Exercices - Méthodes exactes
Corrigé

Exercice 1

$$(P_1)\begin{cases}\max\ z = 2x_1 + 3x_2\\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35\\ 4x_1 + 9x_2 \leq 36\\ x_1, x_2 \geq 0\\ x_1, x_2 \ \text{entiers}\end{cases}$$

On obtient deux solutions optimales :

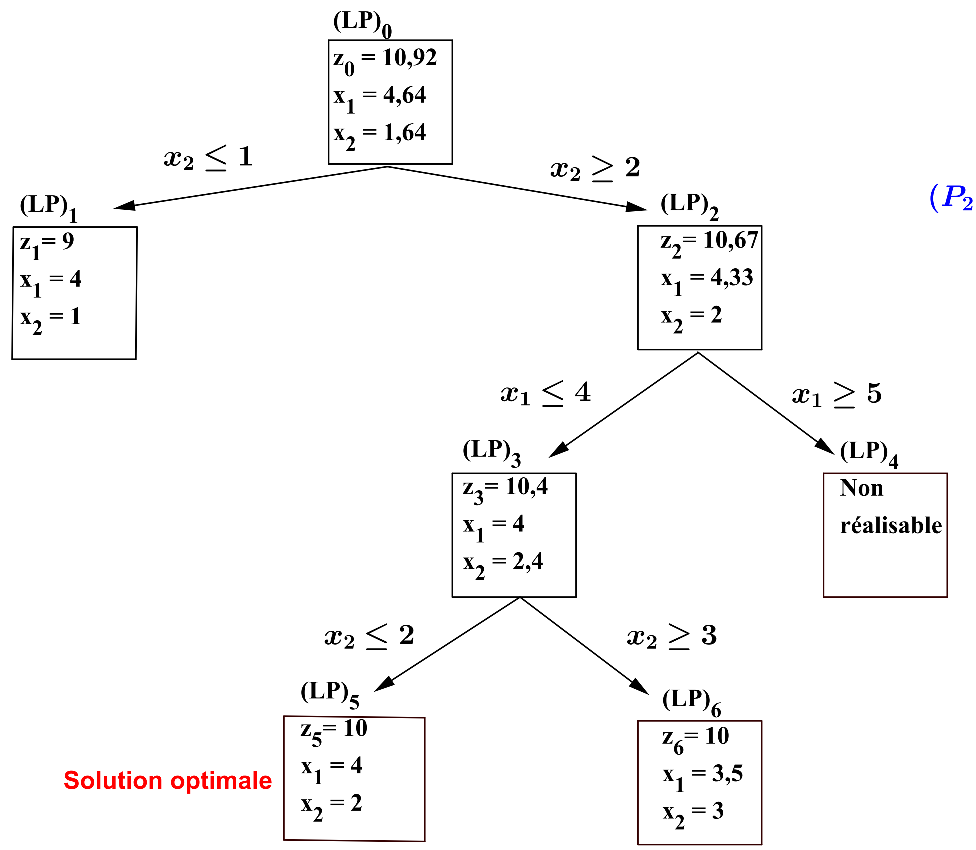
$$x_1 = 4\ ;\ x_2 = 2\ ;\ z = 14$$

$$x_1 = 7\ ;\ x_2 = 0\ ;\ z = 14$$

$$(P_2)\begin{cases}\max\ z = 2x_1 + x_2\\ x_1 - x_2 \leq 3\\ 6x_1 + 5x_2 \leq 36\\ x_2 \leq 4\\ x_1, x_2 \geq 0\\ x_1, x_2 \ \text{entiers}\end{cases}$$

Solution optimale :

$$x_1 = 4\ ;\ x_2 = 2\ ;\ z = 10$$



$$(P_2)\begin{cases}\max\ z = 2x_1 + x_2\\ x_1 - x_2 \leq 3\\ 6x_1 + 5x_2 \leq 36\\ x_2 \leq 4\\ x_1, x_2 \geq 0\\ x_1, x_2 \ \text{entiers}\end{cases}$$

$$(P_3) \begin{cases} \max \ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \ \text{entiers} \end{cases}$$

Résolution de la relaxation linéaire :

$$(LP)_0 \begin{cases} \max \ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Droites des contraintes :

D_1 : $5x_1 + 8x_2 = 40$ passe par les points : $(8\,,\,0)$; $(0\,,\,5)$

D_2 : $-2x_1 + 3x_2 = 9$ passe par les points : $(3\,,\,5)$; $(0\,,\,3)$

Droites d'isovaleur :

Δ_k : $x_1 + 4x_2 = k \Longrightarrow x_2 = -\dfrac{-1}{4}x_1 + \dfrac{k}{4}$. Pente $= \dfrac{-1}{4}$

Δ_0 : $k = 0 \Longrightarrow x_1 + 4x_2 = 0 \Longrightarrow x_2 = \dfrac{-x_1}{4}$

$x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0$; $x_1 = 4 \Longrightarrow x_2 = -1$.

Δ_0 passe par les points $(0\,,\,0)$ et $(4\,,\,-1)$.

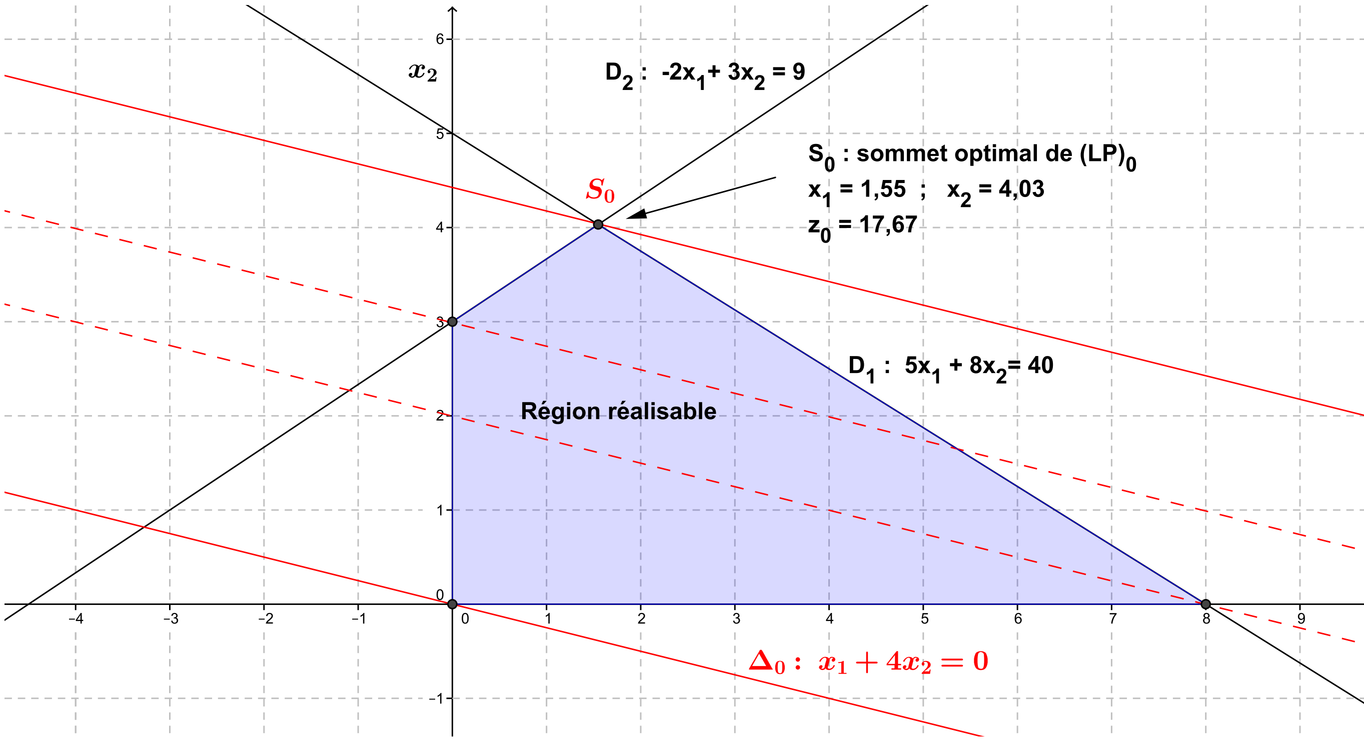
En appliquant la méthode graphique, le sommet optimal de $(LP)_0$ (noté S_0) est l'intersection des deux droites D_1 et D_2. Ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 = 40 \\ -2x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$

En résolvant le système précédent, on trouve :

$x_1 = 1,55$ et $x_2 = 4,03$.

La valeur optimale est $z_0 = x_1 + 4x_2 = 17,67$ qui est une borne supérieure.



Séparation de $(LP)_0$:

On branche sur la variable la plus éloignée d'un entier naturel (x_1) : $x_1 \leq 1$ et $x_1 \geq 2$.

- $x_1 \leq 1 \longrightarrow (LP)_1$:

$$(LP)_1 \begin{cases} \max\ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale de $(LP)_1$ est le point S_1 intersection de la droite d'équation $x_1 = 1$ et la droite D_2 : $-2x_1 + 3x_2 = 9$.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = 11/3 = 3,67$$

La valeur optimale de l'objectif est $z_1 = 15,67$.

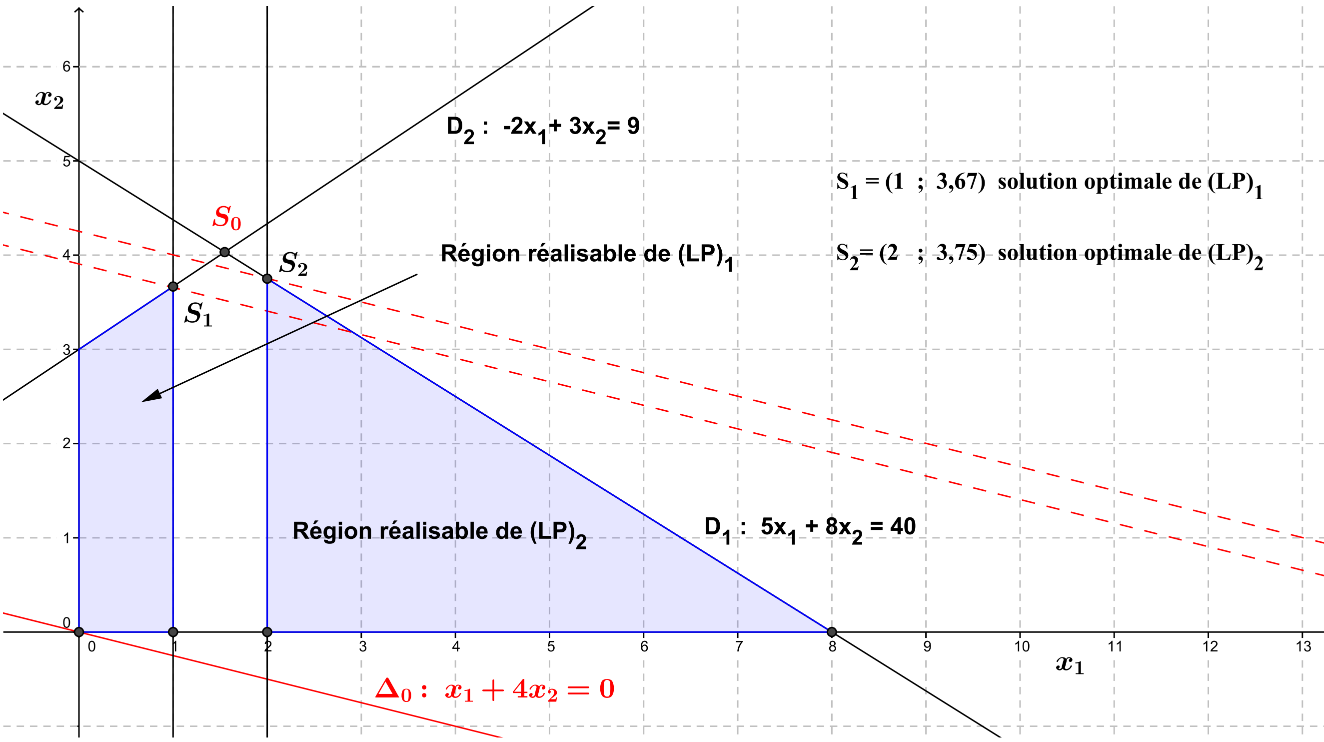
- $x_1 \geq 2 \longrightarrow (LP)_2$:

$$(LP)_2 \begin{cases} \max\ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale de $(LP)_2$: S_2 intersection de la droite d'équation $x_1 = 2$ et la droite D_1 : $5x_1 + 8x_2 = 40$.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ 5x_1 + 8x_2 = 40 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 30/8 = 3,75$$

Valeur optimale de l'objectif : $z_2 = 17$.



Séparation de $(LP)_1$:

On branche sur x_2 : $x_2 \leq 3$ et $x_2 \geq 4$.

- $x_2 \leq 3 \longrightarrow (LP)_3$:

$$(LP)_3 \begin{cases} \max \ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale de $(LP)_3$: S_3 intersection de la droite $x_1 = 1$ et la droite $x_2 = 3$.

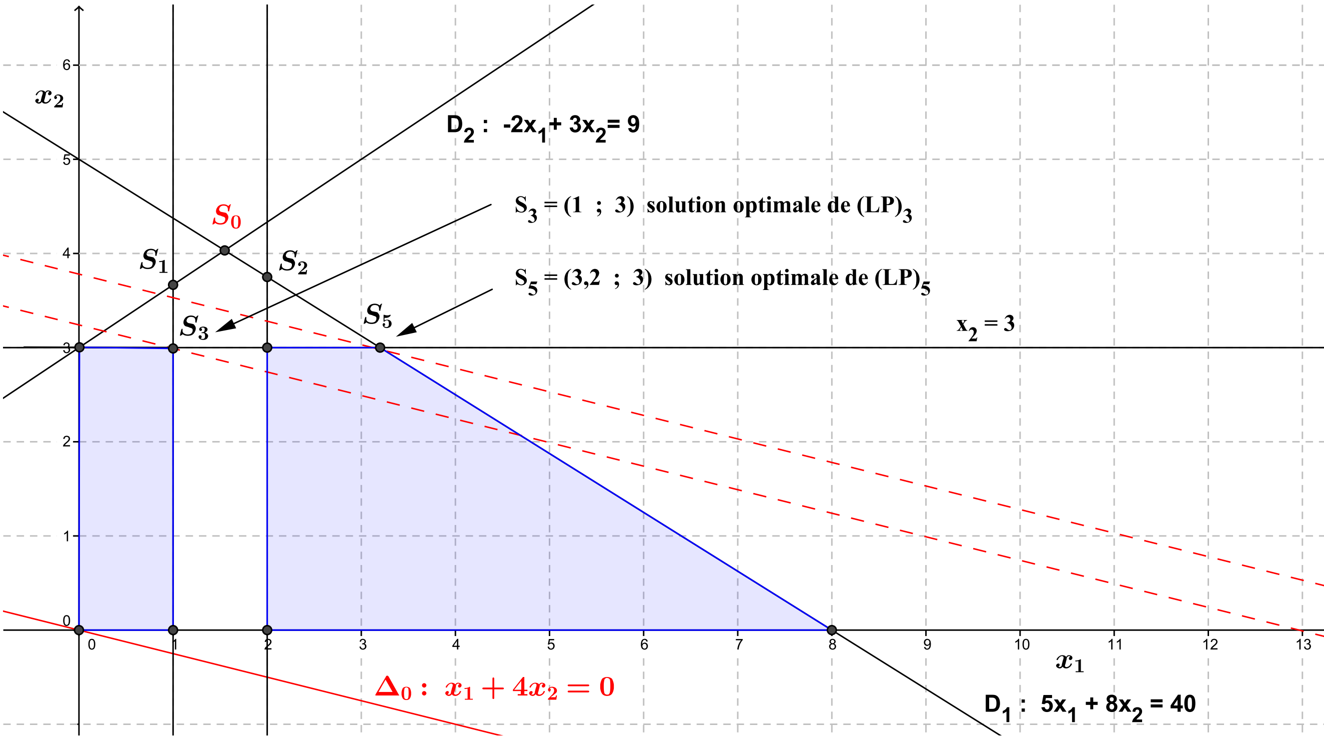
Donc $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $z_3 = 13$.

On a une solution réalisable (x_1 et x_2 entiers) et une première borne inférieure $z_3 = 13$.

- $x_2 \geq 4 \longrightarrow (LP)_4$:

$$(LP)_4 \begin{cases} \max\ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ce problème est non réalisable (pour $x_2 \geq 4$, on sort de la région réalisable).



Séparation de $(LP)_2$:

On branche sur x_2 : $x_2 \leq 3$ et $x_2 \geq 4$.

- $x_2 \leq 3 \longrightarrow (LP)_5$:

$$(LP)_5 \begin{cases} \max\ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale de $(LP)_5$: S_5 intersection de la droite d'équation $x_2 = 3$ et la droite D_1 : $5x_1 + 8x_2 = 40$.

$x_2 = 3 \Longrightarrow x_1 = (40 - 8x_2)/5 = 3,2$. Donc : $x_1 = 3,2$; $x_2 = 3$; $z_5 = 15,2$.

- $x_2 \geq 4 \longrightarrow (LP)_6$: non réalisable.

Séparation de $(LP)_5$:

On branche sur x_1 : $x_1 \leq 3$ et $x_1 \geq 4$.

- $x_1 \leq 3 \longrightarrow (LP)_7$:

$$(LP)_7 \begin{cases} \max\ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale de $(LP)_7$: S_7 intersection de la droite d'équation $x_1 = 3$ et la droite $x_2 = 3$.

Donc : $x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad ; \quad z_7 = 15$.

Solution réalisable et nouvelle borne inf $z_7 = 15$.

- $x_1 \geq 4 \longrightarrow (LP)_8$:

$$(LP)_8 \begin{cases} \max\ z = x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale de $(LP)_8$:

S_8 intersection de la droite d'équation $x_1 = 4$ et la droite D_1 : $5x_1 + 8x_2 = 40$.

$x_1 = 4 \Longrightarrow x_2 = (40 - 5x_1)/8 = 2,5$.

$x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = 2,5 \quad ; \quad z_8 = 14$.

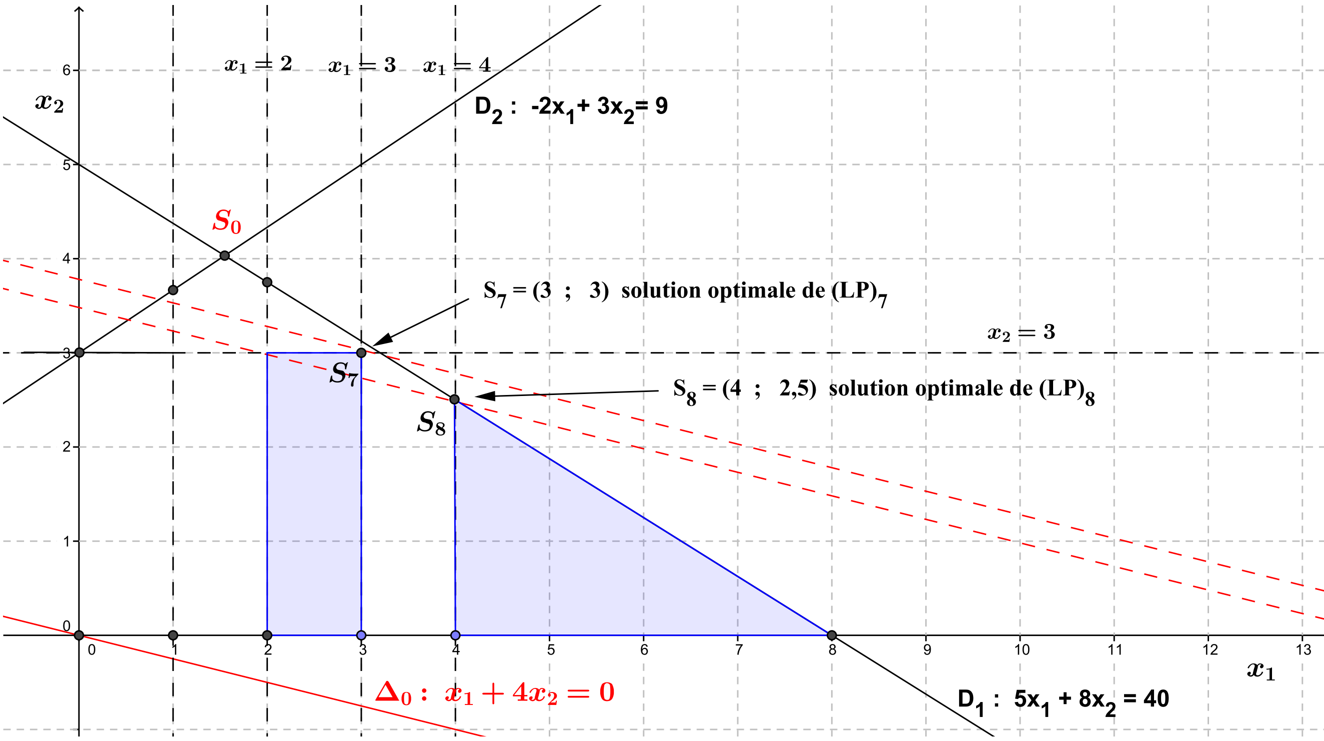
Conclusion :

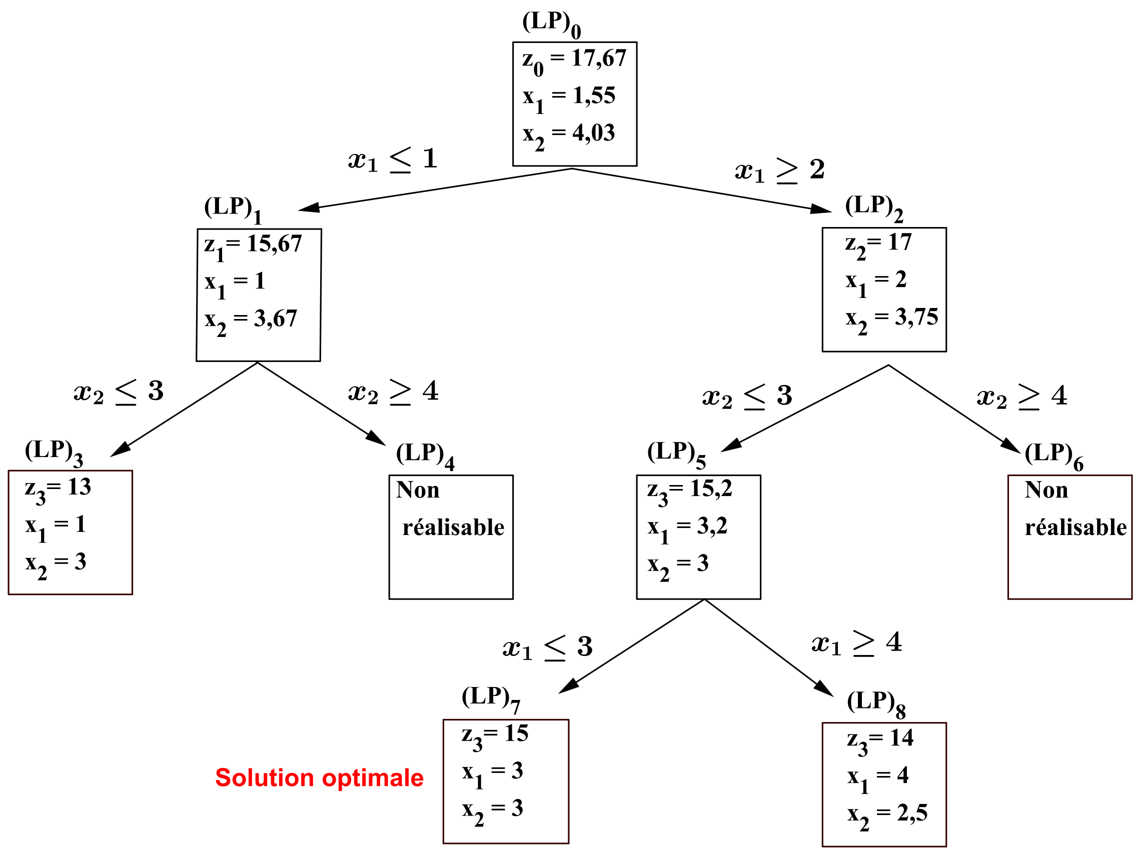
La solution optimale est :

$x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad ; \quad z_7 = 15$.

Elle est donnée par $(LP)_7$, c'est la solution réalisable avec la plus grande borne inférieure $z_7 = 15$.

L'arbre des solutions est présenté dans la figure ci-dessous.


$x_1 = 2$
$x_1 = 3$
$x_1 = 4$
x_2
D_2 : $-2x_1 + 3x_2 = 9$
S_0
$S_7 = (3\ ;\ 3)$ solution optimale de $(LP)_7$
$x_2 = 3$
S_7
$S_8 = (4\ ;\ 2{,}5)$ solution optimale de $(LP)_8$
S_8
$\Delta_0 :\ x_1 + 4x_2 = 0$
D_1 : $5x_1 + 8x_2 = 40$
x_1


$(LP)_0$
$z_0 = 17{,}67$
$x_1 = 1{,}55$
$x_2 = 4{,}03$
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
$(LP)_1$
$z_1 = 15{,}67$
$x_1 = 1$
$x_2 = 3{,}67$
$(LP)_2$
$z_2 = 17$
$x_1 = 2$
$x_2 = 3{,}75$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
$(LP)_3$
$z_3 = 13$
$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$(LP)_4$
Non réalisable
$(LP)_5$
$z_3 = 15{,}2$
$x_1 = 3{,}2$
$x_2 = 3$
$(LP)_6$
Non réalisable
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$(LP)_7$
Solution optimale
$z_3 = 15$
$x_1 = 3$
$x_2 = 3$
$(LP)_8$
$z_3 = 14$
$x_1 = 4$
$x_2 = 2{,}5$

Exercice 2

Problème du sac à dos avec les données :

- 3 objets ;
- Profits : $c_1 = 10$; $c_2 = 8$; $c_3 = 5$;
- Volumes : $a_1 = 6$; $a_2 = 5$; $a_3 = 4$;
- Volume total : $V = 9$.

Solution optimale :

$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 1 \quad ; \quad x_3 = 1 \quad ; \quad z = 13.$

On prend les objets 2 et 3 pour une valeur totale de 13.

Exercice 3

Problème du sac à dos avec les données :

- 4 objets ;
- Profits : $c = (8\ 11\ 6\ 4)$;
- Volumes : $a = (5\ 7\ 4\ 3)$;
- Volume total : $V = 14$.

Solution optimale :

$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 1 \quad ; \quad x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = 1 \quad ; \quad z = 21.$

On prend les objets 2, 3 et 4 pour une valeur totale de 21.

Exercice 4

Même question avec les données :

- 4 objets ;
- Profits : $c = (7\ 4\ 3\ 3)$;
- Volumes : $a = (13\ 12\ 8\ 10)$;
- Volume total : $V = 30$.

Solution optimale :

$x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = 1 \quad ; \quad x_3 = 0 \quad ; \quad x_4 = 0 \quad ; \quad z = 11.$

Objets 1 et 2. Valeur totale : 11.