Обозначим исходный интеграл через I. Произведем замену $x = \frac{1}{t}$. Тогда

$$I = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1} dx = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{\operatorname{arcctg} t}{t^2 - t + 1} dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t}{t^2 - t + 1} dt = \frac{\pi}{2} \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{dt}{t^2 - t + 1} dt - I.$$

Отсюда

$$I = \frac{\pi}{4} \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{dt}{t^2 - t + 1} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg|_{\frac{1}{3}}^{3} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}.$$