

Рассмотрим оператор, который вычисляет среднее значение функции $f(\vec{r})$ на окружности радиуса 1 и вычитает значение функции в центре данной окружности:

$$(Tf)(\vec{r}) = f(\vec{r}) - \int_0^1 f(\vec{r} + \vec{\tau}(s)) ds,$$

где $\vec{\tau}(s) = (\cos(2\pi s) \sin(2\pi s))^T$. Найдем, как действует этот оператор при преобразовании Фурье F :

$$T_F \varphi(\vec{\omega}) = FTF^{-1} \varphi(\vec{\omega}) = \left(1 - \int_0^1 e^{i\vec{\tau}(s) \cdot \vec{\omega}} ds\right) \varphi(\vec{\omega}) = g(\vec{\omega}) \varphi(\vec{\omega}),$$

где $\varphi(\vec{\omega})$ принадлежит пространству обобщенных функций. Мы получили, что T_F является оператором умножения на гладкую функцию $g(\vec{\omega})$. Найдем нули этой функции:

$$\begin{aligned} g(\vec{\omega}) &= 1 - \int_0^1 e^{i\vec{\tau}(s) \cdot \vec{\omega}} ds = 1 - \int_0^1 e^{i|\vec{\omega}|(\cos \Phi \cos(2\pi s) + \sin \Phi \sin(2\pi s))} ds = \\ &= 1 - \int_0^1 e^{i|\vec{\omega}| \cos(\Phi - 2\pi s)} ds = 1 - \int_0^1 e^{i|\vec{\omega}| \cos(2\pi s)} ds = \\ &= 1 - \int_0^{1/2} e^{i|\vec{\omega}| \cos(2\pi s)} ds - \int_0^{1/2} e^{-i|\vec{\omega}| \cos(2\pi s)} ds = 1 - 2 \int_0^{1/2} \cos(|\vec{\omega}| \cos(2\pi s)) ds. \end{aligned}$$

За Φ мы обозначили угол между декартовыми компонентами $\vec{\omega}$. В дальнейшем он исчезает, поскольку интеграл берется по всему периоду периодической функции. Произведем замену $u = \cos(2\pi s)$. Тогда

$$\begin{aligned} g(\vec{\omega}) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_1^{-1} \frac{\cos(|\vec{\omega}|u) du}{\sqrt{1-u^2}} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(|\vec{\omega}|u) du}{\sqrt{1-u^2}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{(1 - \cos(|\vec{\omega}|u)) du}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $g(\vec{\omega})$ имеет единственный нуль в точке $\vec{\omega} = 0$. Найдем порядок этого нуля. Нетрудно разложить $g(\vec{\omega})$ в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

$$g(\vec{\omega}) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\vec{\omega}^2 u^2}{2} + O(\vec{\omega}^2 u^2) \right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4} \vec{\omega}^2 + O(\vec{\omega}^2).$$

Таким образом, порядок нуля равен двум. Отсюда следует, что $\ker(T_F)$ состоит из линейной оболочки $\delta(\vec{\omega})$ и $\delta'(\vec{\omega})$. При обратном преобразовании Фурье эта оболочка соответствует множеству функций вида $f = Ax + By + C$. Поскольку только константа из них ограничена, утверждение задачи доказано.