Рассмотрим оператор, который вычисляет среднее значение функции $f(\vec{r})$ на окружности радиуса 1 и вычитает значение функции в центре данной окружности:

$$(Tf)(\vec{r}) = f(\vec{r}) - \int\limits_0^1 f(\vec{r} + \vec{\tau}(s))ds,$$

где $\vec{\tau}(s) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) & \sin(2\pi s) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Найдем, как действует этот оператор при преобразовании Фурье F:

$$T_F\varphi(\vec{\omega}) = FTF^{-1}\varphi(\vec{\omega}) = \left(1 - \int\limits_0^1 e^{i\vec{\tau}(s)\cdot\vec{\omega}}ds\right)\varphi(\vec{\omega}) = g(\vec{\omega})\varphi(\vec{\omega}),$$

где $\varphi(\vec{\omega})$ принадлежит пространству обобщенных функций. Мы получили, что T_F является оператором умножения на гладкую функцию $g(\vec{\omega})$. Найдем нули этой функции:

$$g(\vec{\omega}) = 1 - \int\limits_0^1 e^{i\vec{\tau}(s)\cdot\vec{\omega}}ds = 1 - \int\limits_0^1 e^{i|\vec{\omega}|(\cos\Phi\cos(2\pi s)+\sin\Phi\sin(2\pi s)}ds =$$

$$= 1 - \int\limits_0^1 e^{i|\vec{\omega}|\cos(\Phi - 2\pi s)}ds = 1 - \int\limits_0^1 e^{i|\vec{\omega}|\cos(2\pi s)}ds =$$

$$= 1 - \int\limits_0^{1/2} e^{i|\vec{\omega}|\cos(2\pi s)} - \int\limits_0^{1/2} e^{-i|\vec{\omega}|\cos(2\pi s)}ds = 1 - 2\int\limits_0^{1/2}\cos(|\vec{\omega}|\cos(2\pi s))ds.$$

За Φ мы обозначили угол между декартовыми компонентами $\vec{\omega}$. В дальнейшем он исчезает, поскольку интеграл берется по всему периоду периодической функции. Произведем замену $u = \cos(2\pi s)$. Тогда

$$g(\vec{\omega}) = 1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{-1}\frac{\cos(|\vec{\omega}|u)du}{\sqrt{1-u^2}} = 1 - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\cos(|\vec{\omega}|u)du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\frac{(1-\cos(|\vec{\omega}|u)du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Отсюда видно, что $g(\vec{\omega})$ имеет единственный нуль в точке $\vec{\omega} = 0$. Найдем порядок этого нуля. Нетрудно разложить $g(\vec{\omega})$ в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

$$g(\vec{\omega}) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{\vec{\omega}^2u^2}{2} + O(\vec{\omega}^2u^2)\right)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4}\vec{\omega}^2 + O(\vec{\omega}^2).$$

Таким образом, порядок нуля равен двум. Отсюда следует, что $\ker(T_F)$ состоит из линейной оболочки $\delta(\vec{\omega})$ и $\delta'(\vec{\omega})$. При обратном преобразовании Фурье эта оболочка соответствует множеству функций вида $f = Ax + By + C$. Поскольку только константа из них ограничена, утверждение задачи доказано.