三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

1.六项的代数和。

恰好是1，2，3这3个数的全排列的个数。

2.每项都是3个元素的乘积，分析这3个元素的下标

它们取自不同行不同列。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

一般对行上出现0才使用

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

记 $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

代数余子式

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

类似地有 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$, $i = 1,2,3.$

或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$, $j = 1,2,3.$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式。

n阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots n)$$

或者 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n)$

特殊行列式计算

例1.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（未写出的为0）

这个行列式称为对角行列式。

例2.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（未写出的为0）

主对角线

分别称为下三角行列式和上三角行列式。

统称为三角行列式。

$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

x1.5 x2 x2.5 x3 x4 x5

中国大学MO

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

（未写出的为0）

$$=\boxed{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}\, a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

$a_{(n-1)(n-1)}$

$(-1)^{1+2}$

斜对角线

行 列

分别称为下三角行列式和上三角行列式。
统称为三角行列式。

tips：注意指数

对同一行列式，
求代数余子式

$(-1)^{-}$

不同角下标，
增加计算次多

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & & & \\ 0 & x & y & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & x & y & 0 \\ 0 & & & 0 & x & y \\ y & & \cdots & & 0 & x \end{vmatrix}$$

多出的元素，展开消去

$$= x\begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & y \\ & & & & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & & & & \\ x & y & & & \\ & x & \ddots & & \\ & & \ddots & y & \\ & & & x & y \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

主对角线

n-1阶

n-1阶

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}.$$

第1个按r_{2n-1}展开，第2个按c_1展开 $adD_{2n-2}-bcD_{2n-2}$

$$=(ad-bc)D_{2n-2}$$

$$=(ad-bc)(ad-bc)D_{2n-4}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}$$

$$=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_{2(n-(n-1))}$$

$$=(ad-bc)^{n-1}D_2.$$

$D_2=ad-bc$,

$$D_{2n}=(ad-bc)^n.$$

行列式性质

性质1： $D = D^T$

由行列式的定义即可证明这条性质。

在行列式中，行和列的位置是对称的，对行成立的，对列也成立。
因此下面只介绍关于行列式的行的性质。

即倒置后 行列式
的计算结果变

性质2：互换两行，行列式变号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} \\ & -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} \end{aligned}$$

$$= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

3:59/13:06

或成比例
(可提k)

推论：若行列式中有两行元素完全相同，则行列式为零。

设 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则有：

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = 0 \quad (i \neq j)$$

正常的展开

行：

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases}D, & (i=j).\\ 0, & (i\neq j).\end{cases}$$

就是替换过后的

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=\begin{cases}D, & (i=j).\\ 0, & (i\neq j).\end{cases}$$

列

这是非常有用的两个公式，应该记住。

本来应该是

$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+\dots$

∴第i行=第j行 ⇒ 替换成i

性质3：用数k乘行列式某一行中所有元素，等于用k乘此行列式。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：某一行的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

$$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

中国大学MOOC

性质4：行列式某一行元素加上另一行对应元素的k倍，行列式的值不变。即：

设新的为D_1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

按此行展开

$D_1=(a_{i1}+ka_{j1})A_{i1}+\cdots$

$=\underbrace{a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}}_{D}$

$+\underbrace{ka_{j1}A_{i1}+ka_{j2}A_{i2}}_{=0}$

即 =

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

成比例 = 0

性质5：若行列式某一行的元素是两数之和，则行列式可拆成两个行列式的和。

推论：若行列式某一行的元素都是m个元素的和，则行列式可以写成m个行列式的和。

一般地，可以计算

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \quad [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

都加到第一行

$\times(-b)$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

n-1行

n-1项

∴提出$[a+(n-1)b]$

个乘

$\times(-b)$ 相减 = 各个第用

$$= [a+(n-1)b] \cdot (a-b)^{n-1}$$

四阶行列式没有对角线法则

(及以上)

四阶(及以上)行列式没有

要：① 化零

【变换】

② 降低阶数

克莱姆法则

复习

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

系数行列式

替换

D在第二列.

常数项位置变动

定理1 若方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.$$

证明：

①证方程组的解可表为

$x_j=\frac{D_j}{D}$

②证明解是唯一的

(1): 若解可表示为 $x_j=\frac{D_j}{D}$

则代一方程可表示为

即证: 替换

$$a_{11}\boxed{\frac{D_1}{D}}+a_{12}\boxed{\frac{D_2}{D}}+\dots+a_{1n}\boxed{\frac{D_n}{D}}=b_1$$

(以1为例)

变形证:

$b_1D-a_{11}D_1-a_{12}D_2-\dots-a_{1n}D_n=0$

(n+1)个 数·行列式 ⇒ (n+1)阶 行列式展开

常数在第一列 → 第二列要交换1次

$$b_1 D - a_{11}\boxed{D_1} - a_{12}\boxed{D_2} - \cdots - a_{1n}D_n = 0.$$

即 $$D_{n+1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \boxed{a_{12}} & & \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

两行相同 = 0

$$b_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{11}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$a_{12}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{2+n}a_{1n}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

n-1次交换 → 到最后

全部都是这样交换

展开 $b_1 D - a_{11} D_1 - \cdots - a_{1n} D_n = 0$

即 $a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = b_1$

由 $D \neq 0$ 得证。

再证解是惟一的，设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为一组解，即

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n. \end{cases}$$

代入得

只需证 $c_j = \frac{D_j}{D}$ 即 $D \cdot c_j = D_j$.

要证

任一解皆可如此表示 则证解唯一

加到j列的

行列式不变

$$D\cdot c_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j}c_j & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj}c_j & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= D_j$$

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n. \end{cases}$$

乘c_1　乘c_2　则j列可改写为b

即左边 $= D_j$

$\therefore D \cdot C_{ij} = D$ 成立

方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

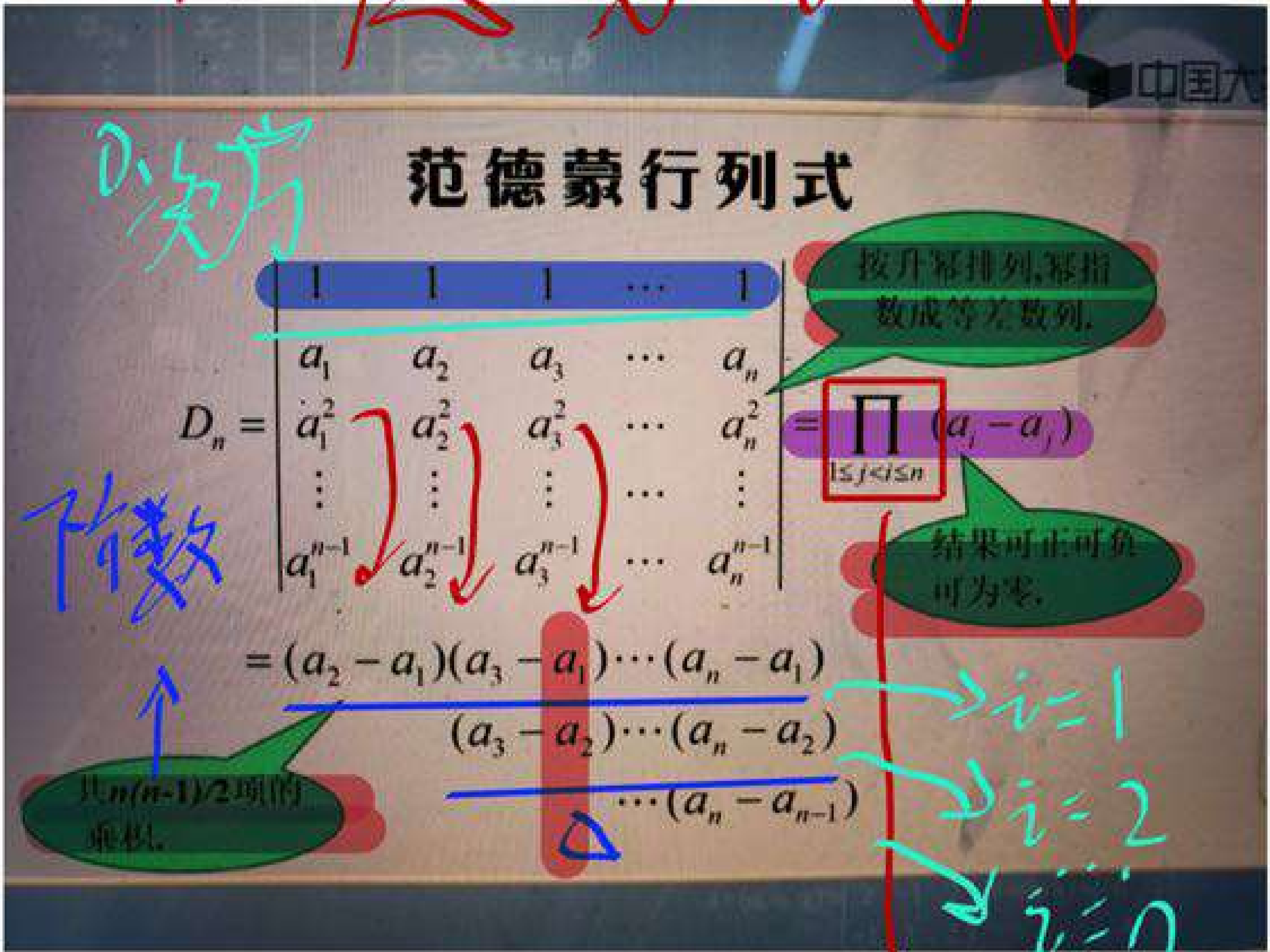
称为齐次线性方程组。

解为0外

定理3 若齐次方程组的系数行列式 $D \neq 0$ 则方程组有惟一零解。

齐次线性方程组指的是常数项全部为零的线性方程组。如果$m<n$(行数小于列数，即未知数的数量大于所给方程组数），则齐次线性方程组有非零解，否则为全零解。[1-2]

范德蒙行列式



范德蒙行列式
按升幂排列,幂指数成等差数列.
$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$
结果可正可负可为零.
$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)$
$(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)$
$\cdots(a_n-a_{n-1})$
共n(n-1)/2项的乘积.
阶数
i=1
i=2
i=n

连乘

归纳法证明。

当$k=2$时，$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1=\prod\limits_{1\le j<i\le 2}(a_i-a$

设$k=n-1$时公式成立，即：

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j)$$

下证$k=n$时成立。

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_2^{n-2}-a_1a_2^{n-3} & \cdots & a_n^{n-2}-a_1a_n^{n-3}\\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3}\\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

提公因式

k=n-1时行列式

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\prod_{2 \le j < i \le n}(a_i - a_j)$$

带入

前面假设了

k=(n-1)时成立

直接应用

$$= \prod_{1 \le j < i \le n}(a_j - a_i)$$

例1:

转置

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&1&3&4\\4&1&9&16\\8&1&27&64\end{vmatrix}\qquad \boxed{D=\begin{vmatrix}1&2&4&8\\1&1&1&1\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{vmatrix}}=?\quad -12$$

$$=(1-2)(3-2)(4-2)(3-1)(4-1)(4-3)=-12$$

$$D=\begin{vmatrix}(a-1)^3&(a-2)^3&(a-3)^3&(a-4)^3\\(a-1)^2&(a-2)^2&(a-3)^2&(a-4)^2\\a-1&a-2&a-3&a-4\\1&1&1&1\end{vmatrix}=?$$

交换行

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a-1&a-2&a-3&a-4\\(a-1)^2&(a-2)^2&(a-3)^2&(a-4)^2\\(a-1)^3&(a-2)^3&(a-3)^3&(a-4)^3\end{vmatrix}$$

交换列

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a-4&a-3&a-2&a-1\\(a-4)^2&(a-3)^2&(a-2)^2&(a-1)^2\\(a-4)^3&(a-3)^3&(a-2)^3&(a-1)^3\end{vmatrix}$$

$$=3!2!1!=12$$

推广

练习 交换n次 交换n-1次

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=?$$

能多次交换，变为标准

V_n 范德蒙行列式

$$(-1)^{n+(n-1)+(n-2)+\cdots}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

再列交换

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & [a-(n-1)]^n & \cdots & a_1^n \end{vmatrix}$$

范德蒙

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!$$

排列与行列式

1. 全排列

n个不同的元素排成一列，称为n个元素的全排列如：12345678，76532184，等等均为8个元素的全排列。

n个元素的全排列共有$n!$个。

2. 逆序与逆序数

全排列123 · · · n 称为标准排列,此时元素之间的顺序称为标准顺序。在任一排列中，若某两个元素的顺序与标准顺序不同，就称这两个元素构成了一个逆序。

逆序

213中，2与1就构成了一个逆序。321中，1与2，2与3，1与3都构成逆序。

2. 逆序与逆序数

有多少组逆序

在一个排列中，逆序的总和称为逆序数。如213的逆序数为1，321的逆序数为3。

逆序数怎样求???

从第一个元素起，该元素前有几个数比它大，这个元素的逆序就是几。将所有元素的逆序相加，即得到排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。如：

在3个元素的全排列中，123，231，312为偶排列，逆序数分别为0,2,2.

132，213，321为奇排列,逆序数分别为1，1，3.

3. 对换

在一个排列中，任意对调两个元素，其余元素不变，即得到一个新排列，这样一种变换称为对换。

对换

对换有两个性质:

1.任意一个排列经一次对换后改变奇偶性.

2.在n个元素的全排列中,奇偶排列各占一半,为$n!/2$.

n大于等于2（为偶数）

∴必为偶数

②的证明

总排列数为 $n!$

总数不变

设有 p 个偶排列

q 个奇排列

p 个奇对换变偶

∵ 没有新元素，只有所的情况下

中个奇变偶是和偶重合的

∴ $\sqrt{P} \leq q$

同理 q 变奇……则 $q \leq \sqrt{P}$

∴ $\sqrt{P} = q$

∴ 相等, 对数为 $\frac{n!}{2}$

---

① 的证明

有以下两种情况

$\cdots ab \cdots \Rightarrow \cdots ba \cdots$

周线排列

$\cdots a \cdots b \cdots \Rightarrow \cdots b \cdots a \cdots$

l个

对换一次奇偶性改变一次

对换2l+1次
奇恰变偶
偶恰变奇

四 行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

由三阶行列式可得如下结论 第二位是1,2,3全排列

(1) $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$　N**为** $j_1j_2j_3$ **的逆序数.**

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{对1，2，3的} \\ \text{全排列求和}}} (-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

则n阶的行列式

n^2个数排成的一个n行n列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots$$

其中N为全排列$j_1 j_2 \cdots j_n$的逆序数. 有时简记

$D = |a_{ij}|_{n\times n}$

例1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

逆序数

$$= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$N(12\cdots n) = 0$

$(-1)^0 = 1$

4) j 取值不能重合：全排列

对角行列式

例2：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$(-1)^0 = 1$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \qquad N(12\cdots n) = 0$$

例3：

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad N(n\cdots 21) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$$

有$(n-1)$，$(n-2)$，…，0个逆序数

~~即 $N = \frac{n(n-1+0)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$~~

~~由于(1)行列式的定义，所以行列式展开也可以看到定义~~

证：（1）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

必须选 a_{11}

$a_{12}\ldots=0$

$$=\sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^N a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

常数提出来

$$=a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^N a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

全排列

$$=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

$\Downarrow$

推广到

换j-1次

换i-1次

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j-2} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$$

整行整列移动

$$(-1)^{i+j-2} M_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

余子式 代数余子式

从而推广到

（3）一般地

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \underline{a_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

拆分，行列式其它全相

等，只有一行(列)才能拆分

推广 求 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$. **解：若**$a=b$，**由(2)知**$D_n=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$；

若$a\neq b$，**则有**

$$D_n=\begin{vmatrix} (x-a)+a & 0+a & 0+a & \cdots & 0+a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}=\boxed{\begin{vmatrix} \underline{x-a} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}}+a\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

构造、拆分

$$D_n=\begin{vmatrix} (x-a)+a & 0+a & 0+a & \cdots & 0+a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+a\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-b & \cdots & a-b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-b \end{vmatrix}=\underline{(x-a)D_{n-1}+a(x-b)^{n-1}}.$$

$$=(x-a)D_{n-1}+a\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x-b & \cdots & a-b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-b\end{vmatrix}=(x-a)D_{n-1}+a(x-b)^{n-1}$$

由a，b的对称性，知$D_n=(x-b)D_{n-1}+b(x-a)^{n-1}$.

$$\begin{cases}D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-b)^{n-1}, & (x-b)\\ D_n=(x-b)D_{n-1}+b(x-a)^{n-1}, & (x-a)\end{cases}$$

则 $D_n=\dfrac{a(x-b)^n-b(x-a)^n}{a-b}$, $(a\neq b)$.

解方程

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n}\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\cdots+4}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-2)3}\begin{vmatrix} & a_{(n-1)2}\\ a_{n1} & a_{n2}\end{vmatrix}_{2\times 2}$$

$$=(-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\cdots+4}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-2)3}(-1)a_{(n-1)2}a_{n1}$$

注意：$(-1)=(-1)^5=(-1)^{3+2}$

$$=(-1)^{\underbrace{(n+1)+n+(n-1)+\cdots+4+3+2}_{2n+\boxed{1}}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-2)3}a_{(n-1)2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\cdots+4+3+2}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-2)3}a_{(n-1)2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{2n+(n-1)+\cdots+3+2+1}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-2)3}a_{(n-1)2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{(n-1)+\cdots+3+2+1}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-2)3}a_{(n-1)2}a_{n1}$$

$$=\boxed{(-1)^{n(n-1)/2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-2)3}a_{(n-1)2}a_{n1}$$