1. Сформулировать определение плоской квадрируемой фигуры. Сформулировать определение площади плоской фигуры. Сформулировать критерий квадрируемости плоской фигуры (в терминах ее границы).

   Пусть дана некоторая плоская фигура D. Обозначим через $S_* = \sup S(m)$ и $S^* = \inf S(M)$ (S площадь фигуры), где m - всевозможные многоугольники, целиком содержащиеся в фигуре D, а M - многоугольники, целиком содержащие в себе фигуру D. Тогда область D называют квадрируемой, если $S^* = S_* = S$, при этом S - площадь фигуры.
   Пусть D - плоская область. D квадрируема тогда и только тогда, когда её граница имеет площадь нуль.

2. Задача о вычислении объема z-цилиндрического тела. Сформулировать определение двойного интеграла.

   Пусть тело Q ограниченно плоскостью Oxy, графиком функции $z = f(x, y)$ $(x, y \in D \subseteq Oxy)$; цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Z и пересекают D.
   Разобьем D на непересекающиеся участки D_i, так чтобы $\bigcup D_i = D$, $intD_i \cap intD_j = \emptyset$. Внутри D_i выберем точку M_i. Тогда объем части $\triangle V_i \cong f(M_i) * S(D_i)$, а весь объем $V(Q) = \sum\limits_{i=1}^{n} \triangle V_i \cong \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle S_i$. Чем меньше $\triangle S_i$, тем точнее формула - переходя к пределу, получаем $V(Q) = \lim\limits_{\underset{i}{maxdiam} D_i \to 0} \sum f(M_i)\triangle S_i$.

   Пусть D - квадрируемая замкнутая плоская область. Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint\limits_D f dxdy = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum f(M_i)\triangle S_i$, где $M_i \in D_i$, $\triangle S_i = S(D_i)$, а $d(T)$ - диаметр разбиения T области D.

3. Задача о вычислении массы пластины. Сформулировать определение двойного интеграла.

   Пусть

   1) Пластина занимает область D на плоскости.
   2) f(x,y) - значение плотности (поверхностной) материала в точке $(x, y) \in D$.

   Разобьем область D на непересекающиеся части $D = \bigcup D_i$. Выберем $M_i \in D$. Масса отдельной части $\triangle m_i = m(D_i) \approx f(M_i)\triangle S_i$. Тогда масса пластины $m = \sum m_i \approx \sum f(M_i)\triangle S_i$. Переходя к пределу, $m = \lim\limits_{\underset{i}{maxdiam} D_i \to 0} \sum f(M_i)\triangle S$

   Пусть D - квадрируемая замкнутая плоская область. Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint\limits_D f dxdy = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum f(M_i)\triangle S_i$, где $M_i \in D_i$, $\triangle S_i = S(D_i)$, а $d(T)$ - диаметр разбиения T области D.

4. Сформулировать свойства линейности и аддитивности двойного интеграла, сохранения двойным интегралом знака функции.

   - Линейность: $\iint\limits_D (f_1 + f_2)dxdy = \iint\limits_D f_1 dxdy + \iint\limits_D f_2 dxdy$;
   - Аддитивность: Пусть $D = D_1 \cup D_2$, $intD_1 \cap intD_2 = \emptyset$; $f(x, y)$ интегрируема в каждой из областей D_1, D_2. Тогда f интегрируема и в D, причем $\iint\limits_D f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy$;
   - Пусть $f(x, y) \geqslant 0$ в D и интегрируема в D. Тогда и $\iint\limits_D f dxdy \geqslant 0$.

5. Сформулировать теоремы об оценке модуля двойного интеграла, об оценке двойного интеграла и следствие из нее, теорему о среднем значении для двойного интеграла.

   Теорема об оценке модуля: Пусть f интегрируема в D. Тогда модуль этой функции $|f|$ интегрируема в D, причем $\left|\iint\limits_D f dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f| dxdy$.
   Теорема об оценке интеграла: Пусть функции f и g интегрируемы в D, причем $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ и $g(x, y) \geqslant 0$

$\forall (x,y) \in D$. Тогда $m \iint\limits_D g dxdy \leqslant \iint\limits_D f \cdot g dxdy \leqslant M \iint\limits_D g dxdy$.

Следствие из теоремы об оценке: если f интегрируема в D и $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$, то $m \cdot S \leqslant \iint\limits_D f dxdy \leqslant M \cdot S$.

Теорема о среднем значении: Пусть f непрерывна в D, и D - линейно связная квадрируемая область (то есть любые 2 точки можно соединить кривой, лежащей в области). Тогда $\exists M_0 \in D: \ f(M_0) = \dfrac{1}{S} \cdot \iint\limits_D f dxdy, \ S = S(D)$.

6. Сформулировать определение y-правильной области и теоремы о вычислении двойного интеграла по произвольной y-правильной области.

   Область D на Oxy называют y-правильной, если её можно задать в виде: $D = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x) \end{cases}$

   Теорема: Пусть D - y-правильная, $\exists \iint\limits_D f dxdy = I$ и $\forall x \in [a,b] \ \exists F(x) = \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f dy$. Тогда существует повторный интеграл $I_\Pi = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f dy$ и $I = I_\Pi$

7. Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле. Записать формулы перехода в двойном интеграле от декартовых координат к полярным и обобщенным полярным координатам. Дать геометрическую интерпретацию полярных координат.

   Теорема: Пусть $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$; Φ - биективна, непрерывна и непрерывно дифференцируема в D_{uv}; якобиан $J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда $\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y) dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\left(x(u,v), \ y(u,v)\right) \cdot J_\Phi(u,v) dudv$

   Формула для перехода в полярную систему координат из декартовой системы координат:
   $x = \rho \cdot \cos\varphi$
   $y = \rho \cdot \sin\varphi$
   $|J| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$
   $\iint\limits_{D_{xy}} f dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho \cdot \cos\varphi, \ \rho \cdot \sin\varphi) \ \rho d\rho d\varphi$

8. Приложения двойного интеграла: записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема z-цилиндрического тела, массы пластины с использованием двойного интеграла.

   Вычисление массы пластины D. Если плотность определяется как $f(x,y)$, то масса пластины $m = \iint\limits_D f dxdy$.

   Вычисление объема z-цилиндрического тела Q, ограниченного функцией $z = f(x,y)$, плоскостью Oxy и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны Oz и пересекают границу $D: \ V(Q) = \iint\limits_D f(x,y) dxdy$.

   Вычисление площади фигуры. Если фигура занимает область D, то её площадь $S(D) = \iint\limits_D 1 dxdy$.

9. Сформулировать определение кубируемого тела и объема кубируемого тела. Сформулировать критерий кубируемости тела (в терминах границы).

   Рассмотрим область $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Пусть q - множество многогранников, которые целиком содержатся в G, $V_* = \sup V(q)$, а Q - множество многогранников, целиком содержащих в себе G, $V^* = \inf V(Q)$. Область G называется кубируемой, если $V^* - V_* = V$, при этом V называют объемом области G.

10. Задача о вычислении массы тела. Сформулировать определение тройного интеграла.

    Пусть тело занимает область G, а $f(x,y,z)$ - значение плотности материала тела в точке (x,y,z). Разобьем тело на непересекающиеся области G_i и в каждой выберем точку M_i. Тогда масса части $G_i \triangle m_i = m(G_i) \cong f(M_i) \cdot \triangle V(G_i) = f(M_i)dV$, а масса всего тела $m(G) = \sum \triangle m_i \cong \sum f(M_i)\triangle V_i$. Чем меньше $\triangle V_i$, тем точнее формула. Переходя к пределу имеем: $m(G) = \lim_{maxdiamG_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle V_i$.

    Тройным интегралом функции $f(x,y,z)$ по области G называют число $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle V_i$, где $d(T)$ - диаметр разбиения T области G.

11. Сформулировать свойства линейности и аддитивности тройного интеграла, сохранения тройным интегралом знака функции.

    - Линейность: $\iiint\limits_V (f_1+f_2)dxdydz = \iiint\limits_V f_1dxdydz + \iiint\limits_V f_2dxdydz$;
    - Аддитивность: Пусть $V = V_1 \cup V_2$, $intV_1 \cap intV_2 = \emptyset$; $f(x,y,z)$ интегрируема в каждой из объемом в V_1, V_2. Тогда f интегрируема и в V, причем $\iint\limits_D fdxdydz = \iint\limits_{D_1} fdxdydz + \iint\limits_{D_2} fdxdydz$;
    - Пусть $f(x,y,z) \geqslant 0$ в V и интегрируема в V. Тогда и $\iiint\limits_V fdxdydz \geqslant 0$.

12. Сформулировать теоремы об оценке модуля тройного интеграла, об оценке тройного интеграла и следствие из неё, обобщенную теорему о среднем значении для тройного интеграла.

    Теорема об оценке модуля.

    Пусть f интегрируема в V. Тогда модуль этой функции $|f|$ интегрируема в V, причем $\left|\iiint\limits_V fdxdydz\right| \leqslant \iiint\limits_V |f|dxdydz$.

    Теорема об оценке интеграла.
    Пусть функции f и g интегрируемы в D, причем $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$ и $g(x,y) \geqslant 0$ $\forall (x,y,z) \in V$. Тогда $m\iiint\limits_V gdxdydz \leqslant \iiint\limits_V f \cdot gdxdydz \leqslant M \iiint\limits_V gdxdydz$.
    Теорема о среднем значении.
    Если функция f непрерывна в области V, то $\exists P_0 \in V$, такая что $\iiint\limits_V f(P)dv = f(P_0) \cdot v(V)$.

13. Сформулировать определение тройного интеграла и теорему о сведении тройного интеграла к повторному для z-правильной области.

    Тройным интегралом функции $f(x,y,z)$ по области G называют число $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle V_i$, где $d(T)$ - диаметр разбиения T области G.

    Область G называют z-правильной, если её можно задать в виде $G: \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y) \end{cases} \quad (*)$

    Теорема: Пусть $\exists \iiint\limits_G fdxdydz = I$; G задана в виде $(*)$; для каждой фиксированной точки $(x,y) \in D_{xy}$ $\exists F(x,y) \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} fdz$. Тогда существует повторный интеграл $I_\Pi = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и $I = I_\Pi$.

14. Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле. Записать формулы перехода в тройном интеграле от декартовых координат к цилиндрических и сферических координат.

Теорема: Пусть $G_{xzy} = \Phi(G_{uvw})$, где $\Phi : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(y, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$; Φ - биективна, непрерывна и непрерывно дифференцируема в G_{uvw}; якобиан $J_\Phi \neq 0$ в G_{uvw}; f интегрируема в G_{uvw}. Тогда $\iiint\limits_{G_{uvw}} f\left(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)\right) \cdot J_\Phi(u, v, w) dudvdw$.

Связь декартовой системы координат с цилиндрической:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Связь декартовой системы координат со сферической системой координат:

$r \geqslant 0$

$\varphi \in [0, 2\pi)$

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{pi}{2}\right]$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dy}{d\theta} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\varphi} & \frac{dz}{d\theta} \end{vmatrix} = r^2 \cdot \cos\theta$$