Математика: общий курс

Дейвид Капаца

First printing, July 2020

Оглавление

I Введение

Один из учеников Евклида спросил у него:

1. (Очень) Краткая история математики

II Системы уравнений

2. Системы уравнений. Начало.

2.1 Приводящие к системам уравнений задачи

Рассмотрим две задачи:

Задача 2.1 25 августа 2020 года на Московской фондовой бирже ваш коллега-трейдер купил 500 акций Русала и 100 акций Алроса за 22700 рублей. Зная, что одна акция Алроса стоит 67 рублей, скажите, сколько стоит одна акция Русала?

Задача 2.2 25 августа 2020 года на Московской фондовой бирже ваш коллега-трейдер купил 500 акций Русала и 100 акций Алроса за 22 700 рублей. В то же время другой ваш коллега купил 300 акций Русала и 200 акций Алроса за 13 000 рублей. Назовите цены акций Русала и Алроса.

Первая задача не требует долгих размышлений и решается без помощи систем уравнений — решите её. Очевидно, что со второй задачей уже не всё так просто.

Покажем, как будет выглядеть решение первой задачи, если решать её новым способом.

Решение:

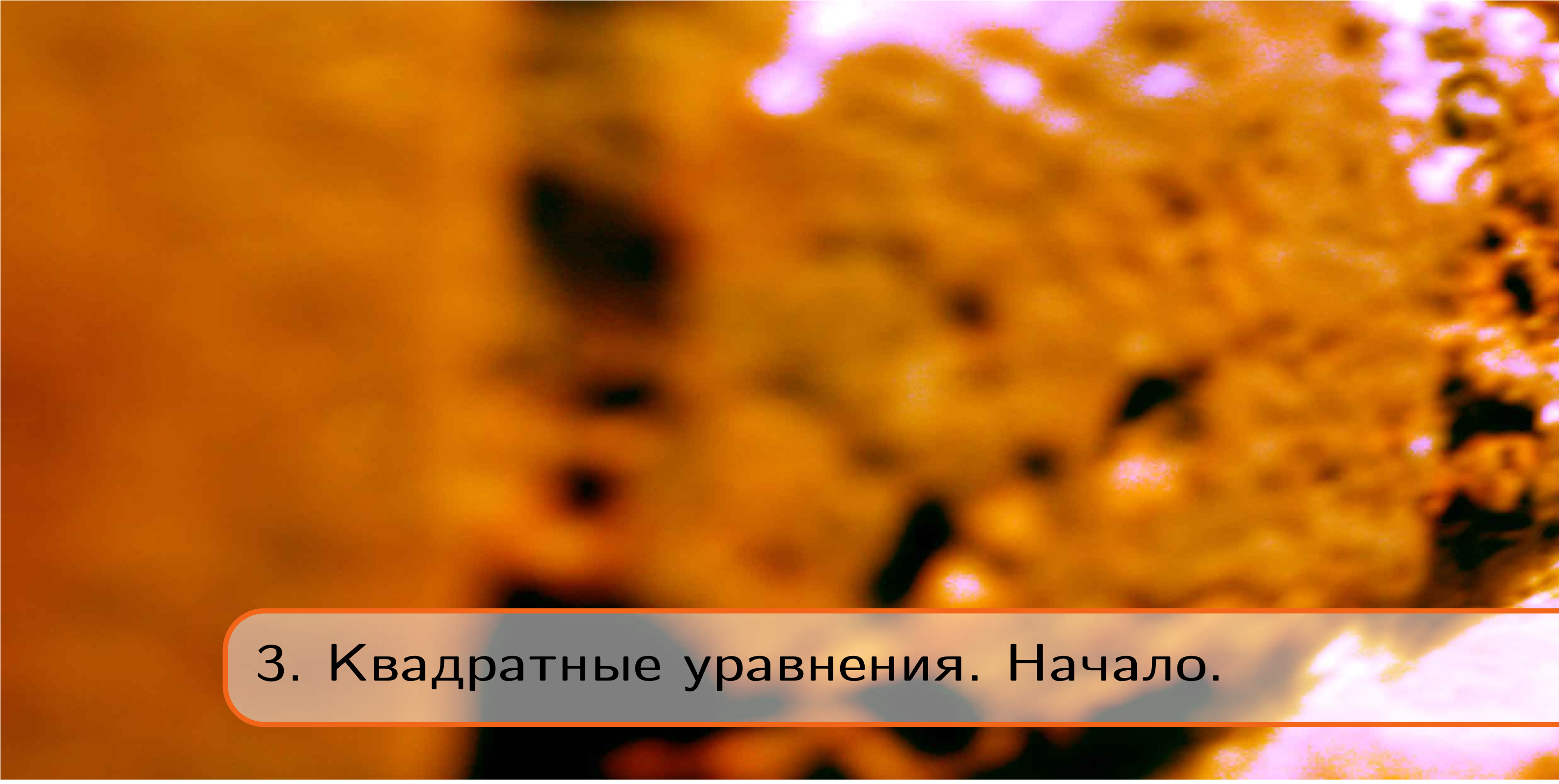
Пусть x рублей — цена акции Русала, а y рублей — цена акции Алроса. Давайте запишем условие таким образом:

$$\begin{cases} 500x + 100y = 22700 \\ x = 67 \end{cases}$$

Видим два уравнения, объединённых фигурной скобкой. Такая запись называется **системой уравнений**. Из второго уравнения системы видим, что $x = 67$. Так как $x = 67$, можно x во первом уравнении заменить на число 67. Получим уравнение с одной неизвестной, которое мы уже можем решить:

$$500 \cdot 67 + 100y = 22700$$

III Квадратные уравнения



3. Квадратные уравнения. Начало.

3.1 Приводящие к квадратным уравнениям задачи

Квадратные уравнения приходят к нам из совершенно разных областей. Их можно встретить во многих задачах геометрии, физики, и теории чисел.

3.1.1 Задача о стороне квадрата

Простейшая задача, которая приходит к нам из геометрии, формулируется так:
Задача 3.1 Чему равна сторона квадрата с площадью 9 см^2?

Решение:
Пусть x — сторона этого квадрата. Известно, что площадь квадрата — квадрат его стороны. Используя этот факт, составляем уравнение:

$$x^2 = 9.$$

Извлекаем корень из обоих частей, получаем уравнение с модулем:

$$|x| = 3.$$

Отсюда получаем два решения: -3 и 3. Разумеется, в условиях данной задачи отрицательное решение нам не нужно, получаем ответ: $x = 3$ см.

3.1.2 Задача о формате бумаги

Многие из нас пользуются бумагой разных форматов. Пожалуй, самый известный из них — это формат А4 на рис. 3.1.2.

Некоторые также знают, что если склеить по длине два листа А4, мы получим большой лист формата А3 (тоже на рис. 3.1.2). Если же мы решим сложить лист А4 пополам, мы получим лист формата А5. Аналогично для форматов начиная от огромного А0 (его площадь — 1 квадратный метр) до миниатюрного А8.

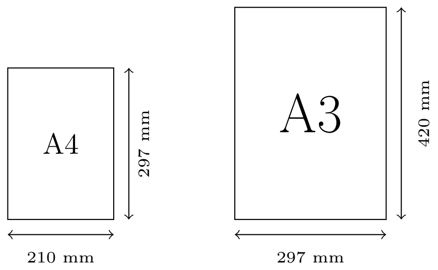


Рис. 3.1: Листы бумаги формата A4 и A3

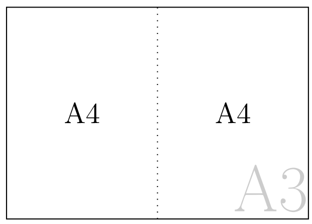


Рис. 3.2: Лист бумаги формата A3 и его разбиение на два листа A4

Очень примечательная особенность семейства форматов A состоит в том, что *соотношение длины к ширине должно быть одинаковым для любого номера.*

Хороший вопрос: *а зачем это нужно?* На самом деле, на это есть легкий ответ. Предположим, что вы нарисовали некоторый рисунок на страничке формата A4, а решили перепечатать его в формате A3, чтобы повесить его себе на стену. Так как соотношение длины и ширины страницы не меняется, ваш рисунок можно отобразить «в масштабе», то есть при переходе между форматами ваш рисунок просто увеличится, то есть:

- Рисунок не растянется в одном из направлений;
- Края рисунка не будут обрезаны.

Возникает следующая задача:

Задача 3.2 Пусть l – длина большого листа, w – его ширина. Каким должно быть соотношение длины к ширине листа

$$\frac{l}{w},$$

чтобы сложив его пополам по длине листа, соотношение новой длины w и ширины $\frac{l}{2}$ не изменилось?

Попробуйте решить эту задачу самостоятельно; если запутаетесь, можно подглянуть в решение.

Решение:

Соотношение не должно измениться — значит должно иметь место равенство:

$$\frac{l}{w} = \frac{w}{l/2}.$$

Это то же самое, что

$$\frac{l}{w} = 2\frac{w}{l}.$$

Нам нужно узнать, чему равно $\frac{l}{w}$. Обозначим эту дробь за неизвестное x и перепишем уравнение:

$$x = \frac{2}{x}$$

Дальше домножаем обе части на x и получаем уравнение

$$x^2 = 2$$

Отсюда $x = \pm\sqrt{2}$, ввиду положительности ответ $x = \sqrt{2}$. Вспоминаем, что скрывалось за неизвестной x и получаем, что требуемое соотношение длины и ширины листа в таком случае следующее:

$$\frac{l}{w} = \sqrt{2} \approx 1.4$$

Таким образом, если мы хотим, чтобы при складывании некоторого листочка вдвое соотношения сторон не менялись, надо чтобы его длина была в $\sqrt{2}$ раз больше, чем его ширина.

3.1.3 Бросок тела вверх

До этого момента нам встречались уравнения, которые требовали только извлечения корня. Ясно, что все подобные задачи решаются достаточно просто. Далее мы рассмотрим задачу, которая приводит к *чуть более* сложному квадратному уравнению.

Задача 3.3 Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли с начальной скоростью 30 м/с. Ускорение свободного падения g считать равным 10. Через сколько времени тело упадёт на землю?

Решение:
Из физики известно, что высота тела, брошенного с начальной скоростью v_0, вычисляется по формуле

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение свободного падения, t — время, прошедшее с момента броска.

Нас спрашивают: через сколько времени тело упадёт на землю? Значит высота тела должна быть 0 м. Так и запишем:

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Теперь подставим известные данные — начальную скорость и ускорение свободного падения:

$$30t - \frac{10t^2}{2} = 0.$$

Получим уравнение:

$$30t - 5t^2 = 0.$$

С такими уравнениями мы ещё не встречались. Напомним, время t здесь выполняет роль неизвестной величины.

Здесь не только неизвестное в квадрате (t^2), но и неизвестное в первой степени (t) участвует. Как же его решать? Подумайте, как можно переписать уравнение так, чтобы его стало легко решить.

На самом деле здесь всё просто: давайте вынесем t за скобки и посмотрим, что получится:

$$t(30 - 5t) = 0.$$

Итак, произведение двух чисел равно нулю тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому получаем два уравнения:

$$t = 0, \qquad 30 - 5t = 0.$$

Когда $t = 0$, по условию задачи тело действительно ещё на поверхности земли, но нам это не особо интересно. С лёгкостью решаем второе уравнение:

$$5t = 30$$

Отсюда $t = 6$ секунд.

Упражнение 3.1
1. Тело брошено вертикально вверх с поверхности Луны с начальной скоростью 20 м/с. Ускорение свободного падения на Луне g считать равным $1,5$ м/с^2. Через сколько времени тело упадёт на поверхость спутника?
2. Тело брошено вертикально вверх с поверхности Юпитера с начальной скоростью 30 м/с. Ускорение свободного падения g считать равным 24 м/с^2. Через сколько времени тело упадёт на поверхность планеты?

■

Как видим, с помощью такой несложной техники, как вынесение за скобки, мы можем решать задачи такого большого масштаба! К сожалению, все квадратные уравнения так не решить, в этом мы убедимся в следующем пункте.

3.2 Выделение полного квадрата

3.3 Немного про комплексные числа

3.4 Некоторые задачи

Задача 3.4 Выделить полный квадрат у следующих выражений:
1. $x^2 + 2x + 10$
2. $x^2 + 2x + \sqrt{2}$
3. $4x^2 + 2x + 1$
4. $9x^2 + 6xy + 3y^2$

Задача 3.5 Решить уравнения, выделив полный квадрат:
1. $x^2 + 2x + 10 = 0$ (комплексные корни!)
2. $2x^2 + 4x - 5 = 0$
3. $9x^2 - 3x - 6 = 0$

Задача 3.6 Выяснить, при каких значениях меняющегося параметра a уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ имеет
- Два вещественных корня;
- Один вещественный корень;
- Имеет только комплексные корни.

Задача 3.7 Решить текстовые задачи:
1. Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 1 больше другого, равно 210. Найдите эти числа.
2. Ширина прямоугольника – x, длина на 4 см больше ширины, а площадь равна 60. Найдите стороны прямоугольника.

3.5 Общее решение квадратного уравнения

Решаем уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Выделим полный квадрат у выражения ax^2+bx+c:

$$ax^2+bx+c = ax^2+2(\sqrt{a}x)\left(\frac{1}{2}b\frac{1}{\sqrt{a}}\right)+c = \left(ax^2+2\left(\sqrt{a}x\right)\left(\frac{1}{2}b\frac{1}{\sqrt{a}}\right)+\frac{b^2}{4a}\right)-\frac{b^2}{4a}+c = \\ = \left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

Вернёмся к уравнению $ax^2+bx+c=0$. Оно эквивалентно следующей цепочке уравнений:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0 & \quad \text{выделение полного квадрата}\\
\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c & \quad \text{перенос в правую часть}\\
\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a}-c} & \quad \text{извлечение квадратного корня}\\
\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}} & \quad \text{преобразование под корнем}\\
\sqrt{a}x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a}}-\frac{b}{2\sqrt{a}} & \quad \text{перенос и преобразование дроби}\\
x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a} & \quad \text{деление на } \sqrt{a}\text{, взятие корня}\\
x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \quad \text{преобразование к классическому виду}
\end{aligned}$$

Отметим, что чаще всего формулу для корней записывают так, говоря, что $\boxed{D=b^2-4ac}$ есть дискриминант квадратного уравнения:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}.$$

Разумеется, в преобразованиях предполагалось, что $a\neq 0$.

Задача 3.8 *Изучение общей формулы.*

1. При каких a, b, c уравнение имеет два, один, или не имеет вещественных корней?
2. Придумать уравнение с корнями: $x_1=1$ и $x_2=3$.

Задача 3.9 С помощью полученной формулы решить уравнения:

1. $2x^2+3x+1=0$
2. $x^2-7x+10=0$

3.6 Предложение о корнях

Предложение 3.6.1 Уравнение $(x-x_1)(x-x_2)=0$ имеет корни x_1 и x_2.

Доказательство. Проверяется подстановкой корней x_1 и x_2 в уравнение $(x-x_1)(x-x_2)=0$. ■

Используем это утверждение для решения нескольких простых задач.

Задача 3.10 Какие корни имеет уравнение

$$(x-3)(x+7\sqrt{5})=0\,?$$

Задача 3.11 Предложить квадратное уравнение, которое имеет корни 42 и π [1]

Задача 3.12 Применить Предложение 3.6.1 к решению уравнения

$$x^2+6x+9=0$$

3.7 Теорема Виета

Рассмотрим **приведённое**[2] квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0.$$

Нам уже известна общая формула для квадратного уравнения:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

В данном случае $a=1$, $b=p$, $c=q$, то есть формула для приведенного уравнения принимает вид:

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Найдём сумму корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2+px+q=0$:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=-b.$$

Также найдём произведение корней квадратного уравнения:

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4c})(-b-\sqrt{b^2-4c})}{4}=$$
$$=\frac{b^2-(b^2-4c)}{4}=\frac{4c}{4}=c$$

Полученный результат можно привести как теорему:

Теорема 3.7.1 — Теорема Виета. Для корней x_1 и x_2 **приведённого** квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0$$

выполняются следующие равенства:

$$\boxed{x_1+x_2=-p \qquad x_1\cdot x_2=q}$$

Данную теорему можно использовать для решения многих квадратных уравнений. Применим её в решении задач, но сначала приведём пример её использования.

■ **Пример 3.1 — Применение теоремы Виета.** Решить уравнение

$$x^2+3x-4=0.$$

■

[1] предложить второе такое уравнение

[2] $a=1$ в формуле $ax^2+bx+c=0$

Решение:
По теореме Виета известно, что сумма корней данного уравнения есть число $-p = -3$. В то же время, их произведение должно быть равно $q = -4$.

Таким образом, нам надо подобрать такие два числа, сумма которых равна -3, а их произведение равно -4. Это несложно: -4 и 1 это такие два числа. По теореме Виета это и будут корни уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Задача 3.13 С помощью теоремы Виета решить уравнения:

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$;
2. $x^2 - 4x + 21 = 0$;
3. $x^2 - 13x + 42 = 0$;
4. $x^2 + 2021x + 2022 = 0$;[3]
5. $x^2 - 200x - 404 = 0$.[4]

Дальше последует серия задач для тех, кто не верует в силу теоремы Виета:

Задача 3.14 С помощью теоремы Виета решить уравнения:

1. $2x^2 - 14x + 20 = 0$;
2. $3x^2 - 12x + 63 = 0$;
3. $-x^2 + 13x - 42 = 0$;

1. Какова особенность этих уравнений по сравнению с предыдущей задачей?
2. Удовлетворяют ли уравнения теореме Виета? Почему нет?
3. Можно ли привести их к нужному виду и использовать теорему Виета?

Выходит, что теорема Виета применима и для неприведённых уравнений! Уточним наши выводы с помощью следующего замечания:

! Несложно **проверить самостоятельно**,[5] что для уравнения в неприведённой форме

$$ax^2 + bx + c = 0$$

для корней x_1 и x_2 верны равенства

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}.$$

[3] попробовать решить с помощью общей формулы ;)

[4] аналогично ;)

[5] проведите рассуждения, аналогичные ситуации с приведённым квадратным уравнением: посчитайте сумму и произведение корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ используя общую формулу, полученную на странице 20

4. Частные случаи

В предыдущих разделах мы рассмотрели различные методы решения квадратных уравнений. Здесь мы подведём некоторый итог, дадим некоторые рекомендации практического характера, и приведём сооответствующие примеры. Это поможет закрепить знания и ускорить процесс решения уравнений.

На частные случаи всегда полезно обратить внимание, так как подобные уравнения часто встречаются и их нужно быстро решать.

4.1 Квадратное уравнение «под ключ»

Квадратное уравнение вида

$$\boxed{(x-s)(x-t)=0}$$

(s и t — некоторые числа) не надо решать — оно уже решено! Легко проверить подстановкой, что s и t — его корни.[1]

4.2 Квадратное уравнение без x в первой степени

Уравнение вида

$$\boxed{ax^2+c=0}$$

решается элементарно переносом c в правую часть, а затем взятием корня с обеих сторон равенства.

Замечание: не забывайте, что при взятии корня знаки могут быть разными. Например, у уравнения

$$x^2-1=0$$

два корня: 1 и -1.[2]

[1] да, это мы повторили предложение 3.6.1

[2] убедитесь в этом

4.3 Квадратное уравнение без свободного члена

Уравнение вида

$$\boxed{ax^2 + bx = 0}$$

решается вынесением x за скобки. Сразу приведём пример.

■ **Пример 4.1** Решить уравнение $\frac{3}{2}x^2 - 6x = 0$. ■

Решение:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x^2 - 6x &= 0 \\
x\left(\frac{3}{2}x - 6\right) &= 0 \\
\boxed{x = 0} \quad \text{или} \quad \frac{3}{2}x - 6 &= 0 \\
\frac{3}{2}x &= 6 \\
\boxed{x = 4}&.
\end{aligned}$$

4.4 Скрытая формула сокращённого умножения

Не следует бросаться на амбразуру и *с помощью формулы* решать уравнение вида

$$\boxed{a^2x^2 + 2abx + b^2 = 0}.$$

Следует заметить, что в левой части скрыта формула сокращённого умножения — квадрат суммы. Используя этот факт, перепишем уравнение:

$$(ax + b)^2 = 0.$$

Ответ следует немедленно:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Лучше просто привести пример:

■ **Пример 4.2** Решить уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ ■

Решение:

Видим, что в левой части применима формула квадрата суммы. Применяя её, получаем уравнение

$$(2x + 1)^2 = 0.$$

Отсюда легко найти корень:

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Конечно же, аналогичная ситуация наблюдается и когда в левой части уравнения можно увидеть формулу квадрата разности.

4.5 Магия коэффициентов

Начнём с примера:

■ **Пример 4.3** Решить уравнение $6x^2 - 3x - 3 = 0$ ■

Решение:
Можно заметить, что сумма коэффициентов данного квадратного уравнения (6, −3, −3) равна нулю.

— Ну и что?

Дело в том, что если вместо x в уравнение подставить 1, мы и получим сумму этих трёх коэффициентов в левой части:

$$6 - 3 - 3 = 0.$$

А ведь это значит, что мы нашли один из корней, ведь при подстановке $x = 1$ уравнение превращется в верное тождество.

— Окей, мы нашли один корень: $x_1 = 1$. И что дальше?

А дальше мы вспомним, что на стр. 23 мы указали на то, что произведение корней квадратного уравнения $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Зная, что $x_1 = 1$, коэффициент $c = -3$, получим, что $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Можно сделать общий вывод:

Если сумма коэффициентов квадратного уравнения $ax^2+bx+c = 0$ **равна нулю, то есть** $\boxed{a+b+c=0}$**, то его корни имеют вид**

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{c}{a}$$

Точно таким же образом можно показать, что

Если для коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ **выполняется**

$$\boxed{a+c=b},$$

то его корни имеют вид

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -\frac{c}{a}.$$

! Несмотря на то, что такие ситуации с коэффициентами могут показаться выдуманными, уравнения такого вида очень часто встречаются на экзаменах и тестах, так как создателю теста гораздо проще придумать такое уравнение с красивыми корнями. Автор этого текста не стесняясь очень часто сам предлагает к решению такие уравнения.

Упражнение 4.1 Придумать по два уравнения для каждого из приведённых частных случаев (их здесь 6) и решить каждое из них. ■

Упражнение 4.2 Определить тип частного случая, решить уравнения этим способом:

1. $3x^2 + x - 4 = 0$
2. $(x - 2)(x + 6\sqrt{7}) = 0$
3. $36x^2 + 24x + 2 = 0$
4. $122x^2 - 366x = 0$
5. $2x^2 + 7x + 5 = 0$

IV Функции

5. Мотивировка и определение функции

5.1 Мотивировка 1. Площадь квадрата.

Представим себе следующую ситуацию: мы хотим узнать площадь квадрата, зная его сторону x, где x — некоторое число (3, $\sqrt{7}$, π,...). Ясно, что для получения площади квадрата всё, что нужно сделать — это перемножить число x на себя, то есть посчитать x^2.

В данном примере *функцией* мы называем такую операцию над числом x, которая в результате даёт квадрат числа x. Функцию (с обозначением f) получения площади квадрата можно также выразить на языке символов:

$$x \overset{f}{\mapsto} x^2.$$

Данная запись читается так:

Функция f переводит число x в его квадрат.

Эта запись позволяет прочувствовать определение функции как некоторого механизма, который принимает некоторое число и возвращает какой-то новый объект. Несколько примеров работы функции f возведения в квадрат:

$$\begin{aligned} 1 &\overset{f}{\mapsto} 1 \\ 2 &\overset{f}{\mapsto} 4 \\ \sqrt{2} &\overset{f}{\mapsto} 2 \\ \pi &\overset{f}{\mapsto} \pi^2. \end{aligned}$$

Классический способ показать, что именно делает функция — это записать такое выражение:

$$f(x) = x^2.$$

$f(x)$ читается как «f от x» или «функция f от x».

Может возникнуть логичный вопрос: «Зачем вводить новое и никому не нужное обозначение $f(x)$?» Дело в том, что функций в одной задаче может быть много. Как тогда различить

$$f(x) = x^2 \qquad \text{от} \qquad f(x) = x + 3\ ?$$

Если же задать $g(x) = x + 3$, тогда всем будет ясно, что $f(3) = 9$, а $g(3) = 6$.

■ **Пример 5.1** Чему равно $f(g(3))$?

Следует запомнить, что функции «распутываются» изнутри:вполне разумно посчитать то, что внутри: $g(3)$, а затем уже полученное значение подставить в функцию f.

■

Упражнение 5.1 Пусть заданы следующие функции:

- $f(x) = x^2 + 3x$
- $g(x) = \frac{2}{x}$
- $h(x) = 2^x$

Вычислите:

1. $f(f(1))$
2. $g(g(2))$
3. $g(f(b))$
4. $h(g(f(a)))$

■

Упражнение 5.2 Ниже записано, какие числа получаются при использовании функции h для преобразования некоторых чисел.

$$1 \overset{h}{\mapsto} 1$$
$$2 \overset{h}{\mapsto} 8$$
$$3 \overset{h}{\mapsto} 27$$
$$10 \overset{h}{\mapsto} 1000.$$

Что это может быть за функция? Запишите ответ с помощью записи со стрелками и в виде $h(x) = \dots$ ■

Упражнение 5.3 Ниже записано, какие числа получаются при использовании функции q для преобразования некоторых чисел.

$$2 \overset{q}{\mapsto} 5$$
$$3 \overset{q}{\mapsto} 10$$
$$4 \overset{q}{\mapsto} 17$$
$$5 \overset{q}{\mapsto} 26.$$

Что это может быть за функция? Запишите ответ с помощью записи со стрелками и в виде $q(x) = \dots$ ■

5.2 Мотивировка 2. Пройденное расстояние.

Большое число интересных примеров функций приходит к нам из области физики. Здесь расскажем о простейшем примере: расстояние, пройденное за некоторое время.

Предположим, что машина в момент времени 0 часов движется с постоянной скоростью 80 км/ч. Тогда пройденное расстояние S за t часов будет равно $80 \cdot t$.

Можно рассмотреть расстояние S как функцию от *переменной*[1] t:

$$S(t) = 80t.$$

Получается, что зная среднюю скорость движения по автодороге и имея при себе наручные часы, можно примерно знать пройденное расстояние в любой момент времени.

Упражнение 5.4
1. Предложите функцию $P(t)$ от времени, которая поможет рассчитать оставшееся расстояние до города, который в начале пути автомобиля находится на расстоянии 880 километров. Скорость машины считать постоянной — 80 км/ч.
2. С помощью функции $P(t)$ найти $P(2)$, $P(5)$; объяснить смысл данных значений.

Оставшееся расстояние есть длина всего пути без пройденного расстояния.

! На самом деле, функции бывают очень разные. Например, можно рассмотреть такую функцию:[2]

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если x — рациональное число} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Данная запись означает, что если x — рациональное число,[3] то $f(x)$ будет равно 1, а если нет — то $f(x) = 0$. Поэтому

$$f(1) = 1, \qquad f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{35}{46}\right) = 1,$$

но при этом

$$f(\sqrt{2}) = 0, \qquad f(\pi) = 0, \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Также часто можно встретить константные функции, такие как

$$f(x) = 0, \qquad g(x) = 3.14, \qquad h(x) = 425.$$

Заметим, что здесь нет x в правой части выражения. Это означает, что функция не меняется при изменении x. На нескольких примерах это означает следующее:

$$f(1) = 0,\ f(2) = 0,\ f(100) = 0,\ g(0) = 3.14,\ g(4) = 3.14,\ h(0) = 425,\ h(67) = 425, \dots$$

Точно так же никого не должны смущать и такие функции:

$$f(x) = 4ax, \qquad g(x) = 4x^w.$$

Когда увидите такую запись, следует уточнить, что такое a и w в данных функциях — какие-то фиксированные числа или произвольные. И уже после уточнения решать ту или иную задачу.

[1] в примере с площадью квадрата в качестве переменной мы рассматривали x
[2] функцию Дирихле
[3] представимое в виде дроби, где числитель и знаменатель — целые числа

5.3 Область определения и область значений функции

Мы до сих пор не задались вопросом о том, какие ограничения могут существовать на x — значения переменной (*аргумента*) и $f(x)$ — значения функции.

Ограничения на x: область определения функции

Сначала разберёмся с тем, какие значения может принимать аргумент x. Откуда вообще могут взяться какие-то ограничения на x? Например, посмотрим на такую функцию

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Нетрудно понять, что какое бы число x мы не подставили, $f(x)$ можно вычислить. В таком случае мы говорим, что функция $f(x)$ имеет область определения $(-\infty, +\infty)$, то есть *определена на всей числовой оси*.

Теперь рассмотрим такую функцию:

$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

Вопрос остаётся: есть ли какие-то ограничения на x? Ответ должен быть понятен всем: x не может быть нулём, так как на ноль делить нельзя. Любые другие числа, разумеется, подходят, то есть область определения функции $g(x)$ есть $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

В качестве примеров дадим несколько задач:

Упражнение 5.5 Укажите области определения следующих функций

1. $f(x) = \frac{x}{1+x}$
2. $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$
3. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
4. $\alpha(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
5. $\beta(x) = \frac{x}{x^2+x}$
6. $\gamma(x) = \frac{x-2}{x^2-8x+6}$

■

5.3.1 Ограничения на $f(x)$: область значений функции

А теперь зададимся таким вопросом: какие значения может принимать сама функция $f(x)$? Например, возьмём уже упомянутый пример

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Попробуйте придумать такое число a, чтобы $f(a) = 0$.

Если немного поразмышлять, станет понятно, что такого числа найти не получится! Ясно, что для, например, $f(a) = 2$ или $f(a) = \frac{1}{2}$, такое число a найти можно.[4] Да и вообще, должно быть понятно, что эта функция принимает все возможные значения, кроме нуля.[5] Следовательно, область значений функции $f(x)$ будет состоять из всех чисел, кроме нуля.

Вообще, вычисление области значений функции иногда очевидно, а иногда заведомо сложнее области определения функции из-за того, что для её нахождения надо перебрать все возможные x из области определения. Поэтому мы коснёмся только основных деталей.

Приведём несколько примеров вычисления области значений функции:

[4] точно?

[5] действительно понятно?

■ **Пример 5.2** Укажите области значений следующих функций

1. $f(x) = \sqrt{x}$
   Нам известно, что *область определения* функции $f(x)$ есть $[0, +\infty)$. Для того, чтобы узнать область значений функции, *надо перебрать все возможные x из области определения*. Начнём с $x = 0$ и закончим большими значениями x, которые стремятся к бесконечности. Итак, прикинем несколько значений $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(3) = \sqrt{3}$, $f(10000) = 100$ и так далее. Видим, что функция корня возрастает и никаких ограничений сверху мы не найдём, поэтому функция принимает значения
   $$[0, +\infty).$$
2. $g(x) = x$
   Здесь область определения и область значений совпадают и составляют всю числовую ось от $-\infty$ до $+\infty$.
3. $g(x) = \frac{1}{x} + 1$
   Здесь мы используем то, что уже посчитали в самом начале для функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Там область значений состояла из всех чисел, кроме 0. Функция $g(x)$ отличается от $f(x)$ добавлением единицы, поэтому в данном случае область значений смещается на единицу, то есть имеем
   $$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

■

Упражнение 5.6 Укажите области значений следующих функций

1. $f(x) = \frac{1}{x} - 2$
2. $g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}}$
3. $h(x) = \sqrt{x + 1}$

■

5.4 Определение функции (*)

Предполагается, что на данный момент должно было сложиться представление о таком математическом объекте, как функция. Дадим общее определение функции, которое используется в математике и уточним его смысл.

Определение 5.4.1 Функцией $f(x)$ называется такое отображение из области определения в область значений, у которого каждому из чисел из области определения соответствует единственное число в области значений.

Данное определение, безусловно, требует объяснений. Тот факт, что функция есть отображение из области определения в область значений должен быть понятен всем, кто прочитал предыдущие пункты. Теперь, обсудим часть с «единственностью». Определение говорит, что какое бы мы не взяли число x, значение $f(x)$ будет единственным. Другими словами, *такая* схема соответствует определению функции:

$$1 \overset{f}{\mapsto} 1$$
$$2 \overset{f}{\mapsto} 8$$
$$3 \overset{f}{\mapsto} 27$$
$$10 \overset{f}{\mapsto} 1000,$$

а *такая* —

$$\boxed{1} \xmapsto{f} 1$$

$$\boxed{1} \xmapsto{f} 8$$

$$3 \xmapsto{f} 27$$

$$10 \xmapsto{f} 1000$$

— уже нет, так как в данной схеме мы не можем сказать однозначно, чему равно значение $f(1)$: можно лишь сказать, что оно либо равно 1, либо 8.

Можно спросить — а зачем такие ограничения? На самом деле, это вполне логичное и практически обоснованное требование. Приведём пару примеров:

■ **Пример 5.3** Например, если $S(t)$ — некоторая функция пройденного расстояния в момент времени t, мы считаем, что в фиксированный момент времени $t = 1$ тело находится на определённом расстоянии от начала пути. Если же $S(1) = 100$ и $S(1) = 200$ одновременно, то это не совсем хорошо.[6] ■

■ **Пример 5.4** $f(x) = x^2$ — действительно функция, так как квадрат любого числа x — всегда некоторое единственное число. То же самое можно сказать и про все функции, которые мы рассматривали ранее. ■

! Заметим, что *такая* схема не запрещена:

$$-2 \xmapsto{f} \boxed{4}$$

$$-1 \xmapsto{f} \boxed{1}$$

$$1 \xmapsto{f} \boxed{1}$$

$$2 \xmapsto{f} \boxed{4}$$

Как можно видеть, здесь повторяются значения функции для разных значений x. Если посмотреть на определение функции, никаких противоречий мы не обнаружим. Кстати, некоторые наверняка увидели, что по этой схеме может работать функция $f(x) = x^2$.

[6] здесь должна быть несмешная шутка про квантовую физику

V Последовательности

6. Краткое введение в последовательности

В данной главе мы начнём наше знакомство с одним из самых используемых на практике понятий математики — числовыми последовательностями, которые, как оказывается, являются частными случаями функций.

6.1 Последовательности и их примеры

По названию ясно, что последовательности — это некоторые объекты, которые могут выглядеть вот так:

$$\begin{aligned} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5; \\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9; \\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10; \\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17. \end{aligned}$$

Несложно увидеть, что приведённые сверху последовательности подчиняются некоторым законам/правилам (последняя, например, задаёт последовательность, состоящую из первых восьми простых чисел). Эти правила могут быть какими угодно, поэтому такие последовательности тоже встречаются:

$$\begin{aligned} 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1 \quad & \text{что-то чередующееся;} \\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5 \quad & \text{что-то одинаковое;} \\ 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5 \quad & \text{разложение числа пи;} \\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3 \quad & \text{что-то чередующееся.} \end{aligned}$$

Также последовательности могут быть бесконечными:

$$\begin{aligned} 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ldots \quad & \text{бесконечный стрик из пятёрок;} \\ 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5\ldots \quad & \text{разложение числа пи;} \\ 2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ldots \quad & \text{степени двойки;} \\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots \quad & \text{что-то бесконечно чередующееся.} \end{aligned}$$

В нашем определении последовательности порядок важен, поэтому последовательности 1, 2, 3, 4 и 2, 1, 4, 3 — разные.

Отдельные числа в последовательностях называются их **членами**. Как и у функций (f, g, h), у каждой последовательности должно быть своё имя; принято выбирать буквы $a, b, c, \ldots$. Каждый её член обозначается именем последовательности с соответствующим индексом внизу справа. Например, для последовательности с именем a

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,$$

можем указать первые пять членов последовательности

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 3$$
$$a_4 = 5$$
$$a_5 = 7$$

Упражнение 6.1 Для последовательности a выше, назовите a_7 и a_8 ■

Упражнение 6.2 Пусть a – последовательность всех чётных чисел больше нуля, b – последовательность всех нечётных чисел больше нуля. Назовите:

- a_1, a_3, a_5
- b_3, b_5, b_6
- $a_3 + b_3$
- a_{10}, a_{14}, a_{20}, a_{100} (разумеется, не перебирая все элементы)
- b_{10}, b_{20}, b_{100}

■

7. Формулы последовательностей

Так же, как и функции, некоторые последовательности могут быть определены (заданы) с помощью формул. Вот, например, формула для последовательности положительных чётных чисел:

$$a_i = 2 \cdot i$$

Вместо i мы подставляем нужный нам номер по порядку. Отсюда получаем, что, например, $a_{12} = 24$.

Упражнение 7.1 Какая формула будет у последовательности положительных нечётных чисел? ■

VI Комбинаторика

Задача 7.1 У англичан принято давать ребёнку несколько имён. Сколькими способами в Англии можно назвать ребёнка, если общее число имён равно 300, а ему дают не более трёх имён. Хватит ли этих имён на всех англичан (66 млн. чел) или же непременно найдутся англичане с одинаковыми именами? (*Виленкин, «Комбинаторика»*)

Решение:

Задача 7.2 Можно ли выписать девять чисел $1, 2, \ldots, 9$ по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7? (*Виленкин, «Комбинаторика»*)