

Заметим, что все маленькие кубики разбиваются на 4 группы по количеству белых граней — 8 кубиков с 3 гранями, 12 кубиков с 2 гранями, 6 кубиков с 1 гранью и 1 черный кубик.

Посчитаем число комбинаций, которые можно получить вращая маленький кубик. Существует 6 вариантов зафиксировать верхнюю грань и 24 варианта расположения боковых граней при каждой фиксации. Таким образом, существует 24 способа повернуть маленький кубик.

Для каждой группы кубиков количество подходящих вариантов равно количеству перестановок внутри группы умножить на количество подходящих поворотов:

1. $8! \cdot 3^8$ — кубик можно вращать вокруг диагонали;
2. $12! \cdot 2^{12}$ — два варианта расположения белых граней;
3. $6! \cdot 4^6$ — при фиксации белой грани существует 4 варианта расположения;
4. $1! \cdot 24$ — для черного кубика подходят любые вращения.

Всего возможных комбинаций расположений кубиков $27! \cdot 24^{27}$. Таким образом, искомая вероятность равна:

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 6! \cdot 4^6 \cdot 24}{27! \cdot 24^{27}} = \frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{24} \cdot 6!}{27! \cdot 24^{26}}.$$