中国大学MOOC

二次型

一、二次型

定义1：含有n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &+ a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\ &+ \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为n元二次型，简称为二次型。

定义2：只含平方项的二次型，即形如

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

称为二次型的标准形（或法式）。

二、二次型的矩阵表示法　设$a_{ij} = a_{ji}$，则

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = &\underline{a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1n}x_1x_n} \\ &\underline{+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n} \\ &+ \cdots\cdots \\ &+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ &+ x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \end{aligned}$$

中国大

二、二次型的矩阵表示法　设$a_{ij} = a_{ji}$，则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1n}x_1x_n$$

$$
\begin{aligned}
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots\cdots\\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}\\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}\\
&=X^TAX
\end{aligned}
$$

二次型的矩阵表示式

$+x_n(\_\_\_\_\_\_)$

二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX \quad A^T=A.$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_3+x_2^2+3x_2x_3+5x_3^2$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}$$

三、二次型经可逆变换后的矩阵：

定义4：若线性变换

$$
\begin{cases}
y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n,\\
y_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n=c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\cdots+c_{nn}x_n.
\end{cases}
$$

的矩阵 $C_{n\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$

可逆，则称线性变换为可逆线性变换；
正交，则称线性变换为正交变换。

定义5：设A，B为两个n阶矩阵，若有n阶可逆阵P，使得$P^TAP=B$，则称矩阵A与B合同，记为$A\simeq B$.

合同矩阵具有自反性、对称性、传递性 与相似类似

等价、相似、合同的关系：

$$A\cong B\Leftarrow A\sim B\qquad A\cong B\Leftarrow A\simeq B$$

但反之均不成立。一般而言，相似与合同没有关系。
但，正交相似与合同一致。

定理： 实对称矩阵一定与对角阵合同。

即C为逆

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$$

$f = (CY)^T A(CY) = Y^T (C^T AC)Y$

作可逆变换$X=CY$

$B = C^T AC \Rightarrow B^T = B, Y^T BY$ 为二次型且A与B合同，

$r(A) = r(B)$. 由上讨论可得：

定理1： 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$ 经可逆线性变换$X = CY$ 变成新变元的二次型$f = Y^T BY$，它的矩阵$B = C^T AC$ 且$r(A) = r(B)$.

例1：写出二次型的矩阵，并求其秩。

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$ 秩为3。

练习

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为 ______.

展开

例2. 设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的秩为2。

1.求参数c；

2.写出二次型的矩阵。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&c\end{pmatrix},$$

由 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为2

$\Rightarrow$ 系数矩阵A的秩为2，$\Rightarrow c=8$

化为标准形

定义2：只含平方项的二次型，即形如

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

称为二次型的标准形（或法式）。

问题1：标准形的矩阵 = ？

$$\Lambda=\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}$$

问题2：将二次型化为标准形实际上是什么问题？

找可逆阵C，$C^TAC=\Lambda$ 为对角阵

问题3：二次型能否化为标准形？

能！因为任意实对称阵都与对角阵正交合同。

例

定理2 对实二次型 $f = X^T AX$，正交变换 $X = QY$，使

$$f = X^T AX = (QY)^T A(QY) = Y^T(Q^T AQ)Y = Y^T \Lambda Y$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 f 的矩阵 A 的特征值。

正交变换法将二次型化为标准形的一般步骤：

（i）写出二次型的矩阵 A；

（ii）求出 A 的所有相异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$；

（iii）对每一个重特征值 λ_i，求出对应的 r_i 个线性无关的特征向量 $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ir_i} (i = 1, 2, \cdots, m)$，由性质知 $\sum_{i=1}^{m} r_i = n$.

（iv）用施密特正交化方法将每一个重特征值 λ_i 所对应的 r_i 个线性无关的特征向量 $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ir_i} (i = 1, 2, \cdots, m)$ 先正交化再单位化为 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{ir_i} (i = 1, 2, \cdots, m)$，它们仍为属于 λ_i 的特征向量。

（v）将上面求得的正交单位向量作为列向量，排成一个 n 阶方阵 Q，则 Q 即为所求得的正交方阵。此时 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$ 为对角阵。

（vi）作正交变换，$X = QY$，即可将二次型化为标准形

$$f = X^T AX = (QY)^T A(QY) = Y^T(Q^T AQ)Y = Y^T \Lambda Y.$$

⇒待突破：

其对应的特征向量为

$$\alpha_1=(-2,\ -1,\ 2)^T,\alpha_2=(2,\ -2,\ 1)^T,\alpha_3=(1,\ 2,\ 2)^T.$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互异，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两相交，将它们单位化，

得 $$\eta_1=\frac{1}{3}\alpha_1,\eta_2=\frac{1}{3}\alpha_2,\eta_3=\frac{1}{3}\alpha_3.$$

于是所求正交变换的矩阵为

$$Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

令 $X=QY$，则二次型化为标准形 $y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

练习 用正交变换法将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

化为标准形，并求出所用的正交变换矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$ 求正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵。

$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7.$

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

正交化 单位化

令 $X=QY$，则二次型化为标准形 $2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$

例1：用配方法化二次型为标准形，并求可逆变换矩阵。

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3.$$

解：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3\\&=(x_1^2+2x_1x_2)+2x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3\\&=(x_1+x_2)^2+x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3\\&=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+x_3^2\\&=y_1^2+y_2^2+y_3^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2,\\y_2=x_2+2x_3,\\y_3=x_3.\end{cases}\qquad \boxed{\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3,\\x_2=y_2-2y_3,\\x_3=y_3.\end{cases}}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

矩阵

$$\Rightarrow X=CY$$

例2：设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

1. 求一可逆变换将该二次型化为标准形；

2. $f(x_1,x_2,x_3)=1$ **是什么曲面？**

$$\begin{aligned}1.\ f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3\\&=(x_1+2x_3)^2+(x_2+2x_3)^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_3,\\y_2=x_2+2x_3,\\y_3=x_3.\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1=y_1-2y_3,\\x_2=y_2-2y_3,\\x_3=y_3.\end{cases}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

添：加 y_3

例2：设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

1. 求一可逆变换将该二次型化为标准形；

2. $f(x_1,x_2,x_3)=1$ **是什么曲面？**

指迷

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$

$$=(x_1+2x_3)^2+(x_2+2x_3)^2=y_1^2+y_2^2.$$

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_3, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=y_1-2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.由 $|A-\lambda E|=0 \Rightarrow A$ **特征值为** $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=9.$

$\therefore$ **在正交变换下，可将** $f=1$ **化为** $y_2^2+9y_3^2=1.$

正交变换保持向量长度不变，只有在正交变换下将二次型化为标准形，才能确定它所表示的曲面类型。

注：设 $Y=QX$，Q**为正交矩阵，则有**

$$\|Y\|^2=Y^TY=(QX)^T(QX)=X^TQ^TQX=X^TX=\|X\|^2.$$

中国大学MOOC

注：配方法化二次型为标准形一般有两种情形：

情形1 二次型中含有平方项，如含有 x_1^2，此时先集中含有 x_1 的项，对 x_1 配成完全平方，再集中含有 x_2 的项，对 x_2 配成完全平方，如此继续下去，直到化为标准形。

情形2 二次型中不含平方项，只含有 $x_i x_j$ 的项，此时先作可逆线性变换。

$$\boxed{\begin{cases} x_i = y_i + y_j, \\ x_j = y_i - y_j, \\ x_k = y_k, \quad k \neq i, j. \end{cases}}$$

$$x_i x_j = (y_i + y_j)(y_i - y_j) = y_i^2 - y_j^2$$

将二次型化为含平方项的二次型，再按情形1中介绍的方法做。

二次型：正定、负定

中国大学MOOC

二次型的分类

1.定义： $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T A X$ 是一个实二次型，若对于任何非零的向量 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$，恒有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0 (< 0)$，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定（负定）二次型，而其对应的矩阵 A 称为正定（负定）矩阵；

矩阵的正定与负定是怎样定义的？

若恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0(\leq 0)$，则称二次型是准正（负）定二次型，其对应的矩阵 A 称为准正（负）定二次型；

若 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 有大于零，也有小于零，则称二次型是不定二次型，其对应的矩阵称为不定二次型。

2.二次型正定的判别法：

判别法 I：用定义。

例1： 设 A，B 均为 n 阶正定阵，证明 $A+B$ 也为 n 阶正定阵。

$\because A,B$ 为 n 阶正定阵，$\therefore \forall X_{n\times 1}\neq O,\Rightarrow X^TAX>0,X^TBX>0.$

$\therefore X^T(A+B)X>0\Rightarrow A+B$ 为 n 阶正定阵。

判别法 II：用标准形。

定理1： 实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

正定的充分条件为 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是正数。 显然

定理2： 可逆线性变换不改变二次型的正定性。

定理3： 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 正定的充要条件为 f 的标准形中 n 个系数全为正数。

推论1： 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 正定的充要条件为矩阵 A 的全部特征值都是正数。

推论2： 若 A 正定，则 $|A|>0$.

推论3： 若 A 正定，则 A 与单位阵合同，即有可逆阵 C，

$C^TAC=E.$

证

推论3：若A正定，则A与单位阵合同，即有可逆阵C，使

$$C^TAC=E.$$

证：由推论2及A正定，存在正交矩阵Q，使

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda.$$

$\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$为矩阵$A$的特征值，且都是正数。

令 $C_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix},\Rightarrow C_1^T\Lambda C_1=C_1\Lambda C_1=E.$

$$\Rightarrow C_1^T(Q^TAQ)C_1=(QC_1)^TA(QC_1)=E.$$

判别法 III：用特征值。

例2：设A为正定阵，证明A^{-1}，A^*都是正定阵。

$\because A$为正定阵，$\Rightarrow A$的特征值全大于零，

$\therefore A^{-1},A^*$的特征值全大于零，

$\therefore A^{-1},A^*$都是正定阵。

中国大学MOOC

判别法 IV：用顺序主子式。

定义： 位于矩阵A的最左上角的$1, 2, \cdots, n$阶子式，称为矩阵A的$1, 2, \cdots, n$阶顺序主子式。

Δ_i 表示第i阶顺序主子式。

定理4： 二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$ 正定的充要条件为矩阵A的各阶顺序主子式都大于零，即 $\Delta_i > 0$.

总结：奇 <0 $(-1)<0$

偶 >0 $(-1)\times(-1)>0$

$(-1)\times(-1)\times(-1)<0$

思考题：二次型负定的充分必要条件是矩阵A的各

阶顺序主子式的取值情况如何？

A怎写

例3：t为何值时，二次型正定？

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3.$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{pmatrix}},\quad \Delta_1=5>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1>0,$$

$$\Delta_3=|A|=\begin{vmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{vmatrix}=t-2.\Rightarrow t>2\text{时},\Delta_3>0.$$

$\therefore t>2$时，二次型正定。

请记住，这类题就这样做！

练习

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则t的取值范围是 $\underline{-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}}$.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&t/2\\0&t/2&1\end{pmatrix},\qquad |A|=1-\frac{t^2}{2}.$$

判别法 *I*：用定义。

判别法 *II*：用标准形 。

判别法 *III*：用特征值 。

判别法 *IV*：用顺序主子式 。

本讲主要内容：

二次型化标准型问题

关于正定的判定问题

$\lambda_1=-2$ $\lambda_2=1$ $\lambda_3=2$

例1 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 经正交变换 $X=QY$ 化为标准形 $-2y_1^2+y_2^2+2y_3^2$，求 k 及正交阵 Q.

二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ k & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$,

由题设 A 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$ 正交相似，即 A 的特征值为 $-2,1,2$.

故 $|A|=-4$，由此得 $k^2-2k+1=0$，解得 $k=1$.

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

答案：没调顺序

求得 A 的对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(-1,1,2)^T,\alpha_2=(1,-1,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,0)^T$，

并将它们单位化，得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_1,\eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2,\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$,

所求正交阵 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$.

练习

设 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0),$$

其中二次型的矩阵A的特征值之和为1,特征值之积为-12,

则: $a=$_____, $b=$_____. $\quad a=1,b=2.$

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}. \qquad a+2-2=1,\ |A|=-12.$$

①不代表:

$a\times(2)\times(-2)=12$

而是 $|A|=-12$

② 同理 并非 $\lambda_1=a$ $\lambda_2=2$ $\lambda=-2$

矩阵相关

$f(A)$

例2 设$A=\begin{pmatrix}3&1&1&0\\1&3&-1&0\\1&-1&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$B=A^2-kE$，$k$为实常数。

问k取何值时，B为负定阵？

解方程

显然A为实对称阵且A的特征值为1,1,4,4.

由于$B=A^2-kE$，故B也为实对称阵且B的特征值为

$$1-k,1-k,16-k,16-k.$$

因此B负定的充要条件为$k>16.$

中国大学

例3 设P为n阶方阵，$A=P^TP$，讨论A的正定性。

对任意的$X_{n\times 1}\neq 0$，我们有

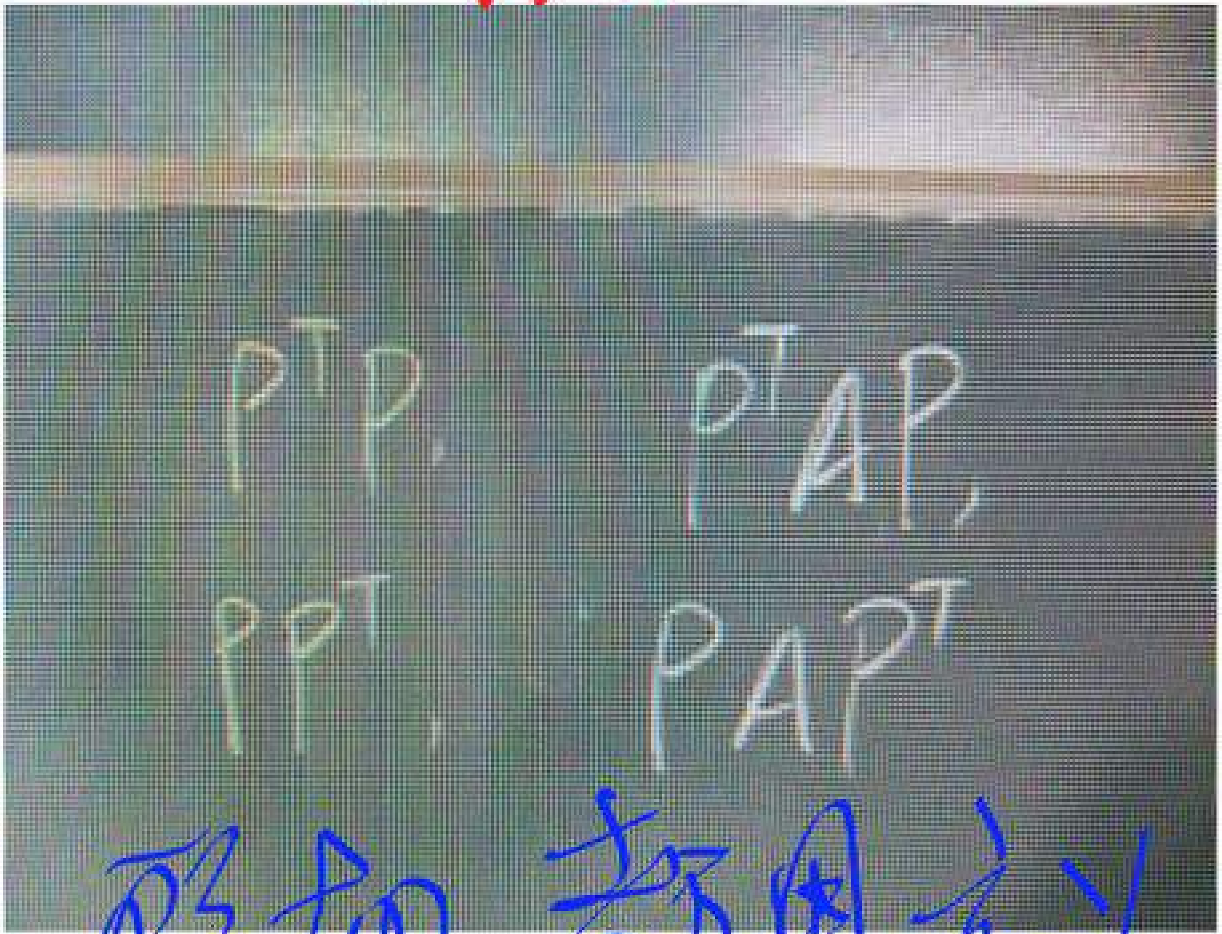
$$X^TAX=X^TP^TPX=(PX)^T(PX)=\|PX\|^2.$$

$\Rightarrow |P|\neq 0$

当P可逆时，由$X\neq 0$知$PX\neq 0$，从而$\|PX\|^2>0$，$A=P^TP$为正定阵

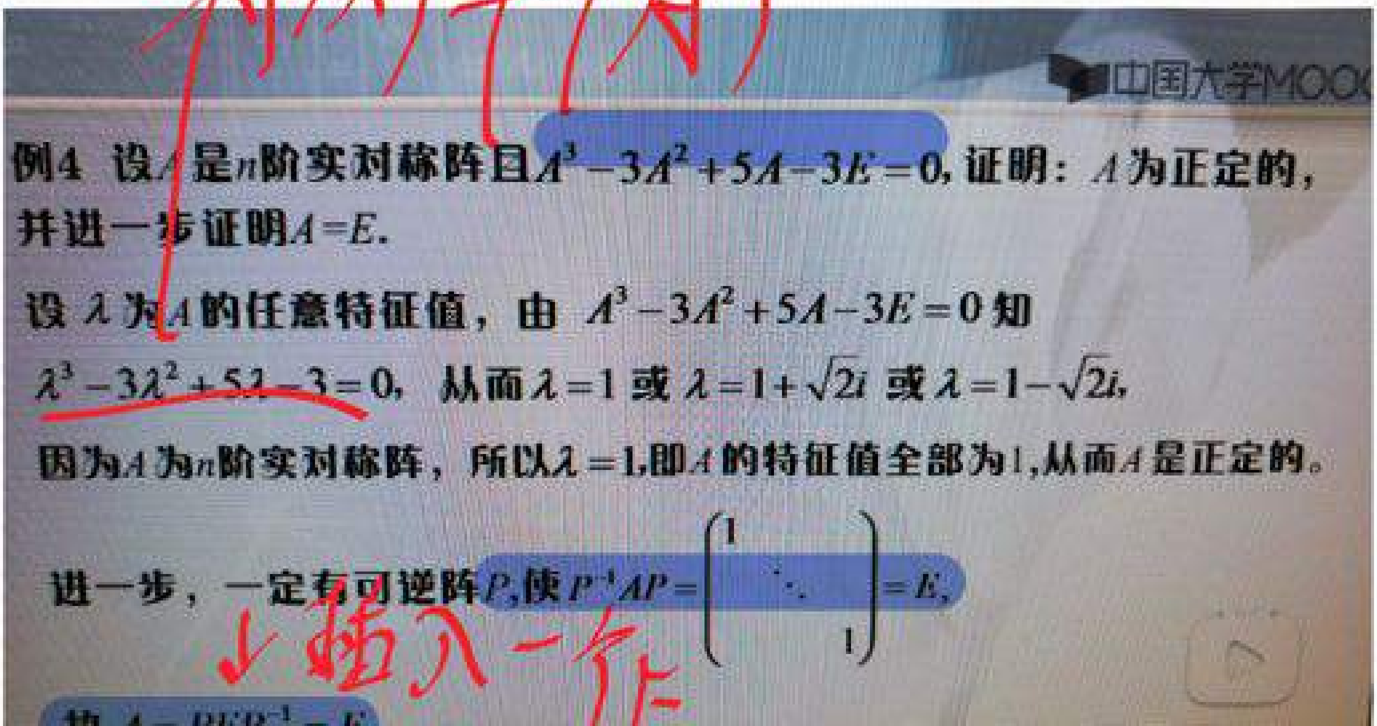
当P不可逆时，显然有$\|PX\|^2\geq 0$，因此$A=P^TP$ 为准正定阵。

认解讨论



形如 都用定义

$f(\lambda)=f(A)$



例4 设A是n阶实对称阵且$A^3-3A^2+5A-3E=0$，证明：A为正定的，并进一步证明$A=E$.

设 λ 为A的任意特征值，由 $A^3-3A^2+5A-3E=0$ 知

$\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3=0$，从而$\lambda=1$ 或 $\lambda=1+\sqrt{2}i$ 或 $\lambda=1-\sqrt{2}i$,

因为A为n阶实对称阵，所以$\lambda=1$,即A的特征值全部为1,从而A是正定的。

进一步，一定有可逆阵P,使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}=E$,

插入一个

故 $A=PEP^{-1}=E$

故 $A = PEP^{-1} = E.$

$f(A)$

例5 设A是n阶正定阵，证明：$|E+A|>1$.

因为A是正定阵，故存在正交阵Q,使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda,$$

且$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A$的大于零的特征值，从而有

$$E+A=QQ^{-1}+Q\Lambda Q^{-1}=Q(E+\Lambda)Q^{-1},$$

$$|E+A|=|E+\Lambda|=\begin{vmatrix}1+\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+\lambda_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)>1.$$

练习

$f(A)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$ $B=kE+A$, k为何值时，B为正定阵？

$A:0,2,2.$

$B:k,k+2,k+2.$

例6 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, β 均为n维列向量，A为n阶正交阵……

α_n, β 均为n维列向量，A为n阶正定阵且

(1) $\alpha_j \neq 0,\ j=1,2,\cdots,n;$

(2) $\alpha_i^T A\alpha_j = 0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n;$

(3) β 与每一个 α_j 正交，$j=1,2,\cdots,n.$

证明 $\beta=0.$

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$. 两端左乘$A$，得$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_nA\alpha_n=0.$

两端左乘α_i^T，得

$$k_1\alpha_i^T A\alpha_1+k_2\alpha_i^T A\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_i^T A\alpha_n=0. \qquad (*)$$

由题设（2）知（*）式为$k_i\alpha_i^T A\alpha_i=0$. 由$A$正定，$\alpha_i^T A\alpha_i>0$，得$k_i=0, i=1,2,\cdots,n$，从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，所以$\beta$必可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示。

不妨设表示式为$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_n\alpha_n$，则

$$\|\beta\|^2=(\beta,\beta)=(\beta,l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_n\alpha_n)$$
$$=l_1(\beta,\alpha_1)+l_2(\beta,\alpha_2)+\cdots+l_n(\beta,\alpha_n)=0, \qquad 故\beta=0.$$