ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΤΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:
ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ

ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟ MATLAB

Γραμμικοποίηση των κινηματικών και των αδρανειακών όρων

- **Υπόθεση των μικρών διαταραχών:** γινόμενα και τετράγωνα -μη γραμμικοί όροι- των ποσοτήτων (u, v, w) και οι (p, q, r) αμελητέα ⇒ Απλοποιημένες εκφράσεις αδρανειακών όρων
- **Μικρές γωνίες διαταραχών:** cos(δ)≈1, sin(δ)=δ (δ σε rad)
- **Δυνάμεις λόγω ατμοσφαιρικών αναταράξεων:** $\mathrm{X_d = Y_d = Z_d = L_d = M_d = N_d = 0}$

<u>**Εξισώσεις κίνησης:**</u>

$$\mathrm{X = m\dot{u} = X_a + X_g + X_c + X_p}$$
$$\mathrm{Y = m(\dot{v} + r \cdot U_e) = Y_a + Y_g + Y_c + Y_p}$$
$$\mathrm{Z = m\left(\dot{W} - q \cdot U_e\right) = Z_a + Z_g + Z_c + Z_p}$$
$$\mathrm{L = I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} = L_a + L_g + L_c + L_p}$$
$$\mathrm{M = I_y\dot{q} = M_a + M_g + M_c + M_p}$$
$$\mathrm{N = I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} = N_a + N_g + N_c + N_p}$$

Γραμμικοποίηση των αεροδυναμικών όρων

- **Υπόθεση:** οι όροι των αεροδυναμικών δυνάμεων και ροπών εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές κίνησης και από τις παραγώγους αυτών. (άθροισμα από σειρές Taylor με κάθε σειρά να περιλαμβάνει μία μεταβλητή κίνησης ή την παράγωγο αυτης).
- Ενδεικτικά ο αεροδυναμικός όρος X_a στην εξίσωση της αξονικής δύναμης:

$$
\begin{gathered}
X_a = X_{ae} + \frac{\partial X}{\partial u}u + \mathrm{HODT}(u) + \frac{\partial X}{\partial v}v + \mathrm{HODT}(v) \\
+ \frac{\partial X}{\partial w}w + \mathrm{HODT}(w) + \frac{\partial X}{\partial p}p + \mathrm{HODT}(p) \\
+ \frac{\partial X}{\partial q}q + \mathrm{HODT}(q) + \frac{\partial X}{\partial r}r + \mathrm{HODT}(r) \\
+ \frac{\partial X}{\partial \dot{u}}\dot{u} + \mathrm{HODT}(\dot{u}) + \frac{\partial X}{\partial \dot{v}}\dot{v} + \mathrm{HODT}(\dot{v}) \\
+\text{σειρές με όρους } \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r} \\
+\text{σειρές με όρους παραγώγων μεγαλύτερης τάξης}
\end{gathered}
$$

Γραμμικοποίηση των αεροδυναμικών όρων

- Η ποσότητα X_{ae} είναι σταθερός όρος και περιγράφει τις αεροδυναμικές δυνάμεις στη μόνιμη αντισταθμισμένη κατάσταση πτήσης. Η ποσότητα HOTD περιγράφει όρους με παραγώγους ανώτερης τάξης. Καθώς οι μεταβλητές κίνησης είναι μικρές ποσότητες, μόνο οι πρώτοι όροι σε κάθε μια από τις πιο πάνω σειρές θα έχουν σημαντικό μέγεθος. Οι μόνες αξιοσημείωτες σειρές που περιλαμβάνουν παραγώγους μεγαλύτερης τάξης και που συχνά λαμβάνονται υπόψη, είναι αυτές της ποσότητας $\dot{w}$. Έτσι, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$X_a = X_{ae} + \frac{\partial X_a}{\partial u} u + \frac{\partial X_a}{\partial v} v + \frac{\partial X_a}{\partial w} w + \frac{\partial X_a}{\partial p} p + \frac{\partial X_a}{\partial q} q + \frac{\partial X_a}{\partial r} r + \frac{\partial X_a}{\partial \dot{w}} \dot{w}$$

ή εναλλακτικά:

$$X_a = X_{ae} + \widetilde{X}_u u + \widetilde{X}_v v + \widetilde{X}_w w + \widetilde{X}_p p + \widetilde{X}_q q + \widetilde{X}_r r + \widetilde{X}_{\dot{w}} \dot{w}$$

- Οι όροι $\widetilde{X}_u = \frac{\partial X}{\partial u}$,$\widetilde{X}_v = \frac{\partial X}{\partial v}$,$\widetilde{X}_w = \frac{\partial X}{\partial w}$ κλπ, ονομάζονται «αεροδυναμικές παράγωγοι ευστάθειας». Το σύμβολο «~» (περισπωμένη), δηλώνει ότι πρόκειται για διαστατές μεταβλητές.
- Ο σκοπός που γίνεται ο διαχωρισμός με την περισπωμένη «~», είναι διότι, όπως θα φανεί στη συνέχεια, υφίστανται διάφορες παραλλαγές των ορισμών των παραγώγων ευστάθειας (αδιάστατες, βορειοαμερικανική σημειολογία, συντετμημένες κ.ά.).

Οι γραμμικές συνιστώσες της βαρυτικής δύναμης

- Οι διαταραχές των δυνάμεων της βαρύτητας υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιήθηκε στις αδρανειακές δυνάμεις, εάν γραμμικοποιηθούν και οι βαρυτικές δυνάμεις. Θεωρώντας ότι οι διαταραχές θ, φ είναι μικρές:

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg\sin\Theta_e - mg\theta\cos\Theta_e \\ mg\psi\sin\Theta_e + mg\varphi\cos\Theta_e \\ mg\cos\Theta_e - mg\theta\sin\Theta_e \end{bmatrix}$$

- Επειδή η αρχή του σωματόδετου συστήματος ταυτίζεται με το κέντρο βάρους, δεν υφίσταται ροπή λόγω κάποιας συνιστώσας του βάρους, ως προς οποιονδήποτε άξονα:

$$L_g = M_g = N_g = 0$$

Οι γραμμικοί όροι αεροδυναμικού ελέγχου και ισχύος

- Ο αεροδυναμικός έλεγχος πραγματοποιείται από το πηδάλιο ανόδου-καθόδου, τα πηδάλια κλίσης και το πηδάλιο εκτροπής.
- Οι δυνάμεις και οι ροπές που δημιουργούνται από τις αποκλίσεις των πηδαλίων προκαλούνται ουσιαστικά από τις μεταβολές στις αεροδυναμικές συνθήκες.
- Οι υποθέσεις που εφαρμόζονται στους αεροδυναμικούς όρους εφαρμόζονται επίσης και στους όρους αεροδυναμικού ελέγχου. Για παράδειγμα η ροπή πρόνευσης λόγω του αεροδυναμικού ελέγχου προκύπτει:

$$\mathrm{M_c = M_{ce} + \widetilde{M}_{\delta_a}\delta_a + \widetilde{M}_{\delta_e}\delta_e + \widetilde{M}_{\delta_r}\delta_r}$$

- Η ισχύς και επομένως η ώση Τ, ελέγχεται από τη γωνία του μοχλού ελέγχου της ισχύος δ_p (μανέτα).
- Τα φαινόμενα αυτά περιγράφονται σε σχέση με τις παραγώγους ευστάθειας της ώσης του κινητήρα. Έτσι, για παράδειγμα η οριζόντια δύναμη λόγω της ώσης μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\mathrm{X_{\delta_p} = X_{pe} + \widetilde{X}_{\delta_p}\delta_p}$$

Οι εξισώσεις κίνησης για μικρές διαταραχές

- Με την αντικατάσταση των εκφράσεων των αεροδυναμικών όρων, των όρων της βαρύτητας, των όρων της ισχύος και τέλος των όρων του αεροδυναμικού ελέγχου στις εξισώσεις κίνησης και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μόνιμοι όροι των δυνάμεων και ροπών που εμφανίζονται λόγω αντιστάθμισης εξισορροπούνται στη μόνιμη κατάσταση αντιστάθμισης, προκύπτουν οι διαμήκεις εξισώσεις κίνησης μικρών διαταραχών:

$$m\dot{u} - \widetilde{X}_u u - \widetilde{X}_v v - \widetilde{X}_w w - \widetilde{X}_p p - (\widetilde{X}_q - mW_e)q - \widetilde{X}_r r - \widetilde{X}_{\dot{w}}\dot{w}$$
$$+mg\theta\cos\Theta_e = \widetilde{X}_{\delta_a}\delta_a + \widetilde{X}_{\delta_e}\delta_e + \widetilde{X}_{\delta_r}\delta_r + \widetilde{X}_{\delta_p}\delta_p$$

$$m\dot{v} - \widetilde{Y}_u u - \widetilde{Y}_v v - \widetilde{Y}_w w - \left(\widetilde{Y}_p + mW_e\right)p - \widetilde{Y}_q q - \left(\widetilde{Y}_r - mU_e\right)r - \widetilde{Y}_{\dot{w}}\dot{w}$$
$$-mg\psi\sin\Theta_e + mg\varphi\cos\Theta_e = \widetilde{Y}_{\delta_a}\delta_a + \widetilde{Y}_{\delta_e}\delta_e + \widetilde{Y}_{\delta_r}\delta_r + \widetilde{Y}_{\delta_p}\delta_p$$

$$-\tilde{Z}_u u - \tilde{Z}_v v - \tilde{Z}_w w - \tilde{Z}_p p - \left(\tilde{Z}_q + mU_e\right)q - \tilde{Z}_r r + \left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right)\dot{w}$$
$$+mg\theta\sin\Theta_e = \tilde{Z}_{\delta_a}\delta_a + \tilde{Z}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{Z}_{\delta_r}\delta_r + \tilde{Z}_{\delta_p}\delta_p$$

Οι αποσυζευγμένες διαμήκεις εξισώσεις κίνησης

- Η αποσυζευγμένη διαμήκης κίνηση νοείται ως η κίνηση του αεροσκάφους που προκύπτει ως απόκριση του αεροσκάφους σε μια διαταραχή που εφαρμόστηκε κατά το διάμηκες επίπεδο συμμετρίας Oxz. Η κίνηση αυτή επομένως περιγράφεται από τις εξισώσεις της αξονικής δύναμης X, της κάθετης δύναμης Z και της ροπής πρόνευσης M και μόνον από αυτές.
- Επίσης, η αποσυζευγμένη διαμήκης ή εγκάρσια κίνηση υποθέτει ότι οι αεροδυναμικές παράγωγοι σύζευξης είναι τόσο μικρές ώστε μπορούν να αγνοηθούν τελείως:

$$\widetilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{v}} = \widetilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{p}} = \widetilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{r}} = \tilde{\mathrm{Z}}_{\mathrm{v}} = \tilde{\mathrm{Z}}_{\mathrm{p}} = \tilde{\mathrm{Z}}_{\mathrm{r}} = \widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{v}} = \widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{p}} = \widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{r}} = 0$$

- Επειδή συνήθως οι αποκλίσεις των πηδαλίων κλίσεως και εκτροπής δεν προκαλούν κίνηση στο διάμηκες επίπεδο συμμετρίας οι πιο κάτω παράγωγοι του αεροδυναμικού ελέγχου μπορούν να θεωρηθούν επίσης μηδενικές :

$$\widetilde{\mathrm{X}}_{\delta_{\mathrm{a}}} = \widetilde{\mathrm{X}}_{\delta_{\mathrm{r}}} = \tilde{\mathrm{Z}}_{\delta_{\mathrm{a}}} = \tilde{\mathrm{Z}}_{\delta_{\mathrm{r}}} = \widetilde{\mathrm{M}}_{\delta_{\mathrm{a}}} = \widetilde{\mathrm{M}}_{\delta_{\mathrm{r}}} = 0$$

Οι αποσυζευγμένες διαμήκεις εξισώσεις κίνησης

- Λαμβάνοντας υπόψη όσα προαναφέρθηκαν, οι αποσυζευγμένες διαμήκεις εξισώσεις κίνησης είναι οι:

$$m\dot{u} - \widetilde{X}_u u - \widetilde{X}_w w - (\widetilde{X}_q - mW_e)q - \widetilde{X}_{\dot{w}}\dot{w} + mg\theta\cos\Theta_e = \widetilde{X}_{\delta_e}\delta_e + \widetilde{X}_{\delta_p}\delta_p$$

$$-\tilde{Z}_u u - \tilde{Z}_w w - \left(\tilde{Z}_q + mU_e\right)q + \left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right)\dot{w} + mg\theta\sin\Theta_e = \tilde{Z}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{Z}_{\delta_p}\delta_p$$

$$I_y\dot{q} - \widetilde{M}_u u - \widetilde{M}_w w - \widetilde{M}_q q - \widetilde{M}_{\dot{w}}\dot{w} = \widetilde{M}_{\delta_e}\delta_e + \widetilde{M}_{\delta_p}\delta_p$$

Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

1) Συναρτήσεις μεταφοράς
2) Περιγραφή στον χώρο κατάστασης

Μετασχηματισμός Laplace

- Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης f(t) ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\text{όπου} \quad s = \sigma + j\omega$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

όπου s=σ+jω, η μιγαδική μεταβλητή Laplace.

Βασικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Για τον μετασχηματισμό μιας χρονικής συνάρτησης f(t) ισχύουν:

$$\mathcal{L}[Af(t)] = A \cdot F(s)$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f(0)$$

Συναρτήσεις Μεταφοράς

- Έστω το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα που ορίζεται με τη διαφορική εξίσωση:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

- Ο μετασχηματισμός Laplace για μηδενικές αρχικές συνθήκες $y^{(n)}(0) = y^{(n-1)}(0) = \cdots = \dot{y}(0) = y(0) = u^{(n)}(0) = u^{(n-1)}(0) = \cdots = \dot{u}(0) = u(0) =$0 προκύπτει:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \cdots + b_2 s^2 U(s) + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

- Εξάγοντας κοινούς παράγοντες προκύπτει:

$$Y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = U(s)(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0)$$

Συναρτήσεις Μεταφοράς

- Τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_2 s^2+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2 s^2+a_1 s+a_0}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

όπου K: κέρδος

- Η συνάρτηση μεταφοράς είναι ο **λόγος του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης εξόδου προς τον μετασχηματισμό της συνάρτησης εισόδου** και **εκφράζει τις ιδιότητες του συστήματος, ανεξάρτητα από τη συνάρτηση εισόδου**.
- Η χαρακτηριστική εξίσωση ορίζεται εξισώνοντας τον παρονομαστή της ΣΜ με το μηδέν:

$$a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2 s^2+a_1 s+a_0=(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)=0$$

Οι **n ρίζες** της χαρακτηριστικής εξίσωσης –δηλαδή του πολυωνύμου του παρονομαστή- ονομάζονται **πόλοι** του συστήματος.

- Εξισώνοντας τον αριθμητή της ΣΜ με το μηδέν:

$$b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_2 s^2+b_1 s+b_0=(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)=0$$

Προκύπτουν οι **m ρίζες** του πολυωνύμου του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς, οι οποίες ονομάζονται **μηδενιστές** του συστήματος.

Κανόνας του Cramer

- Ο κανόνας του Cramer, είναι μια μέθοδος ταυτόχρονης επίλυσης ενός σετ γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Το σύστημα γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{A}_{n\times n}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

όπου

x, y: διανύσματα μεταβλητών (n x 1),

A: πίνακας συντελεστών.

- Τότε:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^{\mathbf{T}} \;\text{ όπου }\; C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\det(\mathbf{A}) = A_{11}M_{11} - A_{12}M_{12} + \cdots \pm A_{1n}M_{1n}$$

Άρα για κάποιο στοιχείο i του διανύσματος **x**:

$$x_i = \frac{M_{1i}y_1 + M_{2i}y_2 + \cdots + M_{ni}y_n}{A_{11}M_{11} - A_{12}M_{12} + \cdots \pm A_{1n}M_{1n}}$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

όπου

- $\mathbf{A_{ij}}$: στοιχείο του πίνακα A στη γραμμή i , στήλη j,
- $\mathbf{M_{ij}}$: υποορίζουσες πίνακα A (Ορίζουσα του υποπίνακα που δημιουργείται αν διαγραφεί η γραμμή i και η στήλη j).

Δηλαδή καταλήγει στον υπολογισμό **n υποοριζουσών για κάθε στοιχείο i του διανύσματος x**, ενώ πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στα πρόσημά τους ανάλογα με το άθροισμα (i + j).

Εξαγωγή Διαμηκών ΣΜ

- Χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, για μηδενικές αρχικές συνθήκες f(0)=0, ενώ ισχύει $q = \dot{\theta} \rightarrow \mathcal{L}[q] = \mathcal{L}\left[\dot{\theta}\right] = s\theta(s)$, οι αποσυζευγμένες διαμήκεις εξισώσεις κίνησης, μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\left(ms - \widetilde{X}_u\right)u(s) - \left(\widetilde{X}_w + \widetilde{X}_{\dot{w}}s\right)w(s) - [(\widetilde{X}_q - mW_e)s + mg\cos\Theta_e]\theta(s) = \widetilde{X}_{\delta_e}\delta_e(s) + \widetilde{X}_{\delta_p}\delta_p(s)$$

$$-\tilde{Z}_u u(s) - \left[\left(\tilde{Z}_{\dot{w}} - m\right)s + \tilde{Z}_w\right]w(s) - \left[\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right)s + mg\sin\Theta_e\right]\theta(s) = \tilde{Z}_{\delta_e}\delta_e(s) + \tilde{Z}_{\delta_p}\delta_p(s)$$

$$-\widetilde{M}_u u(s) - \left(\widetilde{M}_{\dot{w}}s + \widetilde{M}_w\right)w(s) + \left(I_y s^2 - \widetilde{M}_q s\right)\theta(s) = \widetilde{M}_{\delta_e}\delta_e(s) + \widetilde{M}_{\delta_p}\delta_p(s)$$

- Για την εξαγωγή των συναρτήσεων μεταφοράς **ως προς το πηδάλιο ανόδου-καθόδου $\boldsymbol{\delta_e}$**, θεωρώντας μηδενική την είσοδο του μοχλού ισχύος $\boldsymbol{\delta_p}$**=0**, το σετ αυτό των εξισώσεων, μπορεί να γραφτεί σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \left(ms - \widetilde{X}_u\right) & -\left(\widetilde{X}_w + \widetilde{X}_{\dot{w}}s\right) & -\left[\left(\widetilde{X}_q - mW_e\right)s + mg\cos\Theta_e\right] \\ -\tilde{Z}_u & -\left[\left(\tilde{Z}_{\dot{w}} - m\right)s + \tilde{Z}_w\right] & -\left[\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right)s + mg\sin\Theta_e\right] \\ -\widetilde{M}_u & -\left(\widetilde{M}_{\dot{w}}s + \widetilde{M}_w\right) & \left(I_y s^2 - \widetilde{M}_q s\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(s) \\ w(s) \\ \theta(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{\delta_e} \\ \tilde{Z}_{\delta_e} \\ \widetilde{M}_{\delta_e} \end{bmatrix} \{\delta_e(s)\}$$

Εξαγωγή Διαμηκών ΣΜ

- Για να εκφραστεί το σύστημα στη μορφή $\mathbf{A}_{nxn}\mathbf{x}=\mathbf{y}$ και να μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας του Cramer, διαιρείται με την είσοδο $\delta_e(s)$ και το σύστημα γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \left(ms-\widetilde{X}_u\right) & -\left(\widetilde{X}_w+\widetilde{X}_{\dot{w}}s\right) & -\left[\left(\widetilde{X}_q-mW_e\right)s+mg\cos\Theta_e\right] \\ -\tilde{Z}_u & -\left[\left(\tilde{Z}_{\dot{w}}-m\right)s+\tilde{Z}_w\right] & -\left[\left(\tilde{Z}_q+mU_e\right)s+mg\sin\Theta_e\right] \\ -\widetilde{M}_u & -\left(\widetilde{M}_{\dot{w}}s+\widetilde{M}_w\right) & \left(I_y s^2-\widetilde{M}_q s\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{u(s)}{\delta_e(s)} \\ \dfrac{w(s)}{\delta_e(s)} \\ \dfrac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{\delta_e} \\ \tilde{Z}_{\delta_e} \\ \widetilde{M}_{\delta_e} \end{bmatrix}$$

- Τότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Cramer προκύπτουν οι ΣΜ:

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)}=\frac{N_{\delta_e}^{u}(s)}{\Delta(s)} \qquad \frac{w(s)}{\delta_e(s)}=\frac{N_{\delta_e}^{w}(s)}{\Delta(s)} \qquad \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)}=\frac{N_{\delta_e}^{\theta}(s)}{\Delta(s)}$$

- Ενώ προκύπτει άμεσα και η ΣΜ:

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)}=\frac{N_{\delta_e}^{q}(s)}{\Delta(s)}=s\,\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)}$$

Εξαγωγή Διαμηκών ΣΜ

- Πλέον αναπτύσσοντας τις ορίζουσες και εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις, μπορούν να διατυπωθούν όλες οι συναρτήσεις μεταφοράς του αεροσκάφους ως προς το σωματόδετο σύστημα αξόνων του, υπό τη μορφή πολυωνύμων του s με σταθερούς συντελεστές.
- Η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\boldsymbol{\Delta(s) = A \cdot s^4 + B \cdot s^3 + C \cdot s^2 + D \cdot s + E}$$

$$A = m I_y \left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right)$$

$$B = I_y\left(\tilde{X}_u \tilde{Z}_{\dot{w}} - \tilde{X}_{\dot{w}} \tilde{Z}_u\right) - m I_y\left(\tilde{X}_u + \tilde{Z}_w\right) - m\tilde{M}_{\dot{w}}\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right) - m\tilde{M}_q\left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right)$$

$$\begin{aligned} C = {} & I_y\left(\tilde{X}_u \tilde{Z}_w - \tilde{X}_w \tilde{Z}_u\right) + \left(\tilde{X}_u \tilde{M}_{\dot{w}} - \tilde{X}_{\dot{w}} \tilde{M}_u\right)\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right) + \tilde{Z}_u\left(\tilde{X}_{\dot{w}} \tilde{M}_q - \tilde{X}_q \tilde{M}_{\dot{w}}\right) \\ & +\left(\tilde{X}_u \tilde{M}_q - \tilde{X}_q \tilde{M}_u\right)\left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right) + m\left(\tilde{M}_q \tilde{Z}_w - \tilde{M}_w \tilde{Z}_q\right) + mW_e\left(\tilde{M}_{\dot{w}} \tilde{Z}_u - \tilde{M}_u \tilde{Z}_{\dot{w}}\right) \\ & +m^2\left(\tilde{M}_{\dot{w}} g \sin\Theta_e + W_e \tilde{M}_u - U_e \tilde{M}_w\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = {} & \left(\tilde{X}_u \tilde{M}_w - \tilde{X}_w \tilde{M}_u\right)\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right) + \left(\tilde{M}_u \tilde{Z}_w - \tilde{M}_w \tilde{Z}_u\right)\left(\tilde{X}_q - mW_e\right) \\ & +\tilde{M}_q\left(\tilde{X}_w \tilde{Z}_u - \tilde{X}_u \tilde{Z}_w\right) + mg\cos\Theta_e\left[\tilde{M}_{\dot{w}} \tilde{Z}_u + \tilde{M}_u\left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right)\right] \\ & +mg\sin\Theta_e\left(\tilde{X}_{\dot{w}} \tilde{M}_u + \tilde{X}_u \tilde{M}_{\dot{w}} + m\tilde{M}_w\right) \end{aligned}$$

$$E = mg\sin\Theta_e\left(\tilde{X}_w \tilde{M}_u - \tilde{X}_u \tilde{M}_w\right) + mg\cos\Theta_e\left(\tilde{M}_w \tilde{Z}_u - \tilde{M}_u \tilde{Z}_w\right)$$

Εξαγωγή Διαμηκών ΣΜ

- Ενώ για παράδειγμα ο αριθμητής της ΣΜ της ταχύτητας ως προς το πηδάλιο ανόδου-καθόδου:

$$\mathbf{N_{\delta_e}^{u}(s) = A \cdot s^3 + B \cdot s^2 + C \cdot s + D}$$

$$A = I_y\left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right)\tilde{X}_{\delta_e} + I_y\tilde{X}_{\dot{w}}\tilde{Z}_{\delta_e}$$

$$\begin{aligned}B = &\left[-I_y\tilde{Z}_w - \tilde{M}_{\dot{w}}\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right) - \tilde{M}_q\left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right)\right]\tilde{X}_{\delta_e}\\ &+\left[I_y\tilde{X}_w - \tilde{X}_{\dot{w}}\tilde{M}_q + \tilde{M}_{\dot{w}}\left(\tilde{X}_q - mW_e\right)\right]\tilde{Z}_{\delta_e}\\ &+\left[\left(\tilde{X}_q - mW_e\right)\left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right) + \tilde{X}_{\dot{w}}\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right)\right]\tilde{M}_{\delta_e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C = &\left[\tilde{Z}_w\tilde{M}_q - \tilde{M}_w\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right) - mg\sin\Theta_e\,\tilde{M}_{\dot{w}}\right]\tilde{X}_{\delta_e}\\ &+\left[\tilde{M}_w\left(\tilde{X}_q - mW_e\right) - \tilde{X}_w\tilde{M}_q - mg\cos\Theta_e\,\tilde{M}_{\dot{w}}\right]\tilde{Z}_{\delta_e}\\ &+\left[\tilde{X}_w\left(\tilde{Z}_q + mU_e\right) - \tilde{Z}_w\left(\tilde{X}_q - mW_e\right) - mg\cos\Theta_e\left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right) - mg\sin\Theta_e\,\tilde{X}_{\dot{w}}\right]\tilde{M}_{\delta_e}\end{aligned}$$

$$D = \tilde{M}_w mg\sin\Theta_e\,\tilde{X}_{\delta_e} - \tilde{M}_w mg\cos\Theta_e\,\tilde{Z}_{\delta_e} + \left(\tilde{Z}_w mg\cos\Theta_e - \tilde{X}_w mg\sin\Theta_e\right)\tilde{M}_{\delta_e}$$

- Όμοια εξάγονται και οι αριθμητές των ΣΜ των υπόλοιπων μεταβλητών.

Περιγραφή στον χώρο κατάστασης

- Η **εξίσωση κίνησης** ή διαφορετικά η **εξίσωση κατάστασης** ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος (ΓΧΑΣ), γράφεται:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

όπου

x(t): διάνυσμα στήλη των n μεταβλητών κατάστασης που ονομάζεται **διάνυσμα κατάστασης** (state vector),

u(t): διάνυσμα στήλη των m μεταβλητών εισόδου που ονομάζεται **διάνυσμα εισόδου** (input vector),

A: (n x n) **μήτρα κατάστασης** (state matrix),

B: (n x m) **μήτρα εισόδου** (input matrix).

- Με τον ορισμό χρονικά αμετάβλητο σύστημα, εννοείται ότι τα **στοιχεία των πινάκων A και B είναι συναρτήσεις σταθερές, ανεξάρτητες του χρόνου**. Η εξίσωση κατάστασης, είναι το ισοδύναμο σε μορφή πίνακα ενός συστήματος n γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Περιγραφή στον χώρο κατάστασης

- Η **εξίσωση εξόδου** γράφεται στη γενική μορφή:

$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathrm{t})$$

όπου

y(t): διάνυσμα στήλη των r μεταβλητών εξόδου που ονομάζεται **διάνυσμα εξόδου** (output vector),

C: (r x n) **μήτρα εξόδου** (output matrix),

D: (r x m) άμεση μήτρα.

Για τα περισσότερα προβλήματα που αφορούν τα αεροσκάφη μας διευκολύνει η επιλογή των μεταβλητών εξόδου ως μεταβλητές κατάστασης, δηλαδή:

$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{x}(\mathrm{t}) \text{ και } \mathrm{r} = \mathrm{n}$$

Επομένως:

[C] = [I] (n x m) μοναδιαία μήτρα,

[D] = [0] (n x m) μηδενική μήτρα.

Εν τέλει το σύστημα παίρνει την μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathrm{t})$$

$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{I}\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \mathbf{x}(\mathrm{t})$$

Περιγραφή στον χώρο κατάστασης

- Εκτελώντας τον μετασχηματισμό Laplace στην **εξίσωση κατάστασης**, λαμβάνεται το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\mathrm{s}\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}\mathbf{X}(\mathrm{s}) + \mathbf{B}\mathbf{U}(\mathrm{s}) \Rightarrow (\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(\mathrm{s}) = \mathbf{B}\mathbf{U}(\mathrm{s})$$

- Η **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος προκύπτει ως εξής:

$$\mathrm{Det}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\mathrm{s} - \lambda_1)(\mathrm{s} - \lambda_2)\dots(\mathrm{s} - \lambda_\mathrm{n}) = 0$$

- Οι **ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$** της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται **ιδιοτιμές του πίνακα A ή πόλοι του συστήματος**. Οι πόλοι ενός συστήματος, δηλαδή οι ιδιοτιμές **καθορίζουν την ευστάθεια ή/και τη συμπεριφορά και μεταβατική απόκριση του**.

Ιδιοδιανυσματική Ανάλυση

- Ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων προκύπτει από τη σχέση:

$$(-\lambda_n \mathbf{I} + \mathbf{A})\boldsymbol{\Phi}_n = 0$$

όπου για κάθε **ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda}_n$** υπάρχει ένα **ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\Phi}_n$**:

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \begin{Bmatrix} \Phi_{1n} \\ \Phi_{2n} \\ \dots \\ \Phi_{nn} \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \Phi_{1n}, \Phi_{2n}, \dots, \Phi_{nn} \text{ εξαρτώμενες μεταξύ τους τιμές}$$

- Ο **πίνακας ιδιοδιανυσμάτων** του οποίου η **κάθε στήλη είναι το $\boldsymbol{\Phi}_n$** της λ_n ιδιοτιμής:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \cdots & \Phi_{nn} \end{bmatrix}$$

Ιδιοδιανυσματική Ανάλυση

- Έστω σταθερός πίνακας $\mathbf{A}_{nxn}$ με διακεκριμένες **ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$** και **πίνακα ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{V}_{nxn}$**. Ισχύει:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{nxn}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

όπου $\boldsymbol{\Lambda}_{nxn}$ ο **διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών**:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{n\times n}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Τότε πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα δεξιά και αριστερά, προκύπτει:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{nxn}} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$
$$\Rightarrow \mathrm{e}^{\mathbf{A}\mathrm{t}} = \mathbf{V} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}\mathrm{t}} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

όπου $\mathbf{e}^{\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{t}}$ ο **εκθετικός πίνακας**:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_{n-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Ιδιοδιανυσματική Ανάλυση

- Θέτοντας:

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} -\ \mathbf{w}_1{}^T\ - \\ \vdots \\ -\ \mathbf{w}_n{}^T\ - \end{bmatrix}$$

- Η **λύση της ομογενούς** $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ με $\mathbf{x}(0)$ γνωστό:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\mathbf{\Phi}_i\mathbf{w}_i{}^T\mathbf{x}(0)$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\mathbf{\Phi}_i\boldsymbol{\beta}_i$$

Για αυτή τη μορφή της λύσης:

- $e^{\lambda_i t}$: καθορίζει τη **μορφή της χρονικής απόκρισης**.
- $\mathbf{\Phi}_i$: καθορίζει το μέγεθος της **συνεισφοράς της κάθε κατάστασης** στη μορφή της απόκρισης.
- $\boldsymbol{\beta}_i$: καθορίζει το μέγεθος της διέγερσης της μορφής **λόγω της αρχικής συνθήκης**.

Ενώ **ανάλογα με τη μορφή της ιδιοτιμής**:

- **λ_i πραγματική**: αύξουσα ή φθίνουσα **εκθετική απόκριση**,
- **λ_i μιγαδική**: αύξουσα ή φθίνουσα **αποσβενόμενη εκθετική ημιτονοειδής απόκριση**.

Διαμήκεις εξισώσεις κίνησης στον χώρο κατάστασης

- Θεωρούνται οι διαμήκεις εξισώσεις κίνησης που αναφέρονται στο σωματόδετο σύστημα αξόνων. Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να ξαναγραφούν με τους **όρους της επιτάχυνσης στο αριστερό μέρος** ως ακολούθως:

$$m\dot{u} - \widetilde{X}_{\dot{w}}\dot{w} = \widetilde{X}_u u + \widetilde{X}_w w + (\widetilde{X}_q - mW_e)q - mg\theta\cos\Theta_e + \widetilde{X}_{\delta_e}\delta_e + \widetilde{X}_{\delta_p}\delta_p$$

$$\left(m - \tilde{Z}_{\dot{w}}\right)\dot{w} = \tilde{Z}_u u + \tilde{Z}_w w + \left(\tilde{Z}_q + mU_e\right)q - mg\theta\sin\Theta_e + \tilde{Z}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{Z}_{\delta_p}\delta_p$$

$$I_y\dot{q} - \widetilde{M}_{\dot{w}}\dot{w} = \widetilde{M}_u u + \widetilde{M}_w w + \widetilde{M}_q q\widetilde{M}_{\delta_e}\delta_e + \widetilde{M}_{\delta_p}\delta_p$$

- Αφού η διαμήκης κίνηση του αεροσκάφους, περιγράφεται με **τέσσερις μεταβλητές κατάστασης, τις u, w, q και θ** απαιτούνται **τέσσερις διαφορικές εξισώσεις**. Η **επιπλέον εξίσωση** που ισχύει **για μικρές διαταραχές** :

$$\dot{\theta} = q$$

Διαμήκεις εξισώσεις κίνησης στον χώρο κατάστασης

- Οι τέσσερις προηγούμενες εξισώσεις, μπορούν να συνδυαστούν και να γραφούν στη μορφή μιας διανυσματικής-μητρικής διαφορικής εξίσωσης ως εξής:

$$\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}'\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}'\,\mathbf{u}(\mathrm{t})$$

όπου

$$\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \begin{Bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{w} \\ \mathrm{q} \\ \theta \end{Bmatrix} \text{ και } \mathbf{u}(\mathrm{t}) = \begin{Bmatrix} \delta_e \\ \delta_p \end{Bmatrix}$$

- Οι πίνακες των συντελεστών για τις διαμήκεις εξισώσεις κίνησης **M**, **A** και **B**, είναι:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & -\tilde{X}_{\dot{w}} & 0 & 0 \\ 0 & m - \tilde{Z}_{\dot{w}} & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{M}_{\dot{w}} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \tilde{X}_u & \tilde{X}_w & \tilde{X}_q - mW_e & -mg\cos\Theta_e \\ \tilde{Z}_u & \tilde{Z}_w & \tilde{Z}_q + mU_e & -mg\sin\Theta_e \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{\delta_e} & \tilde{X}_{\delta_p} \\ \tilde{Z}_{\delta_e} & \tilde{Z}_{\delta_p} \\ \tilde{M}_{\delta_e} & \tilde{M}_{\delta_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Διαμήκεις εξισώσεις κίνησης στον χώρο κατάστασης

- Η διαμήκης εξίσωση κίνησης, προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με το αντίστροφο μητρώο της μάζας M, δηλαδή:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathrm{t})$$

με

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} x_u & x_w & x_q & x_\theta \\ z_u & z_w & z_q & z_\theta \\ m_u & m_w & m_q & m_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} x_{\delta_e} & x_{\delta_p} \\ z_{\delta_e} & z_{\delta_p} \\ m_{\delta_e} & m_{\delta_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Οι συντελεστές της **μήτρας κατάστασης A** περιλαμβάνουν τις **συντετμημένες αεροδυναμικές παραγώγους ευστάθειας** που αναφέρονται στο σωματόδετο σύστημα αξόνων.
- Η **μήτρα εισόδου B** περιλαμβάνει τις **συντετμημένες αεροδυναμικές παραγώγους ελέγχου**.

Διαμήκεις εξισώσεις κίνησης στον χώρο κατάστασης

- Με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε, προκύπτει η διαμήκης εξίσωση κατάστασης στη μορφή $\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathrm{t})$ ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_w & x_q & x_\theta \\ z_u & z_w & z_q & z_\theta \\ m_u & m_w & m_q & m_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\delta_e} & x_{\delta_p} \\ z_{\delta_e} & z_{\delta_p} \\ m_{\delta_e} & m_{\delta_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_e \\ \delta_p \end{Bmatrix}$$

ενώ η εξίσωση εξόδου:

$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{I}\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Επαύξηση χώρου κατάστασης

- Για την εκτίμηση των χαρακτηριστικών ευκολίας χειρισμού είναι πολύ χρήσιμος ο προσδιορισμός των μεταβλητών της γωνίας πρόσπτωσης α και της γωνίας του ίχνους πτήσης γ. Η μέθοδος του χώρου κατάστασης παρέχει τη δυνατότητα της άμεσης εισαγωγής επιπλέον μεταβλητών στο σύστημα με τη μέθοδο της επαύξησης του μοντέλου κατάστασης. Για κίνηση μικρών διαταραχών, όπου $\mathrm{U_e} \rightarrow \mathrm{V_{T_e}}$ όταν η διαταραχή τείνει στο μηδέν, η γωνία πρόσπτωσης:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{V_{T_e}}}$$

- Η γωνία πρόσπτωσης μπορεί να συμπεριληφθεί στη διαμήκη εξίσωση κατάστασης με δύο τρόπους. Είτε η γωνία μπορεί να προστεθεί στο διάνυσμα εξόδου $\vec{\mathrm{y}}(\mathrm{t})$ χωρίς αλλαγή του διανύσματος κατάστασης $\vec{\mathrm{x}}(\mathrm{t})$, είτε μπορεί να αντικαταστήσει την κάθετη ταχύτητα w στο διάνυσμα κατάστασης. Όταν η εξίσωση εξόδου επαυξάνεται (1η περίπτωση) η γίνεται:

$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \begin{Bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{w} \\ \mathrm{q} \\ \theta \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\mathrm{V_{T_e}}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{w} \\ \mathrm{q} \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Επαύξηση χώρου κατάστασης

- Η γωνία του ίχνους πτήσης γ μπορεί να αποδειχθεί ότι δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma = \theta - \alpha \approx \theta - \frac{w}{V_{T_e}}$$

- Τότε η εξίσωση εξόδου, επαυξάνεται περαιτέρω και γίνεται:

$$y(t) = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ \alpha \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{V_{T_e}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{V_{T_e}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Διαμήκεις συντετμημένες παράγωγοι ευστάθειας ως προς τις διαστατές παραγώγους ευστάθειας

Αεροδυναμικές

$$x_u = \frac{\widetilde{X}_u}{m} + \frac{\widetilde{X}_{\dot{w}}\widetilde{Z}_u}{m\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)} \qquad z_u = \frac{\widetilde{Z}_u}{m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}} \qquad m_u = \frac{\widetilde{M}_u}{I_y} + \frac{\widetilde{Z}_u\widetilde{M}_{\dot{w}}}{I_y\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)}$$

$$x_w = \frac{\widetilde{X}_w}{m} + \frac{\widetilde{X}_{\dot{w}}\widetilde{Z}_w}{m\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)} \qquad z_w = \frac{\widetilde{Z}_w}{m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}} \qquad m_w = \frac{\widetilde{M}_w}{I_y} + \frac{\widetilde{Z}_w\widetilde{M}_{\dot{w}}}{I_y\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)}$$

$$x_q = \frac{\widetilde{X}_q - mW_e}{m} + \frac{\widetilde{X}_{\dot{w}}\left(\widetilde{Z}_q + mU_e\right)}{m\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)} \qquad z_q = \frac{\widetilde{Z}_q + mU_e}{m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}} \qquad m_q = \frac{\widetilde{M}_q}{I_y} + \frac{\left(\widetilde{Z}_q + mU_e\right)\widetilde{M}_{\dot{w}}}{I_y\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)}$$

$$x_\theta = -g\cos\theta_e - \frac{\widetilde{X}_{\dot{w}}g\sin\Theta_e}{m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}} \qquad z_\theta = -\frac{mg\sin\Theta_e}{m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}} \qquad m_\theta = \frac{mg\sin\Theta_e\,\widetilde{M}_{\dot{w}}}{I_y\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)}$$

Ελέγχου

$$x_{\delta_e} = \frac{\widetilde{X}_{\delta_e}}{m} + \frac{\widetilde{X}_{\dot{w}}\widetilde{Z}_{\delta_e}}{m\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)} \qquad z_{\delta_e} = \frac{\widetilde{Z}_{\delta_e}}{m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}} \qquad m_{\delta_e} = \frac{\widetilde{M}_{\delta_e}}{I_y} + \frac{\widetilde{Z}_{\delta_e}\widetilde{M}_{\dot{w}}}{I_y\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)}$$

$$x_{\delta_p} = \frac{\widetilde{X}_{\delta_p}}{m} + \frac{\widetilde{X}_{\dot{w}}\widetilde{Z}_{\delta_p}}{m\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)} \qquad z_{\delta_p} = \frac{\widetilde{Z}_{\delta_p}}{m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}} \qquad m_{\delta_p} = \frac{\widetilde{M}_{\delta_p}}{I_y} + \frac{\widetilde{Z}_{\delta_p}\widetilde{M}_{\dot{w}}}{I_y\left(m - \widetilde{Z}_{\dot{w}}\right)}$$

Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων κίνησης

- Η αδιαστατοποίηση των εξισώσεων, αφορά κυρίως την απλοποίηση των εκφράσεων των παραγώγων ευστάθειας.
- Υπάρχουν διάφορες μορφές αδιαστατοποίησης των εξισώσεων κίνησης.
- Η παράμετρος αεροδυναμικής δύναμης με την οποία διαιρούνται οι εξισώσεις των δυνάμεων X,Y και Z για να αδιαστατοποιηθούν είναι:

$$\frac{1}{2}\rho V_{T_e}^2 S = Q \cdot S \quad [N]$$

- Το διάμηκες μήκος αναφοράς είναι η μέση αεροδυναμική χορδή $\bar{\bar{c}}$, ενώ το εγκάρσιο μήκος αναφοράς είναι το εκπέτασμα της πτέρυγας b. Έτσι, η παράμετρος αεροδυναμικής ροπής με την οποία διαιρείται η διαμήκης εξίσωση τις ροπής M για να αδιαστατοποιηθεί είναι:

$$\frac{1}{2}\rho V_{T_e}^2 S\bar{\bar{c}} = Q \cdot S \cdot \bar{\bar{c}} \quad [Nm]$$

- Συνεπώς ανάλογα με την μέθοδο αδιαστατοποίησης, προκύπτουν και οι ανάλογες εκφράσεις των εξισώσεων κίνησης και των παραγώγων ευστάθειας.

Βορειοαμερικανική σημειολογία

- Η πρώτη και πιο διαδεδομένη μορφή των εξισώσεων κίνησης και των παραγώγων ευστάθειας, ξεκίνησε από μελετητές στη Βόρεια Αμερική.
- Όταν τα δεδομένα των αεροσκαφών δίνονται στη βορειοαμερικανική σημειολογία, είναι συνήθως υπό την μορφή των αδιάστατων παραγώγων ευστάθειας.
- Στον πίνακα δίνονται οι εκφράσεις των διαστατών παραγώγων ευστάθειας και ελέγχου ως προς τις αδιάστατες, που χρησιμοποιούνται στη βορειοαμερικανική ανάλυση.

Αεροδυναμικές					
$X_u = \dfrac{-QS\left(C_{D_u} + 2C_{D_0}\right)}{mU_e}$	$\left[\dfrac{1}{sec}\right]$	$Z_u = \dfrac{-QS\left(C_{L_u} + 2C_{L_0}\right)}{mU_e}$	$\left[\dfrac{1}{sec}\right]$	$M_u = C_{m_u}\dfrac{QS\bar{c}}{U_e I_y}$	$\left[\dfrac{1}{ft \cdot sec}\right]$
$X_w = \dfrac{-QS\left(C_{D_\alpha} + 2C_{L_0}\right)}{mU_e}$	$\left[\dfrac{1}{sec}\right]$	$Z_w = \dfrac{-QS\left(C_{L_\alpha} + 2C_{D_0}\right)}{mU_e}$	$\left[\dfrac{1}{sec}\right]$	$M_w = C_{m_\alpha}\dfrac{QS\bar{c}}{U_e I_y}$	$\left[\dfrac{1}{ft \cdot sec}\right]$
$X_{\dot{w}} = 0$	$[-]$	$Z_{\dot{w}} = \dfrac{1}{2} \cdot C_{L_{\dot{\alpha}}}\dfrac{QS\bar{c}}{mU_e^2}$	$[-]$	$M_{\dot{w}} = \dfrac{1}{2}C_{m_{\dot{\alpha}}}\dfrac{QS\bar{c}^2}{U_e^2 I_y}$	$\left[\dfrac{1}{ft}\right]$
$X_\alpha = 0$	$\left[\dfrac{ft}{sec^2}\right]$	$Z_\alpha = U_e Z_w$	$\left[\dfrac{ft}{sec^2}\right]$	$M_\alpha = U_e M_w$	$\left[\dfrac{1}{sec^2}\right]$
$X_{\dot{\alpha}} = 0$	$\left[\dfrac{ft}{sec}\right]$	$Z_{\dot{\alpha}} = U_e Z_{\dot{w}}$	$\left[\dfrac{ft}{sec}\right]$	$M_{\dot{\alpha}} = U_e M_{\dot{w}}$	$\left[\dfrac{1}{sec}\right]$
$X_q = 0$	$\left[\dfrac{ft}{sec}\right]$	$Z_q = -\dfrac{1}{2}C_{L_q}\dfrac{QS\bar{c}}{U_e m}$	$\left[\dfrac{ft}{sec}\right]$	$M_q = \dfrac{1}{2}C_{m_q}\dfrac{QS\bar{c}^2}{U_e I_y}$	$\left[\dfrac{1}{sec}\right]$
Ελέγχου					
$X_{\delta_e} = -C_{D_{\delta_e}}\dfrac{QS}{m}$	$\left[\dfrac{ft}{sec^2}\right]$	$Z_{\delta_e} = -C_{L_{\delta_e}}\dfrac{QS}{m}$	$\left[\dfrac{ft}{sec^2}\right]$	$M_{\delta_e} = C_{m_{\delta_e}}\dfrac{QS\bar{c}}{I_y}$	$\left[\dfrac{1}{sec^2}\right]$

Διαμήκεις συντετμημένες παράγωγοι ευστάθειας ως προς τις διαστατές βορειοαμερικανικές παραγώγους ευστάθειας

- Πρακτικά, οι παράγωγοι $\boldsymbol{Z_q}$ **και** $\boldsymbol{Z_{\dot{w}}}$**, συνεισφέρουν ελάχιστα** στην απόκριση του αεροσκάφους και συνήθως αμελούνται. Η παραδοχή αυτή περιλαμβάνεται στις εκφράσεις των συντετμημένων παραγώγων που ακολουθούν και οι οποίες χρησιμοποιούνται κατά την έκφραση των εξισώσεων κίνησης στον χώρο κατάστασης.

Αεροδυναμικές		
$x_u = X_u$	$z_u = Z_u$	$m_u = M_u + M_{\dot{w}} Z_u$
$x_w = X_w$	$z_w = Z_w$	$m_w = M_{\dot{w}} Z_w + M_w$
$x_q = 0$	$z_q = U_e$	$m_q = M_{\dot{w}} U_e + M_q$
$x_\theta = -g\cos\Theta_e$	$z_\theta = -g\sin\Theta_e$	$m_\theta = -M_{\dot{w}} g\sin\Theta_e$
Ελέγχου		
$x_{\delta_e} = X_{\delta_e}$	$z_{\delta_e} = Z_{\delta_e}$	$m_{\delta_e} = M_{\delta_e} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}$
$x_{\delta_p} = X_{\delta_p}$	$z_{\delta_p} = Z_{\delta_p}$	$m_{\delta_p} = M_{\delta_p} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_p}$

Μετασχηματισμός παραγώγων ευστάθειας από το σωματόδετο στο αεροδυναμικό σύστημα

Άξονες ανέμου $(Ox_w y_w z_w)$	Σωματόδετοι άξονες $(Ox_b y_b z_b)$
$\tilde{X}_u$	$\tilde{X}_u \cdot \cos\alpha_e^2 + \tilde{Z}_w \cdot \sin\alpha_e^2 + (\tilde{X}_w + \tilde{Z}_u) \cdot \sin\alpha_e \cdot \cos\alpha_e$
$\tilde{X}_w$	$\tilde{X}_w \cdot \cos\alpha_e^2 - \tilde{Z}_u \cdot \sin\alpha_e^2 - (\tilde{X}_u - \tilde{Z}_w) \cdot \sin\alpha_e \cdot \cos\alpha_e$
$\tilde{X}_q$	$\tilde{X}_q \cdot \cos\alpha_e + \tilde{Z}_q \cdot \sin\alpha_e$
$\tilde{X}_{\dot{w}}$	$\tilde{X}_{\dot{w}} \cdot \cos\alpha_e^2 + \tilde{Z}_{\dot{w}} \cdot \sin\alpha_e \cdot \cos\alpha_e$
$\tilde{Z}_u$	$\tilde{Z}_u \cdot \cos\alpha_e^2 - \tilde{X}_w \cdot \sin\alpha_e^2 - (\tilde{X}_u - \tilde{Z}_w) \cdot \sin\alpha_e \cdot \cos\alpha_e$
$\tilde{Z}_w$	$\tilde{Z}_w \cdot \cos\alpha_e^2 + \tilde{X}_u \cdot \sin\alpha_e^2 - (\tilde{X}_w + \tilde{Z}_u) \cdot \sin\alpha_e \cdot \cos\alpha_e$
$\tilde{Z}_q$	$\tilde{Z}_q \cdot \cos\alpha_e - \tilde{X}_q \cdot \sin\alpha_e$
$\tilde{Z}_{\dot{w}}$	$\tilde{Z}_{\dot{w}} \cdot \cos\alpha_e^2 - \tilde{X}_{\dot{w}} \cdot \sin\alpha_e \cdot \cos\alpha_e$
$\tilde{M}_u$	$\tilde{M}_u \cdot \cos\alpha_e + \tilde{M}_w \cdot \sin\alpha_e$
$\tilde{M}_w$	$\tilde{M}_w \cdot \cos\alpha_e - \tilde{M}_u \cdot \sin\alpha_e$
$\tilde{M}_q$	$\tilde{M}_q$
$\tilde{M}_{\dot{w}}$	$\tilde{M}_{\dot{w}} \cdot \cos\alpha_e$
$\tilde{X}_{\delta_e}$	$\tilde{X}_{\delta_e} \cdot \cos\alpha_e + \tilde{Z}_{\delta_e} \cdot \sin\alpha_e$
$\tilde{X}_p$	$\tilde{X}_p \cdot \cos\alpha_e + \tilde{Z}_p \cdot \sin\alpha_e$
$\tilde{Z}_{\delta_e}$	$\tilde{Z}_{\delta_e} \cdot \cos\alpha_e - \tilde{X}_{\delta_e} \cdot \sin\alpha_e$
$\tilde{Z}_p$	$\tilde{Z}_p \cdot \cos\alpha_e - \tilde{X}_p \cdot \sin\alpha_e$
$\tilde{M}_{\delta_e}$	$\tilde{M}_{\delta_e}$
$\tilde{M}_p$	$\tilde{M}_p$

Συστήματα 2^{ης} τάξης

- Ένα τέτοιο σύστημα είναι το κλασσικό μηχανικό σύστημα **«μάζα-αποσβεστήρας-ελατήριο»**. Η ανάλυση του συστήματος αυτού περιέχει **βασικές ορολογίες και έννοιες** χρησιμότατες στη **μοντελοποίηση** ακόμα και **συστημάτων μεγαλύτερης τάξης**, όπως θα γίνει προφανές σε μεταγενέστερο στάδιο.
- Η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος 2^{ης} τάξης εκφράζεται ως εξής:

$$\Delta(s) = (s - p_1)(s - p_2) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης υπολογίζονται ως:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

όπου

ζ: απόσβεση,

ω_n: φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση.

Συστήματα $2^{ης}$ τάξης

- **Ανάλογα με την τιμή της απόσβεσης**, υπάρχουν τέσσερις βασικές περιπτώσεις ριζών/πόλων που αντιστοιχούν σε τέσσερις περιπτώσεις αποκρίσεων:

1) $\zeta = 0$: μηδενική απόσβεση – Επ' άπειρον ταλάντωση – Συζυγείς πόλοι πάνω στον φανταστικό άξονα.

$$p_{1,2} = \pm j\omega_n$$

2) $0 < \zeta < 1$: υπό-απόσβεση - αποσβενόμενη ταλάντωση - μιγαδικοί συζυγείς πόλοι.

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{ή} \quad p_{1,2} = -\sigma_\alpha \pm j\omega_d$$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$: αποσβενόμενη φυσική συχνότητα

$\sigma_\alpha = \zeta\omega_n$: σταθερά εξασθένησης

$T = \dfrac{1}{\sigma_\alpha} = \dfrac{1}{\zeta\omega_n}$: χρονική σταθερά

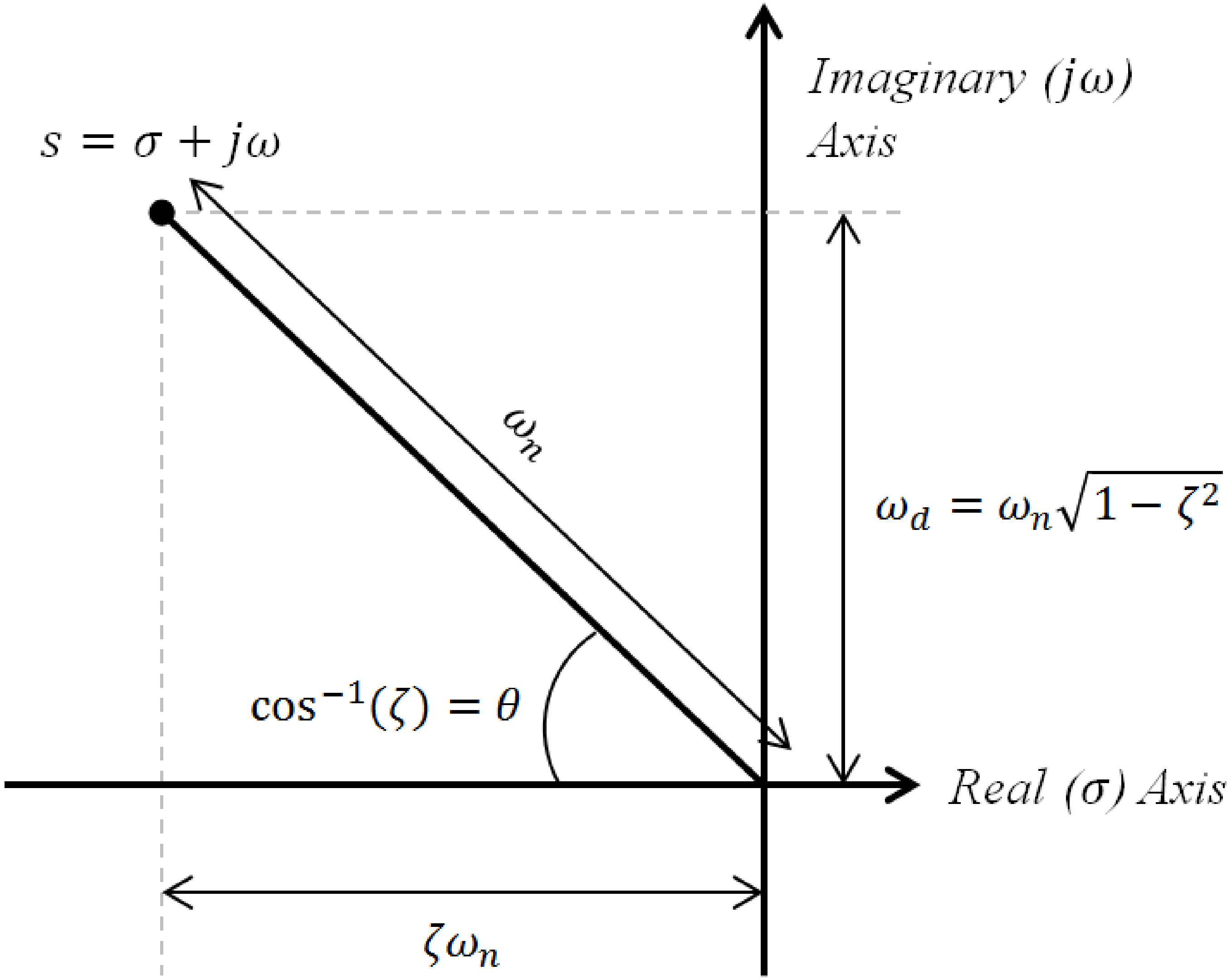
3) $\zeta = 1$: κρίσιμη απόσβεση - καθόλου ταλάντωση- πραγματικοί και ίσοι πόλοι.

$$p_1 = p_2 = -\omega_n$$

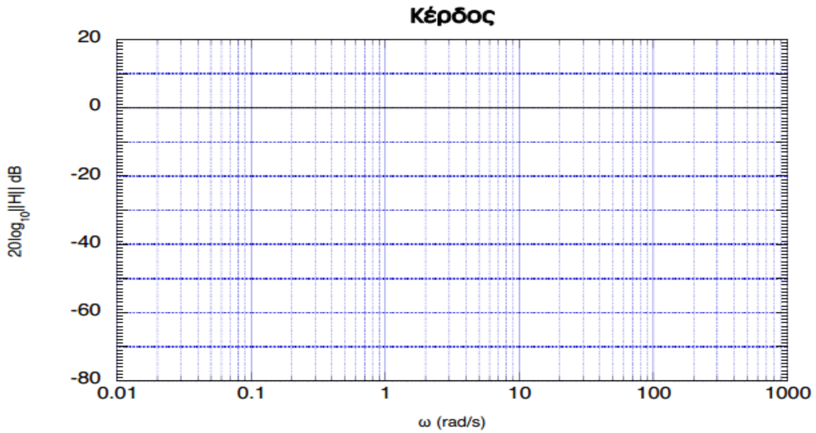
4) $\zeta > 1$: υπέρ-απόσβεση - καθόλου ταλάντωση – πραγματικοί, άνισοι και αρνητικοί πόλοι.

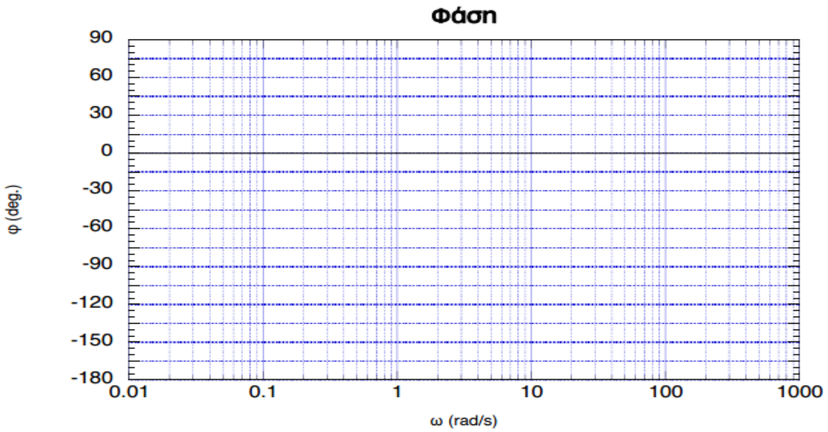
$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

Παράσταση στο μιγαδικό επίπεδο



Απόκριση συχνότητας-Διαγράμματα Bode





- Η έννοια απόκριση συχνότητας, αναφέρεται στην απόκριση μόνιμης κατάστασης ($t\rightarrow\infty$) ενός συστήματος το οποίο έχει ημιτονοειδή είσοδο σταθερού εύρους και της οποίας η συχνότητα μπορεί να μεταβάλλεται σε κάποια περιοχή.
- Η χρήση της μεθόδου αυτής έχει κάποια βασικά πλεονεκτήματα:

Γνωρίζοντας τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας του ανοιχτού βρόχου ενός γραμμικού συστήματος κλειστού βρόχου, μπορεί να διερευνηθεί η απόλυτη και σχετική ευστάθεια του.

Το κριτήριο της ευστάθειας δεν απαιτεί τον προσδιορισμό των πόλων του συστήματος.

- Η απόκριση μόνιμης κατάστασης ενός ευσταθούς ΓΧΑΣ σε μια ημιτονοειδή είσοδο, είναι ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών οι οποίες και υποτίθενται μηδενικές. Αντικαθιστώντας το s, η ΣΜ που είναι μιγαδική ποσότητα, γράφεται:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi}$$

όπου $|G(j\omega)|$ το μέτρο και φ η γωνιά της ΣΜ:

$$G(j\omega) = \sqrt{(\text{πραγματικό μέρος})^2 + (\text{φανταστικό μέρος})^2}$$

$$\varphi = \angle\, G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{πραγματικό μέρος}}{\text{φανταστικό μέρος}}\right)$$