1. Теоретическое вопросы, оцениваемые в 3 балла.

1. Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

   - События A и B называются несовместными, если их пересечение является невозможным событием, то есть $AB = \emptyset$.

   - Если A и B несовместны события, (а также $P(A) \neq 0$), то они обязательно зависимы. Если A и B - совместны, то они могут быть как зависимы, так и независимы; если A и B - зависимы, то они могут быть как совместны,так и несовместны.

2. Сформулировать геометрическое определение вероятности.
   Пусть

   1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

   2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ - мера множества (длина для n=1, площадь для n=2, объем для n=3, ...)

   3) возможность принадлежности исхода эксперимента множеству $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества A и не зависит от его формы и расположения внутри Ω.

   Тогда вероятностью осуществления события A называют число $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

3. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать её основные свойства.

   - Сигма-алгеброй событий на множестве элементарных исходов Ω называют такой набор подмножеств $\beta \subseteq \Omega$, что:
     1) $A \subseteq \beta \Rightarrow \overline{A} \subseteq \beta$;

     2) $A_1, \ldots, A_n \in \beta \Rightarrow A_1 + \ldots + A_n \subseteq \beta$.

   - Основные следствия из определения сигма-алгебры:
     1) $\Omega \subseteq \beta$;
     2) $\emptyset \in \beta$;
     3) $A_1, \ldots, A_n \in \beta \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \in \beta$;
     4) $A, B \in \beta \Rightarrow A \backslash B \in \beta$.

4. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

   - Пусть Ω - пространство элементарных исходов, β - сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение $P: \ \beta \to \mathbb{R}$, для которого выполняются условия:
     $P\{A\} \geqslant 0$
     $P\{\Omega\} = 1$
     для попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ $P\{A_1 + \ldots + A_n + \ldots\} = P\{A_1\} + \ldots + P\{A_n\} + \ldots$
   - Свойства вероятности:
     1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
     2) $P(\emptyset) = 0$;
     3) $A \subseteq \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
     4) $\forall A \in \beta \ \ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
     5) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
     6) $\forall$ конечного набора событий
        $A_1, \ldots, A_n$, $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i \leqslant i < j \leqslant n}^{n} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} P(A_i \ldots A_n)$.

5. Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятностей. Как они связаны между собой?

   - Аксиома сложения: для попарно непересекающихся событий $A_1, \dots, A_n$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots P(A_n)$;
   - Расширенная аксиома сложения: для попарно несовместных событий $A_1, \dots, A_n$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots P(A_n) + \dots$;
   - Аксиома непрерывности: Для любой неубывающей последовательности событий $A_1, \dots, A_n, \dots$, где $A_i \subseteq A_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n)$.
   - Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

6. Сформулировать определение условной вероятности и её основные свойства.
   Пусть А и В - события, $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью осуществления А при условии произошедшего В называют число $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.
   Условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности:

   1^o $P(A|B) \geqslant 0$;

   2^o $P(\Omega|B) = 1$;

   3^o $\forall$ попарно непересекающихся $A_1, \dots, A_n, \dots$, $P(A_1 + \dots + A_n + \dots |B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

7. Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.
   Теорема 1: Пусть $P(A) > 0$. Тогда $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$.
   Теорема 2: Пусть события $A_1, \dots, A_n$ таковы, что $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) > 0$. Тогда $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$.

8. Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

   - Пусть А и В - события, связанные с одним и тем же экспериментом. А и В называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
   - Если $P(B) > 0$, то А и В независимы тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$. Аналогично, если $P(A) > 0$, то А и В независимы тогда и только тогда, когда $P(B|A) = P(B)$

9. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

   - События $A_1, \dots, A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j$ $O(A_iA_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$; независимы в совокупности, если для любого набора $i_1 < \ldots < i_k,\ k \in \{1, \dots, n\}$ $P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$.
   - Если А - независимы в совокупности, то они независимы попарно. При этом обратное неверно.

10. Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

    - Говорят, что H образует полную группу событий, если $H_i \bigcap H_j = \emptyset$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.
    - Так как $H_i,\ H_j$ $\forall i \neq j$ являются несовместными событиями и их вероятность не равна нулю, то они могут быть только зависимыми.

11. Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.
    Теорема: Пусть $H_1, \dots, H_n$ - полная группа событий, А - некоторое событие и $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$ Тогда $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)$.

12. Сформулировать теорему о формуле Байеса.
    Теорема: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и $P(A) > 0$. Тогда
    $P(H_i|A) = \dfrac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)}$.

13. Дать определение схему испытании Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

- Рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух элементарных исходов. Первым будем называть "успех" , второй - "неудача" . Вероятность успеха: p; вероятность неудачи: q = 1 -p. Схемой испытаний Бернулли называется серия последовательных экспериментов такого вида, в которых также: вероятность успеха неизменна во всех испытаниях; испытания - независимы, то есть вероятность исхода i-го испытания не зависит от исходов испытаний $1, \ldots, i-1$.
- Обозначим $P_n(k)$ - вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

14. Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.

- Пусть $P_n(k)$ - вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.
- Пусть $P_n(k \geqslant 1)$ - вероятность реализации хотя бы одного успеха. Тогда $P_n(k \geqslant 1) = 1 - q^n$.
- Пусть $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$ - вероятность реализации от k_1 до k_2 успехов. Тогда $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum\limits_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

s

2. Теоретическое вопросы, оцениваемые в 5 баллов.

15. Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

- Элементарный исход эксперимента - такой его исход, который в рамках данного эксперимента:
  1) количество элементарных исходов эксперимента $|\Omega| = N \neq \infty$;
  2) по условиям эксперимента все элементарные исходы равно-возможны;
  3) событие A состоит из N_A элементов ($|A| = N_A$).

  Тогда вероятностью осуществления события A называется $P(A) = \dfrac{N_A}{N}$.
- Пример: 2 раза бросают игральную кость, A = {сумма выпавших очков $\geqslant 11$}.

  $\Omega = \{(x_1, x_2),\ x_i \in \{1, \ldots, 6\}\}$, $|\Omega| = 36$. $A = \{(5,6),\ (6,5),\ (6,6)\} \Rightarrow P(A) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

16. Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности.

- Пусть
  1) Количество элементарных исходов эксперимента $|\Omega| = N \neq \infty$;
  2) по условиям эксперимента все элементарные исходы равно-возможны;
  3) событие A состоит из N_A элементов ($|A| = N_A$).

  Тогда вероятностью осуществления события A называется $P(A) = \dfrac{N_A}{N}$.
- **Свойства:**

  1^o $\forall A \subseteq \Omega\ P(A) \geqslant 0$;

  2^o $P(\Omega) = 1$;

  3^o Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

  Доказательство:

  1^o $P(A) = \dfrac{N_A}{N}$

  $N_A \geqslant 0,\ N > 0 \Rightarrow P(A) \geqslant 0$.

  2^o $P(\Omega) = \dfrac{N_\Omega}{N} = \dfrac{N}{N} = 1$.

3^o $|A+B| = |A| + |B| - |AB$ по формуле включений и исключений. $|AB| = 0$, следовательно $N_{A+B} = N_A + N_B \Rightarrow P(A+B) = \dfrac{N_A + N_B}{B} = \dfrac{N_A}{N} + \dfrac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$.

17. Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

- Пусть

  1) Эксперимент проведен n раз;
  2) событие A при этом произошло N_A раз.

  Тогда вероятностью осуществления события A называют число $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_A}{N}$.

- Недостатки:

  а) на практике невозможно провести эксперимент бесконечное число раз; для конечных N отношение может изменяться при разных N.
  б) с позиции современной математики, статистическое определение является архаизмом, так как не дает достаточной базы для дальнейшего развития теории.

18. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать её основные свойства.

- Сигма-алгеброй событий на множестве элементарных исходов Ω называют набор подмножеств $\beta \subseteq \Omega$, что:
  1) $A \subseteq \beta \Rightarrow \overline{A} \subseteq \beta$;
  2) $A_1, \ldots, A_n \in \beta \Rightarrow A_1 + \ldots + A_n \subseteq \beta$.
- **Свойства:**
  1^o $\Omega \subseteq \beta$;
  2^o $\emptyset \in \beta$;
  3^o $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \in \beta$;
  4^o $A, B \in \beta \Rightarrow A \backslash B \in \beta$.
- **Доказательство:**
  1^o $\beta = neq\emptyset$, следовательно $A \in \beta \Rightarrow \overline{A} \in \beta \Rightarrow A + \overline{A} \in \beta,\ A + \overline{A} = \Omega$.
  2^o $\Omega \in \beta \Rightarrow \overline{\Omega} \in \beta,\ \overline{\Omega} = \emptyset$.
  3^o $A_1, \ldots, A_n \int \beta \Rightarrow$ (1 св.) $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n} \in \beta \Rightarrow$ (1 св.) $\overline{\overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n}} \in \beta \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \in \beta$.

19. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

- Пусть Ω - пространство элементарных исходов, β - сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение $P:\ \beta \to \mathbb{R}$, для которого выполняются условия:
  1) $P(A) \geqslant 0$
  2) $P(\Omega) = 1$
  3) для попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$.
- **Свойства:**
  1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
  2) $P(\emptyset) = 0$;
  3) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
- **Доказательство:**
  1) $\Omega = A + \overline{A}$, $1 =$ (акс. 2) $P(\Omega) = P(A + \overline{A}) =$ (акс. 3)$P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
  2) $\emptyset = \overline{\Omega} \Rightarrow P(\emptyset) =$ (п.1) $1 - P(\Omega) =$ (акс. 2) $1 - 1 = 0$.
  3) $B = A + B \backslash A$, причем $A(B \backslash A) = \emptyset \Rightarrow$ (акс. 3) $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$. По аксиоме 1, $P(B \backslash A) \geqslant 0$, следовательно $P(B) > 0$.

20. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

- **Свойства:**
  1) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
  2) Для любого конечного набора событий $A_1, \ldots, A_n$ $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} P(A_iA_j) + \ldots + (-1)^{n+1} \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} P(A_i \ldots A_n)$.
- **Доказательство:**
  а) $A + B = A + B \backslash A$, причем $A(B \backslash A) = \emptyset$. Следовательно $P(A+B) = P(A) + P(B \backslash A)$.
  б) $B = B \backslash A + AB \Rightarrow P(B) = P(B \backslash A) + P(AB)$.

21. Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

- Пусть A и B - события, $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью осуществления A при условии произошедшего B называют число $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.
- Условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет трем аксиомам безусловной вероятности:
  1^o $P(A|B) \geqslant 0$;
  2^o $P(\Omega|B) = 1$;
  3^o $\forall$ попарно непересекающихся $A_1, \ldots, A_m, \ldots$ $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots |B) = P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots$.
- **Доказательство:**
  1^o $P(A|B) = \dfrac{P(AB) \geqslant 0}{P(B) \geqslant 0} \geqslant 0$.
  2^o $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.
  3^o $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots |B) = \dfrac{P((A_1 + \ldots + A_n + \ldots)|B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1B + \ldots + A_nB + \ldots)}{P(B)} =$ (акс. 3) $= \dfrac{P(A_1B) + \ldots + P(A_nB) + \ldots}{P(B)}$ (лин. свойство рядов) $= \dfrac{P(A_1B)}{P(B)} + \ldots + \dfrac{P(A_nB)}{P(B)} + \ldots = P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots$.

22. Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

- **Теорема 1:** Пусть $P(A) > 0$. Тогда $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$.
- **Доказательство:** $P(A) \geqslant 0 \Rightarrow$ по определению условной вероятности, $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$.
- **Теорема 2:** Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ таковы, что $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) > 0$. Тогда $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$.
- **Доказательство:** $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}A_n) = P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) = (*)$.
  $A_1 \ldots A_{n-2}A_{n-1} \subseteq A_1 \ldots A_{n-2} \Rightarrow P(A_1 \ldots A_{n-2}) \geqslant P(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$.
  Следовательно, $(*) = P(A_1 \ldots A_{n-2})P(A_{n-1}|A_1 \ldots A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$. Повторяя это утверждение, получаем требуемую формулу $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$.

23. Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.
Теорема:
  1) Если $P(B) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$.
  2) Аналогично, если $P(A) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(B|A) = P(B)$.

Доказательство:
  1) Необходимость.
  $P(A|B) = P(A)P(B)$. По определению условной вероятности: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.
  Достаточность.
  $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A)P(B)$. Следовательно, A и B независимы.

2) Доказывается аналогично.

24. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

- События $A_1, \ldots, A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j \ P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$; независимы в совокупности, если для любого набора $i_1 < \ldots M i_k, \ k \in \{1, \ldots, n\} \ P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$.
- Если А - независим попарно, то из этого не следует, что они независимы в совокупности. Это подтверждает пример Бернштейна: рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого записаны числа 1, 2, 3, а на 4-й грани все три числа. Тетраэдр кидают на плоскость и рассматривают три события:
  $A_1 = \{$на нижней грани 1$\}$
  $A_2 = \{$на нижней грани 2$\}$
  $A_3 = \{$на нижней грани 3$\}$
  А независимы попарно, не не в совокупности:
  а) $P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \ P(A_2) = \frac{1}{2}; \ P(A_3) = \frac{1}{2};$
  б) $P(A_1A_2) = \mathrm{P}\{$на нижней грани 1 и 2$\} = \frac{1}{4} = P(A_1A_3) = P(A_2A_3)$. $(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \Rightarrow A$ - попарно независимые.
  Для независимости в совокупности: $P(A_1A_2A_3) \stackrel{?}{=} P(A_1)P(A_2)P(A_3); \ \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$. Следовательно, А не является независимыми в совокупности.

25. Доказать теорему о формуле полной вероятности.
Говорят, что H образует полную группу событий, если $H_i \bigcap H_j = \emptyset, \ \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.
Теорема: Пусть $H_1, \ldots, H_n$ - полная группа событий, A - некоторое событие и $P(H_i) > 0, \ i = \overline{1,n}$. Тогда $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)$.
Доказательство: $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \ldots + H_n)) = P(AH_1 + \ldots + AH_n) = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n)$, поскольку $(AH_i)(AH_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Далее, поскольку $P(H_i) \geqslant 0 \Rightarrow P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$, то $P(A) = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)$.

26. Доказать теорему о формуле Байеса.
Теорема: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и $P(A) > 0$. Тогда
$P(H_i|A) = \dfrac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A|H_1) \cdot P(H_1) \cdot \ldots \cdot P(A|H_n) \cdot P(H_n)}$.
Доказательство: $P(H_i|A) = \dfrac{P(AH_i)}{P(A)}$. По формуле полной вероятности, можно представить $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)$; тогда $P(H_i|A) = \dfrac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A|H_1) \cdot P(H_1) \cdot \ldots \cdot P(A|H_n) \cdot P(H_n)}$

27. Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Обозначим $P_n(k)$ - вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли.
Теорема: Тогда $P_n(k) =_n^k p^k q^{n-k}$.
Доказательство: опишем результаты испытаний кортежами $(x_1, \ldots, x_n)$, где
$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если в i испытании произошел успех} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$.
Исходов, в которых произошло ровно k успехов, C_n^k штук. Вероятность осуществления ровно одного такого исхода: $P((x_1, \ldots, x_n)) = P\{\{x_1\} \cdot \{x_2\} \cdot \ldots \cdot \{x_n\}\} =$ (испытания независимы) $= P(\{x_1\}) \cdot \ldots \cdot P(\{x_n\})$. В случае k успехов, имеем p=k раз и q=n-k раз; следовательно, $P((x_1, \ldots, x_n)) = p^k q^{n-k}$. Постольку различные исходы, на которых происходит ровно k успехов, являются несовместными, то $P_n(k) = C_n^k \cdot P = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.