Из $P(x) > 0$ следует, что у многочлена нет вещественных корней. Поскольку коэффициенты многочлена действительные, для любого комплексного корня x_i комплексно-сопряженное число $\overline{x_i}$ также является корнем. Поэтому многочлен можно представить в виде:

$$P(x) = (x - x_1)(x - \overline{x_1}) \cdots (x - x_k)(x - \overline{x_k}).$$

Попарно раскрывая скобки получим следующий вид выражения:

$$P(x) = (x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (x^2 + b_k x + c_k).$$

Выделим полный квадрат в каждом из квадратичных множителей:

$$P(x) = ((x + b_1/2)^2 + q_1) \cdots ((x + b_k/2)^2 + q_k).$$

Заметим, что $q_i > 0$ для любого i, поскольку иначе у выражения $(x+b_i/2)^2+q_i$ были бы действительные корни. Значит, мы можем написать $q_i = y_i^2$, где y_i — некоторое действительное число. Тогда

$$P(x) = ((x + b_1/2)^2 + (y_1)^2) \cdots ((x + b_k/2)^2 + (y_k)^2).$$

Как видим, при раскрытии скобок мы получим сумму квадратов многочленов с действительными коэффициентами, что и требовалось доказать.