

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №2 в рамках курса «Суперкомпьютерное моделирование и технологии» Численное интегрирование многомерных функций методом Монте-Карло

Выполнил:

студент группы 608 Канзепаров Денис Ринатович Вариант № 9

Содержание

1.	Математическая постановка задачи	2
2.	Численный метод решения	2
3.	Нахождение точного значения интеграла аналитически	3
4.	Исследование мастшабируемости программы на системе Polus	3
5.	Краткое описание прогораммной реализации	3
6	Выволы	1

1. Математическая постановка задачи

Функция f(x,y,z) – непрерывна в ограниченной замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^3$. Требуется вычислить определенный интеграл:

$$I = \int \int_{C} \int f(x, y, z) dx dy dz.$$

Интегрируемая функция:

$$f(x, y, z) = xy^2z^3,$$

область G ограничена поверхностями z = xy, y = x, x = 1, z = 0.

2. Численный метод решения

Пусть область G ограниченна параллелепипедом Π :

$$\begin{cases} a_1 \leqslant x \leqslant b_1, \\ a_2 \leqslant x \leqslant b_2, \\ a_3 \leqslant x \leqslant b_3. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию F(x, y, z):

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in G \\ 0, & (x,y,z) \notin G. \end{cases}$$

Преобразуем искомый интеграл:

$$I = \int \int_{G} \int f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_{\Pi} \int F(x, y, z) dx dy dz.$$

Пусть $p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2), \ldots$ – случайные точки, равномерно распределенные в П. Возьмем n таких случайных точек. В качестве приближенного значения интеграла предлагается использовать выражение:

$$I \approx |\Pi| \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(p_i), \tag{1}$$

где $|\Pi|$ – объем параллелепипеда Π . $|\Pi|=(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$.

3. Нахождение точного значения интеграла аналитически

Вычислим интеграл аналитически:

$$I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \int_{0}^{xy} xy^{2}z^{3} dx dy dz = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} xy^{2} \frac{(xy)^{4}}{4} dx dy = \frac{1}{4} \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} x^{5}y^{6} dx dy = \frac{1}{4} \int_{0}^{1} x^{5} \frac{x^{7}}{7} dx =$$

$$= \frac{1}{28} \int_{0}^{1} x^{12} dx = \frac{1}{28} \frac{1}{13} = 0.00(274725) \approx 0.002747252747$$

Далее в качестве точного решения данного интеграла будем использовать значение 0.002747252747.

4. Исследование мастшабируемости программы на системе Polus.

Для корректной работы парадигмы «мастер-рабочие» будем фиксировать выборку для 2, 4, 16, 32 МРІ-процессов. Фиксировать будем путем фиксации зерна генератора (seed). В качестве значений для seed'а были выбраны значения 2, 20, 200. По результатам работы программы мы видим, что для каждого значения seed'а ошибка постоянна при постоянном количестве точек соответственно (в зависимости от заданной точности). Также в качестве одного из вариантов ускорения работы был рассмотрен вариант деления выборки на партии (помимо деления на количество процессов). И рассылка выборки «мастером» этих батчей по «рабочим».

5. Краткое описание прогораммной реализации

Реализуем парадигму «мастер-рабочие»: один из процессов («мастер») генерирует случайные точки и передаёт каждому из остальных процессов («рабочих») отдельный, предназначенный для него, набор сгенерированных случайных точек. Все процессы-рабочие вычисляют свою часть суммы по формуле (1). Затем вычисляется общая сумма с помощью операции редукции.

«Мастер»: проверяет условие сходимости, если оно не выполнено, то продолжает работу, а именно, увеличивает число создаваемых точек в 2 раза, определяет новое зерно для вычисления случайных координат точек, создает массив с координатами точек. Далее начинает рассылать данный массив по «рабочим».

«Рабочий»: проверяет условие сходимости, если оно не выполнено, то продолжает работу, а именно, принимает массив случайных точек, суммирует значения функции в точках, которые лежат в области G, вычисляет значение интеграла по формуле (1). Далее высылает полученный результат на «мастер».

«Мастер»: складывает полученные с «рабочих» результаты, проверяет верность условия сходимости и рассылает по «рабочим» значение переменной, отвечающей за прекращение вычислений, если достигнута точность. Если точность достигнута, то выводится результат работы программы. Иначе делает еще одну итерацию.

6. Выводы

В данной работе была реализована парадигма «мастер-рабочие» для вычисления кратного интеграла численным методом Монте-Карло. По результатам, полученными выполнением программной реализации, можно сказать, что задача масштабируема, но в зависимости от настраиваемых параметров (гиперпараметров). Одним из которых в первую очередь является зерно генератора. Мы видим, что при реализации мы не получили возможного кратного ускорения, это связано с тем, что в парадигме «мастер-рабочие» при увеличении рабочих увеличивается время пересылки.

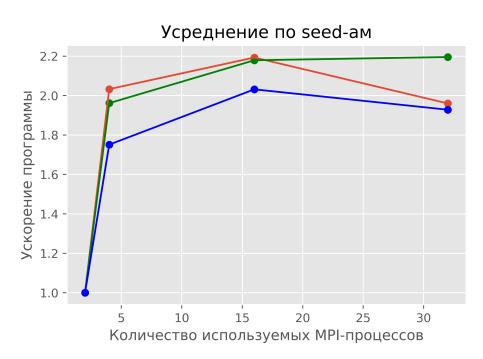


Рис. 6.1. Графики зависимости ускорения программы от числа используемых MPIпроцессов со значениями усредненными по seed'ам

Таблица 1. Таблица с результатами расчётов для $\mathbf{seed} = \mathbf{2}$

Γ Очность ε	Число MPI-	Время работы	Ускорение	Ошибка
	процессов	программы (с)		
	2	0.0129639100	1	0.0000271810
$3.0 \cdot 10^{-5}$	4	0.0079651151	1.6275860219	0.0000271810
	16	0.0072330770	1.7923091375	0.0000271810
	32	0.0073891429	1.7544538217	0.0000271810
	2	0.0767475457	1	0.0000037189
$5.0 \cdot 10^{-6}$	4	0.0393421291	1.9507725549	0.0000037189
	16	0.039214501	1.9571215683	0.0000037189
	32	0.0379084291	2.0245509381	0.0000037189
	2	0.6942877981	1	0.0000009119
$1.5 \cdot 10^{-6}$	4	0.3703793331	1.8745316923	0.0000009119
	16	0.3180963470	2.1826336726	0.0000009119
	32	0.3447988479	2.0136024303	0.0000009119

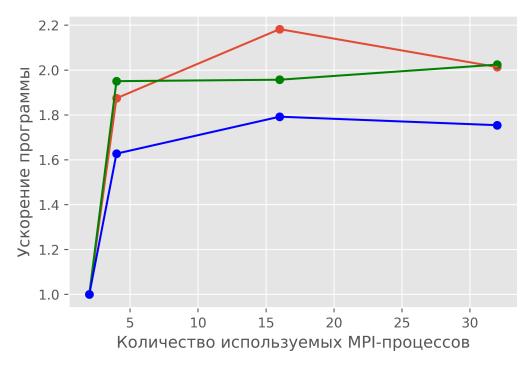


Рис. 6.2. Графики зависимости ускорения программы от числа используемых MPI- процессов $\mathbf{seed} = \mathbf{2}$

Таблица 2. Таблица с результатами расчётов для $\mathbf{seed} = \mathbf{20}$

Точность ε	Число MPI-	Время работы	Ускорение	Ошибка
	процессов	программы (с)		
	2	0.0237541629	1	0.0000157098
$3.0 \cdot 10^{-5}$	4	0.0136748330	1.7370715167	0.0000157098
	16	0.0103593007	2.2930276461	0.0000157098
	32	0.0115384192	2.0587016720	0.0000157098
	2	0.0344767939	1	0.0000028539
$5.0 \cdot 10^{-6}$	4	0.0191537743	1.8000000083	0.0000028539
	16	0.0156409857	2.2042596650	0.0000028539
	32	0.0156005187	2.2099774092	0.0000028539
	2	0.6767938490	1	0.0000005337
$1.5 \cdot 10^{-6}$	4	0.3405903262	1.9871200000	0.0000005337
	16	0.2892168478	2.3400913679	0.0000005337
	32	0.2901032608	2.3329411987	0.0000005337

2.4 -2.2 -Ускорение программы 2.0 -1.8 -1.6 -1.4 1.2 1.0 -10 15 25 20 30 5 Количество используемых МРІ-процессов

Рис. 6.3. Графики зависимости ускорения программы от числа используемых MPI- процессов $\mathbf{seed} = \mathbf{20}$

Таблица 3. Таблица с результатами расчётов для $\mathbf{seed} = \mathbf{200}$

Точность ε	Число MPI-	Время работы	Ускорение	Ошибка
	процессов	программы (с)		
	2	0.0120780700	1	0.0000058787
$3.0 \cdot 10^{-5}$	4	0.0063942753	1.8888880183	0.0000058787
	16	0.00601064887	2.0094452797	0.0000058787
	32	0.00612636907	1.9714891254	0.0000058787
	2	1.4561738340	1	0.0000028539
$5.0 \cdot 10^{-6}$	4	0.6823059294	2.1341948988	0.0000028539
	16	0.6129457491	2.3756977450	0.0000028539
	32	0.6190974159	2.3520916040	0.0000028539
	2	2.9588420690	1	0.0000010679
$5.0 \cdot 10^{-6}$	4	1.3229571294	2.2365366218	0.0000010679
	16	1.4391130261	2.0560178494	0.0000010679
	32	1.9291077191	1.5337878956	0.0000010679

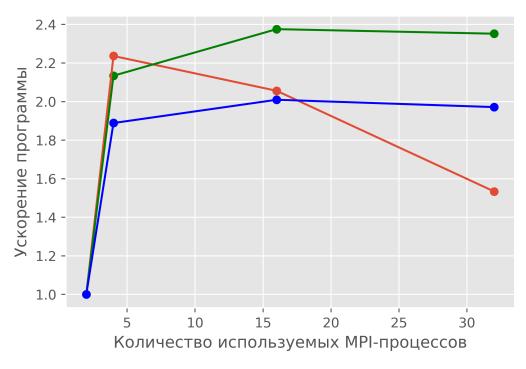


Рис. 6.4. Графики зависимости ускорения программы от числа используемых MPI- процессов $\mathbf{seed} = \mathbf{200}$

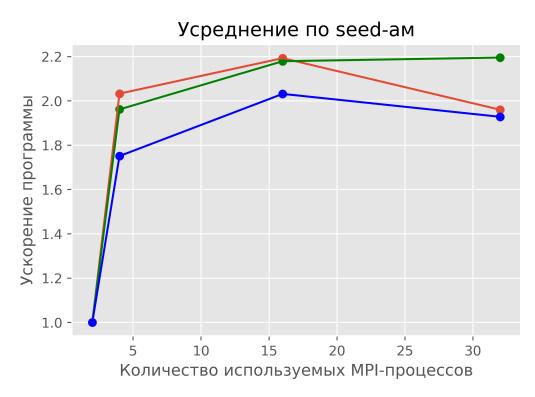


Рис. 6.5. Графики зависимости ускорения программы от числа используемых MPIпроцессов со значениями усредненными по seed'ам

Таблица 4. Таблица с результатами расчётов для $\mathbf{seed} = \mathbf{20}$

Число МРІ-	Время работы	Время создания	Разность	Ускорение
процессов	программы (с)	массива		
2	3.9728800490	3.5257140751	0.4471659739	1
4	3.6738375850	3.4579592191	0.2158783659	2.07137927
8	3.6299008300	3.4754137308	0.1544870992	2.89451984
16	3.6666901391	3.5304999629	0.1361901762	3.28339375

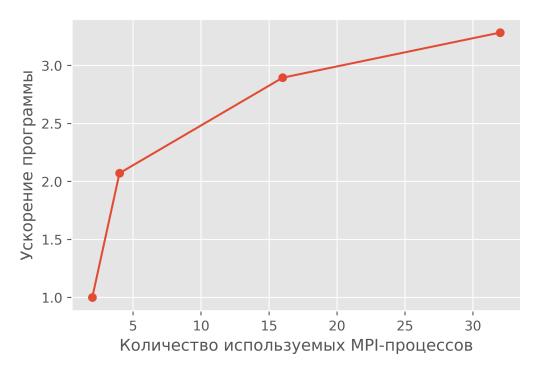


Рис. 6.6. Графики зависимости ускорения программы от числа используемых МРІ- процессов $\mathbf{seed}=\mathbf{20}$, точность 5.0×10^{-6}