一、n维向量的概念

1.定义1：由数 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 组成的有序数组，

为n维向量，简称为向量。

向量通常用斜体希腊字母α，β，γ等表示。

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

行向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

列向量

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$
$$i = 1, 2, \cdots m.$$

矩阵 A的行向量

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T$$
$$j = 1, 2, \cdots, n$$

矩阵 A的列向量

$$\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$$

零向量

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$$

负向量

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{维数相同，即同型。} \\ a_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

→ 不能是列向量，还是行向量

2.定义2： $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，数值 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 称为向量 α 的长度或范数或模，记为 $\|\alpha\|$.

$$\|\alpha\|=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \qquad \alpha\neq 0 \Rightarrow \|\alpha\|>0$$

$\|\alpha\|=1$ 称 α 为单位向量。

$$\alpha=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),\beta=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),\gamma=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

$$\boxed{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1).}$$

$$\boxed{e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1).}$$

n维单位向量

.线性组合

定义： 设向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

则称向量 β 可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，

或称向量 β 是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合。

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$$

例1： 设 $\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$，

证明：α_3 是 α_1,α_2 的线性组合。

证明：设 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，即：

$$(4,1,-1)=k_1(1,2,-1)+k_2(2,-3,1),$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4=k_1+2k_2,\\1=2k_1-3k_2,\\-1=-k_1+k_2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=2,\\k_2=1.\end{cases}$$

故 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$.

向量组的等价

1.定义1： 设有两个 n 维向量组 $(I):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

$(II):\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

若向量组（I）中每个向量都可由向量组（II）线性表示，则称向量组（I）可由向量组（II）线性表示；

若向量组（I）与向量组（II）可以互相线性表示，则称向量组（I）与向量组（II）等价。

向量组的等价关系具有自反性、对称性、传递性。

设 $\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$，

证明：$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 与 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 等价。

组一　　　　组二

α_3 可由 α_1,α_2 线性表示。

例2：设n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，若 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 可由它们线性表示，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 等价。

证：$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 显然可由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示，

又由题设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 等价。

向量组的线性相关性

一、线性相关性

1.定义：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,**若存在一组不全零的数**$k_1,k_2,\cdots,k_m$**使**

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0},$$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$**线性相关。否则称向量组**$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$**线性无关。**

向量组的线性相关性

一、线性相关性

设$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$，**证明：**

α_3**是**α_1, α_2 **的线性组合。**

$\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **是线性相关的。**

$$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2\Rightarrow 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=O.$$

注意

（1）当向量组只含一个向量时，

若该向量是零向量,则它线性相关；$1 \cdot O = O$.

若该向量是非零向量,则它线性无关.

$$k\alpha = 0, \alpha \neq 0, \Rightarrow k = 0.$$

注意

(2) 两个向量线性相关的充要条件是其对应分量成比例。

$k_1\alpha + k_2\beta = 0, \Rightarrow k_1\alpha = -k_2\beta.$ 若$k_1 \neq 0, \Rightarrow \alpha = -\dfrac{k_2}{k_1}\beta.$

$\alpha = -\dfrac{k_2}{k_1}\beta = k\beta.$　　$\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = k$　$\dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = k$　…

设$\alpha_1 = (1,2,-1), \alpha_2 = (2,-3,1), \alpha_3 = (4,1,-1)$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

中任两个向量线性无关。

组成向量组

(1) 当向量组只含一个向量时,若该向量是零向量,则它线性相关;若该向量是非零向量,则它线性无关。

(2) 两个向量线性相关的充要条件是其对应分量成比例。

(3) 任一含有零向量的向量组线性相关。

例1: 讨论 $\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$ 的相关性。

1

解:设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

2 $\Rightarrow k_1+2k_2+4k_3=0,$ 系数行列式为

$$2k_1-3k_2+k_3=0,$$
$$-k_1+k_2-k_3=0.$$

齐次线性方程

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=3-2+8-12+4-1=0.$$

3 故 方程组有非零解,即有非零的数 k_1,k_2,k_3 使

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0.\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

克拉默法则

例2： 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$

$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$,讨论向量组$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$,的相关性。

解： 设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，　即

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} k_1+k_3&=0,\\ k_1+k_2&=0,\\ k_2+k_3&=0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

判定向量组相关和无关的方法

1.设组合式为零

2.讨论组合系数是否全为零

3.得出结论

相关性定理

1.线性相关与线性组合的关系定理

定理1： 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 向量线性表示。

证："$\Rightarrow$" 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关，则一定存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，于是有：$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m$

"$\Leftarrow$" 不妨设 $\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \Rightarrow -\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$

即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关。

定理2： 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示且表示式惟一。

证： $\because$ 向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则一定存在一组不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_m$，使 $k\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$

这里必有 $k \neq 0$，否则，有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$

由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关知：$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$

故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示。

下面证明表示式惟一。

反证法

同样反证

设不唯一

$$\left.\begin{aligned} \text{设 } \beta &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \\ \beta &= l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

则

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0.$$

由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关知：

$$k_i = l_i, i = 1, 2, \cdots, m.$$

所以表示式惟一。

2.相关性的判定定理

定理3： 在一个向量组中，若有一个部分向量组线性相关，则整个向量组也必定线性相关。

反之不对。

你能举个
反例吗?

$$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1).$$

一个线性无关的向量组的任何非空的部分向量组都线性无关。

即整个向量组线性相关
则部分不一定线性相关

2.相关性的判定定理

放入，展开

定理4： m 个 n 维向量 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\,(i=1,2,\cdots m)$ 线性相关的充要条件是由 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots m)$ 构成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

若 的秩 $r(A)<m$. $\Rightarrow$ 则线性相关

例3： 讨论 $\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$ 的相关性。

解：

$$\boxed{A=}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\ 2&-3&1\\ 4&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\ 0&-7&3\\ 0&-7&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\ 0&-7&3\\ 0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boxed{\therefore r(A)=2<3,}$$

$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

练习

λ 为何值时，向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1,2)$，$\alpha_2=(2,1,3,2,3)$，$\alpha_3=(2,3,2,2,5)$，$\alpha_4=(1,3,-1,1,\ \lambda)$ 线性相关？

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\ 2&1&3&2&3\\ 2&3&2&2&5\\ 1&3&-1&1&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\ 0&-1&1&0&-1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&2&-2&0&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\ 0&-1&1&0&-1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&2&-2&0&\lambda-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\ 0&-1&1&0&-1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&\lambda-4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda=4$ 时，$r(A)=3<4$，　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。

定理5：若m个r维向量

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir})\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

线性无关，则对应的$\boxed{m\text{个}r+1\text{维向量}}$

$$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir},a_{i,r+1})\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

也线性无关。

又多加了一个分量

用语言叙述为：

线性无关的向量组，添加分量后仍旧线性无关

变r+1维

极大无关组

向量组的极大无关组

定义1： 设向量组 T 的部分向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

(i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(ii) T 中向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。

加入使

或 T 中任一向量 α，$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关。

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 T 的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

向量组的极大无关组

极大无关组的含义有两层：1无关性；2.极大性。

注：

1.线性无关向量组的极大无关组就是其本身；

2.向量组与其极大无关组等价；

3.同一个向量组的极大无关组不惟一，但它们之间是等价的。

极大无关组的性质

定理1： 设有两个n维向量

$$(I)\quad \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r, \qquad (II)\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,$$

若向量组(I)线性无关，且可由向量组(II)线性表示，则$r\leq s$.

证： 设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rn}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\ b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\\ O\\ O\\ \vdots\\ O\end{pmatrix}.$$

$\therefore r=r(A)\leq r(C)\leq s.$

通过初等变换
改变成零

做来

推论1：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，$\boxed{\text{且 } r>s}$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关。

反证法 若不相关

则 $r\leq s$ 与 $r>s$ 矛盾

推论2：任意两个线性无关的等价向量组所含向量的个数相等。

例 2 设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix}, b_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$，

证明向量组 a_1,a_2 与向量组 b_1,b_2,b_3 等价.

证 记 $A=(a_1,a_2)$，$B=(b_1,b_2,b_3)$. 根据定理2的推论，只要证 $R(A)=R(B)=R(A,B)$. 为此把矩阵 (A,B) 化成行阶梯形：

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&-2&-1&-1&-1\\0&6&3&3&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可见，$R(A)=2$，$R(A,B)=2$.

容易看出矩阵 B 中有不等于 0 的 2 阶子式，故 $R(B)\geq 2$. 又

$$R(B)\leq R(A,B)=2,$$

于是知 $R(B)=2$. 因此，

$$R(A)=R(B)=R(A,B).$$

等价向量组

数学概念

向量组等价的基本判定是：两个向量组可以互相线性表示。

需要重点强调的是：等价的向量组的秩相等，但是秩相等的向量组不一定等价。[1]

向量组A：a1，a2，…am与向量组B：β1，β2，…βn的等价秩相等条件是

R（A）=R（B）=R（A，B），

其中A和B是向量组A和B所构成的矩阵

目录

A与矩阵的秩不同

证: $\alpha_1 \cdots \alpha_r$

$\beta_1 \cdots \beta_s$

运用推论1

$\alpha_1 \cdots$ 线性无关 由 $\beta_1 \cdots$ 线表

则 $r \leq s$

$\beta_1 \cdots$ 线无 由 $\alpha_1 \cdots$ 线表

则 $s \leq r$

$\therefore r = s$ 即个数相等

定理2：一个向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相等。

由推论二可证

向量组的秩

定义： 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组所含向量的个数，称为向量组的秩，记为 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

注：（1）线性无关的向量组的秩=向量的个数。

（2）向量组线性无关⇔秩=向量个数。⇒ 无关的就是极大无关

定理3： 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

提出极大无关组

证：并假设为前几项

$a_1 \dots a_m \Rightarrow a_1 \dots a_r$

线表

$\beta_1 \dots \beta_s \Rightarrow \beta_1 \dots \beta_t$

则 $m=r\le s=t \Rightarrow r\le t$

推论：等价的向量组有相同的秩。反之不对。

即：有相同秩的两个向量组不一定等价。

$\alpha_1=(1,0,0,0)$, $\beta_1=(0,0,1,0)$, $r(\alpha_1,\alpha_2)=2=r(\beta_1,\beta_2)$.

$\alpha_2=(0,1,0,0)$. $\beta_2=(0,0,0,1)$. 但$\{\alpha_1,\alpha_2\}$与$\{\beta_1,\beta_2\}$不等价。

向量组的等价 $\overset{\Rightarrow}{\cancel{\Leftarrow}}$ 向量组的等秩

问题

向量组的等价 = 向量组的等秩 +

例2：设向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，求$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. $=n$

例3：设有两个n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关且

$$\boxed{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}}, \quad K=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{ss}\end{pmatrix}$$

证明：若 $r(K)=s$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关。

$r(K)=s\Rightarrow K$ 可逆，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 表示。

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价。

即 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix} = \begin{array}{l} \overset{k_1}{\boxed{\alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \cdots}}\ \alpha_1 + \\ \overset{k_2}{\boxed{\alpha_{21}\ \alpha_{22}\ \cdots}}\ \alpha_2 + \cdots \\ \\ \overset{k_3}{\boxed{\alpha_{s1}\ \alpha_{s2}\ \cdots}}\ \alpha_s \end{array}$

即 $\beta \cdots$ 可由 $\alpha \cdots$ 线性表示

$\because K$ 可逆

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\end{pmatrix} \cdot K^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$$

α也可用β线性表示

∴β等价α

∴$r(\beta)=r(\alpha)=$

注：（1）线性无关的向量组的秩=向量的个数。

（2）向量组线性无关⇔秩=向量个数。

∴$r(\beta)=$向量个数

∴β组线性无关

列摆行变换将矩阵化为梯形阵后，秩即求出来了。这时，只要在每一高度上取一个向量，相同高度取左，即可得到极大无关组。

如上例，

相同高度

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_4 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是A的极大无关

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 也是

$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线无

但不是A极大无关

∵ α_1 无法由 α_2 α_3 α_4 线性表示

务必掌握这个方法!

$\boxed{r(A_{m\times s}B_{s\times n}) \le \min\{r(A), r(B)\}}$

设 $A_{n\times m}\underline{B_{m\times n}} = E_n$，证明：$B$ 的列向量组线性无关。

$n=r(E_n)$ ⟸ $n\times m$ $m\times n$ 推出

$$\boxed{\begin{aligned} &r(E_n)=r(AB). \\ &r(AB)\le r(B) \end{aligned}}$$

$= n$

∵ $\underline{B_{m\times n}}$

∴ $r(B) \le n$

∴ $r(B) = n$

七绝：赴昭陵

挥[illegible]引搓

八日满[illegible]

飞[illegible]弓向[illegible]

这我小生无矣、