(а) Исследуем на абсолютную сходимость.
Разберем сначала вспомогательное утверждение:

$$\left|\frac{\sin k}{k}\right| + \left|\frac{\sin(k+1)}{k+1}\right| \geqslant \frac{1}{6k}, \ \ \forall k \geqslant 1.$$

Рассмотрим два случая:
(i) $|\sin k| \geqslant \frac{1}{3} \Rightarrow$ утверждение очевидно
(ii) $|\sin k| \leqslant \frac{1}{3}$
Рассмотрим единичную окружность и проведем две прямые: $y = \frac{1}{3}$ и $y = -\frac{1}{3}$. Тогда множество $|\sin k| \leqslant \frac{1}{3}$ расположено на окружности между двумя этими прямыми. Из геометрических соображений можно увидеть, что при повороте этого множества на 1 радиан, оно выйдет за пространство между прямыми. Это означает, что $|\sin(k+1)| \geqslant \frac{1}{3}$ и $\left|\frac{\sin(k+1)}{k+1}\right| \geqslant \frac{1}{3(k+1)} \geqslant \frac{1}{6k}$, откуда следует исходное утверждение. В частности, из этого утверждения следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin k}{k}\right|$.
Попробуем теперь на основе этой идеи получить оценку на сумму абсолютных значений соседних членов исходного ряда:

$$|a_k| + |a_{k+1}| = \left|\int\limits_0^{\frac{\sin k}{k}} \frac{\sin t}{t} dt\right| + \left|\int\limits_0^{\frac{\sin(k+1)}{k+1}} \frac{\sin t}{t} dt\right| = \int\limits_0^{\left|\frac{\sin k}{k}\right|} \frac{\sin t}{t} dt + \int\limits_0^{\left|\frac{\sin(k+1)}{k+1}\right|} \frac{\sin t}{t} dt.$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\frac{\sin x}{x}$ — четная функция, первый нуль которой расположен в точках $\pm\pi$ и при интегрировании не достигается). Используя аналогичные рассуждения, получим:

$$|a_k| + |a_{k+1}| \geqslant \int\limits_0^{\frac{1}{6k}} \frac{\sin t}{t} dt \geqslant \sin\frac{1}{6k}.$$

Воспользуемся неравенством $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$ при $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Тогда получим

$$|a_k| + |a_{k+1}| \geqslant \frac{1}{3\pi k},$$

и по признаку сравнения заключаем, что ряд не сходится абсолютно.
(б) Исследуем интеграл на условную сходимость.
Представим члены ряда в следующем виде:

$$a_k = \int\limits_0^{\frac{\sin k}{k}} \frac{\sin t}{t} dt = \int\limits_0^{\frac{\sin k}{k}} 1 + O(t^2) dt = \frac{\sin k}{k} + O\left(\left(\frac{\sin k}{k}\right)^3\right).$$

Также заметим, что $O\left(\left(\frac{\sin k}{k}\right)^3\right)$ сходится, поскольку ряд $\left(\frac{\sin k}{k}\right)^3$ сходится абсолютно. Тогда по признаку сравнения, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$ сходится, то

сходится и исходный ряд.
Воспользуемся признаком Дирихле для сходимости рядов Абелева типа. Последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ монотонна и стремится к нулю, осталось доказать ограниченность последовательности частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k$.
Поскольку
$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin(\frac{n}{2})\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})} \leqslant \frac{1}{\sin(\frac{1}{2})},$$
получаем, что ряд сходится условно (чтобы посчитать последнюю сумму, можно домножить ее на $2\sin(\frac{1}{2})$ и расписать произведения синусов через разности косинусов).