Матрицу M можно представить в виде $M = uu^{\mathrm{T}} + kE$, где $u^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, а E — единичная матрица. Тогда если $\{\lambda_i\}$ — собственные значения матрицы uu^{T}, то

$$\det M = \det(uu^{\mathrm{T}} + kE) = \prod_i (\lambda_i + k).$$

Найдем собственные значения uu^{T}. Заметим, что $(uu^{\mathrm{T}})x = uu^{\mathrm{T}}x = (u, x)u$. Пространство V, на котором действует uu^{T}, раскладывается в прямую сумму $V =< u > \oplus < u >^{\perp}$. Нетрудно видеть, что оба слагаемых являются собственными подпространствами для uu^{T} с собственными значениями $u^{\mathrm{T}}u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ и 0. Отсюда окончательно получим

$$\det M = k^{n-1}\left(k + \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$