

## ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ ШВИДКОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є З ПРОРІДЖУВАННЯМ ВІДЛІКІВ СИГНАЛІВ У ЧАСІ

**Мета роботи** - ознайомлення з принципами реалізації прискореного спектрального аналізу випадкових сигналів на основі алгоритму швидкого перетворення Фур'є, вивчення та дослідження особливостей даного алгоритму з використанням засобів моделювання і сучасних програмних оболонок.

### 4.1. Основні теоретичні відомості

Швидкі алгоритми ПФ отримали назву схеми Кулі-Тьюкі. Всі ці алгоритми використовують регулярність самої процедури ДПФ і те, що будь-який складний коефіцієнт  $W_N^{pk}$  можна розкласти на прості комплексні коефіцієнти.

$$W_N^{pk} = W_N^1 W_N^2 W_N^3$$

Для стану таких груп коефіцієнтів процедура ДПФ повинна стати багаторівневою, не порушуючи загальних функціональних зв'язків графа процедури ДПФ.

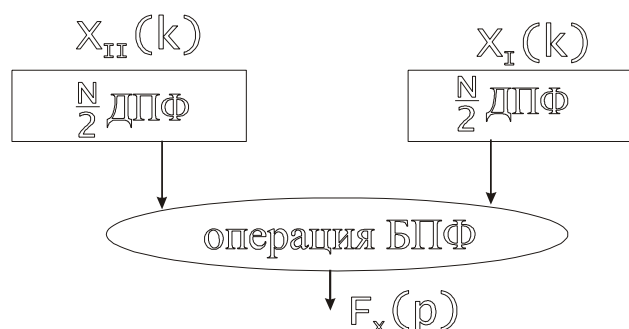
Існують формальні підходи для отримання регулярних графів ДПФ. Всі отримані алгоритми поділяються на 2 класи:

- 1) На основі реалізації принципу зріджені за часом  $X_k$
- 2) на основі реалізації принципу зріджені відліків шуканого спектру  $F(p)$ .

Найпростіший принцип зріджені - поділу на парні/непарні пів-послідовності, які потім обробляють паралельно. А потім знаходять алгоритм, як отримати шуканий спектр.

Якщо нам вдасться ефективно розділити, а потім алгоритм отримання спектра, то ми можемо перейти від  $N$  ДПФ до  $N/2$  ДПФ.

$$X(k) \begin{cases} \rightarrow X_{II}(k) \\ \rightarrow X_I(k) \end{cases}$$



Розглянемо формальний висновок алгоритму ШПФ, який реалізує в одноразовому застосуванні принцип проріджування по часу:

$$F_x(p) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{pk} = \sum_{k=0}^{N-2} X_{II}(k) W_N^{pk} + \sum_{k=1}^{N-2} X_I(k) W_N^{pk}$$

$$X_{II}(k) \rightarrow X(2k^*); X_I(k) \rightarrow X(2k^*+1); k^* = 0; \frac{N}{2} - 1$$

$$F_x(p) = \sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*) W_N^{pk^*} + \sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*+1) W_N^{p(2k^*+1)}$$

$$W_N^{p2k^*} = e^{-j \frac{2\pi}{N} p 2k^*} = e^{-j \frac{2\pi}{N/2} p k^*} = W_{\frac{N}{2}}^{p k^*}$$

У цій першій сумі з'явилися коефіцієнти в 2 рази менше.

У другій сумі з'явився множник, який не залежить від  $k^*$  тобто він може бути винесений за знак суми.

$$W_N^{p(2k^*+1)} = W_N^{p2k^*} \cdot W_N^p = W_{\frac{N}{2}}^{p k^*} W_N^p$$

$$F_x(p) = \underbrace{\sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*) W_{\frac{N}{2}}^{p k^*}}_{F_{II}(p^*)} + W_N^p \underbrace{\sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*+1) W_{\frac{N}{2}}^{p k^*}}_{F_I(p^*)}$$

Ми бачимо, що всі вирази можна розділити на 2 частини, які обчислюються паралельно.

$F_I(p^*)$  - проміжний спектр, побудований на парних відліку. У цьому алгоритмі передбачається, щоб отримати спектр  $F(p)$  треба виконати 2 незалежних  $N/2$  ШПФ.

$$1) F_{II}(p^*) = \sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*) W_{\frac{N}{2}}^{p k^*} \quad p^* = 0, \frac{N}{2} - 1$$

$$2) F_I(p^*) = \sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*+1) W_{\frac{N}{2}}^{p k^*}$$

А на наступному кроці буде реалізована швидка збірка, тобто ШПФ з зрідженим за часом за формулою:

$$F_\tau(p^*) = F_{II}(p^*) + W_N^{p^*} F_I(p^*)$$

Але в цьому виразі різні  $p$  для зв'язку їх

Якщо  $p < N/2$ , то  $p = p^*$  1-а половина спектру

Якщо  $p \geq N/2$ , то  $p = p^* + N/2$  2-а половина спектру

В алгоритмі БПФ вже використовуються 2 рівня

$$F_x(p^*) = F_{II}(p^*) + W_N^{p^*} F_I(p^*)$$

$$F_x\left(p^* + \frac{N}{2}\right) = F_{II}(p^*) + W_N^{p^* + \frac{N}{2}} F_I(p^*)$$

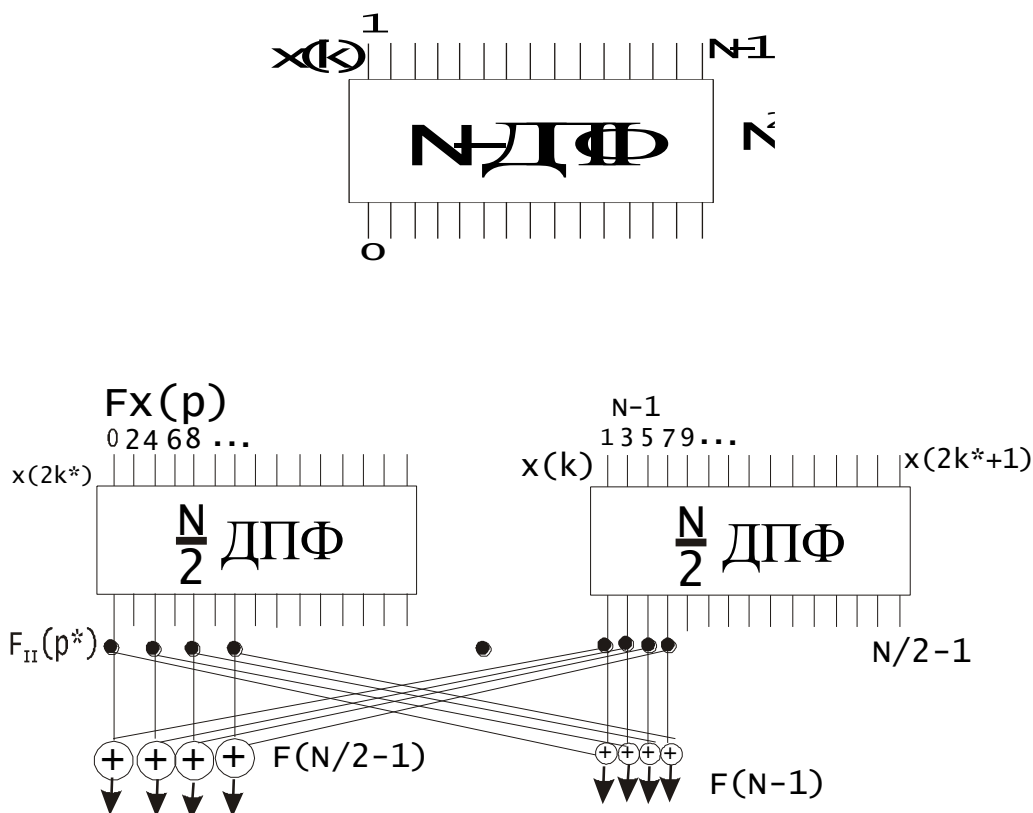
Алгоритм ШПФ з зрізженим по часу:

$$F_x(p^*) = F_{II}(p^*) + W_N^{p^*} F_I(p^*) \quad p^* = 0, \frac{N}{2} - 1$$

$$F_x\left(p^* + \frac{N}{2}\right) = F_{II}(p^*) - W_N^{p^*} F_I(p^*) \quad W_N^{p^*}$$

$\frac{N}{2}$  помножений на комплексний коефіцієнт.

Загальна схема самого ДПФ змінилася замість однорівневого перетворення.



Буде потрібно:  $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$  мнень. Точно такий же прийом можна виконати і для

$\frac{N}{2}$  ДПФ перетворень:

$$X(2k^*) \begin{matrix} \rightarrow X_{II}(2k^*) \\ \rightarrow X_I(2k^*) \end{matrix}$$

тоді

$$X(2 \cdot 2k^*) \rightarrow X(4k^{**}), X(2 \cdot (2k^* + 1)) \rightarrow X(4k^{**} + 2)$$

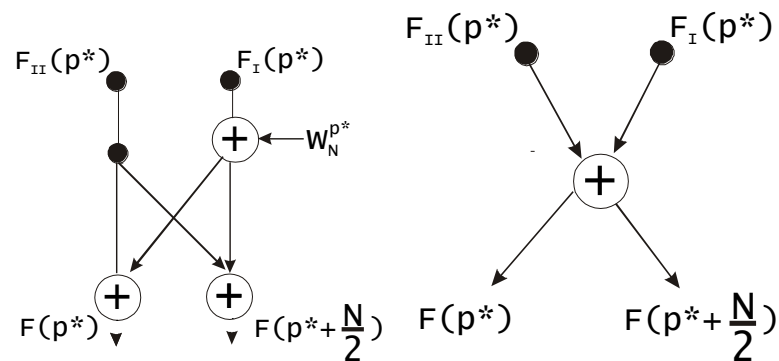
$$X_I(2k^* + 1) \rightarrow X(2 \cdot 2k^{**} + 1) = X(4k^{**} + 1);$$

$$\rightarrow X(2 \cdot (2k^* + 1) + 1) = X(4k^{**} + 3);$$

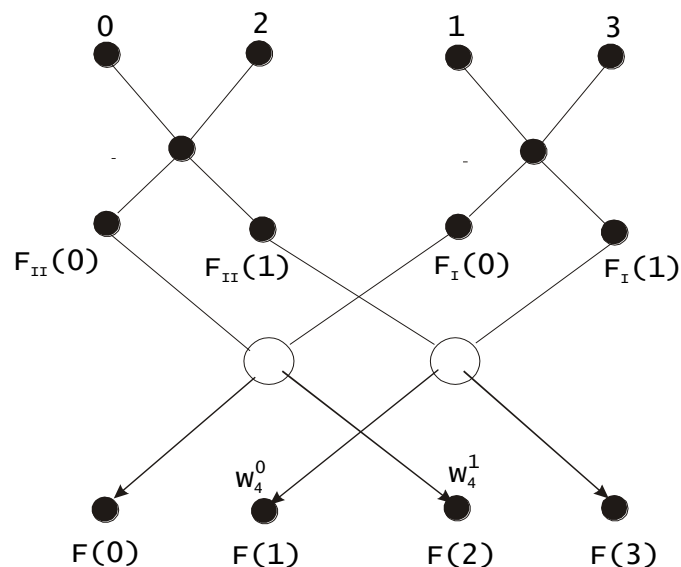
Особливості апаратної реалізації базової операції БПФ з проріджуванням за часом.

В процесорах цифрової обробки сигналів спеціальне АЛУ орієнтоване на виконання реалізації ШПФ або за часом, або по частоті. Функції, реалізовані базовими операціями БПФ, визначаються базовими алгоритмами. Операнди представлені як комплексні величини. Особливість операції - 2 операнда на вході, на виході так само 2 результату.

Графічно базову операцію БПФ описують так:



Цю базову операцію називають метеликом через форми графа. Для спрощеного аналізу процедури БПФ використовують символічне зображення.



### Приклад: 4БПФ

При переході до процедури БПФ з зрідженням за часом від класичного ДПФ вже з'являється кілька рівнів перетворення даних і на кожному рівні ми в деякій послідовності поділяємо знову на парні і непарні відліки. У БПФ з зрідженням за часом розмірність змінних перетворень ДПФ знизю вгору.

1	16	N/16 ДПФ
2	8	N/8 ДПФ
3	4	N/4 ДПФ
4	2	N/2 ДПФ
5	1	N ДПФ

Загальна кількість рівнів заміщення в БПФ:  $m = \log_2 N$ , N-ціла ступінь 2.

Тут мова йде про найпростішому БПФ з основою 2, тобто в базові операції є 2-х точкове БПФ. На кожному рівні БПФ з зрідженням за часом треба здійснити додаткову перестановку відліків на парні і непарні, що призводить до загального недоліку алгоритму - необхідність спеціальної перестановки відліків досліджуваного сигналу перед перетворенням.

Для реалізації ШПФ з зрідженням за часом треба здійснювати двійкову інверсую перестановку відліків або просто обчислити адреси.

Для визначення № чергового відліку в 2-во інверсній перестановці використовується спеціальна схема, роботу якої можна представити у вигляді таблиці:

Двійковий код	№	Двійковий інверсний код	Номер відліку
0000	0	0000	0 }
	1	1000	8 }
	2	0100	4 }
	3	1100	12 }
	4	0010	2 }
	5	1010	10 }
.....	.....	.....	.....
	14	0111	7 }
	15	1111	15 }

Обчислювальна складність ДПФ з зрідженням за часом N/2 базових перетворень на кожному рівні.

$\frac{N}{2} \log_2 N$  - Загальна кількість реалізованих базових операцій і на кожному рівні є

одне комплексне множення .. В CPU ШПФ створюється деякий спеціальне АЛУ, яке призначене для швидкої і ефективної реалізації ШПФ типу "метелик".

Ідея реалізації:

спочатку  $\cdot$  на коефіцієнт, а потім  $\pm$  комплексні числа, тобто 2 ДПФ)

$F_I$  - проміжний спектр при перетворенні тільки непарних відліків.

$F_{II}$  - парних.

Всі дані тут комплексні, тоді нехай:

$$F_{II}(p) = a(p) + j b(p); F_I(p) = c(p) + j d(p); X_{II}(k^*) = X_I(k^*) + X_2(k^* + \frac{N}{2});$$

$$\left. \begin{array}{l} R_e F(p), I_m F(p) \\ R_e F(p + N/2), I_m F(p + N/2) \end{array} \right\} \text{Повинні отримати на виході АЛУ}$$

$$R_e F(p) = a(p) + (\alpha(p) \cdot c(p) - \beta(p) \cdot d(p))$$

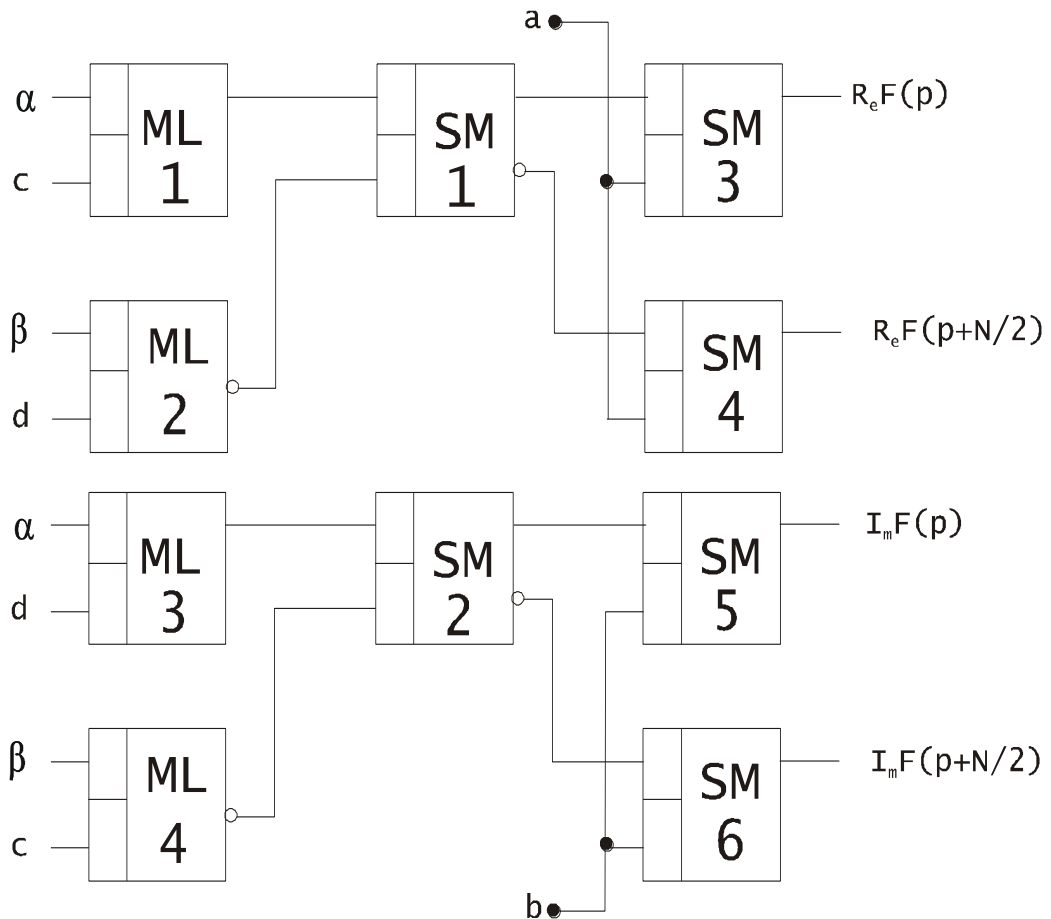
$$R_e F(p + N/2) = a(p) - (\alpha(p) \cdot c(p) - \beta(p) \cdot d(p))$$

$$I_m F(p) = b(p) + (\alpha(p) \cdot d(p) + \beta(p) \cdot c(p))$$

$$I_m F(p + N/2) = b(p) - (\alpha(p) \cdot d(p) + \beta(p) \cdot c(p))$$

Очевидно, що в такому спеціальному АЛУ треба використовувати 4 помножувача і 6 суматорів, які зазвичай мають декілька буферних регістрів.

Схема АЛУ:



Базова операція БПФ може виконуватися в один такт по паралельній схемі з 4-ма множниками; в 2 такти по послідовно-паралельною схемою з 2 множниками; в 4 такти по послідовній схемі з одним помножувачем і декількома регістрами.

#### 4.2. Завдання на лабораторну роботу

Для згенерованого випадкового сигналу з Лабораторної роботи N 1 відповідно до заданого варіантом (Додаток 1) побудувати його спектр, використовуючи процедуру швидкого перетворення Фур'є з проріджуванням відліків сигналу за часом. Розробити відповідну програму і вивести отримані значення і графіки відповідних параметрів.

#### 4.3. Зміст звіту

Звіт по лабораторній роботі повинен містити такі матеріали:

1. Титульний лист.
2. Основні теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи.
3. Умови завдання для варіанту бригади.
4. Лістинг програми із заданими умовами завдання.
5. Результати виконання кожної програми.
6. Висновки щодо виконання лабораторної роботи.

#### **4.4. Контрольні питання**

1. Особливості організації швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) з проріджуванням відліків сигналів (з проріджуванням у часі).
2. Алгоритм і базова операція БПФ з проріджують у часі.
3. Апаратна реалізація БПФ з проріджуванням в часі.
4. Спеціалізовані арифметико-логічні пристрої і процесори ШПФ.
5. Організація БПФ з заміщення або без заміщення відліків в оперативній пам'яті процесора.