Теория вероятностей.

1. Случайные эксперименты.

Определение: Случайным называется эксперимент результат которого невозможно предсказать.

Пример:

1) Подбрасывают монету. Возможные исходы: $\Omega = \{\Gamma, P\}$ где Г - выпадение герба, Р - выпадение решки. $|\Omega| = 2$

2) Бросают игральную кость. Наблюдают результат: число выпавших ...
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$|\Omega| = 6$

3) Бросают монету до первого появления герба. Наблюдают результат - количество бросков ... $\Omega = 1, 2, 3, ... = \mathbb{N}$
$|\Omega| =$...
(Ω является ...

4) В больнице измеряют температуру случайно выбранного пациента.
$\Omega = [33, 42]$
$|\Omega| = c$
(Ω имеет мощность континуума).

5) Производят стрельбу по плоской мишени размеры которой 1м х 1м. Набл. результат - координаты (x,y).
...
$\Omega = \left\{(x, y) : |x| \leqslant \frac{1}{2}; |y| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$
$|\Omega| = c$

Определение: Множество Ω всех исходов данного случайных экспериментов называется пространством элементарных исходов.

Замечание: При рассмотрении пространства элементарных исходов предполагает: что

1) Каждый элементарный исход неделим, так как не может быть разложен на более мелкие исходы.

2) В результате случайного эксперимента всегда происходит ровно один элементарный исход из Ω.

Определение (нестрогое): Событием называется (любое) множество множества Ω.

Определение: Говорят, что в результате случайного эксперимента произошло событие А, если в результате этого эксперимента произошел один из входящих в А элементарных исходов.

Пример: Бросают игральную кость.
$\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$
$A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$
Если выпало 2 очка, то наступило А.

Определение: Событие А называют следствием события В, если наступление события В влечет наступление события А, то есть $B \subseteq A$.

Замечание: Любое множество Ω содержит в ... подмножество $\emptyset$ и Ω. Соответствующее события называются невозможными ($\emptyset$) и достоверными (Ω). Оба этих события называются ...

Пример: В урне находится 2 красных и 3 синих шара.
A = { извлеченный шар - зеленый } = $\emptyset$.
B = { извлеченный шар - синий } = Ω

2. Операции над событиями

События - множества (подмножество множества Ω) $\Rightarrow \cup, \cap, -, \setminus, \Delta$.

Определение: Суммой событий $A, B \subseteq \Omega$ называют событие $A + B = A \bigcup B$.

Определение: Произведение событий $A, B \subseteq \Omega$ называют событие $AB = A \bigcap B$.

Определение: $A \setminus B$ называется разностью событий A и B.

Определение: $\overline{A}$ называется событием, противоположным A.

Свойства операции над событиями:
(см. теоретико-множественное тождество (основные)).

Определение: События $A, B \in \Omega$ называется несовместными, если $AB = \emptyset$. В противном случае события A и B называются совместными.

Определение: События $A_1, ..., A_n$ называется попарно-несовместные, если $A_i, A_j = \emptyset,\ i \neq j$ - несовместными в совокупности, если $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = \emptyset$

Замечание: попарно-несовместные $\Rightarrow$ несовместные в совокупности.

3. Классическое определение вероятности.

Пусть

1) $|\Omega| = N$

2) по условию случайного эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход остальным (в этом случае говорят, что все элементарные исходы равновероятны).

3) $A \subseteq \Omega$, $|A| = N_A$

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число $P(A) = \frac{N_A}{N}$

Пример: 2 раза бросают игральную кость.
A = {сумма выпавших очков $\geqslant 11$}
$P(A) =?$

Решение:
Исход: (x_1, x_2), где x_i-количество очков, выпавшем при i-ом броске.
$\Omega = \{1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$ $|\Omega| = 36 = N$

б) $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
$n_a = |A| = 3$

в) $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Свойства вероятности (в соответствии с классическими определениями)

1^o $P(A) \geqslant 0$

2^o $P(\Omega) = 1$

3^o Если $AB = \emptyset$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Доказательство

1^o $P(A) = \frac{N_A}{N} \geqslant 0$

2^o $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$

3^o а) $|A+B| = |A| + |B| - |AB|$
(Формула включений и исключений) По условию $|AB| = 0 \Rightarrow N_{A+B} = N_A + N_B$

б) $P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$

Замечание: Недостатком классического определения вероятности.

1) Неприменимо в случае, когда $|\Omega| = \infty$

2) Неприменимо, если некоторые исходы являются "более возможными чем другие.

4. Геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай бесконечное Ω, когда $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Пусть

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\mu(\Omega) < \infty$
где μ - мера множества
$$\begin{cases} n = 1 - \mu - \text{длина} \\ n = 2 - \mu - \text{площадь} \\ ... \end{cases}$$

3) Возможность принадлежности исхода эксперимента некоторому событию прямо-пропорциональна мере этого события и не зависит от его (события) формы и расположения внутри Ω.

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu\Omega}$.

Пример: "Задача о встрече".
Два человека договорились встретиться в условленном месте в промежутке от 12 до 13 часов. При этом если один из них пришел раньше другого, то он ждет 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что они встретятся, если появление каждого из них равновероятно в любой момент между 12 и 13 часами?

Решение:

1) Исход:
(x_1, x_2) где $x_i \in [0,1]$, $i = 1,2$
x_i - время появления i-ого человека после 12.
$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 = [0;1]\} = [0;1]x[0;1]$

2) A = {эти 2 человека встретились}
   $A = \left\{(x_1, x_2) : |x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

3) В соответствии с геометрическим определением $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(\Omega) - 2\mu(\Delta)}{\mu(\Omega)} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Замечание:

1) Очевидно, что из геометрического определения следует те же свойства вероятности, что и из классического определения.

2) недостатком геометрического определения является то, что некоторая область внутри Ω могут быть более предпочтительные чем другие области той же меры. Например если в разобранном примере появление каждого из этих двух человек было более вероятным в середине часа, то геометрическое определение дало бы неудовлетворительный результат.

5. Статистическое определение вероятности.

Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

2) $A \subseteq \Omega$ - событие, связанные с этим экспериментом.

3) Этот случайным эксперимент произведен n раз, при этом событие A произошло n_A раз.

Определение: Вероятностью события A называется эмпирический (то есть из эксперимента) предел
$P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$
Замечание:

1) из статистического определения ... те же свойства вероятности, что и из двух предыдущих определений.

2) Недостатки статистического определения:

   - никакой эксперимент невозможно осуществить бесконечное число раз.
   - с точки зрения современной математики эти определения являются архаизмом, так как не дают достаточной базы для развития теории.

6. Сигма-алгебра событий.

Для аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события.
Заметим, что:

- данные ранее нестрогое определение события как произвольного подмножества в Ω использовать нельзя, так как ... в этом случае теория будет противоречивой (см. парадокс Рассела)
- по этой причине событиями мы будем называть лишь те подмножества множества Ω, которые $\in$ заранее оговоренному набору подмножеств.
- с точи зрения здравого смысла понятно, что если событий А и В известно, наступили они в данном эксперименте или нет, то также должно быть известно, наступили ли в этом эксперименте события $\overline{A},\ A+B,\ AB,\ldots$

по этой причине указанный набор подмножества должен быть замкнуто относительно операций $-,+,\cdot,\backslash,\ldots$.

Эти соображения приводят к следующему определению:
Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.
2) β - набор подмножества множества Ω.

Определение: β называется σ-алгеброй событий, если:

1) $\beta \neq \emptyset$
2) $A \in \beta \Rightarrow \overline{A} \in \beta$
3) если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$
   то $A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \beta$

Простейшие свойства σ-алгебры событий

1^o $\Omega \in \beta$

2^o $\emptyset \in \beta$

3^o если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$, то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \beta$

4^o если $A, B \in \beta$, то $A \backslash B \in \beta$

Доказательство:

1^o
  а) $\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \beta$
  б) в соответствии с аксиомой 2) $\overline{A} \in \beta$
  в) в соответствии с 3) $\underbrace{A + \overline{A}}_{\Omega} \in \beta$

2^o $\Omega \in \beta \Rightarrow \underbrace{\overline{\Omega}}_{=\emptyset} \in \beta$

3^o $\underline{A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta} \Rightarrow \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}, \ldots \in \beta \Rightarrow \overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} \in \beta \Rightarrow \overline{\overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} + \ldots} \int \beta \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \beta$

4^o $A \backslash B = A\overline{B}$
$A, B \in \beta \Rightarrow A, \overline{B} \in \beta \Rightarrow A\overline{B} \in \beta$

Замечание:

1) В дальнейшем, говоря о вероятности, всегда будем предполагать, что задана некоторая σ-алгебра событий. При этом слово "событие"всегда будет обозначать элемент этой σ-алгебры.

2) Если множество Ω конечно, то в количестве σ-алгебры событий на Ω всегда будем рассматривать ...

7. Аксиоматическое определение вероятности.

Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

2) β - σ-алгебра на Ω

Определение: Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение
$P : \beta \to \mathbb{R}$,
обладающее свойствами:

1^o $\forall A \in \beta$ $P(A) \geqslant 0$ (аксиома неотрицательности)

2^o $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)

3^o если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$ попарно-несовместные события, то $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ (расширенная аксиома сложения).

Определение: Тройка (Ω, β, P) называется вероятностным пространством.
Свойства вероятности (следствия из аксиоматического определения.

1^o $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2^o $P(\emptyset) = 0$

3^o Если $A \subseteq B$, то $P(A) \subseteq P(B)$

4^o $\forall A \in \beta$ $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

5^o $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6^o Для любого конечного набора событий $A_1, \ldots, A_n \in \beta$ справедливо $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) - \sum\limits_{i \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum\limits_{i \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} P(A_1 A_2 A_3) - \ldots (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$

Доказательство

1^o a) $A + \overline{A} = \Omega$

б) $A\overline{A} = \emptyset \Rightarrow$ (акс 3^o) $\Rightarrow P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

в) б) $\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2^o $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) =$ (свойство1^o) $= 1 - \underbrace{P(\Omega)}_{1} = 0$

3^o $A \subseteq B$
$B = A + (B \backslash A) \Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \backslash A)}_{\geqslant 0} \Rightarrow P(B) \geqslant P(A)$

4^o а) $P(A) \geqslant 0$ вытекает из аксиомы 1^o

б) Покажем, что $P(A) \leqslant 1$ $A \subseteq \Omega \Rightarrow$ (по свойству3^o) $\Rightarrow P(A) \leqslant \underbrace{P(\Omega}_{1}$

5^o а) $A + B = A + (B \backslash A) \Rightarrow$ (аксиома3^o) $\Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B \backslash A)$

б) $B = (B \backslash A) + (AB)$
(аксиома 3^o) $\Rightarrow P(B) = P(B \backslash A) + P(AB) \Rightarrow \boxed{P(B \backslash A) P(B) - P(AB)}$

в) Подставляем выражение для $P(B \backslash A)$ из пункта б) в пункт а): $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6^o Является обобщение свойства 5^o на случай n событий.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов исходов β - σ-алгебра на Ω.

Определение: Вероятностью называется отображение $P : \beta \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

1^o $P(A) \geqslant 0$ (аксиома неотрицательности)

2^o $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)

3^o любых попарно-несовместных событий $A_1, A_2, \ldots$
$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$ (расширенная аксиома сложения)

Замечание: Иногда вместо расширенной аксиомы сложения 3^o рассматривают аксиому

$3'$) для любых попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$
$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$

3) для любой неубывающей последовательности событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$, где $A = A_1 + \ldots + A_n + \ldots$ (аксиома непрерывности).

Можно показать, что

$$3^o \Leftrightarrow \begin{cases} 3' \\ 3'' \end{cases}$$

Условные вероятности

1. Определение условной вероятности.