούμενο, καθώς δεν υπάρχει έλεγχος στους γραμμικούς βαθμούς ελευθερίας των σκελών. Από τη μελέτη έχει βρεθεί ότι μία τέτοια προσθήκη δεν είναι αναγκαία καθώς η δυναμική συμπεριφορά αυτών των βαθμών ελευθερίας επηρεάζεται ελάχιστα από την κατεύθυνση της βαρύτητας και περισσότερο από τις κρούσεις με το έδαφος. Όμως σίγουρα αυτή η υπο-επενέργηση συμβάλλει στην σταδιακή απομάκρυνση της δυναμικής συμπεριφοράς του επενεργούμενου μοντέλου από τον στόχο, που είναι η αναπαραγωγή της παθητικής δυναμικής. Με την εισαγωγή μεταβλητών στοιχείων απόσβεσης, είναι δυνατός ο έλεγχος της ροής ενέργειας σε αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας: αύξηση της B αυξάνει τις ενεργειακές απώλειες στο επόμενο βήμα, ενώ μείωσή της επιφέρει τα αντίθετα αποτελέσματα. Μια τέτοια υλοποίηση πιστεύεται ότι θα επιφέρει καλύτερη αναπαραγωγή του παθητικού βηματισμού.

Επιπλέον, το μοντέλο μπορεί να βελτιωθεί με την προσθήκη κάποιου ακριβέστερου μοντέλου για την κρούση, το οποίο θα προσδίδει ενδοτικότητα στο έδαφος και θα υπολογίζει με ακρίβεια τις απώλειες λόγω κρούσης. Αυτή η προσαρμογή θα καταργήσει τις κρουστικές ασυνέχειες που εμφανίζονται στις ταχύτητες του συστήματος σε κάθε κρούση πέλματος με το έδαφος, ενώ συνολικά τα αποτελέσματα θα αντιστοιχούν με μεγαλύτερη συνέπεια στις πραγματικές συνθήκες.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι κατά την διάρκεια προσομοιώσεων με το δίποδο μοντέλο, παρατηρήθηκαν στα όρια των περιοχών ευστάθειας σταθεροί βηματισμοί οι οποίοι επαναλαμβάνονταν ανά δύο ή περισσότερα βήματα. Οι βηματισμοί αυτοί δεν προέκυψαν με την μεθοδολογία που εφαρμόσθηκε στην θεωρητική μελέτη, η οποία εντόπισε μόνο τους σταθερούς βηματισμούς που επαναλαμβάνονται ανά ένα βήμα. Η ύπαρξη τους έχει σημαντικές επεκτάσεις στην

ευρωστία του βηματισμού δίποδων ρομπότ, ενώ η αναλυτική μελέτη τους παρουσιάζει θεωρητικό ενδιαφέρον.

7.3 Συνεισφορά Εργασίας

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούν επιγραμματικά τα σημεία συνεισφοράς της εργασίας. Αυτά μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες: στα όσα αφορούν το χώρο της αποκατάστασης και των προσθετικών, και στα όσα αφορούν το αντικείμενο των δίποδων ρομπότ.

Χάρη στην ομοιότητα με τον ανθρώπινο οργανισμό που παρουσιάζει το δίποδο μοντέλο, ορισμένα από τα αποτελέσματα της μελέτης μπορούν να επεκταθούν στο πεδίο της αποκατάστασης της λειτουργίας περπατήματος για ανθρώπους που έχουν υποστεί κάποια απώλεια της κινητικότητάς τους. Αυτά είναι:

- *Ο εμπλουτισμός παγιωμένων μοντέλων για το ανθρώπινο περπάτημα με στοιχεία ενδοτικότητας και απόσβεσης, ο οποίος οδηγεί σε ακριβέστερη μελέτη του παθητικού βηματισμού μέσω προσομοιώσεων.*
- *Η αντιστοίχιση των επιμέρους απλοποιημένων μηχανικών στοιχείων με την παθητική συμπεριφορά του δίποδου μοντέλου, η οποία επιτρέπει τον προσεκτικό σχεδιασμό προσθετικών μελών με μεγάλο βαθμό ιδιοδεκτικότητας, αλλά ταυτόχρονα αυτόνομης δυναμικής συμπεριφοράς και μη επίπονης χρήσης.*
- *Η ανάδειξη της σημασίας που έχει η ενδοτική φύση των σκελών κατά το δίποδο περπάτημα, και η απεμπλοκή του ενδοτικού αυτού χαρακτήρα από τον παραδοσιακό σχεδιασμό που επιβάλλει την χρήση γονάτων, απελευθερώνοντας τις μελλοντικές σχεδιαστικές επιλογές κατά την παραγωγή προσθετικών σκελών.*

Μεγάλο μέρος της εργασίας επικεντρώθηκε στην επίτευξη βηματισμών σε οριζόντιο επίπεδο. Στον τομέα αυτόν αξίζει να σημειωθούν τα εξής:

- *Ο βασισμένος στην παθητική δυναμική σχεδιασμός του επαυξημένου μοντέλου, ο οποίος εκμεταλλεύεται τα δυναμικά χαρακτηριστικά ενός οριζόντιου και όχι κατακόρυφου αντιβάρου, απομακρύνοντας τον σχεδιασμό από τον ανθρωπομορφικό αλλά μειώνοντας τις απαιτήσεις επενέργησης.*
- *Η αποδεδειγμένη ομοιότητα των επενεργούμενων βηματισμών με τον αρχικό παθητικό, η οποία εν γένει υποδεικνύει βέλτιστη δυναμική συμπεριφορά στο οριζόντιο επίπεδο προστατεύοντας έτσι τυχόν φορτίο ή ηλεκτρονικά, ανάλογα με την εκάστοτε εφαρμογή.*
- *Τα χαμηλά επίπεδα ροπών και ισχύος που απαιτούνται για την βέλτιστη αυτή λειτουργία, χαρακτηριστικά που διευκολύνουν την επιλογή επενεργητών κατά την μελλοντική κατασκευή του ρομπότ.*

8 Βιβλιογραφία

- [1] Alexander, R., "A model of bipedal locomotion on compliant legs", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B: Biological Sciences*, 1992, 338(1284): pp. 189-198.
- [2] Asano, F. and Luo, Z.W., "The Effect of Semicircular Feet on Energy Dissipation by Heel-strike in Dynamic Biped Locomotion", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '07)*, Roma, Italy, 2007, pp.3976-3981.
- [3] Asano, F. and Luo, Z.W., "On Energy-Efficient and High-Speed Dynamic Biped Locomotion with Semicircular Feet", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '06)*, Beijing, China, 2006, pp.5901-5906.
- [4] Asano, F. and Luo, Z.W., "Dynamic Analyses of Underactuated Virtual Passive Dynamic Walking", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '07)*, Roma, Italy, 2007, pp. 3210-3217.
- [5] Asano, F. and Luo, Z.W., "Pseudo virtual passive dynamic walking and effect of upper body as counterweight", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '08)*, Nice, France, 2008, pp.2934-2939.
- [6] Asano, F., Luo, Z.W., and Yamakita, M., "Unification of dynamic gait generation methods via variable virtual gravity and its control performance analysis", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '04)*, Sendai, Japan, 2004, pp.3865-3870.
- [7] Asano, F., Luo, Z.W., and Yamakita, M., "Biped Gait Generation and Control Based on a Unified Property of Passive Dynamic Walking", *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 21, no. 4, 2005, pp. 754-762.
- [8] Bertos, G.A., Childress, D.S., and Gard, S.A., "The vertical mechanical impedance of the locomotor system during human walking with applications in rehabilitation", *9th International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR '05)*, Chicago, USA, 2005, pp.380-383.
- [9] Chyou, T., Liddell, G.F. and Paulin, M.G., "An upper-body can improve the stability and efficiency of passive dynamic walking", *Journal of Theoretical Biology*, vol. 285, no.1, 2011, pp. 126-135.
- [10] Collins, S.H. and Ruina, A., "A Bipedal Walking Robot with Efficient and Human-Like Gait", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '05)*, Barcelona, Spain, 2005, pp.1983-1988.
- [11] Espiau, B. and Goswami, A., "Compass gait revisited", *IFAC Symposium on Robot Control*, Capri, Italy, 1994, pp. 839-846.
- [12] Garcia, M., et al., "The Simplest Walking Model: Stability, Complexity, and Scaling", *Journal of Biomechanical Engineering Transactions*, vol. 120, no. 2, 1998, pp. 281-288.
- [13] Gard, S.A. and Childress, D.S., "What Determines the Vertical Displacement of the Body During Normal Walking?", *Journal of Prosthetics and Orthotics*, vol. 13, no. 3, 2001, pp. 64-67.

- [14] Groesen, E. Van and Molenaar, J., ‘*Continuum Modeling in the Physical Sciences*’, SIAM, Philadelphia, USA, 2007.
- [15] Haruna, M., et al., “Yet another humanoid walking - passive dynamic walking with torso under simple control”, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS ’01)*, Maui, USA, 2001, pp.259-264.
- [16] Hiskens, I.A., “Stability of hybrid system limit cycles: application to the compass gait biped robot”, *Proc. 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, USA, 2001, pp. 774-779.
- [17] Iosa, M., Fusco, A. et al., "Assessment of upper-body dynamic stability during walking in patients with subacute stroke", *Journal of rehabilitation research and development*, vol. 49, no. 3 ,2012, pp. 439.
- [18] Khalil, H.K., ‘*Nonlinear Systems*’, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1996.
- [19] Kuo, A.D., “Energetics of Actively Powered Locomotion Using the Simplest Walking Model”, *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 124, no. 1, 2001, pp. 113-120.
- [20] Linde, R.Q.V.D., “Active leg compliance for passive walking”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA ’98)*, Leuven, Belgium, 1998, pp. 2339-2344.
- [21] McGeer, T., “Passive Dynamic Walking”, *The International Journal of Robotics Research*, vol. 9, no. 2, 1990, pp. 62-82.
- [22] McGeer, T., “Dynamics and Control of Bipedal Locomotion”, *Journal of Theoretical Biology*, vol. 163, no. 3, 1993, pp. 277-314.
- [23] Menz, H.B., S.R. Lord, and R.C. Fitzpatrick, “Acceleration patterns of the head and pelvis when walking on level and irregular surfaces”, *Gait & Posture*, vol. 18, no. 1, 2003, pp. 35-46.
- [24] Mochon, S. and McMahon, T.A., “Ballistic walking: an improved model”, *Mathematical Biosciences*, vol. 52, no.3, 1980, pp. 241-260.
- [25] Narukawa, T., Takahashi, M. and Yoshida, K., “Biped locomotion on level ground by torso and swing-leg control based on passive-dynamic walking”, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS ’05)*, Edmonton, Canada, 2005, pp. 4009-4014.
- [26] Narukawa, T., Takahashi, M. and Yoshida, K., “Level-Ground Walk Based on Passive Dynamic Walking for a Biped Robot with Torso”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA ’07)*, Roma, Italy, 2007, pp. 3224-3229.
- [27] Owaki, D., Osuka, K., and Ishiguro, A., “On the embodiment that enables passive dynamic bipedal running”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA ’08)*, Pasadena, USA, 2008, pp. 341-346.
- [28] Pekarek, D., Ames, A.D. and Marsden, J.E., “Discrete mechanics and optimal control applied to the compass gait biped”, *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, 2007, pp. 5376-5382.
- [29] Perry, J. and Burnfield, J.M., “Gait Analysis: Normal and Pathological Function”, *Journal of Sports Science & Medicine*, vol. 9, no. 2, 2010, pp. 353.
- [30] Petter Langtangen, H. and Pedersen, G. K., ‘*Scaling of Differential Equations*’, Springer International Publishing AG., 2016.

- [31] Sasaki, H. and Yamakita, M., "Efficient Walking Control of Robot with Torso Based on Passive Dynamic Walking", *IEEE International Conference on Mechatronics (ICM '07)*, Kumamoto, Japan, 2007, pp. 1-5.
- [32] Slotine, J.J.E. and Li, W., 'Applied Nonlinear Control', Prentice Hall, New Jersey, USA, 1991.
- [33] Sonin, A.A., "The Physical Basis of DIMENSIONAL ANALYSIS", MIT, Second Edition, 2001.
- [34] Spong, M.W., "Passivity based control of the compass gait biped", *IFAC world congress*, vol. 3, pp. 19-23.
- [35] Spong, M.W. and Bhatia, G., "Further results on control of the compass gait biped", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '03)*, Las Vegas, USA, 2003, pp.1933-1938.
- [36] Usherwood, J.R., Szymanek, K.L., and Daley, M.A., "Compass gait mechanics account for top walking speeds in ducks and humans", *Journal of Experimental Biology*, vol. 211, no. 23, 2008, pp. 3744-3749.
- [37] Wisse, M., Hobbeln, D.G.E., and Schwab, A.L., "Adding an Upper Body to Passive Dynamic Walking Robots by Means of a Bisecting Hip Mechanism", *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, no.1, 2007, pp. 112-123.
- [38] Xiao, X. Ma, O. and Asano, F., "Control Walking Speed by Approximate-kinetic-model-based Self-adaptive Control on Underactuated Compass-like Bipedal Walker", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '17)*, Singapore, 2017, pp.4729-4734.

9 Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος υπό αδιάστατη μορφή. Εδώ σημειώνονται οι εξισώσεις στην φάση διπλής στήριξης, όμως οι ίδιες εξισώσεις ισχύουν και για τη φάση προώθησης, αν παραλειφθεί ο τελευταίος όρος, δηλαδή ο όρος των δυνάμεων από τους περιορισμούς.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^*(\mathbf{q}^*)\ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}^*)\dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{K}^*(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}^*) + \Pi^*(\mathbf{q}^*)\lambda^* &= \mathbf{0} \\ s_1^*(\mathbf{q}^*) = (L_1^* - \rho)\cos\theta^* - (L_2^* - \rho)\cos\psi^* &= 0 \\ s_2^*(\mathbf{q}^*) = \frac{d_0}{L_{nat}} - (L_1^* - \rho)\sin\theta^* - (L_2^* - \rho)\sin\psi^* + \rho(-\psi^* + \psi_0 - \theta^* + \theta_0) &= 0 \end{aligned}$$

Αναλυτικά για τους όρους των μητρώων:

$$\begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* & m_{13}^* & m_{14}^* \\ m_{12}^* & m_{22}^* & m_{23}^* & m_{24}^* \\ m_{13}^* & m_{23}^* & m_{33}^* & m_{34}^* \\ m_{14}^* & m_{24}^* & m_{34}^* & m_{44}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}^* \\ \ddot{L}_1^* \\ \ddot{\psi}^* \\ \ddot{L}_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{13}^* & c_{14}^* \\ c_{21}^* & c_{22}^* & c_{23}^* & c_{24}^* \\ c_{31}^* & c_{32}^* & c_{33}^* & c_{34}^* \\ c_{41}^* & c_{42}^* & c_{43}^* & c_{44}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^* \\ \dot{L}_1^* \\ \dot{\psi}^* \\ \dot{L}_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^* \\ k_2^* \\ k_3^* \\ k_4^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1^* \\ g_2^* \\ g_3^* \\ g_4^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{11}^* & \pi_{12}^* \\ \pi_{21}^* & \pi_{22}^* \\ \pi_{31}^* & \pi_{32}^* \\ \pi_{41}^* & \pi_{42}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$m_{11}^* = \left\{ (L_1^* - \rho)^2 + \rho^2 + 2\rho\cos\theta^*(L_1^* - \rho) \right\} + \mu \left\{ (L_1^* - \rho)^2 + (\lambda - \rho)^2 + 2\rho^2 + 2\rho[(L_1^* - \rho) + (\lambda - \rho)]\cos\theta^* \right\}$$

$$m_{12}^* = (1 + \mu)\rho\sin\theta^*$$

$$m_{13}^* = \mu(L_2^* - \lambda)[(L_1^* - \rho)\cos(\psi^* + \theta^*) + \rho\cos\psi^*]$$

$$m_{14}^* = \mu[\rho\sin\psi^* + (L_1^* - \rho)\sin(\psi^* + \theta^*)]$$

$$m_{22}^* = 1 + \mu$$

$$m_{23}^* = \mu(L_2^* - \lambda)\sin(\psi^* + \theta^*)$$

$$m_{24}^* = -\mu\cos(\psi^* + \theta^*)$$

$$m_{33}^* = \mu(L_2^* - \lambda)^2$$

$$m_{34}^* = 0$$

$$m_{44}^* = \mu$$

$$c_{11}^* = -\dot{\theta}^* \left\{ \mu\rho[(L_1^* - \rho) + (\lambda - \rho)]\sin\theta^* + \rho(L_1^* - \rho)\sin\theta^* \right\}$$

$$c_{12}^* = 2\dot{\theta}^*(1 + \mu)(L_1^* - \rho + \rho\cos\theta^*)$$

$$c_{13}^* = -\dot{\psi}^* \mu(L_2^* - \lambda)[(L_1^* - \rho)\sin(\psi^* + \theta^*) + \rho\sin(\psi^*)]$$

$$c_{14}^* = 2\dot{\psi}^* \mu[\rho\cos(\psi^*) + (L_1^* - \rho)\cos(\psi^* + \theta^*)]$$

$$\begin{aligned}
c_{21}^* &= -\dot{\theta}^*(1+\mu)(L_1^* - \rho) \\
c_{22}^* &= \beta \\
c_{23}^* &= \dot{\psi}\mu(L_2^* - \lambda)\cos(\psi^* + \theta^*) \\
c_{24}^* &= 2\dot{\psi}\mu\sin(\psi^* + \theta^*) \\
c_{31}^* &= -\dot{\theta}^*\mu(L_1^* - \rho)(L_2^* - \lambda)\sin(\psi^* + \theta^*) \\
c_{32}^* &= 2\dot{\theta}^*\mu(L_2^* - \lambda)\cos(\psi^* + \theta^*) \\
c_{33}^* &= 0 \\
c_{34}^* &= 2\dot{\psi}\mu(L_2^* - \lambda) \\
c_{41}^* &= -\dot{\theta}^*\mu(L_1^* - \rho)\cos(\psi^* + \theta^*) \\
c_{42}^* &= 2\dot{\theta}^*\mu\sin(\psi^* + \theta^*) \\
c_{43}^* &= -\dot{\psi}\mu(L_2^* - \lambda) \\
c_{44}^* &= \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1^* &= 0 \\
k_2^* &= \kappa(L_1^* - 1) \\
k_3^* &= 0 \\
k_4^* &= \kappa(L_2^* - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1^* &= (1+\mu)\left[\rho\sin\alpha + (L_1^* - \rho)\sin(\alpha - \theta^*)\right] + \mu(\lambda - \rho)\sin(\alpha - \theta^*) \\
g_2^* &= (1+\mu)\cos(\alpha - \theta^*) \\
g_3^* &= \mu(L_2^* - \lambda)\sin(\alpha + \psi^*) \\
g_4^* &= -\mu\cos(\alpha + \psi^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{11}^* &= (L_1^* - \rho)\sin\theta^* \\
\pi_{12}^* &= \rho + \cos\theta^*(L_1^* - \rho) \\
\pi_{21}^* &= -\cos\theta^* \\
\pi_{22}^* &= \sin\theta^* \\
\pi_{31}^* &= -(L_2^* - \rho)\sin\psi^* \\
\pi_{32}^* &= \rho + (L_2^* - \rho)\cos\psi^* \\
\pi_{41}^* &= \cos\psi^* \\
\pi_{42}^* &= \sin\psi^*
\end{aligned}$$