

Теория вероятностей.

1. Случайные эксперименты.

Определение: Случайным называется эксперимент результат которого невозможно предсказать.

Пример:

- 1) Подбрасывают монету. Возможные исходы: $\Omega = \{\Gamma, P\}$ где Γ - выпадение герба, P - выпадение решки.
 $|\Omega| = 2$
- 2) Бросают игральную кость. Наблюдают результат: число выпавших ... $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $|\Omega| = 6$
- 3) Бросают монету до первого появления герба. Наблюдают результат - количество бросков ... $\Omega = 1, 2, 3, \dots = \mathbb{N}$
 $|\Omega| = \dots$
(Ω является ...)
- 4) В больнице измеряют температуру случайно выбранного пациента. $\Omega = [33, 42]$
 $|\Omega| = c$
(Ω имеет мощность континуума).
- 5) Производят стрельбу по плоской мишени размеры которой 1м x 1м. Набл. результат - координаты (x,y).
...
 $\Omega = \{(x, y) : |x| \leq \frac{1}{2}; |y| \leq \frac{1}{2}\}$
 $|\Omega| = c$

Определение: Множество Ω всех исходов данного случайных экспериментов называется пространством элементарных исходов.

Замечание: При рассмотрении пространства элементарных исходов предполагает: что

- 1) Каждый элементарный исход неделим, так как не может быть разложен на более мелкие исходы.
- 2) В результате случайного эксперимента всегда происходит ровно один элементарный исход из Ω .

Определение (нестрогое): Событием называется (любое) множество множества Ω .

Определение: Говорят, что в результате случайного эксперимента произошло событие A , если в результате этого эксперимента произошел один из входящих в A элементарных исходов.

Пример: Бросают игральную кость.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$$

Если выпало 2 очка, то наступило A .

Определение: Событие A называют следствием события B , если наступление события B влечет наступление события A , то есть $B \subseteq A$.

Замечание: Любое множество Ω содержит в ... подмножество \emptyset и Ω . Соответствующее события называются невозможными (\emptyset) и достоверными (Ω). Оба этих события называются ...

Пример: В урне находится 2 красных и 3 синих шара.

$$A = \{\text{извлеченный шар - зеленый}\} = \emptyset.$$

$$B = \{\text{извлеченный шар - синий}\} = \Omega$$

2. Операции над событиями

События - множества (подмножество множества Ω) $\Rightarrow \cup, \cap, -, \setminus, \Delta$.

Определение: Суммой событий $A, B \subseteq \Omega$ называют событие $A + B = A \cup B$.

Определение: Произведение событий $A, B \subseteq \Omega$ называют событие $AB = A \cap B$.

Определение: $A \setminus B$ называется разностью событий A и B .

Определение: \bar{A} называется событием, противоположным A .

Свойства операции над событиями:

(см. теоретико-множественное тождество (основные)).

Определение: События $A, B \in \Omega$ называется несовместными, если $AB = \emptyset$. В противном случае события A и B называются совместными.

Определение: События A_1, \dots, A_n называется попарно-несовместными, если $A_i, A_j = \emptyset, i \neq j$ - несовместными в совокупности, если $A_1 \cdot \dots \cdot A_n = \emptyset$

Замечание: попарно-несовместные \Rightarrow несовместные в совокупности.

3. Классическое определение вероятности.

Пусть

- 1) $|\Omega| = N$
- 2) по условию случайного эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход остальным (в этом случае говорят, что все элементарные исходы равновероятны).
- 3) $A \subseteq \Omega, |A| = N_A$

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число $P(A) = \frac{N_A}{N}$

Пример: 2 раза бросают игральную кость.

$A = \{\text{сумма выпавших очков} \geq 11\}$

$P(A) = ?$

Решение:

Исход: (x_1, x_2) , где x_i - количество очков, выпавшем при i -ом броске.

$\Omega = \{1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\} \quad |\Omega| = 36 = N$

- б) $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
 $n_a = |A| = 3$

в) $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Свойства вероятности (в соответствии с классическими определениями)

1° $P(A) \geq 0$

2° $P(\Omega) = 1$

3° Если $AB = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Доказательство

1° $P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$

2° $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$

3° а) $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$
(Формула включений и исключений) По условию $|AB| = 0 \Rightarrow N_{A+B} = N_A + N_B$

б) $P(A + B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$

Замечание: Недостатком классического определения вероятности.

- 1) Неприменимо в случае, когда $|\Omega| = \infty$
 - 2) Неприменимо, если некоторые исходы являются "более возможными чем другие."
4. Геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай бесконечное Ω , когда $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Пусть

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\mu(\Omega) < \infty$

где μ - мера множества

$$\begin{cases} n = 1 - \mu - \text{длина} \\ n = 2 - \mu - \text{площадь} \\ \dots \end{cases}$$

- 3) Возможность принадлежности исхода эксперимента некоторому событию прямо-пропорциональна мере этого события и не зависит от его (события) формы и расположения внутри Ω .

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Пример: "Задача о встрече".

Два человека договорились встретиться в условленном месте в промежутке от 12 до 13 часов. При этом если один из них пришел раньше другого, то он ждет 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что они встретятся, если появление каждого из них равновероятно в любой момент между 12 и 13 часами?

Решение:

- 1) Исход:
 (x_1, x_2) где $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$
 x_i - время появления i -ого человека после 12.
 $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0; 1]\} = [0; 1] \times [0; 1]$
- 2) $A = \{\text{эти 2 человека встретились}\}$
 $A = \{(x_1, x_2) : |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{4}\}$
- 3) В соответствии с геометрическим определением $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(\Omega) - 2\mu(\Delta)}{\mu(\Omega)} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Замечание:

- 1) Очевидно, что из геометрического определения следует те же свойства вероятности, что и из классического определения.
 - 2) недостатком геометрического определения является то, что некоторая область внутри Ω могут быть более предпочтительные чем другие области той же меры. Например если в разобранном примере появление каждого из этих двух человек было более вероятным в середине часа, то геометрическое определение дало бы неудовлетворительный результат.
5. Статистическое определение вероятности.

Пусть

- 1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.
- 2) $A \subseteq \Omega$ - событие, связанные с этим экспериментом.
- 3) Этот случайным эксперимент произведен n раз, при этом событие A произошло n_A раз.

Определение: Вероятностью события A называется эмпирический (то есть из эксперимента) предел $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$

Замечание:

- 1) из статистического определения ... те же свойства вероятности, что и из двух предыдущих определений.
 - 2) Недостатки статистического определения:
 - никакой эксперимент невозможно осуществить бесконечное число раз.
 - с точки зрения современной математики эти определения являются архаизмом, так как не дают достаточной базы для развития теории.
6. Сигма-алгебра событий.

Для аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события.

Заметим, что:

- данные ранее нестрогое определение события как произвольного подмножества в Ω использовать нельзя, так как ... в этом случае теория будет противоречивой (см. парадокс Рассела)
- по этой причине событиями мы будем называть лишь те подмножества множества Ω , которые \in заранее оговоренному набору подмножеств.
- с точки зрения здравого смысла понятно, что если событий A и B известно, наступили они в данном эксперименте или нет, то также должно быть известно, наступили ли в этом эксперименте события \bar{A} , $A + B$, AB, \dots

по этой причине указанный набор подмножества должен быть замкнуто относительно операций $-, +, \cdot, \setminus, \dots$

Эти соображения приводят к следующему определению:

Пусть

- 1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.
- 2) β - набор подмножества множества Ω .

Определение: β называется σ -алгеброй событий, если:

- 1) $\beta \neq \emptyset$
- 2) $A \in \beta \Rightarrow \bar{A} \in \beta$
- 3) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$
то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

Простейшие свойства σ -алгебры событий

- 1° $\Omega \in \beta$
- 2° $\emptyset \in \beta$
- 3° если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$
- 4° если $A, B \in \beta$, то $A \setminus B \in \beta$

Доказательство:

- 1° а) $\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \beta$
б) в соответствии с аксиомой 2) $\bar{A} \in \beta$
в) в соответствии с 3) $\underbrace{A + \bar{A}}_{\Omega} \in \beta$
- 2° $\Omega \in \beta \Rightarrow \underbrace{\bar{\Omega}}_{=\emptyset} \in \beta$
- 3° $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta \Rightarrow \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots \in \beta \Rightarrow \bar{A}_1 + \dots + \bar{A}_n \in \beta \Rightarrow \overline{\bar{A}_1 + \dots + \bar{A}_n + \dots} \in \beta \Rightarrow A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$
- 4° $A \setminus B = A\bar{B}$
 $A, B \in \beta \Rightarrow A, \bar{B} \in \beta \Rightarrow A\bar{B} \in \beta$

Замечание:

- 1) В дальнейшем, говоря о вероятности, всегда будем предполагать, что задана некоторая σ -алгебра событий. При этом слово "событие" всегда будет обозначать элемент этой σ -алгебры.
 - 2) Если множество Ω конечно, то в количестве σ -алгебры событий на Ω всегда будем рассматривать ...
7. Аксиоматическое определение вероятности.

Пусть

- 1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.
- 2) β - σ -алгебра на Ω

Определение: Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение

$P: \beta \rightarrow \mathbb{R}$,

обладающее свойствами:

- 1° $\forall A \in \beta \quad P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности)
- 2° $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)

3° если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$ попарно-несовместные события, то $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (расширенная аксиома сложения).

Определение: Тройка (Ω, β, P) называется вероятностным пространством.

Свойства вероятности (следствия из аксиоматического определения).

1° $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2° $P(\emptyset) = 0$

3° Если $A \subseteq B$, то $P(A) \subseteq P(B)$

4° $\forall A \in \beta \ 0 \leq P(A) \leq 1$

5° $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6° Для любого конечного набора событий $A_1, \dots, A_n \in \beta$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{i \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{i \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n)$

Доказательство

1° а) $A + \bar{A} = \Omega$

б) $A\bar{A} = \emptyset \Rightarrow (\text{акс } 3^\circ) \Rightarrow P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

в) б) $\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2° $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = (\text{свойство } 1^\circ) = 1 - \underbrace{P(\Omega)}_1 = 0$

3° $A \subseteq B$

$B = A + (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \Rightarrow P(B) \geq P(A)$

4° а) $P(A) \geq 0$ вытекает из аксиомы 1°

б) Покажем, что $P(A) \leq 1 \ A \subseteq \Omega \Rightarrow (\text{по свойству } 3^\circ) \Rightarrow P(A) \leq \underbrace{P(\Omega)}_1$

5° а) $A + B = A + (B \setminus A) \Rightarrow (\text{аксиома } 3^\circ) \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A)$

б) $B = (B \setminus A) + (AB)$

(аксиома 3°) $\Rightarrow P(B) = P(B \setminus A) + P(AB) \Rightarrow \boxed{P(B \setminus A)P(B) - P(AB)}$

в) Подставляем выражение для $P(B \setminus A)$ из пункта б) в пункт а): $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6° Является обобщение свойства 5° на случай n событий.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов β - σ -алгебра на Ω .

Определение: Вероятностью называется отображение $P : \beta \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

1° $P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности)

2° $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)

3° любых попарно-несовместных событий A_1, A_2, \dots

$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ (расширенная аксиома сложения)

Замечание: Иногда вместо расширенной аксиомы сложения 3° рассматривают аксиому

3') для любых попарно несовместных событий A_1, \dots, A_n

$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$

3) для любой неубывающей последовательности событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$, где $A = A_1 + \dots + A_n + \dots$ (аксиома непрерывности).

Можно показать, что

$$3^o \Leftrightarrow \begin{cases} 3' \\ 3'' \end{cases}$$

Условные вероятности

1. Определение условной вероятности.

Пусть

- 1) А, В - случайные события связанные с некоторым экспериментом.
- 2) Известно, что в результате эксперимента произошло событие В.

Как эта информация повлияет на вероятность что, в результате этого эксперимента произошло событие А?

Пример: Из колоды в 36 карт случайным образом извлекают одну карту.

$A = \{\text{извлекают туз}\}$

$B = \{\text{извлечена картинка}\}$

Тогда

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P_B(A) = (\text{наступило } B \Rightarrow \text{извлечена карта: Валет, Дама, Король, Туз, то есть извлечена одна из 16 карт}) \\ = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Замечание: Рассмотрим классическую схему для определения вероятности. Имеется N равно возможных исходов.

$$|A| = N_A, |B| = N_B$$

Так как известно, что в результате случайного эксперимента наступило В, то все исходы, не попавшие В, можно не рассматривать.

В этом случае событие А может наступить лишь при реализации одного из исходов, входящих в АВ.

Поэтому

$$P_B(A) = \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Пусть (Ω, β, P) - вероятностное пространство (не обязательно оно реализует классическую схему).

Определение: Условной вероятностью осуществления события А при условии, что произошло событие В, называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Замечание:

- 1) Для того, чтобы подчеркнуть разницу, "об..." вероятностью иногда будем называть безусловной.
- 2) Зафиксируем некоторое событие В и будем рассматривать $P(A|B)$ как функцию события $A \in \beta$

Th: Условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет трем аксиомам безусловной вероятности.

Доказательство

- 1) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$
- 2) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
- 3) Пусть A_1, \dots, A_n, \dots - набор попарно непересекающихся событий
 $P(A_1 + A_2 + \dots | B) \frac{P(A_1 + A_2 + \dots | B)}{P(B)} = (\text{свойство } \dots) = \frac{P(A_1 B + A_2 B + \dots)}{P(B)} =$

$$\text{а) } A_i \cdot A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j$$

$$\text{б) } A_i B \subseteq A_i$$

$$A_j B \subseteq A_j$$

$$\text{в) а)б) } \Rightarrow (A_i B)(A_j B) = \emptyset \Rightarrow \text{рассматрив. аксиому сложения для набора } A_1 B, A_2 B, \dots$$

$$= \frac{P(A_1 B) + P(A_2 B) + \dots}{P(B)} = (\dots \text{ свойство сходимости рядов}) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} + \dots = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) + \dots$$

Следствие. Условная вероятность $P(A|B)$ при фиксированном событии В обладает всеми свойствами безусловной вероятности:

$$1^o \quad P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

$$2^o \quad P(\emptyset|B) = 0$$

$$3^o \quad \text{Если } A_1 \subseteq A_2, \text{ то } P(A_1|B) \subseteq P(A_2|B)$$

$$4^o \quad 0 \leq P(A|B) \leq 1$$

$$5^o \quad P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 A_2|B)$$

$$6^o \quad \text{Для любого конечного набора событий } A_1, \dots, A_n \\ P(A_1 + \dots + A_n|B) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}|B) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}|B) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}|B) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n|B)$$

Доказательство Свойства $1^o - 6^o$ безусловной вероятности является следствием аксиом $1^o - 3^o$ вероятности. Так как, условная вероятность удовлетворяет этим аксиомам, то для нас выполняются и аналогии свойств $1^o - 6^o$.

Пример: Среди 15 лотерейных билетов 5 выигрышных. Сначала 1-ый игрок тянет 1 билет затем 2-ой игрок тянет 1 билет.

$A_1 = \{1\text{-ый игрок достал выигрышный билет}\}$

$A_2 = \{2\text{-ой игро достал выигрышный билет}\}$

$P(A_2|A_1) = ?$

Решение: I способ: по определению условной вероятности

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)}$$

1) Исход: (x_1, x_2) , где x_I - номер билета, извлеченный i-ым игроком, $x_i \in \{1, \dots, 15\}$ (x_1, x_2) - размещение без повторений из 15 по 2.

$$N = 15 \cdot 14$$

$$2) \quad N_{A_1} = 5 \cdot 14$$

$$P(A_1) = \frac{5 \cdot 14}{15 \cdot 14} = \frac{1}{3}$$

$$3) \quad N_{A_1 A_2} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{20}{15 \cdot 14} = \frac{2}{11}$$

$$4) \quad P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{2/21}{1/3} = \frac{1}{7}$$

II способ: подсчитает $P(A_2|A_1)$, перестроив пространство Ω .

$$P(A_2|A_1) = (\text{известно, что наступило } A_1 \Rightarrow \text{осталось 14 билетов из которых 4 выигрышных}) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

2. Формула умножения вероятностей.

Th 1: формула умножения вероятностей для 2-х событий. Пусть

1) A_1, A_2 - события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

2) $P(A_1) > 0$ Тогда $\boxed{P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)}$ - формула умножения вероятностей для 2-х событий.

Доказательство.

1) Так как $P(A_1) \neq 0$, то определена условная вероятность

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

Th 2: формула умножения вероятностей для n событий. Пусть

1) A_1, \dots, A_n - события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

2) $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$

Тогда

$$\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1})}$$
 - формула умножения вероятностей для n событий.

Доказательство.

- 1) $A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \subseteq A_1 \cdot \dots \cdot A_k$, если $k \leq n-1$
 $\Rightarrow P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) \supseteq P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0, k = \overline{1, n-1}$
 То есть все входящие в правую часть формулы умножения условной вероятности определены.
- 2) $P(\underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}}_A \cdot \underbrace{A_n}_B) = (\text{из th умножения для 2-х событий } P(AB) = P(A)P(B|A)) = \underbrace{P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1})}_A P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$

Пример: На 7 карточках написаны буквы, составляющие слово "шоколад". Карточки перемешивают и случайным образом извлекают последовательно 3 карточки (без возвращения).

$A = \{\text{в порядке извлечения эти карточки образуют слово "код"}\}$.

Решение:

- 1) Обозначение: $A_1 = \{\text{при 1-ом извлечении появилось "к"}\}$
 $A_2 = \{\text{при 2-ом извлечении появилось "о"}\}$
 $A_3 = \{\text{при 3-ем извлечении появилось "д"}\}$
 Тогда
 $A = A_1 A_2 A_3$
- 2) $P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = (\text{th умножения}) = \underbrace{P(A_1)}_{\frac{1}{7}} \cdot \underbrace{P(A_2|A_1)}_{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(A_3|A_1 A_2)}_{\frac{1}{5}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$

3. Независимые события.

Пусть A, B - события, связанные со случайным экспериментом.

Определение: События A и B называются независимыми, если:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Th

- 1) Пусть $P(B) > 0$
 Тогда A, B - независимы $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$
- 2) Пусть $P(A) > 0$
 Тогда A, B - независимы $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

Доказательство Докажем 1).

а) \Rightarrow необходимость

$$P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = (A, B \text{ - независимы}) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

б) \Leftarrow достаточность

$$P(AB) = (P(B) > 0 \Rightarrow \text{используем th умножения вероятностей}) = P(B)P(A|B) = (\text{по условию } P(A|B) = P(A)) = P(A)P(B) \Rightarrow A \text{ и } B \text{ независимы.}$$

Замечание: В качестве определения независимых событий кажется более логичным выбрать условие $P(A|B) = P(A)$ или $P(B|A) = P(B)$, а не условие $P(AB) = P(A)P(B)$. Однако последнее условие работает всегда, в то время как первые два условия работают лишь при $P(B) > 0 (P(A) > 0)$.

Пример: из колоды в 36 карт случайным образом извлекают одну карту.

$A = \{\text{извлечен туз}\}$

$B = \{\text{извлечена карта красной масти}\}$.

Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

Решение?

- 1) $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- 2) $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
 $P(AB) = (AB = \{\text{извлечен туз красной масти}\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
- 3) $P(AB) \stackrel{?}{=} P(A)P(B)$
 $\frac{1}{18} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \text{ верно} \Rightarrow A, B \text{ - независимы.}$

Th Пусть A, B - независимы. Тогда независимыми являются события:

$$1) \bar{A} \cap B$$

$$2) A \cap \bar{B}$$

$$3) \bar{A} \cap \bar{B}$$

Доказательство:

$$1) \text{ Проверим равенство } P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B)$$

$$\text{а) если } \underbrace{P(B)}_{\bar{A}B \subseteq B \Rightarrow P(\bar{A}B) \leq P(B)=0} = 0 \Rightarrow \text{правая часть} = 0$$

$$\text{б) если } P(B) > 0, \text{ то } P(\bar{A}B) = (\text{th умножения}) = P(B) \underbrace{P(\bar{A}|B)}_{1-P(A|B)} = (\text{условная вероятность обладает всеми свойствами})$$

$$P(B)(1 - P(A|B)) = (A, B - \text{независимы} \Rightarrow P(A|B) = P(A)) = P(B) \underbrace{1 - P(A)}_{P(\bar{A})} = P(\bar{A})P(B).$$

Левая часть = правая часть \Rightarrow верно.

2), 3) доказываются аналогично (доказать самостоятельно)

Пример: События A_1, \dots, A_n называются независимыми попарно, если

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad i \neq j$$

A_i и A_j - независимы.

Определение: События A_1, \dots, A_n называются независимыми в совокупности, если

$$\forall K \in \{2, \dots, n\} \quad \forall i_1, \dots, i_k : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

$$P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

Замечание: Это определение означает, что A_1, \dots, A_n - независимые в совокупности, если:

$$1) P(A_{i_1}, A_{i_2}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}), \quad i_1 < i_2. (k=2)$$

$$2) P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot P(A_{i_3}). (k=3)$$

... ..

$$k-1) P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_n}). (k=n)$$

Замечание:

1) Очевидно, что

A_1, \dots, A_n независимы в совокупности $\Rightarrow A_1, \dots, A_n$ независимы попарно.

Обратное неверно.

Пример: Бернштейна. Рассмотрим правильный тетраэдр на сторонах которого написаны цифры 1, 2,

3.

Тетраэдр подбрасывают.

$$A_1 = \{\text{на нижней грани есть 1}\} \quad A_2 = \{\text{на нижней грани есть 2}\} \quad A_3 = \{\text{на нижней грани есть 3}\}$$

$$1) P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$2) P(A_1 A_2) = (\text{на нижней грани есть 1 и 2}) = \frac{1}{4} = P(A_2 A_3) = P(A_3 A_1) \quad \text{Таким образом}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$\Rightarrow A_1 A_2 A_3$ - независимы попарно.

- 3) $P(A_1 A_2 A_3) = (\text{на нижней грани присутствуют } 1, 2, 3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$
 Таким образом A_1, A_2, A_3 не являются независимыми в совокупности.

4. Формула полной вероятности.

Пусть (Ω, β, P) - вероятностное пространство.

Определение: Будем говорить, что события H_1, \dots, H_n образуют полную группу, если

- 1) $H_1 + \dots + H_n = \Omega$
- 2) $H_i H_j = \emptyset, \quad i \neq j$
- 3) $P(H_i) > 0, \quad i = \overline{1, n}$

Тл о формуле полной вероятности. Пусть

- 1) H_1, \dots, H_n - полная группа событий.
- 2) $A \in \beta$ - некоторое событие.

Тогда

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$$

Доказательство: $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + \dots + AH_n) =$

а) $H_i H_j = \emptyset$

б) $(AH_i) \subseteq H_j$
 $(AH_j) \subseteq H_j$

в) а) б) $\Rightarrow (AH_i)(AH_j) = \emptyset$

$$=^1 P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = (\text{th умножения}) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$$

Пример: В магазине поступили телевизоры 3-х фирм из которых:

30% произвела 1-я фирма

50% произвела 2-я фирма

20% произвела 3-я фирма

Известно, что среди телевизоров

1-ой фирмы 7% брака

2-ой фирмы 5% брака

3-ей фирмы 10% брака

. Найти вероятность того, что случайно выбранный телевизор окажется бракованным?

Решение:

- 1) $H_1 = \{\text{выбранный телевизор произведен 1-ой фирмой}\}$
 $H_2 = \{\text{выбранный телевизор произведен 2-ой фирмой}\}$
 $H_3 = \{\text{выбранный телевизор произведен 3-ей фирмой}\}$

Обозначение:

$A = \{\text{выбранный телевизор бракованный}\}$

- 2) Формула полной вероятности

$$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{0.07} \underbrace{P(H_1)}_{0.3} + \underbrace{P(A|H_2)}_{0.05} \underbrace{P(H_2)}_{0.5} + \underbrace{P(A|H_3)}_{0.1} \underbrace{P(H_3)}_{0.2} = 0.066$$

5. Формула Байеса.

Тл о формуле Байеса. Пусть

¹ аксиома 3^о вероятности

1) Выполнено условие th о формуле полной вероятности

2) $P(A) > 0$

Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{- формула Байеса.}$$

Доказательство:

$$P(H_i|A) = (P(A) > 0 \Rightarrow \text{условные вероятности определена}) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

Пример: Рассмотрим пример о покупке телевизора.

Пусть известно, что куплен брак. Телевизор какой фирмой он вероятнее всего произведен?

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.07 \cdot 0.3}{P(A)} = \frac{0.021}{P(A)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.05 \cdot 0.5}{P(A)} = \frac{0.025}{P(A)}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{P(A)} = \frac{0.02}{P(A)}$$

Ответ: вероятнее всего этот телевизор произведен 2-ой фирмой.

Замечание:

1) События H_1, \dots, H_n образующие полную группу, часто называют гипотезами.

2) Вероятности $P(H_i) \quad i = \overline{1, n}$ называются априорными, так как они известны ...

Вероятности $P(H_i|A), \quad i = \overline{1, n}$ которое становятся известными после ...

6. Схема испытаний Бернулли.

Рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из 2-х этих исходов, условно независимых успехом и неудачей, то есть

$\Omega = \{0, 1\}$, где 0 - "неудача" 1 - "успех".

Обозначение: $P\{\text{"успех"}\} = p$

Тогда $P\{\text{"неудача"}\} = 1 - p$

Пример:

1) Подбрасывают монету.

"успех" выпадение герба.

"неудача" выпадение решки.

2) Бросают игральную кость.

"успех" выпадение "6".

"неудача" выпадение "1 ... , "5".

3) Наблюдают пол новорожденного.

"успех" рождение мальчика.

"неудача" рождение девочки.

Пример: Схемой испытания Бернулли будем называть серию однотипных экспериментов успешного вида, в которой вероятность реализации успеха не изменяется от эксперимента к эксперименту.

Замечание:

1) Условие неизмен. вероятности успеха на протяжении всей серии означает, что отдельным исключением незав. ...

Обозначение: $P_n(K)$ - вероятность того, что в серии из n экспериментов по схеме Бернулли произошло ровно k успехов.

Th Пусть проводится серия из n экспериментов по схеме Бернулли с вероятностью p успеха.

Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биномиальные коэффициенты; $q = 1 - p, k = \overline{0, n}$.

Доказательство.

- 1) Запишем результат проведения серии из n экспериментов с использованием кортежа.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где $x_i = 1$, если в i -ом испытании имел место успех, или 0 если имело неудача.

$$A = \{\text{в серии из } n \text{ экспериментов произошло } k \text{ успехов}\} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = k \right\}$$

- 2) $|A| = ?$

Каждый входящий в A кортеж однозначно определяется позицией, в которых стоят 1-цы.

Таких наборов $\exists C_n^k$ штук

$$\text{То есть } |A| = C_n^k$$

- 3) Рассмотрим исход $(x_1, \dots, x_n) \in A$.

Вероятность осуществления ... $P\{x_1, \dots, x_n\} = \dots$

$$\text{Следствие: } P_n(K_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{j=k_1}^{k_2} C_n^j p^j q^{n-j}$$

Доказательство

- 1) Обозначим:

$$A = \{k_1 \leq k \leq k_2\}, \text{ } k \text{ - число успехов.}$$

$$A_j = \{k = j\}, \quad j = \overline{k_1, k_2}$$

$$\text{Тогда } A = \sum_{i=k_1}^{k_2} A_j$$

- 2) $A_i \cdot A_j = \{\text{в серии произошло одновременно ровно } j \text{ и } L \text{ успехов}\} = \begin{cases} A_j, & j = L \\ \emptyset, & j \neq L \end{cases}$

$$\text{displaystyle} P(A) = P\left(\sum_{j=k_1}^{k_2} A_j\right) = (A_j, j = \overline{k_1, k_2} \text{ попарно}) = \sum_{j=k_1}^{k_2} P(A_j) \stackrel{th1}{=} \sum_{j=k_1}^{k_2} C_n^j p^j q^{n-j}$$

$$\text{Следствие 2: } P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$$

Доказательство

Пусть $A = \{\text{в серии ...}\}$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = (A \text{ ни одного успеха в серии}) = 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^n = 1 - q^n$$

²вероятность того, что число успехов в серии из n экспериментов по схеме Бернулли заключено между k_1 и k_2

³вероятность того, что в серии из n экспериментов по схеме Бернулли произошел хотя бы 1 успех