Satisfacibilidad

Satisfacibilidad de oraciones

Definición

Una oración φ *es satisfacible si y sólo si existe una interpretación* $\mathcal{I}$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

Satisfacibilidad de oraciones

Definición

Una oración φ *es satisfacible si y sólo si existe una interpretación* $\mathcal{I}$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

Ejemplo

Las oraciones $\forall x\, \neg E(x, x)$ y $\forall x \exists y\, E(x, y)$ son satisfacibles, mientras que la oración $\forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x))$ no lo es.

Ejercicios sobre satisfacibilidad

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria.

Ejercicios sobre satisfacibilidad

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria.

1. ¿Es la siguiente oración satisfacible?

$$\big(\forall x \exists y\, R(x, y)\big) \;\wedge\; \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(x, u) \wedge R(x, v)) \rightarrow u = v\big)$$

Ejercicios sobre satisfacibilidad

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria.

1. ¿Es la siguiente oración satisfacible?

   $$\big(\forall x \exists y\, R(x, y)\big) \;\wedge\; \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(x, u) \wedge R(x, v)) \rightarrow u = v\big)$$

   ¿Qué representa una interpretación de R?

Ejercicios sobre satisfacibilidad

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria.

1. ¿Es la siguiente oración satisfacible?

   $$\big(\forall x \exists y\, R(x,y)\big) \ \wedge\ \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(x,u) \wedge R(x,v)) \rightarrow u = v\big)$$

   ¿Qué representa una interpretación de R?

2. ¿Es la siguiente oración satisfacible?

   $$\big(\forall x \exists y\, R(x,y)\big) \ \wedge\ \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(x,u) \wedge R(x,v)) \rightarrow u = v\big) \ \wedge$$
   $$\big(\forall x \exists y\, R(y,x)\big) \ \wedge\ \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(u,x) \wedge R(v,x)) \rightarrow u = v\big)$$

Ejercicios sobre satisfacibilidad

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria.

1. ¿Es la siguiente oración satisfacible?

$$\big(\forall x \exists y\, R(x,y)\big) \ \wedge \ \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(x,u) \wedge R(x,v)) \rightarrow u = v\big)$$

   ¿Qué representa una interpretación de R?

2. ¿Es la siguiente oración satisfacible?

$$\big(\forall x \exists y\, R(x,y)\big) \ \wedge \ \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(x,u) \wedge R(x,v)) \rightarrow u = v\big) \ \wedge$$
$$\big(\forall x \exists y\, R(y,x)\big) \ \wedge \ \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(u,x) \wedge R(v,x)) \rightarrow u = v\big)$$

   ¿Qué tipo de función representa una interpretación de R?

Ejercicios sobre satisfacibilidad

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria.

Ejercicios sobre satisfacibilidad

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria.

3. ¿Es la siguiente oración satisfacible?

$$\big(\forall x \exists y\, R(x,y)\big) \;\wedge\; \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(x,u) \wedge R(x,v)) \rightarrow u = v\big) \;\wedge$$
$$\big(\exists x \forall y\, \neg R(y,x)\big) \;\wedge\; \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(u,x) \wedge R(v,x)) \rightarrow u = v\big)$$

Ejercicios sobre satisfacibilidad

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria.

3. ¿Es la siguiente oración satisfacible?

$$\big(\forall x \exists y\, R(x,y)\big) \;\wedge\; \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(x,u) \wedge R(x,v)) \to u = v\big) \;\wedge$$
$$\big(\exists x \forall y\, \neg R(y,x)\big) \;\wedge\; \big(\forall x \forall u \forall v\, (R(u,x) \wedge R(v,x)) \to u = v\big)$$

¿Puede ser cierta esta oración en una interpretación con dominio finito?

El problema de satisfacibilidad para la lógica de predicados

Dado una oración φ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, queremos verificar si la fórmula φ es satisfacible.

¿Cuál es la complejidad de este problema?

El problema de satisfacibilidad para la lógica de predicados

Dado una oración φ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, queremos verificar si la fórmula φ es satisfacible.

¿Cuál es la complejidad de este problema?

- ¿Puede dar un algoritmo para este problema?

El problema de satisfacibilidad para la lógica de predicados

Dado una oración φ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, queremos verificar si la fórmula φ es satisfacible.

¿Cuál es la complejidad de este problema?

- ¿Puede dar un algoritmo para este problema?
- Recuerde que para la lógica proposicional este problema se podía resolver con un algoritmo de tiempo exponencial.

El problema de satisfacibilidad para la lógica de predicados

Pero para la lógica de predicados el problema de satisfacibilidad es indecidible.

- No existe un algoritmo que resuelva este problema.

El problema de satisfacibilidad para la lógica de predicados

Pero para la lógica de predicados el problema de satisfacibilidad es indecidible.

- No existe un algoritmo que resuelva este problema.

Lo anterior es un teorema que se puede demostrar formalmente.

El problema de satisfacibilidad para la lógica de predicados

Pero para la lógica de predicados el problema de satisfacibilidad es indecidible.

- No existe un algoritmo que resuelva este problema.

Lo anterior es un teorema que se puede demostrar formalmente.

- Usando una formalización matemática de la noción de algoritmo (Máquina de Turing).

El problema de satisfacibilidad para la lógica de predicados

Pero para la lógica de predicados el problema de satisfacibilidad es indecidible.

- No existe un algoritmo que resuelva este problema.

Lo anterior es un teorema que se puede demostrar formalmente.

- Usando una formalización matemática de la noción de algoritmo (Máquina de Turing).

Este implica que no se puede escribir un programa en Python que resuelva el problema.

El problema de satisfacibilidad para la lógica de predicados

Pero para la lógica de predicados el problema de satisfacibilidad es indecidible.

- No existe un algoritmo que resuelva este problema.

Lo anterior es un teorema que se puede demostrar formalmente.

- Usando una formalización matemática de la noción de algoritmo (Máquina de Turing).

Este implica que no se puede escribir un programa en Python que resuelva el problema.

- Ni en ningún otro lenguaje de programación.

Tautologías y contradicciones

Tautologías en lógica de predicados

Definición

Una oración φ *es una tautología si y sólo si para toda interpretación* $\mathcal{I}$ *se tiene que* $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

Tautologías en lógica de predicados

Definición

Una oración φ es una tautología si y sólo si para toda interpretación $\mathcal{I}$ se tiene que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

Ejemplo

Las oraciones $\forall x\,(x = x)$ y $\forall x\,(P(x) \to P(x))$ son tautologías, mientras que la oración $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$ no lo es.

Contradicciones en lógica de predicados

Definición

Una oración φ es una contradicción si y sólo si para toda interpretación $\mathcal{I}$ se tiene que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$.

Contradicciones en lógica de predicados

Definición

Una oración φ *es una contradicción si y sólo si para toda interpretación* $\mathcal{I}$ *se tiene que* $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$.

Ejemplo

Las oraciones $\exists x\, \neg(x = x)$ y $\forall x\, (P(x) \leftrightarrow \neg P(x))$ son contradicciones, mientras que la oración $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ no lo es.

Tautologías, contradicciones y satisfacibilidad en lógica de predicados

Al igual que para la lógica proposicional, tenemos las siguientes relaciones entre los conceptos de tautología, contradicción y satisfacibilidad:

Tautologías, contradicciones y satisfacibilidad en lógica de predicados

Al igual que para la lógica proposicional, tenemos las siguientes relaciones entre los conceptos de tautología, contradicción y satisfacibilidad:

- Una oración φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ es una contradicción.

Tautologías, contradicciones y satisfacibilidad en lógica de predicados

Al igual que para la lógica proposicional, tenemos las siguientes relaciones entre los conceptos de tautología, contradicción y satisfacibilidad:

- Una oración φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ es una contradicción.
- Una oración φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ no es satisfacible.

Tautologías, contradicciones y satisfacibilidad en lógica de predicados

Al igual que para la lógica proposicional, tenemos las siguientes relaciones entre los conceptos de tautología, contradicción y satisfacibilidad:

- Una oración φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ es una contradicción.
- Una oración φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ no es satisfacible.
- Una oración φ es una contradicción si y sólo si φ no es satisfacible.

Equivalencia en lógica de predicados

Equivalencia de fórmulas

Definición

Dos oraciones φ y ψ son equivalentes, denotado como $\varphi \equiv \psi$, si para toda interpretación $\mathcal{I}$:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} \quad = \quad [\![\psi]\!]_{\mathcal{I}}$$

Algunas equivalencias útiles

Todas las equivalencias para la lógica proposicional siguen siendo válidas en este contexto.

- doble negación, leyes de De Morgan, conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$, asociatividad de $\wedge$ y $\vee$, distributividad de $\wedge$ sobre $\vee$ y de $\vee$ sobre $\wedge$, implicancia, doble implicancia, ...

Algunas equivalencias útiles

Todas las equivalencias para la lógica proposicional siguen siendo válidas en este contexto.

- doble negación, leyes de De Morgan, conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$, asociatividad de $\wedge$ y $\vee$, distributividad de $\wedge$ sobre $\vee$ y de $\vee$ sobre $\wedge$, implicancia, doble implicancia, ...

Pero tenemos nuevas equivalencias útiles:

$$
\begin{aligned}
\forall x\, \varphi &\equiv \neg(\exists x\, \neg\varphi)\\
\exists x\, \varphi &\equiv \neg(\forall x\, \neg\varphi)\\
\forall x\, (\varphi \wedge \psi) &\equiv (\forall x\, \varphi) \wedge (\forall x\, \psi)\\
\exists x\, (\varphi \vee \psi) &\equiv (\exists x\, \varphi) \vee (\exists x\, \psi)
\end{aligned}
$$

Ejercicios sobre equivalencia en lógica de predicados

1. Demuestre las equivalencias anteriores.

Ejercicios sobre equivalencia en lógica de predicados

1. Demuestre las equivalencias anteriores.

2. ¿Es cierta la equivalencia $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x\,\varphi) \vee (\forall x\,\psi)$?

Ejercicios sobre equivalencia en lógica de predicados

1. Demuestre las equivalencias anteriores.
2. ¿Es cierta la equivalencia $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x\,\varphi) \vee (\forall x\,\psi)$?
3. ¿Es cierta la equivalencia $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x\,\varphi) \wedge (\exists x\,\psi)$?

Ejercicios sobre equivalencia en lógica de predicados

1. Demuestre las equivalencias anteriores.
2. ¿Es cierta la equivalencia $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x\,\varphi) \vee (\forall x\,\psi)$?
3. ¿Es cierta la equivalencia $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x\,\varphi) \wedge (\exists x\,\psi)$?
4. Demuestre que $\varphi \equiv \psi$ si y sólo si $\varphi \leftrightarrow \psi$ es una tautología.

Consecuencia lógica

La noción de consecuencia lógica

Sea Σ un conjunto de oraciones. Para una interpretación $\mathcal{I}$, decimos que $[\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ si para cada $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

La noción de consecuencia lógica

Sea Σ un conjunto de oraciones. Para una interpretación $\mathcal{I}$, decimos que $[\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ si para cada $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

Definición

Una oración φ es consecuencia lógica de un conjunto Σ de oraciones si para cada interpretación $\mathcal{I}$:

si $[\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1$, entonces $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$

La noción de consecuencia lógica

Sea Σ un conjunto de oraciones. Para una interpretación $\mathcal{I}$, decimos que $[\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ si para cada $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

Definición

Una oración φ es consecuencia lógica de un conjunto Σ de oraciones si para cada interpretación $\mathcal{I}$:

$$\textit{si } [\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1, \textit{ entonces } [\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$$

Usamos la notación $\Sigma \models \varphi$

Ejercicios sobre consecuencia lógica

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

Ejercicios sobre consecuencia lógica

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$\{\exists y \forall x\, R(x,y)\} \quad \models \quad \forall x \exists y\, R(x,y)$$

Ejercicios sobre consecuencia lógica

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$\begin{aligned} \{\exists y \forall x\, R(x,y)\} &\models \forall x \exists y\, R(x,y) \\ \{\forall x \exists y\, R(x,y)\} &\models \exists y \forall x\, R(x,y) \end{aligned}$$

Ejercicios sobre consecuencia lógica

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$\begin{aligned}
\{\exists y \forall x\, R(x,y)\} &\models \forall x \exists y\, R(x,y) \\
\{\forall x \exists y\, R(x,y)\} &\models \exists y \forall x\, R(x,y) \\
\{\forall x\, (P(x) \land Q(x))\} &\models \forall x\, P(x)
\end{aligned}$$

Ejercicios sobre consecuencia lógica

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$
\begin{aligned}
\{\exists y \forall x \, R(x,y)\} &\models \forall x \exists y \, R(x,y) \\
\{\forall x \exists y \, R(x,y)\} &\models \exists y \forall x \, R(x,y) \\
\{\forall x \, (P(x) \wedge Q(x))\} &\models \forall x \, P(x) \\
\{\forall x \, (P(x) \vee Q(x))\} &\models \forall x \, P(x)
\end{aligned}
$$

Ejercicios sobre consecuencia lógica

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$\begin{aligned}
\{\exists y \forall x\, R(x,y)\} &\models \forall x \exists y\, R(x,y) \\
\{\forall x \exists y\, R(x,y)\} &\models \exists y \forall x\, R(x,y) \\
\{\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))\} &\models \forall x\, P(x) \\
\{\forall x\, (P(x) \vee Q(x))\} &\models \forall x\, P(x)
\end{aligned}$$

2. ¿Es cierto que si $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, entonces $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \psi$?

Ejercicios sobre consecuencia lógica

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$\begin{aligned} \{\exists y \forall x\, R(x,y)\} &\models \forall x \exists y\, R(x,y) \\ \{\forall x \exists y\, R(x,y)\} &\models \exists y \forall x\, R(x,y) \\ \{\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))\} &\models \forall x\, P(x) \\ \{\forall x\, (P(x) \vee Q(x))\} &\models \forall x\, P(x) \end{aligned}$$

2. ¿Es cierto que si $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, entonces $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \psi$?

3. Un conjunto Σ de oraciones es satisfacible si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $[\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1$. En caso contrario, Σ es inconsistente (o contradictorio).

   Demuestre que: $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.