Heuristiques

A. Kadiri

Mundiapolis

2ème année - Cycle Ingénieur

2015-2016

1. Motivation

- Les méthodes exactes trouvent des solutions optimales exactes, mais peuvent prendre beaucoup de temps, surtout lorsque les problèmes sont de grande taille.
- Nécessité de trouver des “bonnes” solutions rapidement.
- Heuristiques ou algorithmes d'approximation.
- On les classe souvent en deux catégories :
  - Méthodes constructives :

    Permettent de construire une solution réalisable.
  - Méthodes de recherches locales (ou d'amélioration) :

    Permettent de visiter plusieurs solutions réalisables en tentant d'améliorer la valeur de l'objectif.

2. Méthodes constructives

- Objectif : construire une (bonne) solution réalisable.
- Se basent sur la structure du problème pour générer une solution.
- Démarrent à partir d'une solution initiale et, en ajoutant élément par élément, construisent une solution complète.
- Exemples d'heuristiques constructives pour le problème du voyageur de commerce : plus proche voisin et meilleure insertion.

Exemple : problème du voyageur de commerce

Heuristique : Plus proche voisin

Principe de l'algorithme :

- partir d'un sommet quelconque, par exemple le sommet 1.
- tant qu'il reste des sommets libres faire :
- connecter le dernier sommet atteint au sommet libre le plus proche,
- relier le dernier sommet au sommet 1.

$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & - & 3 & 4 & 5 & 4 \\ B & 3 & - & 2 & 2 & 1 \\ C & 4 & 2 & - & 1 & 2 \\ D & 5 & 2 & 1 & - & 3 \\ E & 4 & 1 & 2 & 3 & - \end{pmatrix}$$

- Sommet de départ : A ; $S = \{A\}$

  Le plus proche est B (distance = 3). $A \rightarrow B$
- $S = \{A, B\}$. Le plus proche est E (distance = 1). $A \rightarrow E \rightarrow B$
- $S = \{A, B, E\}$. Le plus proche est C (et D) (distance = 2).

  $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C$
- $S = \{A, B, E, C\}$. Il ne reste que D.

  $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D$

Cycle hamiltonien : $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Coût = 12

Exemple : problème du voyageur de commerce

Heuristique : Meilleure insertion

Principe :

- On part d'un cycle U réduit à un sommet (1 par exemple).
- A chaque itération on choisit un sommet libre k, et on cherche la position d'insertion entre deux sommets consécutifs i, j de U, qui minimise l'augmentation de coût :

$$\Delta L = L_{ik} + L_{kj} - L_{ij}$$

- On change U en un cycle ayant un sommet supplémentaire en supprimant l'arête $[i, j]$ et en ajoutant $[i, k]$ et $[k, j]$.
- On poursuit tant qu'il reste un sommet libre.

Exemple :

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 3 & 4 & 5 & 4 \\
3 & - & 2 & 2 & 1 \\
4 & 2 & - & 1 & 2 \\
5 & 2 & 1 & - & 3 \\
4 & 1 & 2 & 3 & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- Sommet de départ : A

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} \underline{\mathbf{A}} & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{array}{c} \underline{\mathbf{A}} \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 3 & 4 & 5 & 4 \\
3 & - & 2 & 2 & 1 \\
4 & 2 & - & 1 & 2 \\
5 & 2 & 1 & - & 3 \\
4 & 1 & 2 & 3 & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- Le meilleur est B : $A \to B \to A$; $\Delta = 6$

$$\left(\begin{array}{cccccc} & \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} & C & D & E \\ \underline{\mathbf{A}} & - & - & 4 & 5 & 4 \\ \underline{\mathbf{B}} & - & - & 2 & 2 & 1 \\ C & 4 & 2 & - & 1 & 2 \\ D & 5 & 2 & 1 & - & 3 \\ E & 4 & 1 & 2 & 3 & - \end{array}\right)$$

- Le meilleur est E : $A \to B \to E \to A$; $\Delta = 2$

$$\left(\begin{array}{cccccc} & \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} & C & D & \underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{A}} & - & - & 4 & 5 & - \\ \underline{\mathbf{B}} & - & - & 2 & 2 & - \\ C & 4 & 2 & - & 1 & 2 \\ D & 5 & 2 & 1 & - & 3 \\ \underline{\mathbf{E}} & - & - & 2 & 3 & - \end{array}\right)$$

- Le meilleur est C : $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$; $\Delta = 2$

$$\left(\begin{array}{cccccc}
 & \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} & C & D & \underline{\mathbf{E}} \\
\underline{\mathbf{A}} & - & - & - & 5 & - \\
\underline{\mathbf{B}} & - & - & - & 2 & - \\
C & - & - & - & 1 & - \\
D & 5 & 2 & 1 & - & 3 \\
\underline{\mathbf{E}} & - & - & - & 3 & -
\end{array}\right)$$

- Il ne reste que D : $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$; $\Delta = 2$

Cycle hamiltonien : $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Coût $= 12$

3. Méthodes de recherches locales

- Étant donné une solution réalisable initiale, on tente de l'améliorer par une modification d'un certain type.
- Dans l'ensemble de toutes les modifications d'un certain type, on choisit celle qui améliore le plus la valeur de l'objectif (s'il y en a une).
- Par exemple, pour le problème du voyageur de commerce, un type de modification possible consiste à inverser l'ordre de visite d'une sous-séquence de villes. Cette méthode s'appelle "descente par inversion de sous-tours". Elle consiste à :
  - Identifier une solution réalisable initiale ;
  - Considérer toutes les inversions de sous-tours et choisir celle qui améliore le plus la distance totale parcourue par le nouveau tour ainsi obtenu ;
  - Arrêter s'il n'y a aucune inversion de sous-tours qui permette d'améliorer la distance totale parcourue ;

Exemple :

Reprenons l'exemple du voyageur de commerce précédent et appliquons la méthode de descente par inversion de sous-tours.

- Solution réalisable initiale : ABCDEA ; coût = 14.
- Inversion de sous-tours :

  $BC \longrightarrow CB$: ACBDEA ; coût = 15.

  $CD \longrightarrow DC$: ABDCEA ; coût = 12.

  $DE \longrightarrow ED$: ABCEDA ; coût = 15.

  $BCD \longrightarrow DCB$: ADCBEA ; coût = 13.

  $CDE \longrightarrow EDC$: ABEDCA ; coût = 12.
- Il y a deux modifications qui diminuent le plus la distance : ABDCEA et ABEDCA avec un coût = 12. on choisit la première.

- Modifications à partir de la solution ABDCEA ; coût = 12.

  $BD \longrightarrow DB$: ADBCEA ; coût = 15.

  $DC \longrightarrow CD$: ABCDEA ; coût = 14. Solution déjà trouvée.

  $CE \longrightarrow EC$: ABDECA ; coût = 14.

  $BDC \longrightarrow CDB$: ACDBEA ; coût = 12.

  $DCE \longrightarrow ECD$: ABECDA ; coût = 12.

Aucune modification ne fait diminuer la valeur de l'objectif. On arrête :

La meilleure solution obtenue est ABDCEA de coût = 12.