Двойной интеграл

1. Площадь плоской фигуры.

Пусть D - фигура на плоскости.

Как ввести понятие площадт фигуры D?

Если D является треугольником (или прямоугольником), то понятие площади очевидно.

Если D является многоугольником, то её можно разбить на треугольники, а площадь области D определить как сумму составляющих её треугольников.

Что делать, если D - произвольная фигура?

а) Рассмотрим множество многоугольников m, каждое из которых целиком содержатся в D.
Обозначение: $S_* = \sup\limits_m S(m)$
m - многоугольник S(m) - площадь многоугольника m

б) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых целиком содержат в себе D.
Обозначение: $S^* = \inf\limits_M S(M)$

Определение: Область D на плоскости называется квадрируемой, если $\exists$ конечные значения S_*, S^*, причем $S_* = S^*$. При этом число $S = S_* = S^*$ называется площадью области D.

Определение: Говорят, что множество D точек плоскости имеет площадь нуль, если D можно целиком заключить в многоугольник сколь угодно малой площади, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ многоугольник M площади ε такой, что $D \subseteq M$.

Пример:

1) $D = \{A\}, A$ - точка.

2) $D = [AB]$ - отрезок.

3) Спрямляемая (т.е. имебщая конечную длину) кривая.

Th. Пусть D - замкнутая плоская область.
Тогда D - квадрируемая $\Leftrightarrow$ граница D имеет площадь D.

Th. Пусть L - плоская спрямляемая кривая.
Тогда L - имеет площадь нуль.

Следствие: Пусть

1) D - область на плоскости

2) D - ограничена конечным числом спрямляемых кривых.

Тогда D квадрируема.

Замечание: в дальнейшем мы будем рассматривать только квадрируемые области.

2. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.

I. Задача об объеме цилиндрического тела.

Пусть D - область на плоскости Oxy.
$f : D \to \mathbb{R}$ - функция определенная на множестве D.
$f(x, y) \geqslant 0$, $(x, y) \in D$

Рассмотрим тело T, которое ограничено ...

Разобъем область D на непересекющиеся части
$D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$
$intD_i \cap intD_j = \emptyset$ при $i \neq j$ $(*)$
$intD_i$ - множество внутренних точек области D_i.

Условие $(*)$ означает, что различные элементы имеют общи.. внутренние точек.

2) Выберем точку $M_i \in D_i$, $i = \overline{1, m}$

3) Считая, что размеры подобласти D_i малы, причем
$\Delta V_i \approx f(M_i)\Delta S_i$,
где $\Delta S_i = S(D_i)$.
ΔV_i - объем той части тела, которая ... под D_i.

Тогда объем тела T
$V = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$
Эта формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому естественно перейти к пределу:
$V = \lim\limits_{\substack{maxdiam(D_i) \to 0 \\ i=\overline{1,m}}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$.
Обозначим $(D) = \sup\limits_{M,N \in D} |\underline{MN}|$ - диаметр множества D.

II. Задача о вычислении массы пластины.

Пусть

1) пластина занимает область D на плоскости;

2) $f(x, y) \geqslant 0$ - плотность (поверхностного) материала пластины в точке $M(x, y)$.

1) Разобъем область D на непересекающиеся части D_i:
$D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$
$intD_i \cap intD_j = \emptyset$ при $i \neq j$;

2) В пределах D_i выберем точку $M_i, i = \overline{1,n}$

3) Считая, что размеры D_i малы, можно принять, что в пределах каждой из областей D_i плотность пластины меняется незначительно, поэтому во всех точках области D_i плотность $\approx f(M_i)$.

   Тогда масса части D_i:
   $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i), i = \overline{1,m}$

4) Тогда масса всей пластины:
   $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$
   Получается формула тем точнее, чем меньше размеры D_i,
   $m = \lim\limits_{\substack{maxdiam D_i \to 0 \\ i=\overline{1,n}}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$

3. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть D - квадрируемая замкнутая плоская область.

<u>Определение:</u> Разбиением области D называется множество
$R = \{D_1, ..., D_n\}$,
где

1) $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$

2) $int D_i \cap int D_j = \emptyset$ при $i \neq j$

3) D_i - квадрируемая, $i = \overline{1,n}$

<u>Определение:</u> Диаметром разбиения $R = \{D_1, ..., D_n\}$ называется число $d(R) = \underset{i=\overline{1,n}}{maxdiam}(D_i)$.

Пусть D - квадрируемая замкнутая область на плоскости Oxy
$f : D \to \mathbb{R}$
(f является функцией двух переменных, т.к. D - область на плоскости).

<u>Определение:</u> Двойным интегралом функции f по области D называется число
$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim\limits_{d(R)\to 0} \sum f(M_i)\Delta S_i$, где
$R = \{D_1, ..., D_n\}$ - разбиение области D,
$M_i \in D_i$, $i = \overline{1,n}$ - ...

<u>Замечание:</u> В определении подразумевается, что указанный предел $\exists$, конечен и не зависит от разбиения R области D и ...

<u>Свойства двойного интеграла</u>

1^o $\iint\limits_D 1dxdy = S(D)$

2^o Линейность
Если f, g - интегрируемы в D ..., то

а) $f \pm g$ также интегрирума в D, причем
$\iint\limits_D (f \pm g)dxdy = \iint\limits_D fdxdy \pm \iint\limits_D gdxdy$

б) $c \cdot f$, $c = const$, также интегрируема в D, причем
$\iint\limits_D c \cdot fdxdy = c\iint\limits_D fdxdy$

3^o Аддитивность
Пусть

1) D_1, D_2 - плоские квадрируемые области
2) f интегрируема в D_1 и в D_2
3) $intD_i \cap intD_j = \emptyset$

Тогда f интегрируема в $D = D_1 \cup D_2$,
$\iint\limits_D fdxdy = \iint\limits_{D_1} fdxdy + \iint\limits_{D_2} fdxdy$

4^o О сохранении интегралом знака функции
Пусть

1) $f(x, y) \geqslant 0$ в D
2) f интегрируема в D

Тогда $\iint\limits_D f(x, y)dxdy \geqslant 0$

5^o Пусть

1) $f(x, y) \geqslant f(x, y)$ в D
2) f, g интегрируемы в D

Тогда $\iint\limits_D fdxdy \geqslant \iint\limits_D gdxdy$

6^o th об оценке модуля двойного интеграла.
Пусть f интегрируемы в D.
Тогда $|f|$ также интегрируема в D, причем
$\left|\iint\limits_D fdxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f|\,dxdy$

7^o th об оценке двойного интеграла (обобщенная th).
Пусть

1) f, g - интегрируема в D
2) $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ в D
3) $g(x, y) \geqslant 0$ в D

Тогда $m\iint\limits_D g(x, y)dxdy \leqslant \iint\limits_D f(x, y)g(x, y)dxdy \leqslant M\iint\limits_D g(x, y)dxdy$

Следствие: Если $g(x, y) = 1$ в D, то получаем "просто"th об оценке двойного интеграла:
$m \cdot S \leqslant \iint f(x, y)dxdy \leqslant M \cdot S$,
где $S = S(D)$.

8^o th о среднем значении.
Определение: Средним значением функции f области D называется число
$< f >= \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

Свойство: Пусть

1) D - линейносвязная замкнутая область (т.е. граница D является связным множеством)
2) f непрерывна в D

Тогда $\exists M_0 \in D$ такая, что $f(M_0) =< f >$

9^o Обобщенная th о среднем значении.
Пусть

1) f - непрерывна
2) g - интегрируема
3) g знакопостоянна
4) D линейно связное множество

Тогда

4. Повторный интеграл

Определение: Повторным интегралом называется выражение
$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$
значения I которого определяется правилом
$I_{\text{повт.}} = \int\limits_a^b F(x)dx$
где $F(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$
$x \in [a,b]$, $x = const$

Пример: Вычислить
5. Вычисление двойного интеграла

Определение: Область D на плоскости Oxy называется y-правильной, если любая прямая, $\|$-ая Oy, пересекает границу D не более чем в 2-х точках, либо содержит участок границы целиком.
Замечание:

1) y-правильная область можно задать в виде:
$D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ $(*)$

2) x- правильная область определяется аналогично.

Th: Пусть

1) $\exists \iint\limits_D f(x,y)dxdy = I$
2) D является y-правильной и задается соотношением $(*)$.
3) $\forall x \in [a,b]$
   $\exists \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = F(x)$

Тогда

1) $\exists$ повторный интеграл
   $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) = I_{\text{повт.}}$
2) $I = I_{\text{повт.}}$

Замечание: Если область D не является правильной в направлении какой-нибудь из координатных осей, то её можно разбить на правильные части и воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла.

6. Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть

1) $I = \iint\limits_{D_xy} f(x,y)dxdy$
2) $\Phi : D_{uv} \to D_{xy}$
   $\Phi \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

   где D_{uv} - проще

Th: о замене переменных в двойном интеграле.
Пусть:

1) $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$
2) Φ биективно
3) Φ интегрируема и непрерывно дифференцируема в D_{uv}
4) $J_\Phi \neq 0$ в D_{uv}
   $J_\Phi = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$

Тогда:

1) функция $f\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right)\right) \cdot \left|J_\Phi\left(u,v\right)\right|$ интегрируема в D
2) $\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right)\right) \cdot \left|J_\Phi\left(u,v\right)\right| dudv$

Замечание:
1) th остается справедливой и в том случае, если условия 2), 3), 4) нарушаются в отдельности.

Пример: Двойной интеграл в полярной системе координат.

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

Рассмотрим двойной интеграл

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \left(\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi\right) = \rho$$

Таким образом

$$\boxed{\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho \cdot \cos\varphi, \rho \cdot \sin\varphi\right) \rho \; d\rho \; d\varphi}$$

7. Приложение двойного интеграла.

I. Вычисление площади плоской фигуры.

$S(D) = \iint\limits_D 1dxdy.$

(Свойство 1^o двойного интеграла)

II. Вычисление массы пластины.

Пусть

1) Пластина занимает область D на плоскости Oxy

2) $f(x,y)$ - значение плотности

Тогда масса этой пластины

$M = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

III. Вычисление объема тела.

Пусть тело T:

$T = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_{xy}, z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}$

$V(T) = \iint\limits_{D_{xy}} \left[z_2(x,y) - z_1(x,y)\right] dxdy$

Тройной интеграл

1. Понятие кубируемой области.

Рассмотрим область $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Как ввести понятие объема тела, которое занимает эту область?

Понятие объема легко ввести для параллелепипеда или, более ... многогранника в $\mathbb{R}^3$, что делать, если $G \subseteq \mathbb{R}^3$ - произвольная область?

Пример: Тонкая, кривая, гладкая поверхности имеет объем ...

Th: Пусть G - замкнутая область в $\mathbb{R}^3$. Тогда G ...

2. Задача о вычислении массы тела.

Пусть

1) Тело T занимает области $G \subseteq \mathbb{R}^3$

2) $f(x,y,z) \geqslant 0$ - значения плотности материала этого тела в точке (x,y,z)

Требуется найти массу $m(T)$ тела T.

1) Разобъем область G на части:
$G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$
$intG_i \cap intG_j = \emptyset$ при $i \neq j$

2) В пределах каждой из побобластей выберем ...
G_i ... масса:
$\Delta m_i = m(G_i) \approx f(M_i)\Delta V_i$
где $\Delta V_i = V(G_i)$,
Δm_i - масса части тела, занимающего подобласть G_i

4) Масса тела T тогда:
$m(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i \simeq \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$

5) Эта формула тем точнее, чем меньше размеры G_i, поэтому естественно перейти к пределу:
$m(T) = \lim\limits_{maxdiam(G_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$

3. Определение тройного интеграла.
Пусть

1) $G \subseteq \mathbb{R}^3$ - тело

2) $f : G \to \mathbb{R}$ - функция

Разобъем область G на части, как это было сделано в задаче о вычислении массы тела.

Обозначение: $R = \{G_1, ..., G_n\}$ - разбиение тела G.

<u>Определение:</u> Диаметром разбиения R тела G - называется число $d(R) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} diam\ G_i$

<u>Определение:</u> Тройным интегралом функции $f(x,y,z)$ по области G называется число
$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim\limits_{d(R)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$
где M_i, ΔV_i имеют...

<u>Свойства тройного интеграла:</u>
Полностью аналогичны свойствам 1^o - 9^o двойного интеграла. При из записи:
$f(x,y) \mapsto f(x,y,z)$

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \mapsto \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$
$D \mapsto G$.

(записать самостоятельно).

4. Вычисление тройного интеграла.

Основная идея - сведение к повторному интегралу.

Определение: Область $G \subseteq \mathbb{R}^3$ называется z-правильной, если любая прямая, $\|$-ая Oz, пересекает границу G не более чем в двух точках или содержит участок границы целиком.

z-правильную область G можно задать в виде:
$G : \{(x,y,z) : (x,y) \int D_{xy}, z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}$ $(*)$

Th: Пусть

1) $\exists \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = I$
2) G является z-правильной и задана $(*)$
3) Для каждой фиксированной $(x,y) \in D_{xy}$
   $\exists \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = F(x,y)$

Тогда

1) $\exists$ повторный интеграл
   $I_{\text{повт.}} = \iint\limits_{D_{xy}} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$
2) и $I_{\text{повт.}} = I$

Замечание: Если в условиях сформулированных th область D_{xy} является y-правильной и задается в виде $D_{xy} = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$, то
$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

5. Замена переменных в тройном интеграле.

Th: Пусть

1) $G_{xyz} = \Phi(G_{uvw})$.
2) $\Phi : G_{uvw} \to G_{xyz}$
   $\Phi : \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$
3) Отображение Φ биективно

4) Φ непрерывна и непрерывно-дифференцируемы в G_{uvw}

5) $J_\Phi(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$

6) $f(x,y,z)$ интегрируема в G_{xyz}

Тогда

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_{uvw}} f\left(x\left(u,v,w\right), y\left(u,v,w\right), z\left(u,v,w\right)\right)\left|J_\Phi(u,v,w)\right| dudvdw$$

Пример: Цилиндрическая система координат:

Декартовая система координат:
Цилиндрическая система координат:
Связь цилиндрической и декартовой системой координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J_{\text{цил.}} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\cdot\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cdot\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Сферическая система координат:

Связь декартовой и полярной системы координат: $\begin{cases} x = r\cdot\cos\Theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\cos\Theta\cdot\sin\varphi \\ z = r\cdot\sin\Theta \end{cases}$

$|J_{\text{сф.}}| ={=}\, r^2\cdot\cos\Theta$