Нетрудно показать, что $\int \varphi(x)\varphi'(x)dx = \frac{\varphi^2(x)}{2} + C$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)\varphi'(x)dx = \frac{\varphi^2(1)}{2} - \frac{\varphi^2(0)}{2} = \frac{\varphi^2(1)}{2}.$$

Найдем $\varphi(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2[\log_2 k]}}$. Число $[\log_2 k]$ равно количеству значащих разрядов в двоичной записи числа k, а значит, оно меняется от s до $s+1$ через 2^s членов ряда. Таким образом

$$\varphi(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^s}{2^{2s}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} = 2.$$

И окончательно получим $\int\limits_0^1 \varphi(x)\varphi'(x)dx = 2$.