Unidad II: Lógica de predicados

Lógica de predicados: Sintaxis y semántica

Clase 06 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Una pregunta

Considere la siguiente expresión:

$$\exists x \forall y \, P(x, y)$$

¿La expresión es verdadera o falsa?

Depende!

Depende del dominio y cómo interpretamos el símbolo P:

- ¿Sobre el dominio de los números naturales y $P = \leq$?
- ¿Sobre el dominio de los números enteros y $P = \leq$?
- ¿Sobre el dominio de todas las personas?

Necesitamos una **interpretación** para darle valor de verdad a la expresión.

Definiremos la **sintaxis** de la lógica de predicados:

¿Qué **fórmulas** están permitidas en la lógica?

Una fórmula será una expresión (secuencia de símbolos) que puede usar:

- **Nombres** de predicados.
- Conectivos lógicos, cuantificadores, variables y paréntesis.

Definiremos la **semántica** de la lógica de predicados:

¿Cuándo una **fórmula** es verdadera o falsa?

Para esto, necesitaremos la noción de **interpretación**:

- Debemos escoger un dominio.
- Debemos darle un **significado** a cada nombre de predicado.

¿Por qué es tan importante la separación sintaxis vs semántica?

Sintaxis: vocabulario

Definición:

Un **vocabulario** $\mathcal{L}$ es un conjunto $\{P_1, \ldots, P_k\}$ de **nombres** de predicados.

- Cada nombre de predicado P_i tiene una **aridad** $n_i \geq 0$, que indica la cantidad de argumentos que recibe P_i.

Ejemplos:

Posibles vocabularios:

- $\mathcal{L} = \{Persona, Bot, Sigue\}$.

  Persona y *Bot* tienen aridad 1, *Sigue* tiene aridad 2.

- $\mathcal{L} = \{EsPar, MenorQue, Suma\}$.

  EsPar tiene aridad 1, *MenorQue* tiene aridad 2, *Suma* tiene aridad 3.

Notación: A cada P_i también se le llama **símbolo** de predicado.

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

- Nombres de predicados de un vocabulario $\mathcal{L}$.
- Un predicado especial llamado $=$.
- Conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Variables.
- Cuantificadores $\forall$ y $\exists$.
- Paréntesis (y).

Asumimos dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición:

Una fórmula de la lógica de predicados sobre $\mathcal{L}$ es una expresión que se puede construir aplicando las siguientes reglas:

- Si x e y son variables, entonces $x = y$ es una fórmula.
- Si $P \in \mathcal{L}$ es un nombre de predicado de aridad n y $x_1, \ldots, x_n$ son variables, entonces $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula.
- Si φ y ψ son fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.
- Si φ es una fórmula y x una variable, entonces $(\forall x\, \varphi)$ y $(\exists x\, \varphi)$ son fórmulas.

Sintaxis: comentarios

Fórmulas de la forma $x = y$ o $P(x_1, \dots, x_n)$ se llaman fórmulas atómicas.

- Pueden haber repeticiones de variables, por ejemplo:

$$x = x \qquad P(x, x) \qquad S(x, y, x) \qquad S(x, y, y)$$

Convenciones:

- Omitimos paréntesis si esto no genera ambigüedad. Por ejemplo:
  - En vez de $(\forall x(\exists y\, P(x, y)))$, escribimos $\forall x \exists y\, P(x, y)$.
- Para algunos símbolos de predicados comunes, como $\leq$, usamos notación **infija**:
  - En vez de $\leq (x, y)$, escribimos $x \leq y$.

Vocabulario $\mathcal{L} = \{P, O\}$,
el símbolo P tiene aridad 1, y el símbolo O tiene aridad 2.

Posibles fórmulas sobre $\mathcal{L}$:

- $\exists x \forall y\, O(x, y)$.
- $\forall x \forall y \big((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y\big)$.
- $O(x, y) \wedge \neg(x = y)$.
- $\exists y \big(P(y) \wedge O(y, x)\big)$.

¿Cuál es el valor de verdad de estas fórmulas?

Definición:

Sea $\mathcal{L} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ un vocabulario.
Una interpretación $\mathcal{I}$ para $\mathcal{L}$ se compone de:

- un dominio $\mathcal{I}(dom)$,
- para cada nombre P_i, un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$ sobre el dominio $\mathcal{I}(dom)$. (de la misma aridad.)

Ejemplos:

Posible interpretación para $\mathcal{L} = \{P, O\}$:

- $$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}(dom) & = & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}(P) & = & x \text{ es par} \\ \mathcal{I}(O) & = & x \text{ es menor o igual que } y \end{array}$$

Las **variables libres** de una fórmula son las variables que **no** aparecen cuantificadas.

Notación:

- Escribimos $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de la fórmula φ.
- Si φ no tiene variables libres, decimos que φ es una **oración**.

Ejemplos:

- $\varphi = \exists x \forall y\, O(x, y)$.
- $\psi = \forall x \forall y \big((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y\big)$.
- $\alpha(x, y) = O(x, y) \wedge \neg(x = y)$.
- $\beta(x) = \exists y \big(P(y) \wedge O(y, x)\big)$.

Asumimos dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición:

Sea φ una oración sobre $\mathcal{L}$ y sea $\mathcal{I}$ una interpretación para $\mathcal{L}$.
La **evaluación** de φ sobre $\mathcal{I}$ es el **predicado** 0-**ario** que se obtiene de la siguiente manera:

- Reemplazar cada nombre de predicado $P \in \mathcal{L}$,
  por el predicado $\mathcal{I}(P)$ sobre el dominio $\mathcal{I}(dom)$.
- Evaluar φ como si fuera un **predicado compuesto**.

Notación:

- La evaluación de φ sobre $\mathcal{I}$ se denota por $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}}$.
- $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}}$ toma valor 0 o 1.

Sea $\mathcal{L} = \{P, O\}$ y la siguiente interpretación $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}(dom) & = & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}(P) & = & x \text{ es par} \\ \mathcal{I}(O) & = & x \text{ es menor o igual que } y \end{array}$$

¿Cuál es la evaluación de las siguientes oraciones sobre $\mathcal{I}$?

- $\varphi = \exists x \forall y \, O(x, y)$.

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$$

- $\psi = \forall x \forall y \big((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y \big)$.

$$[\![\psi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$$

Semántica de una fórmula: ejemplos

Sea $\mathcal{L} = \{P,\, O\}$ y la siguiente interpretación $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}(dom) & = & \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}(P) & = & x > 0 \\ \mathcal{I}(O) & = & x + y = 0 \end{array}$$

¿Cuál es la evaluación de las siguientes oraciones sobre $\mathcal{I}$?

- $\varphi = \exists x \forall y\, O(x, y)$.

  $$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$$

- $\psi = \forall x \forall y \big((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y\big)$.

  $$[\![\psi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$$

Asumimos dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición:

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula sobre $\mathcal{L}$ con n variables libres y sea $\mathcal{I}$ una interpretación para $\mathcal{L}$.

La **evaluación** de φ sobre $\mathcal{I}$ es el **predicado n-ario** que se obtiene de la siguiente manera:

- Reemplazar cada nombre de predicado $P \in \mathcal{L}$, por el predicado $\mathcal{I}(P)$ sobre el dominio $\mathcal{I}(dom)$.
- Evaluar φ como si fuera un **predicado compuesto**.

Notación:

- La evaluación de φ sobre $\mathcal{I}$ se denota por $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}}$.
- Dado valores $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{I}(dom)$, $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}}(a_1, \ldots, a_n)$ toma valor 0 o 1.

Sea $\mathcal{L} = \{P,\ O\}$ y la siguiente interpretación $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}(dom) & = & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}(P) & = & x \text{ es par} \\ \mathcal{I}(O) & = & x \text{ es menor o igual que } y \end{array}$$

¿Cuál es la evaluación de las siguientes oraciones sobre $\mathcal{I}$?

- $\alpha(x, y) = O(x, y) \wedge \neg(x = y)$.

  $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{I}} = x$ es menor que y

- $\beta(x) = \exists y \big(P(y) \wedge O(y, x)\big)$.

  $[\![\beta]\!]_{\mathcal{I}} = x$ es un número natural

Semántica de una fórmula: ejemplos

Sea $\mathcal{L} = \{P, O\}$ y la siguiente interpretación $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}(dom) & = & \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}(P) & = & x > 0 \\ \mathcal{I}(O) & = & x + y = 0 \end{array}$$

¿Cuál es la evaluación de las siguientes fórmulas sobre $\mathcal{I}$?

- $\alpha(x, y) = O(x, y) \wedge \neg(x = y)$.

  $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{I}} = x$ e y son inversos aditivos distintos

- $\beta(x) = \exists y\big(P(y) \wedge O(y, x)\big)$.

  $[\![\beta]\!]_{\mathcal{I}} = x$ es un entero negativo

Semántica de una fórmula: caso general

Asumimos dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición:

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula sobre $\mathcal{L}$ con n variables libres y sea $\mathcal{I}$ una interpretación para $\mathcal{L}$.
La **evaluación** de φ sobre $\mathcal{I}$ es el **predicado n-ario** que se obtiene de la siguiente manera:

- Reemplazar cada nombre de predicado $P \in \mathcal{L}$, por el predicado $\mathcal{I}(P)$ sobre el dominio $\mathcal{I}(dom)$.
- Evaluar φ como si fuera un predicado compuesto.

Importante:

El símbolo = **siempre** se interpreta como la igualdad de valores.

Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{\leq, S\}$,
donde $\leq$ tiene aridad 2 y S tiene aridad 3.

Considere las siguientes interpretaciones $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$:

$\mathcal{I}(dom) = \mathbb{N}$	$\mathcal{I}(\leq) = x$ es menor o igual a y	$\mathcal{I}(S) = (x + y = z)$
$\mathcal{I}'(dom) = \mathbb{R}$	$\mathcal{I}'(\leq) = x$ es menor o igual a y	$\mathcal{I}'(S) = (x + y = z)$

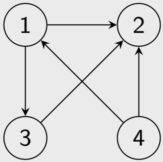
¿Cuál es la evaluación de las siguientes oraciones sobre $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$?

- $\exists x \forall y\, (x \leq y)$
- $\forall x \exists y\, (S(y, y, x))$
- $\forall x \forall y \Big(x \leq y \rightarrow \exists z \big(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg(z = x) \wedge \neg(z = y)\big)\Big)$

Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, donde E tiene aridad 2.

Podemos representar grafos como interpretaciones sobre $\mathcal{L}$.

Ejemplo:



$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$

Para representar este grafo tomamos la interpretación $\mathcal{I}$ tal que:
$\mathcal{I}(dom) = \{1, 2, 3, 4\}$
$\mathcal{I}(E)(1, 2) = \mathcal{I}(E)(1, 3) = \mathcal{I}(E)(3, 2) = \mathcal{I}(E)(4, 1) = \mathcal{I}(E)(4, 2) = 1$
$\mathcal{I}(E)(u, v) = 0$, en caso contrario.

Más ejemplos: grafos

Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, donde E tiene aridad 2.

Podemos representar grafos como interpretaciones sobre $\mathcal{L}$.

Escriba oraciones que expresen las siguientes propiedades sobre grafos:

- No existe un arco de un nodo a si mismo
- Todo nodo tiene al menos un arco de salida.
- Todo tiene al menos dos arcos de salida
- Existe un ciclo de largo 3.