Воспользуемся известным фактом, что определитель матрицы равен произведению ее собственных значений. Отсюда следует, что если мы найдем собственные значения матрицы $uu^{\mathrm{T}}J$ (обозначим их как λ_i), то определитель исходной матрицы будет равен $\prod\limits_i(1+\beta\lambda_i)$.

Для нахождения собственных значений матрицы $uu^{\mathrm{T}}J$ воспользуемся ассоциативностью произведения матриц. Заметим, что если мы умножим матрицу на произвольный вектор $(uu^{\mathrm{T}}J)h = u(u^{\mathrm{T}}Jh)$, то в случае $u^{\mathrm{T}}Jh \neq 0$ получившийся вектор будет коллинеарен вектору u.
Отсюда следует, что
(а) u – собственный вектор с собственным значением $u^{\mathrm{T}}Ju$,
(б) все собственные значения кроме, возможно, $u^{\mathrm{T}}Ju$ равны 0.
Функция $u^{\mathrm{T}}Ju$ представляет собой квадратичную форму с нулевой матрицей, поскольку матрица J кососимметрична. Значит, все собственные значения $uu^{\mathrm{T}}J$ равны нулю. Таким образом, определитель исходной матрицы равен 1.