



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΤΗΣΗΣ

5: ΕΚΓΑΡΣΙΑ-ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Εγκάρσιες-διεύθυνσης εξισώσεις κίνησης

Αποσυζευγμένες εξισώσεις εγκάρσιας - διεύθυνσης μη συμμετρικής κίνησης:

$$m\dot{v} - \tilde{Y}_v v - (\tilde{Y}_p + mW_e)p - (\tilde{Y}_r - mU_e)r - mg\psi\sin\Theta_e + mg\varphi\cos\Theta_e = \tilde{Y}_{\delta_a}\delta_a + \tilde{Y}_{\delta_r}\delta_r$$

$$I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} - \tilde{L}_v v - \tilde{L}_p p - \tilde{L}_r r = \tilde{L}_{\delta_a}\delta_a + \tilde{L}_{\delta_r}\delta_r$$

$$I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} - \tilde{N}_v v - \tilde{N}_p p - \tilde{N}_r r = \tilde{N}_{\delta_a}\delta_a + \tilde{N}_{\delta_r}\delta_r$$

Εγκάρσιες-διεύθυνσης εξισώσεις κίνησης, που αναφέρονται στους άξονες του ανέμου και οριζόντια ομαλή πτήση ($\Theta_e \equiv \alpha_e = 0$, $W_e = 0$), στο χώρο κατάστασης:

$$\begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_r & Y_\varphi \\ l_v & l_p & l_r & l_\varphi \\ n_v & n_p & n_r & n_\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ p \\ r \\ \varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ l_{\delta_a} & l_{\delta_r} \\ n_{\delta_a} & n_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix}$$

Απόκριση σε εντολές ελέγχου

Συναρτήσεις μεταφοράς ως προς τα πηδάλια κλίσης:

$$\begin{aligned}\frac{v(s)}{\delta_a(s)} &= \frac{N_{\delta_a}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_v(s + 1/T_{\beta_1})(s + 1/T_{\beta_2})}{(s + 1/T_s)(s + 1/T_r)(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \\ \frac{p(s)}{\delta_a(s)} &= \frac{N_{\delta_a}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_p s(s^2 + 2\zeta_\varphi\omega_\varphi s + \omega_\varphi^2)}{(s + 1/T_s)(s + 1/T_r)(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \\ \frac{r(s)}{\delta_a(s)} &= \frac{N_{\delta_a}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_r(s + 1/T_\psi)(s^2 + 2\zeta_\psi\omega_\psi s + \omega_\psi^2)}{(s + 1/T_s)(s + 1/T_r)(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \\ \frac{\varphi(s)}{\delta_a(s)} &= \frac{N_{\delta_a}^\varphi(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_\varphi(s^2 + 2\zeta_\varphi\omega_\varphi s + \omega_\varphi^2)}{(s + 1/T_s)(s + 1/T_r)(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)}\end{aligned}$$

όπου

- T : χρονική σταθερά,
- ω : φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση [rad/sec],
- ζ : συντελεστής απόσβεσης,
- d (dutch): δείκτης ολλανδικής περιστροφής,
- r (roll): δείκτης υποχώρησης της περιστροφής,
- s (spiral): δείκτης σπειροειδούς.

Απόκριση σε εντολές ελέγχου

Συναρτήσεις μεταφοράς ως προς το πηδάλιο εκτροπής:

$$\begin{aligned}\frac{v(s)}{\delta_r(s)} &= \frac{N_{\delta_r}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_v(s + 1/T_{\beta_1})(s + 1/T_{\beta_2})(s + 1/T_{\beta_3})}{(s + 1/T_s)(s + 1/T_r)(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \\ \frac{p(s)}{\delta_r(s)} &= \frac{N_{\delta_r}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_p s(s + 1/T_{\varphi_1})(s + 1/T_{\varphi_2})}{(s + 1/T_s)(s + 1/T_r)(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \\ \frac{r(s)}{\delta_r(s)} &= \frac{N_{\delta_r}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_r(s + 1/T_\psi)(s^2 + 2\zeta_\psi\omega_\psi s + \omega_\psi^2)}{(s + 1/T_s)(s + 1/T_r)(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \\ \frac{\varphi(s)}{\delta_r(s)} &= \frac{N_{\delta_r}^\varphi(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_\varphi(s + 1/T_{\varphi_1})(s + 1/T_{\varphi_2})}{(s + 1/T_s)(s + 1/T_r)(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)}\end{aligned}$$

όπου

- T : χρονική σταθερά,
- ω : φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση [rad/sec],
- ζ : συντελεστής απόσβεσης,
- d (dutch): δείκτης ολλανδικής περιστροφής,
- r (roll): δείκτης υποχώρησης της περιστροφής,
- s (spiral): δείκτης σπειροειδούς.

Η χαρακτηριστική εξίσωση

- Όταν οι ρίζες των πολυωνύμων που προκύπτουν από τον χώρο κατάστασης, εκφραστούν συναρτήσει των χρονικών σταθερών, των λόγων απόσβεσης και των φυσικών συχνοτήτων τότε λαμβάνονται άμεσα οι απαιτούμενες πληροφορίες που χαρακτηρίζουν τη δυναμική της απόκρισης.
- Ο κοινός παρονομαστής των συναρτήσεων μεταφοράς αποτελεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, το οποίο με τη σειρά του περιγράφει τα χαρακτηριστικά ευστάθειας του αεροσκάφους.
- Οι μορφές των αποκρίσεων, καθορίζονται από τον κοινό παρονομαστή και «χρωματίζονται» από τους διαφορετικούς κάθε φορά αριθμητές.
- Ο αριθμητής δεν παίζει κανένα ρόλο στον καθορισμό της ευστάθειας ενός γραμμικού συστήματος.

Η χαρακτηριστική εξίσωση

Εγκάρσιο-διεύθυνσης χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Για ένα κλασσικό αεροσκάφος είναι 4^ο βαθμού και εξισώνοντας το με το μηδέν αποτελεί τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\Delta(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$$

η οποία παραγοντοποιείται σε τρία ζεύγη ριζών:

$$\left(s + \frac{1}{T_s}\right) \left(s + \frac{1}{T_r}\right) (s^2 + 2\zeta_d \omega_d s + \omega_d^2) = 0$$

Διακρίνονται τρεις μορφές κίνησης:

- **Μορφή του σπειροειδούς (spiral mode):** Μη ταλαντωτική μορφή που περιγράφεται από την 1^η πραγματική ρίζα.
- **Μορφή υποχώρησης της περιστροφής (roll subsidence):** Επίσης μη ταλαντωτική μορφή και περιγράφεται από τη 2^η πραγματική ρίζα.
- **Μορφή της ολλανδικής περιστροφής (dutch roll):** Ταλαντωτική μορφή και περιγράφεται από το ζεύγος των μιγαδικών ριζών.

Η χαρακτηριστική εξίσωση

Εξισώσεις κίνησης στο σωματόδετο σύστημα αναφοράς

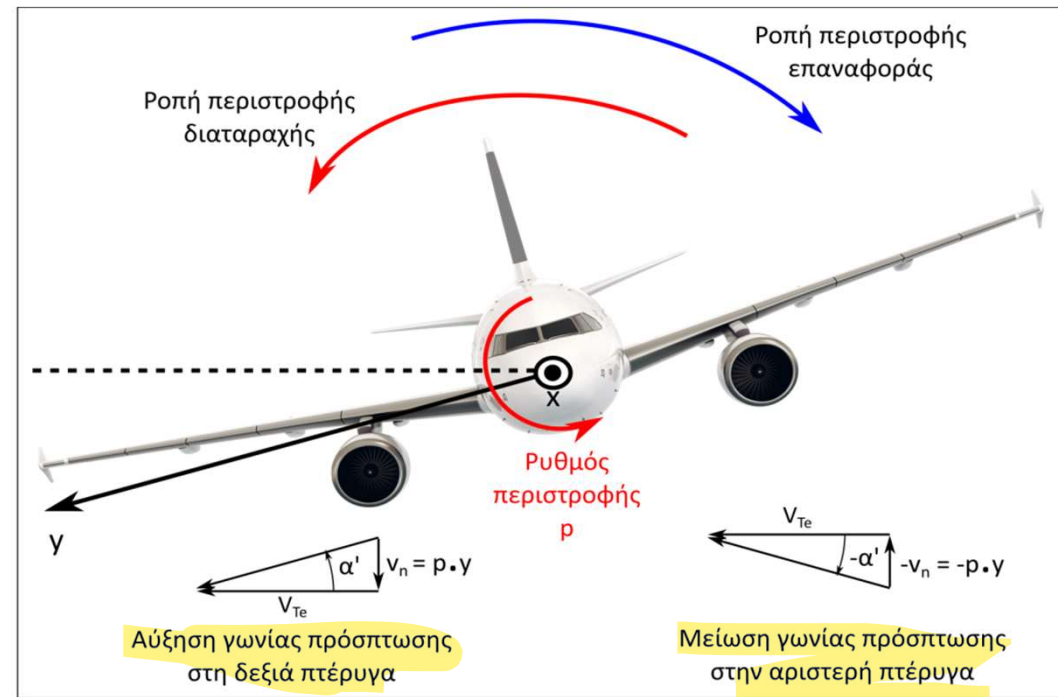
⇒ Χαρακτηριστικό πολυώνυμο 5ης τάξης :

$$s \left(s + \frac{1}{T_s} \right) \left(s + \frac{1}{T_r} \right) (s^2 + 2\zeta_d \omega_d s + \omega_d^2) = 0$$

- Οι μορφές της ευστάθειας εξακολουθούν να ορίζονται με τον ίδιο τρόπο.
- Η μηδενική ρίζα, προκύπτει από την προσθήκη της γωνίας εκτροπής ψ , στην εξίσωση κατάστασης και υποδεικνύει ουδέτερη ευστάθεια ως προς την εκτροπή ή αλλιώς ως προς την πορεία (heading) που ακολουθεί το αεροσκάφος.
- Η επιπλέον πληροφορία απλά μας δίνει την ένδειξη ότι το αεροσκάφος δεν έχει συγκεκριμένη γωνία εκτροπής ή πορείας (αυθαίρετη).
- Καθώς οι μορφές της ευστάθειας δεν είναι τόσο διακριτές, υφίσταται μεγαλύτερη σύζευξη ή αλληλεπίδραση των μορφών σε σχέση με την περίπτωση της διαμήκους δυναμικής.

Η μορφή υποχώρησης της περιστροφής

- Μη ταλαντωτικό εγιάρσιο χαρακτηριστικό το οποίο συνήθως είναι σημαντικά αποσυζευγμένο από τη μορφή του σπειροειδούς και της ολλανδικής περιστροφής.
- Γι' αυτό, περιγράφεται από μια πραγματική ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, ενώ εμφανίζεται ως ένα εκθετικό χαρακτηριστικό καθυστέρησης στην κίνηση περιστροφής.
- Όπως ορίστηκε η θετική περιστροφή, σημαίνει ότι η δεξιά πτέρυγα κινείται προς τα κάτω.
- Υποτίθεται ότι το αεροσκάφος πετά σε αντισταθμισμένη πτήση με τις πτέρυγες οριζόντιες.
- Όταν το αεροσκάφος δεχτεί μια διαταραχή θετικής ροπής περιστροφής L θα ξεκινήσει να στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $p = \dot{\psi}$



Η μορφή υποχώρησης της περιστροφής

Ορίζοντας δείκτες 1 και 2, για τη δεξιά (κατερχόμενη) και την αριστερή (ανερχόμενη) ως προς τον πιλότο πτέρυγα αντίστοιχα, τότε κατά τη θετική περιστροφική κίνηση:

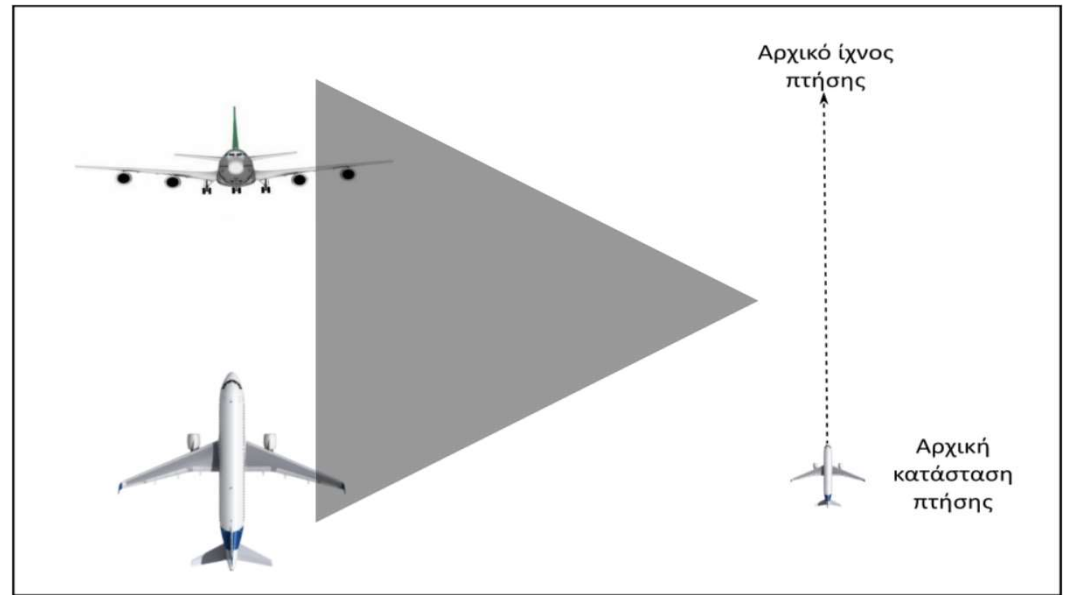
- Η κάθε πτέρυγα βλέπει μια συνιστώσα $v_n = p \cdot y$ της ολικής ταχύτητας V_T , που είναι κάθετη στο επίπεδό της.
- Αυξάνεται η γωνία πρόσπτωσης της κατερχόμενης, δεξιάς πτέρυγας.
- Αντίστοιχα μειώνεται η γωνία πρόσπτωσης της ανερχόμενης αριστερής πτέρυγας.
- Η διαφορική άνωση που δημιουργείται, προκαλεί με τη σειρά της, την εμφάνιση μιας περιστροφικής ροπής επαναφοράς.
- Η διαφορική οπισθέλκουσα που δημιουργείται, προκαλεί με τη σειρά της ροπή εκτροπής, αλλά αυτή είναι τόσο μικρή ώστε μπορεί να αγνοηθεί.
- Μετά τη διαταραχή ο ρυθμός περιστροφής p αυξάνεται εκθετικά έως ότου η διορθωτική ροπή εξισορροπήσει τη ροπή που προκάλεσε η διαταραχή και το αεροσκάφος αποκτήσει τελικά ένα σταθερό ρυθμό περιστροφής.

Η μορφή υποχώρησης της περιστροφής

- Πρακτικά είναι περισσότερο μεταβατική παρά συνεχόμενη κίνηση.
- Έχει σταθεροποιητικό ρόλο. Γι' αυτό μερικές φορές ονομάζεται και «απόσβεση της περιστροφής» (damping in roll).
- Σε ένα συμβατικό αεροσκάφος, παρουσιάζεται στον πιλότο ως μια καθυστέρηση στην απόκριση των πηδαλίων ως προς την κλίση του αεροσκάφους, που εξαρτάται κατά μεγάλο βαθμό από τη ροπή αδράνειας I_x , καθώς και από τις αεροδυναμικές ιδιότητες της πτέρυγας.
- $T_r \sim 1 \text{ sec.}$

Η μορφή του σπειροειδούς

- Το σπειροειδές (spiral mode), είναι επίσης **μη ταλαντωτικό** και καθορίζεται από την άλλη πραγματική ρίζα στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- Έχει συνήθως **αργή εξέλιξη**, ενώ εμπλέκονται περίπλοκες συζευγμένες κινήσεις ως προς την εκτροπή, την κλίση και την πλαγιολίσθηση.
- Τα χαρακτηριστικά αυτής της μορφής εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την **εγκάρσια στατική ευστάθεια**, καθώς και από τη στατική ευστάθεια διεύθυνσης του αεροσκάφους.



Η μορφή του σπειροειδούς

- Διεγείρεται επίσης μετά από μια διαταραχή της ροπής περιστροφής L , που η θετική φορά ορίζει ως κατερχόμενη τη δεξιά πτέρυγα και προκαλεί μια διαταραχή πλαγιολίσθησης β .

Υποθέτοντας ότι το αεροσκάφος πετά αντισταθμισμένο σε οριζόντια πτήση:

- Η ροπή διαταραχής L , προκαλεί την εμφάνιση μια μικρής κλίσης γωνίας φ .
- Εφόσον δεν υπάρξει κάποια διορθωτική ενέργεια από τον πιλότο η κλίση προκαλεί πλαγιολίσθηση με ταχύτητα v (εικόνα (a)).
- Πλαγιολίσθηση \Rightarrow Γωνία πρόσπτωσης β στο κάθετο σταθερό (fin) \Rightarrow Δημιουργία άνωσης \Rightarrow Ροπή εκτροπής N , η οποία τείνει να επαναφέρει την κεφαλή του αεροσκάφους προς τη διεύθυνση της πλαγιολίσθησης.
- Εκτροπή \Rightarrow Διαφορική άνωση κατά μήκος του εκπετάσματος \Rightarrow Ανάλογη ροπή περιστροφής $L \Rightarrow$ Δεξιά πτέρυγα κατέρχεται περαιτέρω επιδεινώνοντας το φαινόμενο, όπως φαίνεται στις εικόνες (b) και (c).
- Η επίδραση της διέδρης γωνίας Γ , λειτουργεί διορθωτικά με τη δημιουργία αντίθετης ροπής L λόγω της πλαγιολίσθησης.
- Η άνωση στο κάθετο σταθερό, που συνήθως έχει σημείο εφαρμογής λίγο πάνω από τον άξονα Ox , προκαλεί επίσης μια μικρή διορθωτική ροπή.

Η μορφή του σπειροειδούς

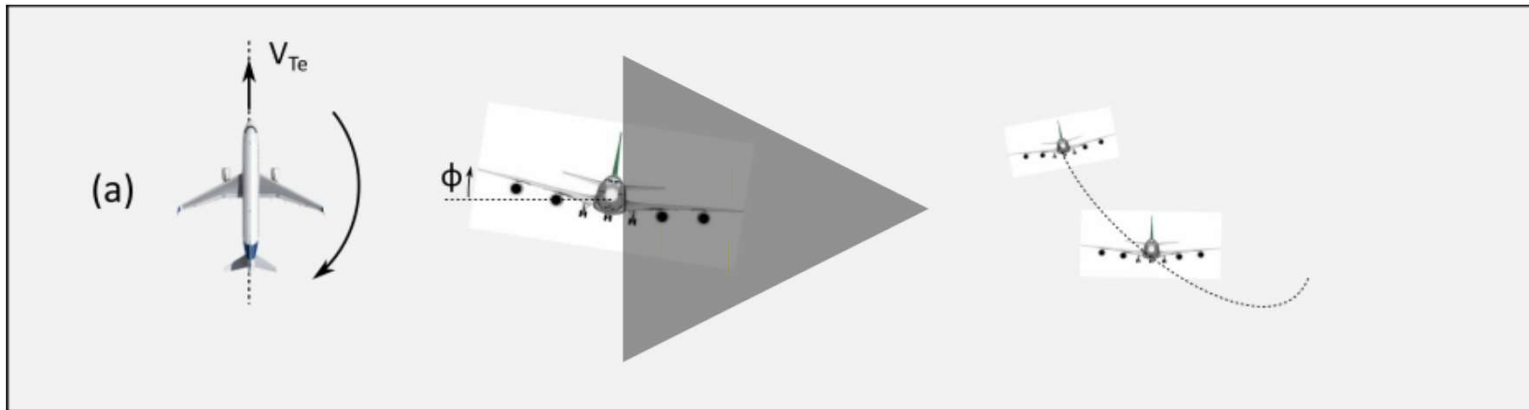
- Η επίδραση του κάθετου σταθερού, και η επίδραση της διέδρης γωνίας πρέπει να αλληλοεξουδετερώνονται.
 - Όταν η επίδραση της διέδρης γωνίας υπερνικά την επίδραση του κάθετου σταθερού, η μορφή του σπειροειδούς είναι ευσταθής, ενώ όταν συμβαίνει το αντίθετο το σπειροειδές είναι ασταθές.
 - Αυτοί οι παράγοντες είναι σχεδόν ισοδύναμοι και το σπειροειδές καθίσταται σχεδόν ουδέτερο ευσταθές.
 - Συνήθως η χρονική του σταθερά είναι πολύ μεγάλη ($T_s \approx 100$ sec).
- ⇒ **Ευσταθές σπειροειδές:** Η πτέρυγα επιστρέφει στον ορίζοντα πολύ αργά μετά από τη διαταραχή.
- ⇒ **Ασταθές σπειροειδές:** Ο ρυθμός της απόκλισης είναι επίσης πολύ αργός.
- ⇒ **Ουδέτερο ευσταθές σπειροειδές:** Το αεροσκάφος εκτελεί μια στροφή με σταθερή κλίση.
- Κατά συνέπεια το ασταθές σπειροειδές (σπειροειδής βύθιση-spiral departure) είναι δυνατόν να **επιτραπεί** με την προϋπόθεση ότι η **χρονική σταθερά T_s είναι επαρκώς μεγάλη**.
 - Κατά τη **σπειροειδή βύθιση**, τα οπτικά ερεθίσματα (visual cues) από τον περιβάλλοντα χώρο-έδαφος, καθίστανται τα σημαντικότερα εφόδια που έχει ο πιλότος για να αντιληφθεί την κατάσταση.

Η μορφή της ολλανδικής περιστροφής

- Κλασσική **αποσβενόμενη ταλάντωση** ως προς την **εκτροπή** περί τον άξονα Oz που εμφανίζει σύζευξη με την περιστροφή και σε λιγότερο βαθμό με την πλαγιολίσθηση.
- Τα χαρακτηριστικά της περιγράφονται από το ζεύγος των **μιγαδικών ριζών** στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- Επειδή οι ροπές αδρανείας πρόνευσης και εκτροπής έχουν παρόμοιο μέγεθος, **οι συχνότητες της ολλανδικής περιστροφής και της μικρής περιόδου είναι παρόμοιες**. Όμως, επειδή το κάθετο σταθερό είναι λιγότερο αποτελεσματικό ως αποσβεστήρας σε σχέση με το οριζόντιο σταθερό, η **απόσβεση της είναι συνήθως μη επαρκής**.
- Η μορφή αυτή ονομάστηκε έτσι, επειδή η κίνηση του αεροσκάφους μοιάζει με τη ρυθμική κίνηση ενός Ολλανδού παγοδρόμου στα παγωμένα κανάλια της Ολλανδίας.

Η μορφή της ολλανδικής περιστροφής

- Η φυσική της μπορεί να γίνει ευκολότερα αντιληπτή, αν φανταστούμε το αεροσκάφος σαν να είναι αναρτημένο ως προς τη διεύθυνση από ένα ελατήριο που επενεργεί περί τον άξονα Oz .
- Τα **χαρακτηριστικά δυσκαμψίας** του ελατηρίου είναι αεροδυναμικά και προσδιορίζονται σε μεγάλο βαθμό από το **κάθετο σταθερό**.
- Αεροσκάφος σε αντισταθμισμένη ευθυγραμμη οριζόντια πτήση \Rightarrow Εφαρμόζεται μια ροπή διαταραχής N , ως προς την εκτροπή:
 - \rightarrow Η αεροδυναμική "δυσκαμψία" του κάθετου σταθερού, προκαλεί μια **διορθωτική ροπή εκτροπής $-N$** που καταλήγει στην κλασσική ταλάντωση.
 - \rightarrow Όταν η ταλάντωση αυτή αναπτυχθεί πλήρως, η **σχετική ταχύτητα** του αέρα πάνω από τη δεξιά και την αριστερή πτέρυγα, μεταβάλλεται ανάλογα, με ταλαντωτικό τρόπο. και προκαλεί **ταλαντωτικές διαφορικές μεταβολές της άνωσης και της οπισθέλκουσας**.
 - \rightarrow Αυτή η αεροδυναμική σύζευξη προκαλεί μια **ταλάντωση ως προς την περιστροφή**, που υστερεί της ταλάντωσης ως προς την εκτροπή **κατά 90°** .
 - \rightarrow Διαφοράς φάσης \Rightarrow Η πτέρυγα που προηγείται κατέρχεται ενώ η πτέρυγα που οπισθοχωρεί ανέρχεται.



Η μορφή της ολλανδικής περιστροφής

- Η κίνηση υποδηλώνεται από το ίχνος που σημειώνουν τα ακροπερύγια ως προς τον ορίζοντα: Συνήθως ελλειπτικό.
- Συνθήκη ευστάθειας ολλανδικής περιστροφής:

$$\frac{\varphi_{\max}}{\psi_{\max}} < 1$$

- Απαιτείται κυρίως η ύπαρξη ενός **μεγάλου κάθετου σταθερού** στο αεροσκάφος. Δυστυχώς αυτό **αντιτίθεται στην απαίτηση για ευσταθές σπειροειδές** όπως έγινε εμφανές προηγουμένως.

Μέση λύση κατά τη σχεδίαση: Συνήθως προτιμάται ελαφρώς ασταθές σπειροειδές και ολλανδική περιστροφή με φτωχή απόσβεση.

- Η πολυπλοκότητα της υπονοεί ότι εκτός του κάθετου σταθερού υφίστανται και άλλοι αεροδυναμικοί παράγοντες που καθορίζουν τα χαρακτηριστικά της.
- Γενικά, είναι εξαιρετικά δύσκολο να ποσοτικοποιηθούν όλοι οι παράγοντες που διαμορφώνουν τα χαρακτηριστικά της ολλανδικής περιστροφής.

Μοντέλα μειωμένης τάξης

- Απώλεια ακρίβειας λόγω της έντονης σύζευξης των μορφών.
- **Πρακτική σημασία:** Περαιτέρω κατανόηση της μηχανικής της κίνησης κατά το εγκάρσιο επίπεδο και το επίπεδο διεύθυνσης.
- Αναφερόμενοι στους άξονες του ανέμου, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\Delta(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$$

- Στα συμβατικά αεροσκάφη, οι συντελεστές A, B, C, D και E δεν μεταβάλλονται σημαντικά με τις συνθήκες πτήσης.

Τυπικά:

- A, B είναι σχετικά μεγάλοι ενώ οι D και E είναι πολύ συχνά κοντά στο μηδέν.
- $B \gg A$ και $E \ll D$.

Προσεγγιστικά:

$$s + \frac{1}{T_r} \cong s + \frac{B}{A} \quad \text{και} \quad s + \frac{1}{T_s} \cong s + \frac{E}{D}$$

- Για το ζεύγος των μιγαδικών ριζών που περιγράφουν την **ολλανδική περιστροφή**, δεν υφίστανται τέτοιες απλές προσεγγιστικές λύσεις.

Η προσέγγιση της περιστροφής

- 1) Μικρές διαταραχές \Rightarrow Η μορφή της υποχώρησης της περιστροφής, εμπλέκει μόνο κίνηση περιστροφής με πολύ μικρή σύζευξη ως προς την πλαγιολίσθηση ή την εκτροπή:

$$\dot{v} = \dot{r} = 0 \quad \text{και} \quad y_v = y_p = y_r = y_\varphi = n_v = n_p = n_r = n_\varphi = 0$$

Άρα

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_p & l_\varphi \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{\delta_a} & l_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix}$$

- 2) Σύστημα αξόνων του ανέμου $\Rightarrow l_\varphi = 0$.

- 3) Μετασχηματίζοντας κατά Laplace και υποθέτοντας ότι το πηδάλιο διεύθυνσης διατηρείται σταθερό $\delta_r = 0$:

$$\frac{p(s)}{\delta_a(s)} = \frac{l_{\delta_a}}{s - l_p} \equiv \frac{k_p}{s + \frac{1}{T_r}}$$

Ικανοποιητική ακρίβεια για $1 \div 2 \text{ sec}$ της απόκρισης περιστροφής ως προς τα πηδάλια κλίσης.

- 4) Αντικαθιστώντας τις συντετμημένες αεροδυναμικές παραγώγους ευστάθειας και παρατηρώντας ότι:

$$I_x \gg I_{xz} \quad \text{και} \quad I_z \gg I_{xz}$$

Χρονική σταθερά της μορφής υποχώρησης της περιστροφής:

$$T_r \cong -\frac{I_x}{\tilde{L}_p}$$

Η προσέγγιση του σπειροειδούς

- 1) Αργή εξέλιξη σπειροειδούς \Rightarrow Υποτίθεται ότι οι \mathbf{v} , \mathbf{p} και \mathbf{r} είναι ψευδοστατικές σε σχέση με την κλίμακα χρόνου της μορφής αυτής.

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{r}} = 0$$

- 2) Στους άξονες ανέμου και με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα, έτσι ώστε η κίνηση να θεωρηθεί μη εξαναγκασμένη:

$$l_\varphi = n_\varphi = 0 \quad \text{και} \quad \delta_a = \delta_r = 0$$

Άρα

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_v & y_p & y_r & y_\varphi \\ l_v & l_p & l_r & 0 \\ n_v & n_p & n_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ p \\ r \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

- 3) Επιλύονται οι πρώτες 3 γραμμές ως προς τις v και r .

- 4) Ισχύουν: $\dot{\varphi} = p$ και $y_v, y_p \ll y_r, y_\varphi$

- 5) Μετασχηματίζοντας κατά Laplace:

$$\varphi(s) \left[s + \frac{y_\varphi(l_r n_v - l_v n_r)}{y_r(l_v n_p - l_p n_v)} \varphi \right] \equiv \varphi(s) \left(s + \frac{1}{T_s} \right) = 0$$

Η προσέγγιση του σπειροειδούς

6) Συναρτήσει των αεροδυναμικών παραγώγων ευστάθειας και επειδή ισχύουν:

$$\tilde{Y}_r \ll mU_e \quad \therefore \quad y_r \cong U_e \equiv V_{T_e}, y_\phi = g$$

Προσεγγιστική έκφραση για τη χρονική σταθερά του σπειροειδούς:

$$T_s \cong - \frac{U_e (\tilde{L}_v \tilde{N}_p - \tilde{L}_p \tilde{N}_v)}{g (\tilde{L}_r \tilde{N}_v - \tilde{L}_v \tilde{N}_r)} \equiv - \frac{V_{T_e} (L_v N_p - L_p N_v)}{g (L_r N_v - L_v N_r)}$$

- Η συνθήκη ώστε το σπειροειδές να είναι ευσταθές ($T_s > 0$), μπορεί να απλοποιηθεί στην κατά προσέγγιση κλασική απαίτηση:

$$L_v N_r > L_r N_v$$

- Δηλαδή, η επίδραση της διέδρης γωνίας (L_v) και η απόσβεση ως προς την εκτροπή (N_r), πρέπει να είναι μεγάλες ενώ η ακαμψία ως προς την εκτροπή (N_v), πρέπει να είναι μικρή.

Η προσέγγιση της ολλανδικής περιστροφής

- 1) **Παραδοχή:** Η κίνηση δεν εμπλέκει καμία ανάλογη κίνηση του αεροσκάφους ως προς την κλίση, επειδή η μορφή αυτή είναι κυρίως μια ταλάντωση ως προς την εκτροπή, ενώ η περιστροφή προκαλείται, ως δευτερεύων φαινόμενο, από την αεροδυναμική σύζευξη:

$$\dot{p} = p = \dot{\phi} = \phi = 0$$

- 2) Αναφερόμαστε στους άξονες του ανέμου και τα χειριστήρια θεωρούνται σταθεροποιημένα, ώστε η κίνηση να μην είναι εξαναγκασμένη:

$$l_{\varphi} = n_{\varphi} = 0 \quad \text{και} \quad \delta_a = \delta_r = 0$$

Άρα

$$\begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_v & y_r \\ n_v & n_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ r \end{Bmatrix}$$

- 3) Η χαρακτηριστική εξίσωση που προκύπτει:

$$\Delta_d(s) = s^2 - (n_r + y_v)s + (n_r y_v - n_v y_r)$$

Η προσέγγιση της ολλανδικής περιστροφής

4) Αντικαθιστώντας τις συντετμημένες εκφράσεις, και θεωρώντας:

$$\tilde{Y}_r \ll mU_e \quad \text{ώστε} \quad y_r \cong U_e \equiv V_{Te}$$

5) Θεωρώντας επίσης ότι συνήθως

$$I_x, I_z \gg I_{xz}$$

Οι προσεγγιστικές ιδιότητες **απόσβεσης και συχνότητας** της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} 2\zeta_d \omega_d &\cong - \left(\frac{\tilde{N}_r}{I_z} + \frac{\tilde{Y}_v}{m} \right) \\ \omega_d^2 &\cong \frac{\tilde{N}_r}{I_z} \frac{\tilde{Y}_v}{m} - V_{Te} \frac{\tilde{N}_v}{I_z} \cong -V_{Te} \frac{\tilde{N}_v}{I_z} \end{aligned} \right\}$$

- Η \tilde{N}_r αναφέρεται ως η παράγωγος ευστάθειας της **απόσβεσης εκτροπής** και η \tilde{N}_v αναφέρεται ως η παράγωγος **ακαμψίας εκτροπής**. Τόσο η μια όσο και η άλλη, εξαρτώνται από τον αεροδυναμικό σχεδιασμό και από τον **λόγο όγκου** V_F του κάθετου σταθερού.