ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΤΗΣΗΣ

ΚΕΦ.4:
ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΣΥΝΟΨΗ

- Απόκριση σε εντολές ελέγχου
- Η χαρακτηριστική εξίσωση
- Ταλάντωση πρόνευσης μικρής περιόδου
- Το φυγοειδές
- Μοντέλα χαμηλότερης τάξης
    - Η προσέγγιση της μικρής περιόδου
    - Η προσέγγιση του φυγοειδούς

Διαδικασία Ανάλυσης

Εξισώσεις κίνησης μικρών διαταραχών του αεροσκάφους

Αποσύζευξη σε διαμήκεις και εγκάρσιες-διεύθυνσης

Ξεχωριστή μελέτη των δύο αυτών μερών της δυναμικής του αεροσκάφους

- Επίλυση των διαμηκών εξισώσεων κίνησης ⇒ Εύρεση των **συναρτήσεων μεταφοράς** του συστήματος.
- Η συνάρτηση μεταφοράς περιγράφει πλήρως τη **γραμμική δυναμική απόκριση** σε μια είσοδο ελέγχου στο επίπεδο συμμετρίας.
- Τα **χαρακτηριστικά ευστάθειας** του αεροσκάφους, προσδιορίζουν και τις **δυναμικές του ιδιότητες** οι οποίες ουσιαστικά περιγράφονται από την απόκρισή του.

Αποσυζευγμένες διαμήκεις εξισώσεις κίνησης

Διαμήκεις εξισώσεις κίνησης:

$$m\dot{u} - \tilde{X}_u u - \tilde{X}_w w - (\tilde{X}_q - mW_e)q - \tilde{X}_{\dot{w}}\dot{w} + mg\theta\cos\Theta_e = \tilde{X}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{X}_{\delta_p}\delta_p$$

$$-\tilde{Z}_u u - \tilde{Z}_w w - (\tilde{Z}_q + mU_e)q + (m - \tilde{Z}_{\dot{w}})\dot{w} + mg\theta\sin\Theta_e = \tilde{Z}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{Z}_{\delta_p}\delta_p$$

$$I_y\dot{q} - \tilde{M}_u u - \tilde{M}_w w - \tilde{M}_q q - \tilde{M}_{\dot{w}}\dot{w} = \tilde{M}_{\delta_e}\delta_e + \tilde{M}_{\delta_p}\delta_p$$

Στην μορφή του χώρου κατάστασης:

$Z_w = \frac{\partial Z}{\partial w}$

Σε σχέση με τις αποκλίσεις του πηδαλίου ανόδου-καθόδου, γύρω από μια θέση ισορροπίας, καθώς η ώση διατηρείται σταθερή:

$$\delta_p = 0 \;\therefore\; \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} x_u & x_w & x_q & x_\theta \\ z_u & z_w & z_q & z_\theta \\ m_u & m_w & m_q & m_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\underline{\underline{A}}} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} x_{\delta_e} \\ z_{\delta_e} \\ m_{\delta_e} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} \delta_e$$

$\dot{x} = A x + B \delta \longleftarrow$ "μεταβλητές" ελέγχου $\qquad$ $\underline{\underline{A, B \text{ σταθερά}}}$

$\downarrow$ μετασχ. Laplace $\qquad \mathcal{L}(x) = \tilde{X}(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)\,dt$

$$s\underline{\tilde{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\tilde{x}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\tilde{\delta}} \Rightarrow$$

$$\underline{\tilde{x}} = \underbrace{\left[(s\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\,\underline{\underline{B}}\right]}_{\text{συνάρτ. μεταφοράς } G} \underline{\tilde{\delta}} \qquad \Rightarrow \{\tilde{x}_i\} = [G_{ij}]\{\tilde{\delta}_j\}$$

$$\delta_j \longrightarrow \boxed{G_{ij}} \longrightarrow x_i$$

$$(s\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} = \frac{\underbrace{\mathrm{adj}\,(s\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})}\ {*B}}{\det\,(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})}$$

$\longleftarrow$ πολυώνυμο s

$\longleftarrow$ πολυώνυμο του s

$$\underline{\tilde{x}} = \frac{\underbrace{\left[\mathrm{adj}\,(\dots)\,\underline{\underline{B}}\right]}}{\det}\,\underline{\tilde{\delta}}$$

$$G = G(s) = \frac{N(s)}{\det}$$

$$\det \Rightarrow (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)$$

$$\lambda_{1,2} = Re + i\,Im \Rightarrow (s-\lambda_1)(s-\lambda_2) =$$

$$= (s^2+\alpha s+\beta)$$

$$= \underline{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

$$\underline{m}\ddot{x} + \underline{d}\dot{x} + \underline{k}x = f \leftarrow \omega^2 = k/m$$

$$\Downarrow$$

$$m\left(\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \omega^2\right.$$

$$2\zeta\omega = \frac{d}{m}$$

Απόκριση σε εντολές ελέγχου

adj $(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) \cdot B$.

- Οι τέσσερις συναρτήσεις μεταφοράς που προκύπτουν από αυτό το σύστημα, μπορούν να γραφούν στην κάτωθι πιο βολική μορφή:

Δ.Μ

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N^{u}_{\delta_e}(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_u(s + 1/T_u)(s^2 + 2\zeta_u\omega_u s + \omega_u^2)}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)}$$

4ου βαθμού

$$\frac{w(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N^{w}_{\delta_e}(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_w(s + 1/T_\alpha)(s^2 + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha s + \omega_\alpha^2)}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)}$$

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N^{q}_{\delta_e}(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_q s(s + 1/T_{\theta_1})(s + 1/T_{\theta_2})}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)}$$

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N^{\theta}_{\delta_e}(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_\theta(s + 1/T_{\theta_1})(s + 1/T_{\theta_2})}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)}$$

όπου

- T: χρονική σταθερά,
- ω: φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση [rad/sec],
- ζ: συντελεστής απόσβεσης,
- p (phugoid): δείκτης φυγοειδούς,
- s (short period): δείκτης μικρής περιόδου.

$s^2 + 2\zeta\omega s + \underline{\omega}^2$ χωρίς απόσβ

$$\lambda = \underbrace{(-\zeta\omega)}_{Re} \pm i\,\underbrace{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}_{Im}$$

απόσβ

συχν. ταλ.

Η χαρακτηριστική εξίσωση

- Εκφράζοντας τις **ρίζες των πολυωνύμων** που προκύπτουν από τον χώρο κατάστασης, συναρτήσει των **χρονικών σταθερών**, των **λόγων απόσβεσης** και των **φυσικών συχνοτήτων** τότε λαμβάνονται άμεσα οι απαιτούμενες πληροφορίες που χαρακτηρίζουν τη **δυναμική** της απόκρισης.
- Ο **κοινός παρονομαστής** των συναρτήσεων μεταφοράς αποτελεί το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**, το οποίο με τη σειρά του περιγράφει τα **χαρακτηριστικά ευστάθειας** του αεροσκάφους.
- Οι γενικές μορφές των αποκρίσεων των μεταβλητών, καθορίζονται από τους κοινούς παρονομαστές και «χρωματίζονται» από τους διαφορετικούς κάθε φορά αριθμητές.
- Ο αριθμητής δεν παίζει κανένα ρόλο στον καθορισμό της ευστάθειας ενός γραμμικού συστήματος.

Η χαρακτηριστική εξίσωση

- Το **διάμηκες χαρακτηριστικό πολυώνυμο** για ένα κλασσικό αεροσκάφος είναι **4ου βαθμού**, αποτελεί τον κοινό παρονομαστή των συναρτήσεων μεταφοράς και εξισώνοντας το με το μηδέν αποτελεί τη **χαρακτηριστική εξίσωση**:

όρίζουσα: $$\Delta(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$$

Παραγοντοποιείται σε **δύο ζεύγη ριζών**:

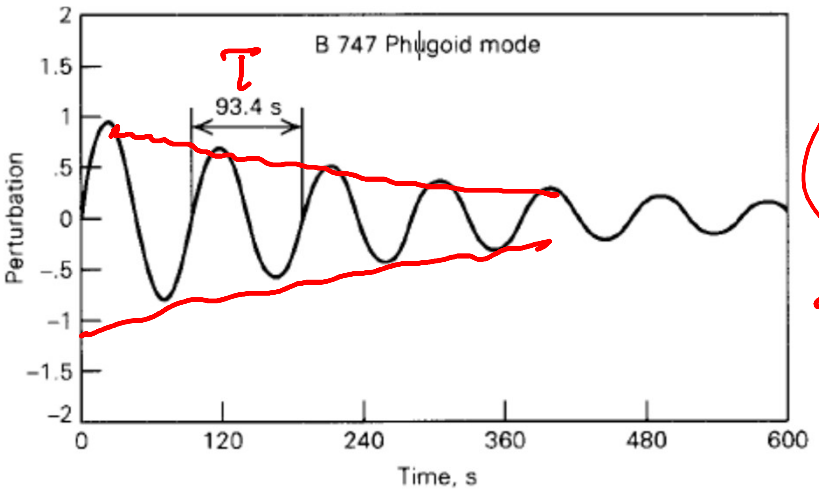
$$\Delta(s) = \left(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2\right)\left(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2\right) = 0$$

Απόκριση αεροσκάφους = Υπέρθεση δύο μορφών ταλαντώσεων, της μικρής περιόδου και του φυγοειδούς

Χαρακτηριστική εξίσωση ≡ Σύστημα 2ης τάξης μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

από τις παραγ. ευστάθειας

- Τα χαρακτηριστικά της **συχνότητας** και της **απόσβεσης** προέρχονται από τις **αεροδυναμικές ιδιότητες** του αεροσκάφους.
- Η σύνδεση μεταξύ της δυναμικής του αεροσκάφους και των αεροδυναμικών του χαρακτηριστικών ⇒ Παράγωγοι ευστάθειας

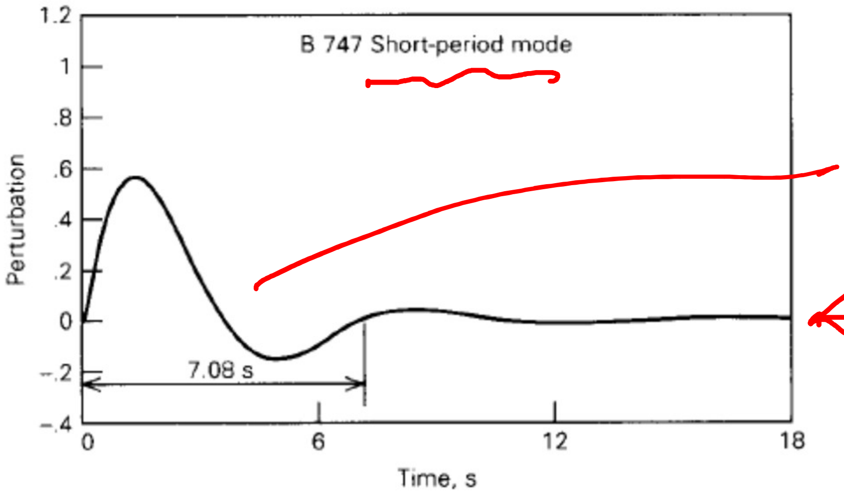


(a)

T = 93.4 s.

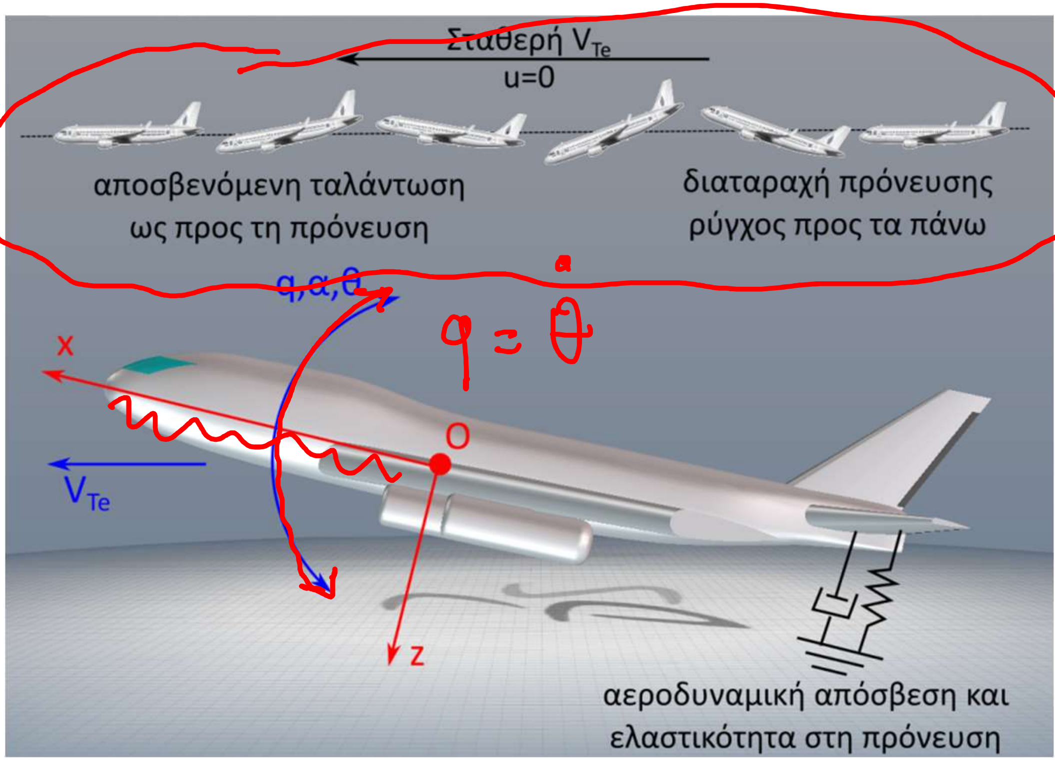
1 τάξη μεγέθους διαφορά

T = 7.08 s



(b)

Ταλάντωση πρόνευσης μικρής περιόδου



Μορφή (mode) μικρής περιόδου ή αλλιώς ταχείας προσαρμογής της γωνίας πρόσπτωσης (rapid incidence adjustment):
Τυπικά είναι μία αποσβενόμενη ταλάντωση, ως προς την πρόνευση περί τον άξονα Oy.

- Κλασσική ταλάντωση 2[ου] βαθμού:

Κυρίες μεταβλητές:

- γωνία πρόσπτωσης α_w, ω_s
- ρυθμός πρόνευσης q και u
- πρόνευση θ.

$q = \dot{\theta}$

- **Φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση:**

$$\omega_s \sim 1{:}10 \text{ rad/sec.}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

- Η **απόσβεση ζ_s** σταθεροποιεί το αεροσκάφος, αν και ο λόγος απόσβεσης είναι συχνά χαμηλότερος του επιθυμητού.
- Μικρή περίοδος της μορφής ⇒ οι επιδράσεις της αδράνειας και της ορμής, καθορίζουν ότι σε αυτή τη χρονική κλίμακα, η ταχύτητα **U παραμένει κατά προσέγγιση σταθερή** (u=0).

$$U = U_e + \cancel{u} \approx U_e$$

Ταλάντωση πρόνευσης μικρής περιόδου

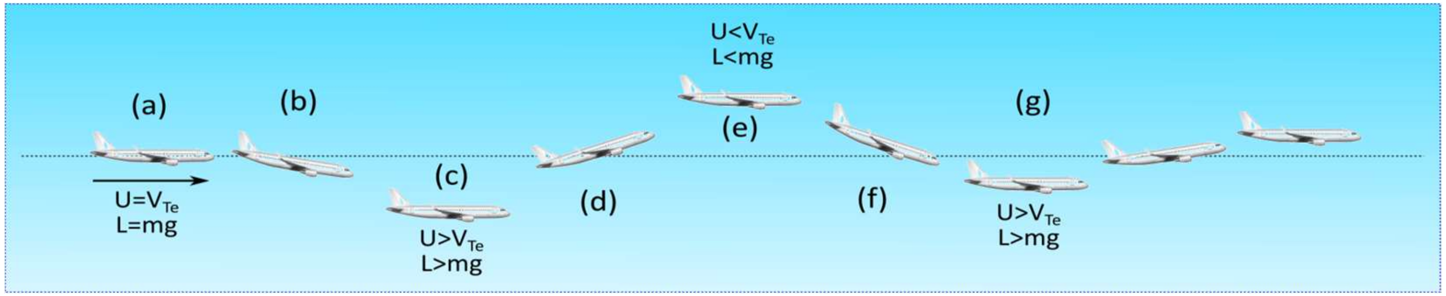
Για την κατανόηση των φυσικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα ⇒ Σύγκριση με το δυναμικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα:

- Το αεροσκάφος συμπεριφέρεται σαν να ήταν **αγκιστρωμένο, κατά τον άξονα Oy**, από ένα **ελατήριο** όπως στο προηγούμενο σχήμα.
- Μια διαταραχή πρόνευσης ως προς την κατάσταση ισορροπίας αναγκάζει το **ελατήριο** να παράγει μια **ροπή επαναφοράς** και επακόλουθα να προκαλεί μια ταλάντωση ως προς τη στάση πρόνευσης.
- Η **ακαμψία του ελατηρίου** έχει ως ρίζα της, τη φυσική **«ανεμουριακή» τάση** του αεροσκάφους, δηλαδή την τάση της κεφαλής ή της ουράς του αεροσκάφους να ευθυγραμμίζεται με τον σχετικό άνεμο.
- Η **απόσβεση** προκύπτει από την **κίνηση της ουράς** κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης όπου συμπεριφέρεται ως ένας συνεκτικός αποσβεστήρας κραδασμών.
- Για λόγους απλότητας, υποτίθεται ότι το **κυρίαρχο, αεροδυναμικό, δομικό κομμάτι** που καθορίζει τα **χαρακτηριστικά απόσβεσης και επαναφοράς**, είναι το **ουραίο πτέρωμα**.

Το φυγοειδές

- Ελαφρά, αποσβενόμενη ταλάντωση **χαμηλής συχνότητας** στην ταχύτητα U, συζευγμένη με τη γωνία πρόνευσης θ και το ύψος h.
- Η γωνία πρόσπτωσης α_w παραμένει ουσιαστικά σταθερή κατά τη διάρκεια της διαταραχής.
- Προσεγγιστικά, αμελείται η παρουσία των συνιστωσών του φυγοειδούς στη γωνία πρόσπτωσης α_w και στον ρυθμό πρόνευσης q.
- Φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση: $\omega_p \sim 0.1 : 1$ rad/sec.
- Το φυγοειδές είναι μια κλασσική αποσβενόμενη αρμονική κίνηση, που οδηγεί το αεροσκάφος να πετά σε ένα ομαλό **ημιτονοειδές ίχνος πτήσης** γύρω από το ύψος της κατάστασης αντιστάθμισης.
- Οι επιδράσεις της αδράνειας και της ορμής είναι μεγάλες, άρα **το φαινόμενο είναι αργό**.
- Καθώς η **οπισθέλκουσα** προβλέπεται εξ αρχής χαμηλή, έτσι και ο λόγος απόσβεσης **ζ** είναι **πολύ μικρός**.
- Οι $\boldsymbol{\dot{q}}$ ***και*** $\boldsymbol{\dot{w}}$ **είναι μικρές** και μπορούν να αγνοηθούν.

Το φυγοειδές



(a): Αντισταθμισμένο αεροσκάφος σε οριζόντια πτήση (L=mg), με U ≅ V_{T_e}. Τότε δέχεται τη διαταραχή από την αντιστάθμιση.

(b): Η διαταραχή αντιστοιχεί σε μείωση της ταχύτητας κατά u. Αφού η γωνία πρόσπτωσης παραμένει ουσιαστικά σταθερή, αυτό οδηγεί σε μια μικρή μείωση της άνωσης. Το αεροσκάφος αρχίζει να χάνει ύψος και καθώς κατέρχεται αρχίζει να επιταχύνεται. Η ταχύτητα και η άνωση, συνεχίζουν να αυξάνονται , ώστε U>V_{T_e} και L>mg. Αυτό οδηγεί σε σταθερή άνοδο της κεφαλής του.

(c): Το αεροσκάφος ξεκινά την άνοδο.

(d): Καθώς πλέον έχει περίσσεια κινητικής ενέργειας, η αδράνεια και η ορμή το αναγκάζουν να ξεπεράσει το αρχικό ύψος χάνοντας παράλληλα ταχύτητα και άνωση, καθώς ανέρχεται. Όσο το αεροσκάφος επιβραδύνεται η κεφαλή του στρέφεται προς τα κάτω.

(e): Η άνωση είναι αρκετά μικρότερη από το βάρος και η επιταχυνόμενη κάθοδος ξεκινά για μια ακόμη φορά.

(f): Η αδράνεια και η ορμή εξαναγκάζουν το αεροσκάφος να συνεχίζει την κάθοδο διαμέσου του αρχικού ύψους και καθώς η ταχύτητα και ή άνωση του αυξάνονται προοδευτικά, η κεφαλή του στρέφεται προς τα πάνω.

(g): Φτάνοντας σε οριζόντια θέση το αεροσκάφος ξεκινά ξανά την άνοδο και ολοκληρώνεται ο κύκλος της ταλάντωσης του φυγοειδούς.

Η κίνηση συνεχίζεται με τις επιδράσεις της οπισθέλκουσας να εξαναγκάζουν τα μέγιστα και τα ελάχιστα της κίνησης να μειώνονται προοδευτικά σε μέγεθος, έως ότου η κίνηση αποσβεστεί.

Μοντέλα χαμηλότερης τάξης

- Συχνά χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές λύσεις για την κατανόηση των φυσικών διεργασιών της δυναμικής του αεροσκάφους.
- Γενικά, για τα συμβατικά αεροσκάφη:

$$\mathrm{A, B, C} \gg \mathrm{D, E}$$

- Κατά προσέγγιση, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παραγοντοποιείται ως:

$$\mathrm{A}\left(\mathrm{s}^2 + \frac{\mathrm{CD} - \mathrm{BE}}{\mathrm{C}^2}\mathrm{s} + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\right)\left(\mathrm{s}^2 + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\mathrm{s} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) = 0$$

- Οι συντελεστές A, B, C, D και E, είναι αλγεβρικές εκφράσεις συναρτήσει των αεροδυναμικών παραγώγων ευστάθειας, της αδράνειας και της μάζας.
- Όμως, ακόμα και αυτές οι εκφράσεις είναι σχετικά πολύπλοκες ώστε να μπορούν να δώσουν ικανοποιητική περιγραφή των φυσικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα, γι’ αυτό ακολουθείται περαιτέρω απλοποίηση των μαθηματικών σχέσεων.

$As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E$ ← πολ. 4ης τάξης

$$A\left(s^4 + \frac{B}{A}s^3 + \dots\right)$$

$A \neq 0$

ευστάθεια : test $\begin{cases} F_0 = A \\ F_1 = B \\ F_2 = BC - AD \\ F_3 = F_2 D - B^2 E \\ F_4 = F_3 BE \end{cases}$

σε όταν

E: $-$ → $+$

1 πραγμ. ιδιοτιμή αλλάξει πρόσημο

κριτήριο

$\forall F > 0$ } ευσταθείς

$A, B, \dots > 0$

$R = D(BC - AD) - B^2 E > 0$

R: $-$ → $+$

1 μιγαδ- αλλάζει πρόσ

Η προσέγγιση της μικρής περιόδου

η

- Τα **βραχυπρόθεσμα χαρακτηριστικά απόκρισης** ενός αεροσκάφους, έχουν εξαιρετική σημασία στον καθορισμό των **χαρακτηριστικών πτήσης και ευκολίας χειρισμού**.
- Η **βραχυπρόθεσμη απόκριση** του αεροσκάφους σε μια διαταραχή, κυριαρχείται από τη **μορφή της μικρής περιόδου**.

⇒ Εξίσωση κίνησης μειωμένης τάξης, όπου παραλείπονται οι μεταβλητές κατάστασης στις οποίες επιδρά το φυγοειδές.

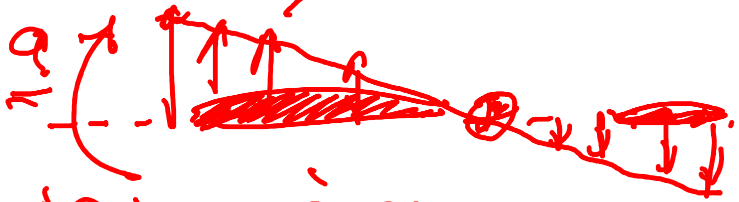
- Βραχυπρόθεσμα, η ταχύτητα U ($u = 0$) παραμένει ουσιαστικά σταθερή, επομένως η εξίσωση της ταχύτητας αλλά και οι όροι που εξαρτώνται από την ταχύτητα μπορούν να παραλειφθούν από τις διαμήκεις εξισώσεις κίνησης.
- Υποθέτοντας ότι η εξίσωση κίνησης αναφέρεται στους **άξονες του ανέμου** και το αεροσκάφος είναι αρχικά σε **μόνιμη-σταθερή και οριζόντια πτήση**:

$$\gamma_e = 0 \quad U_e = V_{T_e}$$

$q x \simeq w$

- Από τις συντετμημένες εκφράσεις των παραγώγων ευστάθειας, προκύπτει $z_\theta = m_\theta = 0$. Άρα:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_w & z_q \\ m_w & m_q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z_{\delta_e} \\ m_{\delta_e} \end{Bmatrix} \delta_e$$



ο χρόνος ↓ ⇒ οι αλλαγές μικρές

ΔΕΝ στρέφεται

Η προσέγγιση της μικρής περιόδου

- Το μητρώο της συνάρτησης μεταφοράς να μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\begin{bmatrix} z_{\delta_e}\left[s-\left(m_q - z_q\dfrac{m_{\delta_e}}{z_{\delta_e}}\right)\right] \\ m_{\delta_e}\left[s+\left(m_w\dfrac{z_{\delta_e}}{m_{\delta_e}}-z_w\right)\right]\end{bmatrix}}{s^2-(m_q+z_w)s+(m_q z_w - m_w z_q)}$$

$Z_{\delta_e} = \dfrac{\partial Z}{\partial \delta_e}$ κλίση ℓ_{tail}

$m_q = \dfrac{\partial (M/I_{yy})}{\partial q}$

$Z_w = \dfrac{\partial Z}{\partial w}$

- Μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω παρατηρώντας ότι:

$$\left|z_q\frac{m_{\delta_e}}{z_{\delta_e}}\right| \gg |m_q|\,,|z_w| \gg \left|m_w\frac{z_{\delta_e}}{m_{\delta_e}}\right| \;,\; \left.\begin{matrix}\tilde{Z}_q \ll mU_e \\ m \gg \tilde{Z}_w\end{matrix}\right\}\; z_q=\frac{\tilde{Z}_q+mU_e}{m-\tilde{Z}_w}\cong U_e$$

- Τότε προκύπτουν οι δύο βραχυπρόθεσμες συναρτήσεις μεταφοράς ~~που περιγράφουν~~ την απόκριση στην πηδάλιο ανόδου-καθόδου:

κλίση του lift

$$\frac{w(s)}{\delta_e(s)}=\frac{z_{\delta_e}\left(s+U_e\, m_{\delta_e}/z_{\delta_e}\right)}{s^2-(m_q+z_w)s+(m_q z_w-m_w U_e)}\equiv\frac{k_w(s+1/T_a)}{s^2+2\zeta_s\omega_s s+\omega_s^2}$$

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)}=\frac{m_{\delta_e}(s-z_w)}{s^2-(m_q+z_w)s+(m_q z_w-m_w U_e)}\equiv\frac{k_q(s+1/T_{\theta_2})}{s^2+2\zeta_s\omega_s s+\omega_s^2}$$

- Τα k_w, k_q, T_α, $T_{\theta 2}$, ζ_s και ω_s αντιπροσωπεύουν προσεγγιστικά μεγέθη.

Η προσέγγιση της μικρής περιόδου

- Πλέον η χαρακτηριστική εξίσωση μειωμένης τάξης:
$$\Delta(s) = s^2 - (m_q + z_w)s + (m_q z_w - m_w U_e)$$
- Σε αναλογία με την κλασσική διάταξη της μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συντετμημένων παραγώγων ως προς τις διαστατές παράγωγους ευστάθειας και θεωρώντας τις αριθμητικές τιμές των σχετικών αεροδυναμικών παραγώγων ευστάθειας για το τυπικό συμβατικό αεροσκάφος, **χονδρικά η απόσβεση και η φυσική συχνότητα της μικρής περιόδου** δίνονται ως:
$$2\zeta_s\omega_s = -\frac{\widetilde{M}_q}{I_{yy}} \quad \omega_s = \sqrt{-\frac{\widetilde{M}_w U_e}{I_{yy}}}$$
- Συνήθως η $\widetilde{M}_q$, που εξαρτάται κυρίως από τις **ιδιότητες απόσβεσης του ουραίου πτερώματος**, είναι **αρνητική**.
- Η $\widetilde{M}_w$ είναι ένα μέτρο της **αεροδυναμικής δυσκαμψίας πρόνευσης**, ενώ και αυτή κυριαρχείται από την αεροδυναμική του ουραίου πτερώματος. Το **πρόσημο** της $\widetilde{M}_w$ εξαρτάται από τη **θέση του κέντρου βάρους** και μάλιστα **όσο αυτό κινείται προς τα εμπρός** στην άτρακτο, τόσο **μεγαλύτερες αρνητικές τιμές** παίρνει αυτή η παράγωγος.

- Από την ανάλυση του κεφαλαίου 2, περί της διαμήκους στατικής ευστάθειας:
$$C_{m_\alpha} = \frac{dC_m}{d\alpha} < 0, C_{m_\alpha} = C_{L_{aw}}\left(\frac{x_{cg}}{\bar{c}} - \frac{x_{ac}}{\bar{c}}\right) - \eta V_H C_{L_{\alpha t}}\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)$$
- Η μικρή περίοδος θα είναι **ευσταθής εφόσον το κέντρο βάρους βρίσκεται αρκετά μπροστά** στο αεροσκάφος. Η θέση του κέντρου βάρους στην άτρακτο, όπου η παράγωγος $\widetilde{M}_w$ **αλλάζει πρόσημο**, είναι το **ουδέτερο σημείο** με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα.
$$\frac{x_{NP}}{\bar{c}} = \frac{x_{ac}}{\bar{c}} + \eta V_H \frac{C_{L_{\alpha t}}}{C_{L_{\alpha w}}}\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)$$
- Έτσι, η $\widetilde{M}_w$ αποτελεί επίσης ένα **μέτρο του περιθωρίου ευστάθειας** με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα που εκφράστηκε ως:
$$\frac{x_{NP}}{\bar{c}} - \frac{x_{cg}}{\bar{c}}$$
- Η θέση του κέντρου βάρους, όπου η έκφραση $(m_q z_w - m_w U_e)$ αλλάζει πρόσημο, ονομάζεται σημείο ελιγμού με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα (controls fixed manoeuvre point) και αποτελεί αντίστοιχα ένα μέτρο του περιθωρίου ελιγμών με τα χειριστήρια σταθεροποιημένα (controls fixed manoeuvre margin).

Η προσέγγιση του φυγοειδούς

- Η ταλάντωση του φυγοειδούς, εξελίσσεται **πολύ αργά** και μπορεί να τη διαχειριστεί εύκολα ο πιλότος. Γι' αυτό, σπάνια απαιτείται η ύπαρξη ενός μοντέλου μειωμένης τάξης που θα διατηρεί μόνο τη δυναμική του φυγοειδούς.
- Ένα τέτοιο μοντέλο όμως, χρησιμεύει στον **προσδιορισμό των αεροδυναμικών ιδιοτήτων της κατασκευής**, που καθορίζουν τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά του φυγοειδούς.
- Οι **w και q** αποκρίνονται σε χρονική κλίμακα που σχετίζεται με τη μικρή περίοδο, έτσι υποθέτονται **ψευδοστατικές στη χρονική κλίμακα του φυγοειδούς**. Υποθέτοντας επίσης ότι οι εξισώσεις κίνησης αναφέρονται στους **άξονες του ανέμου** και ότι η διαταραχή λαμβάνει χώρα γύρω από τη μόνιμη και οριζόντια πτήση:

$$\dot{w} = \dot{q} = 0 , \qquad \gamma_e = 0 \quad , \quad U_e = V_{T_e}$$

- Για τις συντετμημένες αεροδυναμικές παραγώγους ευστάθειας ισχύουν:

$$x_\theta = -g \quad \text{και} \quad z_\theta = m_\theta = 0 \quad \text{και} \quad \left.\begin{matrix} \tilde{Z}_q \ll mU_e \\ m \gg \tilde{Z}_w \end{matrix}\right\} \; z_q = \frac{\tilde{Z}_q + mU_e}{m - \tilde{Z}_w} \cong U_e$$

- Επιπλέον, συνήθης υπόθεση είναι ότι η αεροδυναμική παράγωγος x_q, είναι πολύ μικρή ποσότητα.

Η προσέγγιση του φυγοειδούς

- Πλέον, η εξίσωση κίνησης απλοποιείται ως:

$$\begin{Bmatrix}\dot{u}\\0\\0\\\dot{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}x_u & x_w & 0 & -g\\ z_u & z_w & U_e & 0\\ m_u & m_w & m_q & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\w\\q\\\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}x_{\delta_e}\\z_{\delta_e}\\m_{\delta_e}\\0\end{Bmatrix}\delta_e$$

- Από τη δεύτερη και τρίτη γραμμή της εξίσωσης, επιλύοντας αλγεβρικά τα w και q ως προς τα u και δ_e και αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τρίτη γραμμή, προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix}\dot{u}\\\dot{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}x_u - x_w\dfrac{m_uU_e-m_qz_u}{m_wU_e-m_qz_w} & -g\\ \dfrac{m_uz_w-m_wz_u}{m_wU_e-m_qz_w} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\\theta\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}x_{\delta_e}-\dfrac{m_{\delta_e}U_e-m_qz_{\delta_e}}{m_wU_e-m_qz_w}\\ \dfrac{m_{\delta_e}z_w-m_wz_{\delta_e}}{m_wU_e-m_qz_w}\end{Bmatrix}\delta_e$$

δηλαδή υπό τη μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A_p}\mathbf{x}+\mathbf{B_p}\mathbf{u}$$

- Τότε, η χαρακτηριστική εξίσωση μειωμένης τάξης του φυγοειδούς, προκύπτει:

$$\Delta(s)=s^2-\left(x_u-x_w\frac{m_uU_e-m_qz_u}{m_wU_e-m_qz_w}\right)s+\left(\frac{m_uz_w-m_wz_u}{m_wU_e-m_qz_w}\right)g$$

Η προσέγγιση του φυγοειδούς

- Για ένα συμβατικό αεροσκάφος σε υποηχητική πτήση μπορεί να θεωρηθεί:

$$m_u \rightarrow 0\,, \qquad |m_u z_w| \ll |m_w z_u| \quad \text{και} \quad |m_w U_e| \gg |m_q z_w|$$

- Η $\widetilde{X}_u$ είναι τόσο μικρή ώστε να μπορεί να παραληφθεί, ενώ ισχύει $m \gg \widetilde{Z}_u$, τότε:

$$x_u \cong \frac{\widetilde{X}_u}{m} = \frac{\rho V_{T_e} S X_u}{2m} \quad \text{και} \quad z_u \cong \frac{\widetilde{Z}_u}{m} = \frac{\rho V_{T_e} S Z_u}{2m}$$

- Από την υπόθεση υποηχητικών συνθηκών πτήσης, οι αεροδυναμικές ιδιότητες της ατράκτου δεν επηρεάζονται από τα φαινόμενα συμπιεστότητας:

$$X_u = -2C_D - V_{T_e}\frac{\partial C_D}{\partial V} + \frac{1}{\frac{1}{2}\rho V_{T_e} S}\frac{\partial \tau}{\partial V} \cong -2C_D$$

$$Z_u = -2C_L - V_{T_e}\frac{\partial C_L}{\partial V} \cong -2C_L$$

- Πλέον, οι εκφράσεις για την απόσβεση και τη φυσική συχνότητα γίνονται:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2g^2}{U_e V_{T_e}}} \equiv \frac{g\sqrt{2}}{V_{T_e}} \qquad , \qquad \zeta_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{C_D}{C_L}$$

- Φυσικά, αυτές οι εκφράσεις είναι πολύ προσεγγιστικές. Η έκφραση για την $\boldsymbol{\omega_p}$, αποδεικνύει ότι η φυσική συχνότητα του φυγοειδούς είναι **περίπου αντιστρόφως ανάλογη με την ταχύτητα αντιστάθμισης**.

- Επίσης, πολύ ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι **ο λόγος απόσβεσης του φυγοειδούς είναι περίπου αντιστρόφως ανάλογος του λόγου άνωσης προς οπισθέλκουσα του αεροσκάφους**. Εφόσον ένας από τους κύριους αντικειμενικούς σκοπούς του μηχανικού είναι η επίτευξη μεγάλου λόγου άνωσης προς οπισθέλκουσα, γίνεται εύκολα κατανοητό γιατί η **απόσβεση του φυγοειδούς** είναι **συνήθως πολύ χαμηλή**.

Μοντέλα χαμηλότερης τάξης -Σύνοψη

Συνοπτικά για τα μοντέλα χαμηλότερης τάξεως, προκύπτει ότι οι κυριότερες παράγωγοι ευστάθειας που εμπλέκονται, είναι:

- $\widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{q}}$: απόσβεση μικρής περιόδου,
- $\widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{w}}$: συχνότητα μικρής περιόδου,
- $\widetilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{u}}$: απόσβεση φυγοειδούς,
- $\tilde{\mathrm{Z}}_{\mathrm{u}}$: συχνότητα φυγοειδούς.