Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

13 de agosto de 2025

2º semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

---

Requisitos

- La tarea es **individual**. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- Cada pregunta tiene una nota de 1 a 7 (hay 1 punto base). La nota final es el promedio de ambas preguntas.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del viernes 22 de agosto a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución, un `zip` conteniendo el archivo `.tex` que compila su tarea, y un archivo `.py` con su código python para el SAT solver. Si su `.tex` hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice algún cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

(a) (2.0 pts) Encuentre una fórmula en CNF que sea equivalente a:

$$(p \to (q \to (r \to s))).$$

Debe explicar claramente su desarrollo para obtener la fórmula.

(b) (2.0 pts) Definimos el conectivo binario XOR según la siguiente tabla de verdad:

p	q	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Demuestre que el conjunto $\{\mathsf{XOR}, \to\}$ es funcionalmente completo.
(*Hint:* Recuerde que el conjunto $\{\neg, \to\}$ es funcionalmente completo.)

(c) (2.0 pts) Demuestre que el conjunto $\{\mathsf{XOR}\}$ **no** es funcionalmente completo.
(*Hint:* Demuestre que la fórmula $\neg p$ no se puede expresar utilizando sólo XOR.)

Pregunta 2

(a) (4.0 pts) El problema del *cuadrado latino* de 4×4 se define como sigue. Tenemos un tablero de 4×4 casillas. Algunas de las casillas están *ocupadas*, vale decir, tienen un número entre $\{1, 2, 3, 4\}$. El resto de las casillas están *libres*. El objetivo es verificar si existe una *solución*, esto es, una forma de asignarle números entre $\{1, 2, 3, 4\}$ a las casillas libres, tal que en cada una de las 4 filas y en cada una de las 4 columnas, los números que aparecen sean distintos. Por ejemplo, una posible instancia al problema puede ser el siguiente tablero:

		1	
	3		
			4
2		**3**	

Una posible solución es la siguiente:

4	2	**1**	3
1	**3**	4	2
3	1	2	**4**
2	4	**3**	1

Por otra parte, el siguiente tablero **no** tiene solución (verifíquelo):

		1	
	3		**1**
			4
2		**3**	

Para describir el conjunto de casillas ocupadas usaremos triples de la siguiente forma: un triple (i, j, k), donde $1 \leq i, j, k \leq 4$, indica que la casilla en la fila i y columna j está ocupada con el número k. Por ejemplo, las casillas ocupadas del primer ejemplo quedan descritas por:

$$\{(1, 3, 1), (2, 2, 3), (3, 4, 4), (4, 1, 2), (4, 3, 3)\},$$

mientras que en el segundo ejemplo quedan descritas por:

$$\{(1, 3, 1), (2, 2, 3), (2, 4, 1), (3, 4, 4), (4, 1, 2), (4, 3, 3)\}.$$

Dado un tablero con casillas ocupadas $\{(i_1, j_1, k_1), \ldots, (i_m, j_m, k_m)\}$, escriba una fórmula φ en la lógica proposicional tal que:

el tablero tiene solución si y sólo si φ es satisfacible.

Para esto SOLO debe utilizar variables proposicionales $x_{i,j,k}$, donde $1 \leq i, j, k \leq 4$, que indican que la casilla de la fila i y columna j recibe el número k.

(b) (2.0 pts) Utilizando su fórmula proposicional de la parte anterior y el solver **Z3**, encuentre una solución para el siguiente tablero:

2			
		1	
	4		**3**
3			

Debe pegar su código de Python junto con la solución obtenida en su documento LaTeX. Recuerde también subir su archivo `.py` como fue indicado en las instrucciones.