Производя рекуррентные подстановки, нетрудно получить явное выражение

$$c_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k\beta_k.$$

Поскольку последовательность $n^2\beta_n$ сходится, она ограничена. Более формально $\exists A : \forall k \ \ |\beta_k| \leqslant \frac{A}{k^2}$. Тогда

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k|\beta_k| \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A}{k}.$$

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратическим

$$|c_n| \leqslant A\sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}}{n-1}} \leqslant A\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Поскольку модуль c_n ограничен рядом, сходящимся к 0, $c_n \to 0$ при $n \to \infty$.