

Заметим, что A — симметрическая ненулевая матрица с неотрицательными элементами и нулями на диагонали. Докажем, что у такой матрицы есть отрицательное собственное значение.

Известный факт, что симметрическая матрица диагонализуема в вещественном базисе (все собственные значения вещественны). Допустим, что все собственные значения A неотрицательны. Рассмотрим квадратичную форму q с матрицей A в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда эта квадратичная форма неотрицательно определена, так как все собственные значения неотрицательны. То есть $\forall v: q(v) \geq 0$. С другой стороны, пусть $a_{ij} \neq 0$. Тогда $q(e_i - e_j) = a_{ii} - 2a_{ij} + a_{jj} = -2a_{ij} < 0$. Это противоречит неотрицательной определенности q . Значит, исходное предположение неверно, и у A есть отрицательное собственное значение.