

(а) Исследуем на абсолютную сходимость.

Разберем сначала вспомогательное утверждение:

$$\left| \frac{\sin k}{k} \right| + \left| \frac{\sin(k+1)}{k+1} \right| \geq \frac{1}{6k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Рассмотрим два случая:

(i)  $|\sin k| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow$  утверждение очевидно

(ii)  $|\sin k| \leq \frac{1}{3}$

Рассмотрим единичную окружность и проведем две прямые:  $y = \frac{1}{3}$  и  $y = -\frac{1}{3}$ . Тогда множество  $|\sin k| \leq \frac{1}{3}$  расположено на окружности между двумя этими прямыми. Из геометрических соображений можно увидеть, что при повороте этого множества на 1 радиан, оно выйдет за пространство между прямыми. Это означает, что  $|\sin(k+1)| \geq \frac{1}{3}$  и  $\left| \frac{\sin(k+1)}{k+1} \right| \geq \frac{1}{3(k+1)} \geq \frac{1}{6k}$ , откуда следует исходное утверждение. В частности, из этого утверждения следует расходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin k}{k} \right|$ .

Попробуем теперь на основе этой идеи получить оценку на сумму абсолютных значений соседних членов исходного ряда:

$$|a_k| + |a_{k+1}| = \left| \int_0^{\frac{\sin k}{k}} \frac{\sin t}{t} dt \right| + \left| \int_0^{\frac{\sin(k+1)}{k+1}} \frac{\sin t}{t} dt \right| = \int_0^{\left| \frac{\sin k}{k} \right|} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^{\left| \frac{\sin(k+1)}{k+1} \right|} \frac{\sin t}{t} dt.$$

(здесь мы воспользовались тем, что  $\frac{\sin x}{x}$  — четная функция, первый нуль которой расположен в точках  $\pm\pi$  и при интегрировании не достигается). Используя аналогичные рассуждения, получим:

$$|a_k| + |a_{k+1}| \geq \int_0^{\frac{1}{6k}} \frac{\sin t}{t} dt \geq \sin \frac{1}{6k}.$$

Воспользуемся неравенством  $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$  при  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ . Тогда получим

$$|a_k| + |a_{k+1}| \geq \frac{1}{3\pi k},$$

и по признаку сравнения заключаем, что ряд не сходится абсолютно.

(б) Исследуем на условную сходимость.

Представим члены ряда в следующем виде:

$$a_k = \int_0^{\frac{\sin k}{k}} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\frac{\sin k}{k}} 1 + O(t^2) dt = \frac{\sin k}{k} + O\left(\left(\frac{\sin k}{k}\right)^3\right).$$

Также заметим, что  $O\left(\left(\frac{\sin k}{k}\right)^3\right)$  сходится, поскольку ряд  $\left(\frac{\sin k}{k}\right)^3$  сходится абсолютно. Тогда по признаку сравнения, если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$  сходится, то

сходится и исходный ряд.

Воспользуемся признаком Дирихле для сходимости рядов Абелева типа.

Последовательность  $\{\frac{1}{n}\}$  монотонна и стремится к нулю, осталось доказать

ограниченность последовательности частичных сумм  $\sum_{k=1}^n \sin k$ .

Поскольку

$$\sum_{k=1}^n \sin k = \frac{\sin(\frac{n}{2}) \sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})} \leq \frac{1}{\sin(\frac{1}{2})},$$

получаем, что ряд сходится условно (чтобы посчитать последнюю сумму, можно домножить ее на  $2 \sin(\frac{1}{2})$  и расписать произведения синусов через разности косинусов).