

Введем на плоскости систему координат так, чтобы первое звено ломаной было направлено вдоль оси  $Ox$ . Пусть  $\alpha_k$  — ориентированный угол между  $(k+1)$ -м звеном ломаной и первым звеном ломаной (то есть осью  $Ox$ ). Тогда  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \xi_{k+1}\alpha$ , где  $\xi_k$  — случайная величина, принимающая с вероятностью  $\frac{1}{2}$  значения  $\pm 1$ . Отметим, что проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$   $k$ -го звена ломаной равны  $\cos \alpha_{k-1}$  и  $\sin \alpha_{k-1}$  соответственно. Тогда квадрат расстояния от начала ломаной до ее конца равен

$$L_n^2 = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \cos \alpha_k \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sin \alpha_k \right)^2.$$

Наша задача — найти математическое ожидание этой случайной величины. Имеем

$$\begin{aligned} M(\cos \alpha_k) &= M(\cos(\alpha_{k-1} + \xi_k \alpha)) = M(\cos \alpha_{k-1} \cos(\xi_k \alpha) - \sin \alpha_{k-1} \sin(\xi_k \alpha)), \\ M(\sin \alpha_k) &= M(\sin(\alpha_{k-1} + \xi_k \alpha)) = M(\sin \alpha_{k-1} \cos(\xi_k \alpha) + \cos \alpha_{k-1} \sin(\xi_k \alpha)). \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что  $\sin \alpha_0 = 0$  и  $\cos(\xi_k \alpha) = \cos \alpha$  (в силу нечетности косинуса), по индукции получаем, что

$$\begin{aligned} M(\cos \alpha_k) &= \cos^k \alpha, \\ M(\sin \alpha_k) &= 0. \end{aligned}$$

Далее найдем математическое ожидание произведений. Пусть  $m \geq k$ . С помощью индукции по  $(m-k)$  можно доказать, что

$$\begin{aligned} M(\cos \alpha_k \cdot \cos \alpha_m) &= \cos^{m-k} \alpha \cdot M(\cos^2 \alpha_k), \\ M(\sin \alpha_k \cdot \sin \alpha_m) &= \cos^{m-k} \alpha \cdot M(\sin^2 \alpha_k). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} M(L_{n+1}^2) &= M\left(\left(\sum_{k=0}^n \cos \alpha_k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n \sin \alpha_k\right)^2\right) = \\ &= M(L_n^2) + M\left(\cos^2 \alpha_n + \sin^2 \alpha_n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (\cos \alpha_n \cos \alpha_k + \sin \alpha_n \sin \alpha_k)\right) = \\ &= M(L_n^2) + 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{n-k} \alpha \cdot (M(\sin^2 \alpha_k) + M(\cos^2 \alpha_k)) = \\ &= M(L_n^2) + 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{n-k} \alpha = M(L_n^2) + 1 + 2 \sum_{t=1}^n \cos^t \alpha = \\ &= M(L_n^2) + 1 + 2 \cos \alpha \cdot \frac{1 - \cos^n \alpha}{1 - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда уже нетрудно получить ответ

$$M(L_n^2) = n \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - 2 \cos \alpha \cdot \frac{1 - \cos^n \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2}.$$