Programmation dynamique

A. Kadiri

Mundiapolis

2ème année - Cycle Ingénieur

2015-2016

Exemple : problème du sac à dos

$$(PSD) \begin{cases} \max \ z = c_1 x_1 + \ldots + c_N x_N \\ a_1 x_1 + \ldots + a_N x_N \leq V_{\max} \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Considérons l'instance du (PSD) avec les données suivantes :

- N=3 objets ;
- Profits : $c_1 = 11$; $c_2 = 8$; $c_3 = 5$;
- Volumes : $a_1 = 7$; $a_2 = 6$; $a_3 = 4$;
- Volume total : $V_{\max} = 10$.

$$(P)\quad \begin{cases} \max\ 11x_1 + 8x_2 + 5x_3 \\ 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

Relation de récurrence

On pose :

$$P(n,\ v)\quad \begin{cases} \max\ c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq v \\ x_i \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

avec $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$; $v \in \{0, 1, \ldots, V_{\max}\}$.

$Z(n,\ v)$: objectif optimal de $P(n,\ v)$.

Par exemple,

- pour $n = 1$ et $v = 5$, on a :

$$P(1,\,5) \quad \begin{cases} \max\ 11x_1 \\ 7x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,\,1\} \end{cases}$$

Valeur optimale de l'objectif : $Z(1,\,5)$.

- pour $n = 2$ et $v = 9$, on a :

$$P(2,\,9) \quad \begin{cases} \max\ 11x_1 + 8x_2 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,\,1\} \end{cases}$$

Valeur optimale de l'objectif : $Z(2,\,9)$.

- La résolution du problème P se ramène à résoudre $P(3, 10)$:

$$\begin{cases} \max\ 11x_1 + 8x_2 + 5x_3 \\ 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

- On va calculer $Z(3, 10)$ à l'aide d'une relation de récurrence.
- Etape $n - 1$: on a pris les objets 1, 2, ..., n-1.
- Etape n : on décide si on prend l'objet n ou non.

- Si on prend l'objet n c-à-d $x_n = 1$ alors

$$Z(n, v) = Z(n - 1, v - a_n) + c_n$$

- Si on ne prend pas l'objet n c-à-d $x_n = 0$ alors

$$Z(n, v) = Z(n - 1, v)$$

- Donc $Z(n, v)$ peut s'écrire :

$$Z(n, v) = \max_{x_n \in \{0,1\}} \{Z(n - 1, v - a_n x_n) + c_n x_n\}$$

avec $Z(0, v) = 0 \quad$ pour tout $v = 0, 1, \ldots, V_{\max}$.

On a aussi

$Z(n, 0) = 0 \quad$ pour tout $n = 0, 1, \ldots, N$.

(Cas $v = 0$).

Par exemple, si $n = 2$ et $v = 9$, alors on a le problème $P(2, 9)$:

$$P(2,9) \quad \begin{cases} \max\ 11x_1 + 8x_2 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a un volume $v = 9$ et on doit décider si on prend l'objet 2 ou non.

- Si on ne prend pas l'objet 2, alors $x_2 = 0$ et le problème $P(2, 9)$ devient :

$$\begin{cases} \max\ 11x_1 \\ 7x_1 \leq 9 \\ x_1 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

qui est équivalent au problème $P(1, 9)$ et alors $Z(2, 9) = Z(1, 9)$.

- Si on prend l'objet 2, alors $x_2 = 1$ et on a :

$$P(2,9) \quad \begin{cases} \max\ 11x_1 + 8x_2 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ x_1 \in \{0,\ 1\} \end{cases} \iff \begin{cases} \max\ 11x_1 + 8 \\ 7x_1 + 6 \leq 9 \\ x_1 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \max\ 11x_1 + 8 \\ 7x_1 \leq 3 \\ x_1 \in \{0,\ 1\} \end{cases} \iff \begin{cases} 8 + \max\ 11x_1 \\ 7x_1 \leq 3 \\ x_1 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

Donc $Z(2,9) = 8 + Z(1,3)$.

$Z(1,3)$ étant le maximum de la fonction objectif du problème :

$$P(1,3) \quad \begin{cases} \max\ 11x_1 \\ 7x_1 \leq 3 \\ x_1 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

$Z(2,\,9)$ est le maximum de l'objectif de $P(2,9)$ donc cela correspond au maximum entre le cas où on prend l'objet 2 ($x_2 = 1$) et le cas où on le prend pas ($x_2 = 0$) :

$$Z(2,\,9) = \max \begin{cases} Z(1,9) & (x_2 = 0) \\ Z(1,3) + 8 & (x_2 = 1) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$Z(2,\,9) = \max \begin{cases} Z(1,9) & (x_2 = 0) \\ Z(1,9-6) + 8 & (x_2 = 1) \end{cases}$$

Ainsi, pour $n = 2$, $a_2 = 6$, $c_2 = 8$ et $v = 9$, on vérifie bien que :

$$Z(2,\,v) = \max \begin{cases} Z(1,v) & (x_2 = 0) \\ Z(1,v-a_2) + c_2 & (x_2 = 1) \end{cases}$$

ou d'une autre manière : $Z(2,9) = \max\limits_{x_2 \in \{0,1\}} \{Z(1, v - a_2x_2) + c_2x_2\}$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $Z(n, v)$ pour $n = 0, 1, 2, 3$ et $v = 0, 1, \dots, 10$. $Z(n, v)$ étant calculée par la relation de récurrence.

$n \backslash v$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	11	11	11	11
2	0	0	0	0	0	0	8	11	11	11	11
3	0	0	0	0	5	5	8	11	11	11	13

La solution optimale est donnée par $Z(3, 10) = 13$.

Pour retrouver les objets faisant partie de la solution optimale, on procède comme suit :

$$Z(3,\ 10) = \max \begin{cases} Z(2, 10) & (x_3 = 0) \\ Z(2, 6) + 5 & (x_3 = 1) \end{cases} = \max \begin{cases} 11 \\ 8 + 5 = 13 \end{cases}$$

qui est donné par $Z(2, 6) + 5$ qui correspond à $x_3 = 1$.

Donc on prend l'objet 3.

$$Z(2,6) = 8 \;=\; \max \begin{cases} Z(1,6) & (x_2 = 0) \\ Z(1,6-6)+8 & (x_2 = 1) \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} 0 \\ Z(1,0)+8 = 8 \end{cases}$$

Le maximum est donné par $Z(1,0)+8$ qui correspond à $x_2 = 1$.
Donc on prend l'objet 2.

$Z(1,0) = 0$. Donc on ne prend pas l'objet 1.

En conclusion, la solution optimale est la suivante :

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$ et $z^* = Z(3,10) = 13$.