向量空间

一、向量空间及其子空间

1.定义1：（运算的封闭性）设V是n维向量的非空集合，称V对于向量加法及数乘两种运算封闭，如果$\forall \alpha, \beta \in V, k \in R, \Rightarrow \alpha + \beta \in V, k\alpha \in V$成立。

内任一结合 V 随意之间进行

定义2： 设V是n维向量的非空集合，如果V对于向量加法及数乘两种运算封闭，则称集合V为n维向量空间,简称为向量空间。

例如：

$$R^3 = \{\alpha = (a_1, a_2, a_3) | a_1, a_2, a_3 \in R\}$$ √

$$R^n = \{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1, a_2, \cdots, a_n \in R\}$$ √

$$V_1 = \{\alpha = (0, a_2, \cdots, a_n) | a_2, \cdots, a_n \in R\}$$ √

$$V_2 = \{\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m | k_1, k_2, \cdots, k_m \in R\}$$ √

$$V_3 = \{\alpha = (1, a_2, \cdots, a_n) | a_2, \cdots, a_n \in R\}$$ ×

2.子空间：

设W、V为向量空间，若$W \subset V$，则称W是V的子空间。

练习 $V_1 = \{\alpha = (\boxed{0}, a_2, \cdots, a_n) | a_2, \cdots, a_n \in R\}$
是谁的子空间？ ——> R^n

$V_2 = L(\alpha, \alpha, \cdots, \alpha)$ 是R^n的子空间

$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 是R^n的子空间吗？

例1： $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$,

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价，证明：$V_1=V_2$

只需证明$V_1\subset V_2$ 且$V_1\supset V_2$

不一定是全部

二、向量空间的基与维数

定义3： 若n维向量空间V中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足

(i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关； 组内

(ii) V中向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。 组外

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为V的一个基。

定义4： 基中所含向量个数r称为向量空间的维数。

思考 有什么联想吗？学习过类似的定义吗？

向量组的极大无关组和秩。

若将向量空间视作向量组，则基就是向量组的极大线性无关组，维数就是向量组的秩。

因此，基与维数的求法类似于向量组的极大无关组与秩的求法。

R^n的维数为n；基为$e_1, e_2, \cdots, e_n$. 可推出

练习 $V_1=\{\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)|a_2,\cdots,a_n\in R\}$的

维数=（ $n-1$ ），基为（ $e_2,\cdots,e_n$ ）.

结论

$V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$的维数为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$基为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大无关组。

若向量空间的基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r\Rightarrow$

$$V=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r).$$

中国大学M

三、向量在基下的坐标

定义4： 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$是向量空间V的基，$\alpha\in V$，且

V内任一向量

$$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_r\varepsilon_r,$$

则称系数$k_1,k_2,\cdots,k_r$为α在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$下的坐标。

注：

1.向量在一组确定的基下的坐标是惟一的。（为什么？）

2.向量空间的基不惟一。因此,向量在不同基下的坐标也不一样。

3.向量在一组基下的坐标如何求?

一般有两种求法：待定系数法与矩阵方程法。

矩阵方程

例3： 求向量 $\alpha=(1,\ 2,\ 1)$ 在基 $\varepsilon_1=(1,\ 1,\ 1),\varepsilon_2=(1,\ 1,-1),$ $\varepsilon_3=(1,\ -1,\ -1)$ 下的坐标。

解1 设α在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为(x_1,x_2,x_3)，则有

设坐标

$$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3=\alpha.$$

坐标

记 $\boxed{A=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)}$, $\boxed{X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}$ 未知, 则上式化为 $AX=\alpha$.

已知

$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$为基，故$A=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)$可逆。

因为是3×3 ⇒ 满秩 ∴可逆

$$(A\ \vdots\ \alpha)=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&1&-1&\vdots&2\\1&-1&-1&\vdots&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1,r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&0&-2&\vdots&1\\0&-2&-2&\vdots&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3,r_2\cdot(-\frac{1}{2}),r_3\cdot(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&0\\0&0&1&\vdots&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2,r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1\\0&1&0&\vdots&\frac{1}{2}\\0&0&1&\vdots&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

故 $X=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, 即$\alpha$在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标为$\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

解 II 设$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$,则有

$$\alpha\ \begin{cases}1=x_1+x_2+x_3, & \to \varepsilon_1\\ 2=x_1+x_2-x_3, & \varepsilon_2\end{cases}$$

$$\boxed{1 = x_1 - x_2 - x_3.}$$

ε_3

解之得$x_1 = 1, x_2 = \dfrac{1}{2}, x_3 = -\dfrac{1}{2}.$

这就是α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的坐标。

解法 I 是借助于求解矩阵方程求出坐标。设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$为一组基，$\alpha$为一已知向量，令$A = (\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \cdots \ \ \varepsilon_n)$，

$$(A \vdots \alpha) \rightarrow \text{初等行变换} \rightarrow (E \vdots X),$$

则X即为α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的坐标。

解法 II 使用方程组的方法来求的，将向量方程

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

转化为线性方程组并求出$x_1, x_2, \cdots, x_n$即可。

向量组的正交性

一、向量的内积

.定义1：设有向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

称为向量α与β的内积，记作（α，β）.

也可称

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

(i) $(\alpha, \beta) = \alpha\beta^T$,

(ii) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,

(iii) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)$,

(iv) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$,

(v) $(\alpha,\alpha)=a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2}=\|\alpha\|^2$.

2.向量的单位化

$\left\|\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right\|=\dfrac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\|=1.$ $\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 为单位向量。

$\alpha=(1,1,1),\ \|\alpha\|=\sqrt{3},\ \dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha=(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}).$

二、向量的夹角：略。

向量的正交性：

1.定义2：若 $(\alpha,\ \beta)=0$，则称向量α与β正交。

2.定义3：如果m个n维非零向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交，即满足$(\alpha_i,\ \alpha_j)=0,(i\neq j)$则称向量组$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_m$为正交向量组，简称为正交组。

任两个

$$e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$$

为正交组。也称为单位正交组或标准正交组。

3.正交向量组的性质

定理： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为正交向量组，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

回忆 如何证明一组向量线性无关？

先假设有关、

证：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=O.$

$$\Rightarrow(\alpha_i,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=(\alpha_i,O)=0.$$

$$\Rightarrow k_1(\alpha_i,\alpha_1)+k_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+k_m(\alpha_i,\alpha_m)=0.$$

$\because\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为正交向量组，$\Rightarrow(\alpha_i,\alpha_j)=0,(i\neq j)$

$\therefore k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0.$

由于$\alpha_i\neq O$，即$(\alpha_i,\alpha_i)\neq0\Rightarrow k_i=0.\ (i=1,2,\cdots,m)$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为线性无关向量组。

施密特正交化

四、向量组的正交规范化

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为线性无关向量组，令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2,$$

看出规律来了吗？

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\ \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\ \beta_{m-1})}\boxed{\beta_{m-1}}.$$

(i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价；(ii) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$为正交组。

再将$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$为单位化，即得到单位正交向量组。

先正交化，再单化

五、正交矩阵

1、定义4：若n阶方阵A满足$A^TA=E$，则称A为n阶正交矩阵。

2、性质：(i) 若A为n阶正交矩阵 $\Rightarrow |A|=\pm 1.$

(ii) 若A为n阶正交矩阵 $\Rightarrow$ A^T与A^{-1}也是正交矩阵。

(iii) 若A，B为n阶正交矩阵$\Rightarrow AB$与BA也是正交矩阵。

3、正交矩阵的判定

定理：矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为正交矩阵$\Leftrightarrow$ A的行（列）向量组为单位正交向量组。

仅证列向量组的情形。

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\ A\text{为正交矩阵} \Leftrightarrow A^TA=E.$$

$$A^TA=E$$

$$\Rightarrow |A^TA|=|E|$$

$$\Rightarrow |A^T||A|=1$$

$\Rightarrow |A|^2 = 1$

$\Rightarrow |A| = \pm 1$

例1 设向量组 I：$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与向量组 II：$\beta_1,\cdots,\beta_n$的秩相同，且向量组II可由向量组I 线性表示，证明向量组 I与向量组II 等价。

设$r(I)=r(II)=s$，$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$为向量组 I的极大无关组，

$\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$为向量组 II 的极大无关组。

由题设 $\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$可由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$ 线性表示，设表示式为

$$\begin{pmatrix} \beta_{j1} \\ \vdots \\ \beta_{js} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{is} \end{pmatrix},$$

设 $r(I)=r(II)=s$，$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$为向量组I 的极大无关组，

为向量组 II 的极大无关组。

由题设 $\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$可由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$ 线性表示，设表示式为

$$\begin{pmatrix} \beta_{j1} \\ \vdots \\ \beta_{js} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{is} \end{pmatrix},$$

设 $A=\begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_{is} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \vdots \\ \beta_{js} \end{pmatrix}$，$K=(a_{ij})_{s\times s}$，则 $B=KA$. $\Rightarrow r(K)=s$.

由 $s=r(B)=r(KA)\le r(K)$ 知：$r(K)\ge s$，但显然有 $r(K)\le s$，

即 K 为可逆阵，故有 $A=K^{-1}B$，即 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$ 可由 $\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$ 线性表示，从而 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$ 与 $\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$ 等价。

由极大无关组与原向量组的等价性得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 等价。

注：1. 两向量组的秩相同，不能断言两向量组等价，但附加一定的条件后可以等价. 因此要注意：向量组的等价仅由秩相等是不够的，这一点与矩阵等价不一样。

2. 在例1中，因为 m 与 n 不一定相同，但两向量组的秩相等，故取极大无关组来做. 实际上，此题若不利用极大无关组是很难证出来的。因此，在讨论向量组的问题时，可取其极大无关组为讨论对象。

例2 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关且向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 可由其线性表示为

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix},$$

设 $K=(k_{ij})_{s\times s}$，证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=s$.

$$\boxed{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \text{ 线性相关} \Leftrightarrow r(K)<s.}$$

也可以使用初等行变换法

或直接用 $B=KA$

$r(B)\le \min(r(K), r(A))$

练习 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则线性无关的向量组为 C

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$;

(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$;

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$;

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$.

对 (A), $K=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $r(K)=3$;

对 (B), $K=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$, $r(K)=3$;

对 (C), $K=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$, $r(K)=4$;

对 (D), $K=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$, $r(K)=3$;