

# Введение в Бутстреп

2021

# Оглавление

<b>2 Точность выборочного среднего</b>	<b>2</b>
<b>3 Случайные выборки и вероятности</b>	<b>8</b>
3.1 Введение . . . . .	8
3.2 Случайные выборки . . . . .	8
3.3 Теория вероятностей . . . . .	12
<b>4 Эмпирическая функция распределения и принцип плагина</b>	<b>19</b>
4.1 Введение . . . . .	19
4.2 Эмпирическая функция распределения . . . . .	19
4.3 Принцип плагина . . . . .	23
<b>5 Стандартные ошибки и оценки стандартных ошибок</b>	<b>25</b>
5.1 Введение . . . . .	25
5.2 Стандартная ошибка среднего . . . . .	25
5.3 Оценка стандартной ошибки среднего . . . . .	28
<b>6 Бутстреп оценка стандартной ошибки</b>	<b>29</b>
6.1 Введение . . . . .	29
6.2 Бутстреп оценка стандартной ошибки . . . . .	29
6.3 Пример: коэффициент корреляции . . . . .	33
6.4 Количество бутстреп репликаций $B$ . . . . .	34
6.5 Параметрический бутстреп . . . . .	36
<b>7 Бутстреп и стандартные ошибки: некоторые примеры</b>	<b>40</b>
7.1 Введение . . . . .	40
7.2 Пример 1: результаты тестов . . . . .	41
7.3 Пример 2: построение кривой по данным . . . . .	50
7.4 Пример отказа бутстрепа . . . . .	60
<b>10 Оценки смещения</b>	<b>62</b>
10.1 Введение . . . . .	62
10.2 Бутстреп оценка смещения . . . . .	62
10.3 Пример: данные об уровне гормона при ношении различных пластырей . . . . .	64

10.4 Улучшенная оценка смещения . . . . .	68
10.5 Оценка смещения по методу складного ножа . . . . .	70
10.6 Поправка на смещение . . . . .	74
<b>11 Метод складного ножа</b>	<b>76</b>
11.1 Введение . . . . .	76
11.2 Определение складного ножа . . . . .	76
11.3 Пример: данные о тестировании . . . . .	78
11.4 Псевдо-значения . . . . .	80
11.5 Связь метода складного ножа и бутстрепа . . . . .	80
11.6 Отказ складного ножа . . . . .	83
11.7 Метод складного ножа с отбрасыванием $d$ наблюдений . . . . .	83

## Глава 2

# Точность выборочного среднего

Бутстреп - это компьютерный метод определения точности статистических оценок. Основная идея, лежащая в основе бутстрапа, очень проста и насчитывает как минимум два столетия. После ознакомления с некоторыми справочными материалами в этом отчете описывается метод бутстрапа и его применение для решения некоторых реальных задач анализа данных. В этой главе, помимо предварительного ознакомления с бутстрапом, рассматриваются некоторые фундаментальные идеи статистики. Основное внимание уделяется одному примеру статистики, для оценки точности которой не нужен компьютер: выборочное среднее. Начнем с простого примера, касающегося средних и их расчетной точности.

В таблице 2.1 показаны результаты небольшого эксперимента, в котором 7 из 16 мышей были случайным образом выбраны для получения нового лечения, а остальные 9 были отнесены к группе без лечения (контрольной). Лечение было направлено на продление выживаемости после тестовой операции. В таблице показано время выживания после операции в днях для всех 16 мышей.

Table 2.1. *The mouse data. Sixteen mice were randomly assigned to a treatment group or a control group. Shown are their survival times, in days, following a test surgery. Did the treatment prolong survival?*

Group	Data			(Sample Size)	Mean	Estimated Standard Error
Treatment:	94	197	16			
	38	99	141			
	23			(7)	86.86	25.24
Control:	52	104	146			
	10	51	30			
	40	27	46	(9)	56.22	14.14
			Difference:		30.63	28.93

Продлило ли лечение выживаемость? Сравнение средних значений для двух групп дает предварительные основания для положительного ответа. Обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_7$  продолжительность жизни в группе с лечением, соотв.  $x_1 = 94, x_2 = 197, \dots, x_7 = 23$ , а через  $y_1, y_2, \dots, y_9$  продолжительность жизни в контрольной группе. Групповые выборочные средние равны

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^7 x_i / 7 = 86.86 \quad \text{и} \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^9 y_i / 9 = 56.22, \quad (2.1)$$

таким образом разность  $\bar{x} - \bar{y}$  равна 30.63, что предполагает значительный эффект продления жизни при лечении.

Но насколько точны эти оценки? В конце концов, средние (2.1) основаны на небольших выборках, всего 7 и 9 мышей соответственно. Чтобы ответить на этот вопрос, нам нужна оценка точности выборочных средних  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Для выборочных средних и по существу только для выборочных средних формулу точности получить легко.

Расчетная стандартная ошибка среднего  $\bar{x}$  на основе  $n$  независимых наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$ , определяется формулой

$$\sqrt{\frac{s^2}{n}}, \quad (2.2)$$

где  $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$ . (Эта формула и стандартные ошибки в целом обсуждаются более подробно в главе 4.) Стандартная ошибка любой оценки определяется как квадратный корень из ее дисперсии, то есть среднеквадратичная изменчивость оценки вокруг ее математического ожидания. Это наиболее распространенная мера точности оценок. Грубо говоря, оценка

отличается от своего истинного значения менее чем на одну стандартную ошибку примерно в 68% случаев и менее чем на две стандартные ошибки примерно в 95% случаев.

Если бы оценочные стандартные ошибки в эксперименте на мышах были очень малы, скажем, менее 1, тогда мы бы знали, что  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  были близки к их истинным значениям и что наблюдаемая разница в 30,63, вероятно, была хорошей оценкой истинного увеличения выживаемости при лечении. С другой стороны, если формула (2.2) дает большие оценочные стандартные ошибки, скажем 50, тогда оценка разности будет слишком неточной, чтобы на нее можно было полагаться.

Фактическая ситуация показана справа в Таблице 2.1. Расчетные стандартные ошибки, рассчитанные по (2.2), составляют 25,24 для  $\bar{x}$  и 14,14 для  $\bar{y}$ . Стандартная ошибка для разности  $\bar{x} - \bar{y}$  равна  $28,93 = \sqrt{25,24^2 + 14,14^2}$  (поскольку дисперсия разности двух независимых величин является суммой их дисперсий). Мы видим, что наблюдаемая разница 30,63 составляет всего  $30,63/28,93 = 1,05$  стандартной ошибки разности. Читатели, знакомые с теорией проверки гипотез, сочтут это незначимым результатом, который может легко возникнуть случайно, даже если лечение действительно не имело никакого эффекта.

Обычно стандартные ошибки являются отличным первым шагом к критическому осмыслению статистических оценок. К сожалению, стандартные ошибки имеют серьезный недостаток: для большинства статистических оценок, отличных от среднего, не существует формулы, подобной (2.2), для получения стандартных ошибок. Другими словами, трудно оценить точность оценки, отличной от оценки среднего.

Предположим, например, что мы хотим сравнить две группы в таблице 2.1 по их медианам, а не по их средним значениям. Медианы составляют 94 для лечения и 46 для контроля, что дает разницу в 48, что значительно больше, чем разница средних значений. Но насколько точны эти медианы? Ответы на такие вопросы - вот где вступают в игру бутстреп и другие компьютерные методы. В оставшейся части этой главы дается краткий обзор начальной оценки стандартной ошибки - метода, который будет полностью обсуждаться в следующих главах.

Предположим, что мы наблюдаем независимые данные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , для удобства обозначенные вектором  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , по которым мы вычисляем интересующую статистику  $s(X)$ . Например, данные могут быть наблюдениями контрольной группы  $n = 9$  в таблице 2.1, а  $s(X)$  может быть средним по выборке.

Бутстреп оценка стандартной ошибки, изобретенная Эфроном в 1979 году, выглядит совершенно иначе, чем (2.2), но на самом деле они тесно связаны. Бутстреп выборка  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  получается путем случайного выбора с возвращением  $n$  точек из исходных данных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Например, при  $n = 7$  мы можем получить  $X^* = (x_5, x_7, x_5, x_4, x_7, x_3, x_1)$ .

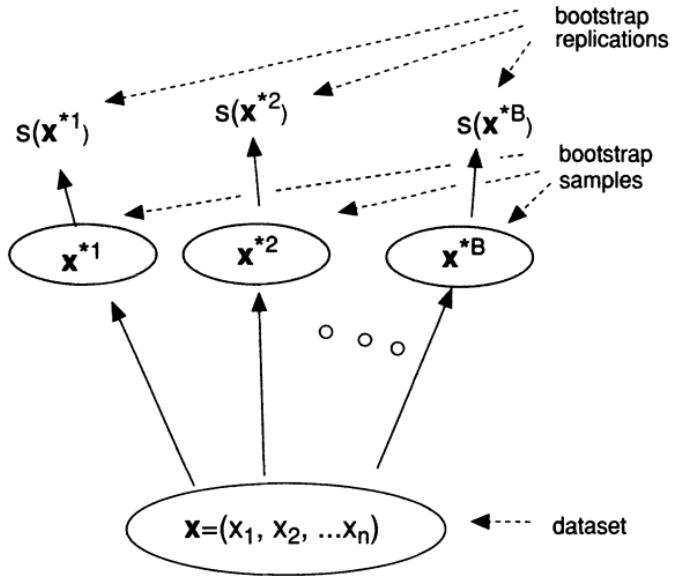


Figure 2.1. Schematic of the bootstrap process for estimating the standard error of a statistic  $s(\mathbf{x})$ .  $B$  bootstrap samples are generated from the original data set. Each bootstrap sample has  $n$  elements, generated by sampling with replacement  $n$  times from the original data set. Bootstrap replicates  $s(\mathbf{x}^{*1}), s(\mathbf{x}^{*2}), \dots, s(\mathbf{x}^{*B})$  are obtained by calculating the value of the statistic  $s(\mathbf{x})$  on each bootstrap sample. Finally, the standard deviation of the values  $s(\mathbf{x}^{*1}), s(\mathbf{x}^{*2}), \dots, s(\mathbf{x}^{*B})$  is our estimate of the standard error of  $s(\mathbf{x})$ .

Рисунок 2.1 представляет собой схему процесса бутстрепа. Алгоритм бутстрепа начинается с генерации большого количества независимых бутстреп выборок  $X^{*1}, X^{*2}, \dots, X^{*B}$ , каждая размером  $n$ . Типичные значения для  $B$ , количества бутстреп выборок, находятся в диапазоне от 50 до 200 для оценки стандартной ошибки. Каждой бутстреп выборке соответствует бутстреп репликация  $s(X^{*b})$ , посчитанная для  $X^{*b}$ . Если  $s(X)$  - это, например, медиана выборки, то  $s(X^*)$  - это медиана бутстреп выборки. Бутстреп оценка стандартной ошибки - это стандартное отклонение бутстреп репликаций

$$\hat{se}_{boot} = \left\{ \sum_{b=1}^B [s(X^{*b}) - s(\cdot)]^2 / (B - 1) \right\}^{1/2}, \quad (2.3)$$

где  $s(\cdot) = \sum_{b=1}^B s(X^{*b}) / B$ . Предположим, что  $s(X) = \bar{X}$ . В этом случае стандартная теория вероятностей говорит нам, что, когда  $B$  становится очень

большим, формула (2.3) приближается к

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.4)$$

Это почти то же самое, что и формула (2.2). Мы могли бы сделать это точно таким же, умножив определение (2.3) на множитель  $[n/(n-1)]^{1/2}$ , но в этом нет практического смысла.

**Table 2.2. Bootstrap estimates of standard error for the mean and median; treatment group, mouse data, Table 2.1. The median is less accurate (has larger standard error) than the mean for this data set.**

B:	50	100	250	500	1000	$\infty$
mean:	19.72	23.63	22.32	23.79	23.02	23.36
median:	32.21	36.35	34.46	36.72	36.48	37.83

В таблице 2.2 показаны бутстррап оценки стандартной ошибки для среднего и медианы для данных экспериментальной группы мышей из таблицы 2.1. Стандартные ошибки уменьшаются до предельных значений по мере увеличения числа бутстрраповых выборок  $B$ . Предельное значение 23,36 для среднего получается из (2.4). Формула для предельного значения 37,83 для стандартной ошибки медианы довольно сложна.

Теперь мы можем оценить точность разницы медиан между двумя группами. Описанная выше бутстррап процедура, примененная к контрольной группе, дала оценку стандартной ошибки 11,54 на основе  $B = 100$  повторений ( $B = \infty$  дало 9,73). Следовательно, используя  $B = 100$ , наблюдаемая разница в 48 имеет расчетную стандартную ошибку  $\sqrt{36,35^2 + 11,54^2} = 38,14$ , и, следовательно,  $48/38,14 = 1,26$  стандартной ошибки. Это больше, чем наблюдаемая разница в средних, но все же незначимо.

Для большинства статистических данных у нас нет формулы для предельного значения стандартной ошибки, но на самом деле формула не нужна. Вместо этого мы используем числовой вывод бутстррап программы для некоторого удобного значения  $B$ . Легко написать бутстррап программу, которая работает для любой вычислимой статистики  $s(X)$ . Имея эти программы, аналитик данных может свободно использовать любую статистику, независимо от ее сложности, с уверенностью, что он или она также будет иметь разумное представление о точности оценки. Применение бутстрэпа стало доступным, поскольку компьютеры стали мощнее и дешевле. Стандартные ошибки - это простейшие меры статистической точности. В последующих главах показано, как бутстррап методы могут оценивать более сложные меры точности, такие как смещения, ошибки прогнозирования и доверительные интервалы. Бутстрепированные доверительные интервалы увеличивают вычислительную нагрузку еще в 10 раз. Результатом всех

этих вычислений является увеличение количества статистических проблем, которые могут быть проанализированы, сокращение допущений анализа и устранение рутинных, но утомительных теоретических расчетов, обычно связанных с оценкой точности.

## Глава 3

# Случайные выборки и вероятности

### 3.1 Введение

Статистика - это теория накопления информации, особенно информации, поступающей постепенно. Типичная статистическая ситуация была проиллюстрирована данными по мышам в Таблице 2.1. Ни одна мышь не предоставляет много информации, поскольку индивидуальные результаты очень различаются, но семь или девять мышей, взятых вместе, начинают быть весьма информативными. Статистическая теория касается лучших способов извлечения этой информации. Теория вероятностей обеспечивает математическую основу для статистических выводов. В этой главе рассматривается простейшая вероятностная модель, используемая для моделирования случайных данных: случай, когда наблюдения представляют собой случайную выборку из одной неизвестной совокупности, свойства которой мы пытаемся узнать из наблюдаемых данных.

### 3.2 Случайные выборки

Проще всего визуализировать случайные выборки в терминах конечной совокупности или «вселенной»  $U$  отдельных единиц  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , любая из которых с равной вероятностью будет выбрана в одном случайному розыгрыше. В состав единиц могут входить все зарегистрированные избиратели в районе, подвергающиеся политическому обследованию, все мужчины, которые предположительно могут быть выбраны для медицинского эксперимента, все средние школы в Соединенных Штатах и т.д. У отдельных единиц есть свойства, которые нам нужны, чтобы узнать, например, о политических взглядах, времени выживания в медицине или количестве выпускников. Слишком сложно и дорого исследовать каждую единицу в  $U$ ,

поэтому мы выбираем для наблюдения случайную выборку управляемого размера.

Случайная выборка размера  $n$  определяется как набор из  $n$  единиц  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , выбранных случайным образом из  $\mathbf{U}$ . В принципе, процесс выборки происходит следующим образом: устройство случайных чисел независимо выбирает целые числа  $j_1, j_2, \dots, j_n$ , каждое из которых равно любому значению от 1 до  $N$  с вероятностью  $1/N$ . Эти целые числа определяют, какие члены  $\mathbf{U}$  выбраны для случайной выборки,  $u_1 = U_{j_1}, u_2 = U_{j_2}, \dots, u_n = U_{j_n}$ . На практике процесс отбора редко бывает таким аккуратным, и совокупность  $\mathbf{U}$  может быть плохо определена, но концептуальная структура случайной выборки по-прежнему полезна для понимания статистических выводов. (Методология хорошего экспериментального дизайна, например, случайное распределение выбранных единиц в экспериментальную или контрольную группы, как это было сделано в эксперименте на мышах, помогает сделать теорию случайной выборки более применимой к реальным ситуациям, подобным той, что представлена в таблице 2.1.)

Наше определение случайной выборки позволяет одной единице  $U_i$  появляться в выборке более одного раза. Мы могли бы избежать этого, настаивая на том, чтобы целые числа  $j_1, j_2, \dots, j_n$  были различными, что называется «выборкой без замены». Чуть проще разрешить повторы, то есть «выборку с заменой», как в предыдущем абзаце. Если размер случайной выборки  $n$  намного меньше, чем размер генеральной совокупности  $N$ , как это обычно бывает, вероятность повторения выборки в любом случае будет мала. См. Проблему 3.1. Случайная выборка всегда означает выборку с заменой в дальнейшем, если не указано иное.

Выбрав случайную выборку  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , мы получаем одно или несколько представляющих интерес измерений для каждой единицы. Пусть  $x_i$  обозначает измерения для единицы  $u_i$ . Наблюдаемые данные представляют собой набор измерений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Иногда мы будем обозначать наблюдаемые данные  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  одним символом  $X$ .

Мы можем представить себе, как проводить измерения для каждого члена  $U_1, U_2, \dots, U_N$  из  $\mathbf{U}$ , получая значения  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . Это можно было бы назвать переписью  $U$ .

Символ  $\mathbf{X}$  будет обозначать перепись измерений  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Мы также будем называть  $\mathbf{X}$  совокупностью измерений или просто совокупностью и называть  $X$  случайной выборкой размера  $n$  из  $\mathbf{X}$ . На самом деле мы обычно не можем позволить себе провести перепись, поэтому мы взяли случайную выборку. Цель статистического вывода – сказать, что мы узнали о популяции  $\mathbf{X}$  из наблюдаемых данных  $X$ . В частности, мы будем использовать бутстреп, чтобы сказать, насколько точно статистика, вычисленная из  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (например, медиана выборки), оценивает соответствующее количество для всей генеральной совокупности.

**Table 3.1. The law school data.** A random sample of size  $n = 15$  was taken from the collection of  $N = 82$  American law schools participating in a large study of admission practices. Two measurements were made on the entering classes of each school in 1973: LSAT, the average score for the class on a national law test, and GPA, the average undergraduate grade-point average for the class.

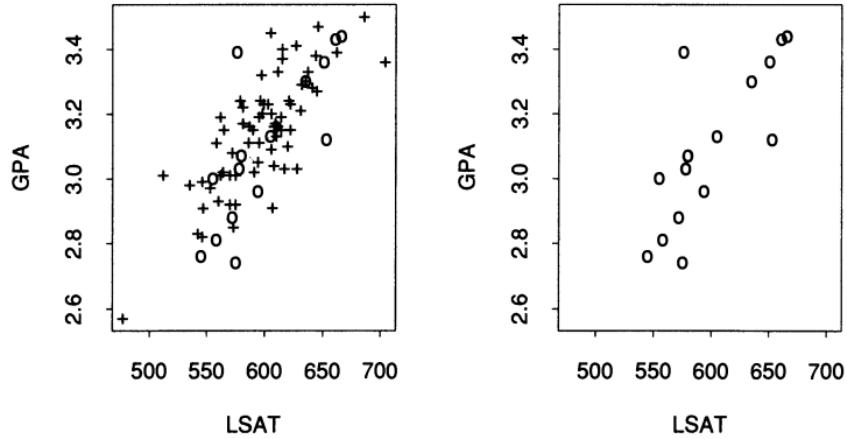
School	LSAT	GPA	School	LSAT	GPA
1	576	3.39	9	651	3.36
2	635	3.30	10	605	3.13
3	558	2.81	11	653	3.12
4	578	3.03	12	575	2.74
5	666	3.44	13	545	2.76
6	580	3.07	14	572	2.88
7	555	3.00	15	594	2.96
8	661	3.43			

В таблице 3.1 показана случайная выборка размером  $n = 15$ , составленная из 82 американских юридических школ. Фактически показаны два измерения, проведенные для поступающих в 1973г. для каждого учебного заведения в выборке: LSAT, средний балл класса на экзамене по национальному праву, и GPA, средний балл бакалавриата, полученный студентами. В этом случае измерение  $x_i$  на  $u_i$ ,  $i$ -м члене выборки, представляет собой пару

$$x_i = (LSAT_i, GPA_i) \quad i = 1, 2, \dots, 15$$

Наблюдаемые данные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  представляют собой набор из 15 пар чисел, показанных в таблице 3.1.

Этот пример является искусственным, потому что перепись данных  $X_1, X_2, \dots, X_{82}$  действительно была проведена. Другими словами, LSAT и GPA доступны для всей совокупности  $N = 82$  школ. На Рисунке 3.1 показаны данные переписи и выборочные данные. В таблице 3.2 приведены все измерения  $N$ .



*Figure 3.1. The left panel is a scatterplot of the (LSAT, GPA) data for all  $N = 82$  law schools; circles indicate the  $n = 15$  data points comprising the “observed sample” of Table 3.1. The right panel shows only the observed sample. In problems of statistical inference, we are trying to infer the situation on the left from the picture on the right.*

В реальной статистической задаче, такой как в таблице 3.1, мы увидим только выборочные данные, из которых мы попытаемся сделать вывод о свойствах совокупности. Например, рассмотрим 15 баллов LSAT в наблюдаемой выборке. Они имеют среднее значение 600.27 с расчетной стандартной ошибкой 10.79, основанной на данных в таблице 3.1 и формуле (2.2). Вероятность того, что истинное среднее значение LSAT, среднее для всей генеральной совокупности, из которой были взяты наблюдаемые данные, составляет около 68%, находится в интервале  $600.27 \pm 10.79$ .

Мы можем проверить этот результат, поскольку имеем дело с искусственным примером, для которого известны полные данные о населении. Среднее значение всех 82 значений LSAT составляет 597.55, оно лежит в пределах прогнозируемого доверительного интервала  $600.27 \pm 10.79$ .

Table 3.2. *The population of measurements (LSAT, GPA), for the universe of 82 law schools. The data in Table 3.1 was sampled from this population. The +'s indicate the sampled schools.*

school	LSAT	GPA	school	LSAT	GPA	school	LSAT	GPA
1	622	3.23	28	632	3.29	56	641	3.28
2	542	2.83	29	587	3.16	57	512	3.01
3	579	3.24	30	581	3.17	58	631	3.21
4+	653	3.12	31+	605	3.13	59	597	3.32
5	606	3.09	32	704	3.36	60	621	3.24
6+	576	3.39	33	477	2.57	61	617	3.03
7	620	3.10	34	591	3.02	62	637	3.33
8	615	3.40	35+	578	3.03	62	572	3.08
9	553	2.97	36+	572	2.88	64	610	3.13
10	607	2.91	37	615	3.37	65	562	3.01
11	558	3.11	38	606	3.20	66	635	3.30
12	596	3.24	39	603	3.23	67	614	3.15
13+	635	3.30	40	535	2.98	68	546	2.82
14	581	3.22	41	595	3.11	69	598	3.20
15+	661	3.43	42	575	2.92	70+	666	3.44
16	547	2.91	43	573	2.85	71	570	3.01
17	599	3.23	44	644	3.38	72	570	2.92
18	646	3.47	45+	545	2.76	73	605	3.45
19	622	3.15	46	645	3.27	74	565	3.15
20	611	3.33	47+	651	3.36	75	686	3.50
21	546	2.99	48	562	3.19	76	608	3.16
22	614	3.19	49	609	3.17	77	595	3.19
23	628	3.03	50+	555	3.00	78	590	3.15
24	575	3.01	51	586	3.11	79+	558	2.81
25	662	3.39	52+	580	3.07	80	611	3.16
26	627	3.41	53+	594	2.96	81	564	3.02
27	608	3.04	54	594	3.05	82+	575	2.74
			55	560	2.93			

### 3.3 Теория вероятностей

Статистический вывод касается обучения на опыте: мы наблюдаем случайную выборку  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и хотим вывести свойства полной совокупности  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ , которая дала образец. Теория вероятностей идет в противоположном направлении: из состава популяции  $\mathbf{X}$  мы выводим свойства случайной выборки  $\mathbf{x}$  и статистики, вычисляемой по  $\mathbf{x}$ . Статистический вывод как математическая наука был разработан почти исключительно в терминах теории вероятностей. Здесь мы кратко рассмотрим некоторые фундаментальные концепции вероятности, включая распределение

ния вероятностей, ожидания и независимость.

В качестве первого примера пусть  $x$  представляет результат броска правильной кости, поэтому  $x$  с равной вероятностью будет 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Мы запишем это в вероятностной нотации как

$$Prob\{x = k\} = 1/6 \quad \text{for } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.1)$$

Случайное число, такое как  $x$ , часто называется случайной величиной.

Вероятности - это идеализированные или теоретические пропорции. Мы можем представить себе пространство  $(U) = \{U_1 U_2, \dots, U_N\}$  возможных бросков кубика, где  $U_j$  полностью описывает физический акт  $j$ -го броска с соответствующими результатами  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Здесь  $N$  может быть очень большим или даже бесконечным. Выражение  $Prob\{x = 5\} = 1/6$  означает, что случайным образом выбранный член  $\mathbf{X}$  имеет  $1/6$  шанс быть равным 5, или, проще говоря,  $1/6$  членов  $\mathbf{X}$  равняется 5. Обратите внимание что такие вероятности, как пропорции, никогда не могут быть меньше 0 или больше 1.

Для удобства обозначений определим частоты  $f_k$ ,

$$f_k = Prob\{x = k\}, \quad (3.2)$$

так что у справедливой кости  $f_k = 1/6$  для  $k = 1, 2, \dots, 6$ . Распределение вероятностей случайной величины  $x$ , которую мы обозначим  $F$ , является любым полным описанием вероятностного поведения  $x$ .  $F$  также называется распределением вероятностей популяции  $\mathbf{X}$ . Здесь мы можем взять  $F$  как вектор частот

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_6) = (1/6, 1/6, \dots, 1/6). \quad (3.3)$$

Несправедливым будет кубик, для которого  $F$  не равно  $(1/6, 1/6, \dots, 1/6)$ .

Некоторые распределения вероятностей возникают настолько часто, что получили специальные названия. Говорят, что случайная величина  $x$  имеет биномиальное распределение с размером  $n$  и вероятностью успеха  $p$ , что обозначается

$$x \sim Bi(n, p), \quad (3.4)$$

если его частоты

$$f_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Здесь  $n$  – положительное целое число,  $p$  – число от 0 до 1, а  $C_n^k$  – биномиальный коэффициент  $n!/[k!(n-k)!]$ . На рисунке 3.2 показано распределение  $F = (f_0, f_1, \dots, f_n)$  для  $x \sim Bi(n, p)$ , при  $n = 25$  и  $p = 0.25, 0.50$  и  $0.90$ . Мы также пишем  $F = Bi(n, p)$  для обозначения ситуации (3.4).

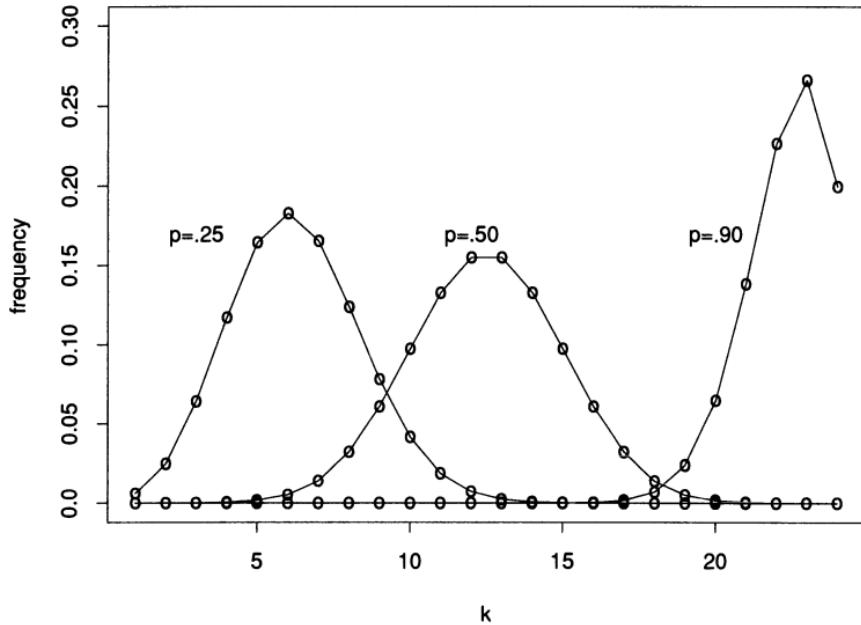


Figure 3.2. The frequencies  $f_0, f_1, \dots, f_n$  for the binomial distributions  $Bi(n, p)$ ,  $n = 25$  and  $p = .25, .50$ , and  $.90$ . The points have been connected by lines to enhance visibility.

Пусть  $A$  – набор целых чисел. Тогда вероятность того, что  $x$  принимает значение в  $A$ , или, проще говоря, вероятность  $A$ , равна

$$Prob\{x \in A\} = Prob\{A\} = \sum_{k \in A} f_k. \quad (3.6)$$

Например, если  $A = \{1, 3, 5, \dots, 25\}$  и  $x \sim Bi(25, p)$ , то  $Prob\{A\}$  – это вероятность того, что биномиальная случайная величина размера 25 и вероятность успеха  $p$  равно нечетному целому числу. Заметьте, что, поскольку  $f_k$  – это теоретическая доля раз, когда  $x$  равно  $k$ , сумма  $\sum_{k \in A} f_k = Prob\{A\}$  – это теоретическая доля раз, когда  $x$  принимает свое значение в  $A$ .

Выборочное пространство  $x$ , обозначенное  $S_x$ , представляет собой набор возможных значений  $x$ . Для правильного кубика  $S_x = \{1, 2, \dots, 6\}$ , а  $S_x = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  для распределения  $Bi(n, p)$ . По определению  $x$  встречается в  $S_x$  каждый раз, то есть с теоретической пропорцией 1, поэтому

$$Prob\{S_x\} = \sum_{k \in S_x} f_k = 1. \quad (3.7)$$

Для любого распределения вероятностей целых чисел частоты  $f_j$  являются неотрицательными числами, сумма которых равна 1.

В наших примерах до сих пор пространство выборки  $S_x$  было подмножеством целых чисел. Одна из удобных особенностей вероятностных распределений заключается в том, что их можно определять в довольно общих пространствах. Рассмотрим данные юридического факультета на Рисунке 3.1. Мы могли бы принять  $S_x$  за положительный квадрант плоскости

$$S_x = \mathbf{R}^{2+} = \{(y, z) : y > 0, z > 0\}. \quad (3.8)$$

(Сюда входят такие значения, как  $x = (10^6, 10^9)$ , но не повредит, если  $S_x$  будет слишком большим.) Для подмножества  $A$  из  $S_x$  мы все равно будем писать  $Prob\{A\}$ , чтобы указать вероятность того, что  $x$  встречается в  $A$ .

Например, мы могли бы взять

$$A = \{(y, z) : 0 < y < 600, 0 < z < 3.0\}. \quad (3.9)$$

Юридическая школа  $x \in A$ , если ее входной класс 1973 года имел LSAT менее 600 и средний балл менее 3,0. В этом случае мы знаем полную популяцию  $\mathbf{X}$ ; это 82 точки, указанные на левой панели рисунка 3.1 и в таблице 3.2. Из них 16 находятся в  $A$ , поэтому

$$Prob\{A\} = 16/82 = 0.195. \quad (3.10)$$

Здесь идеализированная пропорция  $Prob\{A\}$  – это действительная пропорция. Только в тех случаях, когда у нас есть полная генеральная совокупность, можно напрямую оценить вероятности как пропорции.

Распределение вероятностей  $F$   $x$  по-прежнему определяется как полное описание вероятностей  $x$ . В примере с юридической школой  $F$  можно описать следующим образом: для любого подмножества  $A$  из  $S_x = \mathbf{R}^{2+}$ ,

$$Prob\{x \in A\} = \#\{X_j \in A\}/82, \quad (3.11)$$

где  $\#\{X_j \in A\}$  – это 82 точки на левой панели рисунка 3.1, которые лежат в  $A$ . Другим способом сказать, что  $F$  – это дискретное распределение, полагая вероятность (или частоту)  $1/82$  на каждую из указанных 82 точек.

Вероятности можно определять непрерывно, а не дискретно, как в (3.6) или (3.11). Самый известный пример – нормальное (или гауссово, или колоколообразное) распределение. Определено, что случайная величина  $x$  с действительными значениями имеет нормальное распределение со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ , записанное

$$x \sim N(\mu, \sigma^2) \quad or \quad F = N(\mu, \sigma^2), \quad (3.12)$$

если

$$Prob\{x \in A\} = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \quad (3.13)$$

для любого подмножества  $A$  действительной прямой  $\mathbf{R}^1$ . Интеграл в (3.13) берется по значениям  $x \in A$ .

Существуют версии нормального распределения с более высокой размерностью, которые включают взятие интегралов, подобных (3.13), по многомерным множествам  $A$ . Нам не понадобятся непрерывные распределения для разработки бутстрена. Как мы увидим, одним из основных стимулов для развития бутстрена является желание заменить теоретические вычисления компьютерными с использованием специальных распределений.

Математическое ожидание вещественной случайной величины  $x$ , обозначенной  $E(x)$ , является ее средним значением, где среднее значение берется по возможным результатам  $x$ , взвешенным в соответствии с его распределением вероятностей  $F$ . Таким образом,

$$E(x) = \sum_{x=0}^n x C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{for } x \sim Bi(n, p), \quad (3.14)$$

и

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \quad \text{for } x \sim N(\mu, \sigma^2). \quad (3.15)$$

Нетрудно показать, что  $E(x) = np$  для  $x \sim Bi(n, p)$  и  $E(x) = \mu$  для  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Иногда мы пишем математическое ожидание как  $E_F(x)$ , чтобы указать, что среднее значение берется по отношению к распределению  $F$ .

Предположим, что  $r = g(x)$  – некоторая функция случайной величины  $x$ . Тогда  $E(r)$ , математическое ожидание  $r$ , представляет собой теоретическое среднее значение  $g(x)$ , взвешенное в соответствии с распределением вероятности  $x$ . Например, если  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$  и  $r = x^3$ , то

$$E(r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx. \quad (3.16)$$

Вероятности – это частный случай ожиданий. Пусть  $A$  – подмножество  $S_x$ , и возьмем  $r = I_{\{x \in A\}}$ , где  $I_{\{x \in A\}}$  – индикаторная функция

$$I_{\{x \in A\}} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}. \quad (3.17)$$

Тогда  $E(r)$  равна  $Prob\{x \in A\}$  или

$$E(I_{\{x \in A\}}) = Prob\{x \in A\}. \quad (3.18)$$

Например, если  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ , тогда

$$E(r) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{x \in A\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx, \quad (3.19)$$

является  $Prob\{x \in A\}$  в соответствии с (3.13).

Понятие математического ожидания как теоретического среднего является очень общим и включает случаи, когда случайная величина  $x$  не является действительной. В ситуации с юридической школой, например, нас может заинтересовать математическое ожидание соотношения LSAT и GPA.

Пусть  $x = (y, z)$ , как в (3.8), тогда  $r = y/z$ , и математическое ожидание  $r$  равно

$$E(LSAT/GPA) = \frac{1}{82} \sum_{j=1}^8 2(y_j/z_j) \quad (3.20)$$

где  $x_j = (y_j, z_j)$  – j-я точка в таблице 3.2. Численная оценка (3.20) дает  $E(LSAT/GPA) = 190.8$ .

Пусть  $\mu_x = E_F(x)$  для  $x$  вещественной случайной величины с распределением  $F$ . Дисперсия  $x$ , обозначаемая  $\sigma_x^2$  или просто  $\sigma^2$ , определяется как ожидаемое значение  $y = (x - \mu)^2$ . Другими словами,  $\sigma^2$  – это теоретический средний квадрат расстояния случайной величины  $x$  от ее математического ожидания  $\mu$ ,

$$\sigma_x^2 = E_F(x - \mu_x)^2. \quad (3.21)$$

Дисперсия  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$  равна  $\sigma^2$ ; дисперсия  $x \sim Bi(n, p)$  равна  $np(1 - p)$ . Стандартное отклонение случайной величины определяется как квадратный корень из ее дисперсии.

Две случайные величины  $y$  и  $z$  называются независимыми, если

$$E[g(y)h(z)] = E[g(y)]E[h(z)] \quad (3.22)$$

для всех функций  $g(y)$  и  $h(z)$ . Независимость (3.22) подразумевает, что случайный результат  $y$  не влияет на случайный результат  $z$ , и наоборот.

Чтобы убедиться в этом, пусть  $B$  и  $C$  – подмножества  $S_y$  и  $S_z$  соответственно, выборочные пространства  $y$  и  $z$ , а  $g$  и  $h$  – индикаторные функции  $g(y) = I_{\{y \in B\}}$  и  $h(z) = I_{\{z \in C\}}$ . Обратите внимание, что

$$I_{\{y \in B\}}I_{\{z \in C\}} = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in B \text{ and } z \in C \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Итак,  $I_{\{y \in B\}}I_{\{z \in C\}}$  – индикаторная функция пересечения  $\{y \in B\} \cap \{z \in C\}$ . Тогда в силу (3.18) и определения независимости (3.22)

$$\begin{aligned} Prob\{(y, z) \in B \cap C\} &= E(I_{\{y \in B\}}I_{\{z \in C\}}) = \\ &= E(I_{\{y \in B\}})E(I_{\{z \in C\}}) = Prob\{y \in B\}Prob\{z \in C\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Глядя на рисунок 3.1, мы видим, что (3.24) не выполняется для примера юридической школы, поэтому LSAT и GPA не являются независимыми.

Независимо от того, независимы ли  $y$  и  $z$ , ожидания подчиняются простому правилу сложения

$$E[g(y) + h(z)] = E[g(y)] + E[h(z)]. \quad (3.25)$$

В общем виде

$$E\left[\sum_{i=1}^n g_i(x_i)\right] = \sum_{i=1}^n E[g_i(x_i)] \quad (3.26)$$

для любых функций  $g_i$  и любых  $n$  случайных величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Случайная выборка с заменой гарантирует независимость: если  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – случайная выборка размера  $n$  из совокупности  $\mathbf{X}$ , то все  $n$  наблюдений  $x_i$  одинаково распределены и взаимно независимы друг от друга. Другими словами, все  $x_i$  имеют одинаковое распределение вероятностей  $F$ , и

$$E_F[g_1(x_1)g_2(x_2) \cdots g_n(x_n)] = E_F[g_1(x_1)]E_F[g_2(x_2)] \cdots E_F[g_n(x_n)] \quad (3.27)$$

для любых функций  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . (Это почти определение того, что означает случайная выборка.) Будем писать

$$F \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.28)$$

чтобы указать, что  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  является случайной выборкой размера  $n$  из совокупности с распределением вероятностей  $F$ . Иногда это записывается как

$$x \stackrel{\text{iid}}{\sim} F \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.29)$$

где i.i.d. означает независимый и одинаково распределенный.

## Глава 4

# Эмпирическая функция распределения и принцип плагина

### 4.1 Введение

Проблемы статистического вывода часто включают оценку некоторого свойства распределения вероятностей  $F$  на основе случайной выборки, взятой из  $F$ . Эмпирическая функция распределения, которую мы будем называть  $\hat{F}$ , представляет собой простую оценку всего распределения  $F$ . Оценка какого-то интересующего свойства  $F$ , например его среднего значения, медианы или корреляции, заключается в использовании соответствующего свойства  $\hat{F}$ . Это «принцип плагина». Как мы увидим в главе 6, метод бутстрепа является прямым применением принципа плагина.

### 4.2 Эмпирическая функция распределения

Пусть дана случайная выборка размера  $n$  из распределения вероятностей  $F$

$$F \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

тогда эмпирическая функция распределения  $F$  определяется как дискретное распределение, которое ставит вероятность  $1/n$  на каждое значение  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Другими словами,  $F$  присваивает множеству  $A$  в пространстве выборок  $x$  его эмпирическую вероятность

$$\widehat{\text{Prob}}\{A\} = \#\{x_i \in A\}/n, \quad (4.2)$$

это доля наблюдаемой выборки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , встречающейся в  $A$ . Мы также будем писать  $\text{Prob}_{\hat{F}}\{A\}$  для обозначения (4.2). Символ в шляпе

« $\wedge$ » всегда указывает на величины, рассчитанные на основе наблюдаемых данных.

**Table 4.1. A random sample of 100 rolls of the die. The outcomes 1, 2, 3, 4, 5, 6 occurred 13, 19, 10, 17, 14, 27 times, respectively, so the empirical distribution is (.13, .19, .10, .17, .14, .27).**

6	3	2	4	6	6	6	5	3	6	2	2	6	2	3	1	5	1
6	6	4	1	5	3	6	6	4	1	4	2	5	6	6	5	5	3
6	2	6	6	1	4	1	5	6	1	6	3	3	2	2	2	5	2
2	4	1	4	5	6	6	6	2	2	4	6	1	2	2	2	5	1
5	3	5	4	2	1	4	6	6	5	6	4	6	4	3	6	4	1
4	5	4	4	2	3	2	1	4	6								

Рассмотрим выборку юридических вузов размером  $n = 15$ , показанную в Таблице 3.1 и на правой панели Рисунка 3.1. Эмпирическое распределение  $F$  ставит вероятность  $1/15$  для каждой из 15 точек данных. Пять из 15 точек лежат в наборе  $A = \{(y, z) : 0 < y < 600, 0 < z < 3.00\}$ , поэтому  $\widehat{Prob}\{A\} = 5/15 = 0.333$ . Обратите внимание, что мы получаем другую эмпирическую вероятность для набора  $\{0 < y < 600, 0 < z \leq 3.00\}$ , поскольку одна из 15 точек данных имеет  $GPA = 3.00$ ,  $LSAT < 600$ .

Таблица 4.1 показывает случайную выборку из  $n = 100$  бросков кубика:  $x_1 = 6, x_2 = 3, x_3 = 2, \dots, x_{100} = 6$ . Эмпирическое распределение  $F$  ставит вероятность  $1/100$  для каждого из 100 исходов. В подобных случаях, когда есть повторяющиеся значения, мы можем более экономично выразить  $F$  как вектор наблюдаемых частот  $\hat{f}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$

$$\hat{f}_k = \#\{x_i = k\}/n. \quad (4.3)$$

Для данных в таблице 4.1  $\hat{F} = (0.13, 0.19, 0.10, 0.17, 0.14, 0.27)$ .

Эмпирическое распределение – это список значений, принимаемых выборкой  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , вместе с долей случаев, когда каждое значение встречается. Часто каждое значение, встречающееся в выборке, появляется только один раз, как в случае с данными юридических школ. Повторения, как и в случае с кубиком таблицы 4.1, позволяют сократить список. В любом случае каждой из  $n$  точек данных  $x_i$  приписывается вероятность  $1/n$  эмпирическим распределением.

Очевидно ли, что мы не потеряли информацию при переходе от полного набора данных  $(x_1, x_2, \dots, x_{100})$  в таблице 4.1 к сокращенному представлению в терминах частот? Нет, но это правда. Можно доказать, что вектор наблюдаемых частот  $\hat{F} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots)$  является достаточной статистикой для истинного распределения  $F = (f_1, f_2, \dots)$ . Это означает, что вся информация о  $F$ , содержащаяся в  $x$ , также содержится в  $\hat{F}$ .

Table 4.2. Rainfall data. The yearly rainfall, in inches, in Nevada City, California, 1873 through 1978. An example of time series data.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1870:				80	40	65	46	68	32	58
1880:	60	61	60	45	48	63	44	66	39	35
1890:	44	104	36	45	69	50	72	57	53	30
1900:	40	56	55	46	46	72	50	68	71	37
1910:	64	46	69	31	33	61	56	55	40	37
1920:	40	34	60	54	52	20	49	43	62	44
1930:	33	45	30	53	32	38	56	63	52	79
1940:	30	62	75	70	60	34	54	51	35	53
1950:	44	53	73	80	54	52	40	77	52	75
1960:	42	43	39	54	70	40	73	41	75	43
1970:	80	60	59	41	67	83	56	29	21	

Теорема достаточности предполагает, что данные были сгенерированы случайной выборкой из некоторого распределения  $F$ . Это, конечно, не всегда верно. Например, данные о мышах в Таблице 2.1 включают два распределения вероятностей, одно для лечения и одно для контроля. В таблице 4.2 показан временной ряд из 106 чисел: годовое количество осадков в Невада-Сити, Калифорния, с 1873 по 1978 год. Мы могли бы вычислить эмпирическое распределение  $F$  для этого набора данных, но оно не будет включать никакой информации временного ряда, например, если большие числа следуют за большими числами. На данный момент мы ограничиваем внимание данными, полученными путем случайной выборки из одного распределения, так называемой ситуации с одной выборкой. Это не так строго, как кажется. Например, в примере с данными о мышах мы можем применить результаты по одной выборке отдельно к экспериментальной и контрольной популяциям.

При применении статистической теории к реальным задачам ответы на интересующие вопросы обычно формулируются в терминах вероятностных распределений. Мы можем спросить, справедлива ли матрица, дающая данные в Таблице 4.1. Это эквивалентно вопросу, равно ли распределение вероятностей  $F$  кубика  $(1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ . В примере с юридической школой вопрос может заключаться в том, насколько коррелируют LSAT и GPA. В терминах  $F$ , распределение  $x = (y, z) = (LSAT, GPA)$ , это вопрос о значении коэффициента корреляции совокупности

$$\text{corr}(y, z) = \frac{\sum_{j=1}^{82} (Y_j - \mu_y)(Z_j - \mu_z)}{[\sum_{j=1}^{82} (Y_j - \mu_y)^2 \sum_{j=1}^{82} (Z_j - \mu_z)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.4)$$

где  $(Y_j, Z_j)$  –  $j$ -я точка в популяции юридических школ  $\mathbf{X}$ , а  $\mu_y = \sum_{j=1}^{82} Y_j / 82$ ,  $\mu_z = \sum_{j=1}^{82} Z_j / 82$ .

Когда распределение вероятностей  $F$  известно (т.е. когда у нас есть полная совокупность  $\mathbf{X}$ ), ответы на такие вопросы требуют не более чем арифметических операций. Для совокупности юридических школ перепись в таблице 3.2 дает  $\mu_y = 597.5$ ,  $\mu_z = 3.13$  и

$$\text{corr}(y, z) = 0.761. \quad (4.5)$$

Это первоначальное определение «статистики». Обычно у нас нет генеральной совокупности. Поэтому нам нужен статистический вывод, более современная статистическая теория для вывода свойств  $F$  из случайной выборки  $\mathbf{x}$ .

Если бы у нас была только выборка юридических школ размером 15, таблица 3.1, мы могли бы оценить  $\text{corr}(y, z)$  с помощью коэффициента корреляции выборки

$$\widehat{\text{corr}}(y, z) = \frac{\sum_{j=1}^{15} (y_j - \hat{\mu}_y)(z_j - \hat{\mu}_z)}{[\sum_{j=1}^{15} (y_j - \hat{\mu}_y)^2 \sum_{j=1}^{15} (z_j - \hat{\mu}_z)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.6)$$

где  $(y_j, z_j)$  -  $j$ -я точка в таблице 3.1,  $j = 1, 2, \dots, 15$  и  $\hat{\mu}_y = \sum_{j=1}^{15} y_j / 15$ ,  $\hat{\mu}_z = \sum_{j=1}^{15} z_j / 15$ . Таблица 3.1 дает  $\mu_y = 600.3$ ,  $\mu_z = 3.09$  и

$$\widehat{\text{corr}}(y, z) = 0.776. \quad (4.7)$$

Вот еще один пример оценки плагина. Предположим, нас интересует оценка вероятности того, что результат LSAT превышает 600, то есть

$$\theta = \frac{1}{82} \sum_1^{82} I_{\{Y_i > 600\}}. \quad (4.8)$$

Поскольку 39 из 82 баллов LSAT превышают 600,  $\theta = 39/82 = 0.48$ . Плагин оценка  $\theta$  доли баллов LSAT, превышающих 600, равна

$$\hat{\theta} = \frac{1}{15} \sum_1^{15} I_{\{y_i > 600\}}. \quad (4.9)$$

Шесть из 15 баллов LSAT превышают 600, поэтому  $\hat{\theta} = 6/15 = 0.4$ .

Для кубика в Таблице 4.1 у нас нет данных переписи, а есть только выборка  $\mathbf{x}$ , поэтому на любые вопросы о справедливости кубика необходимо отвечать, исходя из эмпирических частот

$$\hat{F} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_6) = (0.13, 0.19, 0.10, 0.17, 0.14, 0.27). \quad (4.10)$$

Обсуждения статистического вывода сформулированы в терминах параметров и статистики. Параметр – это функция распределения вероятностей  $F$ . Статистика – это функция выборки  $\mathbf{x}$ . Таким образом,  $\text{corr}(y, z)$ ,

(4.4), является параметром  $F$ , а  $\widehat{corr}(y, z)$ , (4.6), является статистикой, основанной на  $\mathbf{x}$ . Точно так же  $f_k$  – это параметр  $F$ , а  $\hat{f}_k$  – статистика,  $k = 1, 2, 3, \dots, 6$ .

Иногда мы будем писать параметры напрямую как функции от  $F$ , например

$$\theta = t(F). \quad (4.11)$$

Это обозначение подчеркивает, что значение параметра  $\theta$  получается путем применения некоторой процедуры численной оценки  $t(\cdot)$  к функции распределения  $F$ . Например, если  $F$  – это распределение вероятностей на действительной прямой, математическое ожидание можно представить как параметр

$$\theta = t(F) = E_F(x). \quad (4.12)$$

Здесь  $t(F)$  или  $\theta$  вычисляется через математическое ожидание, то есть среднее значение  $x$ , взвешенное в соответствии с  $F$ . Для распределения  $F$ , такого как  $F = Bi(n, p)$ , мы можем вычислить  $t(F) = np$ . Даже если  $F$  неизвестна, форма  $t(F)$  сообщает нам функциональное отображение из  $F$  в  $\theta$ .

### 4.3 Принцип плагина

Принцип плагина представляет собой простой метод оценки параметров по выборкам. Плагин оценка параметра  $\theta = t(F)$  определяется как

$$\hat{\theta} = t(\hat{F}). \quad (4.13)$$

Другими словами, мы оцениваем функцию  $\theta = t(F)$  распределения вероятностей  $F$  той же функцией эмпирического распределения  $\hat{F}$ ,  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ . (Статистические данные, подобные (4.13), которые используются для оценки параметров, иногда называют суммарной статистикой, а также оценками и оценщиками.)

Мы уже использовали принцип плагина при оценке  $f_k$  через  $\hat{f}_k$  и при оценке  $corr(y, z)$  с помощью  $\widehat{corr}(y, z)$ . Чтобы убедиться в этом, обратите внимание, что наша совокупность  $F$  юридических школ может быть записана как  $F = (f_1, f_2, \dots, f_{82})$ , где каждое  $f_j$ , вероятность  $j$ -го юридической школы, имеет значение  $1/82$ . Это распределение вероятностей на  $\mathbf{X}$ , 82 парах юридических школ. Коэффициент корреляции генеральной совокупности можно записать как

$$corr(y, z) = \frac{\sum_{j=1}^{82} f_j(Y_j - \mu_y)(Z_j - \mu_z)}{[\sum_{j=1}^{82} f_j(Y_j - \mu_y)^2 \sum_{j=1}^{82} f_j(Z_j - \mu_z)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.14)$$

где

$$\mu_y = \sum_{j=1}^{82} f_j Y_j, \quad \mu_z = \sum_{j=1}^{82} f_j Z_j. \quad (4.15)$$

Установка каждого  $f_j = 1/82$  дает выражение (4.4). Теперь для нашей выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_{15})$  выборочная частота  $\hat{f}_j$  – это доля точек выборки, равная  $X_j$ :

$$\hat{f}_j = \#\{x_i = X_j\}/15, j = 1, 2, \dots, 82. \quad (4.16)$$

Для выборки из Таблицы 3.1  $\hat{f}_1 = 0, \hat{f}_2 = 0, \hat{f}_3 = 0, \hat{f}_4 = 1/15$  и т.д. Теперь подставив эти значения  $\hat{f}_j$  в выражения (4.15) и (4.14), получим  $\hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$  и  $\widehat{\text{corr}}(y, z)$  соответственно. То есть  $\hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$  и  $\widehat{\text{corr}}(y, z)$  – это плагин оценки  $\mu_y, \mu_z$  и  $\text{corr}(y, z)$ .

В общем, плагин оценка математического ожидания  $\theta = E_F(x)$  равна

$$\hat{\theta} = E_{\hat{F}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}. \quad (4.17)$$

Насколько хорош принцип плагина? Обычно, если единственная доступная информация о  $F$  исходит из выборки  $\mathbf{x}$ , то  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$  не может быть улучшена как оценка  $\theta = t(F)$ , по крайней мере, не в обычном асимптотическом ( $n \rightarrow \infty$ ) смысле статистической теории. Например, если  $\hat{f}_k$  – плагин оценка частоты  $\#\{x_i = k\}/n$ , то

$$\hat{f}_k \sim Bi(n, f_k)/n. \quad (4.18)$$

В этом случае оценка  $\hat{f}_k$  является несмешенной для  $f_k$ ,  $E(\hat{f}_k) = f_k$ , с дисперсией  $f_k(1 - f_k)/n$ . Это наименьшая возможная дисперсия для несмешенной оценки  $f_k$ .

Мы будем использовать бутстреп для изучения смещения и стандартной ошибки плагин оценки  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ . Достоинство бутстрепа состоит в том, что он автоматически создает смещения и стандартные ошибки, независимо от того, насколько сложным может быть функциональное сопоставление  $\theta = t(F)$ . Мы увидим, что сам бутстреп является применением плагин принципа.

Принцип плагина менее эффективен в ситуациях, когда имеется информация о  $F$ , отличная от той, которая предоставлена выборкой  $\mathbf{x}$ . Мы можем знать или предполагать, что  $F$  является членом параметрического семейства, например семейства многомерных нормальных распределений. Или мы можем оказаться в ситуации регрессии, когда у нас есть набор случайных выборок  $\mathbf{x}(z)$  в зависимости от переменной-предиктора  $z$ . Тогда, даже если нас интересует только  $F_{z_o}$ , функция распределения для некоторого конкретного значения  $z_o$  из  $z$ , может быть информация о  $F_{z_o}$  в других выборках  $\mathbf{x}(z)$ , особенно тех, для которых  $z$  близок к  $z_o$ .

Принцип плагина и бутстреп могут быть адаптированы к параметрическим семействам и регрессионным моделям. В следующих нескольких главах мы предполагаем, что находимся в ситуации, когда у нас есть только одна случайная выборка  $\mathbf{x}$  из полностью неизвестного распределения  $F$ . Это называется непараметрической задачей с одной выборкой.

## Глава 5

# Стандартные ошибки и оценки стандартных ошибок

### 5.1 Введение

Сводная статистика, такая как  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ , часто является первым результатом анализа данных. Следующее, что мы хотим знать – это точность  $\hat{\theta}$ . Бутстреп обеспечивает оценки точности, используя принцип плагина для оценки стандартной ошибки сводной статистики. Это предмет следующей главы. Сначала мы обсудим оценку стандартной ошибки среднего, где принцип плагина может быть реализован явно.

### 5.2 Стандартная ошибка среднего

Предположим, что  $x$  – вещественная случайная величина с распределением вероятностей  $F$ . Обозначим математическое ожидание и дисперсию  $F$  символами  $\mu_F$  и  $\sigma_F^2$  соответственно,

$$\mu_F = E_F(x), \quad \sigma_F^2 = var_F(x) = E_F[(x - \mu_F)^2]. \quad (5.1)$$

В главе 3 эти величины назывались  $\mu_x$  и  $\sigma_x^2$ . Здесь мы подчеркиваем зависимость от  $F$ . Альтернативное обозначение  $var_F(x)$  для дисперсии, иногда сокращенное до  $var(x)$ , означает то же самое, что и  $\sigma_F^2$ . В дальнейшем мы иногда будем писать

$$x \sim (\mu_F, \sigma_F^2) \quad (5.2)$$

чтобы кратко обозначить математическое ожидание и дисперсию  $x$ .

Теперь пусть  $(x_1, \dots, x_n)$  будет случайной выборкой размера  $n$  из распределения  $F$ . Среднее значение выборки  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$  имеет математическое ожидание  $\mu_F$  и дисперсию  $\sigma_F^2/n$ ,

$$\bar{x} \sim (\mu_F, \sigma_F^2/n). \quad (5.3)$$

Другими словами, математическое ожидание  $\bar{x}$  такое же, как ожидание одного  $x$ , но дисперсия  $\bar{x}$  равна  $1/n$  дисперсии  $x$ . Это причина использования средних значений: чем больше  $n$ , тем меньше  $var(\bar{x})$ , поэтому большее  $n$  означает лучшую оценку  $\mu_F$ .

Стандартная ошибка среднего  $\bar{x}$ , записанная как  $se_F(\bar{x})$  или  $se(\bar{x})$ , является квадратным корнем из дисперсии  $\bar{x}$ ,

$$se_F(\bar{x}) = [var(\bar{x})]^{1/2} = \sigma_F / \sqrt{n}. \quad (5.4)$$

Стандартная ошибка – это общий термин для стандартного отклонения сводной статистики. Это наиболее распространенный способ индикации статистической точности. Грубо говоря, мы ожидаем, что  $|\bar{x} - \mu_F|$  будет меньше одной стандартной ошибки примерно в 68% случаев и меньше двух стандартных ошибок примерно в 95% случаев.

Эти проценты основаны на центральной предельной теореме. При довольно общих условиях на  $F$  распределение  $\bar{x}$  будет приблизительно нормальным при увеличении  $n$ , что мы можем записать как

$$\bar{x} \sim N(\mu_F, \sigma_F^2/n). \quad (5.5)$$

Математическое ожидание  $\mu_F$  и дисперсия  $\sigma_F^2/n$  в (5.5) точны, только нормальность является приблизительной. Используя (5.5), таблица нормального распределения дает

$$Prob\{|\bar{x} - \mu_F| < \frac{\sigma_F}{\sqrt{n}}\} = 0.683 \quad Prob\{|\bar{x} - \mu_F| < \frac{2\sigma_F}{\sqrt{n}}\} = 0.954, \quad (5.6)$$

как показано на Рисунке 5.1. Одно из преимуществ бутстрепа заключается в том, что не нужно полностью полагаться на центральную предельную теорему.

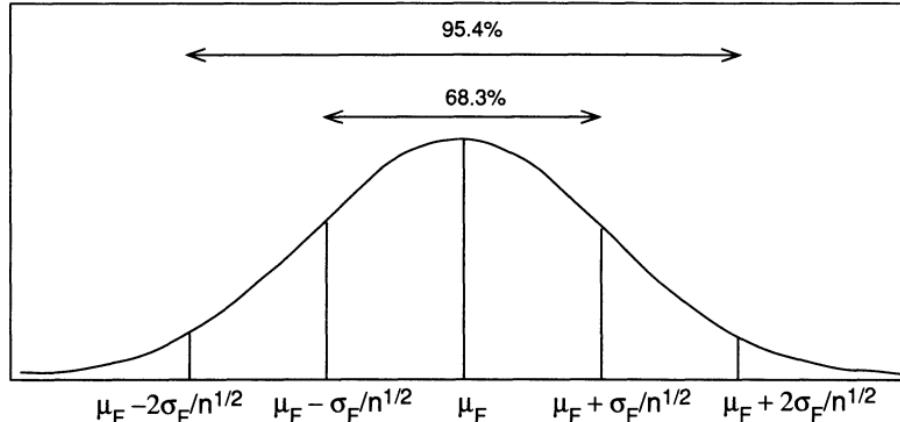


Figure 5.1. For large values of  $n$ , the mean  $\bar{x}$  of a random sample from  $F$  will have an approximate normal distribution with mean  $\mu_F$  and variance  $\sigma_F^2/n$ .

Простой пример показывает ограничения аппроксимации центральной предельной теоремы. Предположим, что  $F$  – это распределение, которое ставит вероятность только для двух исходов, 0 или 1, скажем

$$\text{Prob}\{x = 1\} = p \quad \text{Prob}\{x = 0\} = 1 - p. \quad (5.7)$$

Здесь  $p$  – параметр  $F$ , часто называемый вероятностью успеха, имеющий значение от 0 до 1. Случайная выборка  $F \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$  может рассматриваться как  $n$  независимых подбрасываний монеты с вероятностью успеха (или «орла», или  $x = 1$ ) равной  $p$ . Тогда сумма  $s = \sum_{i=1}^n x_i$  – количество успехов в  $n$  независимых бросках монеты;  $s$  имеет биномиальное распределение (3.3),

$$s \sim Bi(n, p). \quad (5.8)$$

Среднее значение  $\bar{x} = s/n$  равно  $\hat{p}$  в плагин оценке  $p$ . Распределение (5.7) имеет  $\mu_F = p$ ,  $\sigma_F^2 = p(1-p)$ , поэтому (5.3) дает

$$\hat{p} \sim (p, p(1-p)/n) \quad (5.9)$$

для среднего и дисперсии  $\hat{p}$ . Другими словами,  $\hat{p}$  – это несмешенная оценка  $p$ ,  $E(\hat{p}) = p$ , со стандартной ошибкой

$$se(\hat{p}) = \left[ \frac{p(1-p)}{n} \right]^{1/2}. \quad (5.10)$$

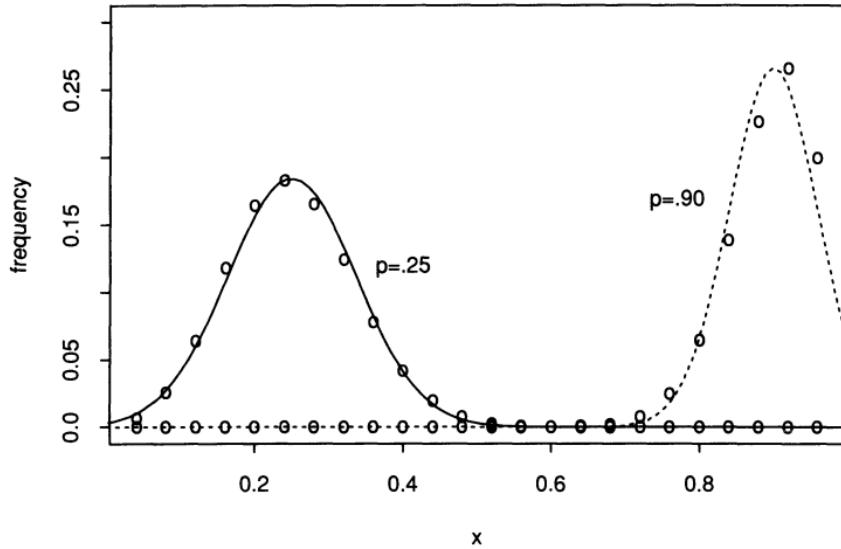


Figure 5.2. Comparison of the binomial distribution with the normal distribution suggested by the central limit theorem;  $n = 25$ ,  $p = .25$  and  $p = .90$ . The smooth curves are the normal densities, see problem 5.3; circles indicate the binomial probabilities (3.5). The approximation is good for  $p = .25$ , but is somewhat off for  $p = .90$ .

На рис. 5.2 показана центральная предельная теорема, работающая для биномиального распределения при  $n = 25$ ,  $p = 0.25$  и  $p = 0.90$ . Центральная предельная теорема дает хорошее приближение к биномиальному распределению для  $n = 25$ ,  $p = 0.25$ , но несколько хуже для  $n = 25$ ,  $p = 0.9$ .

### 5.3 Оценка стандартной ошибки среднего

Предположим, что у нас есть случайная выборка чисел  $F \rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$ , например контрольные измерения  $n = 9$  для данных о мышах из таблицы 2.1. Мы вычисляем оценку  $\bar{x}$  для математического ожидания  $\mu_F$ , равного 56.22 для данных о мышах, и хотим знать стандартную ошибку  $\bar{x}$ . Формула (5.4)  $se_F(\bar{x}) = \sigma_F / \sqrt{n}$  включает неизвестное распределение  $F$  и поэтому не может использоваться напрямую.

На этом этапе мы можем использовать принцип плагина: мы подставляем  $\hat{F}$  вместо  $F$  в формуле  $se_F(\bar{x}) = \sigma_F / \sqrt{n}$ . Плагин оценка  $\sigma_F = [E_F(x - \mu_F)^2]^{1/2}$  равна

$$\hat{\sigma} = \sigma_{\hat{F}} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.11)$$

поскольку  $\mu_{\hat{F}} = \bar{x}$  и  $E_{\hat{F}} g(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$  для любой функции  $g$ . Это дает оценку стандартной ошибки  $\hat{se}(\bar{x}) = se_{\hat{F}}(\bar{x})$ ,

$$\hat{se}(\bar{x}) = \sigma_{\hat{F}} / \sqrt{n} = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.12)$$

Для контрольной группы данных о мышах  $\hat{se}(\bar{x}) = 13.33$ .

Формула (5.12) немного отличается от обычной оценки стандартной ошибки (2.2). Это потому, что  $\sigma_F$  обычно оценивается как  $\bar{\sigma} = \{\sum(x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)\}^{1/2}$ , а не как  $\hat{\sigma}$ , (5.11). Деление на  $n - 1$  вместо  $n$  делает  $\bar{\sigma}^2$  несмещенной для  $\sigma_F^2$ . Для большинства целей  $\hat{\sigma}$  так же хороша, как  $\bar{\sigma}$  для оценки  $\sigma_F$ .

Обратите внимание, что мы использовали принцип плагина дважды: сначала для оценки математического ожидания  $\mu_F$  с помощью  $\mu_{\hat{F}} = \bar{x}$ , а затем для оценки стандартной ошибки  $se_F(\bar{x})$  с помощью  $se_{\hat{F}}(\bar{x})$ . Бутстреп оценка стандартной ошибки, о которой идет речь в главе 6, сводится к использованию принципа плагина для оценки стандартной ошибки произвольной статистики  $\hat{\theta}$ . Здесь мы видели, что если  $\hat{\theta} = \bar{x}$ , то этот подход приводит к (почти) обычной оценке стандартной ошибки. Как мы увидим, преимущество бутстрепа в том, что его можно применить практически к любой статистике  $\hat{\theta}$ , а не только к среднему значению  $\bar{x}$ .

## Глава 6

# Бутстреп оценка стандартной ошибки

### 6.1 Введение

Предположим, мы находимся в следующей общей ситуации анализа данных: была обнаружена случайная выборка  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  из неизвестного распределения вероятностей  $F$ , и мы хотим оценить интересующий параметр  $\theta = t(F)$  на основе  $\mathbf{x}$ . Для этого мы вычисляем оценку  $\hat{\theta} = s(\mathbf{x})$  из  $\mathbf{x}$ . [Обратите внимание, что  $s(\mathbf{x})$  может быть плагин оценкой  $t(\hat{F})$ , но это не обязательно.] Насколько точна  $\hat{\theta}$ ? Бутстреп был представлен в 1979 году как компьютерный метод оценки стандартной ошибки  $\hat{\theta}$ . Он имеет то преимущество, что он полностью автоматический. Самостоятельная оценка стандартной ошибки не требует теоретических вычислений и доступна независимо от того, насколько математически сложной может быть оценка  $\hat{\theta} = s(\mathbf{x})$ . Это описано и проиллюстрировано в этой главе.

### 6.2 Бутстреп оценка стандартной ошибки

Бутстреп методы зависят от понятия бутстреп выборки. Пусть  $\hat{F}$  – эмпирическое распределение, присваивающее вероятность  $1/n$  на каждое из наблюдаемых значений  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , как описано в главе 4. Бутстреп выборка является случайной выборкой размера  $n$ , набранной из  $\hat{F}$ , скажем,  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ,

$$\hat{F} \rightarrow (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*). \quad (6.1)$$

« $*$ » указывает, что  $\mathbf{x}^*$  не является фактическим набором данных  $\mathbf{x}$ , а скорее рандомизированной или перезапущенной версией  $\mathbf{x}$ .

Есть еще один способ сказать (6.1): точки бутстреп данных  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  являются случайной выборкой размера  $n$ , выбранной с заменой из совокупности  $n$  объектов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Таким образом, мы могли бы иметь

$x_1^* = x_7, x_2^* = x_3, x_3^* = x_3, x_4^* = x_{22}, \dots, x_n^* = x_7$ . Набор бутстреп данных  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  состоит из элементов исходного набора данных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , некоторые из которых появляются ноль раз, некоторые появляются один раз, некоторые появляются дважды, и так далее.

В соответствии с набором бутстреп данных  $\mathbf{x}^*$ , бутстреп репликация  $\hat{\theta}$  – это

$$\hat{\theta}^* = s(\mathbf{x}^*). \quad (6.2)$$

Величина  $s(\mathbf{x}^*)$  является результатом применения той же функции  $s(\cdot)$  к  $\mathbf{x}^*$ , которая была применена к  $\mathbf{x}$ . Например, если  $s(\mathbf{x})$  является выборочным средним значением  $\bar{x}$ , то  $s(\mathbf{x}^*)$  – это среднее значение набора бутстреп данных,  $\bar{x}^* = \sum_{i=1}^n x_i^*/n$ .

Бутстреп оценка  $se_F(\hat{\theta})$  стандартной ошибки статистики  $\hat{\theta}$  представляет собой плагин оценку, которая использует эмпирическую функцию распределения  $\hat{F}$  вместо неизвестного распределения  $F$ . В частности, бутстреп оценка  $se_F(\hat{\theta})$  определяется, как

$$se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*). \quad (6.3)$$

Другими словами, бутстреп оценка  $se_F(\hat{\theta})$  является стандартной ошибкой  $\hat{\theta}$  для наборов данных размером  $n$ , случайным образом выбранных из  $\hat{F}$ .

Формула (6.3) называется идеальной бутстреп оценкой ошибки  $\hat{\theta}$ . К сожалению, для практически любой оценки  $\hat{\theta}$ , кроме среднего, нет точной формулы (5.4), которая позволяет вычислить числовое значение идеальной оценки точно. Бутстреп алгоритм, описанный ниже, является вычислительным способом получения хорошего приближения к численному значению  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ .

Легко реализовать бутстреп выборку на компьютере. Устройство выбирает случайные целые числа  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , каждое из которых равняется любому значению между 1 и  $n$  с вероятностью  $1/n$ . Бутстреп выборка состоит из соответствующих членов  $\mathbf{x}$ ,

$$x_1^* = x_{i_1}, x_2^* = x_{i_2}, \dots, x_n^* = x_{i_n}. \quad (6.4)$$

Бутстреп алгоритм работает путем выбора множества независимых бутстреп выборок, оценки соответствующих бутстреп репликаций и оценки стандартной ошибки  $\hat{\theta}$  через эмпирическое стандартное отклонение репликаций. Результат называется бутстреп оценкой стандартной ошибки, обозначенной  $\hat{se}_B$ , где  $B$  – количество используемых бутстреп выборок.

Алгоритм 6.1 – это более явное описание бутстреп процедуры для оценки стандартной ошибки  $\hat{\theta} = s(\mathbf{x})$  из наблюдаемых данных  $\mathbf{x}$ .

*Алгоритм 6.1*  
Бутстреп алгоритм для оценки стандартных ошибок

1. Выберите  $B$  независимых бутстреп выборок  $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*B}$ , каждый из которых состоит из  $n$  точек данных, выбранных с заменой их  $\mathbf{x}$ , как в (6.1) или (6.4). [Для оценки стандартной ошибки  $B$  обычно будет в диапазоне 25-200, см. Таблицу 6.1.]
2. Оцените бутстреп репликацию, соответствующую каждой бутстреп выборке,

$$\hat{\theta}^*(b) = s(\mathbf{x}^{*b}) \quad b = 1, 2, \dots, B. \quad (6.5)$$

3. Оцените стандартную ошибку  $se_F(\hat{\theta})$  через выборочное стандартное отклонение  $B$  репликаций

$$\widehat{se}_B = \left\{ \sum_{b=1}^B [\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot)]^2 / (B-1) \right\}^{1/2}, \quad (6.6)$$

где  $\hat{\theta}^*(\cdot) = \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b) / B$ .

На рисунке 6.1 изображена схематическая диаграмма бутстреп алгоритма стандартных ошибок.

Предел  $\widehat{se}_B$  по  $B$  стремится к бесконечности – это идеальная бутстреп оценка  $se_F(\hat{\theta})$ ,

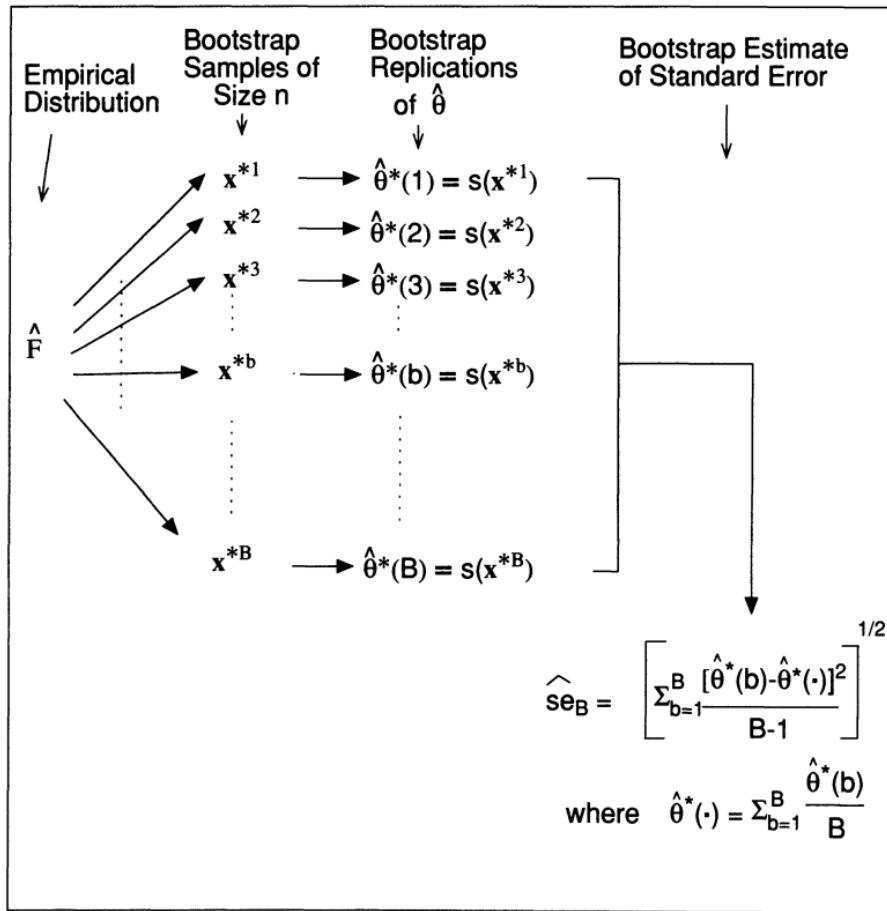
$$\lim_{B \rightarrow \infty} \widehat{se}_B = se_{\hat{F}} = se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*). \quad (6.7)$$

Тот факт, что  $\widehat{se}_B$  стремится к  $se_{\hat{F}}$  при  $B$ , стремящимся к бесконечности, позволяет сказать, что эмпирическое стандартное отклонение приближается к стандартному отклонению совокупности с увеличением количества репликаций. «Совокупность» в этом случае является совокупностью значений  $\hat{\theta}^* = s(\mathbf{x}^*)$ , где  $\hat{F} \rightarrow (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \mathbf{x}^*$ .

Идеальная бутстреп оценка  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$  и его приближение  $\widehat{se}_B$  иногда называют непараметрическими бутстреп оценками, потому что они основаны на  $\hat{F}$ , непараметрической оценке  $F$ . В разделе 6.5 мы обсудим параметрический бутстреп, который использует другую оценку  $F$ .

Немного об обозначениях: в (6.7) мы пишем  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ , а не  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta})$ , чтобы избежать путаницы между  $\hat{\theta}$ , значением  $s(\mathbf{x})$  на основе наблюдаемых данных, и  $\hat{\theta}^* = s(\mathbf{x}^*)$ , случайной величиной на основе бутстреп выборки. Более подробное обозначение  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}(\mathbf{x}^*))$  подчеркивает, что  $se_{\hat{F}}$  является бутстрепированной стандартной ошибкой: фактические данные  $\mathbf{x}$  остаются фиксированными в (6.7); Случайность в расчете исходит из изменчивости бутстреп выборок  $\mathbf{x}^*$  для данного  $\mathbf{x}$ . Точно так же мы будем писать  $E_{\hat{F}} g(\mathbf{x}^*)$ , чтобы указать бутстрепированное математическое ожидание функции  $g(\mathbf{x}^*)$ : математическое ожидание с фиксированным  $\mathbf{x}$  (и  $\hat{F}$ ) и случайным  $\mathbf{x}^*$  в соответствии с (6.1).

Figure 6.1. The bootstrap algorithm for estimating the standard error of a statistic  $\hat{\theta} = s(\mathbf{x})$ ; each bootstrap sample is an independent random sample of size  $n$  from  $\hat{F}$ . The number of bootstrap replications  $B$  for estimating a standard error is usually between 25 and 200. As  $B \rightarrow \infty$ ,  $\hat{s}_B$  approaches the plug-in estimate of  $s_{\hat{F}}(\hat{\theta})$ .



Всего существует  $C_n^{2n-1}$  различных бутстреп выборок. Обозначим их через  $z^1, z^2, \dots, z^m$ , где  $m = C_n^{2n-1}$ . Например, если  $n = 2$ , отдельными выборками являются  $(x_1, x_1)$ ,  $(x_2, x_2)$  и  $(x_1, x_2)$ ; поскольку порядок не имеет значения,  $(x_2, x_1)$  совпадает с  $(x_1, x_2)$ . Вероятность получения одной из этих выборок при выборе с заменой может быть получена из полиномиального распределения. Обозначим вероятность  $j$ -й выборки через  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, C_n^{2n-1}$ . Тогда прямым способом вычисления идеальной бутстреп оценки стандартной ошибки будет использование стандартного отклонения со-

вокупности  $m$  бутстреп значений  $s(z^j)$ :

$$se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*) = [\sum_{j=1}^m \omega_j \{s(z^j) - s(\cdot)\}^2]^{1/2} \quad (6.8)$$

где  $s(\cdot) = \sum_{j=1}^m \omega_j s(z^j)$ . Сложность этого подхода заключается в том, что, если  $n$  не достаточно мало ( $\leq 5$ ), число  $C_n^{2n-1}$  очень велико, что делает вычисление (6.8) непрактичным. Отсюда необходимость в бутстррап выборках, описанных выше.

### 6.3 Пример: коэффициент корреляции

Мы уже видели два примера бутстреп оценок стандартной ошибки для среднего и медианного значения для экспериментальной группы данных о мышах, таблица 2.1. В качестве второго примера рассмотрим выборочный коэффициент корреляции между  $y = LSAT$  и  $z = GPA$  для  $n = 15$  точек данных о юридических школах, таблица 3.1,  $\widehat{corr}(y, z) = 0.776$ . Насколько точна оценка 0.776? В таблице 6.1 показана бутстреп оценка стандартной ошибки  $\widehat{se}_B$  для  $B$  в диапазоне от 25 до 3200. Последнее значение,  $\widehat{se}_{3200} = 0.132$ , является нашей оценкой  $se_F(\widehat{corr})$ . Позже мы увидим, что  $\widehat{se}_{200}$  почти так же хороша для оценки  $se_F$ , как  $\widehat{se}_{3200}$ .

Глядя на правую часть рисунка 3.1, читатель может представить себе, как работает генерация бутстреп выборок. Выборочная корреляция по  $n = 15$  исходным точкам данных составляет  $\widehat{corr} = 0.776$ . Бутстреп выборка состоит из 15 точек, выбранных случайным образом и заменяющих исходные 15. Корреляция бутстреп выборки представляет собой бутстреп репликацию  $\widehat{corr}^*$ , которая может быть больше или меньше, чем  $\widehat{corr}$ . Независимые повторения генерации бутстреп выборок дают бутстреп репликации  $\widehat{corr}^*(1), \widehat{corr}^*(2), \dots, \widehat{corr}^*(B)$ . Наконец,  $\widehat{se}_B$  – выборочное стандартное отклонение значений  $\widehat{corr}^*(b)$ .

Table 6.1. The bootstrap estimate of standard error for  $\widehat{corr}(y, z) = .776$ , the law school data of Table 3.1,  $n = 15$ ; a run of 3200 bootstrap replications gave the tabled values of  $\widehat{se}_B$  as  $B$  increased from 25 to 3200.

$B:$	25	50	100	200	400	800	1600	3200
$\widehat{se}_B:$	.140	.142	.151	.143	.141	.137	.133	.132

Левая панель рисунка 6.2 представляет собой гистограмму 3200 бутстреп репликаций  $\widehat{corr}^*(b)$ . Всегда рекомендуется просматривать бутстреп данные графически, а не полагаться полностью на одну сводную статистику, такую как  $\widehat{se}_B$ . В примере корреляции может оказаться, что несколько выпадающих значений  $\widehat{corr}^*(b)$  сильно раздувают  $\widehat{se}_B$ , и в этом случае стоит использовать более надежную меру стандартного отклонения; Выводы,

основанные на нормальной кривой, как в (5.6) и на рисунке 5.1, сомнительны, когда бутстреп гистограмма явно ненормальна.

В примере с юридическими школами у нас есть полная совокупность  $\mathbf{X}$  из  $N = 82$  школ, Таблица 3.2. В правой части рисунка 6.2 показана гистограмма  $\widehat{\text{corr}}(y, z)$  для 3200 выборок размера  $n = 15$ , взятых из  $\mathbf{X}$ . Другими словами, 3200 случайных выборок  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{15})$  были составлены с заменой из 82 точек в  $\mathbf{X}$ , и  $\widehat{\text{corr}}(\mathbf{x})$  оценивался для каждого из них. Стандартное отклонение 3200 значений  $\widehat{\text{corr}}(\mathbf{x})$  составило 0.131, таким образом  $\widehat{se}_B$  является хорошей оценкой стандартной ошибки генеральной совокупности. Что еще более впечатляюще, бутстреп гистограмма слева сильно напоминает гистограмму справа. Помните, что в реальной проблеме у нас была бы только информация слева, из которой мы пытались бы вывести ситуацию справа.

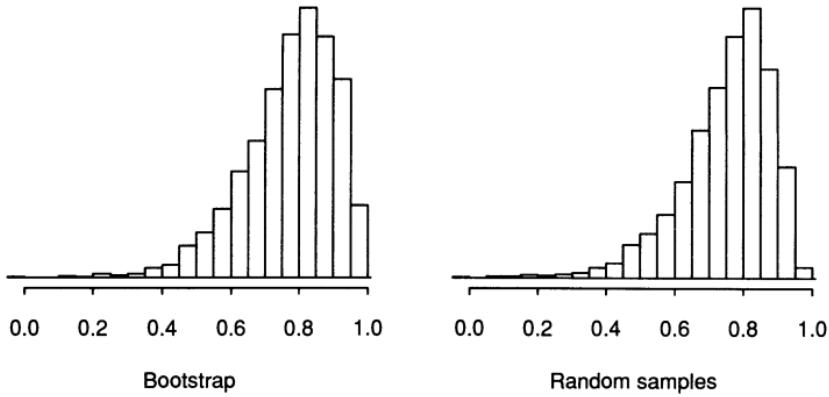


Figure 6.2. Left panel: histogram of 3200 bootstrap replications of  $\widehat{\text{corr}}(\mathbf{x}^*)$ , from the law school data,  $n = 15$ , Table 3.1. Right panel: histogram of 3200 replications  $\widehat{\text{corr}}(\mathbf{x})$ , where  $\mathbf{x}$  is a random sample of size  $n$  from the  $N = 82$  points in the law school population, Table 3.2. The bootstrap histogram strongly resembles the population histogram. Both are notably non-normal.

## 6.4 Количество бутстреп репликаций $B$

Насколько большим мы должны взять  $B$ , количество бутстреп репликаций, используемых для оценки  $\widehat{se}_B$ ? Идеальная бутстреп оценка  $\widehat{se}_\infty$  использует  $B = \infty$ , и в этом случае  $\widehat{se}_\infty$  равно плагин оценке  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ . Формула (5.12) дает  $\widehat{se}_\infty$  для  $\hat{\theta} = \bar{x}$ , но для большинства других статистических данных мы должны фактически выполнить генерацию бутстреп выборок. Время, затрачиваемое компьютером, которое в основном зависит от того, сколько времени требуется для оценки бутстреп репликаций (6.5), линейно увеличи-

вается с  $B$ . Временные ограничения могут диктовать небольшое значение  $B$ , если  $\hat{\theta} = s(\mathbf{x})$  – очень сложная функция.

Нам нужно такое же хорошее поведение от оценки стандартной ошибки, что и от оценки любой другой интересующей величины: небольшая систематическая ошибка и небольшое стандартное отклонение. Бутстреп оценка стандартной ошибки обычно имеет относительно небольшое смещение. Идеальная начальная оценка  $\hat{se}_\infty$  имеет наименьшее возможное стандартное отклонение среди почти несмешанных оценок  $se_F(\hat{\theta})$ , по крайней мере, в асимптотическом ( $n \rightarrow \infty$ ) смысле. Эти хорошие свойства вытекают из того факта, что  $\hat{se}_B$  – это плагин оценка  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta})^*$ . Нетрудно показать, что  $\hat{se}_B$  всегда имеет большее стандартное отклонение, чем  $\hat{se}_\infty$ . Практический вопрос: насколько большее?

Приблизительный, но вполне удовлетворительный ответ можно сформулировать в терминах коэффициента вариации  $\hat{se}_B$ , отношения стандартного отклонения  $\hat{se}_B$  к его математическому ожиданию. Повышенная изменчивость из-за остановки после  $B$  бутстреп репликаций, а не бесконечности, отражается в увеличенном коэффициенте вариации,

$$cv(\hat{se}_B) = \left\{ cv(\hat{se}_\infty)^2 + \frac{E(\Delta) + 2}{4B} \right\}^{1/2}. \quad (6.9)$$

Здесь  $\Delta$  – параметр, который измеряет, насколько длиннохвостым является распределение  $\hat{\theta}^*$ : если  $\Delta$  равно нулю для нормального распределения, оно колеблется от  $-2$  для короткохвостых распределений до произвольно больших значений, когда  $F$  длиннохвостное. На практике  $\delta$  обычно не превышает 10. Коэффициент вариации в уравнении (6.9) относится к вариации как на уровне повторных выборок (бутстреп), так и на уровне исходной выборки. Идеальная оценка  $\hat{se}_\infty = se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$  не идеальна. Она все еще может иметь значительную изменчивость в качестве оценки  $se_F(\hat{\theta})$  из-за изменчивости  $\hat{F}$  как оценки  $F$ . Например, если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  является случайной выборкой из нормального распределения и  $\hat{\theta} = \bar{x}$ , тогда  $cv(\hat{se}_\infty) = 1/\sqrt{2n}$ , равное 0.22 для  $n = 10$ . Формула (6.9) имеет важное практическое следствие: для значений  $cv(\hat{se}_\infty)$  и  $\Delta$ , которые могут возникнуть на практике,  $cv(\hat{se}_B)$  не намного больше, чем  $cv(\hat{se}_\infty)$  для  $B \geq 200$ .

Таблица 6.2 сравнивает  $cv(\hat{se}_B)$  с  $cv(\hat{se}_\infty)$  для различных вариантов  $B$ , предполагая  $\Delta = 0$ . Очень часто можно ожидать, что  $cv(\hat{se}_\infty)$  будет не меньше, чем 0.10, и в этом случае  $B = 100$  дает вполне удовлетворительные результаты.

Table 6.2. The coefficient of variation of  $\hat{se}_B$  as a function of the coefficient of variation of the ideal bootstrap estimate  $\hat{se}_\infty$  and the number of bootstrap samples  $B$ ; from formula (6.9) assuming  $\Delta = 0$ .

	$B \rightarrow$				
	25	50	100	200	$\infty$
$\text{cv}(\hat{se}_\infty)$	.25	.29	.27	.26	.25
$\downarrow$	.20	.24	.22	.21	.20
	.15	.21	.18	.17	.16
	.10	.17	.14	.12	.10
	.05	.15	.11	.09	.05
	.00	.14	.10	.07	.00

Вот два практических правила, взятых из опыта:

1. Даже небольшое количество бутстреп репликаций, скажем,  $B = 25$ , обычно является информативным.  $B = 50$  часто бывает достаточно, чтобы дать хорошую оценку  $se_F(\hat{\theta})$ .
2. Очень редко для оценки стандартной ошибки требуется более  $B = 200$  репликаций. (Для доверительных бутстреп интервалов требуются гораздо большие значения  $B$ .)

Аппроксимации, полученные путем случайной выборки или моделирования, называются оценками Монте-Карло. Вычислительные методы, отличные от прямого моделирования Монте-Карло, иногда могут во много раз сократить количество повторений  $B$ , необходимых для достижения заданной точности. Между тем стоит помнить, что бутстреп данные, как и реальные данные, заслуживают внимательного изучения. В частности, отображение гистограммы бутстреп репликаций почти никогда не бывает пустой тратой времени.

## 6.5 Параметрический бутстреп

Может показаться странным использование бутстреп алгоритма для оценки стандартных ошибок, когда можно использовать формулу из учебника. Фактически, бутстреп выборки могут генерироваться параметрически, в этом случае результаты тесно связаны с формулами стандартных ошибок из учебников.

Параметрическая бутстреп оценка стандартной ошибки определяется как

$$se_{\hat{F}_{par}}(\hat{\theta}^*), \quad (6.10)$$

где  $\hat{F}_{par}$  – оценка  $F$ , полученная из параметрической модели данных. Здесь мы приведем простой пример, чтобы проиллюстрировать идею. Для данных

о юридических школах, вместо оценки  $F$  эмпирическим распределением  $\hat{F}$ , мы могли бы предположить, что популяция имеет двумерное нормальное распределение. Разумные оценки среднего значения и ковариации этой совокупности даны как  $(\bar{y}, \bar{z})$  и

$$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} \sum(y_i - \bar{y})^2 & \sum(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) \\ \sum(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) & \sum(z_i - \bar{z})^2 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Обозначим двумерную нормальную популяцию с этим средним значением и ковариацией как  $\hat{F}_{norm}$ ; это пример параметрической оценки совокупности  $F$ . Используя это, параметрическая бутстреп оценка стандартной ошибки корреляции  $\hat{\theta}$  является  $se_{\hat{F}_{norm}}(\hat{\theta}^*)$ . Как и в непараметрическом случае, идеальная параметрическая бутстреп оценка не может быть легко вычислена, за исключением тех случаев, когда  $\hat{\theta}$  является средним. Поэтому мы аппроксимируем идеальную бутстреп оценку с помощью бутстреп выборок, но другим способом, чем раньше. Вместо выборок с заменой из исходных данных мы берем  $B$  выборок размера  $n$  из параметрической оценки генеральной совокупности  $\hat{F}_{par}$ :

$$\hat{F}_{par} \rightarrow (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*). \quad (6.12)$$

После генерации бутстреп выборок мы действуем точно так же, как в шагах 2 и 3 бутстреп алгоритма из раздела 6.2: мы оцениваем нашу статистику для каждой бутстреп выборки, а затем вычисляем стандартное отклонение  $B$  бутстреп репликаций.

В примере с коэффициентом корреляции, предполагая двумерную нормальную совокупность, мы берем  $B$  выборок размером 15 из  $\hat{F}_{norm}$  и вычисляем коэффициент корреляции для каждой бутстреп выборки. На левой панели рисунка 6.3 показана гистограмма для  $B = 3200$  бутстреп репликаций, полученных таким образом. Это очень похоже на гистограммы на рисунке 6.2. Параметрическая бутстреп оценка стандартной ошибки для этих повторений была 0.124, что близко к значению 0.131, полученному на непараметрических бутстреп выборках.

Учебная формула для стандартной ошибки коэффициента корреляции составляет  $(1 - \hat{\theta}^2)/\sqrt{n - 3}$ . Подставляя  $\hat{\theta} = 0.776$ , она дает значение 0.15 для данных о юридических школах.

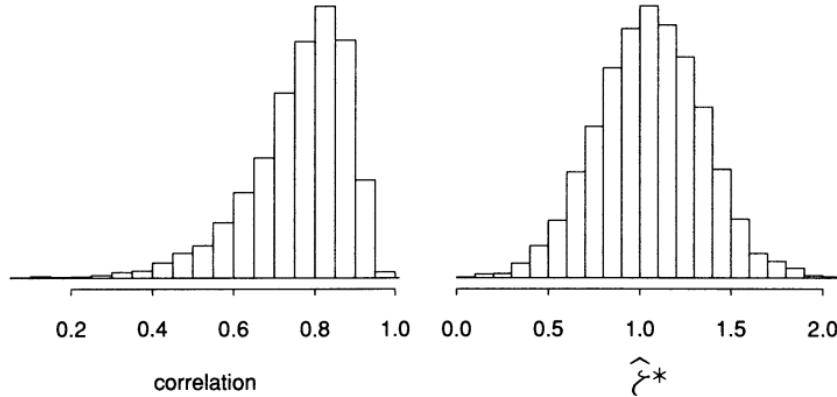


Figure 6.3. Left panel: histogram of 3200 parametric bootstrap replications of  $\widehat{\text{corr}}(\mathbf{x}^*)$ , from the law school data,  $n = 15$ . Right panel: histogram of 3200 replications of  $\hat{\zeta}$ , Fisher's transformation of the correlation coefficient, defined in (6.12). The left histogram looks much like the histograms of (6.2), while the right histogram looks quite normal as predicted by statistical theory.

Мы можем провести дальнейшее сравнение с нашим параметрическим бутстреп результатом. Учебные материалы также утверждают, что преобразование Фишера, примененное к  $\hat{\theta}$

$$\hat{\zeta} = 0.5 \log \left( \frac{1 + \hat{\theta}}{1 - \hat{\theta}} \right) \quad (6.13)$$

приблизительно нормально распределено со средним  $\zeta = 0.5 \log \left( \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right)$  и стандартным отклонением  $1/\sqrt{n - 3}$ , где  $\theta$  является коэффициентом корреляции совокупности. Исходя из этого, обычно выполняется вывод для  $\zeta$  и затем преобразуется обратно, чтобы сделать вывод о коэффициенте корреляции. Чтобы сравнить это с нашим параметрическим бутстреп анализом, мы вычислили  $\zeta$  вместо  $\hat{\theta}$  для каждой из наших 3200 бутстреп выборок. Гистограмма значений  $\hat{\zeta}^*$  показана на правой панели рисунка 6.3 и выглядит вполне нормально. Кроме того, стандартное отклонение 3200 значений  $\hat{\zeta}^*$  было 0.290, что очень близко к значению  $1/\sqrt{15 - 3} = 0.289$ .

Это соглашение выполняется в целом. Большинство формул для стандартных ошибок в учебниках являются приближениями, основанными на нормальной теории, и обычно дают ответы, близкие к параметрическому бутстрепу, который отбирает выборки из нормального распределения. Взаимосвязь между бутстрепом и традиционной статистической теорией – более сложная математическая тема.

У бутстрепа есть два несколько отличных друг от друга преимущества по сравнению с традиционными методами из учебников: 1) при использовании в непараметрическом режиме он избавляет аналитика от необходимости

делать параметрические предположения о форме базовой совокупности, и 2) при использовании в параметрическом режиме он обеспечивает более точные ответы, чем формулы из учебника, и могут дать ответы на задачи, для которых не существует формул из учебника.

Большая часть этого пособия сосредоточена на непараметрическом применении бутстрепа. Параметрический бутстреп полезен в задачах, где доступны некоторые знания о форме генеральной совокупности, а также для сравнение с непараметрическим анализом. Однако основная причина использования параметрических допущений в традиционном статистическом анализе состоит в том, чтобы облегчить вывод формул для стандартных ошибок из учебников. Поскольку нам не нужны формулы в бутстреп подходе, мы можем избежать ограничительных параметрических предположений.

# Глава 7

## Бутстреп и стандартные ошибки: некоторые примеры

### 7.1 Введение

До внедрения компьютеров вычисляли стандартные ошибки используя методы математического анализа и предположения о распределении, что часто предполагало много работы на механических калькуляторах. Один такой классический результат был дан в разделе 6.5: он относится к выборочному коэффициенту корреляции  $\widehat{\text{corr}}(y, z)$  (4.6). Если сделать предположение о том, что  $n$  элементов выборки  $(y_i, z_i)$  взяты из двумерного нормального распределения с функцией распределения  $F$ , тогда разумной оценкой стандартной ошибки  $\widehat{\text{corr}}$  будет

$$\widehat{s}_{\text{normal}} = (1 - \widehat{\text{corr}}^2) / \sqrt{n - 3} \quad (7.1)$$

Ясно, что может последовать возражение относительно использования двумерного нормального распределения: на каком основании делается предположение о том, что  $F$  подчиняется нормальному закону? Для намётанного глаза точки на правом графике рисунка 3.1 не выглядят взятыми из нормального распределения — точка с координатами (576, 3.39) кажется слишком далёкой от остальных 14 точек. На самом деле, главная причина выбора двумерного нормального распределения — простота оценивания. Другое предположение не привело бы к такой простой оценке для  $s_{\text{corr}}$ .

Есть ещё одно серьёзное возражение против  $\widehat{s}_{\text{normal}}$ : требуется приложить серьёзные усилия для того, чтобы вывести формулу наподобие (7.1). Если выбрать чуть более сложную статистику, чем  $\widehat{\text{corr}}$ , или же менее стандартное распределение, то никакие математические трюки не приведут к простой формуле. Ввиду таких ограничений, до-компьютерная статистика в качестве объектов интереса рассматривала в основном небольшие классы распределений и ограниченный набор статистик. Компьютерные методы, такие как бутстреп, освобождают статистика от таких ограничений.

Стандартные ошибки, равно как и другие статистические меры точности, получаются в результате процедуры автоматически, безотносительно к математической сложности.<sup>1</sup>

Бутстреп методы оказываются очень полезными в сложных проблемах оценивания. В этой главе обсуждаются стандартные ошибки для двух таких задач: первая касается собственных значений и собственных векторов матрицы ковариаций, вторая — алгоритма *loess* приближения функций. Разъяснение данных задач требует знакомства с матричной терминологией, однако здесь это будет опущено; в любом случае эта теория не является необходимой для того, чтобы понять главную идею: что простой алгоритм бутстрепа позволяет находить стандартные ошибки для очень трудных случаев.

## 7.2 Пример 1: результаты тестов

В таблице 7.1 показаны данные результатов тестов из Mardia, Kent and Bibby (1979);  $n = 88$  студентов сдавали пять тестов: по механике, векторному исчислению, алгебре, математическому анализу, и статистике.

На первых двух тестах не разрешалось использовать учебник, на остальных учебник был разрешён. Удобно представлять эти данные как матрица данных  $\mathbf{X}$  размерности  $88 \times 5$ , где  $i$ -ая строка есть

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}) \quad (7.2)$$

— пять результатов  $i$ -го студента,  $i = 1, 2, \dots, 88$ .

Вектор средних  $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{88} \mathbf{x}_i / 88$  есть вектор средних по столбцам:

$$\bar{\mathbf{x}} = (38.95, 50.59, 50.60, 46.68, 42.31). \quad (7.3)$$

Эмпирическая ковариационная матрица  $\mathbf{G}$  — это матрица  $5 \times 5$ , где  $(j, k)$ -й элемент равен

$$G_{jk} = \frac{1}{88} \sum_{i=1}^{88} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) \quad j, k = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (7.4)$$

Заметим, что диагональные элементы  $G_{jj}$  это оценки дисперсии результатов теста  $j$  методом подстановки. Получим матрицу

---

<sup>1</sup>В таком подходе есть не только плюсы. Теоретические формулы наподобие (7.1) могут помочь нам понимать ситуацию немного иначе, чем при получении численных результатов применения bootstrap. Хорошо иметь в виду, что такие методы, как bootstrap, освобождают статистика от необходимости смотреть на данные более глубоко, без страха усложнений в математике, но не *менее*.

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 302.3 & 125.8 & 100.4 & 105.1 & 116.1 \\ 125.8 & 170.9 & 84.2 & 93.6 & 97.9 \\ 100.4 & 84.2 & 111.6 & 110.8 & 120.5 \\ 105.1 & 93.6 & 110.8 & 217.9 & 153.8 \\ 116.1 & 97.9 & 120.5 & 153.8 & 294.4 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= 679.2 & \hat{\mathbf{v}}_1 &= (.505, .368, .346, .451, .535) \\ \hat{\lambda}_2 &= 199.8 & \hat{\mathbf{v}}_2 &= (-.749, -.207, .076, .301, .548) \\ \hat{\lambda}_3 &= 102.6 & \hat{\mathbf{v}}_3 &= (-.300, .416, .145, .597, -.600) \\ \hat{\lambda}_4 &= 83.7 & \hat{\mathbf{v}}_4 &= (.296, -.783, -.003, .518, -.176) \\ \hat{\lambda}_5 &= 31.8 & \hat{\mathbf{v}}_5 &= (.079, .189, -.924, .286, .151). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Какой интерес представляют собственные значения и векторы ковариационной матрицы? Они помогают описать структуру высокоразмерных данных (как в случае с таблицей (7.1)) в которых описано большое число независимых величин ( $n = 88$  студентов), но при этом имеются коррелированные измерения для каждого студента. Заметьте, что пять тестовых оценок высоко коррелированы. Студент, который хорошо сдал тест по механике, вероятно также хорошо сдал тест и по векторам и т.д. Очень простая модель для коррелированных оценок имеет вид

$$\mathbf{x}_i = Q_i \mathbf{v}, \quad i = 1, 2, \dots, 88. \quad (7.7)$$

Table 7.1. The score data, from Mardia, Kent and Bibby (1979);  $n = 88$  students each took five tests, in mechanics, vectors, algebra, analysis, and statistics; “c” and “o” indicate closed and open book, respectively.

#	mec (c)	vec (c)	alg (o)	ana (o)	sta (o)	#	mec (c)	vec (c)	alg (o)	ana (o)	sta (o)
1	77	82	67	67	81	45	46	61	46	38	41
2	63	78	80	70	81	46	40	57	51	52	31
3	75	73	71	66	81	47	49	49	45	48	39
4	55	72	63	70	68	48	22	58	53	56	41
5	63	63	65	70	63	49	35	60	47	54	33
6	53	61	72	64	73	50	48	56	49	42	32
7	51	67	65	65	68	51	31	57	50	54	34
8	59	70	68	62	56	52	17	53	57	43	51
9	62	60	58	62	70	53	49	57	47	39	26
10	64	72	60	62	45	54	59	50	47	15	46
11	52	64	60	63	54	55	37	56	49	28	45
12	55	67	59	62	44	56	40	43	48	21	61
13	50	50	64	55	63	57	35	35	41	51	50
14	65	63	58	56	37	58	38	44	54	47	24
15	31	55	60	57	73	59	43	43	38	34	49
16	60	64	56	54	40	60	39	46	46	32	43
17	44	69	53	53	53	61	62	44	36	22	42
18	42	69	61	55	45	62	48	38	41	44	33
19	62	46	61	57	45	63	34	42	50	47	29
20	31	49	62	63	62	64	18	51	40	56	30
21	44	61	52	62	46	65	35	36	46	48	29
22	49	41	61	49	64	66	59	53	37	22	19
23	12	58	61	63	67	67	41	41	43	30	33
24	49	53	49	62	47	68	31	52	37	27	40
25	54	49	56	47	53	69	17	51	52	35	31
26	54	53	46	59	44	70	34	30	50	47	36
27	44	56	55	61	36	71	46	40	47	29	17
28	18	44	50	57	81	72	10	46	36	47	39
29	46	52	65	50	35	73	46	37	45	15	30
30	32	45	49	57	64	74	30	34	43	46	18
31	30	69	50	52	45	75	13	51	50	25	31
32	46	49	53	59	37	76	49	50	38	23	9
33	40	27	54	61	61	77	18	32	31	45	40
34	31	42	48	54	68	78	8	42	48	26	40
35	36	59	51	45	51	79	23	38	36	48	15
36	56	40	56	54	35	80	30	24	43	33	25
37	46	56	57	49	32	81	3	9	51	47	40
38	45	42	55	56	40	82	7	51	43	17	22
39	42	60	54	49	33	83	15	40	43	23	18
40	40	63	53	54	25	84	15	38	39	28	17
41	23	55	59	53	44	85	5	30	44	36	18
42	48	48	49	51	37	86	12	30	32	35	21
43	41	63	49	46	34	87	5	26	15	20	20
44	46	52	53	41	40	88	0	40	21	9	14

$Q_i$  является числом, представляющим способности  $i$ -го студента, в то

время как  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  есть фиксированный вектор из 5 чисел, определённый для всех студентов.  $Q_i$  можно рассматривать как общую оценку интеллектуальных способностей студента  $i$  (IQ). Изначально IQ были мотивированы именно моделями чуть сложнее, чем (7.7).

Если бы модель (7.7) была верна, мы бы смогли это определить из собственных значений: только  $\hat{\lambda}_1$  было бы положительным, остальные —  $\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_4, \hat{\lambda}_5$  — равнялись бы нулю; также первый собственный вектор  $\hat{\mathbf{v}}_1$  был бы равен  $\mathbf{v}$ . Пусть  $\hat{\theta}$  есть частное наибольшего собственного значения и их суммы, то есть

$$\hat{\theta} = \hat{\lambda}_1 / \sum_{i=1}^5 \hat{\lambda}_i. \quad (7.8)$$

Модель (7.7) эквивалентна  $\hat{\theta} = 1$ . Конечно, мы не можем ожидать, что для таких зашумлённых данных, как оценки, модель (7.7) окажется точной, даже если модель фундаментально верна.

Рисунок 7.1 даёт стилизованную иллюстрацию этого замечания. Мы взяли только две из оценок и отобразили слева ситуацию, если бы одно число  $Q_i$  идеально отражало обе оценки. Оценки лежат на одной прямой;  $Q_i$  можно считать как расстояние вдоль прямой до каждой точки от начала координат. Рисунок справа показывает более реалистичную ситуацию. Точки не лежат вдоль прямой, но расположены близко к ней. Прямая на графике коллинеарна направлению, заданному первым собственным вектором ковариационной матрицы. Эта прямая иногда называется *прямой первой главной компоненты* и имеет следующее свойство: она минимизирует сумму квадратов расстояний между точками и прямой (в отличие от метода наименьших квадратов, который заключается в минимизации суммы квадратов вертикальных расстояний до прямой). Эти расстояния показаны на рисунке справа в виде небольших отрезков. Сложно создать такой график для всех данных об оценках: прямая главной компоненты была бы прямой в пятимерном пространстве, лежащей ближе всего к данным. Если рассмотреть проекцию каждой из точек на прямую, прямая первой главной компоненты также будет минимизировать выборочную дисперсию всех спроектированных точек.

Для данных с оценками получим

$$\hat{\theta} = \frac{679.2}{679.2 + 199.8 + \dots + 31.8} = 0.619. \quad (7.9)$$

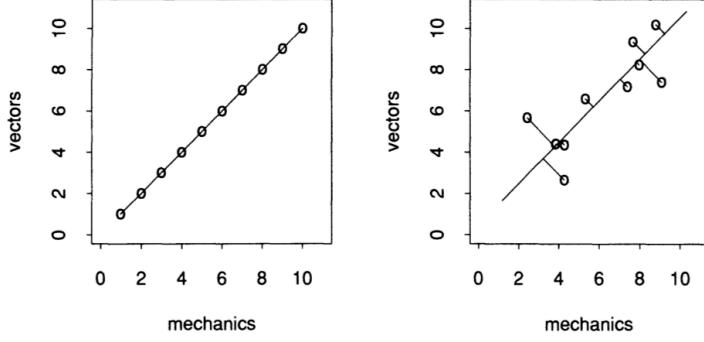


Figure 7.1. Hypothetical plot of mechanics and vector scores. On the left, the pairs line exactly on a straight line (that is, have correlation 1) and hence a single measure captures the two scores. On the right, the scores have correlation less than one. The principal component line minimizes the sum of orthogonal distances to the line and has direction given by the largest eigenvector of the covariance matrix.

Во многих ситуациях такое большое значение  $\hat{\theta}$  можно считать достаточно любопытным, что показывает высокую степень предсказательной силы модели (7.7). Значение  $\hat{\theta}$  измеряет процент дисперсии, объясняемой первой главной компонентой. Чем ближе точки лежат к прямой первой главной компоненты, тем выше значение  $\hat{\theta}$ . Насколько точна оценка  $\hat{\theta}$ ? Именно для ответа на такие вопросы бутстреп и был создан. Математическая сложность вычисления  $\hat{\theta}$  не важна до тех пор пока мы можем подсчитать  $\hat{\theta}^*$  для любых бутстреп данных. В этом случае бутстреп выборка представлена  $\mathbf{X}^*$  — матрицей  $88 \times 5$ . Строки  $\mathbf{x}_i^*$  матрицы  $\mathbf{X}^*$  есть случайная выборка размера 88 из столбцов оригинальной матрицы  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_{i_1}^*, \mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_{i_2}^*, \dots, \mathbf{x}_{88}^* = \mathbf{x}_{i_{88}}^*, \quad (7.10)$$

как в (6.4). Некоторые строки матрицы  $\mathbf{X}$  не появляются ни разу, некоторые один раз, некоторые дважды, и т.д., в итоге имеется 88 строк.

Сгенерировав матрицу  $\mathbf{X}^*$ , мы считаем её ковариационную матрицу  $\mathbf{G}^*$  по аналогии с (7.4)

$$G_{jk}^* = \frac{1}{88} \sum_{i=1}^{88} (x_{ij}^* - \bar{x}_j^*)(x_{ik}^* - \bar{x}_k^*) \quad j, k = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (7.11)$$

Затем вычисляем собственные значения матрицы  $\mathbf{G}^*$  —  $\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*, \dots, \hat{\lambda}_5^*$  — и в конце

$$\hat{\theta}^* = \hat{\lambda}_1^* / \sum_{i=1}^5 \hat{\lambda}_i^*, \quad (7.12)$$

На рисунке 7.2 изображена гистограмма  $B = 200$  репликаций бутстреп оценок  $\hat{\theta}^*$ .

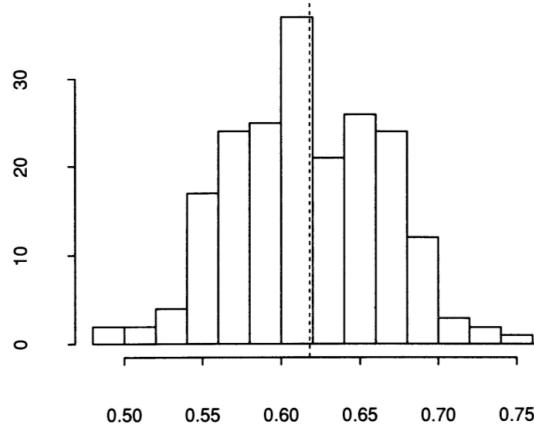


Figure 7.2. 200 bootstrap replications of the statistic  $\hat{\theta} = \hat{\lambda}_1 / \sum_1^5 \hat{\lambda}_i$ . The bootstrap standard error is .047. The dashed line indicates the observed value  $\hat{\theta} = .619$ .

Они дают следующую оценку стандартной ошибки  $\hat{\theta}^*$ :  $\hat{s}_e = 0.047$ . Среднее для всех 200 репликаций составило 0.625, что лишь немногим больше, чем  $\hat{\theta} = 0.619$ . Это означает, что  $\hat{\theta}$  близка к несмещённой. Гистограмма выглядит адекватно, но  $B = 200$  всё же недостаточно для того, чтобы ясно увидеть форму распределения. Некоторые квантили эмпирического распределения  $\hat{\theta}^*$  показаны в таблице 7.2.

Table 7.2. Quantiles of the bootstrap distribution of  $\hat{\theta}^*$  defined in (7.12)

$\alpha$	.05	.10	.16	.50	.84	.90	.95
quantile	.545	.557	.576	.629	.670	.678	.693

Стандартный доверительный интервал для настоящего значения  $\theta$  (значение  $\hat{\theta}$ , если устремить  $n \rightarrow \infty$ )

$$\theta \in \hat{\theta} \pm z^{(1-\alpha)} \cdot \hat{s}_e \quad (\text{с вероятностью } 1 - 2\alpha) \quad (7.13)$$

где  $z^{(1-\alpha)}$  есть  $100(1 - \alpha)$  перцентиль стандартного нормального распределения;  $z^{(.975)} = 1.960$ ,  $z^{(.95)} = 1.645$ ,  $z^{(.84)} = 1.000$ , и т.д. Вычисление интервала основано на применении асимптотической теории, которая распространяет (5.6) на генеральные статистики  $\hat{\theta}$ . В нашем случае

$$\theta \in 0.619 \pm 0.047 = [0.572, 0.666] \quad \text{с вероятностью 0.683}$$

$$\theta \in 0.619 \pm 0.077 = [0.542, 0.696] \quad \text{с вероятностью 0.900.}$$

В 12–14 главах обсуждаются улучшенные бутстреп доверительные интервалы, менее зависимые от асимптотической теории нормального распределения.

Случайный вектор  $\hat{\mathbf{v}}_1$ , относящийся к первому собственному значению, называется первой главной компонентой  $\mathbf{G}$ . Предположим, что мы хотим выразить результаты студента одним числом, а не пятью (например, для некоторого общего оценивания). Можно показать, что наилучшая линейная комбинация оценок есть

$$y_i = \sum_{k=1}^5 \hat{v}_{1k} x_{ik}, \quad (7.14)$$

то есть линейная комбинация, использующая компоненты  $\hat{\mathbf{v}}_1$  как веса. Эта линейная комбинация — «наилучшая» в смысле того, что среди всех возможных  $\mathbf{v}$  она отражает наибольшую вариативность в данных по пяти оценкам. Если же мы хотим описать успеваемость студента двумя числами, например  $(y_i, z_i)$ , вторая линейная комбинация должна выглядеть так

$$y_i = \sum_{k=1}^5 \hat{v}_{2k} x_{ik}, \quad (7.15)$$

где веса взяты из второй главной компоненты  $\hat{\mathbf{v}}_2$ , второго собственного значения матрицы  $\mathbf{G}$ .

Веса, заданные главными компонентами, часто дают понимание структуры многомерного набора данных. Для данных с оценками интерпретация будет следующей: первая главная компонента

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = (0.51, 0.37, 0.35, 0.45, 0.54)$$

накладывает положительные веса примерно одинакового размера на каждый из тестов, то есть  $y_i$  условно эквивалентно взятию суммарной (или средней) оценки  $i$ -го студента. Вторая главная компонента

$$\hat{\mathbf{v}}_2 = (-0.75, -0.2, 0.08, 0.30, 0.55)$$

даёт отрицательные веса двум тестам без использования конспекта и положительные на три теста с использованием конспекта, так что  $z_i$  есть показатель *разницы* оценок между тестами с открытым и закрытым конспектом для  $i$ -го студента. (Студент с высокой оценкой  $z$  гораздо лучше справился с тестами с открытым конспектом, чем с закрытым.)

Векторы главных компонент  $\hat{\mathbf{v}}_1$  и  $\hat{\mathbf{v}}_2$  есть суммарные статистики, как и  $\hat{\theta}$ , несмотря на то, что у каждой из них есть несколько компонент. Мы можем применить бутстреп анализ для того, чтобы узнать, насколько они устойчивы. Те же 200 бутстреп выборок, с помощью которых мы получили  $\hat{\theta}^*$ , дают бутстреп репликации  $\hat{\mathbf{v}}_1^*$  и  $\hat{\mathbf{v}}_2^*$ . Они могут быть посчитаны как первые два собственных вектора  $\mathbf{G}^*$ , (7.11).

В таблице 7.3 показаны  $\hat{s}\epsilon_{200}$  для каждой из компонент векторов  $\hat{\mathbf{v}}_1$  и  $\hat{\mathbf{v}}_2$ . Первое, что можно заметить — это более высокую точность  $\hat{\mathbf{v}}_1$ ; бутстреп

стандартная ошибка компонент  $\hat{v}_1$  составляет менее половины ошибки  $\hat{v}_2$ . В таблице 7.3 также указаны основанные на персентилях робастные бутстреп стандартные ошибки  $\tilde{se}_{200,\alpha}$ , посчитанные для  $\alpha = 0.84, 0.9, 0.95$ . Для компонент  $\hat{v}_1$   $\tilde{se}_{200,\alpha}$  примерно равно  $\hat{se}_{200}$ .

*Table 7.3. Bootstrap standard errors for the components of the first and second principal components,  $\hat{v}_1$  and  $\hat{v}_2$ ;  $\hat{se}_{200}$  is the usual bootstrap standard error estimate based on  $B = 200$  bootstrap replications;  $\tilde{se}_{200,.84}$  is the standard error estimate  $\tilde{se}_{B,\alpha}$  of Problem 6.6, with  $B = 200, \alpha = .84$ ; likewise  $\tilde{se}_{200,.90}$  and  $\tilde{se}_{200,.95}$ . The values of  $\hat{se}_{200}$  for  $\hat{v}_{21}$  and  $\hat{v}_{25}$  are greatly inflated by a few outlying bootstrap replications, see Figures 7.3 and 7.4.*

	$\hat{v}_{11}$	$\hat{v}_{12}$	$\hat{v}_{13}$	$\hat{v}_{14}$	$\hat{v}_{15}$	$\hat{v}_{21}$	$\hat{v}_{22}$	$\hat{v}_{23}$	$\hat{v}_{24}$	$\hat{v}_{25}$
$\hat{se}_{200}$	.057	.045	.029	.041	.049	.189	.138	.066	.129	.150
$\tilde{se}_{200,.84}$	.055	.041	.028	.041	.047	.078	.122	.064	.110	.114
$\tilde{se}_{200,.90}$	.055	.041	.027	.042	.046	.084	.129	.067	.111	.125
$\tilde{se}_{200,.95}$	.054	.048	.029	.040	.047	.080	.130	.066	.114	.120

Это не так для  $\hat{v}_2$ , в особенности для первой и пятой координаты. На рисунке 7.3 можно увидеть, в чём проблема. На рисунке показаны эмпирические распределения для 200 бутстреп репликаций  $\hat{v}_{ik}^*$ , в отдельности для каждого из  $i = 1, 2, k = 1, 2, \dots, 5$ . Эмпирические распределения отражены ящиками с усами. Отрезок в центре ящика — медиана распределения; нижняя и верхняя сторона ящика есть соответственно 25я и 75я персентиль распределения; усы покрывают всё распределение за исключением некоторых выбросов (определённых по некоторому критерию), которые отмечены звёздочкой.

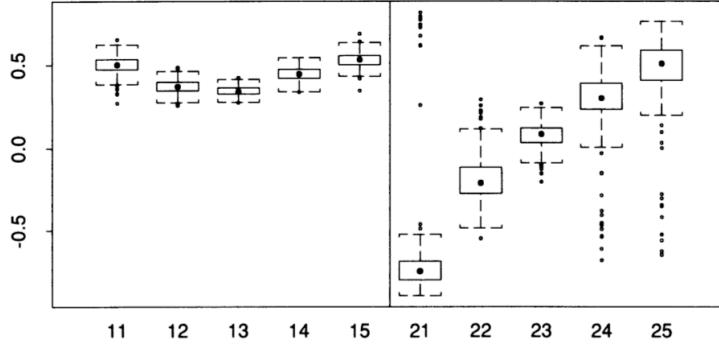


Figure 7.3. 200 bootstrap replications of the first two principal component vectors  $\hat{\mathbf{v}}_1$  (left panel) and  $\hat{\mathbf{v}}_2$  (right panel); for each component of the two vectors, the boxplot indicates the empirical distribution of the 200 bootstrap replications  $\hat{v}_{ik}^*$ . We see that  $\hat{\mathbf{v}}_2$  is less accurate than  $\hat{\mathbf{v}}_1$ , having greater bootstrap variability for each component. A few of the bootstrap samples gave completely different results than the others for  $\hat{\mathbf{v}}_2$ .

Можно увидеть, что большие значения  $\hat{s}\hat{e}_{200}$  для  $\hat{v}_{21}$  и  $\hat{v}_{25}$  вызваны некоторыми выделяющимися значениями  $\hat{v}_{ik}^*$ . Приближённый доверительный интервал  $\theta \in \hat{\theta} \pm z^{1-\alpha}\hat{s}\hat{e}$  будет более точным, если выбрать  $\hat{s}\hat{e}_{200,\alpha}$  в качестве оценки  $\hat{s}\hat{e}$ , как минимум для умеренных значений  $\alpha$  таких, как 0.843. Гистограмма значений  $v_{21}^*$  имеет форму нормального распределения со средним в точке  $-0.74$  и стандартным отклонением  $0.075$ , с небольшим числом точек далеко от гистограммы. Это показатель того, что с малой вероятностью, порядка 1% или 2%, что  $\hat{v}_{21}$  оказывается совершенно неточной оценкой настоящего значения  $v_{21}$ . Если же данное событие не произошло,  $\hat{v}_{21}$  вероятно находится в пределе одного или двух  $\hat{s}\hat{e}_{200}$  от  $v_{21}$ .

На рисунке 7.4 показаны графики бутстреп репликаций  $\hat{\mathbf{v}}_1^*(b)$  и  $\hat{\mathbf{v}}_2^*(b)$ ,  $b = 1, 2, \dots, 200$ , соединяющие компоненты каждого вектора прямыми. Это более наглядный (хоть и менее точный) показатель вариативности  $\hat{\mathbf{v}}_2$ , чем предложенные ранее в таблице 7.3 и на рисунке 7.3. Три конкретных репликации, отмеченные числами 1, 2, и 3, являются выбросами на нескольких компонентах.

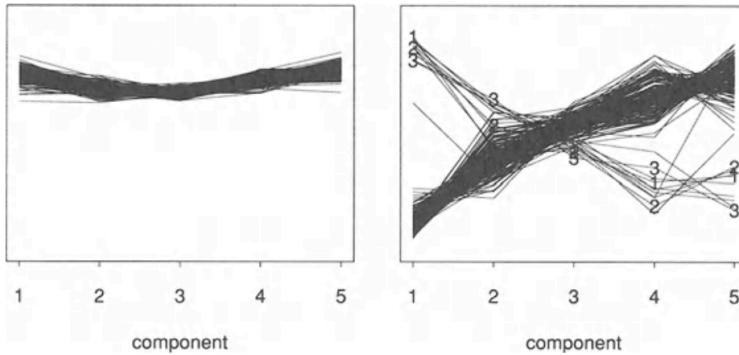


Figure 7.4. Graphs of the 200 bootstrap replications of  $\hat{v}_1$  (left panel) and  $\hat{v}_2$  (right panel). The numbers 1, 2, 3 in the right panel follow three of the replications  $\hat{v}_2^*(b)$  that gave the most discrepant values for the first component. We see that these replications were also discrepant for other components, particularly component 5.

Читатель, которому знаком метод главных компонент, может теперь увидеть, что сложности со вторым собственным вектором объясняются проблемой единственности собственных векторов. Технически, определение собственного вектора  $v$  также верно и для обратного ему вектора  $-v$ . Алгоритм, который считает собственные числа и собственные значения, может приводить решения с разными знаками у  $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots$ . Репликации 1 и 2 привели к матрицам  $X^*$ , для которых знак  $\hat{v}_2^*$  получился обратным. Такая неопределенность обычно не важна при определении статистических особенностей оценок (хотя хорошо замечать такую неопределенность на основании результата применения бутстрепа). Если перестать учитывать 1 и 2, как происходит при оценке  $\hat{s}_{200,\alpha}$ , мы видим, что  $\hat{v}_2$  всё равно менее точна, чем  $\hat{v}_1$ .

### 7.3 Пример 2: построение кривой по данным

В этом примере мы будем оценивать функцию регрессии двумя способами, сначала с помощью стандартного метода наименьших квадратов, а затем с помощью современного метода построения кривой по данным, который называется *loess*. Мы начнём с краткого повторения теории регрессии. В главе 9 снова рассматривается задача регрессии и дан альтернативный бутстреп метод для оценки стандартных ошибок регрессии. На рисунке 7.5 показан типичный набор данных, для которого используются регрессионные методы: мужчин приняли участие в эксперименте, чтобы определить, уменьшает ли лекарство на основе холостирамина уровень холестерина в крови. Мужчины должны были принимать по 6 пакетиков холостирамина в день, однако многие из них принимали гораздо меньше.

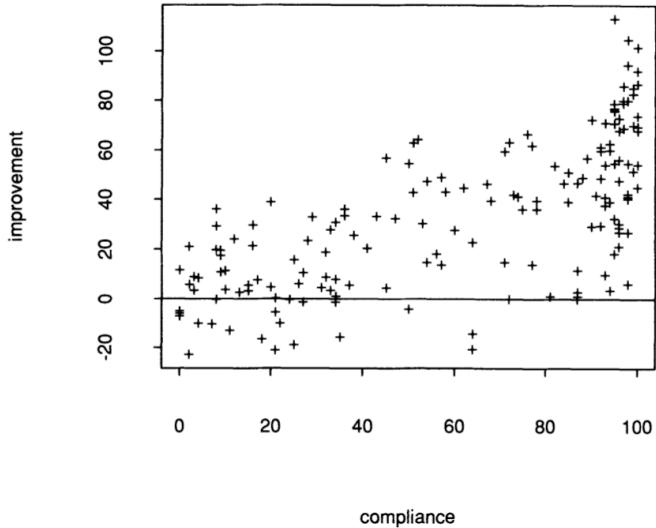


Figure 7.5. *The cholostyramine data. 164 men were supposed to take 6 packets per day of the cholesterol-lowering drug cholostyramine; horizontal axis measures Compliance, in percentage of assigned dose actually taken; vertical axis measures Improvement, in terms of blood cholesterol decrease over the course of the experiment. We see that better compliers tended to have greater improvement.*

Горизонтальная ось, которую мы назовём « $z$ », измеряет *Соответствие*, то есть процент приёма от назначенной дозы,

$$z_i = \text{процент соответствия для мужчины } i, i = 1, 2, \dots, 164.$$

Соответствие измерялось подсчётом количества пакетиков, которые вернули индивиды. Те, кто приняли все пакетики, находятся в правом краю графика; те, кто не принимал ничего — в левом. Горизонтальная ось, отмеченная « $y$ », есть показатель *Улучшения*, уменьшение уровня холестерина в кровянной плазме за время исследования,

$$y_i = \text{уменьшение уровня холестерина в крови для индивида } i, i = 1, 2, \dots, 164.$$

Полный набор данных есть в таблице 7.4.

Table 7.4. *The cholostyramine data. 164 men were supposed to take 6 packets per day of the cholesterol-lowering drug cholostyramine. Compliance "z" is the percentage of the intended dose actually taken. Improvement "y" is the decrease in total plasma cholesterol from the beginning till the end of treatment.*

<i>z</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>y</i>
0	-5.25	27	-1.50	71	59.50	95	32.50
0	-7.25	28	23.50	71	14.75	95	70.75
0	-6.25	29	33.00	72	63.00	95	18.25
0	11.50	31	4.25	72	0.00	95	76.00
2	21.00	32	18.75	73	42.00	95	75.75
2	-23.00	32	8.50	74	41.25	95	78.75
2	5.75	33	3.25	75	36.25	95	54.75
3	3.25	33	27.75	76	66.50	95	77.00
3	8.75	34	30.75	77	61.75	96	68.00
4	8.25	34	-1.50	77	14.00	96	73.00
4	-10.25	34	1.00	78	36.00	96	28.75
7	-10.50	34	7.75	78	39.50	96	26.75
8	19.75	35	-15.75	81	1.00	96	56.00
8	-0.50	36	33.50	82	53.50	96	47.50
8	29.25	36	36.25	84	46.50	96	30.25
8	36.25	37	5.50	85	51.00	96	21.00
9	10.75	38	25.50	85	39.00	97	79.00
9	19.50	41	20.25	87	-0.25	97	69.00
9	17.25	43	33.25	87	1.00	97	80.00
10	3.50	45	56.75	87	46.75	97	86.00
10	11.25	45	4.25	87	11.50	98	54.75
11	-13.00	47	32.50	87	2.75	98	26.75
12	24.00	50	54.50	88	48.75	98	80.00
13	2.50	50	-4.25	89	56.75	98	42.25
15	3.00	51	42.75	90	29.25	98	6.00
15	5.50	51	62.75	90	72.50	98	104.75
16	21.25	52	64.25	91	41.75	98	94.25
16	29.75	53	30.25	92	48.50	98	41.25
17	7.50	54	14.75	92	61.25	98	40.25
18	-16.50	54	47.25	92	29.50	99	51.50
20	4.50	56	18.00	92	59.75	99	82.75
20	39.00	57	13.75	93	71.00	99	85.00
21	-5.75	57	48.75	93	37.75	99	70.00
21	-21.00	58	43.00	93	41.00	100	92.00
21	0.25	60	27.75	93	9.75	100	73.75
22	-10.25	62	44.50	93	53.75	100	54.00
24	-0.50	64	22.50	94	62.50	100	69.50
25	-19.00	64	-14.50	94	39.00	100	101.50
25	15.75	64	-20.75	94	3.25	100	68.00
26	6.00	67	46.25	94	60.00	100	44.75
27	10.50	68	39.50	95	113.25	100	86.75

На рисунке видно, что мужчины, которые принимали большие хлоростирамина, в целом улучшили свои показатели холестерина, что и ожидалось. То, что мы видим на рисунке 7.5, или скорее то, что мы хотели бы видеть, есть увеличение среднего ответа  $y$  в то время как  $z$  увеличивается от 0 до 100%. На рисунке 7.6 показаны данные вместе с двумя графиками,

$$\hat{r}_{\text{quad}}(z) \text{ and } \hat{r}_{\text{loess}}(z). \quad (7.16)$$

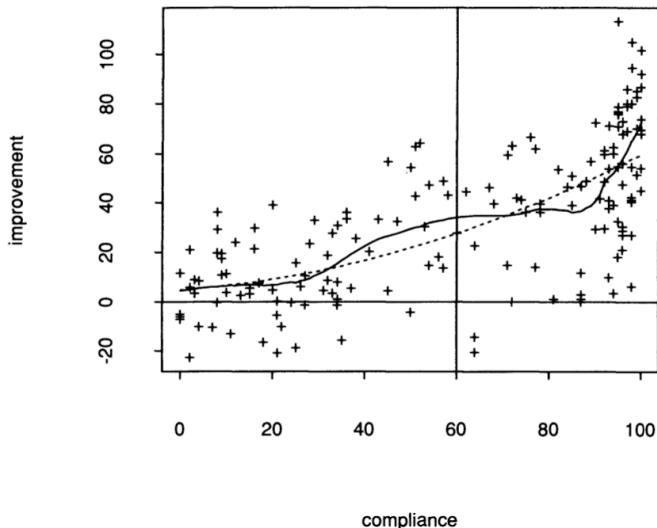


Figure 7.6. Estimated regression curves of  $y = \text{Improvement}$  on  $z = \text{Compliance}$ . The dashed curve is  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$ , the ordinary least-squares quadratic regression of  $y$  on  $z$ ; the solid curve is  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$ , a computer-based local linear regression. We are particularly interested in estimating the true regression  $r(z)$  at  $z = 60\%$ , the average Compliance, and at  $z = 100\%$ , full Compliance.

Каждый из них есть оценка кривой регрессии. Сейчас будет краткое повторение построения и оценки регрессионных кривых. По определению регрессией ответа  $y$  на независимую переменную  $z$  называется условное математическое ожидание  $y$  при некотором  $z$ ,

$$r(z) = E(y|z). \quad (7.17)$$

Предположим, что нам была доступна вся популяция  $\mathcal{U}$  мужчин, подлежащих для эксперимента, и мы получили набор  $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$  оценок

*Соответствие-улучшение*  $X_j = (Z_j, Y_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Далее для каждого значения  $z$ , например  $z = 0\%, 1\%, 2\%, \dots, 100\%$ , регрессия была бы условным математическим ожиданием (7.17),

$$r(z) = \frac{\text{сумма значений } Y_j \text{ для мужчин в } \mathcal{X} \text{ с } Z_j = z}{\text{число мужчин в } \mathcal{X} \text{ с } Z_j = z}. \quad (7.18)$$

Другими словами,  $r(z)$  есть математическое ожидание  $Y$  для субпопуляции мужчин, у которых  $Z = z$ .

Разумеется у нас нет целой популяции  $\mathcal{X}$ . У нас имеется выборка  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{164})$ , где  $\mathbf{x}_i = (z_i, y_i)$ , как показано на рисунке 7.5 и в таблице 7.4. Как мы можем оценить  $r(z)$ ? Очевидная оценка методом подстановки есть

$$\hat{r}(z) = \frac{\text{сумма значений } y_j \text{ для мужчин в } \mathbf{x} \text{ с } z_j = z}{\text{число мужчин в } \mathbf{x} \text{ с } z_j = z}. \quad (7.19)$$

Можно представить себе рисование вертикальных полос шириной в 1% на рисунке 7.5 и усреднение значений на каждой полосе для получения  $\hat{r}(z)$ . Результаты можно увидеть на рисунке 7.7.

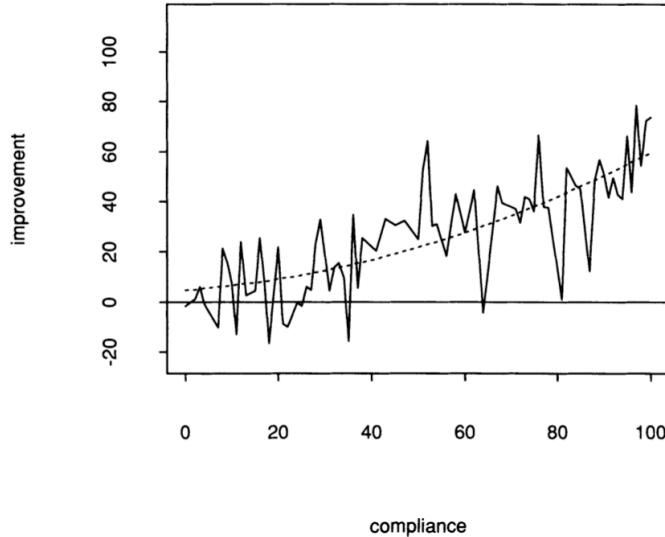


Figure 7.7. Solid curve is plug-in estimate  $\hat{r}(z)$  for the regression of improvement on compliance; averages of  $y_i$  for strips of width 1% on the  $z$  axis, as in (7.19). Some strips  $z$  are not represented because none of the 164 men had  $z_i = z$ . The function  $\hat{r}(z)$  is much rougher than we expect the population regression curve  $r(z)$  to be. The dashed curve is  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$ .

Впервые нашёлся пример, для которого метод подстановки работает не очень хорошо. Оценка регрессии  $\hat{r}(z)$  гораздо грубее, чем мы хотели бы для оценки популяционной регрессии  $r(z)$ . Проблема в том, что внутри каждой полосы шириной в 1% точек для адекватной оценки  $r(z)$  недостаточно. Для некоторых полос шириной в 5% точек внутри нет вообще. Мы можем увеличить ширину промежутка, скажем, до 10% вместо 1%, но это оставит нас с небольшим числом точек для построения и, вероятно, проблема неустойчивости всё равно останется. На самом деле, имеется более элегантное и эффективное решение, которое основано на методе наименьших квадратов.

Использование метода начинается с предположения, что популяционная регрессионная функция, какая бы она не была, принадлежит семейству  $\mathcal{R}$  гладких функций, индексированных вектором параметров  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^T$ . Для рассматриваемого примера мы ограничимся семейством квадратичных функций от  $z$ , скажем,  $\mathcal{R}_{\text{quad}}$ ,

$$\mathcal{R}_{\text{quad}}: \quad r_{\beta}(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2, \quad (7.20)$$

поэтому  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)^T$ . Далее мы обсудим выбор именно квадратичного семейства  $\mathcal{R}_{\text{quad}}$ , но на сейчас примем это как данное.

Читатель может представить себе выбор некоторого пробного значения  $\beta$ , к примеру,  $\beta = (0, 0.75, 0.005)^T$ , и построение  $r_{\beta}(z)$  на рисунке 7.5. Мы хотели бы, чтобы кривая  $r_{\beta}(z)$  проходила близко к нашим данным  $(z_i, y_i)$  в некотором общем смысле. Наиболее удобно для вычислений измерять близость кривой к данным с помощью суммы квадратов остатков (*Residual Squared Error*),

$$\text{RSE}(\beta) = \sum_{i=1}^n [y_i - r_{\beta}(z_i)]^2. \quad (7.21)$$

Сумма квадратов остатков получается опусканием вертикальных отрезков от каждой точки  $(z_i, y_i)$  к кривой  $r_{\beta}(z_i)$ , а затем суммированием квадратов их длин.

*Метод наименьших квадратов*, созданные Гауссом и Лежандром в начале 19 века, выбирает среди кривых в  $\mathcal{R}$  те, которые минимизируют RSE. Наилучший из них объявляется  $r_{\hat{\beta}}(z)$ , где  $\hat{\beta}$  минимизирует  $\text{RSE}(\beta)$ ,

$$\text{RSE}(\hat{\beta}) = \min_{\beta} \text{RSE}(\beta). \quad (7.22)$$

Кривая  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$  на рисунке 7.6 есть  $r_{\hat{\beta}}(z) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 z + \hat{\beta}_2 z^2$ , наилучшая квадратичная функция для наших данных.

Лежандр и Гаусс обнаружили замечательную явную формулу для решения  $\hat{\beta}$  задачи наименьших квадратов. Пусть  $\mathbf{C}$  есть матрица  $164 \times 3$ ,  $i$ -я строка которой есть

$$\mathbf{c}_i = (1, z_i, z_i^2), \quad (7.23)$$

и пусть  $\mathbf{y}$  есть вектор из 164 значений  $y_i$ . Тогда, используя стандартную матричную нотацию, имеем

$$\hat{\beta} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}. \quad (7.24)$$

Более подробно мы рассмотрим эту формулу в главе 9. Для наших целей, связанных с применением бутстрепа, нам достаточно лишь знать про то, что набор данных из  $n$  пар  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  приводит к получению квадратичной кривой  $r_{\hat{\beta}}(z)$  через отображение  $\mathbf{x} \rightarrow r_{\hat{\beta}}(z)$ , которое описывается (7.23), (7.24) и (7.20).

Можно рассматривать  $r_{\hat{\beta}}(z)$  как сглаженную версию оценки по методу подстановки  $\hat{r}(z)$ . Предположим, что мы бы рассмотрели более широкий класс гладких функций  $\mathcal{R}$ , к примеру, класс кубических функций  $\mathcal{R}_{\text{cubic}}$ . В таком случае решение по методу наименьших квадратов  $r_{\hat{\beta}}(z)$  стало бы ближе к данным, однако оказалось бы более «бугристым», чем квадратичное решение по методу наименьших квадратов. Если бы мы начали рассматривать полиномы всё большей степени,  $r_{\hat{\beta}}$  всё больше бы походил на оценку по методу подстановки  $\hat{r}(z)$ . Выбор семейства квадратичных функций основан на нашем представлении о том, насколько гладкой должна быть оригинальная функция регрессии  $r(z)$ . Смотря на рисунок 7.7, мы явно видим, что  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$  гораздо более гладкая, чем  $\hat{r}(z)$ , однако в целом соответствует  $\hat{r}(z)$  как функция от  $z$ .

Легко поверить, что настоящая функция регрессии  $r(z)$  есть гладкая функция от  $z$ . Сложнее поверить в то, что  $r(z)$  является квадратичной от  $z$  для всех значений  $z$ . Сглаживающая функция *loess* является компромиссом между *глобальными* предположениями о форме и чисто *локальным* усреднением  $\hat{r}(z)$ .

Для использования *loess* нужно указать число  $\alpha$ , которое равно части  $n$  точек, используемых при построении кривой в каждой из точек. Кривая  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  на рисунке 7.6 построена при выборе  $\alpha = 0.3$ . Для каждого из значений  $z$  значение  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  получается следующим образом:

1.  $n$  точек  $\mathbf{x}_i = (z_i, y_i)$  упорядочиваются согласно  $|z_i - z|$ , а ближайшие  $\alpha \cdot n$  точек с наименьшим  $|z_i - z|$ , запоминаются. Назовём эти точки  $\mathcal{N}(z)$ .<sup>2</sup>
2. Взвешенная линейная регрессия (с минимизацией наименьших квадратов)

$$\hat{r}_z(Z) = \hat{\beta}_{z,0} + \hat{\beta}_{z,1}Z \quad (7.25)$$

производится для  $\alpha \cdot n$  точек в  $\mathcal{N}(z)$ . [То есть коэффициенты  $\hat{\beta}_{z,0}$  и  $\hat{\beta}_{z,1}$  выбираются как минимизирующие  $\sum_{\mathbf{x}_j \in \mathcal{N}} w_{z,j} [y_j - (\beta_0 + \beta_1 z_j)]^2$ , где веса  $w_{z,j}$  есть положительные числа, зависящие от  $|z_j - z|$ . Взяв

$$u_j = \frac{|z_j - z|}{\max_{\mathcal{N}(z)} |z_k - z|}, \quad (7.26)$$

веса  $w_j$  выбираются равными  $(1 - u_j^3)^3$ .]

3. В итоге,  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  назначается равным числу  $\hat{r}_z(Z)$  в точке  $Z = z$ ,

$$\hat{r}_{\text{loess}}(z) = \hat{r}_z(Z = z). \quad (7.27)$$

---

<sup>2</sup>при выборе  $\alpha = 0.3, n = 164$ , алгоритм выбирает в  $\mathcal{N}(z)$  49 точек

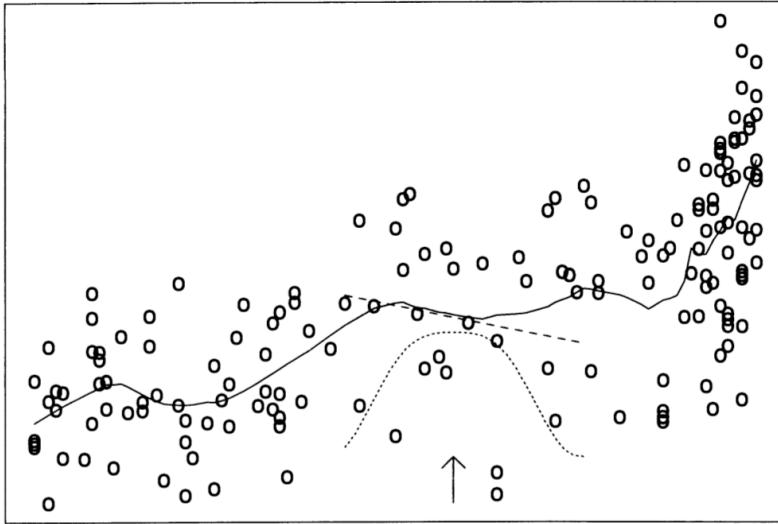


Figure 7.8. How the Loess smoother works. The shaded region indicates the window of values around the target value (arrow). A weighted linear regression (broken line) is computed, using weights given by the “tri-cube” function (dotted curve). Repeating this process for all target values gives the solid curve.

Компоненты loess сглаживания показаны на рисунке 7.8. В таблице 7.5 показано сравнение  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$  и  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  в двух значениях, представляющих наибольший интерес,  $z = 60\%$  и  $z = 100\%$ . Стандартные ошибки по бутстрепу даны для каждого из значений. Они были получены из  $B = 50$  бутстреп репликаций алгоритма, показанного на рисунке 6.1.

Table 7.5. Values of  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$  and  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  at  $z = 60\%$  and  $z = 100\%$ ; also bootstrap standard errors based on  $B = 50$  bootstrap replications.

	$\hat{r}_{\text{quad}}(60)$	$\hat{r}_{\text{loess}}(60)$	$\hat{r}_{\text{quad}}(100)$	$\hat{r}_{\text{loess}}(100)$
value:	27.72	34.03	59.67	72.78
$\hat{s}_e$ : $s_e$ :	3.03	4.41	3.55	6.44

В данном случае  $\hat{F}$  есть распределение, дающее вероятность  $1/164$  каждому из 164 наблюдений  $\mathbf{x}_i = (z_i, y_i)$ . Бутстреп набор есть  $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_{164}^*)$ , где каждый из  $\mathbf{x}_i^*$  равен одному из 164 наблюдений с одинаковой вероятностью. Получив  $\mathbf{x}^*$ , мы вычислили  $\hat{r}_{\text{quad}}^*(z)$  и  $\hat{r}_{\text{loess}}^*(z)$ , квадратичную и loess

кривые на основе  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$ . В завершение мы вычислили значения  $\hat{r}_{\text{quad}}^*(60)$  и  $\hat{r}_{\text{loess}}^*(60)$ , а также  $\hat{r}_{\text{quad}}^*(100)$  и  $\hat{r}_{\text{loess}}^*(100)$ .  $B = 50$  значений  $\hat{r}_{\text{quad}}^*(60)$  имеют стандартную ошибку 3.03 и т.д., см. таблицу 7.5.

Посмотрев на результаты в таблице 7.5, можно сделать вывод о том, что оценка  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  значительно менее точна, чем  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$ . Это неудивительно, ведь  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  строится на меньшем количестве данных (размер обусловлен  $\alpha$ ), чем  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$ . Неустойчивость  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  очевидна по графикам на рисунке 7.9.

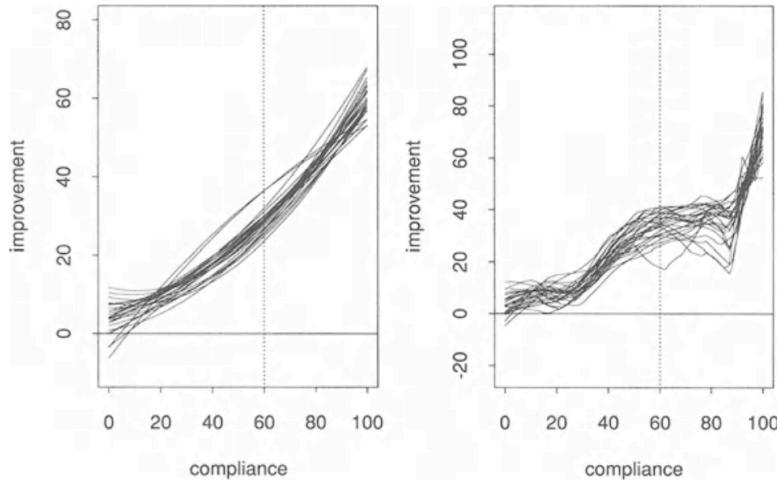


Figure 7.9. The first 25 bootstrap replications of  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$ , left panel, and  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$ , right panel; the increased variability of  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  is evident.

Полезно построить кривые бутстрепа, чтобы увидеть, сохраняются ли некоторые интересные особенности оригинальной кривой у кривых по бутстреп выборкам. Например, на рисунке 7.6 видим, что  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  растёт гораздо быстрее с  $z = 80\%$  до  $z = 100\%$ , чем с  $z = 60\%$  до  $z = 80\%$ . Разность средних углов наклона составляет

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{\hat{r}_{\text{loess}}(100) - \hat{r}_{\text{loess}}(80)}{20} - \frac{\hat{r}_{\text{loess}}(80) - \hat{r}_{\text{loess}}(60)}{20} \\ &= \frac{672.78 - 37.50}{20} - \frac{32.50 - 34.03}{20} = 1.84.\end{aligned}\quad (7.28)$$

Соответствующее число для  $\hat{r}_{\text{quad}}$  составляет лишь 0.17. Большинство loess кривых показывают похожий быстрый рост примерно на 80%. Ни одно из бутстреп значений  $\hat{\theta}^*$  не было меньше нуля, минимум составил 0.23, большинство значений оказались больше единицы, см. рисунок 7.10.

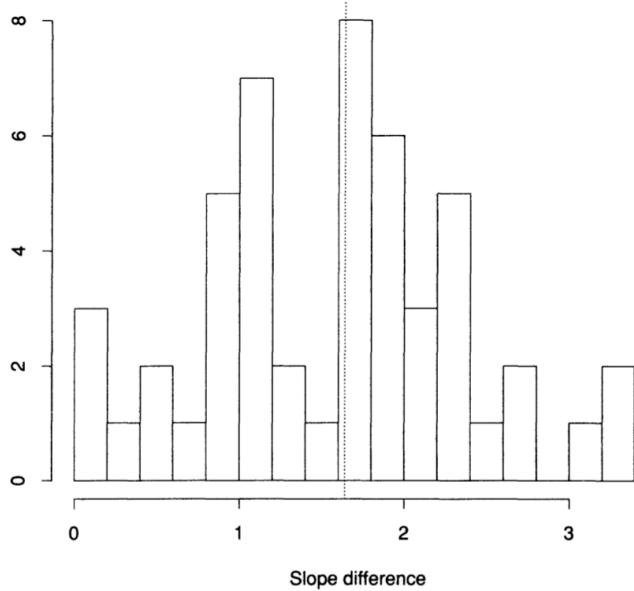


Figure 7.10. Fifty bootstrap replications of the slope difference statistic (7.28). All of the values were positive, and most were greater than 1. The bootstrap standard error estimate is  $\hat{se}_{50}(\hat{\theta}) = .61$ . The vertical line is drawn at  $\hat{\theta} = 1.63$ .

В такой момент мы можем законно опасаться того, что  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$  является слишком гладкой оценкой оригинальной регрессионной функции  $r(z)$ . Если значение настоящей разности в углах наклона

$$\theta = \frac{r(100) - r(80)}{20} - \frac{r(80) - r(60)}{20} \quad (7.29)$$

и находится около  $\hat{\theta} = 1.59$ , то  $r(z)$  будет выглядеть скорее как  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$ , чем  $\hat{r}_{\text{quad}}(z)$  для  $z$  между 60 и 100. Оценки, построенные на  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$  обычно отличаются высокой дисперсией, как в таблице 7.5, но в то же время имеют низкое смещение. Оба этих свойства происходят от локального характера алгоритма loess, который строит оценку  $r(z)$  используя только элементы выборки в окрестности  $z$ .

Оценка  $\hat{\theta} = 1.59$ , построенная на  $\hat{r}_{\text{loess}}$  имеет большую вариативность,  $\hat{se}_{50} = 0.61$ , однако содержание рисунка 7.10 явно намекает на то, что настоящее значение  $\theta$ , каким бы оно ни было, больше, чем значение  $\hat{\theta} = 0.17$ , основанное на  $\hat{r}_{\text{quad}}$ . Мы рассмотрим эту проблему детальнее в главах 12–14 про бутстреп доверительные интервалы.

Таблица 7.5 намекает на то, что нам следует беспокоиться за оценки  $\hat{r}_{\text{quad}}(60)$  и  $\hat{r}_{\text{quad}}(100)$ , которые могут быть значительно заниженными. Одним из возможных решений этой проблемы может быть выбор полиномиальных моделей более высокой размерности. Достаточно замысловатые

теории построения моделей были предложены с целью определить, когда следует продолжать поиск модели в пространстве большей размерности, а когда следует остановиться. Мы глубже рассмотрим вопрос построения регрессионных моделей в главе 9, где данные примера 2 мы рассмотрим снова. Простые бутстреп оценки вариативности и неустойчивости, которые были освещены в данной главе, часто становятся полезным шагом в сторону понимания регрессионных моделей, в особенности нетрадиционных (таких как  $\hat{r}_{\text{loess}}(z)$ ).

## 7.4 Пример отказа бутстрепа

Предположим, что у нас имеются данные  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из равномерного распределения на  $(0, \theta)$ . Оценка  $\hat{\theta}$  по методу максимума правдоподобия есть наибольшее значение выборки  $X_{(n)}$ . Мы сгенерировали выборку из 50 равномерно распределённых чисел на  $(0, 1)$  и получили  $\hat{\theta} = 0.988$ . На левой части рисунка 7.11 показана гистограмма 2000 бутстреп репликаций оценки  $\hat{\theta}^*$ , полученных с помощью выборок из данных с возвращением. На правой части наблюдаем 2000 репликаций параметрического бутстрепа, полученных при взятии выборок из равномерного распределения на  $(0, \hat{\theta})$ .<sup>3</sup> Ясно, что гистограмма слева есть плохая аппроксимация того, что мы видим на правой. Так, в случае левой гистограммы оказывается, что в 62% репликаций  $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}$ . Вообще говоря, легко показать, что  $\text{Prob}(\hat{\theta}^* = \hat{\theta}) = 1 - (1 - 1/n)^n \rightarrow 1 - e^{-1} \approx .632$  когда  $n \rightarrow \infty$ . Однако, в параметрическом случае правой гистограммы  $\text{Prob}(\hat{\theta}^* = \hat{\theta}) = 0$ .

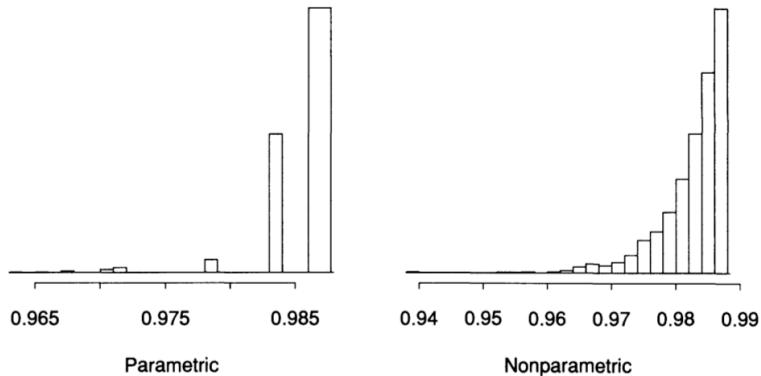


Figure 7.11. The left panel shows a histogram of 2000 bootstrap replications of  $\hat{\theta}^* = X_{(n)}$  obtained by sampling with replacement from a sample of 50 uniform numbers. The right panel shows 2000 parametric bootstrap replications obtained by sampling from the uniform distribution on  $(0, \hat{\theta})$ .

<sup>3</sup>подписи parametric и nonparametric на рисунке следует поменять местами — прим.ред.

Что не так с непараметрическим бутстрепом? Сложность возникает потому, что эмпирическая функция распределения  $\hat{F}$  не является хорошей оценкой настоящего распределения на его краях. Либо параметрические данные о  $F$ , либо некоторое сглаживание  $\hat{F}$  необходимо для того, чтобы разрешить эту проблему. Детали и ссылки об этой проблеме можно найти в Beran и Ducharme (1991, с.23). Непараметрический бутстреп может отказать и в других примерах, где  $\theta$  зависит от гладкости  $F$ . К примеру, если  $\theta$  есть число атомов у  $F$ , то  $\hat{\theta} = n$  будет плохой оценкой  $\hat{\theta}$ .

# Глава 10

## Оценки смещения

### 10.1 Введение

Мы сосредоточились на стандартной ошибке как на показателе точности оценки  $\hat{\theta}$ . Существуют и другие пригодные меры статистической точности (или статистической ошибки), измеряющие различные аспекты поведения оценок  $\hat{\theta}$ . В этой главе речь идет о смещении, разнице между ожидаемым значением оценки  $\hat{\theta}$  и оцениваемой величиной  $\theta$ . Алгоритм бутстрепа легко адаптируется для получения оценок смещения, ровно как и для получения оценок стандартной ошибки. Также вводится оценка смещения по методу складного ножа, хотя мы откладываем полное обсуждение метода складного ножа до главы 11. Можно использовать оценку смещения для исправленной оценки смещения. Однако это может быть опасной практикой, о чем говорится в конце главы.

### 10.2 Бутстреп оценка смещения

Для начала предположим, что мы вернулись к ситуации с непараметрической выборкой, как в главе 6. Неизвестное распределение вероятностей  $F$  дает набор  $x = (x_1, x_2 \dots, x_n)$  путем случайной выборки  $F \rightarrow x$ . Мы хотим оценить вещественный параметр  $\theta = t(F)$ . Пока возьмем за оценку любую статистику  $\hat{\theta} = s(x)$ , как показано на рисунке 6.1. Позже нас будет особенно интересовать оценка plagина  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ .

Смещение  $\hat{\theta} = s(x)$  как оценка  $\theta$  определяется как разница между математическим ожиданием  $\hat{\theta}$  и значением параметра  $\theta$ ,

$$\text{bias}_F = \text{bias}_F(\hat{\theta}, \theta) = E_F[s(x)] - t(F). \quad (10.1)$$

Большое смещение обычно является нежелательным аспектом поведения оценки. Мы смирились с тем фактом, что  $\hat{\theta}$  является непостоянной

оценкой  $\hat{\theta}$ , но обычно мы не хотим, чтобы изменчивость была исключительно низкой или высокой. Несмешенные оценки те, для которых  $E_F(\hat{\theta}) = \theta$ , играют важную роль в статистической теории и практике. Они способствуют хорошему чувству научной объективности в процессе оценки. Оценки плагина  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$  необязательно являются несмешенными, но они, как правило, имеют небольшие смещения по сравнению с величиной их стандартных ошибок. Это одна из хороших черт принципа плагина.

Мы можем использовать бутстреп чтобы вычислить смещение любой оценки  $\hat{\theta} = s(x)$ . Бутстреп оценка смещения определяется как оценка смещения, которую мы получаем, подставляя  $\hat{F}$  вместо  $F$  в 10.1,

$$\text{bias}_{\hat{F}} = E_{\hat{F}}[s(x^*)] - t(\hat{F}). \quad (10.2)$$

Здесь  $t(\hat{F})$  — оценка плагина  $\theta$  может отличаться от  $\hat{\theta} = s(x)$ . Другими словами,  $\text{bias}_{\hat{F}}$  — это оценка плагина  $\text{bias}_F$  независимо от того, является ли  $\hat{\theta}$  оценкой плагина  $\theta$  или нет. Обратите внимание, что  $\hat{F}$  используется дважды при переходе от 10.1 к 10.2: при замене  $F$  в  $t(F)$  и при замене  $F$  в  $E_F[s(x)]$ .

Если  $s(x)$  — среднее значение, а  $t(F)$  — среднее значение генеральной совокупности, легко показать, что  $\text{bias}_{\hat{F}} = 0$ . Это имеет смысл, потому что среднее — это несмешенная оценка среднего для генеральной совокупности, то есть  $\text{bias}_F = 0$ . Однако обычно статистика имеет некоторую систематическую ошибку, и  $\text{bias}_{\hat{F}}$  дает оценку этой систематической ошибки. Простым примером является выборочная дисперсия  $s(x) = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2/n$ , погрешность которой равна  $(-1/n)$  дисперсии генеральной совокупности. В этом случае легко показать, что  $\text{bias}_{\hat{F}} = (-1/n^2) \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$ .

Для большинства статистик, которые возникают на практике, идеальная бутстреп оценка  $\text{bias}_{\hat{F}}$  должна быть аппроксимирована моделированием Монте-Карло. Мы генерируем независимую бутстреп выборку  $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*B}$  как на рисунке 6.1, вычисляем бутстреп репликации  $\hat{\theta}^*(b) = s(x^{*b})$  и аппроксимируем бутстреп математическое ожидание  $E_{\hat{F}}[s(x^*)]$  средним

$$\hat{\theta}^*(\cdot) = \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b)/B = \sum_{b=1}^B s(x^{*b})/B. \quad (10.3)$$

Бутстреп оценка смещения, основанная на  $B$  репликах  $\widehat{\text{bias}}_B$ , есть 10.2 с заменой  $E_{\hat{F}}[s(x^*)]$  на  $\hat{\theta}^*(\cdot)$ ,

$$\widehat{\text{bias}}_B = \hat{\theta}^*(\cdot) - t(\hat{F}). \quad (10.4)$$

Обратите внимание, что алгоритм, показанный на рисунке 6.1, точно применяется к вычислению 10.4, за исключением того, что на последнем шаге мы вычисляем  $\hat{\theta}^*(\cdot) - t(\hat{F})$ , а не  $\widehat{se}_B$ . Конечно, мы можем вычислить как  $\widehat{se}_B$ , так и  $\widehat{\text{bias}}_B$  с помощью того же набора бутстреп репликаций.

### 10.3 Пример: данные об уровне гормона при ношении различных пластырей

Исторически сложилось так, что статистики очень беспокоились о возможных смещениях в оценках соотношений. Данные об уровне гормона в таблице 10.1 представляют удобный пример. Восемь субъектов носили медицинские пластыри, предназначенные для введения в кровоток определенного природного гормона. У каждого испытуемого измеряли уровень гормона в крови после ношения трех разных пластырей: пластиря с плацебо, не содержащего гормона, «старого» пластиря, произведенного на более старом заводе, и «нового» пластиря, произведенного на недавно открывшемся заводе. Первые три столбца таблицы показывают три измерения показателей крови для каждого субъекта.

*Table 10.1. The patch data. Eight subjects wore medical patches designed to increase the blood levels of a certain natural hormone. Each subject had his blood levels of the hormone measured after wearing three different patches: a placebo patch, which had no medicine in it, an “old” patch which was from a lot manufactured at an old plant, and a “new” patch, which was from a lot manufactured at a newly opened plant. For each subject,  $z = \text{oldpatch} - \text{placebo}$  measurement, and  $y = \text{newpatch} - \text{oldpatch}$  measurement. The purpose of the experiment was to show that the new plant was producing patches equivalent to those from the old plant. Chapter 25 has an extended analysis of this data set.*

subject	placebo	oldpatch	newpatch	old-plac.	new-old
				$z$	$y$
1	9243	17649	16449	8406	-1200
2	9671	12013	14614	2342	2601
3	11792	19979	17274	8187	-2705
4	13357	21816	23798	8459	1982
5	9055	13850	12560	4795	-1290
6	6290	9806	10157	3516	351
7	12412	17208	16570	4796	-638
8	18806	29044	26325	10238	-2719
mean:				6342	-452.3

Целью эксперимента с пластырем было показать биоэквивалентность. Пластыри, изготовленные на старом заводе, уже были одобрены для продажи Управлением по санитарному надзору за качеством пищевых продуктов и медикаментов (FDA). Пластыри с нового завода не потребовали полно-

го нового исследования FDA. Их одобрили бы к продаже, если бы можно было доказать, что они биоэквивалентны тем, что были изготовлены на старом заводе. Критерий биоэквивалентности FDA заключается в том, что ожидаемая эффективность новых пластырей соответствует ожидаемой эффективности старых пластырей в том смысле, что

$$\frac{|E(\text{new}) - E(\text{old})|}{E(\text{old}) - E(\text{placebo})} \leq .20. \quad (10.5)$$

Другими словами, FDA хочет, чтобы новое лекарство соответствовало старому в пределах 20% количества гормона, которое старый препарат добавляет к «плацебо» уровню крови.

Пусть  $\theta$  параметр

$$\theta = \frac{|E(\text{new patch}) - E(\text{old patch})|}{E(\text{old patch}) - E(\text{placebo patch})}. \quad (10.6)$$

В главах 12–14 рассматриваются доверительные интервалы для  $\theta$ , подход, который приводит к полному ответу на вопрос о биоэквивалентности: «действительно ли  $|\theta| \leq 0.20?$ .»<sup>1</sup> Здесь мы рассматриваем только смещение и стандартную ошибку оценки плагина  $\hat{\theta}$ .

Нас интересуют две статистики,  $z_i$  и  $y_i$ , полученные для каждого из восьми субъектов,

$$z = \text{oldpatch measurement} - \text{placebo measurement} \quad (10.7)$$

и

$$y = \text{newpatch measurement} - \text{oldpatch measurement}. \quad (10.8)$$

Предполагая, что пары  $x_i = (z_i, y_i)$  получены путем случайной выборки из неизвестного двумерного распределения  $F$ ,  $F \rightarrow x = (x_1, x_2 \dots x_8)$ , тогда  $\theta$  в 10.6 это параметр

$$\theta = t(F) = \frac{E_F(y)}{E_F(z)}. \quad (10.9)$$

В этом случае  $t(\cdot)$  является функцией, которая принимает распределение вероятностей  $F$  на парах  $x = (z, y)$  и выдает отношение математических ожиданий. Оценка плагина  $\theta$  равна

$$\hat{\theta} = t(\hat{F}) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i/8}{\sum_{i=1}^8 z_i/8}, \quad (10.10)$$

которую мы возьмем за нашу оценку  $\hat{\theta} = s(X)$ . Обратите внимание, что ничего в этих формулировках не предполагает, что  $z$  и  $y$  независимы друг от друга. Последние два столбца таблицы 10.1 показывают  $z_i$  и  $y_i$  для восьми испытуемых. Значение  $\hat{\theta}$  равно

$$\hat{\theta} = \frac{-452.3}{6342} = -0.0713. \quad (10.11)$$

---

<sup>1</sup> В главе 25 представлен расширенный анализ биоэквивалентности этого набора данных.

Мы видим, что  $|\hat{\theta}|$  значительно меньше 0.20, так что есть некоторая надежда на выполнение условия биоэквивалентности FDA.

На рисунке 10.1 показана гистограмма  $B = 400$  бутстреп репликаций  $\hat{\theta}$ , полученных как в (6.1–6.2): бутстреп выборки  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_8^*) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_8})$  дают бутстреп репликации

$$\hat{\theta}^* = \frac{\bar{y}^*}{\bar{z}^*} = \frac{\sum_{j=1}^8 y_{i_j}/8}{\sum_{j=1}^8 z_{i_j}/8}. \quad (10.12)$$

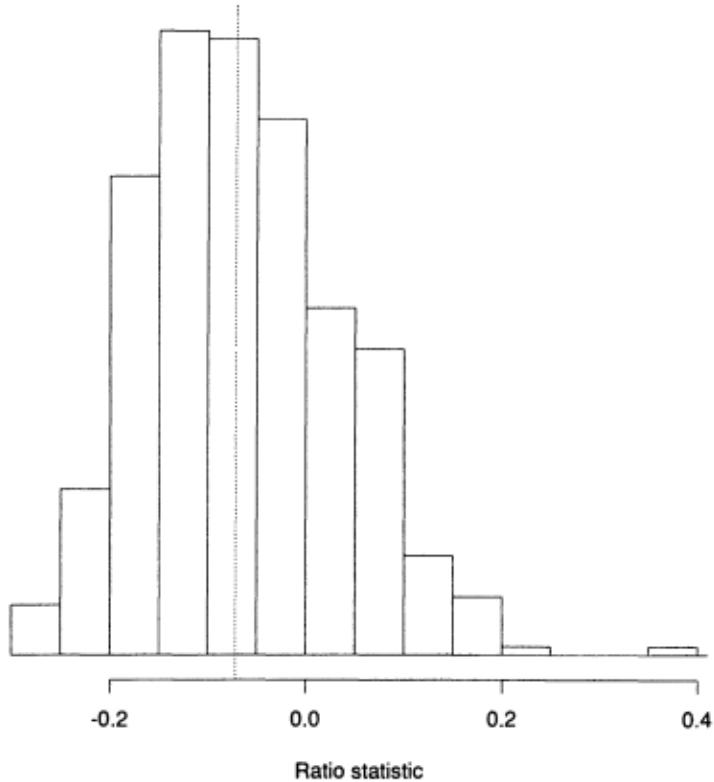


Figure 10.1.  $B = 400$  bootstrap replications of the ratio statistic (10.10),  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$ , for the patch data of Table 10.1. The dashed line indicates  $\hat{\theta} = -0.0713$ . The 400 replications had standard deviation  $\widehat{se}_{400} = .105$  and mean  $\hat{\theta}^*(\cdot) = -.0670$ , so the bootstrap bias estimate was  $\widehat{bias}_{400} = .0043$ .

Для 400 повторов стандартное отклонение выборки составило  $\widehat{se}_{400} = 0.105$ , а среднее значение выборки  $\hat{\theta}^*(\cdot) = -0.0670$ . Бутстреп оценка смещения составляет

$$\widehat{bias}_{400} = -0.0670 - (-0.0713) = 0.0043. \quad (10.13)$$

Это вычисление основано на формуле 10.4, с использованием того факта, что в данном случае  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ .

Отношение оцененного смещения к стандартной ошибке  $\widehat{\text{bias}}_{400}/\widehat{\text{se}}_{400} = 0.041$  мало, что указывает на то, что в этом случае нам не нужно беспокоиться о смещении  $\hat{\theta}$ . Как правило, смещение меньшее чем 0.25 стандартных ошибок можно игнорировать, если мы не пытаемся провести аккуратные вычисления доверительных интервалов. Среднеквадратичная ошибка оценки  $\hat{\theta}$  для  $\theta$  есть  $\sqrt{E_F[(\hat{\theta} - \theta)^2]}$  мера точности, которая учитывает как смещение, так и стандартную ошибку. Можно показать, что значение среднеквадратичной ошибки равно

$$\begin{aligned} \sqrt{E_F[(\hat{\theta} - \theta)^2]} &= \sqrt{\text{se}_F(\hat{\theta})^2 + \text{bias}_F(\hat{\theta}, \theta)^2} = \\ &= \text{se}_F(\hat{\theta}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\text{bias}_F}{\text{se}_F}\right)^2} \doteq \text{se}_F(\hat{\theta}) \cdot \left[1 + \left(\frac{\text{bias}_F}{\text{se}_F}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Если  $\text{bias}_F = 0$ , то среднеквадратичная ошибка равна её минимальному значению  $\text{se}_F$ . Если  $|\text{bias}_F/\text{se}_F| < 0.25$ , тогда среднеквадратичная ошибка не превосходит  $\text{se}_F$  больше, чем примерно на 3.1%.

Мы знаем, что  $B = 400$  бутстреп репликаций обычно более чем достаточно для получения хорошей оценки стандартной ошибки. Достаточно ли этого, чтобы получить хорошую оценку смещения? Ответ в данном конкретном случае — нет. Помните, что в определении идеальной бутстреп оценки смещения  $\widehat{\text{bias}}_\infty = \text{bias}_{\hat{F}}$  10.2,  $\widehat{\text{bias}}_B$  10.4 заменяет  $E_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$  на  $\hat{\theta}^*(\cdot)$ . По распределению бутстреп репликаций мы можем сказать, насколько хорошо  $\hat{\theta}^*(\cdot)$  оценивает  $E_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ . Применение 5.6 дает

$$\text{Prob}_{\hat{F}} \left\{ |\hat{\theta}^*(\cdot) - E_{\hat{F}}\{\hat{\theta}^*\}| < 2 \frac{\widehat{\text{se}}_B}{\sqrt{B}} \right\} = \text{Prob}_{\hat{F}} \left\{ |\widehat{\text{bias}}_B - \widehat{\text{bias}}_\infty| < 2 \frac{\widehat{\text{se}}_B}{\sqrt{B}} \right\} \doteq 0.95, \quad (10.15)$$

где  $\widehat{\text{se}}_B$  — бутстреп оценка стандартной ошибки. Для бутстреп данных на рисунке 10.1 с  $\widehat{\text{se}}_B = 0.105$  и  $B = 400$ , мы получаем

$$\text{Prob}_{\hat{F}} \left\{ |\widehat{\text{bias}}_B - \widehat{\text{bias}}_\infty| < 0.0105 \right\} \doteq 0.95, \quad (10.16)$$

большой диапазон погрешности по сравнению с рассчитанным значением  $\widehat{\text{bias}}_{400} = 0.0043$ .

Граница ошибки 0.0105 в 10.16 достаточно мала, чтобы показать, что смещение здесь не является большой проблемой: так как  $\widehat{\text{bias}}_{400} = 0.0043$ , мы, вероятно, имеем  $|\widehat{\text{bias}}_\infty| < 0.0043 + 0.0105 = 0.0148$  и поэтому  $|\widehat{\text{bias}}|/\widehat{\text{se}} < 0.0148/0.106 = 0.14$ . Что довольно меньше, чем эмпирическое граница 0.25. Однако нам все еще может быть интересно узнать  $\widehat{\text{bias}}_\infty$  или хорошее приближение к нему и вычислениям 10.16, показывающим что  $\widehat{\text{bias}}_{400} = 0.0043$ , нельзя доверять. Мы могли бы просто увеличить  $B$  (смотри задачу 10.5), но в этом нет необходимости.

## 10.4 Улучшенная оценка смещения

Оказывается, что существует лучший метод, чем 10.4, для аппроксимации  $\widehat{\text{bias}}_\infty = \text{bias}_{\hat{F}}$  из  $B$  бутстреп репликаций. Улучшенный метод применяется, когда  $\hat{\theta}$  — это плагин оценка  $t(\hat{F})$  для  $\theta = t(F)$ . Мы описываем метод здесь и даем объяснение, почему он работает, в главе 23.

Нам нужно определить понятие вектора повторной выборки (???resampling vector). Пусть  $P_j^*$  указывает долю бутстреп наблюдений  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , которая равна  $j$ -ому исходному наблюдению,

$$P_j^* = \#\{x_j^* = x_j\}/n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.17)$$

Вектор повторной выборки

$$P^* = (P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*) \quad (10.18)$$

имеет неотрицательные компоненты в сумме дающие единицу. Например, третья бутстреп выборка для данных пластира была

$$X^* = (x_1, x_6, x_6, x_5, x_7, x_1, x_3, x_8)$$

и соответствующий вектор повторной выборки

$$P^* = (2/8, 0, 1/8, 0, 1/8, 2/8, 1/8, 1/8).$$

Бутстреп репликацию  $\hat{\theta}^* = s(x^*)$  можно рассматривать как функцию вектора повторной выборки  $P^*$ . Например, если  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$  в 10.10,

$$\hat{\theta}^* = \bar{y}^*/\bar{z}^* = \frac{\sum_{i=1}^8 P_j^* y_i / 8}{\sum_{i=1}^8 P_j^* z_i / 8}. \quad (10.19)$$

(Обратите внимание, что исходные данные  $x$  считаются фиксированными в этом определении; единственными случайными величинами являются  $P_j^*$ .)

Для  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ , плагин оценки  $\theta$ , запишем

$$\hat{\theta}^* = T(P^*) \quad (10.20)$$

чтобы определить  $\hat{\theta}^*$  как функцию вектора повторной выборки.<sup>2</sup> Формула 10.19 определяет  $T(\cdot)$  для  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$ .

Пусть  $P^0$  обозначает вектор длины  $n$ , все элементы которого равны  $1/n$ ,

$$P^0 = (1/n, 1/n, \dots, 1/n). \quad (10.21)$$

---

<sup>2</sup>Мы обозначаем плагин статистику двумя способами  $\hat{\theta} = s(x) = t(\hat{F})$ . Аналогично бутстреп репликации обозначаются  $\hat{\theta}^* = s(x^*) = T(P^*)$ . Три функции  $s(\cdot)$ ,  $t(\cdot)$  и  $T(\cdot)$  представляют одну и ту же статистику, но рассматриваются как функция в трех разных пространствах.

Значение  $T(P^0)$  — это значение  $\hat{\theta}^*$ , когда каждый элемент  $P_j^* = 1/n$ , то есть когда каждая точка исходных данных  $x_j$  встречается ровно один раз в бутстреп выборке  $x^*$ . Это означает, что  $x^* = x$ , за исключением, возможно, перестановок порядка, в котором появляются элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Но статистика вида  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$  не меняется, когда элементы  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  переупорядочиваются, потому что  $F$  не изменяется. Другими словами,

$$T(P^0) = \hat{\theta} = t(\hat{F}), \quad (10.22)$$

наблюдаемое выборочное значение статистики. (Это легко проверить в 10.19.)

$B$  бутстреп выборок  $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*B}$  приводят к соответствующим векторам повторной выборки  $P^{*1}, P^{*2}, \dots, P^{*B}$ , каждый вектор  $P^{*b}$  имеет форму 10.18. Определим  $\bar{P}^*$  как среднее значение этих векторов

$$\bar{P}^* = \sum_{i=1}^B P^{*b} / B. \quad (10.23)$$

Согласно 10.22 мы можем записать бутстреп оценку смещения 10.4 в виде

$$\widehat{\text{bias}}_B = \hat{\theta}^*(\cdot) - T(P^0). \quad (10.24)$$

Улучшенная бутстреп оценка смещения, которую мы обозначим как  $\overline{\text{bias}}_B$ , равна

$$\overline{\text{bias}}_B = \hat{\theta}^*(\cdot) - T(\bar{P}^*). \quad (10.25)$$

Для рисунка 10.1 четыреста векторов повторной выборки усреднены до  $\bar{P}^* = (0.1178, 0.1187, 0.1313, 0.1259, 0.1219, 0.1275, 0.1306, 0.1213)$ . Это приводит к

$$T(\bar{P}^*) = \frac{\sum_{i=1}^8 \bar{P}_j^* y_i}{\sum_{i=1}^8 \bar{P}_j^* z_i} = -0.0750 \quad (10.26)$$

и

$$\overline{\text{bias}}_{400} = -0.0670 - (-0.0750) = 0.0080, \quad (10.27)$$

в отличие от  $\widehat{\text{bias}}_{400} = 0.0043$ .

Обе оценки  $\widehat{\text{bias}}_B$  и  $\overline{\text{bias}}_B$  сходятся к  $\widehat{\text{bias}}_\infty = \text{bias}_{\hat{F}}$ , идеальной бутстреп оценке смещения, когда  $B$  стремится к бесконечности. Для  $\overline{\text{bias}}_B$  сходимость происходит намного быстрее, поэтому мы назвали её улучшенной. Более быстрая сходимость очевидна на рисунке 10.2, на котором рассмотрены  $\widehat{\text{bias}}_B$  и  $\overline{\text{bias}}_B$  для  $B$ , равного 25, 50, 100, 200, 400, 800, 1670, 3200. Предельное значение  $\widehat{\text{bias}}_\infty$  было аппроксимировано  $\widehat{\text{bias}}_{100000} = 0.0079$ , показанным пунктирной горизонтальной линией.  $\overline{\text{bias}}_B$  плавно и быстро приближается к пунктирной линии, в то время как  $\widehat{\text{bias}}_B$  все еще довольно изменчива даже для  $B = 3200$ .

В главе 23 обсуждаются улучшенные вычислительные бутстреп методы. Там будет показано, что  $\overline{\text{bias}}_B$  сводится к использованию  $\widehat{\text{bias}}_{CB}$ , где  $C$  — большая константа, часто 50 или больше. Задача 10.7 предлагает одну причину превосходства  $\overline{\text{bias}}_B$ .

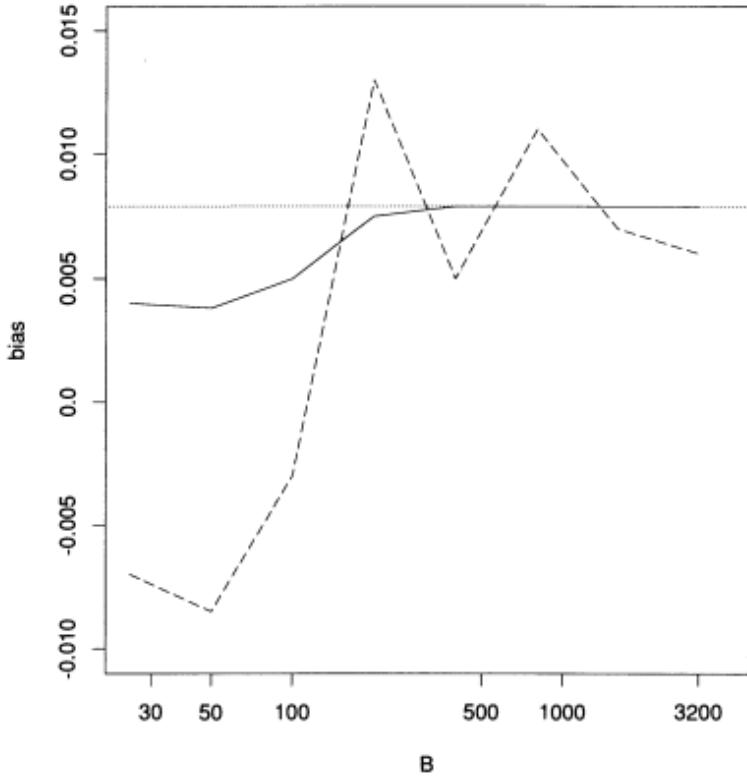


Figure 10.2. The bootstrap bias estimate  $\widehat{\text{bias}}_B$  broken line, and the better bootstrap bias estimate  $\overline{\text{bias}}_B$ , solid line, for  $B = 25, 50, 100, \dots, 3200$ ; log scale for  $B$ ; dotted line is  $\widehat{\text{bias}}_{100,000} = .0079$ . We see that  $\overline{\text{bias}}_B$  converges much faster than  $\widehat{\text{bias}}_B$  to the limiting ideal bootstrap estimate  $\widehat{\text{bias}}_\infty = \text{bias}_F$ .

## 10.5 Оценка смещения по методу складного ножа

Складной нож был оригинальным компьютерным методом оценки смещения и стандартных ошибок. Оценка смещения методом складного ножа, которая кратко обсуждается здесь и более подробно в главе 11, была предложена Морисом Кенуйем в середине 1950-х годов. При наличии набора данных  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i$ -я реализация складного ножа  $x_{(i)}$  определяется как  $x$  с удаленной  $i$ -й точкой наблюдений,

$$x_{(i)} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (10.28)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $I$ -я репликация складного ножа  $\hat{\theta}_{(i)}$  статистики  $\theta = s(x)$  это  $s(\cdot)$ , вычисленная для  $x_{(i)}$ , предположим

$$\hat{\theta}_{(i)} = s(x_{(i)}) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.29)$$

Для плагин статистики  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ ,  $\hat{\theta}_{(.)}$  равна  $t(\hat{F}_{(.)})$ , где  $\hat{F}_{(.)}$  — эмпирическое распределение  $n - 1$  точек в  $x_{(.)}$ .

Оценка смещения складного ножа определяется как

$$\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}} = (n - 1)(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}), \quad (10.30)$$

где

$$\hat{\theta}_{(.)} = \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{(i)}/n. \quad (10.31)$$

Эта формула применяется только к плагин статистике  $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ . Формула не работает, если  $t(\hat{F})$  — негладкая статистика, такая как медиана, но для гладкой статистики, такой как  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$  (тех статистик, для которых функция  $T(P^*)$  в 10.20 дважды дифференцируема) она дает оценку смещения с помощью всего  $n$  повторных вычислений функции  $t(\cdot)$ . Это сравнивается с  $B$  повторными вычислениями для будстреп оценок, где  $B$  должно быть не менее 200 даже для  $\widehat{\text{bias}}_B$ .

**Table 10.2. Jackknife values for the patch data**

$\hat{\theta}_{(1)}$	$\hat{\theta}_{(2)}$	$\hat{\theta}_{(3)}$	$\hat{\theta}_{(4)}$	$\hat{\theta}_{(5)}$	$\hat{\theta}_{(6)}$	$\hat{\theta}_{(7)}$	$\hat{\theta}_{(8)}$
-.0571	-.1285	-.0215	-.1325	-.0507	-.0840	-.0649	-.0222

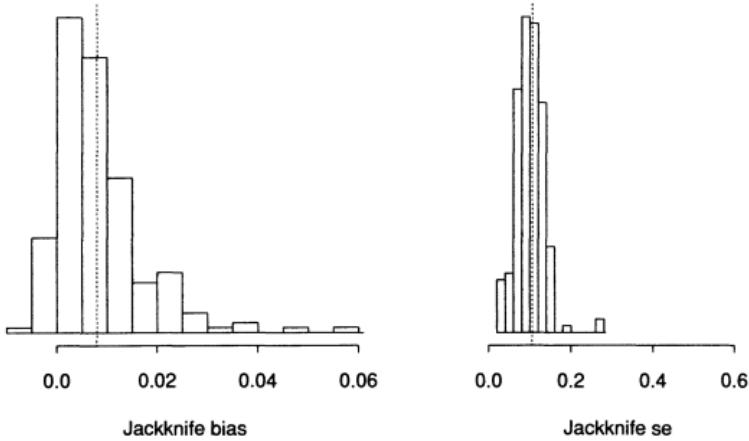
Для данных об уровне гормона статистика отношения  $\hat{\theta} = \bar{z}/\bar{y} = -0.0713$  (формула 10.10), репликации складного ножа показаны в таблице 10.2. Это приводит к  $\hat{\theta}_{(.)} = -0.0702$ , и

$$\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}} = 7\{-0.0702 - (-0.0713)\} = 0.0080. \quad (10.32)$$

Не случайно, что  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  так близко согласуется с идеальной будстреп оценкой  $\widehat{\text{bias}}_\infty = \widehat{\text{bias}}_{\hat{F}}$ . В главе 20 показано, что  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  — это приближение плагин оценки смещения рядом Тейлора второго порядка. Важно помнить следующее: все три оценки смещения,  $\widehat{\text{bias}}_B$ ,  $\widehat{\text{bias}}_{\hat{F}}$  и  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  пытаются аппроксимировать одну и ту же идеальную оценку  $\text{bias}_{\hat{F}}$ . В главе 20 обсуждается инфинитезимальный складной нож — еще один способ приблизительного определения смещения. Мы также увидим аппроксимации, отличные от  $\widehat{\text{bias}}_B$ , для идеальной оценки стандартной ошибки  $\text{se}_{\hat{F}}$  (хотя здесь сложнее улучшить прямое приближение Монте-Карло  $\widehat{\text{se}}_B$ ). Во всех методах численной аппроксимации работает только один принцип оценки, подстановка  $\hat{F}$  вместо  $F$  в любую меру точности, которую мы хотим оценить. Реализация

этого принципа численно эффективным способом — важная тема, но современные компьютеры настолько мощны, что даже неэффективные способы обычно достаточно хороши, чтобы дать пригодные ответы.

Идеальная оценка  $\text{bias}_{\hat{F}}$  имеет недостатки. Если позволить  $B \rightarrow \infty$ , изменчивость смещения  $\widehat{\text{bias}}_B$  из-за выборки Монте-Карло устраниется. Однако остается вариабельность  $\widehat{\text{bias}}_\infty = \text{bias}_{\hat{F}}$  из-за случайности  $\hat{F}$  как оценки  $F$ . Другими словами, у нас все еще есть обычные ошибки, связанные с оценкой любого параметра по выборке.



**Figure 10.3.** *Left panel:* 200 bootstrap replications of the jackknife bias estimate (10.30) for  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$ , patch data; dashed line indicates actual estimate  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}} = .0080$ ; estimated coefficient of variation for  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  equals .96;  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  has low accuracy. *Right panel:* the corresponding 200 bootstrap replications of the jackknife standard error estimate for  $\hat{\theta}$ , (10.34); dashed line indicates actual estimate  $\widehat{s}_e_{\text{jack}} = .106$ ; scale has been chosen so that 0 and dashed lines match left panel; estimated coefficient of variation is .33;  $\widehat{s}_e_{\text{jack}}$  is about 3 times more accurate than  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$ .

Мы могли бы использовать бутстреп для вычисления изменчивости идеальной бутстреп оценки  $\text{bias}_{\hat{F}}$ , как показано на рисунке 6.1, за исключением практических трудностей вычисления статистики  $s(x) = \text{bias}_{\hat{F}}$ . Вместо этого давайте рассмотрим более простую статистику  $s(x) = \widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$ , которая для  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$  обычно близка к  $\text{bias}_{\hat{F}}$ . Статистика  $s(x) = \widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  является сложной функцией от  $x$ , требующей сначала вычисления  $\hat{\theta}$ , затем  $\hat{\theta}_{(i)}$  и, наконец, 10.30, но мы все ещё можем использовать бутстреп для оценки стандартной ошибки  $s(x)$ .

$B = 200$  бутстреп выборок размера  $n = 8$  были сгенерированы из данных об уровне гормона, и для каждой выборки была рассчитана оценка смещения по методу складного ножа для статистики отношения, скажем,

$\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}^*$ . Левая часть рисунка 10.3 представляет собой гистограмму из 200 значений  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}^*$ .

Ясно, что статистика  $s(x) = \widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  сильно варьируется. 200 реплик  $s(x^*)$  имели стандартное отклонение 0.0081 и среднее 0.0084, что давало оценку коэффициента вариации

$$\widehat{\text{cv}}(\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}) = 0.0081 / 0.0084 = 0.96. \quad (10.33)$$

Десять процентов значений  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}^*$  были меньше нуля и 16% больше  $2 \cdot \widehat{\text{bias}}_{\text{jack}} = 0.0160$ .

Нет ничего плохого ни в  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$ , ни в  $\widehat{\text{bias}}_{\hat{F}}$ . Проблема в том, что  $n = 8$  точек данных недостаточно для точного определения смещения статистики отношения в этой ситуации. Рисунок 10.3 поясняет это. Вычисления смещения не были пустой тратой времени. Мы достаточно уверены, что истинное смещение  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$ , каким бы оно ни было, находится где-то между  $-0.005$  и  $0.025$ . Бутстреп стандартная ошибка  $\hat{\theta}$  была 0.105, поэтому отношение абсолютного смещения к стандартной ошибке, вероятно, меньше 0.25. Вычисления 10.14 показывают, что в данном случае систематическая ошибка не вызывает особого беспокойства.

Этот расчет предполагает другое беспокойство. Возможно, бутстреп оценка стандартной ошибки  $\widehat{\text{se}}_{200} = 0.105$  тоже ненадежна. Теоретически мы могли бы провести бутстреп  $\widehat{\text{se}}_{200}$ , чтобы выяснить это, но это сложно с вычислительной точки зрения. Однако существует оценка стандартной ошибки по методу складного ножа, предложенная Джоном Тьюки в конце 1950-х годов, которая требует меньше вычислений, чем  $\widehat{\text{se}}_{200}$ :

$$\widehat{\text{se}}_{\text{jack}} = \left[ \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(.)})^2 \right]^{1/2}. \quad (10.34)$$

Эта формула, которая применяется к гладко определенной статистике, такой как  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$ , обсуждается в главе 11. Оказывается, это альтернатива  $\widehat{\text{se}}_B$  численной аппроксимации идеальной бутстреп оценки  $\widehat{\text{se}}_\infty = \text{se}_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ . Статистика отношения данных об уровне гормона 10.2 дает

$$\widehat{\text{se}}_{\text{jack}} = 0.106, \quad (10.35)$$

почти то же самое, что и  $\widehat{\text{se}}_{200}$ . Мы увидим, что  $\widehat{\text{se}}_{\text{jack}}$  не всегда является хорошим приближением к  $\widehat{\text{se}}_\infty$ , но для  $\hat{\theta} = \bar{y}/\bar{z}$  это вполне приемлемо.

Те же 200 бутстреп выборок, использованные для обеспечения репликации  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  на рисунке 10.3, также дали бутстреп репликации  $\widehat{\text{se}}_{\text{jack}}$ . Гистограмма 200 бутстреп значений  $\widehat{\text{se}}_{\text{jack}}$ , показанная на правой части рисунка 10.3, указывает на существенную изменчивость, но не такую большую, как для  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$ . Гистограмма имеет среднее значение 0.099 и стандартное отклонение 0.033, что дает выборочный коэффициент вариации

$$\widehat{\text{cv}}(\widehat{\text{se}}_{\text{jack}}) = 0.33, \quad (10.36)$$

только третью  $\widehat{\text{cv}}(\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}})$ . На самом деле стандартную ошибку обычно легче оценить, чем смещение, а также она является более важным фактором, определяющим вероятностные характеристики оценки  $\hat{\theta}$ .

Мы обсудили оценку  $\text{bias}_F(\hat{\theta}, \theta)$ , уравнение 10.1. Бутстреп процедуру оценки смещения, которая сводится к подстановке  $\hat{F}$  вместо  $F$  в  $\text{bias}_F$ , можно обобщить: 1) мы можем рассмотреть общие вероятностные механизмы  $P \rightarrow x$ , как на рисунке 8.3. (Обратите внимание, что здесь « $P$ » означает нечто иное, чем вектор повторной выборки  $P^*$ , 10.18.) 2) Мы можем рассмотреть общие меры смещения,  $\text{Bias}_P(\hat{\theta}, \theta)$ , например, медианное смещение

$$\text{Bias}_P(\hat{\theta}, \theta) = \text{median}_P(\hat{\theta}(x)) - \theta(P). \quad (10.37)$$

На рисунке 10.4 показана схема. Идеальная бутстреп оценка  $\text{Bias}_P(\hat{\theta}, \theta)$  это плагин оценка

$$\text{Bias}_P(\hat{\theta}^*, \theta(\hat{P})). \quad (10.38)$$

Здесь  $\hat{P} \rightarrow x^*$  бутстреп данные;  $\hat{\theta}^* = s(x^*)$  бутстреп репликация  $\hat{\theta} = s(x)$ ; и  $\theta(\hat{P})$  — значение интересующего параметра  $\theta = t(P)$ , когда  $P = \hat{P}$ , механизм оценки вероятности. (Мы не можем писать  $\theta(\hat{P}) = \hat{\theta}$ , поскольку  $t(\cdot)$  может быть другой функцией, отличной от  $s(\cdot)$ , смотри задачу 10.10.) Для медианного смещения 10.37

$$\text{Bias}_{\hat{P}}(\hat{\theta}^*, \theta(\hat{P})) = \text{median}_{\hat{P}}(\hat{\theta}(x^*)) - \theta(\hat{P}). \quad (10.39)$$

Обычно  $\text{Bias}_{\hat{P}}$  нужно аппроксимировать методами Монте-Карло. Усовершенствованные методы, такие как  $\overline{\text{bias}}_B$  и  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$ , обычно недоступны для общих мер смещения, таких как 10.37.

## 10.6 Поправка на смещение

Зачем нам нужно оценивать смещение  $\hat{\theta}$ ? Обычная причина — исправить  $\hat{\theta}$ , чтобы она стала менее смещенной. Если  $\widehat{\text{bias}}$  является оценкой смещения  $\text{bias}_F(\hat{\theta}, \theta)$ , то очевидной оценкой с поправкой на смещение является

$$\bar{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{\text{bias}} \quad (10.40)$$

Принимая  $\widehat{\text{bias}}$  равным  $\widehat{\text{bias}}_B = \hat{\theta}^*(\cdot) - \hat{\theta}$ , получаем

$$\bar{\theta} = 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*(\cdot). \quad (10.41)$$

(Существует тенденция, неправильная тенденция думать о самой  $\hat{\theta}^*(\cdot)$  как о скорректированной на смещение оценке. Обратите внимание, что 10.41 утверждает, что если  $\hat{\theta}^*(\cdot)$  больше  $\hat{\theta}$ , то исправленная оценка  $\bar{\theta}$  должна быть меньше  $\hat{\theta}$ .) Положим  $\widehat{\text{bias}} = 0.0080$  для статистики отношения данных об уровне гормона, равной как  $\overline{\text{bias}}_{400}$ , так и  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$ , исправленная оценка отношения  $\theta$  равна

$$\bar{\theta} = -0.0713 - 0.0080 = -0.0793. \quad (10.42)$$

На практике исправление смещения может быть опасно. Даже если  $\hat{\theta}$  менее смещена, чем  $\bar{\theta}$ , она может иметь значительно большую стандартную ошибку. Еще раз, это можно проверить с помощью бутстрепа. Для статистики отношения данных об уровне гормона 200 бутстреп репликаций  $\bar{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{bias}_{jack}$  сравнивались с соответствующими репликациями  $\hat{\theta}$ . Бутстреп оценки стандартной ошибки  $\bar{\theta}$  и  $\hat{\theta}$  были почти идентичны, поэтому в этом случае исправление смещения не было опасным.

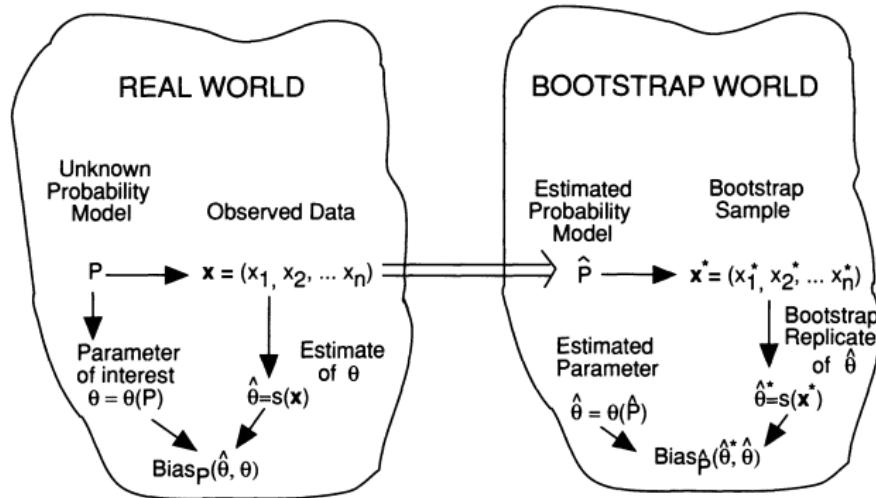


Figure 10.4. Diagram of bootstrap bias estimation in a general framework, an extension of Figure 8.3.  $B_{\hat{P}}(\hat{\theta}^*, \theta(\hat{P}))$  is a general bias measure. Usually  $Bias_{\hat{P}}(\hat{\theta}^*, \theta(\hat{P}))$  must be approximated by Monte Carlo methods.

Подводя итог, можно сказать, что оценка смещения обычно интересна и целесообразна, но точное использование оценки смещения часто проблематично. Систематические ошибки оценить труднее, чем стандартные ошибки, как показано на рисунке 10.3. Прямое исправление смещения 10.40 может быть опасно для использования на практике из-за большой изменчивости  $\widehat{bias}$ . Исправление смещения может вызвать большее увеличение стандартной ошибки, что, в свою очередь, приводит к большей среднеквадратичной ошибке (уравнение 10.14). Если  $\widehat{bias}$  мало по сравнению с предполагаемой стандартной ошибкой  $\widehat{s}\theta$ , то безопаснее использовать  $\hat{\theta}$ , чем  $\bar{\theta}$ . Если  $\widehat{bias}$  велико по сравнению с  $\widehat{s}\theta$ , то это может указывать на то, что статистика  $\hat{\theta} = s(x)$  не является подходящей оценкой параметра  $\theta$ .

Оценка ошибки предсказания — одна из важных задач, в которой полезно исправление смещения. Смещение очевидной оценки велико по сравнению со стандартной ошибкой, и его можно эффективно уменьшить, добавив поправочный член. Подробности приведены в главе 17.

# Глава 11

## Метод складного ножа

### 11.1 Введение

В главе 10 мы упоминаем складной нож — метод оценки смещения и стандартной ошибки оценки. Складной нож появился раньше бутстрепа и имеет близкое сходство с ним. В этой главе мы подробно исследуем метод складного ножа. Некоторые из представленных здесь идей получили дальнейшее развитие в главах 20 и 21.

### 11.2 Определение складного ножа

Предположим, у нас есть выборка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и оценка  $\hat{\theta} = s(x)$ . Мы хотим оценить смещение и стандартную ошибку  $\hat{\theta}$ . Складной нож фокусируется на выборках, которые не учитывают одно наблюдение за раз:

$$x_{(i)} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (11.1)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ , так называемых выборках складного ножа.  $I$ -ая выборка складного ножа состоит из набора данных с удаленным  $i$ -м наблюдением. Пусть

$$\hat{\theta}_{(i)} = s(x_{(i)}) \quad (11.2)$$

будет  $i$ -й репликацией складного ножа  $\hat{\theta}$ .

Оценка смещения по методу складного ножа определяется как

$$\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}} = (n - 1)(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}), \quad (11.3)$$

где

$$\hat{\theta}_{(.)} = \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{(i)} / n. \quad (11.4)$$

Оценка стандартной ошибки по методу складного ножа определяется как

$$\widehat{s}_{\text{jack}} = \left[ \frac{n-1}{n} \sum (\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(\cdot)})^2 \right]^{1/2}. \quad (11.5)$$

Откуда берутся эти формулы? Начнем с  $\widehat{s}_{\text{jack}}$ . Вместо того, чтобы смотреть на все (или некоторые) наборы данных, которые могут быть получены путем выборки с заменой из  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , складной нож рассматривает  $n$  фиксированных выборок  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ , полученные удалением по одному наблюдению за раз. Подобно бутстреп оценке стандартной ошибки, формула для  $\widehat{s}_{\text{jack}}$  выглядит как стандартное отклонение выборки этих  $n$  значений, за исключением того, что первый коэффициент равен  $(n-1)/n$  вместо  $1/(n-1)$  или  $1/n$ . Конечно,  $(n-1)/n$  намного больше, чем  $1/(n-1)$  или  $1/n$ . Интуитивно этот «коэффициент увеличения» (??? "inflation factor") необходим, потому что отклонения складного ножа

$$(\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(\cdot)})^2 \quad (11.6)$$

имеют тенденцию быть меньше, чем бутстреп отклонения

$$[\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot)]^2, \quad (11.7)$$

поскольку типичная выборка метода складного ножа больше похожа на исходные данные  $x$ , чем типичная бутстреп выборка.

Точный вид множителя  $(n-1)/n$  получается путем рассмотрения частного случая  $\hat{\theta} = \bar{x}$ . Тогда легко показать, что

$$\widehat{s}_{\text{jack}} = \left\{ \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 / \{(n-1)n\} \right\}^{1/2}, \quad (11.8)$$

(задача 11.1). То есть коэффициент  $(n-1)/n$  — это именно то, что нужно, чтобы сделать  $\widehat{s}_{\text{jack}}$  равным несмешенной оценке стандартной ошибки среднего. Коэффициент  $[(n-1)/n]^2$  приведет плагин оценке

$$\left\{ \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 / n^2 \right\}^{1/2}, \quad (11.9)$$

но это существенно не отличается от несмешенной оценки, если только  $n$  не мало. Соглашение о том, что  $\widehat{s}_{\text{jack}}$  использует множитель  $(n-1)/n$ , несколько произвольно.

Аналогичным образом, оценка смещения по методу складного ножа 11.3 кратна среднему значению отклонений складного ножа

$$\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.10)$$

Величины 11.10 иногда называют величинами влияния складного ножа. Обратите внимание на множитель  $(n-1)$  в 11.3. Это коэффициент увеличения,

аналогичный тому, который появляется при оценке по методу складного ножа стандартной ошибки. Чтобы вывести его, мы не можем обратиться к частному случаю  $\hat{\theta} = \bar{x}$ , потому что  $\bar{x}$  несмещенная, а  $\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}$ , как и должно быть, равно нулю (задача 11.7). Поскольку этот случай не говорит нам, каким должен быть старший фактор, мы вместо этого рассматриваем в качестве нашего тестового примера выборочную дисперсию

$$\hat{\theta} = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 / n. \quad (11.11)$$

Она имеет смещение  $-1/n$  дисперсий генеральной совокупности, а множитель  $(n-1)$  перед  $\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}$  делает  $\widehat{\text{bias}}_{\text{jack}}$  равным  $-1/n$ , умноженному на  $\sum(x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$ , несмещенной оценке дисперсии генеральной совокупности (задача 11.8).

### 11.3 Пример: данные о тестировании

Давайте применим оценку стандартной ошибки по методу складного ножа к набору данных о результатах тестов 88 студентов, приведенному в таблице 7.1. Напомним, что представляющая интерес статистика — это отношение наибольшего собственного значения ковариационной матрицы к сумме собственных значений, как указано в (7.8)

$$\hat{\theta} = \hat{\lambda}_1 / \sum_1^5 \hat{\lambda}_i. \quad (11.12)$$

Чтобы применить метод складного ножа, мы удаляем по одному каждый случай (строку) в таблице 7.1 и вычисляем  $\hat{\theta}$  для каждого набора данных размером 87. На верхней части рисунка 11.1 показана гистограмма 88 значений складного ножа  $\hat{\theta}_{(i)}$ .

Мы также вычислили 88 бутстреп значений  $\hat{\theta}$ . Обратите внимание, что разброс гистограммы, полученной с помощью метода складного ножа, намного меньше, чем разброс бутстреп гистограммы, показанной на нижней части рисунка (мы принудительно задаем одну и ту же горизонтальную шкалу во всех гистограммах). Это иллюстрирует тот факт, что наборы данных складного ножа в среднем более похожи на исходный набор данных, чем бутстреп наборы данных. По средне на рисунке показана гистограмма «занесенных» значений складного ножа

$$\sqrt{87}(\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(.)}) \quad (11.13)$$

с разрывом в точке среднего складного ножа  $\hat{\theta}_{(.)}$ . С этим коэффициентом увеличения гистограмма складного ножа похожа на бутстреп гистограмму, показанную на нижней части рисунка. Величина  $\widehat{s_e}_{\text{jack}}$  оказывается равной 0.049, что лишь немногого больше, чем значение 0.047 для бутстреп оценки, полученной в главе 7.

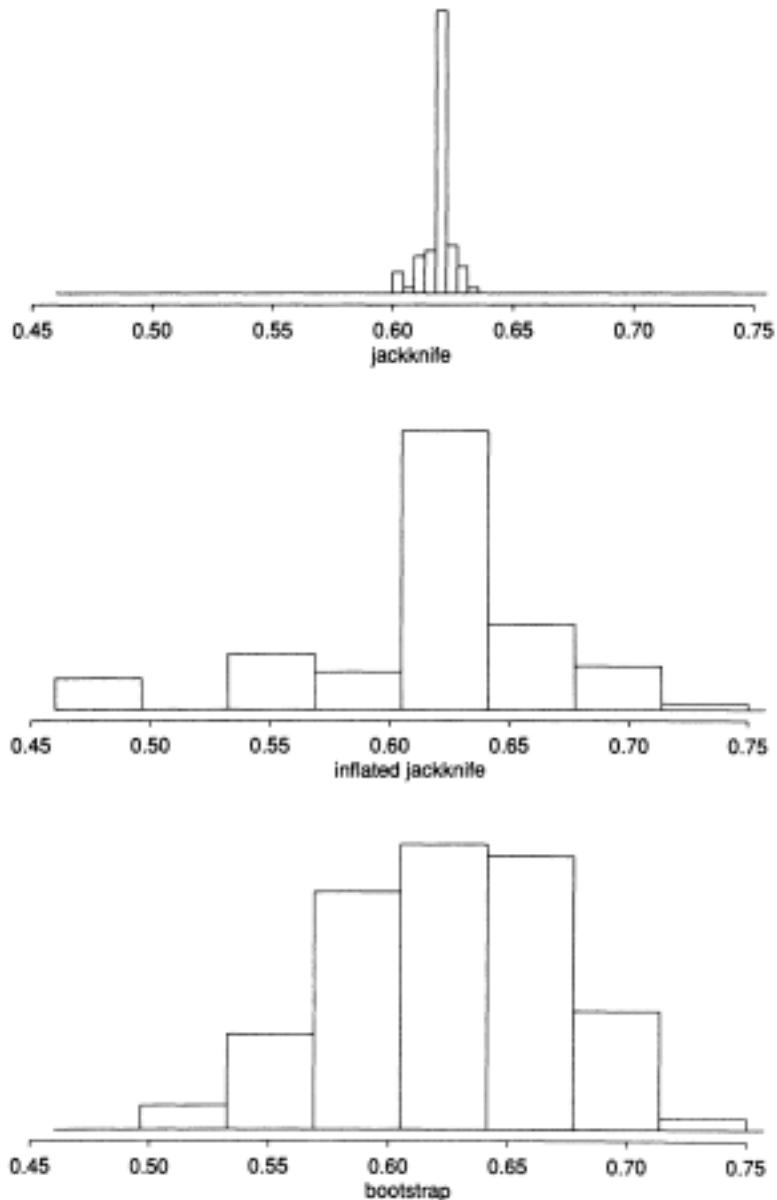


Figure 11.1. Histogram of the 88 jackknife values for the score data of Table 7.1 (top panel); jackknife values inflated by a factor of  $\sqrt{87}$  from their mean (middle panel); 88 bootstrap values for the same problem (bottom panel).

## 11.4 Псевдо-значения

Другой способ думать о складном ноже — это псевдо-значения

$$\tilde{\theta}_i = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(i)}. \quad (11.14)$$

Обратите внимание, что в частном случае  $\hat{\theta} = \bar{x}$ , мы имеем  $\tilde{\theta}_i = x_i$ ,  $i$ -е значение данных. Кроме того, для любой  $\hat{\theta}$  формула для  $\widehat{se}_{jack}$  может быть выражена как

$$\widehat{se}_{jack} = \left\{ \sum_1^n (\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta})^2 / \{(n-1)n\} \right\}^{1/2}, \quad (11.15)$$

где  $\tilde{\theta} = \sum \tilde{\theta}_i / n$ . Это похоже на оценку стандартной ошибки среднего для «данных»  $\tilde{\theta}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Идея, лежащая в основе 11.14, состоит в том, что псевдо-значения должны действовать так, как если бы они были  $n$  независимыми значениями.

Что произойдет, если мы попытаемся продолжить эту идею и использовать псевдо-значения для построения доверительного интервала? Один из разумных подходов — сформировать интервал

$$\tilde{\theta} \pm t_{n-1}^{(1-\alpha)} \widehat{se}_{jack}, \quad (11.16)$$

где  $t_{n-1}^{(1-\alpha)}$  —  $(1 - \alpha)$ -й процентиль распределения  $t$  с  $n - 1$  степенями свободы. Оказывается, этот интервал работает не очень хорошо: в частности, он ненамного лучше, чем более грубые интервалы, основанные на теории о нормальном распределении. Для построения доверительного интервала необходимы более совершенные подходы, как описано в главах 12–14. Хотя псевдо-значения интригуют, неясно, являются ли они хороший способ думать о складном ноже. Мы не будем здесь их рассматривать.

## 11.5 Связь метода складного ножа и бутстрепа

Что лучше, бутстреп или складной нож? Поскольку для этого требуется вычисление  $\hat{\theta}$  только для  $n$  наборов данных складного ножа, складной нож будет легче вычислить, если  $n$  будет меньше, чем, скажем, 100 или 200 репликаций, используемых бутстрепом для оценки стандартной ошибки. Однако, рассматривая только  $n$  выборок складного ножа, складной нож использует только ограниченную информацию о статистике  $\hat{\theta}$ , и, таким образом, можно предположить, что складной нож менее эффективен, чем бутстреп. Фактически оказывается, что складной нож можно рассматривать как приближение к бутстрепу. Это объясняется в задачах 11.4 и 11.5

и в главе 20. Вот суть идеи: рассмотрим линейную статистику, то есть статистику, которую можно записать в виде

$$\hat{\theta} = s(x) = \mu + \frac{1}{n} \sum_1^n \alpha(x_i), \quad (11.17)$$

где  $\mu$  — константа, а  $\alpha(\cdot)$  — функция. Среднее — это простой пример линейной статистики, для которой  $\mu = 0$  и  $\alpha(x_i) = x_i$ . Теперь для такой статистики, оказывается, что оценка по методу складного ножа и бутстреп оценка стандартных ошибок совпадают, за исключением незначительного множителя  $\{(n - 1)n\}^{1/2}$ , используемого в определении складного ножа. Это именно то, что мы нашли для  $\hat{\theta} = \bar{x}$ : складной нож дает оценку стандартной ошибки  $\left\{ \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 / \{(n - 1)n\} \right\}^{1/2}$  в то время как бутстреп приводит к этому значению, умноженному на  $\{(n - 1)n\}^{1/2}$ . Неудивительно, что для линейной статистики нет потери информации при использовании складного ножа, поскольку знание линейной статистики для  $n$  наборов данных складного ножа  $x_{(i)}$  определяет значение  $\hat{\theta}$  для любого бутстреп набора данных  $x^*$  (задача 11.3).

При нелинейной статистике происходит потеря информации. Складной нож линейно аппроксимирует бутстреп: то есть он соглашается с бутстрепом (за исключением множителя  $\{(n - 1)n\}^{1/2}$ ) для некоторой линейной статистики вида 11.17, которая приближает  $\hat{\theta}$ . Детали этой интересной взаимосвязи приведены в задачах 11.5 и 11.6 и в главе 20. С практической точки зрения, эти результаты показывают, что точность оценки стандартной ошибки по методу складного ножа зависит от того, насколько  $\hat{\theta}$  близка к линейности. Для сильно нелинейных функций складной нож может быть неэффективным, а иногда и опасным.

На рисунке 11.2 показаны результаты исследования этой неэффективности на конкретном примере. Мы сгенерировали 200 выборок размером 10 из двумерной нормальной совокупности с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляцией 0.7. Ящики с усами слева показывают оценки, полученные по методам бутстреп и складного ножа, стандартной ошибки для  $\hat{\theta} = \bar{x}$ , а справа — для коэффициента корреляции. Горизонтальные линии показывают истинную стандартную ошибку  $\hat{\theta}$  в каждом случае. В обоих случаях бутстреп и складной нож демонстрируют небольшое смещение при оценке стандартной ошибки. Вариабельность оценки складного ножа немного больше, чем у бутстрепа для среднего (линейная статистика), но значительно больше для коэффициента корреляции (нелинейная статистика). По этой причине в последнем случае предпочтительнее использовать бутстреп. Задача 11.13 рассматривает бутстреп и метод складного ножа для другой нелинейной статистики.

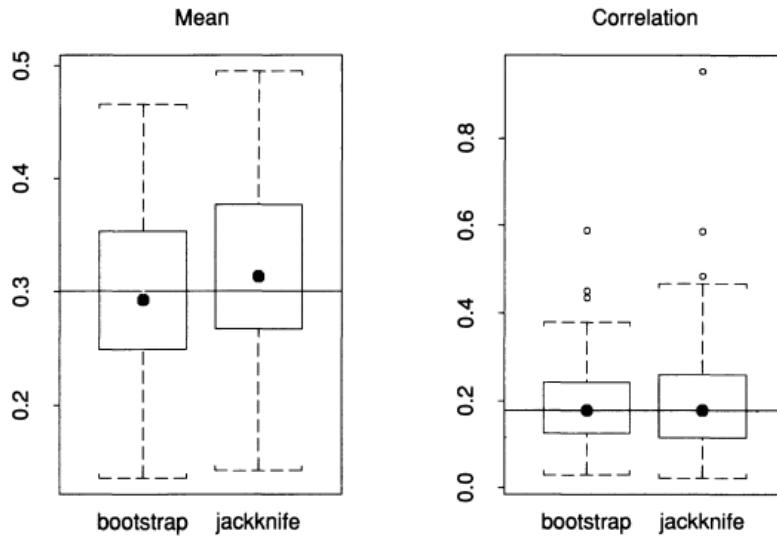


Figure 11.2. Bootstrap and jackknife estimates of standard error for two different statistics  $\hat{\theta}$ , for samples of size 10 from a bivariate normal population with correlation .7. On the left  $\hat{\theta} = \bar{x}$ ; on the right  $\hat{\theta}$  is the sample correlation. Boxplots indicate the distribution of standard error estimates over 100 simulated samples.

Точно так же можно показать, что оценка смещения складного ножа является приближением к начальной оценке смещения. Приближение в терминах квадратичной (а не линейной) статистики, которая имеет вид

$$\hat{\theta} = s(x) = \mu + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha(x_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(x_i, x_j). \quad (11.18)$$

Простым примером квадратичной статистики является выборочная дисперсия 11.11. Раскрывая ее, мы обнаруживаем, что ее можно выразить в форме уравнения 11.18 (задача 11.9). Для такой статистики, если мы знаем значение  $\hat{\theta}$  для  $x$ , а также  $x_{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$ , мы можем вывести значение  $\hat{\theta}$  для любого бутстреп набора данных. Как показано в задачах 11.10–11.11, оценки смещения складного ножа и бутстрепа по существу совпадают для квадратичной статистики.

## 11.6 Отказ складного ножа

Подводя итог, можно сказать, что складной нож часто обеспечивает простое и хорошее приближение к бутстрепу для оценки стандартных ошибок и смещения. Однако, как вкратце упоминалось в главе 10, складной нож может с треском выйти из строя, если статистика  $\hat{\theta}$  не является «гладкой». Интуитивно идея гладкости заключается в том, что небольшие изменения в наборе данных вызывают только небольшие изменения в статистике. Простым примером негладкой статистики является медиана. Чтобы понять, почему медиана не является гладкой, рассмотрим 9 упорядоченных значений из контрольной группы данных о мышах (таблица 2.1):

$$10, 27, 31, 40, 46, 50, 52, 104, 146. \quad (11.19)$$

Медиана этих значений равна 46. Теперь предположим, что мы начинаем увеличивать значение 4-го по величине значения  $x = 40$ . Медиана не меняется вообще, пока  $x$  не станет больше 46, а затем после этого медиана будет равна  $x$ , пока  $x$  не превысит 50. Это означает, что медиана не является дифференцируемой (или гладкой) функцией от  $x$ .

Это отсутствие гладкости приводит к тому, что оценка стандартной ошибки по методу складного ножа несовместима с медианой. Для данных о мышах значения складного ножа для медианы<sup>1</sup> равны

$$48, 48, 48, 48, 45, 43, 43, 43, 43. \quad (11.20)$$

Обратите внимание, что встречаются только 3 различных значения, что является следствием недостаточной гладкости медианы и того факта, что наборы данных складного ножа отличаются от исходного набора данных только на одно наблюдение. Итоговая оценка  $se_{jack}$  составляет 6.68. Для данных о мышах бутстреп оценка стандартной ошибки на основе бутстреп выборок объема  $B = 100$  составляет 9.58, что значительно больше, чем значение складного ножа, равное 6.68. При  $n \rightarrow \infty$ , можно показать, что  $se_{jack}$  противоречива, то есть не может сходиться к истинной стандартной ошибке. С другой стороны, бутстреп рассматривает наборы данных, которые менее похожи на исходный набор данных, чем наборы данных складного ножа, и, следовательно, согласованы с медианой.

## 11.7 Метод складного ножа с отбрасыванием $d$ наблюдений

Есть способ исправить несоответствие складного ножа негладкой статистике. Вместо того чтобы исключать по одному наблюдению за раз, мы не учтем  $d$  наблюдений, где  $n = r \cdot d$  для некоторого целого числа  $r$ . Можно показать, что если  $n^{1/2}/d \rightarrow \infty$  и  $n - d \rightarrow \infty$ , то складной нож «с отбрасыванием» согласован с медианой. Грубо говоря, нужно исключить более

---

<sup>1</sup>Медиана четного числа точек данных — это среднее двух значений из середины.

$d = \sqrt{n}$ , но менее  $n$  наблюдений, чтобы добиться согласованности в оценке стандартной ошибки складным ножом. Пусть  $\hat{\theta}_{(s)}$  обозначает  $\hat{\theta}$ , примененную к набору данных с удаленным подмножеством  $s$ . Формула для оценки стандартной ошибки складным ножом с отбрасыванием  $d$  наблюдений:

$$\left\{ \frac{r}{\binom{n}{d}} \sum (\hat{\theta}_{(s)} - \hat{\theta}_{(\cdot)})^2 \right\}^{1/2}, \quad (11.21)$$

где  $\hat{\theta}_{(\cdot)} = \sum \hat{\theta}_{(s)} / \binom{n}{d}$  и сумма ведется по всем подмножествам  $s$  размера  $n - d$ , выбранным без замены из  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

В нашем примере с  $n = 9$  мы можем выбрать  $d = 4 > \sqrt{9}$ , и вычисление складного ножа delete-d включает в себя нахождение медианы для

$$\binom{9}{4} = 126 \quad (11.22)$$

выборок, соответствующих одновременному исключению 4 наблюдений. Это дает оценку стандартной ошибки 7.16, что несколько ближе к бутстреп значению 9.58, чем значение складного ножа с удалением одного элемента, которое равно 6.68.

Если  $n$  велико и  $\sqrt{n} < d < n$ , количество выборок складного ножа  $\binom{n}{d}$  может быть очень значительным. Вместо вычисления  $\hat{\theta}$  для всех этих подмножеств можно вместо этого охватить случайную выборку подмножеств, что, в свою очередь, сделает складной нож delete-d больше похожим на бутстреп. Текущая работа над складным ножом delete-d представляет собой возрождение исследований складного ножа.

Функция складного ножа на языке  $S$  описана в приложении.