Предположим, что функция f не постоянна. Если f не содержит положительных значений, отразим для удобства $f(\vec{r}) \to -f(\vec{r})$. Рассмотрим два случая.
1. Функция f удовлетворяет условию Липшица:

$$\exists L\colon \forall \vec{r}_i, \vec{r}_j \ |f(\vec{r}_j) - f(\vec{r}_i)| \leqslant L|\vec{r}_j - \vec{r}_i|.$$

Выберем такой вектор $\vec{h}$, что $|\vec{h}| = 1$. Рассмотрим функцию

$$g(\vec{r}) = f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}),$$

которая также удовлетворяет условиям задачи и условию Липшица с константой $K = 2L$. Пусть $M = \sup g(\vec{r}) > 0$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ и $\vec{r}_0$ такими, что

$$M - \varepsilon_0 < g(\vec{r}_0) \leqslant M.$$

Тогда

$$g(\vec{r_0}) = \int\limits_0^\xi g(\vec{r_0} + \vec{\tau}(s))ds + \int\limits_\xi^1 g(\vec{r_0} + \vec{\tau}(s))ds,$$

где $\vec{\tau}(s) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) & \sin(2\pi s) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $0 < \xi < 1$.

Далее

$$g(\vec{r_0}) \leqslant \int\limits_0^\xi (g(\vec{r_0} + \vec{h}) + 2\pi K\xi)ds + \int\limits_\xi^1 M ds = \xi g(\vec{r_0} + \vec{h}) + 2\pi K\xi^2 + M(1-\xi).$$

$$g(\vec{r}_0 + \vec{h}) \geqslant M - \frac{1}{\xi}(M - g(\vec{r}_0)) - 2\pi K\xi.$$

Выберем $\xi = \sqrt{\frac{M - g(\vec{r}_0)}{2\pi K}}$ (важно только, чтобы ε_0 был достаточно мал для $\xi < 1$; также заметим, что в случае $M = g(\vec{r}_0)$ мы легко придем к противоречию, поэтому $\xi > 0$). Отсюда

$$g(\vec{r}_0 + \vec{h}) \geqslant M - \sqrt{2\pi(M - g(\vec{r}_0))K} = M - \sqrt{2\pi\varepsilon_0 K}.$$

Продолжая рассуждения по индукции, получим:

$$g(\vec{r}_0 + n\vec{h}) \geqslant M - \varepsilon_n, \ \varepsilon_n = \sqrt{2\pi\varepsilon_{n-1}K}.$$

Таким образом,

$$f(\vec{r}_0 + n\vec{h}) - f(\vec{r}_0) = \sum_{k=1}^n g(\vec{r}_0 + k\vec{h}) \geqslant nM - \sum_{k=1}^n \varepsilon_k,$$

что приводит к противоречию, поскольку $\sum\limits_{k=1}^n \varepsilon_k$ мы можем сделать сколь угодно малым уменьшая ε_0 (и при необходимости сдвигая $\vec{r}_0$), а значит,

функция не ограничена.
2. Функция f не удовлетворяет условию Липшица.
Рассмотрим функцию:

$$\tilde{f}(\vec{r}) = \frac{1}{|D_a|} \int\limits_{D_a} f(\vec{r} + \vec{v}) d^2\vec{v},$$

где D_a — диск радиуса a. Заметим, что нам достаточно доказать, что $\tilde{f}(\vec{r})$ постоянна для всех конечных a. Тогда в пределе $a \to 0$ мы получим, что и f постоянна. Покажем, что функция $\tilde{f}$ удовлетворяет условиям задачи. Очевидно, что $\tilde{f}$ ограниченная и гладкая. Далее

$$\int\limits_0^1 \tilde{f}(\vec{r} + \vec{\tau}(s)) ds = \frac{1}{|D_a|} \int\limits_0^1 \int\limits_{D_a} f(\vec{r} + \vec{v} + \vec{\tau}(s)) d^2\vec{v} ds =$$

$$= \frac{2\pi}{|D_a|} \int\limits_0^1 \int\limits_0^a \int\limits_0^1 f(\vec{r} + p\vec{\tau}(s') + \vec{\tau}(s)) ds' dp ds =$$

$$= \frac{2\pi}{|D_a|} \int\limits_0^a \int\limits_0^1 f(\vec{r} + p\vec{\tau}(s')) ds' dp = \tilde{f}(\vec{r}).$$

Поскольку производные $\tilde{f}(\vec{r})$ ограничены, она удовлетворяет условию Липшица. Тогда по первому пункту решения эта функция постоянна, что доказывает исходное утверждение.