Questions théoriques :

Elhamdi Kaouther --- Bouazzi Khaoula

Montrer que les problèmes (13), (14) et (19) sont équivalents :

* On a le problème d'optimalité suivant :

$$\min_q \frac{1}{3} \langle q, r \cdot q \cdot |q| \rangle + \langle p_r, f_r \rangle$$

sous la contrainte :

$$Aq - f = 0 .$$

* On a $A = \begin{pmatrix} A_r \\ A_d \end{pmatrix}$; $f = \begin{pmatrix} f_r \\ f_d \end{pmatrix}$; $p = \begin{pmatrix} p_r \\ p_d \end{pmatrix}$.

- On obtient alors $\begin{cases} A_r q - f_r = 0 \\ A_d q - f_d = 0 \end{cases}$ et le problème devient :

$$\min_q \frac{1}{3} \langle q, r \cdot q \cdot |q| \rangle + \langle p_r, A_r q \rangle$$

sous contrainte :

$$A_d q - f_d = 0$$

* On partitionne $A_d = (A_{d,T}, A_{d,C})$ et $q = (q_T, q_C)$

On écrit alors $q_T = A_{d,T}^{-1} (f_d - A_{d,C} q_C)$

On déduit :

$$\begin{cases} q = q^{(0)} + B q_C \\ q^{(0)} = \begin{pmatrix} A_{d,T}^{-1} f_d \\ 0_{n-md} \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} -A_{d,T}^{-1} A_{d,C} \\ I_{n-md} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le problème d'optimalité devient :

$$\min_{q_C} \frac{1}{3} \langle q^{(0)} + B q_C, r \cdot (q^{(0)} + B q_C) \cdot |q^{(0)} + B q_C| \rangle + \langle p_r, A_r (q^{(0)} + B q_C) \rangle$$

Pour le problème Primal:

Calcul du gradient :

$$\min_{q_c \in \mathbb{R}^{n-md}} \underbrace{\frac{1}{3} \left\langle q^{(0)} + B q_c \, , \, \pi \cdot (q^{(0)} + B q_c) \cdot |q^{(0)} + B q_c| \right\rangle}_{\text{on le note : } P_1}$$

$$+ \underbrace{\left\langle p_r , A_r (q^{(0)} + B q_c) \right\rangle}_{\text{on le note } P_2}$$

Soit $q = q^{(0)} + B q_c$

On a : $\text{gradient} = \text{gradient}(P_1) + \text{gradient}(P_2)$

*) $\text{gradient}(P_1) = \dfrac{\partial q}{\partial q_c} \times \dfrac{\partial P_1}{\partial q}$

ona : $\dfrac{\partial q}{\partial q_c} = \dfrac{\partial (q^{(0)} + B q_c)}{\partial q_c} = B^T$

et : $\dfrac{\partial P_1}{\partial q} = \dfrac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{3}\left(\langle q, \pi \cdot q \cdot |q| \rangle \right)\right]$

$= 3 \times \frac{1}{3} \, \pi \cdot q \cdot |q| = \pi \cdot q \cdot |q|$

D'où $\text{gradient}(P_1) = B^T \pi \cdot q \cdot |q|$

*) gradient $(P_2) = \frac{\partial P_2}{\partial q_c} = \frac{\partial q}{\partial q_c} \times \frac{\partial P_2}{\partial q}$

on a : $\frac{\partial P_2}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(q^T A_r^T P_r \right) = A_r^T P_r$

et : $\frac{\partial q}{\partial q_c} = B^T$

D'où gradient $(P_2) = B^T A_r^T P_r$

*) D'où :

gradient $= B^T \left(r \cdot q \cdot |q| + A_r^T P_r \right)$

Calcul du hessien :

On a : gradient $= B^T r \cdot q \cdot |q| + B^T A_r^T p_r$

Alors : hessien $= \frac{\partial}{\partial q_c}\left(B^T r \cdot q \cdot |q| \right)$

$$= \frac{\partial q}{\partial q_c} \cdot \frac{\partial \left(B^T r \cdot q \cdot |q| \right)}{\partial q}$$

On a : $\frac{\partial}{\partial q}\left(B^T r \cdot q \cdot |q| \right)$

$$= \frac{\partial q'}{\partial q} \times \frac{\partial (B^T q')}{\partial q'}$$

où on a posé : $q' = r \cdot q \cdot |q|$

$$= \begin{pmatrix} r_1 |q_1| & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & & r_n |q_n| \end{pmatrix} \times B$$

$$= \mathrm{diag}\left(r \cdot |q| \right) \times B$$

D'où :

hessien $= B^T \times \mathrm{diag}\left(r \cdot |q| \right) \times B$

Pour le problème Dual:

Le problème d'optimisation :

$$\min_q \frac{1}{3} < q, r \cdot q \cdot |q| > + < p_r, A_r q >$$

Sous contrainte

$$A_d q - f_d = 0$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(q, \lambda) = \frac{1}{3} < q, r \cdot q \cdot |q| > + < p_r, A_r q > + < \Lambda, A_d q - f_d >$$

On a arrivé à exprimer le problème sous contrainte d'optimalité $Aq - f = 0$ qui nous a fourni les 2 équations :

$$\begin{cases} A_d q - f_d = 0 \\ A_r q - f_r = 0 \end{cases}$$

d'autre part

$$\mathcal{L}(q, \lambda) = < q, r \cdot q \cdot |q| + A_r^T p_r > + < \Lambda, A_d q - f_d >$$

Ceci peut nous donner la condition :

$$r \cdot q \cdot |q| + A_r^T p_r = 0 .$$

qu'on peut étaler à

$$r \cdot q \cdot |q| + A^T p = 0 .$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{1}{3} r \cdot q \cdot |q| + \frac{2}{3} r \cdot q \cdot |q| + Ar^T p_r + Ad^T \Lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = Ad\, q - fd = 0$$

donc $r \cdot q^* \cdot |q^*| = -(Ar^T p_r + Ad^T \Lambda)$

alors $$|q_i^*| = \sqrt{\left| \frac{(Ar^T p_r + Ad^T \Lambda)_i}{r_i} \right|}$$

$$\text{signe}(q_i^*) = -\,\text{signe} \cdot \left(\frac{(Ar^T p_r + Ad^T \Lambda)_i}{r_i} \right)$$

$$\varphi(\Lambda) = \min_q \mathcal{L}(q, \Lambda)$$

$$\varphi(\Lambda) = \frac{1}{3} \langle q^*, r \cdot q^* \cdot |q^*| \rangle + \langle p_r, Ar\, q^* \rangle + \Lambda (Ad\, q^* - fd)$$

$$\nabla \varphi(\Lambda) = Ad\, q^* - fd$$

$$\nabla^2 \varphi(\Lambda) = \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial q^*} \cdot \frac{\partial q^*}{\partial \Lambda}$$

$$= \Lambda d \left(\frac{\partial q^*}{\partial \Lambda} \right)$$

On a $r \cdot q^* \cdot |q^*| = -(Ar^T p_r + Ad^T \Lambda)$

donc $r_i \cdot \text{signe}(q_i)\, q_i^2 = -(Ar^T p_r + Ad^T \Lambda)_i$

$$2\pi_i \, \text{signe}(q_i)\, q_i \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial}{\partial \lambda_j}(A_r^T p_r)_i - \frac{\partial}{\partial \lambda_j}(Ad^T \Lambda)_i$$

$$2\pi_i \, |q_i| \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j} = \frac{-\partial}{\partial \lambda_j}\left(\sum_{k=1}^{md} (Ad)^T_{ik}\, \lambda_k\right)$$

$$= -(Ad)^T_{ij}$$

d'où
$$\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j} = \frac{-(Ad)^T_{ij}}{2r_i\,|q_i|}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \Lambda} = \sum_{i=1}^{md} \sum_{j=1}^{n} \frac{-(Ad^T)_{ij}}{2r_i\,|q_i|} \cdot E_{ij}$$

d'où
$$\boxed{\nabla^2 \varphi = Ad \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial \Lambda}\right)}$$

Montrer que les problèmes (14) et (19) admettent chacun une solution unique, et que les critères de ces 2 problèmes sont strictement (mais pas fortement) convexes :

* Pour le problème : (14)

$$\min \frac{1}{3} \langle q, r \circ q \cdot |q| \rangle + \langle p_r, A_r q \rangle$$

sous contrainte $A_d q - f_d = 0$

On a la hessienne : $\mathcal{H} = + A_d \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial \Lambda}\right)$

donc $$\mathcal{H}_{ij} = \sum_{k=1} \frac{- a_{ik} a_{jk}}{2 r_k |q_k|}$$

or la colonne de A contient exactement 1 et (-1) :

donc $a_{ik} \cdot a_{jk} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$ ou

donc $-a_{ik} a_{jk} \geq 0$ donc $\mathcal{H}_{ij} \geq 0$ car $r_k \geq 0$.

d'où $\mathcal{H} \geq 0$ donc la fonction et convexe.

* Puisque la fonction et convexe donc le point q^* (~~vérifia~~) ayant un gradient nul et l'unique minimum global.

Pour le problème (19) :

$$\min_{q_c} \frac{1}{3} \langle q^{(0)} + Bq_c , r \cdot (q_0 + Bq_c) \cdot |q_0 + Bq_c| \rangle + \langle p_r , A_r (q^{(0)} + Bq_c) \rangle$$

On a la Hessienne :

$$\mathcal{H} = B^T \left(diag(r \cdot |q|) \right) \cdot B$$

donc $$\mathcal{H}_{ij} = \sum_{k=1} b_{ik} (r_k \cdot |q_k|) \, b_{jk}$$

or l'ensemble des colonnes de B forment une base de cycle,

donc $\mathcal{H}_{ij} \geq 0$.

d'où $\mathcal{H} \geqslant 0$.

alors la fonction st convexe donc le point q^* ayant un gradient nul st l'unique minimum global.