IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

25.08.2025

Hoy...

Lógica de predicados: fórmulas de la lógica de predicados, sus evaluaciones, interpretaciones.

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow \tag{1}$$

$$\text{identificación y cambio de nombres de los parámetros;} \tag{2}$$

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{3}$$

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow \tag{1}$$

identificación y cambio de nombres de los parámetros; (2)

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{3}$$

Definición

Fórmulas de la lógica de predicados *(a.k.a.* **fórmulas de primer orden***) se construyen de*

- *símbolos de predicados y nombres de los parámetros;*
- *conectivos lógicos y cuantificadores.*

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow \tag{1}$$

$$\text{identificación y cambio de nombres de los parámetros;} \tag{2}$$

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{3}$$

Definición

Fórmulas de la lógica de predicados *(a.k.a.* **fórmulas de primer orden***) se construyen de*

- *símbolos de predicados y nombres de los parámetros;*
- *conectivos lógicos y cuantificadores.*

Si sustituimos *símbolos* de predicados por predicados particulares (sobre un dominio particular), la fórmula nos calcula, según (4–6), un predicado resultante.

Lógica de proposiciones $\subseteq$ lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow \tag{4}$$

$$\text{identificación y cambio de nombres de los parámetros;} \tag{5}$$

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{6}$$

Lógica de proposiciones $\subseteq$ lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \to \tag{4}$$

$$\text{identificación y cambio de nombres de los parámetros;} \tag{5}$$

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{6}$$

- Fórmulas de la lógica proposicional son caso particular de las fórmulas cuando todos símbolos de predicados son 0-arios.
- En ese caso (5–6) no son aplicables.
- Podemos sustituir cada símbolo de predicado 0-ario por 0 o 1. Dominio D no es importante en ese caso.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x, y) \tag{7}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x, y) \tag{7}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$. Si $D = [0, +\infty)$ y

$A(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (7)?

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x, y) \tag{7}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$. Si $D = [0, +\infty)$ y

$A(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (7)? Si

$D = \mathbb{N}$ y $A(x, y) = \begin{cases} 1 & 2x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (7)?

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \tag{8}$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \tag{8}$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$. Si $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$

y $B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & x^n + y^n = z^n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (8)?

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \tag{8}$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$. Si $D = \{1, 2, 3, \dots\}$

y $B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & x^n + y^n = z^n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (8)? Si $D = \{1, 2, 3, \dots\}$ y

$B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & (x+1)(y+1)z = n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (8)?

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\forall y \Big((\exists x A(x,y)) \vee (\neg A(y,y)) \Big) \tag{9}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot,\cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\forall y \Big((\exists x A(x,y)) \vee (\neg A(y,y)) \Big) \tag{9}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot,\cdot)$. Si $D = \{1,2,3,\ldots\}$ y

$A(x,y) = \begin{cases} 1 & x \cdot y = 29371982 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (9)?

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\forall y\Big((\exists x A(x,y)) \vee (\neg A(y,y))\Big) \tag{9}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot,\cdot)$. Si $D = \{1,2,3,\ldots\}$ y

$A(x,y) = \begin{cases} 1 & x \cdot y = 29371982 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (9)?

Definición

Fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones** *de la lógica de predicados.*

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists u \exists v \left((\neg A(u, v)) \wedge B(x, u, v) \wedge B(y, u, v) \wedge B(z, u, v) \right) \tag{10}$$

usa dos símbolos de predicados, *binario* $A(\cdot, \cdot)$ y ternario $B(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists u \exists v\, ((\neg A(u,v)) \wedge B(x,u,v) \wedge B(y,u,v) \wedge B(z,u,v)) \qquad (10)$$

usa dos símbolos de predicados, *binario* $A(\cdot,\cdot)$ y ternario $B(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Si $D = \mathbb{R}^2$ $A(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$,

$B(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \|x-y\| = \|x-z\| \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (10)?

Interpretaciones

Definición

Sea ϕ una fórmula de la lógica de predicados con símbolos de predicados $S_1, \ldots, S_n$ de aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Una **interpretación** *$\mathcal{I}$ de ϕ consiste de un conjunto dominio D y n predicados $P_1, \ldots, P_n$ sobre D con aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente.*

Interpretaciones

Definición

Sea ϕ una fórmula de la lógica de predicados con símbolos de predicados $S_1, \ldots, S_n$ de aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Una **interpretación** *$\mathcal{I}$ de ϕ consiste de un conjunto dominio D y n predicados $P_1, \ldots, P_n$ sobre D con aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente.*

$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}}$ denota el predicado sobre D que obtenemos si sustituimos S_1 por P_1, ..., S_n por P_n.

Ejemplo notación de interpretaciones

- $\phi = \forall a \exists b \; A(b, b, a)$

Ejemplo notación de interpretaciones

- $\phi = \forall a \exists b \; A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$
$$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q} \cap (0,1), x \cdot y = z) \qquad \mathcal{I}_4 = ((0,1), x \cdot y = z)$$

Ejemplo notación de interpretaciones

- $\phi = \forall a \exists b \ A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q} \cap (0,1), x \cdot y = z) \qquad \mathcal{I}_4 = ((0,1), x \cdot y = z)$$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_1} = \qquad [\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_2} =$$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_3} = \qquad [\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_4} =$$

Ejemplo notación de interpretaciones

- $\phi = \forall a \exists b \ A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$
$$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q} \cap (0, 1), x \cdot y = z) \qquad \mathcal{I}_4 = ((0, 1), x \cdot y = z)$$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_1} = \qquad [\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_2} =$$
$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_3} = \qquad [\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_4} =$$

- ¿$[\![\exists b \ A(b, b, a)]\!]_{\mathcal{I}_1}$?

¡Gracias!