Многократно воспользуемся формулой:

$$\cos(lx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((l+n)x)\cos((l-n)x)).$$

Тогда получим

$$\cos(x)\cos(2x)\dots\cos(mx) = \frac{1}{2^{m-1}}(\cos(\alpha_1 x) + \dots + \cos(\alpha_{2^m} x)),$$

где $a_i = 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm m \in \mathbb{Z}$. Несложно убедиться, что четности всех чисел a_i будут одинаковы. Более того, в случаях $m = 4k$ и $m = 4k+3$ все a_i четны, а в случаях $m = 4k+1$ и $4k+2$ — нечетны.

Если $a_i \neq 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \cos(\alpha_i x)dx = 0$. Значит, $I_m = 0$ при $m = 4k+1$ и $m = 4k+2$. Если же $m = 4k$ или $4k+1$, то среди a_i обязательно есть ноль, так как между числами $1, 2, \dots, m$ можно так расставить знаки «+» и «−», чтобы получился ноль.

Действительно,

$$(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\dots+((4k-3)-(4k-2)-(4k-1)+4k) = 0,$$

$$(1+2-3)+(4-5-6+7)+\dots+(4k-(4k+1)-(4k+2)+(4k+3)) = 0.$$

Таким образом, $I_m \neq 0$ при $m = 4k$ и $4k+3$. Для $m \in [1, 10]$ получим $m = 3, 4, 7, 8$.