Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3 - Lógica Proposicional y de Predicados

22 de agosto de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

Resumen

- **Satisfacibilidad:** Una formula proposicional ϕ se dice satisfacible si existe una valuacion σ tal que $\sigma(\phi) = 1$
- **Tautologias:** Una formula proposicional ϕ es una tautologia si para toda valuacion σ se tiene que $\sigma(\phi) = 1$
- **Contradiccion:** Una formula proposicional ϕ es una contradicción si para toda valuacion σ se tiene que $\sigma(\phi) = 0$
- **Consecuencia logica:** Una fórmula proposicional ψ es consecuencia logica de un conjunto de fórmulas Σ si para cada valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

  Usamos la notación $\Sigma \models \psi$ para indicar que ψ es consecuencia lógica de Σ.
- **¿Qué es la lógica de predicados?**

  La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

  Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

  La lógica de predicados tiene dos componentes clave: el dominio y la interpretación.

  - Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).

- Interpretadores: sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula e I una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que I satisface φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$:

$$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según I.

- **Conceptos importantes de lógica de predicados:**
- Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado P(x) en a.
- Predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Cuantificadores: $\forall$ (para todo) o $\exists$ (existe).

Sintaxis: Una fórmula de la lógica de predicados (o fórmula de predicados) sobre $\mathcal{L}$ se construye utilizando las siguientes reglas:

- Si x e y son variables, entonces $x = y$ es una fórmula.
- Si $x_1, \ldots, x_k$ son variables y $R \in \mathcal{L}$ es un símbolo de predicado de aridad k, entonces $R(x_1, \ldots, x_k)$ es una fórmula.
- Si φ y ψ son fórmulas, entonces $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.
- Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\, \varphi)$ y $(\forall x\, \varphi)$ son fórmulas.

1. Meme del día

Este meme tiene dos instrucciones:

1. Explicar el meme.
2. Explicar por qué no es válido en lógica de predicados.

2. Satisfacibilidad y tautologías

1. Demuestre que para cada conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \text{ es satisfacible si y sólo si } \Sigma \not\models (p \wedge \neg p)$$

2. Demuestre que φ es una tautología si y sólo si $\varnothing \models \varphi$.
3. Demuestre que $(p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow s)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow s))$ es una tautología.

3. Consecuencia lógica

Calentamiento: Cuales consecuencias logicas son ciertas?

- $\{p,\ p \rightarrow q\} \models q$
- $\{\neg q,\ p \rightarrow q\} \models \neg p$
- $\{p \vee q \vee r,\ p \rightarrow s,\ q \rightarrow s,\ r \rightarrow s\} \models s$

Ejercicio: Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

1. Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

2. Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante
3. Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares

4. Lógica de predicados

a) Sean $\leq, =$ símbolos de predicado binarios y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ definida por:

$$\mathcal{I}(\text{dom}) := \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}(=) := n = m \ \text{ si y sólo si } n \text{ y } m \text{ son iguales}$$

$$\mathcal{I}(\leq) := n \leq m \ \text{ si y sólo si } n \text{ es menor o igual que } m$$

$$\mathcal{I}(P) := P(n) \ \text{ si y sólo si } n \text{ es primo}$$

Escriba la siguiente expresión en **lógica de predicados** sobre la interpretación $\mathcal{I}$:

> "Para todo par de números primos distintos de 2 y 3, hay un número natural entre ellos que no es primo".