Двойной интеграл.

;

1. Вычисление двойного интеграла.

Определение: Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{d(R)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, где $R\{D_1,...,D_n\}$ - разбиение области D, i

i, $i=\overline{1,n}$

Определение: Область D на плоскости Oxy называется y-правильной, если любая прямая $\|$-ая Oy, пересекает границу D не более чем в 2-х точках, либо содержит участок границы целиком.

y-правильная область D может быть задана в виде: $D = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ $(*)$

Для y-правильной области D, заданной $(*)$, справедливо: $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$

Замечание:

1) в правой части этой формулы стоит так называемый повторный интеграл, под которым понимают число $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy =$

2)

Пример: Вычислить $I = \iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$ $a=1$

$b=2$

$\varphi_1(x)=2$

$\varphi_2(x)=\frac{4}{x}$

$$I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_2^{4/x}(x+3y^2)dy = \int\limits_1^2 \left[xy+y^3\right]\Bigg|_{y=2}^{y=4/x} dx = \int\limits_1^2 \left(4+\tfrac{64}{x^3}-(2x+8)\right)dx = \int\limits_1^2\left(-4+\tfrac{64}{x^3}-2x\right)dx =$$

$$\boxed{\int\limits_a^b cdx = c(b-a)} = -4\left(-\tfrac{32}{x^2}+x^2\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \underbrace{-4-(8+4)}_{-16} + \underbrace{32+1}_{33} = 17$$

Замечание: Совершенно аналогично вышеизложенному: Определение: Область D называется x-правильной, если любая прямая, $\|$-ая Ox, пересекает границу D не более чем в двух точках, либо содержит участок границы целиком.

x-правильная область D можно задать в виде: $D = \{(x,y):\ c \leqslant y \leqslant d,\ \psi(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ $(**)$

Для x-правильной области D, заданной $(**)$, справедливо: $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$

Пример: (см выше) $I = \iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$

$c=2$

$d=4$

$\psi_1(y)=1$

$\psi_2(y)=\frac{4}{y}$

$$\iint\limits_D (x+3y^2)dxdy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^{4/y}(x+3y^2)dx = \int\limits_2^4 dy\left[\tfrac{x^2}{2}+3y^2x\right]\Bigg|_{x=1}^{x=4/y} = \int\limits_2^4\left[\tfrac{8}{y^2}-\tfrac{1}{2}+12y-3y^2\right]dy = \int\limits_2^4\left[\tfrac{8}{y^2}+12y-3y^2-\tfrac{1}{2}\right]d$$

$$\left(-\tfrac{8}{y}+6y^2-y^3\right)\Bigg|_2^4 - 1 = (-2+6\cdot 16-4\cdot 16)-(-4+24-8)-1 = 30-12-1 = 17$$

Пример: В двойном интеграле $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

а) Решение: $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^y fdy$ $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_x^1 f(x,y)dx$

б) $y=2x^2$ $x^2=\frac{y}{2}$ $x=$

$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)dx$ $I = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{2x^2}^2 f(x,y)dy$

в) $y = I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$ $I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

2. Изменение порядка интегрирования.

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. $I = \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

Замечание: До сих пор мы решали примеры вида: $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$

Решение: $D = \left\{(x,y): \ 0 \leqslant x \leqslant 3, \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{25-x^2}\right\}$

$$I = \underbrace{\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} f(x,y)dx}_{D_1} + \underbrace{\int\limits_{4}^{5} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} dx}_{D_2}$$

Пример:

$I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y}^{3y} f dx$

Решение:

$D = \{(x,y): 0 \leqslant y \leqslant 1, \ 2y \leqslant x \leqslant 3y\}$

$$I = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{2}} f dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{1} f dxy$$

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$$

Решение: $D = \{(x,y): 0 \leqslant y \leqslant 1, \ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1-y\}$

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)dy$$

3. Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть

1) $I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$

2) $\Phi: D_{uv} \to D_{xy}$

$\Phi: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

Тогда при вычислении некоторые условия

$I = \iint\limits_{D_{uv}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) |J_\Phi(u,v)| \, cdotdudv$

где $J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$

Замечание: Для нас основное значение будет иметь переход к полярным координатам:

$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$

$J_{\text{пол.}} = \rho$

$$\boxed{\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D\rho\varphi} f(\rho \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)\rho \ d\rho d\varphi}$$

Пример: В двойном интеграле

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$$

перейти к полярным координатам и расставить пределы по новым переменным.

а) $I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\ \rho\ d\rho\ d\varphi = \begin{pmatrix} \int d\varphi \int f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\rho d\rho \\ \int d\rho \int (\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\rho d\varphi \end{pmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\rho\ d\rho$

$x = 1 \Leftrightarrow \rho\cdot\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \rho\frac{1}{\cos\varphi}$

б) $I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)$

Решение: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\ d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\ d\rho$

в) D_{xy} ограничена лемнискатой

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

$x = \rho\cdot\cos\varphi$

$y = \rho\cdot\sin\varphi$

$\left(\rho^2\cdot\cos^2\varphi + \rho^2\cdot\sin^2\varphi\right)^2 = a^2\left(\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right)$

$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

$\rho^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

$\rho^2 = a^2\cdot\cos 2\varphi$

$\rho = a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$

$\cos 2\varphi \geqslant 0$

$2\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right] \Rightarrow \varphi \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$

$I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\, d\rho + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\, d\rho$

Пример: Вычислить

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy$$

где D_{xy}, ограниченна кривой

$x^2+y^2 = 2ax$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 1^2$

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$

Перейдем в полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

$f(x,y) = x^2+y^2$

$f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right) = \rho^2$

Уравнение границы области D_{xy}

$x^2+y^2 = 2ax$

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2a\rho\cos\varphi$

$\rho^2 = 2a\rho\cos\varphi$

$\rho = 2a\cos\varphi$

$$I=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\, d\rho\, d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{2a\cos\varphi}\rho^2\cdot\rho\, d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\left(\int\limits_{-a}^{a} f_{\text{четн}}(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f_{\text{четн}}(x)dx\right)=$$

$$8a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi = \left(\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) = 8a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 2a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$2a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=2a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+\frac{\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=2a^4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot a^4\pi$$

Пример: Вычислить

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,$$

где область D_{xy} ограниченна эллипсом с полуосями 2a и 2b (‖-ны Ox и Oy соответственно) и центром в точке 0.

Решение:

Перейдем в полярную систему координат.

$$f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)=\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=\rho^2\left(\frac{cos^2\varphi}{a^2}+\frac{sin^2\varphi}{b^2}\right)$$

В декартовой системе координат

$$y=\pm 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}$$

$$I=\int\limits_{-2a}^{2a}dx\int\limits_{-2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}}^{2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=4\int\limits_0^{2a}\left[\frac{x^2}{a^2}\cdot 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{8b^3}{3b^2}\left(1-\frac{x^2}{4a^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}dx \text{ - все сложно}$$

Перейдем в обобщенную полярную систему координат

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi\\ y=b\rho\sin\varphi\end{cases}$$

$$J_{\text{обоб. пол. с.к.}}=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi\\ y'_\rho & y'_\varphi\end{vmatrix}=ab\rho$$

$$f\left(a\rho\cos\varphi,b\rho\sin\varphi\right)=\rho^2$$

Уравнение границы области D_{xy}: $\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$

Перейдем в обобщенную полярную систему координат

$$\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{4}=1$$

$$\rho^2=4$$

$$\rho=2$$

$$I=\iint\limits_{D_{\text{обю пол. с.к.}}} f\left(a\cdot\rho\cdot\cos\varphi,b\cdot\rho\cdot\sin\varphi\right)ab\rho\ d\rho\ d\varphi=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\cdot\rho^2\ d\rho=ab\int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{\rho^2}{4}\right|_0^2 d\varphi=4ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=8ab\pi$$

4. Приложения двойного интеграла.

I. Вычисление площади плоской фигуры.

Пусть фигура занимает область D на плоскости Oxy.
Тогда

$$S(D)=\iint\limits_D dxdy$$

II. Вычисление массы пластины.

Пусть

1) пластина занимает область D на плоскости Oxy.

2) $f(x,y)$ - значение плотности (поверхностного) материалы пластины в точке (x,y)

Тогда масса пластины:
$m = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

III. Вычисление объема тела.
Пусть

1) Тело задано в виде
$T = \{(x,y,z): \ (x,y) \in D_{xy}, \ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}$

Тогда
$V(T) = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\,dxdy$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$x^2 + y^2 = 2x$
$x^2 + y^2 = 4x$
$x = y$
$y = 0$
Решение: $S = \iint\limits_D dxdy$
Перейдем в полярную систему координат

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho \ d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cdot\cos\varphi}^{4\cdot\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2} \Big|_{2\cdot\cos\varphi}^{4\cdot\cos\varphi} \right] d\varphi = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) d2\varphi = 3\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)\right] = 3\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}$$

Пример: Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = 2x^2 + y^2 + 1$
$x + y = 1$
$x = 0, \ y = 0, \ z = 0$
Метод сечений:
$z = x^2 + y^2$
$z = a$
$x^2 + y^2 = a$
$a < 0 \Rightarrow \emptyset$
$a = 0 \Rightarrow 0(0,0)$
$a > 0 \ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$V = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[2x^2 + y^2 + 1 - 0\right] dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[2x^2 + y^2 + 1\right] dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[2x^2 + y^2 + 1\right] dy =$$

$$\int\limits_0^1 \left[2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right]\Big|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left[2x^2 - 2x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} + 1 - x\right] dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[6x^2 - 6x^3 + (1-x)^3 + 3 - 3x\right] dx =$$

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[6x^2 - 6x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 3 - 3x\right] dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[-7x^3 + 9x^2 - 6x + 4\right] dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{7}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 4x\right]\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{3}\left[-\frac{7}{4} + \frac{9}{3} - 3 + 4\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{-21 + 36}{12} + 1\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{15}{12} + 1\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{12} = \frac{3}{4}$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$z = \dfrac{y^2}{a}$

$x^2 + y^2 = r^2$

$z = 0$

$V = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\, dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{y^2}{a} dxdy$

Перейдем в полярную систему координат $\dfrac{1}{a}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \cdot \rho \cdot \sin^2\varphi \ d\varphi d\rho = \dfrac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r} \rho^3 \cdot \sin^2\varphi \ d\rho = \dfrac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\rho^4}{4}\Big|_0^r \cdot$

$\sin^2\varphi d\varphi = \dfrac{1}{8a}\int\limits_0^{2\pi} r^4 \cdot (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \dfrac{1}{8a} r^4 \varphi\Big|_0^{2\pi} = \dfrac{\pi r^4}{4a}$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$2az = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

$x^2 + y^2 = 3a^2 - z^2$

$2az = 3a^2 - z^2$

$z^2 + 2az - 3a^3 = 0$

$V = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\, dxdy$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

$z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$

$z_2(x,y) = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$

$z_1(x,y) = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2a}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases} \Rightarrow z^2 = 3a^2 - 2az$

$z^2 + 2az - 3a^2 = 0$

$(z + 2)^2 = 4a^2$

$z_1 = -3a \quad z_2 = a$

$x^2 + y^2 + a^2 = 3a^2$

$x^2 + y^2 = 2a^2$

$r = a\sqrt{2}$

Перейдем в полярную систему координат

$$= \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \left[\sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{2a}\right] \rho \ d\rho \ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{2a}\rho \ d\rho = 2\pi \left[\int\limits_0^{a\sqrt{2}} \rho\sqrt{3a^2 - \rho^2} d\rho - \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{2a} d\rho\right] =$$

$$2\pi\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{3a^2 - \rho^2} d\left(3a^2 - \rho^2\right) - \frac{\rho^4}{8a}\Big|_0^{a\sqrt{2}}\right] = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(3a^2 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\sqrt{2}} - \frac{a^3}{4}\right] = 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(a^3 - 3\sqrt{3}a^3\right) - \frac{a^3}{4}\right] =$$

$$2\pi a^3\left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 2\pi a^3\left[\sqrt{3} - \frac{5}{6}\right]$$

Тройной интеграл.

1. Вычисление тройного интеграла.

Определение: Область G называется z-правильной, если любая прямая $\parallel$-ая Oz пересекает границу G не более двух раз, либо содержит границу целиком.

z-правильную область можно задать в виде:

$G\left\{(x,y,z):\ (x,y) \in D_{xy},\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\right\}$

При выполнение некоторых условий для такой области G

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Пример: Расставить пределы в

$I = \iiint\limits_G fdxdydz,$

если G ограничена на следующими поверхностями

$x + y + z = 1$

$x = 0,\ y = 0$

$z = 0$

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} fdz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_0^{1-x-y} fdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz$$

Пример:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$

$z = c$

$(c > 0,\ z \geqslant 0)$

$z = 0$

$\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$

$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

$\left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right) = 0$

$$I = \iiint\limits_G fdxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{z_2=c} fdz = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} fdz$$

Пример: Вычислить

$I = \iiint\limits_G zdxdydz$

где G - область, ограниченная

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

и $z = 0$ $(z \geqslant 0)$ $I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1=0}^{z_2=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \dfrac{z^2}{2}\Big|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\dfrac{c^2}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)\right] dxdy =$

$\dfrac{c^2}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left[1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right] dxdy =$ (Перейдем в полярную систему координат) $=$

$$\frac{c^2}{2}\iint\limits_{D_{xy}} \left[1-\rho^2\right] ab\rho\ d\rho d\varphi = \frac{abc^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[\rho - \rho^3\right] d\rho = \frac{abc^2}{2}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]\Big|_0^1 = \frac{abc^2}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot abc^2\pi$$

2. Замена переменных в тройном интеграле.

Пусть

1) $\Phi:\ G_{uvw} \to G_{xyz}$

2) $G_{xyz} = \Phi(G_{uvw})$

3) Φ биективна, ...

Тогда
$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_{uvw}} f\left(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\right)\cdot |J_\Phi(u,v,w)|\cdot dudvdw$$

Замечание:

1) Цилиндрическая система координат
$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$
$J_{\text{цил.}} = \rho$

2) Сферическая система координат
$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ z = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$
$J_{\text{сфер.}} = r^2\cdot\cos\theta$

Пример: Вычислить
$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a \underbrace{z\sqrt{x^2+y^2}}_{f(x,y,z)}dx$$
Решение: $G:\left\{(x,y,z):\ 0\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2},\quad 0\leqslant z\leqslant a\right\}$
$y=\sqrt{2x-x^2}$
$(x-1)^2+y^2=1$
Перейдем в полярную систему координат. $f(x,y,z)=z\rho$
$$I = \iiint\limits_G z\rho\rho\ d\rho d\varphi dz = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho^2\ d\rho d\varphi \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} zdz = \frac{a^2}{2}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho^2\ d\rho d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2\ d\rho = \frac{8a^2}{6}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi =$$
$$\frac{4a^3}{3}\int\limits_0^1(1-t^2)dt = \frac{4a^2}{3}\left(a-\frac{1}{3}\right) = \frac{8a^2}{9}$$
$$\int\cos^3\varphi d\varphi = \int\cos^2\varphi d\sin\varphi = \int(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi$$

Пример: Вычислить
$$I = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$$
$G:\ \left\{(x,y,z):\ -R\leqslant x\leqslant R,\ -\sqrt{R^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2},\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$
Перейдем в сферическую систему координат.
$f(x,y,z) = r^2\cdot\cos^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = r^2\cos^2\theta$
$$I = \iiint\limits_{G_{r\varphi\theta}} r^2{\cdot}\cos^2\theta{\cdot}r^2{\cdot}\cos\theta\ drd\varphi d\theta = \iiint\limits_{G_{r\varphi\theta}} r^4\cos^3\theta\ drd\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^R r^4\cos^3\theta\ dr = 2\pi{\cdot}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\theta d\theta\right)\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R =$$
$$\frac{2R^5\pi}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta = \frac{4\pi R^5}{15}$$

3. Вычисление объемов тела с использованием тройных интегралов.

Пусть тело занимает область G в пространстве Oxyz. Тогда объем этого тела
$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$x^2 + y^2 = z^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
(внешнего по отношению конуса)
Решение:
$y^2 = z^2$
$y^2 - z^2 = 0$
$(y-z)(y+z) = 0$
$y = z)$
$(y = -z)$

$V = 2V(G_1) = 2\iiint\limits_{G_{xyz}} dxdydz$ Перейдем к сферической системе координат $\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ z = r\cdot\sin\theta \end{cases}$ $2\iiint\limits_{G_{r\rho\varphi}} r^2\cos\theta\, drd\varphi d\theta =$

$2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^a r^2\cos\theta\ dt = 2\cdot 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\Big|_0^a\right]\right) d\theta = 2\cdot 2\pi\cdot\frac{a^3}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{a}} = 2\cdot\frac{2}{3}\pi a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} -$
$\frac{4\sqrt{2}}{6}\pi a^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

Пример: Вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями:
$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$
$x = a$
Решение:
$V = \iiint_{G_{xyz}} dxdydz$
Перейдем в обобщенную цилиндрическую систему координат
$\begin{cases} x = x \\ y = \rho\cdot b\cdot\cos\varphi \\ z = \rho\cdot c\cdot\sin\varphi \end{cases}$
$|J| = \rho bc$

$V = bc\iint\limits_{\rho\varphi} \rho d\rho d\varphi = bc\iint\limits_{D\rho\varphi}\left(a - \frac{a\rho^2}{2}\right)\rho d\rho d\varphi = abc\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right)\rho d\rho d\varphi = \frac{abc}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho - \rho^3\right)d\rho = \frac{1bc}{2}2\pi\left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]\Big|_0^{\sqrt{2}}$
$abc\pi(2-1) = \pi abc$

Теория вероятностей.
Определение вероятностей.

1. Классическое определение вероятностей.

Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

2) $|\Omega| = N < \infty$

3) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход.

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число
$P(A) = \frac{N_A}{N}$

Пример: Бросают 2 игральные кости.
A = {на обеих костях выпало одинаковое число очков}.
B = {сумма выпавших очков четная}.
C = {произведение выпавших очков = 6}.

P(A), P(B), P(C) - ?
Решение:

1) Исход: (x_1, x_2), где x_i - количество очков выпавшей на i-ой кости.
   (x_1, x_2) - размещение с повторениями из 6 по 2.
   N = 36

2) $A = \{(1,1), \dots, (6,6)\}$
   $N_A = 6$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

3) $B = \{ \begin{matrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (2,2) & (2,4) & (2,6) \\ ... \\ (6,2) & (6,4) & (6,6) \end{matrix} \} \ N_B = |B| = 18$
   $P(B) \ cfracN_BN = \dfrac{1}{2}$

4) $C = \{x_1 x_2 = 6\} = \{(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)\}$
   $N_C = |C| = 4$
   $P(C) = \dfrac{N_C}{N} = \dfrac{1}{9}$

Пример: Из колоды домино наудачу извлекают одну кость.
A = {это дубль}
B = {на кости ровно одна пустышка}
P(A)? P(B) = ?

1) $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant 6$
   Исход: (x_1, x_2), где $x_1 \leqslant x_2, \ x_i \in \{0, \dots, 6\}$
   $N = 28$

2) $A = \{(0,0), \ (1,1), \ \dots, (6,6)\}$
   $N_A = 7$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$

3) $B = \{(0,1), \ (0,2), \dots, (0,6)\}$
   $N_B = |B| = 6$
   $P(B) = \dfrac{N_B}{N} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$

2. Некоторые комбинаторные конфигурации.

При решении задач на классическое определение вероятности приходится подсчитывать число элементов в различных комбинаторных конфигурациях. При этом используется ряд стандартных приемов.

I. Сочетания без повторений.
Пусть

1) A - множество

2) $|A| = n$

Без ограничения общности можно считать, что
$A = \{1, 2, \dots, n\}$

Определение: Сочетанием без повторений из n по m называется любое m-элементное подмножество множества A, то есть набор
$\{x_1, \dots, x_n\}$

Замечание:

1) в определении подразумевается, что
   а) все входящие в сочетание элементы попарно различны.
   б) сочетание не изменится, если входящие в него элементы записать в другой последовательности например
   $\{1, 3, 10\} = \{3, 10, 1\}$

Th: Всего $\exists\ C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (биномиальные коэффициенты) различных сочетаний без повторений из n по m.

II. Размещение с повторениями.
$A = \{1, 2, \dots, n\}$
Определение: Размещение с повторениями называется кортеж (упорядоченный набор):
$(x_1, x_2, \dots, x_m)$
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, m}$

Замечание: Размещения различаются не только составом элементов но и последовательностью, в которой они записаны. Например
$(1, 1, 3) \neq (1, 3, 1)$

Th Всего $\exists\ \widetilde{A_n^m} = n^m$ различных размещений с повторениями из n по m.

III. Размещение без повторений.
Определение: Размещением без повторений из n по m называется кортеж
$(x_1, x_2, \dots, x_m)$,
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, m},\ x_i \neq n_j$ при $i \neq j$

Th Всего $\exists\ A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ различных размещений без повторения из n по m.

IV. Перестановка.
Определение: Перестановка длины n называется размещение без повторений из n по n, то есть кортеж
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, n},\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j$

Th: Число перестановок длины n равно $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$

V. Схема упорядоченных разбиений.
Пусть

1) имеется n попарно различных шаров
2) имеется m попарно различных урн.
3) За j-ой урной закреплено число $n_j \in \mathbb{N}_0$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$

Вопрос: Сколькими способами можно разложить n шаром по m урнам, так, чтобы в j-ой урне лежало n_j шаров?
Пример:

Th Общее число способов размещений n шаров по m урнам с учетом сделанных выше ограничений составит

$C(n_1, \ldots, n_m) = \dfrac{n!}{n! \cdot \ldots \cdot n_m!)}$

Пример: В партии из 10 однотипных изделий 3 изделия являются бракованными. Из партии случайным образом выбираются 3 изделия.
A = {в выборке ровно 1 брак}
B = {в выборке ровно 2 брака}
C = {в выборке 3 ровно 3 брака}
P(A), P(B), P(C) = ?
Решение:

1) 10 шаров Исход: $\{x_1, x_2, x_3\}$, где x_i - номер извлеченного шара.
Сочетание без повторения из 10 по 3
$N = C_1^3 0 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120$

2) $P(A) =?$
$\{\underbrace{x_1}_{\text{брак}}, \underbrace{x_2, x_3}_{\text{не брак}}\}$
$N_A = 3 \cdot 21 = 63$
$P(A) = \dfrac{61}{120} = \dfrac{21}{40}$

3) $P(B) =?$
$\{\underbrace{x_1}_{\text{не брак}}, \underbrace{x_2, x_3}_{\text{брак}}\}$
$N_B = 3 \cdot 7 = 21$
$P(B) = \dfrac{21}{120} = \dfrac{7}{40}$

4) $P(C) =?$
$\{\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{\text{брак}}\}$
$N_C = 1$
$P(C) = \dfrac{1}{12}$

Пример: 10 вариантов контрольной работы написаны на 10-ти отдельных картах. Варианты раздаются 8-ми сидящим рядом студентам (по 1-ому варианту в руки).
A = {варианты 1 и 2 не будут использоваться}
B = {варианты 1 и 2 достанутся сидящим рядом студентам}
C = {варианты будут распределены последовательно номера вариантов в порядке возрастания}
P(A), P(B), P(C) = ?
Решение:

1) Исход: $(x_1, \ldots, x_8)$,
где x_i - номер билета, который достался i-ому студенту.
Размещение без повторений из 10 по 8
$N = \dfrac{10!}{2!}$

2) $P(A) =?$
$(x_1, \ldots, x_8),\ x_i \in \{3, 4, \ldots, 10\}$
$N_A = A_8^8 = 8!$
$P(A) = \dfrac{2 \cdot 8!}{10!} = \dfrac{1}{45}$

3) $P(B) =?$

$N_B = 2 \cdot A_8^6 \cdot 7 = 14 \cdot A_8^6$

$P(B) = \dfrac{14 \cdot 8! \cdot 2}{2! \cdot 10!} = \dfrac{14}{9 \cdot 10} = \dfrac{7}{45}$

4) $P(C) =?$
   $(1, 2, \ldots, 8)$
   $(2, 3, \ldots, 9)$
   $(3, 4, \ldots, 10)$
   $N_C = 3$
   $P(C) = \dfrac{3 \cdot 2}{10!}$

Пример: Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный телефонный номер. Считает, что в номере 7 цифр и все номера равно возможные. Найти вероятности следующих событий:
A = {4 последние цифры одинаковы}
B = {все цифры попарно различны}
C = {1-я цифра нечетная}
Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$,
   где $x_i \in \{0, \ldots 9\}$ - i-ая цифра номера.
   Размещение с повторениями из 10 по 7.
   $N = \tilde{A}{}_1^7 0 = 10^7$

2) $P(A) =?$
   $(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{10^3}, \underbrace{x_4, x_4, x_4, x_4}_{10})$
   $N_A = 10^4$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{10^4}{10^7} = \dfrac{1}{10^3}$

3) $P(B) =?$
   $(x_1, \ldots, x_7),\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j$
   $N_B = A_1^7 0 = \dfrac{10!}{3!}$
   $P(B) = \dfrac{10!}{3! \cdot 10^7} = \dfrac{10!}{3! \cdot 10^7}$

4) $PC() =?$
   $\tilde{A}{}_1^6 0 = 10^6$
   $x_1 \in \{1, 3, 5, 6, 9\}$
   $N_C = 5 \cdot 10^6$
   $P(C) = \dfrac{5 \cdot 10^6}{10^7} = \dfrac{1}{2}$

Пример: На почту поступило 6 телеграмм. Их случайным образом распределяют по 4-ем каналам для обработки.
A = {на 1-ом канале окажется 3 телеграммы, на 2-ом - 2 телеграммы, на 3-ем - 1 телеграмма, на 4-ом - 0 телеграмм}.
P(A) = ?
Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ - Размещение с повторениями, где x_i - номер канала, на который попала i-ая телеграмма.
   $\tilde{A}{}_6^4 = 4^6$

2) $N_A = C(3,2,1,0) = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1\cdot 1} = \dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{2} = 60$

   $P(A) = \dfrac{60}{4^6}$

Пример: Партия из 50-ти изделий 4 бракованных. Из партии выбирают 10 изделий случайным образом.
A = {среди выбранных изделий хотя бы одно бракованное}.
P(A) = ?
Решение:

1) Исход: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_10\}$ - сочетание без повторений из 50 по 10.
   x_i - номер извлеченного изделия.
   $N = C^10_50 = \dfrac{50!}{10!\cdot 40!}$

2) $P(A) =?$
   I способ.
   $A = \underbrace{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}_{\text{несовместны}}$
   A_i - среди выбранных изделий ровно i бракованных, $i = \overline{1,4}$.
   $P(A_i) =?$
   $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{4} P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{C_4^i\cdot C_{46}^{10-i}}{C^10_50}\right)$
   II способ. $\overline{A}$ = {в выборке нет ни одного бракованного изделия}.
   $N_{\overline{A}} = C^10_46$
   $\{x_1, \ldots, x_10\}$
   $P_A(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C^10_46}{C^10_50}$

Пример: В шкафу находится 10 пар ботинок (все попарно различны). Из шкафа случайным образом вынимают 4 ботика.
A = {из вынутых из шкафа ботинок нельзя составить пару}.
P(A) = ?
Решение:

1) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ (сочетание без повторения из 10 по 4), где x_i - номер ботинка.
   $N = C_2^40$

2) $P(A) =?$
   I способ.
   $N_A = \dfrac{20\cdot 18\cdot 16\cdot 14}{4!}$

   II способ.
   $N_A = C_1^40\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4\cdot C_1^40$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N}$

   III способ.
   (a_1, x_2, x_3, x_4)
   $N = A_2^40$
   $N_A = 20\cdot 18\cdot 16\cdot 14$

Пример: 6 пассажиров поднимаются в лифте 7-ми этажного дома. Считая, что движения начинается из подвала, найти вероятности событии:
A = {на первых трех этажах не выйдет никто}.
B = {все выйдут на первых 6-ти этажах}.
C = {все выйдут на 1-ом этаже}.

D = {на 5-ом, 6-ом, 7-ом этажах выйдут по два человека}.
Решение:

1) $(x_1, x_2, \dots x_6)$ - размещение с повторениями из 7 по 6.
   x_i - этаж, на котором вышел i-й человек.
   $N = 7^6$

2) $P(A) = ?$
   $(x_1, x_2, \dots, x_6)$
   $x_i \in \{4, 5, 6, 7\}$
   $N_A = 4^6$
   $$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{4^6}{7^6} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$$

3) $P(B) = ?$
   $(x_1, x_2, \dots, x_6)$
   $x_i \in \{1, 2, \dots, 6\}$
   $N_B = 6^6$
   $$P(B) = \frac{N_B}{N} = \left(\frac{6}{7}\right)^6$$

4) $P(C) = ?$
   $(x_1, x_2, \dots, x_6), \ x_i \in 1$
   $C = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$
   $N_C = 1$
   $$P(C) = \frac{1}{7^6}$$

5) $P(D) = ?$
   Каждый кортеж из события D однозначно определяется номерами двух позиций в которых стоят две "5" и номерами в которых стоят две "6" .
   Схема упорядоченных разбиений.
   $$N_D = C_6(2, 2, 2) = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$$
   $$P(D) = \frac{N_D}{N}$$

   Замечание: N_D можно подсчитать так:
   $$N_D = C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 1 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{4!}{2! \cdot 2} = C_6(2, 2, 2)$$

3. Геометрическое определение вероятности.

Пусть

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\mu(\Omega) \subset \infty$, где μ - мера множества.

3) "степень возможности" осуществления события $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества A и не зависит от формы события A и его расположения внутри Ω.

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega}$$

Пример: В отрезке [0; 1] случайным образом выбирают 2 точки.

A = {произведение из координат $< \frac{1}{2}$}.

P(A) = ?

Решение:

1) Исход: (x_1, x_2)б где x_i - координата i-ой точки.
   $\Omega = [0; 1]x[0; 1]$

2) $A = \{x_1 \cdot x_2 < \frac{1}{2}\}$
   $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$
   $\mu(\Omega) = 1$
   $\mu(A) = \frac{1}{2} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{2x_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln x_1 \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln 2$

Условная вероятность.

1. Условная вероятность.

Пусть

1) (Ω, β, P) - вероятностное пространство

2) $A, B \in \beta$

3) $P(B) > 0$

Определение: Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B называется число
$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Определение: События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Th

Пусть

1) $P(B) > 0$
   Тогда A, B - независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Пример: 3 раза бросают игральную кость.
A = {результаты трех бросков попарно различны}.
B = {выпало хотя бы один раз "6" }.
$P(A), P(B), P(A|B) =?$
Указать, зависимы ли A и B.

Решение:

1) Исход: (x_1, x_2, x_3) (размещение с повторениями из 6 по 3), где x_i - количество очков, при i-ом броске.
   $N = 6^3$

2) $P(A) =?$
   $N_A = 6 \cdot 5 \cdot 4 = A_6^3$
   $P(A) = \frac{12-}{6^3}$

3) $P(B) =?$
   $P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$\overline{B} = \{"6" \text{ не выпало ни разу}\}$
$N_{\overline{B}} = 5^3$
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$

4) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$
AB = {все x_i попарно различны и один из них = "6" }. $N_{AB} = 20 \cdot 3 = 60$
$$P(A|B) = \frac{\frac{60}{6^3}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{60}{6^3 - 5^3} = \frac{60}{(6-5)(6^2+50+25)} = \frac{60}{91}$$

5) $P(A) \neq P(A|B) \Rightarrow A, B$ - зависимы.

Пример: Из полной колоды в 52 карты случайным образом извлекают 1 карту.
A = {извлечен туз}
B = {извлечена карта черной масти}
C = {извлечена картинка}

1) Установить, является ли A,B,C независимыми попарно и независимы в совокупности.

2) P(ABC) = ?

Решение:

1) $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
$P(B) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$
$P(C) = \dfrac{16}{52}\dfrac{4}{13}$

2) $P(AB)$ = (AB = {туч черной масти}) = $\dfrac{2}{52} = \dfrac{1}{26}$
$P(AC)$ = (AC = A) = $P(A) = \dfrac{1}{13}$
$P(BC)$ = (BC = {картинка черной масти}) = $\dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$

3) Определение: События A и B называется независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$
$P(AB) = \dfrac{1}{26}$
$P(A)P(B) = \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{26}$
$\Rightarrow A, B$ - независимы.
$P(AC) = \frac{1}{13}$
$P(A) \cdot P(C) = \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{4}{13} = \dfrac{4}{169}$
$\Rightarrow A, C$ - зависимы.
$P(BC) = \dfrac{2}{13}$
$P(C) \cdot P(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{13} = \dfrac{2}{13}$
$\Rightarrow B, C$ - независимы.
A,B,C не является независимыми попарно (так как A и C зависимы). A, B, C не являются независимы в совокупности, так как они не являются попарно независимыми.

Пример: В аудитории находится 100 студентов из которых
английский знают: 50 человек
французский знают: 40 человек
немецкий знают: 35 человек

английский и французский: 20 человек
английский и французский: 8 человек
французский и немецкий: 5 человек

английский,французский и немецкий: 5 человек

Случайно выбранного студента вызывают к доске.
A = {он знает английский}
B = {он знает французский}
C = {он знает немецкий}

1) Установить, являются ли A, B, C попарно независимыми и независимыми в совокупности.
2) $P(AB|C) =?$

Решение:

1) $P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
   $P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$
   $P(C) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

2) $P(AB) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
   $P(AC) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$
   $P(BC) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

3) $P(AB) = \frac{1}{5}$
   $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$
   $\Rightarrow A, B$ – независимы

   $P(AC) = \frac{2}{25}$
   $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{20} = \frac{7}{40}$
   $\Rightarrow A, C$ - зависимы

   $P(BC) = \frac{1}{10}$
   $P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$
   $\Rightarrow B, C$ - зависимы

   A, B, C - не являются попарно независимы $\Rightarrow$ A, B, C не являются независимы в совокупности.

4) $P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{7}{20}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{20}{7} = \frac{1}{7}$

2. Теорема сложения и умножения.

Th 1 Сложения.

1) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$

2) $P(A_1+\ldots+A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}^{n} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}^{n} P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n)$

Th 2 Умножения.

1) Если $P(A_1) > 0$, то $P(A_1A_2) = P(A_)\cdot P(A_2|A_1)$

2) Если $P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}) > 0$, то
$P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})$

Пример: Оператор ЗРК видит на экране 10 целей, среди которых 8 самолетов и 2 помехи (на экране они неразличимы). Оператор последовательно атакует 4 раза.
A = {большая часть атакованных целей - самолеты}
B = {все помехи были атакованы}
C = {помеха была атакована но не ранее, чем 3-им выстрелом}
D = {самолеты и помехи атакованы вперемежку}
Решение:

1) Исход: $(x_1x_2x_3x_4)$ (размещение без повторений из 10 по 4), где x_i - номер цели, атакованный i-ым выстрелом.
$N = A_1^40 = \dfrac{10!}{6!}$

2) A_1 = {атаковано ровно 3 самолета}
A_2 = {атаковано ровно 4 самолета} $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1A_2)}_{0} = P(A_1) + P(A_2)$

$A_2 = \{(с, с, с, с)\}$
$N_{A_2} = A_8^4 = \dfrac{8!}{4!}$
$P(A_2) = \dfrac{N_{A_2}}{N} = \dfrac{\frac{8!}{4!}}{\frac{10!}{6!}}$
$P(A_1) =?$
$8\cdot A_8^3 = N_{A_1}$
$P(A_1) = \dfrac{8A_8^3}{A_1^40}$

3) $P(B) =?$
(п, п, с, с)
C_4^2 - число способов выбрать две позиции для помех.
2! - число способов расставить 2 помехи по выбранным позициям.
A_8^2 - число способов расставить самолеты.
$N_B = C_4^2\cdot 2\cdot A_8^2$
$P(B) = \dfrac{N_B}{N}$

4) $C = C_1 + C_2$, где
C_1 = {помехи впервые атакованы 3-м выстрелом}
C_2 = {помехи впервые атакованы 4-м выстрелом}

$P(C) = P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) - \underbrace{P(C_1C_2)}_{0}$

$P(C_1) = ?$
<u>I способ</u>.
(с, с, п, *)
<u>II способ</u>.
Q_i = {i-ым выстрелом атакован самолет} $i = \overline{1,4}$
$\overline{Q_i}$ = {i-ым выстрелом атакована помеха}
$C_1 = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \overline{Q_3}$

$$P(C_1) = P(Q_1Q_2\overline{Q_3}) = \underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}} \cdot \underbrace{P(Q_2|Q_1)}_{\frac{7}{9}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q_3}|Q_1Q_2}_{\frac{2}{8}} = \frac{2\cdot 7}{9\cdot 10} = \frac{7}{35}$$

$C_2 = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot \overline{Q_4}$

$$P(C_2) = \underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}} \cdot \underbrace{P(Q_2|Q_1)}_{\frac{7}{9}} \cdot \underbrace{P(Q_3|Q_1Q_2)}_{\frac{6}{8}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q_4}|Q_3Q_2Q_1)}_{\frac{2}{7}} = \frac{2\cdot 6}{10\cdot 9} = ...$$

5) $P(D) = ?$
$D_2 = \{$(с, п, с, п)$\}$
$D_1 = \{$(п, с, п, с)$\}$
$D = D_1 + D + 2$
$P(D) = P(D_1 + D_2) = P(D_1) + P(D_2) - \underbrace{P(D_1D_2)}_{0}$

$D_1 = \overline{Q_1} \cdot Q_2 \cdot \overline{Q_3} \cdot Q_4$

$$P(D_1) = \underbrace{P(\overline{Q_1})}_{\frac{2}{10}} \cdot \underbrace{P(Q_2|\overline{Q_1})}_{\frac{8}{9}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q_3}|\overline{Q_1}Q_2)}_{\frac{1}{8}} \cdot \underbrace{P(Q_4|\overline{Q_1}Q_2\overline{Q_3})}_{\frac{7}{7}} = \frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

$D_2 = Q_1 \cdot \overline{Q_2} \cdot Q_3 \cdot \overline{Q_4}$

$$P(D_2) = \underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q_2}|Q_1)}_{\frac{2}{9}} \cdot \underbrace{P(Q_3|Q_1\overline{Q_2})}_{\frac{7}{8}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q_4}|Q_1\overline{Q_2}Q_3)}_{\frac{1}{7}} = \frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

$P(D) = P(D_1 + D_2)$

<u>Пример</u>: По каналу связи, подверженному воздействию помех, передаются кодовые последовательности из 0 и 1. При этом вероятность того, что
$1 \mapsto 1$ p_1
$1 \mapsto 0$ $1 - p_1$
$0 \mapsto 0$ p_2
$0 \mapsto 1$ $1 - p_2$
В канал подают последовательность "10" . Считая, что отдельные символы искажаются независимо, найти вероятности событии:
А = {принята последовательность 10}
В = {приняты 2 одинаковые символы}
<u>Решение</u>:

1) Исход: (x_1, x_2), где $x_i \in 0, 1$ - i-ый принятый символ.

2) $A = \{(10)\}$
$A = A_1 \cdot A_2$, где
A_1 = {1-ый принятый символ 1}
A_2 = {2-ой принятый символ 0}
$P(A)$ = (th умножения) = $\underbrace{P(A_1)}_{p_1} \cdot \underbrace{P(A_2|A_1)}_{P(A_2)=p_2\text{т.к. отдельные символы искажаются независимо}}$

3) $B = B_1 + B_2$
$B_1 = \{(1, 1)\}$

$B_2 = \{(0,0)\}$
$P(B_1) = P\left\{\{1 \mapsto 1\} \cdot \{0 \mapsto 1\}\right\} =$ (искажения отдельных символов независимы) $= P\{1 \mapsto 1\} \cdot P\{0 \mapsto 1\} = p_1 \cdot (1-p_2)$

$P(B_2) = P\left\{\{1 \mapsto 0\} \cdot \{0 \mapsto 0\}\right\} = P\{1 \mapsto 0\} \cdot P\{0 \mapsto 0\} = (1-p_1) \cdot p_2$

$P(B) = P(B_1 + P_2) = P(B_1) + P(B_2) - \underbrace{P(B_1 B_2)}_{0} = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$

Пример: На карточках написаны буквы слова "дезоксирибонуклеиновая" . Эти карточки тщательно перемешиваются и последовательно извлекают 5 карточек без возвращения.
Найти вероятность того, что в порядке появления они извлекают слово "кокос" .
Решение:
A = {карточки образуют слово "кокос" }
Тогда
$A = A_1 \cdot \ldots \cdot A_5$, где
A_1 = {на 1-ой карточке "к" }
A_2 = {на 2-ой карточке "о" }
A_3 = {на 3-ей карточке "к" }
A_4 = {на 4-ой карточке "о" }
A_5 = {на 5-ой карточке "с" }

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot P(A_4|A_1A_2A_3) \cdot P(A_5|A_1A_2A_3A_4) = \frac{2}{22} \cdot \frac{3}{21} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = \ldots$

Пример: Известно, что A, B - наблюдаемые в некотором случайном эксперименте события и
$P(B) = 0.4$ $P(A|B) = 0.3$ $P(A|\overline{B}) = 0.2$
$P(A),\ P(\overline{AB}),\ P(\overline{A} + \overline{B}),\ P(A \vartriangle B) = ?$
Решение:

1) $P(AB) =$ (по th умножения) $= P(A) \cdot P(B|A)$
$\Rightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$

2) $P(A) = P(A\Omega) + P(A(B + \overline{B})) = P(AB + A\overline{B}) =$ (по th сложения) $= \underbrace{P(AB)}_{0.12} + P(A\overline{B}) - \underbrace{P(ABA\overline{B})}_{0} =$
$0.12 + \underbrace{P(\overline{B})}_{0.6} \cdot \underbrace{P(A|\overline{B})}_{0.2} = 0.12 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.12 + 0.12 = 0.24$

3) $P(\overline{AB}) = \underbrace{P(\overline{B})}_{0.6} \cdot \underbrace{P(\overline{A}|\overline{B})}_{=1-P(A|\overline{B})} = 0.6 \cdot (1 - 0.2) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$

4) $P(\overline{A} + \overline{B}) =$ (th сложения) $= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{AB}) = 0.76 + 0.6 - 0.48 = 0.88$

5) $P(A \vartriangle B) = P(A \backslash B) + B \backslash A) = P(A\overline{B} + B\overline{A}) =$ (th сложения) $= P(A|overline B) + P(\overline{A}B) - \underbrace{P(A\overline{B}\overline{A}B}_{0} =$
$\underbrace{P(\overline{B}}_{0.6} \cdot \underbrace{A|\overline{B}}_{0.2} + \underbrace{P(B)}_{0.4} \cdot \underbrace{P(\overline{A}|B)}_{\text{при фикс.}=1-P(A|B)} = 0.12 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.4$

3. Формула полной вероятности.

Пусть (Ω, β, P) - вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.
Определение: Будем говорить, что события $H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу, если

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

2) $H_i H_j = \emptyset$, при $i \neq j$

3) $P(H_i) > 0,\ i = \overline{1,n}$

<u>Th</u> о формуле полной вероятности
Пусть

1) $H_1, \ldots, H_n$ - полная группа событий

2) A - событие

Тогда
$$\boxed{P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)}$$

<u>Пример</u>: В баскетбольной команде 12 игроков, из которых
4 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.95
5 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.8
3 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.5
Найти вероятности событий:
A = {случайно выбранный игрок выполнит успешный трех очковый бросок}
B = {случайно выбранный игрок выполнит трех очковый бросок в серии из 3-х попыток}
<u>Решение</u>:

1) Рассмотрим
H_1 = {случайно выбранный игрок из отличной группы}
H_2 = {случайно выбранный игрок из хорошей группы}
H_3 = {случайно выбранный игрок из группы новичков}

Используем формулу полной вероятности:
$$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{0.95} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{4}{12}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{0.8} \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{5}{12}} + \underbrace{P(A|H_3)}_{0.5} \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{3}{12}} = ...$$

2) $P(B) = P(B|H_1) \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{4}{12}} + P(B|H_2) \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{5}{12}} + P(B|H_3) \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{3}{12}}$
$P(B|H_1)$ = (схема испытаний Бернулли: успех - выполнение броска; неудача - невыполнение) = (формула для вычисления вероятности хотя бы одного успеха $= 1 - q^n$ $q = 1 - 0.95 = 0.05$) $= 1 - (0.05)^3$
$P(B|H_2) = 1 - (0.2)^3$
$P(B|H_3) = 1 - (0.5)^3)$
$$P(B) = \left[1 - (0.05)^3\right] \cdot \frac{4}{12} + \left[1 - (0.2)^3\right] \cdot \frac{5}{12} + \left[1 - (0.5)^3\right] \cdot \frac{3}{12} = ...$$

<u>Пример</u>: 10 студентов пришли сдавать экзамен. Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров знает 15 билетов, остальные знают все билеты.
Вероятность сдать экзамен по известному билету составляет 0.85, по неизвестному - 0.1.
A = {случайно выбранный студент группы сдал экзамен}.
<u>Решение</u>:
H_1 = {выбран Иванов или Петров}.
H_2 = {выбран Сидоров}.
H_3 = {выбран студент, который знает все билеты}.
$$P(A) = P(A|H_1) \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{2}{10}} + P(A|H_2) \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{10}} + P(A|H_3) \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{7}{10}}$$

$P(A|H_1)$ = {рассмотрим еще одну группу событий}
B_1 = {получен известный билет}
B_2 = {получен неизвестный билет}
Используя полную вероятность:

$P(A|H_1) = 0.85 \cdot \underbrace{\frac{20}{30}}_{P(B_1)} + 0.1 \cdot \underbrace{\frac{10}{30}}_{P(B_2)} = ...$

Аналогично

$P(A|H_2) = 0.85 \cdot \frac{15}{30} + 0.1 \cdot \frac{15}{30} = ...$

$P(A|H_3) = 0.85 \cdot \frac{30}{30} + 0.1 \cdot \frac{0}{30} = ...$

4. Формула Байеса.

Th Пусть

1) $H_1, \ldots, H_n$ - полная группа событий.
2) A - событие; $P(A) > 0$

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\underbrace{P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)}_{=P(A) \text{см. формулу полной вероятности}}}}$$ - формула Байеса.

Пример: В ящике лежит шар неизвестного цвета - с равной вероятностью белый или черный. В ящик кладут белый шар, шары тщательно перемешивают и вынимают 1 шар. Найти вероятность того, что в урне изначально был белый шар, если известно, что извлеченный шар оказался белым.

Решение:

1) Введем полную группу событий.
   $H_1 = \{$в урне изначально был белый шар$\}$
   $H_2 = \{$в урне изначально был черный шар$\}$
   $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

2) A $= \{$извлеченный шар - белый$\}$
   По формуле полной вероятности
   $P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{1} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3) $P(H_1|A) =$ (формула Байеса) $= \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{cfrac12}{cfrac34} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Замечание: Вероятности $P(H_i),\ i = \overline{1,n}$ называются априорными, так как известны до проведения эксперимента.

Вероятности $P(H_i|A),\ i = \overline{1,n}$ называются апостериорными (известны после проведения эксперимента).

В рассмотреном примере

$P(H_1) = \frac{1}{2}$

$P(H_i|A) = \frac{2}{3}$

Учет дополнительной информации об исходе эксперимента привел к тому, что

$P(H_i|A) > P(H_i)$

Пример: (см ранее)

В баскетбольной команде 12 игроков.

4 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.95

5 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.8

3 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.5

Случайно выбранный игрок выполнил трех очковый бросок. К какой части команды он вероятнее всего принадлежит?

Решение:

1) Полная группа события
   $H_1 = \{$выбран игрок из отличной группы$\}$
   $H_2 = \{$выбран игрок из хорошей группы$\}$
   $H_3 = \{$выбран игрок из посредственной группы$\}$

   А $= \{$выбранный игрок выполнил 3-х очковый бросок$\}$.
   $P(A) = ...$ (см выше).

2) Формула Байеса
   $$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.95 \cdot 4}{12 \cdot P(A)} = \frac{3.8}{12 \cdot P(A)}$$
   $$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot 5}{12 \cdot P(A)} = \frac{4}{12 \cdot P(A)} \text{ - MAX}$$
   $$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 3}{12 \cdot P(A)} = \frac{1.5}{12 \cdot P(A)}$$

Ответ: Вероятнее всего этот игрок из хорошей группы.

5. Схема Бернулли.

Рассмотрим случайный эксперимент, в ходе которого возможна реализация одного из 2-х элементарных исходов, то есть
$\Omega = \{$успех, неудача$\}$.

Пусть
P$\{$успех$\} = p \in (0; 1)$
Тогда
P$\{$неудача$\} = 1 - p = q$ - обозначение.
Замечание: Описанный выше случайный эксперимент будем называть испытанием.

Определение: Схемой Бернулли называется серия однотипных испытаний, в которой отдельные испытания независимы в совокупности. Замечание: Независимость отдельных испытаний означает, что в ходе всей серии вероятность реализации успеха (и, следовательно, вероятность неудачи) неизменна.

Th:

1) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ - вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний

2) $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$ - вероятность того, что в серии из n испытаний число k успехов лежит между k_1 и k_2.

3) $P_n(l \geqslant 1) = 1 - q^n$ - вероятность того, что в серии из n испытаний произошел хотя бы один успех.

Пример: 10 раз бросают правильную игральную кость.
A $= \{$"6" появится ровно 2 раза$\}$
B $= \{$"6" появится от 2 до 4 раза$\}$
C $= \{$"6" не появится ни разу$\}$
D $= \{$"6"появится хотя бы 1 раз$\}$
P(A) = ?, P(B) = ?, P(C) = ?, P(D) = ?
Решение:

1) Используем схему Бернулли для "успех" - выпадение "6" ; "неудача" - выпадение "1" , ... , "5"
   $$p = \frac{1}{6}$$

$q = \dfrac{5}{5}$
n = 10

2) $P(A) = P_1^2 0 = C_1^2 0 p^2 q^8 = \dfrac{10!}{2 \cdot 8!} \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^8 \approx 0.291$

3) $P(B) = \sum\limits_{k=2}^{4} C_n^k p^k q^{n-k} = P(A) + C_1^3 0 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^7 + C_1^4 0 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^6 \approx 0.291 + 0.155 + 0.054 \approx 0.5$

4) $P(C) = P_1 0(0) = C_1^0 0 \cdot p^0 \cdot q^1 0 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^1 0 \approx 0.162$

5) $P(D) = P_1 0(l \geqslant 1) = 1 - P(C) \approx 1 - 0.162 \approx 0.838$

Пример: ЗРК атакует самолет противника, обстреливая его зенитными ракетами. Вероятность попадания в самолет каждой ракеты равна 0.6; для поражения требуется как минимум 3 попадания. Найти вероятность поражения цели после 6 выстрелов.
Решение:

1) $\Omega = \{$"успешное попадание" , "неудачное попадание" $\}$
Серия событий - серия выстрелов.
Так как вероятность успеха неизменна по отдельные испытания независимы и используем схему Бернулли.
$p = 0.6;\ q = 0.4;\ n = 6$

2) A = {цель поражена}
$P(A) = P_6(3 \leqslant k \leqslant 6) = \sum\limits_{k=3}^{6} C_6^k p^k q^{n-k} = C_6^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^4 + C_6^4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^2 + C_6^5 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^1 + C_6^6 \cdot 0.6^6 \cdot 0.4^0 \approx 0.82$

Пример: Вероятность того, что приобретенный лотерейный билет окажется выигрышным, равна 0.01. Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы вероятность выиграть хотя бы по одному из них была $\geqslant 0.95$?
Решение:

1) Используем схему Бернулли.
"успех" - приобретенный билет выигрышный.
$p = 0.01$

2) Пусть купленно n билетов. Тогда вероятность выиграть хотя бы по одному
$P = P_n(k \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n \geqslant 0.95$
$1 - (1 - p^n) \geqslant 0.95$
$(1-p)^n \leqslant 0.05$
$n \geqslant \log_{1-p} 0.05 = \dfrac{\ln 0.05}{\ln(1-p)} = \dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.99} \approx 298.07$

Ответ: $n \geqslant 299$.
Замечание: Вообще схема Бернулли неприменима в это примере, так как отдельные испытания не являются независимыми (например, если в начале серии куплено несколько пустых билетов, то вероятность того, что очередной билет будет выигрышным, увеличивается).
Однако, если общий тираж велик, а количество приобретаемых билетов сравнительно невелико, то вероятность успеха изменится несущественно и схема Бернулли удовлетворяет описанному эксперименту.