Автор emazhnik

Решение В первую очередь докажем, что данный ряд сходится. Нетрудно понять, что $f(n) \le \log_2(n+1)$. Теперь докажем, что начиная с некоторого n выполняется $\log_2(n+1) < \sqrt{n}$. Действительно, по правилу Лопиталя получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n+1)}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Отсюда получаем, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}$. Этот ряд нетрудно ограничить:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right) = 1+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n} < 1+\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2$$

(или воспользоваться фактом, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ сходится при $\varepsilon > 0$).

Для нахождения суммы ряда заметим, что $f(2n) = f(n)$ и $f(2n+1) = f(n)+1$. Тогда:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(2n)}{2n(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2n(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)+1}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \left[\frac{1}{2n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.
\end{aligned}$$

Поскольку ряд сходится, мы можем переписать:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 1 + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \right|_{x=1} = 2 \ln(1+x)|_{x=1} = 2 \ln 2.
\end{aligned}$$