Сделаем замену $t = \sqrt{1+e^x}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2dt}{t^2-1} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln \frac{|t-1|}{|t+1|} + C.$$

Сделав обратную замену, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$$

Примечание. Ответ можно также записать в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = -2\operatorname{arcth}\left(\sqrt{1+e^x}\right) + C,$$

где arcth — гиперболический арккотангенс.