

Договоримся, что каждая команда за турнир получает очки, равные числу превзойденных ею команд. Сначала докажем следующую простую лемму:

**Лемма.** Пусть команда  $E$  не превосходит команду  $K$ . Тогда  $K$  набрала больше очков, чем  $E$ .

**Доказательство.** Если  $E$  не превосходит  $K$ , то  $K$  победила команду  $E$ , а также все команды, которые победила команда  $E$ .

Теперь пусть  $X$  — команда, которую превзошла команда  $E$ . Если  $E$  выиграла у  $X$ , то  $K$  также выиграла у  $X$ . Значит,  $K$  превосходит  $X$ . Если же  $E$  выиграла у команды  $F$ , которая выиграла у  $X$ , то заметим, что  $K$  тоже выиграла у  $F$ . Значит,  $K$  выиграла у  $F$ , которая выиграла у  $X$ , то есть  $K$  превосходит  $X$ . Итого,  $K$  превосходит все команды, которые превзошла  $E$ , да еще и  $E$  в придачу, то есть как минимум на одну команду больше, чем  $E$ . Лемма доказана.

(а) Пусть  $A$  — команда, заработавшая максимальное число очков. Докажем, что  $A$  — чемпион. Допустим, это не так, тогда есть команда  $B$ , которую  $A$  не превзошла. По лемме получаем, что  $B$  заработала больше очков, чем  $A$ . Противоречие.

(б) Пусть у нас есть два чемпиона:  $A$  и  $B$ . Друг с другом они играли; пусть, к примеру, победила  $A$ . Так как  $B$  превосходит все другие команды (и  $A$  в частности), то  $B$  победила некоторую команду, которая выиграла у  $A$ . Допустим для начала, что есть команды, которые победили и  $A$ , и  $B$ . Тогда можно показать, что та из них (назовем ее  $C$ ), которая набрала больше всего очков, и будет третьим чемпионом. В самом деле, пусть  $E$  — команда, которую не превзошла  $C$ . Тогда, во-первых  $E$  победила и  $A$ , и  $B$ , а во-вторых,  $E$  заработала больше очков, чем  $C$  — противоречие. Пусть теперь нет команд, которые победили и  $A$ , и  $B$ . Рассмотрим множество всех таких команд, которые победили  $A$ , но проиграли  $B$ . Отметим, что оно непусто (см. выше). Среди них возьмем команду с наибольшим числом очков. Тогда пользуясь леммой мы можем установить, что эта команда является третьим чемпионом.