

日本語訳『Qiskit Textbook』勉強会

第6章 6.4 Circuit Quantum Electrodynamics

東京基礎研究所
徳成 正雄

目次

- Circuit Quantum Electrodynamicsとは何か？
- Schrieffer-Wolff変換：非対角項を含むハミルトニアンの対角化
- Jaynes-Cummingsハミルトニアンのブロック対角化
- 多準位のトランズモンへの拡張
- 量子ビットのドライブ
- 交差共鳴(Cross Resonance)ゲート
- まとめ

Circuit Quantum Electrodynamicsとは何か？

回路量子電磁力学 (Circuit Quantum Electrodynamics, cQED)

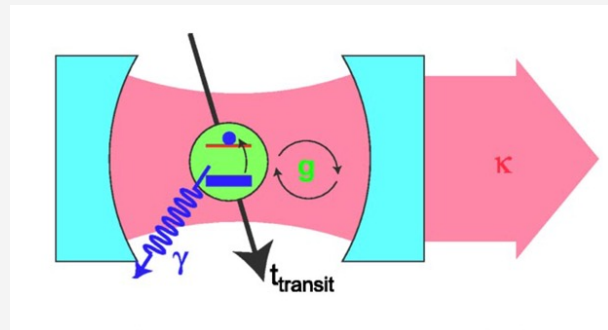
- 共振器量子電磁力学 (Cavity QED) とのアナロジー
- 人工原子：超伝導回路からなるトランズモン → 2準位の量子ビット
- 超伝導マイクロ波共振器との電気双極子相互作用

Jaynes-Cummingsハミルトニアン

$$\hat{H}_{\text{JC}}^{(\text{RWA})}/\hbar = \omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \omega_q \hat{\sigma}^z + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+)$$

cQEDの利点[Goto2020]

- 物理的に安定な回路素子
- 緩和に対する結合($g^2/\kappa\gamma$)が大きい
 - 小モード体積 → 強結合：導波路幅~10um/波長~cm（回折限界のため光共振器ではそこまで小さくない）
 - マイクロ波に対して超低損失な超伝導体
 - 人工原子のサイズ~um → 強結合（普通の原子は~Å）



[Blais2004]

Jaynes-Cummingsハミルトニアン

Jaynes-Cummingsハミルトニアン $\hat{H}_{\text{JC}}^{(\text{RWA})}/\hbar = \omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \omega_q \hat{\sigma}^z + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+)$

ω_r, ω_q, g はそれぞれ共振器の共振周波数、量子ビット周波数、共振器と量子ビットの結合。

Pauli行列（量子ビットの回転） $\hat{\sigma}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

量子ビットの昇降演算子 $\hat{\sigma}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

光子の生成消滅演算子 $\hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}, \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \sqrt{4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

光子数 $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$

Schrieffer-Wolff変換：

非対角項を含むハミルトニアンの対角化

ハミルトニアンを対角項 H_0 と摂動項に分け、摂動項をさらにブロック対角項 H_1 と非ブロック対角項 H_2 に分ける。
(\hbar や上付きの \wedge を省略)

$$H = H_0 + \lambda(H_1 + H_2) = \begin{pmatrix} \blacksquare & & & \\ & \blacksquare & & \\ & & \blacksquare & \\ & & & \blacksquare \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \times & \times & & \\ \times & \times & & \\ & & \times & \times \\ & & \times & \times \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \Delta & \Delta \\ & & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & & \\ \Delta & \Delta & & \end{pmatrix}$$

非対角項を含むハミルトニアンを対角化するのは難しいが、以下のようなユニタリ変換（S-W変換）を施した有効ハミルトニアンを定義し、これがブロック対角化されるような S を求めることができる。（2つ目の等式はHadamardの補題）

$$H_{\text{eff}} = e^{-S} H e^S = H + [H, S] + \frac{1}{2} [[H, S], S] + \frac{1}{3!} [[[H, S], S], S] + \cdots + \frac{1}{m!} [H, S]^{(m)}$$

S をTaylor級数 $S = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m S^{(m)}$ で表し、 λ の2次までの摂動で展開。

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= H_0 + \lambda(H_1 + H_2) + [H_0 + \lambda(H_1 + H_2), \lambda S^{(1)} + \lambda^2 S^{(2)}] + \frac{1}{2} [[H_0 + \lambda(H_1 + H_2), \lambda S^{(1)} + \lambda^2 S^{(2)}], \lambda S^{(1)} + \lambda^2 S^{(2)}] + \cdots \\ &\approx H_0 + \lambda(H_1 + H_2 + [H_0, S^{(1)}]) + \lambda^2 \left([H_1 + H_2, S^{(1)}] + \frac{1}{2} [[H_0, S^{(1)}], S^{(1)}] + [H_0, S^{(2)}] \right) \end{aligned}$$

λ の各次数で非ブロック対角項を打ち消すことでブロック対角化を行う。

Schrieffer-Wolff変換： 非対角項を含むハミルトニアンの対角化

$$\begin{pmatrix} \times & \\ & \times \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & \Delta \\ \Delta & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \Delta \\ \Delta & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \Delta \\ \Delta & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & \Delta \\ \Delta & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \\ & \times \end{pmatrix}$$

非ブロック対角項を奇数回かけると非ブロック対角になり、

非ブロック対角項を偶数回かけるとブロック対角になるため、

もし $S^{(m)}$ がブロック対角だと、 λ^m の各次数での非ブロック対角項を打ち消すことができないことがわかる。

$S^{(m)}$ は非ブロック対角であり、有効ハミルトニアンの非ブロック対角項は以下の式になる。

$$H_{\text{eff}}^{\text{off-diag}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} [H_0 + \lambda H_1, S]^{(2m+1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} [\lambda H_2, S]^{(2m)} \equiv 0$$

これが λ^m の各次数でゼロになるため、 $S^{(m)}$ を以下の式で求めることができる。この $S^{(m)}$ は一意に決まることが示されている [Winkler2003]。

$$[H_0, S^{(1)}] = -H_2$$

$$[H_0, S^{(2)}] = -[H_1, S^{(1)}]$$

$$[H_0, S^{(3)}] = -[H_1, S^{(2)}] - \frac{1}{3} [[H_2, S^{(1)}], S^{(1)}]$$

この結果、有効ハミルトニアンは以下のようにブロック対角される。ここで、 $\lambda \rightarrow 1$ とした。

$$H_{\text{eff}} = H_0 + H_1 + \frac{1}{2} [H_2, S^{(1)}] + \frac{1}{2} [H_2, S^{(2)}] + \dots$$

Jaynes-Cummingsハミルトニアンブロック対角化

アンザッツ（仮説） $S^{(1)}$ を求めるシステムチックな方法（ $\eta = [H_0, H_2]$ をアンザッツとする。）が[Haq2020]に示されている。

S-W変換によるブロック対角化の手順

1. アンザッツを $\eta = [H_0, H_2]$ とし、その各項の係数を A 、 B と置く。
2. $[H_0, \eta] = -H_2$ から、 A 、 B を求める。 $S^{(1)} = \eta$
3. $H_{\text{eff}} = H_0 + H_1 + \frac{1}{2}[H_2, S^{(1)}]$ を計算する。

S-W変換により、Jaynes-Cummingsハミルトニアンをブロック対角化する。

1. まず $\eta = [H_0, H_2]$ を求める。

$$\begin{aligned}\eta &= \left[\omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \omega_q \sigma^z, g(a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+) \right] \\ &= g(\omega_r - \omega_q) a^\dagger \sigma^- - g(\omega_r + \omega_q) a \sigma^+\end{aligned}$$

各項の係数を A 、 B と置き、 $\eta = A a^\dagger \sigma^- - B a \sigma^+$ とする。

2. $[H_0, \eta] = -H_2$ を満たす A 、 B を求める。

$$\begin{aligned}[H_0, \eta] &= A(\omega_r - \omega_q) a^\dagger \sigma^- + B(\omega_r - \omega_q) a \sigma^+ \\ -H_2 &= -g(a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+)\end{aligned}$$

$A = B = -g/\Delta$ ($\Delta = \omega_r - \omega_q$)と求まり、従って

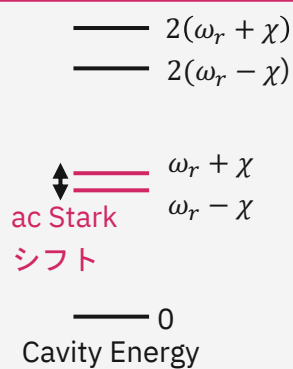
$$S^{(1)} = \eta = \frac{g}{\Delta} (a \sigma^+ - a^\dagger \sigma^-)$$

となる。

3. $H_{\text{eff}} = H_0 + H_1 + \frac{1}{2}[H_2, S^{(1)}]$ を計算する。
 H_{eff}

$$\begin{aligned}&= \omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \omega_q \sigma^z + \frac{1}{2} \left[g(a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+), \frac{g}{\Delta} (a \sigma^+ - a^\dagger \sigma^-) \right] \\ &= (\omega_r + \chi \sigma^z) a^\dagger a - \frac{1}{2} (\omega_q - \chi) \sigma^z\end{aligned}$$

共振器周波数 ω_r がac Starkシフトと呼ばれる量子ビットの状態に依存した周波数シフト $\chi \equiv g^2/\Delta$ を受け、これを量子状態の読み出しに利用できる。同時に量子ビットの側ではLambシフトと呼ばれる量子的真空場のゆらぎによる周波数シフトを示している。



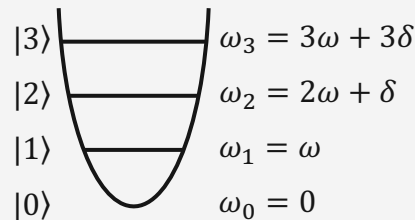
多準位のトランズモンへの拡張

多準位トランズモンのハミルトニアンは以下のように書ける。

$$H^{\text{tr}} = \omega_r a^\dagger a + \sum_j \omega_j |j\rangle\langle j| + g(a^\dagger c + ac^\dagger)$$

$$\omega_j = \left(\omega - \frac{\delta}{2}\right)j + \frac{\delta}{2}j^2 \quad \left(\begin{array}{l} \omega : \text{Qubit frequency} \\ \delta : \text{Anharmonicity} \end{array}\right)$$

$$c = \sum_j \sqrt{j+1} |j\rangle\langle j+1|$$



S-W変換を適用。

1. アンザッツ $\eta = [H_0, H_2]$ の計算。

$$\eta = g \left(\omega_r (a^\dagger c - ac^\dagger) + \sum_j \omega_j (a^\dagger c - ac^\dagger) \right) \equiv \sum_j (\alpha_j a^\dagger c - \alpha_j^* ac^\dagger)$$

2. $[H_0, \eta] = -H_2$ を満たす α_j, α_j^* を求める。

$$[H_0, \eta] = \sum_j (\omega_r - \omega - \delta j) (\alpha_j a^\dagger c + \alpha_j^* ac^\dagger)$$

$$-H_2 = -g(a^\dagger c + ac^\dagger)$$

$\alpha_j = \alpha_j^* = -g/(\omega_r - \omega - \delta j)$ と求まり、 $S^{(1)}$ が得られる。

$$S^{(1)} = \eta = \frac{g}{\omega_r - \omega - \delta j} (ac^\dagger - a^\dagger c)$$

3. $H_{\text{eff}}^{\text{tr}} = H_0 + H_1 + \frac{1}{2}[H_2, S^{(1)}]$ を計算する。

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}^{\text{tr}} &= \omega_r a^\dagger a + \sum_j \omega_j |j\rangle\langle j| \\ &+ \frac{1}{2} \left[g(a^\dagger c + ac^\dagger), \frac{g}{\omega_r - \omega - \delta j} (ac^\dagger - a^\dagger c) \right] \\ &= \left(\omega_r + \sum_j \frac{g^2(\omega_r - \omega + \delta)}{(\omega_r - \omega - \delta j)(\omega_r - \omega - \delta(j-1))} |j\rangle\langle j| \right) a^\dagger a \\ &+ \sum_j \left(j\omega + \frac{\delta}{2}(j-1)j + \frac{jg^2}{\omega - \omega_r + \delta(j-1)} \right) |j\rangle\langle j| \end{aligned}$$

cQEDでの量子ビットのドライブ

量子ビットをゲート操作するために、外部からマイクロ波のドライブパルスを印加することを考える。

共振器とドライブパルス (仮想的なドライブ共振器)との相互作用のハミルトニアン $(a^\dagger + a)(d^\dagger + d)$ を、 $d \sim \xi e^{-i\omega_d t}$ と回転波近似から以下のように変形[Bishop2010]。

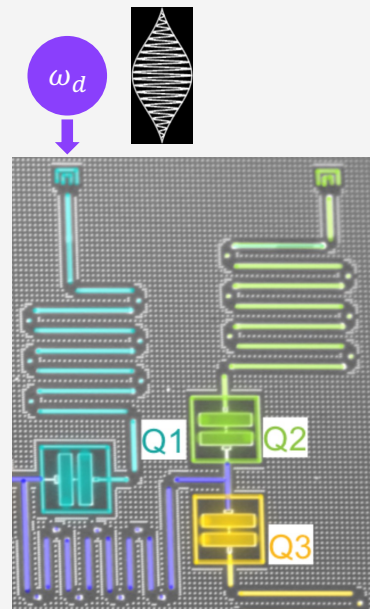
$$H^d(t) \sim \xi(t)(a^\dagger e^{-i\omega_d t} + a e^{i\omega_d t})$$

これをJaynes-Cummingsハミルトニアンに足し合わせ、

$$\begin{aligned} H &= H_{JC} + H^d \\ &= \omega_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \omega_q \sigma^z + g(a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+) + \xi(t)(a^\dagger e^{-i\omega_d t} + a e^{i\omega_d t}) \end{aligned}$$

ドライブ強度を示す遅い $\xi(t)$ を記述するため、 $U(t) = \exp[i\omega_d t(a^\dagger a - \sigma^z/2)]$ を用い ω_d (5~6GHz) の回転座標系(rotating frame)にユニタリ変換。ここで、 $\Delta_r = \omega_r - \omega_d$, $\Delta_q = \omega_q - \omega_d$ とした。

$$\begin{aligned} H &= U(H_{JC} + H_d)U^\dagger - iU\dot{U}^\dagger \\ &= \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \Delta_q \sigma^z + g(a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+) + \xi(t)(a^\dagger + a) \end{aligned}$$



時間依存したユニタリ変換

時間依存したSchrödinger方程式から、時間依存したユニタリ変換を求める。

$$i\frac{d}{dt}\psi = H\psi$$

$$i\frac{d}{dt}(U^\dagger U\psi) = HU^\dagger U\psi$$

$$i\dot{U}^\dagger(U\psi) + iU^\dagger \frac{d}{dt}(U\psi) = HU^\dagger U\psi$$

$$i\frac{d}{dt}\psi' = (UHU^\dagger - iU\dot{U}^\dagger)\psi'$$

$$\tilde{H} \equiv UHU^\dagger - iU\dot{U}^\dagger$$

cQEDでの量子ビットのドライブ

ドライブパルスが共振器でなく量子ビットに直接作用するように、Glauber変位演算子 $D(\alpha) = e^{\alpha(t)a^\dagger - \alpha^*(t)a}$ を用いてハミルトニアンを $\tilde{H} = D^\dagger H D - iD^\dagger \dot{D}$ と書き換える。（ D は、 $D^\dagger a^{(\dagger)} D = a^{(\dagger)} + \alpha^{(*)}$ のように演算子を $\alpha^{(*)}$ だけ変位させる）
 $-i\dot{\alpha}(t) + \Delta_r \alpha(t) + \xi(t) = 0$ となるような $\alpha(t)$ を選ぶと、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \Delta_q \sigma^z + g(a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+) + \frac{1}{2} (\Omega^*(t) \sigma^- + \Omega(t) \sigma^+) \\ &= \Delta_r a^\dagger a - \frac{1}{2} \Delta_q \sigma^z + g(a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+) + \boxed{\frac{1}{2} \Omega(t) \sigma^x} \quad \times \text{軸回転}\end{aligned}$$

ここで、 $\Omega(t)$ を実数とし、 $\sigma^- + \sigma^+ = \sigma^x$ とした。

$\Omega(t) = 2g\alpha(t)$ はRabi周波数であり、量子ビットのx軸回転に寄与する。

前に求めたアンザッツ $S^{(1)}$ を用いて、 \tilde{H} にS-W変換を施しブロック対角化。

$$[\tilde{H}^d, S^{(1)}] = \left[\frac{\Omega(t)}{2} \sigma^x, \frac{g}{\Delta} (a \sigma^+ - a^\dagger \sigma^-) \right] = \frac{g\Omega(t)}{2\Delta} (a + a^\dagger) \sigma^z$$

$$\tilde{H}_{\text{eff}} = \tilde{H}_0 + \frac{1}{2} [\tilde{H}_2, S^{(1)}] + \tilde{H}^d + \frac{1}{2} [\tilde{H}^d, S^{(1)}] = \left(\Delta_r + \frac{g^2}{\Delta} \sigma^z \right) a^\dagger a - \boxed{\frac{1}{2} \left(\Delta_q - \frac{g^2}{\Delta} \right) \sigma^z} + \frac{\Omega(t)}{2} \sigma^x + \boxed{\frac{g\Omega(t)}{4\Delta} (a + a^\dagger) \sigma^z}$$

余計なz回転（第2,4項）を除去するために、ドライブ周波数をLambシフトした量子ビット周波数に合わせる（ $\omega_d = \omega_q - g^2/\Delta$ ）必要がある。分散結合領域（dispersive regime: S-W変換によるブロック対角化、量子非破壊測定を可能にする）では $\Delta \gg g$ となるため、第4項は無視できる。

交差共鳴(Cross Resonance)ゲート

CNOTの元となるCRゲート：量子ビット2の周波数 $\tilde{\omega}_2$ のマイクロ波で量子ビット1をドライブ。Control Q1 → Target Q2

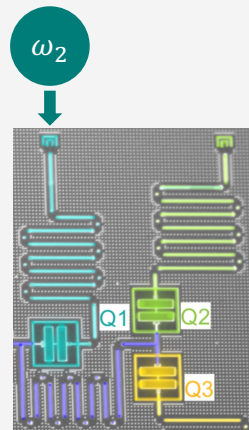
$$\tilde{H}^d(t) = \frac{\Omega(t)}{2} (\sigma_1^+ e^{-i\tilde{\omega}_2 t} + \sigma_1^- e^{i\tilde{\omega}_2 t})$$

2つの量子ビットとその相互作用を表すハミルトニアン $\tilde{H}^{2Q} = -\frac{\tilde{\omega}_1}{2} \sigma_1^z - \frac{\tilde{\omega}_2}{2} \sigma_2^z + J(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+)$ に対するアンザッツ $S^{(1)} = -\frac{J}{\Delta_{12}} (\sigma_1^+ \sigma_2^- - \sigma_1^- \sigma_2^+)$ を用いて、 $\tilde{H}^{CR} = \tilde{H}^{2Q} + \tilde{H}^d$ にS-W変換を施し、 $\tilde{\omega}_2$ の回転座標系に移ると、有効交差共鳴ハミルトニアンが得られる。

$$\tilde{H}_{\text{eff}}^{CR} = -\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2}{2} \sigma_1^z + \frac{\Omega(t)}{2} \left(\sigma_2^x - \boxed{\frac{J}{2\Delta_{12}} \sigma_1^z \sigma_2^x} \right)$$

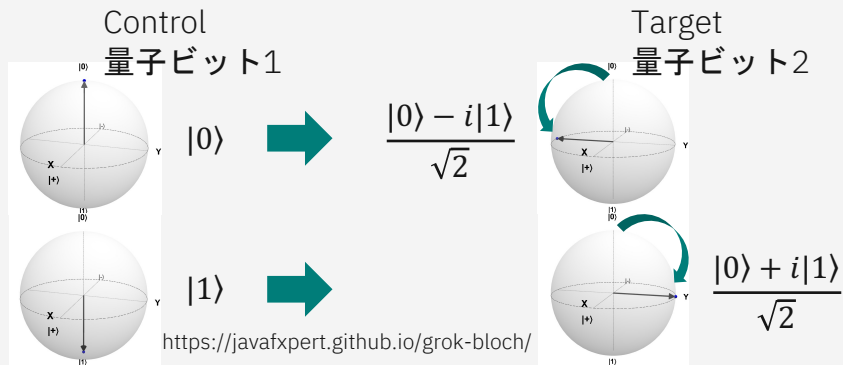
第1項は、量子ビット1へのStarkシフトによるZI相互作用、第2項は、量子ビット2の無条件IX回転、第3項は、エンタングルメントを生じるZX相互作用を示す[Chow2011]。

量子ビット1を $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の重ね合わせとし、x軸周りの $\pi/2$ 回転に相当するCRゲートをかけた時に最大のエンタングル状態になる。



$$ZX_{\pi/2} = \exp\{-i(\pi/4)ZX\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-i} & 0 & 0 \\ \boxed{-i} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{i} \\ 0 & 0 & \boxed{i} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

同じx軸回転でも、量子ビット1の状態により回転方向が逆向きに。



<https://javafxpert.github.io/grok-bloch/>

まとめ

- Circuit QEDはCavity QEDのアナロジー：安定な回路素子で、かつ緩和に対して人工原子—マイクロ波光子の結合が大きいという利点がある。
- Schrieffer-Wolff変換により、非対角項を含むハミルトニアンがブロック対角化できる。
- Jaynes-Cummingsハミルトニアンをブロック対角化した結果、共振器の周波数は量子ビットの状態に依存したac Starkシフト $\chi \equiv g^2/\Delta$ を受けることがわかり、これを量子状態の読み出しに利用できる。
- 多準位のトランズモンの場合も、同様にS-W変換でブロック対角化できる。
- 外部からマイクロ波パルスをマイクロ波共振器経由で量子ビットに印加すると、量子ビットの状態がx軸回転する。
- 量子ビット1に量子ビット2の周波数のマイクロ波を印加すると、量子ビット1の状態に依存して量子ビット2のx軸回転を行う交差共鳴ゲートが実現し、エンタングル状態になる。

参考文献

- [Blais2004] Alexandre Blais, Ren-Shou Huang, Andreas Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation,” Phys. Rev. A 69, 062320 (2004).
- [Goto2020] 後藤隼人, “マイクロ波光子を用いた量子計算,” レーザー研究48巻9号(2020).
- [Winkler2003] Roland Winkler, “Spin–Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems,” Springer (2003).
- [Haq2020] Rukhsan Ul Haq and Keshav Singh, “A systematic method for Schrieffer-Wolff transformation and its generalizations,” arXiv:2004.06534 (2020).
- [Bishop2010] Lev S. Bishop, “Circuit Quantum Electrodynamics,” PhD thesis, Yale University, (2010).
- [Chow2011] Jerry M. Chow, A. D. Corcoles, Jay M. Gambetta, Chad Rigetti, B. R. Johnson, John A. Smolin, J. R. Rozen, George A. Keefe, Mary B. Rothwell, Mark B. Ketchen, and M. Steffen, “Simple All-Microwave Entangling Gate for Fixed-Frequency Superconducting Qubits,” Phys. Rev. Lett. 107, 080502 (2011).
- 越野和樹, “共振器量子電磁力学”

Qiskit Textbook 6.4 Circuit Quantum Electrodynamics

英文 : <https://qiskit.org/textbook/ch-quantum-hardware/cQED-JC-SW.html>

和訳 : <https://qiskit.org/textbook/ja/ch-quantum-hardware/cQED-JC-SW.html>