

Допустим, что  $\forall(m, n): a_{mn} \leq mn$ . Выберем некоторое  $k \in \mathbb{N}$  и рассмотрим кривую на плоскости  $y = \frac{1}{k}x$ . Если  $i, j \in \mathbb{N}$  и точка  $(i, j)$  лежит под кривой  $y = \frac{1}{k}x$ , то  $a_{ij} \leq ij \leq i \cdot \frac{k}{i} = k$ . Таким образом, количество целых точек под кривой  $y = \frac{1}{k}x$  должно быть не больше  $8k$ . С другой стороны, количество целых точек под этой кривой не меньше, чем  $\int_2^k \frac{kdx}{x} = k \ln x|_2^k = k(\ln k - \ln 2)$ . При достаточно большом  $k$  это число больше  $8k$ . Таким образом, мы получаем противоречие. Следовательно, найдется пара  $(m, n)$  такая, что  $a_{mn} > mn$ .