日本語訳『Qiskit Textbook』
勉強会 第2章（2.1-2.2）

Hironobu Takamatsu
Associate Certified Architect

自己紹介

名前：高松洋亘

所属： NO.3 FSS CTL3

仕事：

- Technical Solution Architect (TSA、旧CTL、旧旧CITA)
- 金融のお客様（主に大手信託銀行様）担当のアーキテクト

保有資格

- CSM (Certified ScrumMaster)
- AWS Solution Architect Associate
- AWS Solution Architect Professional
- Red Hat Certified Specialist in Openshift Administration

はじめに

Qisikit Textbook目次

Qiskit Textbook
https://qiskit.org/textbook/preface.html

本日の範囲

Qiskit Textbook
https://qiskit.org/textbook/preface.html

2.1
Introduction
はじめに

量子ビット操作と
量子ゲート

- 量子ビットを使用して計算するためには量子ビットの操作が必要
- 量子ビットの操作には量子ゲートを使用する
- 一般的にはハードウェアに実装できる量子ゲートは、1量子ビットまたは2量子ビットの操作が可能なもの
- 量子ビットに対する任意の操作は量子ゲートを組み合わせることで実現可能

ビット数	古典コンピュータ（論理ゲート）	量子コンピュータ（量子ゲート）	
1ビット	・NOTゲート	・Xゲート ・Yゲート ・Zゲート ・Hゲート（アダマール） ・Rゲート	・Iゲート ・Sゲート ・Tゲート ・Uゲート ※「1.4 Single Qubit Gates」参照
2ビット	・ANDゲート ・ORゲート	・CNOTゲート など	

2.2
Multiple Qubits and Entangled States
複数量子ビットともつれ状態

目次

Contents

2.2.1 Representing Multi-Qubit States
複数量子ビット状態の表現

量子ビットの状態ベクトル表現

- 1量子ビットの状態ベクトル

$$|a> = a_0|0> + a_1|1> = a_0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}$$

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$$

- 2量子ビットの状態ベクトル

$$|a> = a_{00}|00> + a_{01}|01> + a_{10}|10> + a_{11}|11> = a_{00}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + a_{01}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + a_{10}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + a_{11}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{00}\\a_{01}\\a_{10}\\a_{11}\end{bmatrix}$$

$$|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 = 1$$

観測した結果11が得られる確率

観測した結果10が得られる確率

観測した結果01が得られる確率

観測した結果00が得られる確率

状態ベクトルのテンソル積

- 2量子ビットの状態ベクトルは各量子ビットの状態ベクトルのテンソル積で表現できる

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$|ab\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \\ \\ a_1 \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{bmatrix}$$

状態ベクトルの次元

- 1量子ビット：　2次元
- 2量子ビット：　4次元
- 3量子ビット：　8次元

・・・

- n量子ビット：　2^n次元
- 20量子ビット：　2^{20} = 1,048,576個の状態について計算が必要

→ この規模ならPCでも計算可能

- 100量子ビット：　2^{100} = 1.27 x 10^{30}個の状態について計算が必要

→スーパーコンピュータでも計算が困難

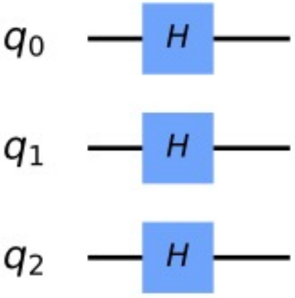
$$|abc\rangle = \begin{bmatrix} a_0b_0c_0 \\ a_0b_0c_1 \\ a_0b_1c_0 \\ a_0b_1c_1 \\ a_1b_0c_0 \\ a_1b_0c_1 \\ a_1b_1c_0 \\ a_1b_1c_1 \end{bmatrix}$$

例：3量子ビットの場合

接頭辞	記号	1000^m	10^n
ヨタ (yotta)	Y	1000^8	10^{24}
ゼタ (zetta)	Z	1000^7	10^{21}
エクサ (exa)	E	1000^6	10^{18}
ペタ (peta)	P	1000^5	10^{15}
テラ (tera)	T	1000^4	10^{12}
ギガ (giga)	G	1000^3	10^9
メガ (mega)	M	1000^2	10^6
キロ (kilo)	k	1000^1	10^3
ヘクト (hecto)	h		10^2
デカ (deca)	da		10^1

Wikipedia
https://ja.wikipedia.org/wiki/ペタ

3量子ビットの各ビットを アダマール・ゲートで変換した場合



$$|q_0> = |q_1> = |q_2> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$|q_0q_1> = |q_0> \otimes |q_1> = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\1\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$|a\rangle = \begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{bmatrix}b_0\\b_1\end{bmatrix}$$

$$|ab\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{bmatrix}a_0\times\begin{bmatrix}b_0\\b_1\end{bmatrix}\\a_1\times\begin{bmatrix}b_0\\b_1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_0b_0\\a_0b_1\\a_1b_0\\a_1b_1\end{bmatrix}$$

$$|q_0q_1q_2> = |q_0q_1> \otimes |q_2> = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\1\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\1\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\1\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}$$

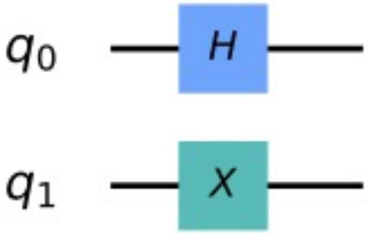
←q0=0, q1=0, q2=0の確率
←q0=0, q1=0, q2=1の確率
←q0=0, q1=1, q2=0の確率
←q0=0, q1=1, q2=1の確率
←q0=1, q1=0, q2=0の確率
←q0=1, q1=0, q2=1の確率
←q0=1, q1=1, q2=0の確率
←q0=1, q1=1, q2=1の確率

2.2.2 Single Qubit Gates on Multi-Qubit Statevectors

複数量子ビット状態ベクトル上の単一量子ビットゲート

2つの量子ビットに同時にゲートを適用する場合（例：XゲートとHゲート）

- 2つの量子ビットへのゲートの同時適用は、各ゲートのテンソル積で表現できる



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X|q_1\rangle \otimes H|q_0\rangle = (X \otimes H)|q_1 q_0\rangle$$

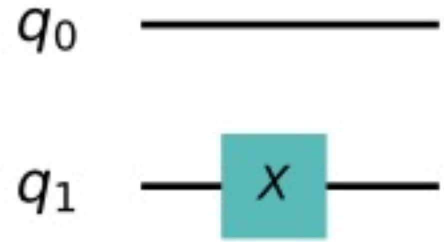
$$X \otimes H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X \otimes H = \begin{bmatrix} 0 & H \\ H & 0 \end{bmatrix}}$$

2つの量子ビットのうち1つの量子ビットに対してのみゲートを適用する場合

- 2つの量子ビットのうち1つの量子ビットに対してのみゲートを適用する場合は、Iゲートとのテンソル積で表現できる



$$X|q_1 > \otimes\, I|q_0 > = (X \otimes I)|q_1 q_0 >$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

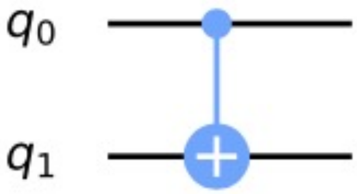
$$X \otimes I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}}$$

2.2.3 Multi-Qubit Gates

複数量子ビットゲート

C-NOTゲートの行列表現

- q0が0の時はq1はそのまま、q0が1の時はq1を反転させるゲート
- q0を制御ビット、q1を標的ビットと呼ぶ
- CNOTゲートの行列表現は状態ベクトルにてどの順番でq0、q1の状態を記述するかに依存



q0	q1	CNOT	q0’	q1’
|0>	|0>	→	|0>	|0>
|0>	|1>	→	|0>	|1>
|1>	|0>	→	|1>	|1>
|1>	|1>	→	|1>	|0>

q1（標的ビット）が反転

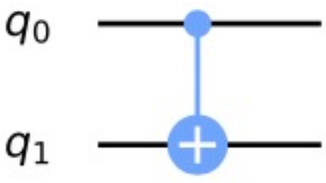
$$\mathrm{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

or

$$\mathrm{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C-NOTゲート（CNOT|q0q1>の場合）

- 状態ベクトルを|q0q1>と記述した場合のCNOTゲートの行列表現は以下のとおり



$$|q_0> = \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix}$$

$$|q_1> = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix}$$

$$|q_0 q_1> = \begin{bmatrix} q_{00}q_{10} \\ q_{00}q_{11} \\ q_{01}q_{10} \\ q_{01}q_{11} \end{bmatrix}$$

$$CNOT|q_0 q_1> = CNOT \begin{bmatrix} q_{00}q_{10} \\ q_{00}q_{11} \\ q_{01}q_{10} \\ q_{01}q_{11} \end{bmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} q_{00}q_{10} \\ q_{00}q_{11} \\ q_{01}q_{11} \\ q_{01}q_{10} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow q0=0,\ q1=0\text{の確率} \\ \leftarrow q0=0,\ q1=1\text{の確率} \\ \leftarrow q0=1,\ q1=0\text{の確率} \\ \leftarrow q0=1,\ q1=1\text{の確率} \end{array} \end{array}$$

↑

上記を満たすCNOTは以下の通り

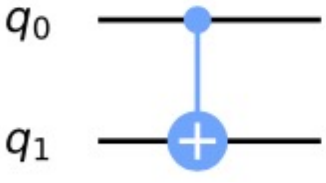
↓

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

q0	q1	CNOT	q0’	q1’
|0>	|0>	→	|0>	|0>
|0>	|1>	→	|0>	|1>
|1>	|0>	→	|1>	|1>
|1>	|1>	→	|1>	|0>

C-NOTゲート（CNOT|q1q0>の場合）
※Qiskit Textbookはこちらを使用

- 状態ベクトルを|q1q0>と記述した場合のCNOTゲートの行列表現は以下のとおり



$$|q_0> = \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix}$$

$$|q_1> = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix}$$

$$|q_1 q_0> = \begin{bmatrix} q_{10}q_{00} \\ q_{10}q_{01} \\ q_{11}q_{00} \\ q_{11}q_{01} \end{bmatrix}$$

$$CNOT|q_1 q_0> = CNOT \begin{bmatrix} q_{10}q_{00} \\ q_{10}q_{01} \\ q_{11}q_{00} \\ q_{11}q_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{10}q_{00} \\ q_{11}q_{01} \\ q_{11}q_{00} \\ q_{10}q_{01} \end{bmatrix}$$

←q1=0, q0=0の確率
←q1=0, q0=1の確率
←q1=1, q0=0の確率
←q1=1, q0=1の確率

↑

上記を満たすCNOTは以下の通り

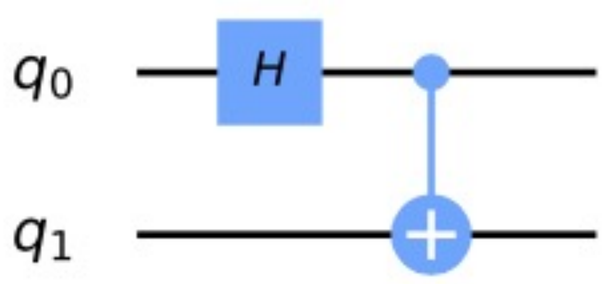
↓

$$\mathrm{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

q0	q1	CNOT	q0’	q1’
|0>	|0>	→	|0>	|0>
|0>	|1>	→	|0>	|1>
|1>	|0>	→	|1>	|1>
|1>	|1>	→	|1>	|0>

重ね合わせ状態にC-NOTゲートを適用するとどうなる？

- q0にHゲート（アダマール・ゲート）を適用し重ね合わせ状態にする
- 重ね合わせ状態のq0を制御ビットとしてq0とq1のCNOTを取る



$$CNOT\,|q_1q_0 = CNOT\,|0+> = CNOT\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}CNOT\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}}$$

↑
もつれ状態

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{CNOT} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

もつれ状態

- ベル状態
- 1つの量子を観測すると、もう1つの量子に関する状態を知ることができ、同時に重ね合わせ状態は消滅する。
- 不気味な遠隔作用
- もつれ状態を応用することで光速を超える速度での通信が可能？

  → 観測結果はランダムで事前に知ることができないため不可能（通信不可定理）

ベル状態

$$CNOT\,|q_1 q_0\rangle = CNOT\,|0+\rangle = CNOT \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} CNOT \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}} \rightarrow \boxed{\mathrm{CNOT}|0+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)}$$

- 観測した結果q0=0だった場合、必ずq1=0
- 観測した結果q0=1だった場合、必ずq1=1
- 観測した結果q1=0だった場合、必ずq0=0
- 観測した結果q1=1だった場合、必ずq0=1

q1=0, q0=0が観測される確率1/2
q1=0, q0=1が観測される確率0
q1=1, q0=0が観測される確率0
q1=1, q0=1が観測される確率1/2

参考情報

- 古典プログラマ向け 量子プログラミング入門 - 量子ゲート編 -
- 有限会社ラング・エッジ
- 宮地直人
- https://www.ossal.org/qc/Sal-QC-Prog-1st.pdf