

Автор emazhnik

Решение Пусть V – векторное пространство над полем K , $\dim V = 9$. Также введем обозначения $U = \ker(E + A)$, $W = \ker(E - A)$. Тогда $\dim U = \dim V - \operatorname{rank}(E + A) = 9 - 7 = 2$. Докажем, что $U \cap W = \emptyset$. В самом деле, если $(E - A)x = 0$, то $(E + A)x = 2x$. Поскольку $\operatorname{char} K \neq 2$, $2x \neq 0$ для $x \neq 0$ (в соответствии с определением характеристики поля).

Заметим, что $(E - A)(E + A) = 0$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im}(E + A) \subset \ker(E - A)$, а значит $\dim W \geq \operatorname{rank}(E + A) = 7$.

С другой стороны, $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W \leq \dim V = 9$. Следовательно, $\dim W \leq 9 - \dim U = 7$.

Из $\dim W \geq 7$ и $\dim W \leq 7$ получаем $\dim W = 7$. Значит $\operatorname{rank}(E - A) = \dim V - \dim W = 9 - 7 = 2$.