Рассмотрим индикаторные случайные величины:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_i = i, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Тогда число X неподвижных точек подстановки σ равно сумме $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Найдем математическое ожидание каждого из слагаемых:

$$M(X_1) = 0 \cdot P(X_1 = 0) + 1 \cdot P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1) = P(\sigma_i = i) = \frac{1}{n}.$$

В самом деле, элемент i фиксирует $(n-1)!$ перестановок.
Теперь воспользуемся линейностью матожидания:

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$