



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΤΗΣΗΣ

ΚΕΦ.4:
ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΣΥΝΟΨΗ

- Απόκριση σε εντολές ελέγχου
- Η χαρακτηριστική εξίσωση
- Ταλάντωση πρόνευσης μικρής περιόδου
- Το φυγοειδές
- Μοντέλα χαμηλότερης τάξης
 - Η προσέγγιση της μικρής περιόδου
 - Η προσέγγιση του φυγοειδούς

Διαδικασία Ανάλυσης

Εξισώσεις κίνησης μικρών διαταραχών του αεροσκάφους



Αποσύζευξη σε διαμήκεις και εγκάρσιες-διεύθυνσης



Ξεχωριστή μελέτη των δύο αυτών μερών της δυναμικής του αεροσκάφους

- Επίλυση των διαμηκών εξισώσεων κίνησης \Rightarrow Εύρεση των συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος.
- Η συνάρτηση μεταφοράς περιγράφει πλήρως τη γραμμική δυναμική απόκριση σε μια είσοδο ελέγχου στο επίπεδο συμμετρίας.
- Τα χαρακτηριστικά ευστάθειας του αεροσκάφους, προσδιορίζουν και τις δυναμικές του ιδιότητες οι οποίες ουσιαστικά περιγράφονται από την απόκρισή του.

Αποσυζευγμένες διαμήκεις εξισώσεις κίνησης

Διαμήκεις εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{aligned} m\dot{u} - \tilde{X}_u u - \tilde{X}_w w - (\tilde{X}_q - mW_e)q - \tilde{X}_{\dot{w}}\dot{w} + mg\theta\cos\Theta_e &= \tilde{X}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{X}_{\delta_p}\delta_p \\ -\tilde{Z}_u u - \tilde{Z}_w w - (\tilde{Z}_q + mU_e)q + (m - \tilde{Z}_{\dot{w}})\dot{w} + mg\theta\sin\Theta_e &= \tilde{Z}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{Z}_{\delta_p}\delta_p \\ I_y\dot{q} - \tilde{M}_u u - \tilde{M}_w w - \tilde{M}_q q - \tilde{M}_{\dot{w}}\dot{w} &= \tilde{M}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{M}_{\delta_p}\delta_p \end{aligned}$$

Στην μορφή του χώρου κατάστασης:

Σε σχέση με τις αποκλίσεις του πηδαλίου ανόδου-καθόδου, γύρω από μια θέση ισορροπίας, καθώς η ώση διατηρείται σταθερή:

$$\delta_p = 0 \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_{\theta} \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_{\theta} \\ m_u & m_w & m_q & m_{\theta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ m_{\delta_e} \\ 0 \end{pmatrix} \delta_e$$

Απόκριση σε εντολές ελέγχου

- Οι τέσσερις συναρτήσεις μεταφοράς που προκύπτουν από αυτό το σύστημα, μπορούν να γραφούν στην κάτωθι πιο βολική μορφή:

$$\begin{aligned}\frac{u(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{N_{\delta_e}^u(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_u(s + 1/T_u)(s^2 + 2\zeta_u\omega_u s + \omega_u^2)}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)} \\ \frac{w(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{N_{\delta_e}^w(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_w(s + 1/T_\alpha)(s^2 + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha s + \omega_\alpha^2)}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)} \\ \frac{q(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{N_{\delta_e}^q(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_q s(s + 1/T_{\theta_1})(s + 1/T_{\theta_2})}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{N_{\delta_e}^\theta(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_\theta(s + 1/T_{\theta_1})(s + 1/T_{\theta_2})}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)}\end{aligned}$$

όπου

- T : χρονική σταθερά,
- ω : φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση [rad/sec],
- ζ : συντελεστής απόσβεσης,
- p (phugoid): δείκτης φυγοειδούς,
- s (short period): δείκτης μικρής περιόδου.

Η χαρακτηριστική εξίσωση

- Εκφράζοντας τις ρίζες των πολυωνύμων που προκύπτουν από τον χώρο κατάστασης, συναρτήσει των χρονικών σταθερών, των λόγων απόσβεσης και των φυσικών συχνοτήτων τότε λαμβάνονται άμεσα οι απαιτούμενες πληροφορίες που χαρακτηρίζουν τη δυναμική της απόκρισης.
- Ο κοινός παρονομαστής των συναρτήσεων μεταφοράς αποτελεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, το οποίο με τη σειρά του περιγράφει τα χαρακτηριστικά ευστάθειας του αεροσκάφους.
- Οι γενικές μορφές των αποκρίσεων των μεταβλητών, καθορίζονται από τους κοινούς παρονομαστές και «χρωματίζονται» από τους διαφορετικούς κάθε φορά αριθμητές.
- Ο αριθμητής δεν παίζει κανένα ρόλο στον καθορισμό της ευστάθειας ενός γραμμικού συστήματος.

Η χαρακτηριστική εξίσωση

- Το διάμηκες χαρακτηριστικό πολυώνυμο για ένα κλασσικό αεροσκάφος είναι 4^{ου} βαθμού, αποτελεί τον κοινό παρονομαστή των συναρτήσεων μεταφοράς και εξισώνοντας το με το μηδέν αποτελεί τη **χαρακτηριστική εξίσωση**:

$$\Delta(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$$

Παραγοντοποιείται σε δύο ζεύγη ριζών:

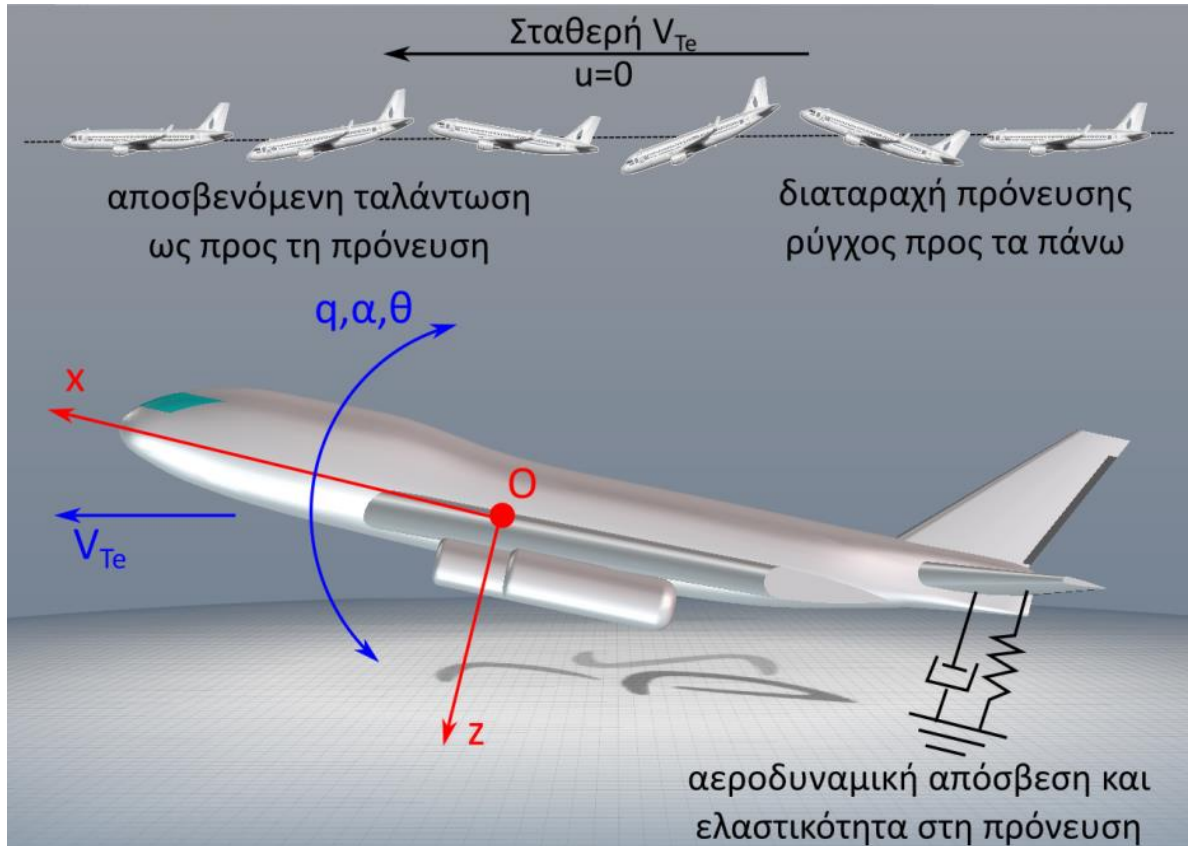
$$\Delta(s) = (s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2) = 0$$

Απόκριση αεροσκάφους = Υπέρθυση δύο μορφών ταλαντώσεων, της μικρής περιόδου και του φυγοειδούς

Χαρακτηριστική εξίσωση \equiv Σύστημα 2^{ης} τάξης μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

- Τα χαρακτηριστικά της **συχνότητας** και της **απόσβεσης** προέρχονται από τις **αεροδυναμικές ιδιότητες** του αεροσκάφους.
- Η σύνδεση μεταξύ της δυναμικής του αεροσκάφους και των αεροδυναμικών του χαρακτηριστικών \Rightarrow Παράγωγοι ευστάθειας

Ταλάντωση πρόνευσης μικρής περιόδου



Μορφή (mode) μικρής περιόδου ή αλλιώς ταχείας προσαρμογής της γωνίας πρόσπτωσης (rapid incidence adjustment):

Τυπικά είναι μία αποσβενόμενη ταλάντωση, ως προς την πρόνευση περί τον άξονα Oy.

- Κλασσική ταλάντωση 2^{ου} βαθμού:

Κυρίες μεταβλητές:

- γωνία πρόσπτωσης α_w
- ρυθμός πρόνευσης q και
- πρόνευση θ .

- Φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση:

$$\omega_s \sim 1:10 \text{ rad/sec.}$$

- Η απόσβεση ζ_s σταθεροποιεί το αεροσκάφος, αν και ο λόγος απόσβεσης είναι συχνά χαμηλότερος του επιθυμητού.

- Μικρή περίοδος της μορφής \Rightarrow οι επιδράσεις της αδράνειας και της ορμής, καθορίζουν ότι σε αυτή τη χρονική κλίμακα, η ταχύτητα U παραμένει κατά προσέγγιση σταθερή ($u=0$).

$$U = U_e + u \approx U_e$$

Ταλάντωση πρόνευσης μικρής περιόδου

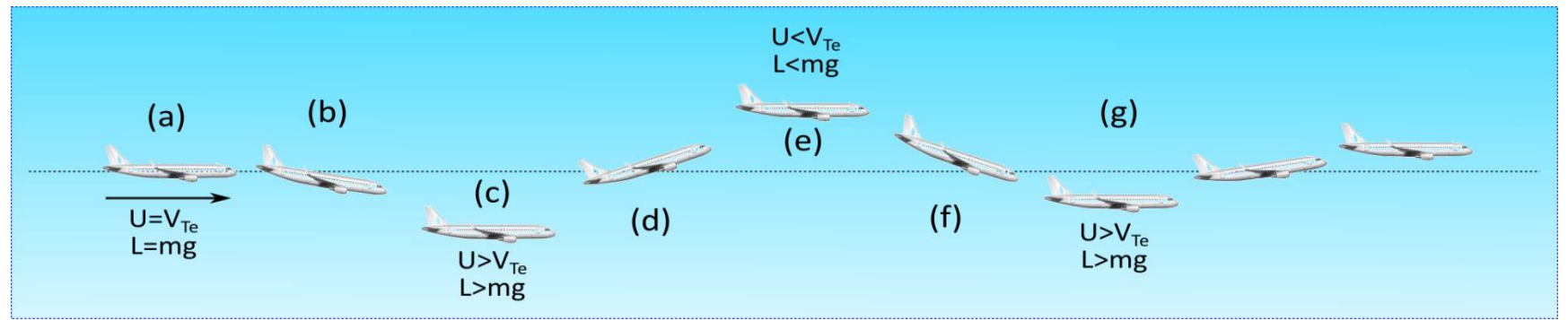
Για την κατανόηση των φυσικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα \Rightarrow Σύγκριση με το δυναμικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα:

- Το αεροσιάφος συμπεριφέρεται σαν να ήταν **αγκιστρωμένο, κατά τον άξονα Oy**, από ένα **ελατήριο** όπως στο προηγούμενο σχήμα.
- Μια διαταραχή πρόνευσης ως προς την κατάσταση ισορροπίας αναγκάζει το **ελατήριο** να παράγει μια **ροπή επαναφοράς** και επακόλουθα να προκαλεί μια ταλάντωση ως προς τη στάση πρόνευσης.
- Η **ακαμψία του ελατηρίου** έχει ως ρίζα της, τη φυσική «ανεμουριακή» **τάση** του αεροσιάφους, δηλαδή την τάση της κεφαλής ή της ουράς του αεροσιάφους να ευθυγραμμίζεται με τον σχετικό άνεμο.
- Η **απόσβεση** προκύπτει από την **κίνηση της ουράς** κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης όπου συμπεριφέρεται ως ένας συνεκτικός αποσβεστήρας κραδασμών.
- Για λόγους απλότητας, υποτίθεται ότι το **κυρίαρχο, αεροδυναμικό, δομικό κομμάτι** που καθορίζει τα **χαρακτηριστικά απόσβεσης και επαναφοράς**, είναι το **ουραίο πτέρωμα**.

Το φυγοειδές

- Ελαφρά, αποσβενόμενη ταλάντωση **χαμηλής συχνότητας** στην ταχύτητα U , συζευγμένη με τη γωνία πρόνευσης θ και το ύψος h .
- Η γωνία πρόσπτωσης α_w παραμένει ουσιαστικά σταθερή κατά τη διάρκεια της διαταραχής.
- Προσεγγιστικά, αμελείται η παρουσία των συνιστωσών του φυγοειδούς στη γωνία πρόσπτωσης α_w και στον ρυθμό πρόνευσης q .
- Φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση: $\omega_p \sim 0.1 : 1 \text{ rad/sec}$.
- Το φυγοειδές είναι μια κλασσική αποσβενόμενη αρμονική κίνηση, που οδηγεί το αεροσκάφος να πετά σε ένα ομαλό **ημιτονοειδές ίχνος πτήσης** γύρω από το ύψος της κατάστασης αντιστάθμισης.
- Οι επιδράσεις της αδράνειας και της ορμής είναι μεγάλες, άρα **το φαινόμενο είναι αργό**.
- Καθώς η **οπισθέλκουσα** προβλέπεται εξ αρχής χαμηλή, έτσι και ο λόγος απόσβεσης ζ είναι **πολύ μικρός**.
- Οι \dot{q} και \dot{w} είναι μικρές και μπορούν να αγνοηθούν.

Το φυγοειδές



(a): Αντισταθμισμένο αεροσκάφος σε οριζόντια πτήση ($L=mg$), με $U \cong V_{Te}$. Τότε δέχεται τη διαταραχή από την αντιστάθμιση.

(b): Η διαταραχή αντιστοιχεί σε μείωση της ταχύτητας κατά u . Αφού η γωνία πρόσπτωσης παραμένει ουσιαστικά σταθερή, αυτό οδηγεί σε μια μικρή μείωση της άνωσης. Το αεροσκάφος αρχίζει να χάνει ύψος και καθώς κατέρχεται αρχίζει να επιταχύνεται. Η ταχύτητα και η άνωση, συνεχίζουν να αυξάνονται, ώστε $U>V_{Te}$ και $L>mg$. Αυτό οδηγεί σε σταθερή άνοδο της κεφαλής του.

(c): Το αεροσκάφος ξεκινά την άνοδο.

(d): Καθώς πλέον έχει περίσσεια κινητικής ενέργειας, η αδράνεια και η ορμή το αναγκάζουν να ξεπεράσει το αρχικό ύψος χάνοντας παράλληλα ταχύτητα και άνωση, καθώς ανέρχεται. Όσο το αεροσκάφος επιβραδύνεται η κεφαλή του στρέφεται προς τα κάτω.

(e): Η άνωση είναι αρκετά μικρότερη από το βάρος και η επιταχυνόμενη κάθοδος ξεκινά για μια ακόμη φορά.

(f): Η αδράνεια και η ορμή εξαναγκάζουν το αεροσκάφος να συνεχίζει την κάθοδο διαμέσου του αρχικού ύψους και καθώς η ταχύτητα και η άνωση του αυξάνονται προοδευτικά, η κεφαλή του στρέφεται προς τα πάνω.

(g): Φτάνοντας σε οριζόντια θέση το αεροσκάφος ξεκινά ξανά την άνοδο και ολοκληρώνεται ο κύκλος της ταλάντωσης του φυγοειδούς.

Η κίνηση συνεχίζεται με τις επιδράσεις της οπισθέλκουσας να εξαναγκάζουν τα μέγιστα και τα ελάχιστα της κίνησης να μειώνονται προοδευτικά σε μέγεθος, έως ότου η κίνηση αποσβεστεί.

Μοντέλα χαμηλότερης τάξης

- Συχνά χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές λύσεις για την κατανόηση των φυσικών διεργασιών της δυναμικής του αεροσκάφους.

- Γενικά, για τα συμβατικά αεροσκάφη:

$$A, B, C \gg D, E$$

- Κατά προσέγγιση, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παραγοντοποιείται ως:

$$A \left(s^2 + \frac{CD - BE}{C^2} s + \frac{E}{D} \right) \left(s^2 + \frac{B}{A} s + \frac{C}{A} \right) = 0$$

- Οι συντελεστές A, B, C, D και E , είναι αλγεβρικές εκφράσεις συναρτήσεων των αεροδυναμικών παραγώγων ευστάθειας, της αδράνειας και της μάζας.
- Όμως, ακόμα και αυτές οι εκφράσεις είναι σχετικά πολύπλοκες ώστε να μπορούν να δώσουν ικανοποιητική περιγραφή των φυσικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα, γι' αυτό ακολουθείται περαιτέρω απλοποίηση των μαθηματικών σχέσεων.

Η προσέγγιση της μικρής περιόδου

- Τα βραχυπρόθεσμα χαρακτηριστικά απόκρισης ενός αεροσκάφους, έχουν εξαιρετική σημασία στον καθορισμό των χαρακτηριστικών πτήσης και ευκολίας χειρισμού.
- Η βραχυπρόθεσμη απόκριση του αεροσκάφους σε μια διαταραχή, κυριαρχείται από τη μορφή της μικρής περιόδου.

⇒ Εξίσωση κίνησης μειωμένης τάξης, όπου παραλείπονται οι μεταβλητές κατάστασης στις οποίες επιδρά το φυγοειδές.

- Βραχυπρόθεσμα, η ταχύτητα U ($u = 0$) παραμένει ουσιαστικά σταθερή, επομένως η εξίσωση της ταχύτητας αλλά και οι όροι που εξαρτώνται από την ταχύτητα μπορούν να παραλειφθούν από τις διαμήκεις εξισώσεις κίνησης.
- Υποθέτοντας ότι η εξίσωση κίνησης αναφέρεται στους άξονες του ανέμου και το αεροσκάφος είναι αρχικά σε μόνιμη-σταθερή και οριζόντια πτήση:

$$\gamma_e = 0 \quad U_e = V_{T_e}$$

- Από τις συντετμημένες εκφράσεις των παραγώγων ευστάθειας, προκύπτει $z_\theta = m_\theta = 0$. Άρα:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_w & z_q \\ m_w & m_q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z_{\delta_e} \\ m_{\delta_e} \end{Bmatrix} \delta_e$$

Η προσέγγιση της μικρής περιόδου

- Το μητρώο της συνάρτησης μεταφοράς να μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\begin{bmatrix} z_{\delta_e} \left[s - \left(m_q - z_q \frac{m_{\delta_e}}{z_{\delta_e}} \right) \right] \\ m_{\delta_e} \left[s + \left(m_w \frac{z_{\delta_e}}{m_{\delta_e}} - z_w \right) \right] \end{bmatrix}}{s^2 - (m_q + z_w)s + (m_q z_w - m_w z_q)}$$

- Μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω παρατηρώντας ότι:

$$\left| z_q \frac{m_{\delta_e}}{z_{\delta_e}} \right| \gg |m_q|, |z_w| \gg \left| m_w \frac{z_{\delta_e}}{m_{\delta_e}} \right|, \left. \begin{matrix} \tilde{Z}_q \ll m U_e \\ m \gg \tilde{Z}_w \end{matrix} \right\} z_q = \frac{\tilde{Z}_q + m U_e}{m - \tilde{Z}_w} \cong U_e$$

- Τότε προκύπτουν οι δύο βραχυπρόθεσμες συναρτήσεις μεταφοράς που περιγράφουν την απόκριση στην πηδάλιο ανόδου-καθόδου:

$$\frac{w(s)}{\delta_e(s)} = \frac{z_{\delta_e}(s + U_e m_{\delta_e}/z_{\delta_e})}{s^2 - (m_q + z_w)s + (m_q z_w - m_w U_e)} \equiv \frac{k_w(s + 1/T_a)}{s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2}$$
$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{m_{\delta_e}(s - z_w)}{s^2 - (m_q + z_w)s + (m_q z_w - m_w U_e)} \equiv \frac{k_q(s + 1/T_{\theta_2})}{s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2}$$

- Τα k_w , k_q , T_a , T_{θ_2} , ζ_s και ω_s αντιπροσωπεύουν προσεγγιστικά μεγέθη.

Η προσέγγιση της μικρής περιόδου

- Πλέον η χαρακτηριστική εξίσωση μειωμένης τάξης:

$$\Delta(s) = s^2 - (m_q + z_w)s + (m_q z_w - m_w U_e)$$

- Σε αναλογία με την κλασσική διάταξη της μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συντετμημένων παραγώγων ως προς τις διαστατές παράγωγους ευστάθειας και θεωρώντας τις αριθμητικές τιμές των σχετικών αεροδυναμικών παραγώγων ευστάθειας για το τυπικό συμβατικό αεροσκάφος, **χονδρικά η απόσβεση και η φυσική συχνότητα της μικρής περιόδου** δίνονται ως:

$$2\zeta_s \omega_s = -\frac{\tilde{M}_q}{I_{yy}}, \omega_s = \sqrt{-\frac{\tilde{M}_w U_e}{I_{yy}}}$$

- Συνήθως η \tilde{M}_q , που εξαρτάται κυρίως από τις ιδιότητες απόσβεσης του ουραίου πτερώματος, είναι αρνητική.
- Η \tilde{M}_w είναι ένα μέτρο της αεροδυναμικής δυσκαμψίας πρόνευσης, ενώ και αυτή κυριαρχείται από την αεροδυναμική του ουραίου πτερώματος. Το πρόσημο της \tilde{M}_w εξαρτάται από τη θέση του κέντρου βάρους και μάλιστα όσο αυτό κινείται προς τα εμπρός στην άτρακτο, τόσο μεγαλύτερες αρνητικές τιμές παίρνει αυτή η παράγωγος.

- Από την ανάλυση του κεφαλαίου 2, περί της διαμήκους στατικής ευστάθειας:

$$C_{m_\alpha} = \frac{dC_m}{d\alpha} < 0, C_{m_\alpha} = C_{L_{\alpha w}} \left(\frac{x_{cg}}{\bar{c}} - \frac{x_{ac}}{\bar{c}} \right) - \eta V_H C_{L_{\alpha t}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right)$$

- Η μικρή περίοδος θα είναι **ευσταθής εφόσον το κέντρο βάρους βρίσκεται αρκετά μπροστά** στο αεροσκάφος. Η θέση του κέντρου βάρους στην άτρακτο, όπου η παράγωγος \tilde{M}_w **αλλάζει πρόσημο**, είναι το **ουδέτερο σημείο** με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα.

$$\frac{x_{NP}}{\bar{c}} = \frac{x_{ac}}{\bar{c}} + \eta V_H \frac{C_{L_{\alpha t}}}{C_{L_{\alpha w}}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right)$$

- Έτσι, η \tilde{M}_w , αποτελεί επίσης ένα **μέτρο του περιθωρίου ευστάθειας** με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα που εκφράστηκε ως:

$$\frac{x_{NP}}{\bar{c}} - \frac{x_{cg}}{\bar{c}}$$

- Η θέση του κέντρου βάρους, όπου η έκφραση $(m_q z_w - m_w U_e)$ αλλάζει πρόσημο, ονομάζεται σημείο ελιγμού με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα (controls fixed manoeuvre point) και αποτελεί αντίστοιχα ένα μέτρο του περιθωρίου ελιγμών με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα (controls fixed manoeuvre margin).

Η προσέγγιση του φυγοειδούς

- Η ταλάντωση του φυγοειδούς, εξελίσσεται **πολύ αργά** και μπορεί να τη διαχειριστεί εύκολα ο πιλότος. Γι' αυτό, σπάνια απαιτείται η ύπαρξη ενός μοντέλου μειωμένης τάξης που θα διατηρεί μόνο τη δυναμική του φυγοειδούς.
- Ένα τέτοιο μοντέλο όμως, χρησιμεύει στον **προσδιορισμό των αεροδυναμικών ιδιοτήτων της κατασκευής**, που καθορίζουν τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά του φυγοειδούς.
- Οι **w και q** αποκρίνονται σε χρονική κλίμακα που σχετίζεται με τη μικρή περίοδο, έτσι υποθέτονται **ψευδοστατικές στη χρονική κλίμακα του φυγοειδούς**. Υποθέτοντας επίσης ότι οι εξισώσεις κίνησης αναφέρονται στους **άξονες του ανέμου** και ότι η διαταραχή λαμβάνει χώρα γύρω από τη μόνιμη και οριζόντια πτήση:

$$\dot{w} = \dot{q} = 0, \quad \gamma_e = 0, \quad U_e = V_{T_e}$$

- Για τις συντετμημένες αεροδυναμικές παραγώγους ευστάθειας ισχύουν:

$$x_\theta = -g \quad \text{και} \quad z_\theta = m_\theta = 0 \quad \text{και} \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{z}_q \ll mU_e \\ m \gg \tilde{z}_w \end{array} \right\} z_q = \frac{\tilde{z}_q + mU_e}{m - \tilde{z}_w} \cong U_e$$

- Επιπλέον, συνήθης υπόθεση είναι ότι η αεροδυναμική παράγωγος x_q , είναι πολύ μικρή ποσότητα.

Η προσέγγιση του φυγοειδούς

- Πλέον, η εξίσωση κίνησης απλοποιείται ως:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_w & 0 & -g \\ z_u & z_w & U_e & 0 \\ m_u & m_w & m_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_{\delta_e} \\ z_{\delta_e} \\ m_{\delta_e} \\ 0 \end{Bmatrix} \delta_e$$

- Από τη δεύτερη και τρίτη γραμμή της εξίσωσης, επιλύοντας αλγεβρικά τα w και q ως προς τα u και δ_e και αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τρίτη γραμμή, προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u - x_w \frac{m_u U_e - m_q z_u}{m_w U_e - m_q z_w} & -g \\ \frac{m_u z_w - m_w z_u}{m_w U_e - m_q z_w} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_{\delta_e} - \frac{m_{\delta_e} U_e - m_q z_{\delta_e}}{m_w U_e - m_q z_w} \\ \frac{m_{\delta_e} z_w - m_w z_{\delta_e}}{m_w U_e - m_q z_w} \end{Bmatrix} \delta_e$$

δηλαδή υπό τη μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A_p} \mathbf{x} + \mathbf{B_p} \mathbf{u}$$

- Τότε, η χαρακτηριστική εξίσωση μειωμένης τάξης του φυγοειδούς, προκύπτει:

$$\Delta(s) = s^2 - \left(x_u - x_w \frac{m_u U_e - m_q z_u}{m_w U_e - m_q z_w} \right) s + \left(\frac{m_u z_w - m_w z_u}{m_w U_e - m_q z_w} \right) g$$

Η προσέγγιση του φυγοειδούς

- Για ένα συμβατικό αεροσκάφος σε υποηχητική πτήση μπορεί να θεωρηθεί:

$$m_u \rightarrow 0, \quad |m_u z_w| \ll |m_w z_u| \quad \text{και} \quad |m_w U_e| \gg |m_q z_w|$$

- Η \tilde{X}_u είναι τόσο μικρή ώστε να μπορεί να παραληφθεί, ενώ ισχύει $m \gg \tilde{Z}_u$, τότε:

$$x_u \cong \frac{\tilde{X}_u}{m} = \frac{\rho V_{T_e} S X_u}{2m} \quad \text{και} \quad z_u \cong \frac{\tilde{Z}_u}{m} = \frac{\rho V_{T_e} S Z_u}{2m}$$

- Από την υπόθεση υποηχητικών συνθηκών πτήσης, οι αεροδυναμικές ιδιότητες της ατράκτου δεν επηρεάζονται από τα φαινόμενα συμπίεστικότητας:

$$X_u = -2C_D - V_{T_e} \frac{\partial C_D}{\partial V} + \frac{1}{\frac{1}{2} \rho V_{T_e} S} \frac{\partial \tau}{\partial V} \cong -2C_D$$
$$Z_u = -2C_L - V_{T_e} \frac{\partial C_L}{\partial V} \cong -2C_L$$

- Πλέον, οι εκφράσεις για την απόσβεση και τη φυσική συχνότητα γίνονται:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2g^2}{U_e V_{T_e}}} \equiv \frac{g\sqrt{2}}{V_{T_e}} \quad , \quad \zeta_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C_D}{C_L}$$

- Φυσικά, αυτές οι εκφράσεις είναι πολύ προσεγγιστικές. Η έκφραση για την ω_p , αποδεικνύει ότι η φυσική συχνότητα του φυγοειδούς είναι **περίπου αντιστρόφως ανάλογη με την ταχύτητα αντιστάθμισης**.
- Επίσης, πολύ ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι **ο λόγος απόσβεσης του φυγοειδούς είναι περίπου αντιστρόφως ανάλογος του λόγου άνωσης προς οπισθέλκουσα του αεροσκάφους**. Εφόσον ένας από τους κύριους αντικειμενικούς σκοπούς του μηχανικού είναι η επίτευξη μεγάλου λόγου άνωσης προς οπισθέλκουσα, γίνεται εύκολα κατανοητό γιατί η **απόσβεση του φυγοειδούς είναι συνήθως πολύ χαμηλή**.

Μοντέλα χαμηλότερης τάξης -Σύνοψη

Συνοπτικά για τα μοντέλα χαμηλότερης τάξεως, προκύπτει ότι οι κυριότερες παράγωγοι ευστάθειας που εμπλέκονται, είναι:

- \tilde{M}_q : απόσβεση μικρής περιόδου,
- \tilde{M}_w : συχνότητα μικρής περιόδου,
- \tilde{X}_u : απόσβεση φυγοειδούς,
- \tilde{Z}_u : συχνότητα φυγοειδούς.