

Воспользуемся известным фактом, что определитель матрицы равен произведению ее собственных значений. Отсюда следует, что если мы найдем собственные значения матрицы $uu^T J$ (обозначим их как λ_i), то определитель исходной матрицы будет равен $\prod_i (1 + \beta \lambda_i)$.

Для нахождения собственных значений матрицы $uu^T J$ воспользуемся ассоциативностью произведения матриц. Заметим, что если мы умножим матрицу на произвольный вектор $(uu^T J)h = u(u^T Jh)$, то в случае $u^T Jh \neq 0$ получившийся вектор будет коллинеарен вектору u .

Отсюда следует, что

- (а) u – собственный вектор с собственным значением $u^T Ju$,
- (б) все собственные значения кроме, возможно, $u^T Ju$ равны 0.

Функция $u^T Ju$ представляет собой квадратичную форму с нулевой матрицей, поскольку матрица J кососимметрична. Значит, все собственные значения $uu^T J$ равны нулю. Таким образом, определитель исходной матрицы равен 1.