Δυναμική Πτήσης

Σπύρος Βουτσινάς

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ

Τομέας Ρευστών, Εργ. Αεροδυναμικής

2107721096 spyros@fluid.mech.ntua.gr

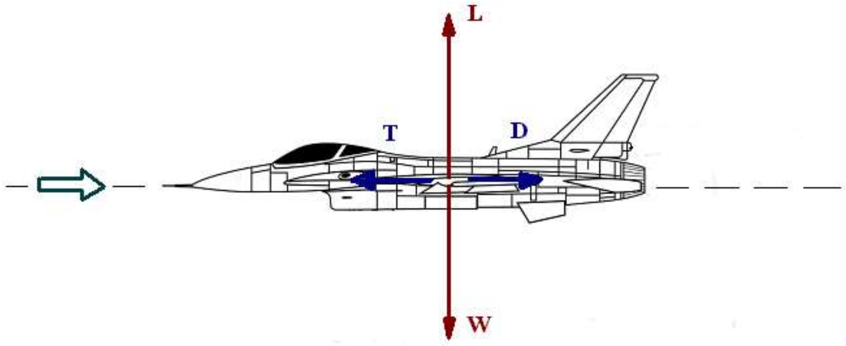
Περιεχόμενα

1. Επισκόπηση
2. Τυπική περιγραφή αεροσκάφους
3. Μικρή επανάληψη στην Αεροδυναμική
4. **Μικρή επανάληψη στις κινήσεις**
5. **Οι εξισώσεις κίνησης**
6. Η κίνηση & πηδαλιουχία ως δυναμικό πρόβλημα
7. Μικρή επανάληψη από τα μαθηματικά των δυναμικών συστημάτων
8. Τα αεροδυναμικά φορτία και οι παράγωγοι τους
9. Στατική Ευστάθεια
10. Δυναμική Ευστάθεια
11. Έλεγχος - πηδαλιουχία

Μικρή επανάληψη στις κινήσεις

- Βασικές κινήσεις
  - Οριζόντια (ομαλή) πτήση σε μη-μηδενικό ύψος
  - Περιστροφές (οριζόντια / κατακόρυφη)
  - Άνοδος / Κάθοδος (ομαλή)
  - Απογείωση / προσγείωση
- Στη Δυναμική Πτήσης κατ΄αρχήν ενδιαφερόμαστε για την πτήση σε μη μηδενικό ύψος όπου εξετάζουμε
  - Την αντιστάθμιση (των αεροδυναμικών φορτίων) ώστε το αεροσκάφος να πετάει όπως θέλουμε – *αναφέρεται στο σχεδιασμό του αεροσκάφους*
  - Τη δυνατότητα του αεροσκάφους να αμβλύνει/αποσβέσει τις όποιες εξωτερικές (μικρές) διαταραχές – *αναφέρεται στην στατική ευστάθεια*
  - Τη δυνατότητα του αεροσκάφους να ακολουθεί συγκεκριμένη πορεία – *αναφέρεται στη πηδαλιουχία και τον έλεγχο*

Οριζόντια πτήση

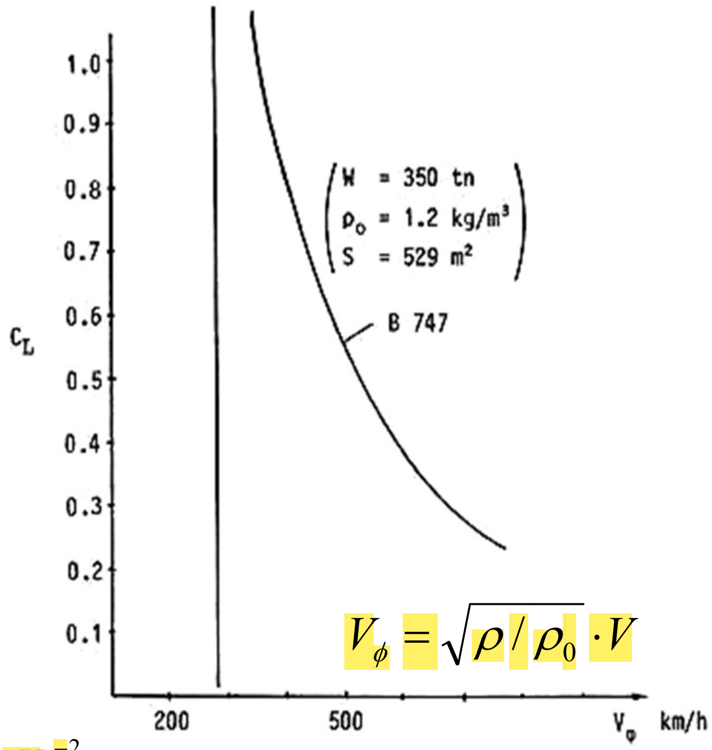


$$L = W \qquad L = C_L \cdot (\rho/2) \cdot V^2 \cdot S$$

$$T = D \qquad D = C_D \cdot (\rho/2) \cdot V^2 \cdot S$$

$$V = \left\{ \frac{W}{1/2 \cdot \rho \cdot S \cdot C_L} \right\}^{1/2}$$

$$V_{\min} = \left\{ \frac{W}{1/2 \cdot \rho \cdot S \cdot C_{L,\max}} \right\}^{1/2} \qquad C_L = \left\{ \frac{W}{1/2 \cdot \rho_0 \cdot S} \right\} \cdot V_\phi^{-2}$$



$$V_\phi = \sqrt{\rho/\rho_0} \cdot V$$

Άνοδος – Κάθοδος

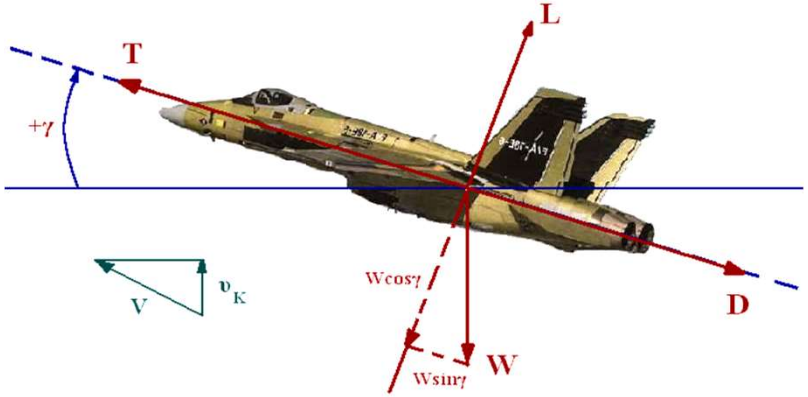
$$L = W\cos\gamma \quad T = D \pm W\sin\gamma$$

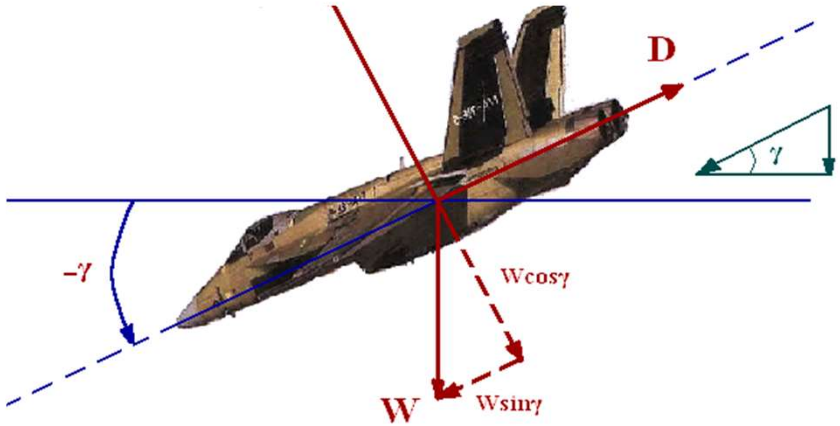
$$\upsilon_K = V\sin\gamma \quad \sin\gamma = \pm\frac{T-D}{W}$$

$$\frac{dh}{dt} = \pm\frac{T\cdot V - D\cdot V}{W}$$

Για μικρές γωνίες:

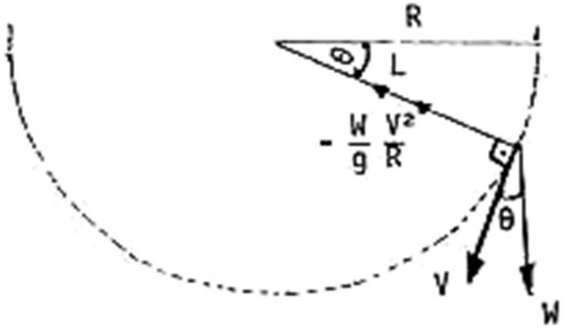
$$L \cong W \quad \gamma = \frac{D}{W} = \frac{C_D}{C_L}$$





Ελιγμοί

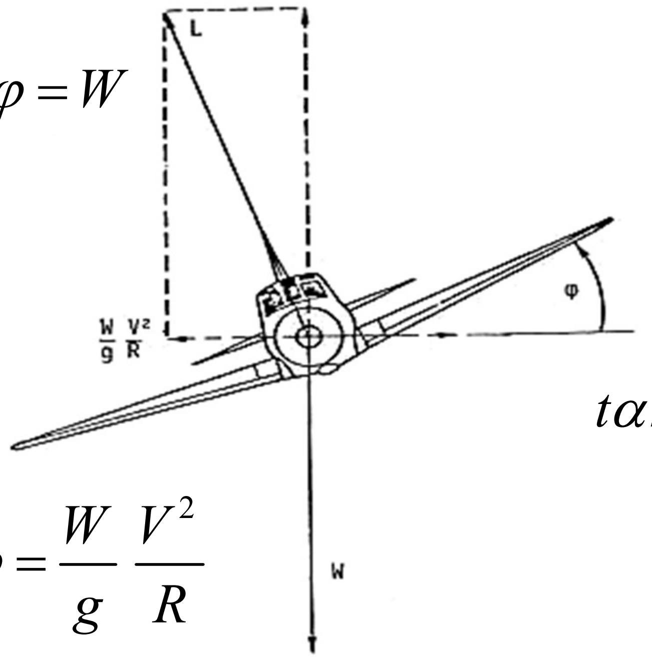
Περιστροφές: Rolling, pitching, yawing, diving



$$L = W\sin\theta + \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}$$

$$T = D - W\cos\theta$$

$$L\cos\varphi = W$$



$$\tan\varphi = \frac{V^2}{gR}$$

$$L\sin\varphi = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}$$

Οι εξισώσεις κίνησης

1. Συστήματα συντεταγμένων
2. Μεγέθη

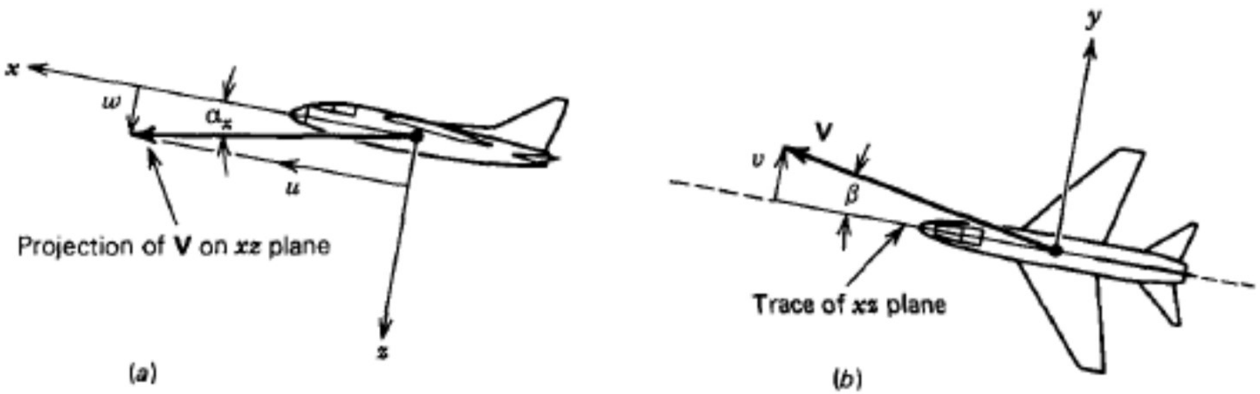
    Θέση & προσανατολισμός, γραμμική & γωνιακή ταχύτητα, δυνάμεις & ροπές

3. «Γεωμετρία» του αεροσκάφους – αντιστάθμιση
4. Εξισώσεις ισορροπίας

    Ισορροπία δυνάμεων ροπών

1. Συστήματα συντεταγμένων

Τα αεροσκάφη δεν πετούν με «καλό» προσανατολισμό της ταχύτητας τους

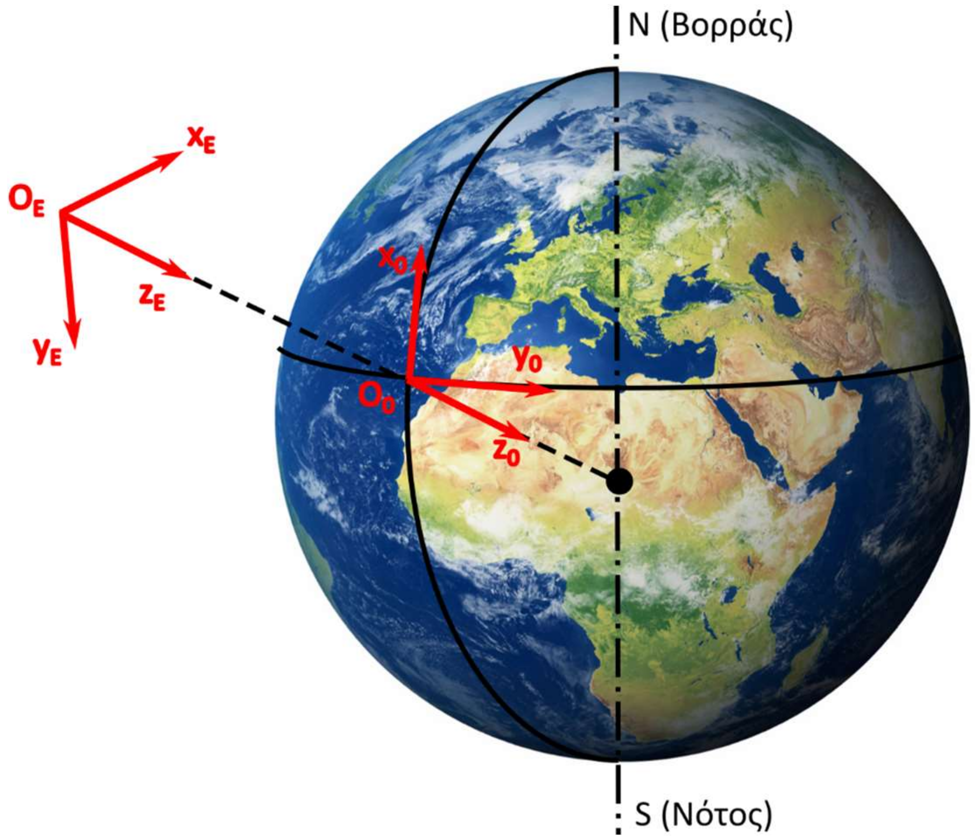


Από αυτό προκύπτει η ανάγκη ορισμού κατ' αρχήν δύο συστημάτων:

- το σωματόδετο δηλαδή αυτό που αναφέρεται στη γεωμετρία του αεροσκάφους (όπως π.χ. είναι στο υπόστεγο)
- Το σύστημα που αναφέρεται στη κίνηση

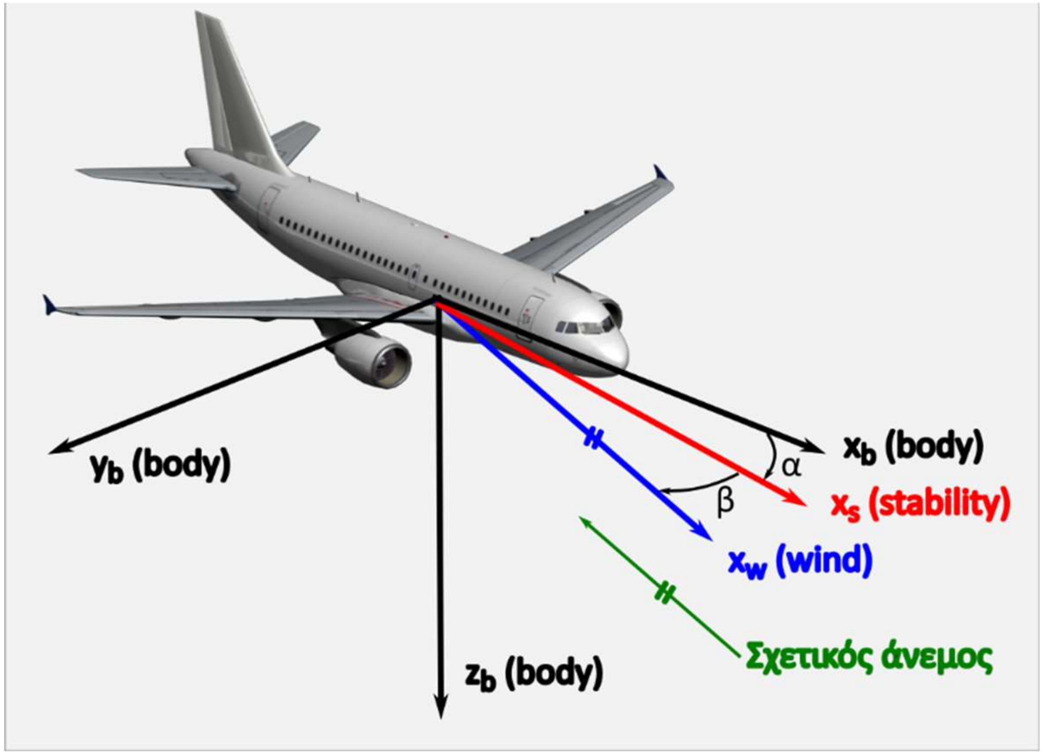
Όμως αυτά δεν αρκούν. Χρειαζόμαστε και ένα ακίνητο / αδρανειακό σύστημα

1. Συστήματα συντεταγμένων



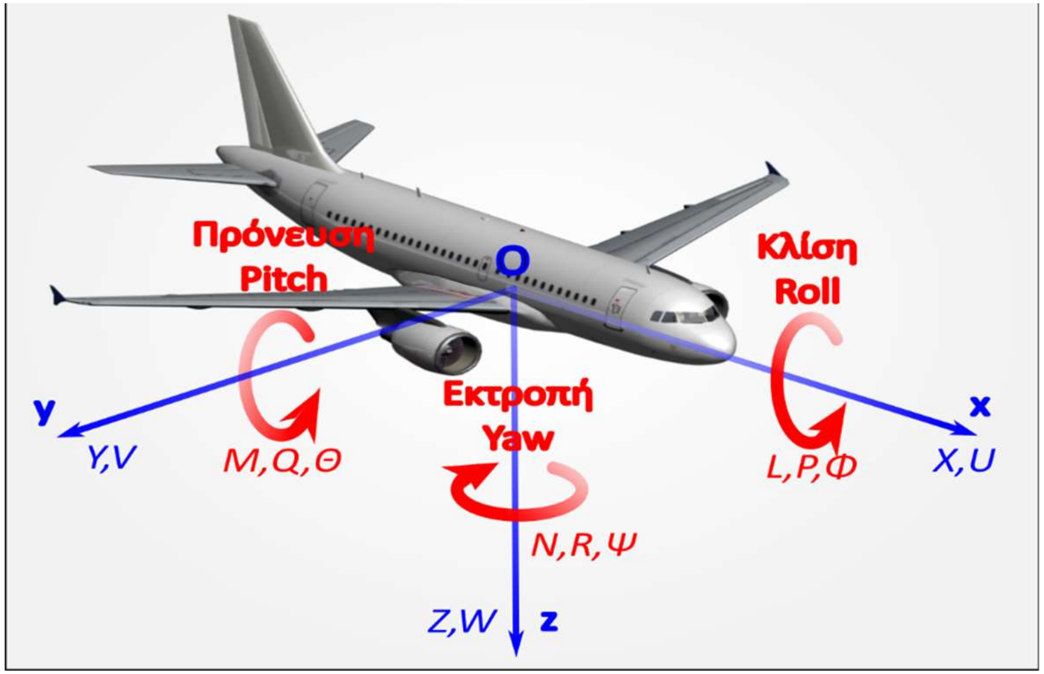
- Το σύστημα της Γής «0» (earth system) το «βρίσκουμε» στους χάρτες
- Το σύστημα «Ε» (datum path earth system) έχει:
  - αρχή το ΚΜ του αεροσκάφους,
  - Τα ΧΥ επίπεδα των «0» και «Ε» είναι παράλληλα
  - Οι Ζ άξονες συμπίπτουν
  - Η ταχύτητα του αεροσκάφους ανήκει στο ΧΖ επίπεδο του «Ε» συστήματος

1. Συστήματα συντεταγμένων



- Το σύστημα της Γής «0» (earth system) το «βρίσκουμε» στους χάρτες
- Το σύστημα «Ε» (datum path earth system) έχει:
  - αρχή το ΚΜ του αεροσκάφους,
  - Τα XY επίπεδα των «0» και «Ε» είναι παράλληλα
  - Οι Z άξονες συμπίπτουν
  - Η ταχύτητα του αεροσκάφους ανήκει στο XZ επίπεδο του «Ε» συστήματος
- Το σύστημα «b» είναι το σωματόδετο ενώ σχετικά με αυτό είναι τα συστήματα «s» και «w»

2. Μεγέθη



- Προσανατολισμός, ταχύτητες και φορτία
  - 3 συντεταγμένες **x,y,z**
  - 3 στροφές Φ, Θ, Ψ
  - 3 γραμμικές ταχύτητες U,V,W
  - 3 γωνιακές ταχύτητες P,Q,R
  - 3 δυναμεις X,Y,Z
  - 3 ροπές L,M,N

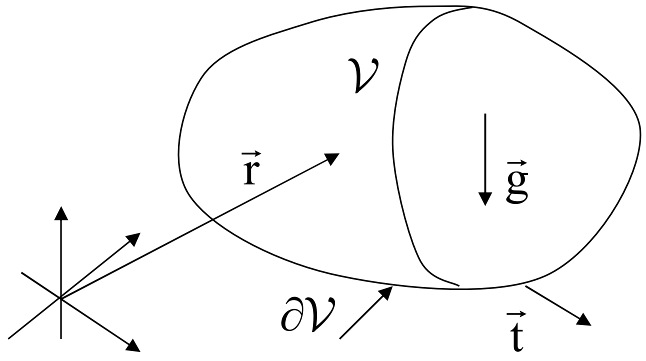
3. Χαρακτηρισμός φορτίων

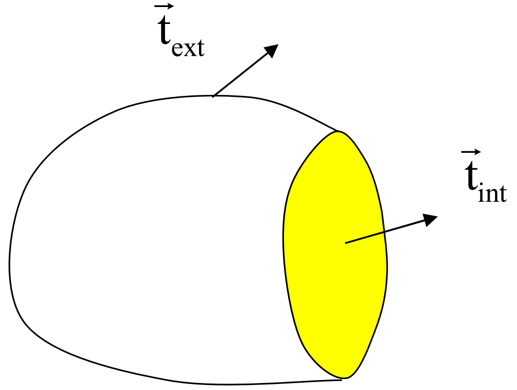
$$X = X_a + X_g + X_c + X_p + X_d$$
$$Y = Y_a + Y_g + Y_c + Y_p + Y_d$$
$$Z = Z_a + Z_g + Z_c + Z_p + Z_d$$
$$L = L_a + L_g + L_c + L_p + L_d$$
$$M = M_a + M_g + M_c + M_p + M_d$$
$$N = N_a + N_g + N_c + N_p + N_d$$

- «a» = aerodynamic,
- «p» = propulsion,
- «c» = control,
- «g» = gravity,
- «d» = disturbance (external, atmospheric)

Πρόκειται για τους νόμους της Δυναμικής Ισορροπίας της Μηχανικής:

Ισορροπία δυνάμεων και ροπών (δηλ. φορτίων)





$$\frac{d(\#)}{dt} = (\dot{\#})$$

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho\, \ddot{\vec{r}}\, d\mathcal{V}}_{\text{Inertial forces}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho\, \vec{g}\, d\mathcal{V}}_{\text{Volume forces}} + \underbrace{\int_{\Sigma=\partial\mathcal{V}} \vec{t}\, d\Sigma}_{\text{Surface forces}}$$

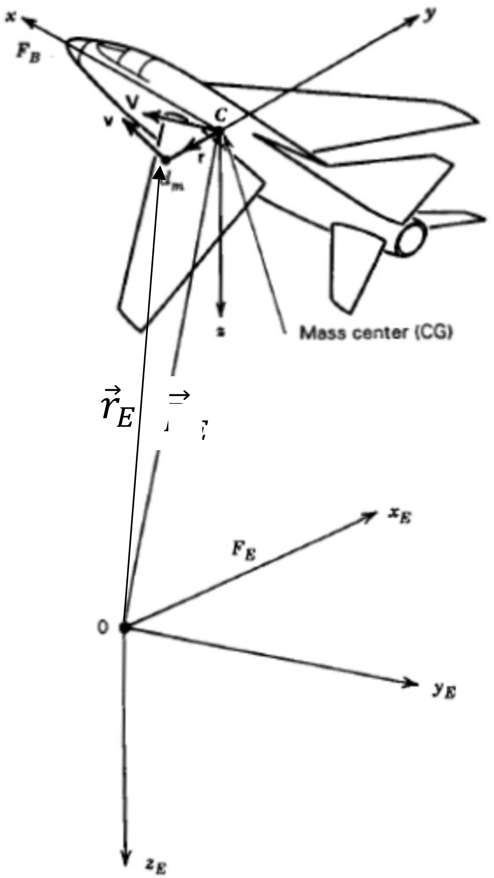
$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho\, \ddot{\vec{r}} \times \vec{r}_0\, d\mathcal{V}}_{\text{Inertial moments}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho\, \vec{g} \times \vec{r}_0\, d\mathcal{V}}_{\text{Volume moments}} + \underbrace{\int_{\Sigma=\partial\mathcal{V}} \vec{t} \times \vec{r}_0\, d\Sigma}_{\text{Surface moments}}$$

Πρόκειται για τους νόμους της Δυναμικής Ισορροπίας της Μηχανικής:

Ισορροπία δυνάμεων και ροπών (δηλ. φορτίων)	**X,Y,Z**	**M,N,L**
Γράφονται ως προς τα κινηματικά μεγέθη		
Η ισορροπία <u>δυνάμεων</u> αντιστοιχεί στις 3 μετακινήσεις ή 3 ταχύτητες	**-**	**U,V,W**
Η ισορροπία <u>ροπών</u> αντιστοιχεί στις 3 στροφές και τις 3 γωνιακές ταχύτητες	**Φ,Θ,Ψ**	**P,Q,R**

Οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται στο αδρανειακό σύστημα και στη συνέχεια μεταφέρονται σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, όπως αυτό του αεροπλάνου ή της τροχιάς

Οι εξισώσεις κίνησης



$$\vec{r}_E = \vec{R}_E + [T]\vec{r} \Longrightarrow \vec{v}_E = \vec{V}_E + [T]\vec{v} + [\dot{T}]\vec{r}$$

μητρώο στροφής

γωνιακές ταχύτητες

$$\left.\frac{d\vec{\#}}{dt}\right|_E = \left.\frac{d\vec{\#}}{dt}\right|_B + \vec{\omega} \times \vec{\#}$$

Για τη στροφορμή και για τις ροπές χρησιμοποιούμε το εξωτερικό γινόμενο που σε μητρωική μορφή γράφεται ως εξής

$$\vec{r} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = [S]\vec{w}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} . \vec{r}$$

Βασικές Υποθέσεις

1) Το αεροσκάφος πετά σε ακίνητη ατμόσφαιρα με σταθερές ιδιότητες.
2) Η ταχύτητα του αεροσκάφους είναι σημαντικά μικρότερη της ταχύτητας του ήχου, έτσι ώστε ο αέρας να θεωρείται ασυμπίεστος και οι διαταραχές να διαδίδονται ακαριαία επάνω στο αεροσκάφος.
3) Το αεροσκάφος δεν παραμορφώνεται ελαστικά υπό την επίδραση των φορτίων που ασκούνται σε αυτό (δηλαδή συμπεριφέρεται ως απολύτως στερεό σώμα).
4) Η μάζα του αεροσκάφους παραμένει σταθερή.
5) Το αεροσκάφος είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο Oxz.
6) Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή.
7) Οι επιταχύνσεις του αεροσκάφους εξ αιτίας της κίνησής του ως προς την περιστρεφόμενη γή θεωρούνται μικρές και αμελητέες (Coriolis effects).

- Ορμή και στροφορμή στο σωματόδετο σύστημα …

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathrm{J_x} \\ \mathrm{J_y} \\ \mathrm{J_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{mU} \\ \mathrm{mV} \\ \mathrm{mW} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{H_x} \\ \mathrm{H_y} \\ \mathrm{H_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I_{xx}} & 0 & -\mathrm{I_{xz}} \\ 0 & \mathrm{I_{yy}} & 0 \\ -\mathrm{I_{xz}} & 0 & \mathrm{I_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{PI_x} - \mathrm{RI_{xz}} \\ \mathrm{QI_y} \\ -\mathrm{PI_{xz}} + \mathrm{RI_z} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{I_{xy}} = \mathrm{I_{xz}} = 0$

- Εξίσωση Ορμής / ισορροπία δυνάμεων

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathrm{mU} \\ \mathrm{mV} \\ \mathrm{mW} \end{bmatrix} + \mathrm{m}\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \Upsilon \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{m}\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} + \mathrm{m}\begin{bmatrix} -\mathrm{RV} + \mathrm{QW} \\ -\mathrm{PW} + \mathrm{RU} \\ -\mathrm{QU} + \mathrm{PV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \Upsilon \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{m}\left(\dot{\mathrm{U}} - \mathrm{RV} + \mathrm{QW}\right) = \mathrm{X_a} + \mathrm{X_g} + \mathrm{X_c} + \mathrm{X_p} + \mathrm{X_d}$$
$$\mathrm{Y} = \mathrm{m}\left(\dot{\mathrm{V}} - \mathrm{PW} + \mathrm{RU}\right) = \mathrm{Y_a} + \mathrm{Y_g} + \mathrm{Y_c} + \mathrm{Y_p} + \mathrm{Y_d}$$
$$\mathrm{Z} = \mathrm{m}\left(\dot{\mathrm{W}} - \mathrm{qU} + \mathrm{pV}\right) = \mathrm{Z_a} + \mathrm{Z_g} + \mathrm{Z_c} + \mathrm{Z_p} + \mathrm{Z_d}$$

- Εξίσωση στροφορμής / ισορροπία ροπών

$$\left.\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right]_B = \begin{bmatrix}\dot{H}_x\\ \dot{H}_y\\ \dot{H}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz}\\ 0 & I_y & 0\\ -I_{xz} & 0 & I_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{P}\\ \dot{Q}\\ \dot{R}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{P}I_x - \dot{R}I_{xz}\\ \dot{Q}I_y\\ -\dot{P}I_{xz} + \dot{R}I_z\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -PQI_{xz} + RQ(I_z - I_y)\\ PR(I_x - I_z) + (P^2 - R^2)I_{xz}\\ QRI_{xz} + PQ(I_y - I_x)\end{bmatrix}$$

$$L = I_x\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + (I_z - I_y)RQ = L_a + L_g + L_c + L_p + L_d$$
$$M = I_y\dot{Q} + (I_x - I_z)PR + I_{xz}(P^2 - R^2) = M_a + M_g + M_c + M_p + M_d$$
$$N = I_z\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + (I_y - I_x)PQ + I_{xz}QR = N_a + N_g + N_c + N_p + N_d$$

Οι εξισώσεις κίνησης

- Το σύστημα των εξισώσεων

$$X = m(\dot{U} - RV + QW) = X_a + X_g + X_c + X_p + X_d$$
$$Y = m(\dot{V} - PW + RU) = Y_a + Y_g + Y_c + Y_p + Y_d$$
$$Z = m(\dot{W} - qU + pV) = Z_a + Z_g + Z_c + Z_p + Z_d$$
$$L = I_x\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + (I_z - I_y)RQ = L_a + L_g + L_c + L_p + L_d$$
$$M = I_y\dot{Q} + (I_x - I_z)PR + I_{xz}(P^2 - R^2) = M_a + M_g + M_c + M_p + M_d$$
$$N = I_z\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + (I_y - I_x)PQ + I_{xz}QR = N_a + N_g + N_c + N_p + N_d$$

- 6 εξισώσεις για 6 αγνώστους: U,V,W,P,Q,R
- Οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές επειδή τα φορτία στο 2^{o} μέλος εξαρτώνται από τους αγνώστους
- Γι’ αυτό και οι εξισώσεις γραμμικοποιούνται στη λογική:

$$X(q + \delta q) = X(q) + \frac{\partial X}{\partial q}(q).\delta q$$