Optimisation combinatoire et heuristiques

A. Kadiri

Mundiapolis

2ème année - Cycle Ingénieur

Génie Industriel & Génie Informatique

2015-2016

Plan du cours

1. Introduction
   - Notions de base.
   - Exemples de problèmes combinatoires.
2. Méthodes exactes
   - Méthode de séparation et évaluation.
   - Programmation dynamique.
   - Algorithmes gloutons.
   - Heuristiques.
3. Méthodes approchées
   - La recherche tabou.
   - Recuit simulé.
   - Algorithmes génétiques.
4. Etude de problèmes réels.

Introduction

Qu'est ce que la recherche opérationnelle ?

La recherche opérationnelle est un ensemble de méthodes scientifiques pour résoudre des problèmes d'optimisation (maximisation de gain ou minimisation de coûts).

Quelques domaines de la RO :

- Programmation linéaire.
- Optimisation combinatoire.
- Théorie des graphes.
- Programmation en nombres entiers.
- Programmation dynamique.

La recherche opérationnelle, face à un problème pratique de décision, cherche à :

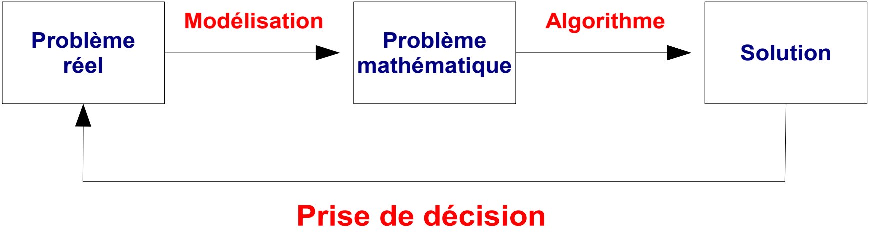
- **faire le mieux :** coût minimal, meilleur profit, plus courte distance, le plus rapide...
- **avec les ressources disponibles :** temps machine, postes de travail, mémoire, ressource homme, matière première, moyens de transport. . .

- La RO repose sur la construction des modèles (modélisation), et ce en fonction des problèmes posés.
- Plusieurs techniques de modélisation en RO :
  - La programmation linéaire,
  - La théorie des graphes,
  - L'optimisation combinatoire,
  - ...

Etapes d'un processus de RO

- Détecter et comprendre le problème
  - Objectifs, contraintes
  - Données disponibles (variables de décision, paramètres, quantités de matière première par ex...)
- Traduire le problème réel sous forme de modèle mathématique (programme linéaire, pb d'optimisation combinatoire, graphe,...)
- Résolution du modèle
  - Choix d'un algorithme (simplexe, branch and bound ...)
  - Utilisation des logiciels spécialisés (Excel, Lindo,...)
- Validation du modèle et des résultats :
  - le modèle développé est-il conforme à la réalité ?
  - les résultats sont-ils valides et satisfaisants ?
- Prise de décision

Etapes d'un processus de RO



La programmation linéaire

Les problèmes de programmation linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation où on maximise (ou on minimise) une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

- La PL est un des domaines les plus utilisés de la RO.
- Pour résoudre un problème de gestion, par exemple :
  - le gestionnaire est en face à différentes possibilités,
  - comment déterminer l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise (main d'œuvre, matières premières, capitaux, espace,...) ?
  - les ressources sont disponibles en quantité limitée,
  - le but du est d'atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts.

Formulation générale d'un PL

$$(PL)\begin{cases} \min / \max \ z = c^T x \\ Ax \ \leq, =, \geq \ b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vecteur de $\mathbb{R}^n$

$c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice de type } (m \times n))$$

$c^T x = < c, x > = c_1 x_1 + ... + c_n x_n$ (produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$).

Terminologie

- **Solution réalisable (solution admissible) :**

  $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est une solution réalisable si x satisfait toutes les contraintes c-à-d $Ax \{\leq, =, \geq\} b$ et $x \geq 0$.

- **Ensemble réalisable (région admissible) :**

  Ensemble de toutes les solutions réalisables.

- **Solution optimale :**

  Solution réalisable où la fonction objectif atteint la meilleure valeur (maximum ou minimum).

Remarques :

- Plusieurs solutions optimales sont possibles.
- La région admissible correspond à un *polyèdre* de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble réalisable d'un programme linéaire peut être :

- vide $\longrightarrow$ pas de solution (problème non réalisable).
- non vide et bornée.
  - solution optimale unique $\longrightarrow$ sommet optimal unique du polyèdre.
  - infinité de solutions optimales $\longrightarrow$ côté optimal du polyèdre, tous les points de ce côté sont des solutions optimales.
- non vide et non bornée.
  - solution optimale unique $\longrightarrow$ sommet optimal unique.
  - infinité de solutions optimales $\longrightarrow$ côté optimal du polyèdre.
  - aucune solution optimale finie ($z = \infty$).

Remarque importante :

Si le PL admet des solutions optimales, alors au moins une solution optimale est située sur un sommet (point extrême) du polyèdre.

Optimisation combinatoire

Domaine qui étudie les problèmes de la forme :

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in S \end{cases}$$

où S est un ensemble fini ou dénombrable.

Un problème combinatoire se caractérise par :

- La présence de choix, à faire parmi un ensemble fini d'alternatives (ensemble S).
- Une notion de coût, de gain, ou de perte.
- La nécessité de faire globalement les bons choix, de manière à optimiser la valeur objective.
- Difficulté à résoudre pour de grandes dimensions.

Exemples de problèmes combinatoires

1. Problème d'affectation :

- n tâches à affecter à n machines de telle sorte que chaque machine soit affectée à une seule tâche et chaque tâche soit affectée une seule machine.
- l'objectif est de minimiser la somme des coûts.
- S est l'ensemble de toutes les affectations possibles des n tâches aux n machines. Il y en a n!

2. Problème du sac-à-dos (knapsack problem) :

- Remplir un sac à dos de capacité V avec des produits $P_1, P_2, \ldots, P_n$, qui prennent une place $v_1, v_2, ..., v_n$ et rapportent $a_1, a_2, ..., a_n$ par unité, de façon à maximiser le bénéfice.
- S est l'ensemble des n produits.

3. Le problème du voyageur de commerce (Traveling Salesman Problem) :

- Un voyageur de commerce doit visiter n villes données en passant par chaque ville exactement une fois.
- Il commence par une ville quelconque et termine en retournant à la ville de départ.
- Les distances entre les villes sont connues.
- Quel chemin faut-il choisir afin de minimiser la distance parcourue ?
- On peut représenter ce problème par un graphe : chaque ville correspond à un sommet et chaque arête à une paire de villes.
- Le problème correspond à trouver un tour complet (circuit Hamiltonien) dans ce graphe qui minimise la somme des distances.
- L'ensemble S correspond à l'ensemble des circuits Hamiltoniens.
- Le nombre de solutions pour n villes est de $(n-1)!/2$. Si $n=4$, il y a trois solutions possibles. Si $n=30$, il y en a 4420880996869850977271808000000!

Chapitre 1 :

Méthodes exactes

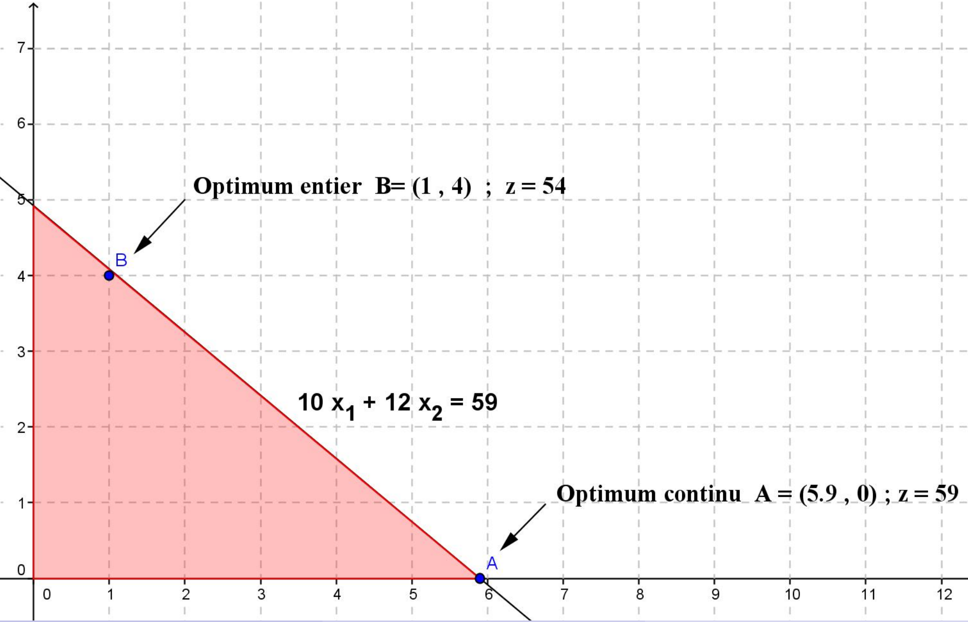
1. Motivation

Considérons le problème linéaire en nombres entiers suivant :

$$(PNE)_0 \begin{cases} \max \;\; z = 10x_1 + 11x_2 \\ 10x_1 + 11x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \; ; \;\; x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \;\; \text{entiers} \end{cases}$$

En supprimant la contrainte d'intégrité (relaxation linéaire), on obtient le programme linéaire :

$$(P_0) \begin{cases} \max \;\; z = 10x_1 + 11x_2 \\ 10x_1 + 11x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \; ; \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$


Optimum entier B= (1 , 4) ; z = 54
B
10 x1 + 12 x2 = 59
Optimum continu A = (5.9 , 0) ; z = 59
A
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
0 1 2 3 4 5 6 7

La solution optimale du programme linéaire P_0 est donnée par le point $A = (5.9, 0)$ et la valeur objective vaut 59 (par la méthode graphique).

Tandis que le problème en nombres entiers $(PNE)_0$ admet comme solution optimale le point $B = (1, 4)$ qui correspond à la valeur objective 54 (résolution par la méthode de séparation et évaluation).

Conclusion :

- La résolution du problème linéaire en nombres entiers ne s'obtient pas par arrondi de la solution optimale du programme linéaire continu. Remarquons que le point (6, 0) n'est pas dans l'ensemble réalisable.
- Il existe une grande différence de structure et de position entre les deux points optimum (qui sont ici chacun solution optimale unique).
- Nécessité de résoudre le PNE par des méthodes adaptées.

2. Méthode de séparation et évaluation

Soit le problème en nombres entiers :

$$(PNE)_1 \begin{cases} \max\ z = 15x_1 + 50x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \ \text{entiers} \end{cases}$$

- Idée : construire une borne supérieure sur z^* et une borne inférieure sur z^* et ensuite raffiner ces bornes jusqu'à les égaliser.

Etape 0 : Résoudre la relaxation linéaire.

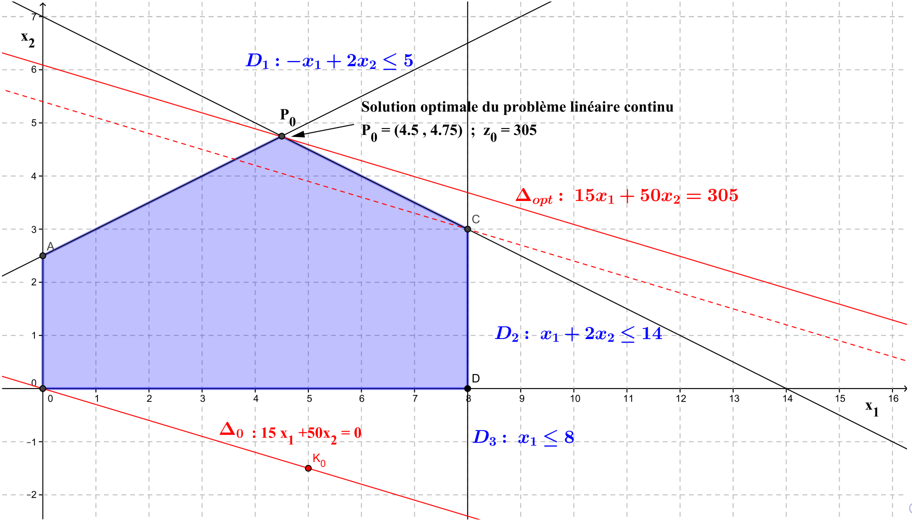
- On élimine la contrainte d'intégrité (x_1 et x_2 entiers) et on obtient alors le problème linéaire continu $(LP)_0$:

$$(LP)_0 \begin{cases} \max\ z = 15x_1 + 50x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- On résout $(LP)_0$ par la méthode graphique (ou simplexe). La solution optimale est donnée par le point P_0 (figure ci-dessous) :

$$\begin{aligned} x_1 &= 4,5 \\ x_2 &= 4,75 \\ z_0 &= 305. \end{aligned}$$

Représentation de la solution optimale du problème continu (relaxation)



- La solution fournie par P_0 est inacceptable car les variables ne sont pas entières. Cependant, elle fournit une première borne supérieure sur z^* :

$$z^* \leq 305$$

Etape 1 : Brancher sur une variable non entière :

- Séparer la région réalisable en deux sous-régions dont aucune ne contient la solution optimale non entière P_0.
- Cette séparation nécessite le choix d'une variable de séparation.
- Le choix de la variable de séparation est *heuristique*.
- Une façon simple de choisir cette variable est de prendre la variable la plus distante d'un entier. Dans notre cas, il s'agit de x_1.
- Soit $x_1 \leq 4$ soit $x_1 \geq 5$.
  (notons qu'il est impossible d'avoir $4 < x_1 < 5$).

- Ajouter séparément la contrainte $x_1 \leq 4$ et la contrainte $x_1 \geq 5$ au problème de départ (PNE) sans tenir compte de la contrainte x_1 et x_2 entiers. On obtient ainsi 2 nouveaux sous-problèmes $(LP)_1$ et $(LP)_2$:

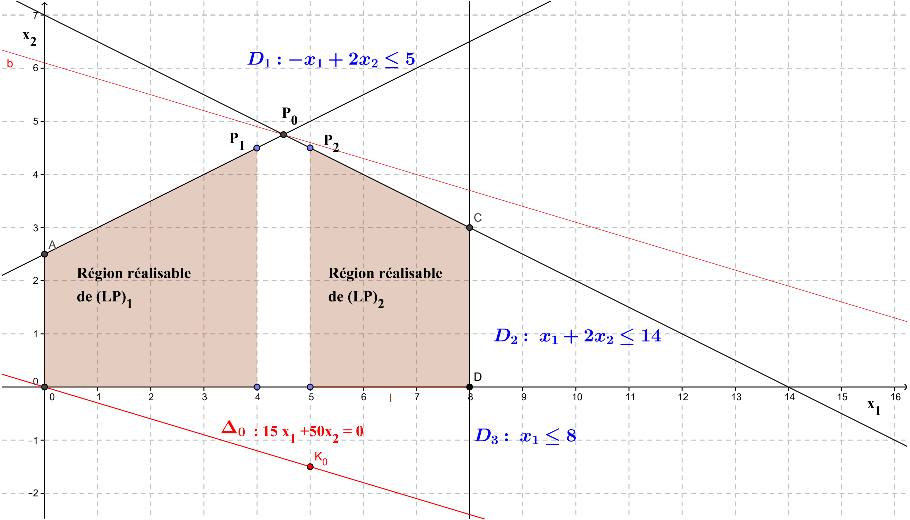
$$(LP)_1 \begin{cases} \max\ z = 15x_1 + 50x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (LP)_2 \begin{cases} \max\ z = 15x_1 + 50x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Résoudre $(LP)_1$ et $(LP)_2$. On obtient les deux solutions :

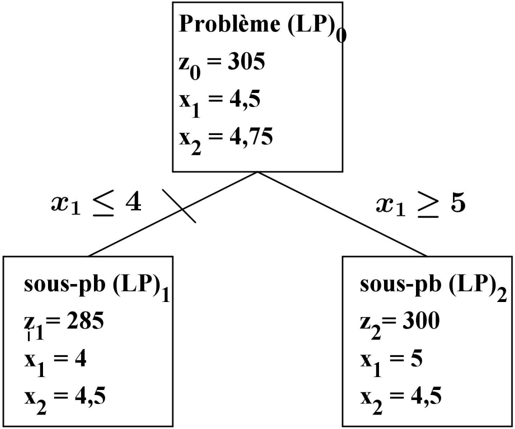
Nœud 1 : (P_1) $x_1 = 4\ ,\ x_2 = 4,5\ ,\ z_1 = 285.$

Nœud 2 : (P_2) $x_1 = 5\ ,\ x_2 = 4,5\ ,\ z_2 = 300.$

Séparation 1



- On a crée un diagramme (arbre) dont les branches correspondent aux problèmes $(LP)_0$, $(LP)_1$ et $(LP)_2$.



- Les valeurs optimales z_1 et z_2 des sous-problèmes $(LP)_1$ et $(LP)_2$ sont inférieures à la valeur optimale z_0 de $(LP)_0$. En effet, on a ajouté des contraintes et donc restreint l'ensemble des solutions réalisables.

$$z^* \leq \max(z_1, z_2) = 300$$

- Chacune des deux solutions précédentes contiennent une variable non entière.

Etape 2 : Diviser à nouveau un nœud de l'arbre en deux.

- Le choix du nœud à diviser est à nouveau heuristique et peut avoir une grande influence sur le temps total mis pour résoudre le problème.
- Le "critère de choix du nœud à diviser" adopté ici est de prendre la la relaxation linéaire qui fournit la meilleure (c'est-à-dire la plus grande en cas de maximisation) valeur de la fonction objectif.

  Pour cet exemple, on choisit donc le nœud 2 (séparation sur le sous-problème $(LP)_2$) et on répète l'étape 1.

- Seule la variable x_2 est non entière. On la choisit donc pour opérer le branchement suivant : Soit $x_2 \leq 4$ soit $x_2 \geq 5$
- On obtient deux nouveaux sous-problèmes $(LP)_3$ et $(LP)_4$:

$$(LP)_3 \begin{cases} \max \ z = 15x_1 + 50x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (LP)_4 \begin{cases} \max \ z = 15x_1 + 50x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- On résout graphiquement les relaxations linéaires $(LP)_3$ et $(LP)_4$ et on obtient les solutions suivantes :

  Nœud 3 : (P_3) $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $z_3 = 290$

  Nœud 4 : (P_4) non réalisable.

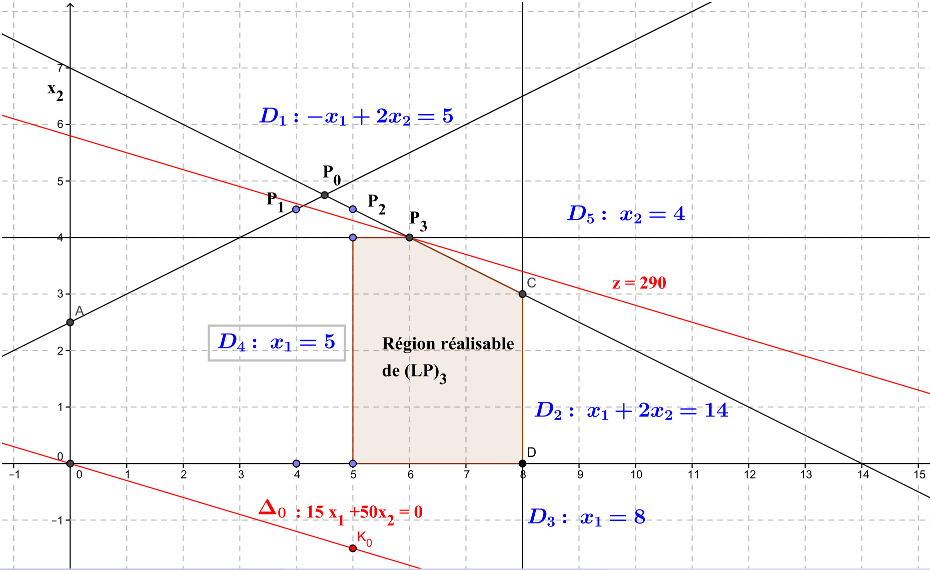
- La solution de $(LP)_3$ est entière $(x_1 = 6\ ,\ x_2 = 4)$ et correspond à la valeur 290 de la fonction objectif. On a une borne inférieure sur la valeur optimale de la fonction objectif :

$$z^* \geq 290$$

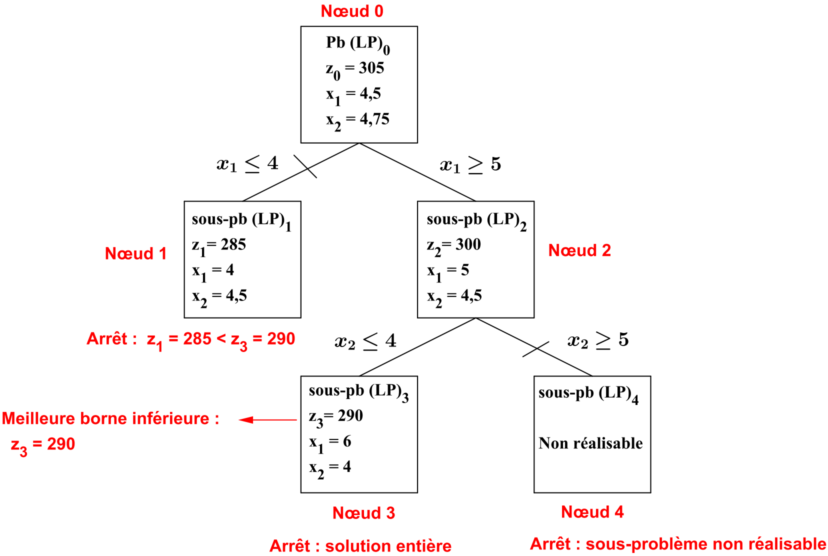
- On coupe aussi le nœud 4 car il conduit à un problème non réalisable.
- La méthode est terminée puisqu'il n'existe plus de nœud à diviser.
- On détermine la solution optimale comme étant la meilleure solution entière trouvée. Il s'agit du point P_3 :

$$x_1^* = 6 \quad ; \quad x_2^* = 4 \quad \text{et la valeur optimale de l'objectif} \quad z^* = 290$$

Séparation 2



Arbre de branch and bound



Evaluation, bornes supérieure et inférieure :

- Une borne supérieure est un majorant de la fonction objectif, donc plus grande que la valeur optimale de tout sous-problème de l'arbre des solutions.
- Dans la cas d'un PLNE, une borne supérieure peut être fournie par la relaxation continue.
- Une borne inférieure est une valeur minimum de la fonction objectif, donc nécessairement inférieure à la valeur de la meilleure solution possible.
- Une borne inférieure peut être donnée par l'optimum d'un sous-problème réalisable (par exemple $z_3 = 290$ de $(LP)_3$).
- La plus grande borne inférieure est actualisée.
- En général, et suivant la nature du problème étudié, il existe plusieurs heuristiques pour déterminer les bornes supérieure et inférieure.

  (voir problème du sac à dos, par exemple).

Critères d'élagage :

On dit qu'un nœud de l'arbre des solutions est élagué (ou coupé) s'il est inutile de le séparer. Il y a plusieurs possibilités pour cela :

1. Le sous-problème associé à ce nœud est non réalisable (cas du nœud 4).
2. La valeur optimale (z) du sous-problème associé est inférieure à la borne inférieure courante (cas du nœud 1).
3. Le sous-problème associé à ce nœud admet une solution entière (cas du nœud 3). $\longleftarrow$ Evaluation de la valeur optimale.

Convergence de l'algorithme branch and bound :

- L'algorithme utilise la stratégie “diviser pour régner” : diviser le problème initial en sous-problèmes plus faciles à résoudre.
- On élimine toujours des points inutiles de l'ensemble réalisable alors que ceux-ci sont en nombre fini.
- L'algorithme se termine quand il n'existe plus de nœuds à diviser. On détermine la solution optimale comme étant la meilleure solution entière trouvée. (c'est-à-dire la solution réalisable qui donne la plus grande borne inférieure).
- La solution optimale est trouvée en un nombre fini d'étapes.

Stratégies de parcours :

- En profondeur d'abord : on choisit pour prochain nœud actif l'un des fils du nœud qui vient d'être divisé.
- En largeur d'abord : on divise les nœuds dans l'ordre de leur création (on construit l'arbre des solutions niveau par niveau).
- Le meilleur d'abord : on divise le nœud de meilleure évaluation.

Remarques :

- En pratique, la recherche en profondeur est plus rapide et utilise moins de mémoire.
- Nœud actif : nœud en cours d'évaluation et de séparation.
- Nœud pendant : en attente d'évaluation et de séparation.

Exercice

Une entreprise fabrique des armoires et des tables ;

- Une armoire nécessite 1 h de travail et 9 m^2 de bois ;
- Une table nécessite 1 h de travail et 5 m^2 de bois ;
- On dispose de 6 h de travail et de 45 m^2 de bois ;
- Chaque armoire génère un profit de 8 UM, et chaque table 5 UM.

Formuler le problème en nombres entiers et le résoudre.

3. Application : problème du sac à dos

3.1 Enoncé

Etant donné un ensemble de n objets, où chaque objet i est caractérisé par un volume a_i et un profit c_i, on cherche le sous-ensemble d'objets à charger dans un sac de capacité V afin de maximiser la somme des profits.

3.2 Modélisation

$$(PSD) \begin{cases} \max \; z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq V \\ x_i \in \{0,\, 1\} \end{cases}$$

$x_i = 1$: si on met l'objet dans le sac.

$x_i = 0$: si on ne le met pas.

a_i et c_i : volumes et profit de l'objet i .

- (PSD) est un **problème linéaire à variables binaires**.
- Permet de modéliser de très nombreux problèmes concrets, par exemple :
  - Problèmes de gestion de capital ;
  - Chargement de cargaison ;
  - Tournées et livraison.
- Problème NP-difficile : on ne connait pas d'algorithme de complexité polynomiale pour le résoudre.
- Méthodes de résolution :
  - Branch & bound ;
  - Programmation dynamique ;
  - ...
- Il existe plusieurs variantes du problème du sac à dos.

3.3 Résolution par branch and bound

- Nombre de combinaisons possibles : 2^n. Par exemple :

  $2^3 = 8$; $2^{20} = 1048576$; $2^{40} = 1099511627776$.

- Pour n est très grand, impossible d'obtenir une solution en un temps raisonnable, par énumération des solutions réalisables de (PSD).

- Plusieurs approches, mais le principe est le même :
  - Diviser le problème initial en sous-problèmes qui sont de plus en plus faciles à résoudre en s'éloignant de la racine ;
  - Chaque sous-problème est séparé en deux autres, suivant le choix $x_i = 0$ ou $x_i = 1$;
  - Eliminer les nœuds inutiles (élagage).

- Ces approches diffèrent suivant la manière de résolution des sous-problèmes et le calcul des bornes inférieure et supérieures.

Exemple 1

- n=3 objets ;
- Profits : $c_1 = 10$; $c_2 = 7$; $c_3 = 6$;
- Volumes : $a_1 = 7$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$;
- Volume du sac : $V = 10$.

Le problème linéaire à variables binaires associé s'écrit :

$$(PSD) \begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 7x_2 + 6x_3 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

Principe de l'approche utilisée :

- Borne inférieure : donnée par une solution heuristique.
- Borne supérieure : résoudre la relaxation linéaire de (PSD).
- Résoudre les relaxations des sous-pbs et brancher sur une variable non entière.

Heuristique pour une solution réalisable, borne inférieure :

- Le produit le plus intéressant est celui qui rapporte le plus par unité de volume.
- On classe les objets selon le rapport du profit sur le volume c_i/a_i.
- On met les objets dans le sac, un par un, selon ce classement tant que la capacité le permet (la contrainte est vérifiée).
- Dans notre cas, on a :

  $c_1/a_1 = 10/7 = 1,43$; $c_2/a_2 = 7/4 = 1,75$; $c_3/a_3 = 6/6 = 1$.

Le classement est le suivant : objet 2, puis 1, puis 3.

On met l'objet 2 : $x_2 = 1$. On passe à l'objet 1 : on ne peut pas le mettre car d'après la contrainte de capacité : $7x_1 + 4x_2 = 11 > 10$.

On regarde alors si on peut mettre l'objet 3 :

$7x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 + 4 + 6 = 10.$

Conclusion : une solution réalisable est :

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$ (On met les objets 2 et 3).

Ce qui donne une borne inférieure $z_{inf} = 10x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 13$.

Résolution de la relaxation, borne supérieure :

La relaxation linéaire s'écrit :

$$(P_0)\begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 7x_2 + 6x_3 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

et admet comme solution optimale $x_1 = 0$; $x_2 = 10/4 = 2,5$; $x_3 = 0$.

La valeur de l'objectif est $\bar{z} = 70/4 = 17,5$ qui est alors une borne supérieure.

On sait maintenant que :

- La borne inf est 13 et tout sous-pb de valeur $z < 13$ sera élagué.
- La solution optimale est meilleure que celle donnée par l'heuristique et par suite, on peut espérer une valeur de z supérieure ou égale à 13.
- La valeur optimale z^* de l'objectif est inférieure à 17,5.

1ère séparation :

On branche sur la variable non entière x_2 : la première séparation consiste à considérer les deux cas : $x_2 = 0$ et $x_2 = 1$.

- Si $x_2 = 0$, le problème avec relaxation devient :

$$(P_1)\begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 6x_3 \\ 7x_1 + 6x_3 \leq 10 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale : $x_1 = 10/7$; $x_3 = 0$ et $z_1 = 100/7 = 14,28$.

- Si $x_2 = 1$, le problème avec relaxation devient :

$$(P_2)\left\{\begin{array}{l} \max\ z = 10x_1 + 7 + 6x_3 \\ 7x_1 + 4 + 6x_3 \leq 10 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\ z = 7 + 10x_1 + 6x_3 \\ 7x_1 + 6x_3 \leq 6 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

Solution optimale : $x_1 = 6/7$; $x_3 = 0$ et

$z_2 = 7 + 60/7 = 100/7 = 15,57.$

Séparation du nœud P_1 :

- $x_1 = 0$ (et $x_2 = 0$).

$$(P_3)\begin{cases} \max\ z = 6x_3 \\ 6x_3 \leq 10 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale : $x_3 = 10/6$ et $z_3 = 10$.

$z_3 <$ borne inf $= 13$. Donc inutile de séparer P_3.

- $x_1 = 1$ (et $x_2 = 0$).

$$(P_4)\begin{cases} \max\ z = 10 + 6x_3 \\ 6x_3 \leq 3 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale : $x_3 = 1/2$ et $z_4 = 13$.

Inutile d'explorer cette branche : $z_4 = 13 =$ borne inf.

Séparation du nœud P_2 :

- $x_1 = 0$ (et $x_2 = 1$).

  $$(P_5) \begin{cases} \max\ z = 7 + 6x_3 \\ 6x_3 \leq 6 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

  Solution optimale : $x_3 = 1$ et $z_5 = 13$.

  On a une solution réalisable (entière) de valeur optimale égale à la meilleure borne inf actuelle :

  $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$ et $z_5 = 13$.

- $x_1 = 1$ (et $x_2 = 1$) $\longrightarrow (P_6)$.

  La contrainte de capacité n'est pas vérifiée : $7x_1 + 4x_2 = 13 > 10$.

Conclusion :

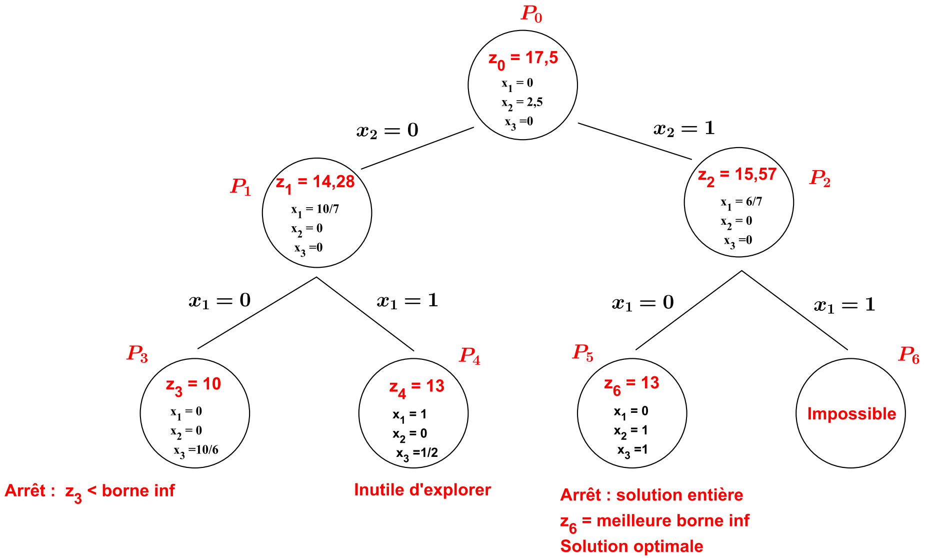
La solution optimale est donnée par la solution réalisable de borne inférieure la plus grande :

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

On met les objets 2 et 3.

La valeur optimale de l'objectif est $z^* = 13$.

L'arbre des solutions est représentée dans la figure ci-dessous.



P_0
z0 = 17,5
x1 = 0
x2 = 2,5
x3 =0
$x_2 = 0$
$x_2 = 1$
P_1
z1 = 14,28
x1 = 10/7
x2 = 0
x3 =0
P_2
z2 = 15,57
x1 = 6/7
x2 = 0
x3 =0
$x_1 = 0$
$x_1 = 1$
$x_1 = 0$
$x_1 = 1$
P_3
z3 = 10
x1 = 0
x2 = 0
x3 =10/6
P_4
z4 = 13
x1 = 1
x2 = 0
x3 =1/2
P_5
z6 = 13
x1 = 0
x2 = 1
x3 =1
P_6
Impossible
Arrêt : z3 < borne inf
Inutile d'explorer
Arrêt : solution entière
z6 = meilleure borne inf
Solution optimale

Exemple 2

- 5 objets ;
- Profits : $c_1 = 27$; $c_2 = 9$; $c_3 = 30$; $c_4 = 16$; $c_5 = 6,5$;
- Volumes : $a_1 = 18$; $a_2 = 12$; $a_3 = 15$; $a_4 = 16$; $a_5 = 13$.
- Volume total : $V = 45$.

$$(PSD) \begin{cases} \max\ z = 27x_1 + 9x_2 + 30x_3 + 16x_4 + 6,5x_5 \\ 18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 13x_5 \leq 45 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,\ 1\} \end{cases}$$

Approche utilisée : Algorithme glouton

- Chaque nœud est séparé en deux, selon si l'on prend ou non l'objet x_i, $i = 1, ..., 5$.
- Heuristique de branchement : le choix des x_i se fait par ordre décroissant du rapport c_i/a_i (profit sur volume).
- Par cette même heuristique gloutonne, on remplit tant que possible par c_i/a_i décroissant. Puis on ajoute une portion du suivant de sorte à arriver au volume V.

Classement des objets par c_i/a_i décroissant :

$c_1/a_1 = 27/18 = 1,5$; $c_2/a_2 = 9/12 = 0,75$

$c_3/a_3 = 30/15 = 2$; $c_4/a_4 = 16/16 = 1$; $c_5/a_5 = 6,5/13 = 0,5$.

D'où le classement suivant : 3, 1, 4, 2, 5.

Evaluation initiale :

On prend au début l'objet 3 : $x_3 = 1$, volume $= 18 < 45$.

On passe ensuite à l'objet 1. En vérifiant la contrainte de volume :

$18x_1 + 15x_3 = 15 + 18 = 33 < 45$.

On regarde ensuite si on peut prendre l'objet 4 tout entier ou bien une portion de 4.

$18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 13x_5 = 45 \Longrightarrow 18 + 0 + 15 + 16x_4 + 0 = 45 \Longrightarrow$

$16x_4 = 12 \Longrightarrow x_4 = 12/16$.

Donc on prend les objets 3 et 1 et 12/16 de l'objet 4 :

$x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 12/16 = 3/4$; $x_5 = 0$.

La valeur de l'objectif est :

$z = 27x_1 + 9x_2 + 30x_3 + 16x_4 + 6,5x_5 = 27 + 0 + 30 + (16 \times 3/4) + 0 = 69$.

- **1ère séparation :**

  On développe si on prend ou non l'objet 3. On obtient 2 nœuds :

  $x_3 = 1$ et $x_3 = 0$.

- Si $x_3 = 0$.

  $18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 13x_5 = 18 + 16 + 12x_2 = 45 \Longrightarrow$

  $12x_2 = 11 \Longrightarrow x_2 = 11/12$.

  Solution : $(1 \quad 11/12 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$.

  Objets : 1, 4 et 11/12 de l'objet 2 :

  La valeur est $z = 27 + 9 \times 11/12 = 51,25$.

- Si $x_3 = 1$. Evaluation déjà effectuée (évaluation initiale) :

  $z = 69$. Solution : $(1 \quad 0 \quad 1 \quad 3/4 \quad 0)$.

  Objets : 3 et 1 et 12/16 de 4.

- Branche $x_3 = 1,\ x_1 = 0$.

  Contrainte de volume :

  $18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 13x_5 = 45 \Longrightarrow 0 + 12 + 15 + 16 + 13x_5 = 45.$

  $\Longrightarrow 13x_5 = 2 \iff x_5 = 2/13.$

  $z = 9 + 30 + 16 + 6,5 \times 2/13 = 56.$

  Solution : $(0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2/13)$.

  Objets : 3, 4, 2 et et 2/13 de 5. Valeur : 56.

- Branche $x_3 = 1,\ x_1 = 1$.

  Déjà évalué : $z = 69$. Objets 3 et 1 et 12/16 de 4.

  Solution : $(1 \quad 0 \quad 1 \quad 3/4 \quad 0)$.

- Branche $x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_4 = 1.$

  Contrainte de volume :

  $18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 13x_5 = 18 + 15 + 16 = 49 > 45.$

  Impossible : on ne peut pas prendre les objets 3, 1 et 4 car on dépasserait le volume du sac.

- Branche $x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_4 = 0.$

  Contrainte de volume :

  $18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 13x_5 = 18 + 12 + 15 + 0 + 0 = 45.$

  $z = 27 + 9 + 30 = 66.$

  Solution : $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0).$

  Objets : 3, 1, 2. Valeur : 66.

  On a une solution réalisable (tous les x_i sont des entiers) et 66 est une première borne inférieure.

- Branche $x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_4 = 0,\ x_2 = 1.$

  Mêmes résultat que la branche $x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_4 = 0.$

- Branche $x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_4 = 0,\ x_2 = 0.$

  Volume :

  $18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 13x_5 = 45 \Longrightarrow 18 + 15 + 13x_5 = 45.$

  $\Longrightarrow 13x_5 = 12 \Longrightarrow x_5 = 12/13.$

  $z = 27 + 30 + 6,5 \times 12/13 = 63.$

  Solution : $(1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 12/13).$

  Objets : 3, 1, 4 et 12/13 de 5. Valeur : 63.

- $x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_4 = 0,\ x_2 = 1, x_5 = 0.$

  Mêmes résultat que la branche $x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_4 = 0,\ x_2 = 1.$

- $x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_4 = 0,\ x_2 = 1, x_5 = 1.$

  Volume :

  $18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 13x_5 = 18 + 12 + 15 + 13 = 58 > 45.$

  Impossible.

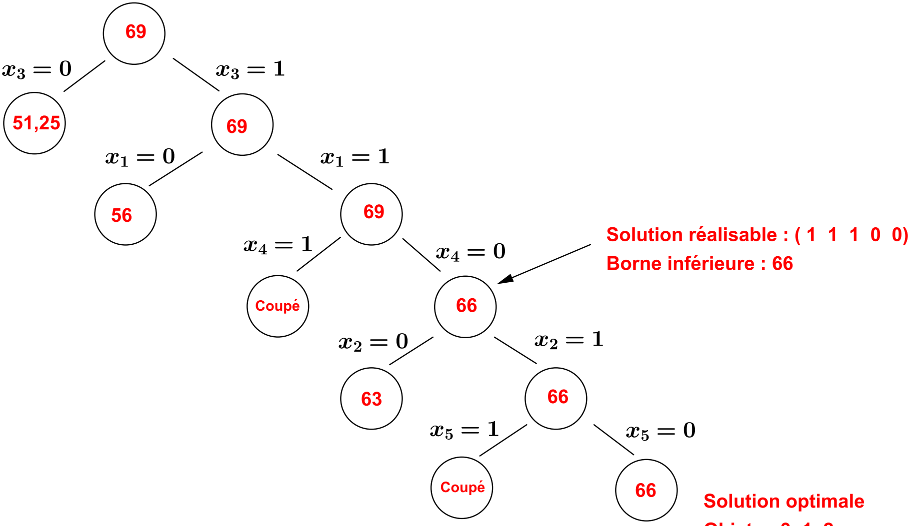
  Conclusion :

  La solution optimale est :

  $x_1 = 1\ ;\ x_2 = 1\ ;\ x_3 = 1\ ;\ x_4 = 0\ ;\ x_5 = 0.$

  On met les objets 1, 2 et 3.

  Valeur optimale : 66. Volume atteint : 45



Solution optimale
Objets : 3 1 2
Valeur = 66
Volume = 45