Мы будем активно пользоваться следующим правилом:

$$\left.\begin{array}{l} u'(x) \leqslant v'(x) \text{ при } x \geqslant 0 \\ u(0) = v(0) \end{array}\right\} \Rightarrow u(x) \leqslant v(x) \text{ при } x \geqslant 0.$$

Пусть $F(x) = \int\limits_0^x f^3(t)dt$, $G(x) = \left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2$. Отметим, что $F(0) = G(0) = 0$. Продифференцируем обе функции:

$$F'(x) = f^3(x), \;\; G'(x) = 2\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2 \cdot f(x).$$

Снова видим, что $F'(0) = G'(0) = 0$ и снова дифференцируем.

$$F''(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x), \;\; G''(x) = 2f^2(x) + 2f'(x) \cdot \int_0^x f(t)dt.$$

Здесь уже можно немножко облегчить себе жизнь, заметив, что $2f^2(x) \cdot f'(x) \leqslant 2f^2(x)$. Значит, нам достаточно сравнить $f^2(x) \cdot f'(x)$ и $2f'(x) \cdot \int\limits_0^x f(t)dt$, а поскольку $f'(x) > 0$, то и просто $f^2(x)$ и $2\int\limits_0^x f(t)dt$.
Заметим, что в нуле и то, и другое, равно 0, и продифференцируем:

$$(f^2(x))' = 2f(x) \cdot f'(x) \leqslant 2f(x) = \left(2\int\limits_0^x f(t)dt\right)'.$$