L3 Informatique – Lyon-1 2024 – 2025
LC – Logique classique CC1 – lundi 23/09/2024

12

Nom : ALSAFADi Prénom : Kenan

Documents interdits. Répondez dans les cadres. Pas de crayon.
Durée : 15 minutes.

1. (4 pts) Soit l'ensemble $E = \{1, 2\}$. Donnez $\mathcal{P}(E)$ et $E \times E$.

$E \times E = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

4 $P(E) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

2. (2 pts) Soit $E = \{1,2\}$. E est-il stable pour l'addition ? Si la réponse est non, donnez sa clôture.

1 Non, parcq que $1+2=3 \notin E$

clôture $= \{1, 2, 3, 4\}$ $(\mathbb{N}^*)$

3. Soit E le sous-ensemble de ℕ défini inductivement par

$$\begin{cases} \rightarrow 3 \\ n \rightarrow n+2 \end{cases}$$ → règle 2

a) (4 pts) Comment peut-on démontrer une propriété P sur cet ensemble E ?

On montre que P est stable par la règle
P(3) est vrai
si P(n) est vrai alors (P(n+2)) est vrai
On conclut que comme E est le plus petit ensemble stable par les règles,
il est inclus dans l'ensemble des éléments qui vérifient P,
donc tous les éléments de E vérifiant P.

1 il faut vérifier le cas de base

puis montrer que la propriété est valide par la règle (2)
~~pour le reste de~~ ~~tout élément~~ ~~$x \in E$~~
Pour le séquesseur d'un élément x
$(x+1) \in E$ $(x) \in E$

b) (2 pts) Donnez 5 éléments de E.

2 3, 5, 7, 9, 11

c) (8 pts) Soit $F = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Montrez que $E = F$.

Sup~~po~~

$F = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

4 (on vérfie le cas de base)

pour $n = 1 \Rightarrow 2(1)+1 = 3 \in E$

on vérifie pour $(n' \to n+1)$ pour $n' = n+1 \Rightarrow 2n'+1 = 2(n+1)+1 = 2n+2+1$

$= 2n+1+2$ (par induction)

on ~~a supposé que~~ $2n+1$ vérifie ~~valid~~ ~~par induction~~ la hypotèse et en rajoutant 2
ça valide la toujours, donc $2n+3 \in E$

$\Rightarrow$ ~~E~~ $F = E$

$F = \{ 2n+1 \mid n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1 \}$

Mq $E \subseteq F$

On procède par induction en montrant que F est stable par les règles de E.

$\rightarrow 3$ $\quad 3 = 2(1)+1 \in F \Rightarrow F$ stable par cette règle

$n' \rightarrow n'+2$ $\quad$ supposons $n' \in F$,

alors il existe n tq $n' = 2n+1$ avec $n \geq 1$

$n'+2 = (2n+1)+2 = 2(n+1)+1$

donc $n'+2 \in F$ donc F stable par la 2è règle

E est le plus petit ensemble stable pour ces règles $\Rightarrow E \subseteq F$

Mq $F \subseteq E$

Soit $x \in F$, alors il existe n tq $x = 2n+1$ $\quad n \geq 1$

(On procède par induction ~~par~~ par n, on exclu le cas $n=0$ qui ne correspond à aucun élément de F)

Si $n=1$, alors $x=3$ et on a $\rightarrow 3$ est une règle $\Rightarrow x = 3 \in E$

Si $n = n'+1$ avec $n' \geq 1$ alors on suppose $x' = 2n'+1 \in E$

on a $x = 2(n'+1)+1 = x'+2$ comme $x' \in E$ et par la règle $y \rightarrow y+2$

On a $x \in E$ donc pour tout $n \geq 1$, $2n+1 \in E$ donc $F \subseteq E$

comme $E \subseteq F$ et $F \subseteq E \Rightarrow E = F$