

Двойной интеграл.

;

1. Вычисление двойного интеграла.

Определение: Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d(R) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$,

где $R\{D_1, \dots, D_n\}$ - разбиение области D , i , $i = \overline{1, n}$

Определение: Область D на плоскости Oxy называется y -правильной, если любая прямая \parallel -ая Oy , пересекает границу D не более чем в 2-х точках, либо содержит участок границы целиком.

y -правильная область D может быть задана в виде: $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ (*)

Для y -правильной области D , заданной (*), справедливо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

Замечание:

1) в правой части этой формулы стоит так называемый повторный интеграл, под которым понимают

$$\text{число } \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy =$$

2)

Пример: Вычислить $I = \iint_D (x + 3y^2) dx dy$ $a = 1$

$$b = 2$$

$$\varphi_1(x) = 2$$

$$\varphi_2(x) = \frac{4}{x}$$

$$I = \int_1^2 dx \int_2^{4/x} (x + 3y^2) dy = \int_1^2 [xy + y^3] \Big|_{y=2}^{y=4/x} dx = \int_1^2 \left(4 + \frac{64}{x^3} - (2x + 8)\right) dx = \int_1^2 \left(-4 + \frac{64}{x^3} - 2x\right) dx =$$

$$\left[\int_a^b c dx = c(b-a) \right] = -4 \left(-\frac{32}{x^2} + x^2 \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \underbrace{-4 - (8 + 4)}_{-16} + \underbrace{32 + 1}_{33} = 17$$

Замечание: Совершенно аналогично вышеизложенному: Определение: Область D называется x -правильной, если любая прямая, \parallel -ая Ox , пересекает границу D не более чем в двух точках, либо содержит участок границы целиком.

x -правильная область D можно задать в виде: $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ (**)

Для x -правильной области D , заданной (**), справедливо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

Пример: (см выше) $I = \iint_D (x + 3y^2) dx dy$

$$c = 2$$

$$d = 4$$

$$\psi_1(y) = 1$$

$$\psi_2(y) = \frac{4}{y}$$

$$\iint_D (x + 3y^2) dx dy = \int_2^4 dy \int_1^{4/y} (x + 3y^2) dx = \int_2^4 dy \left[\frac{x^2}{2} + 3y^2 x \right] \Big|_{x=1}^{x=4/y} = \int_2^4 \left[\frac{8}{y^2} - \frac{1}{2} + 12y - 3y^2 \right] dy = \int_2^4 \left[\frac{8}{y^2} + 12y - 3y^2 - \frac{1}{2} \right] dy$$

$$\left(-\frac{8}{y} + 6y^2 - y^3 \right) \Big|_2^4 - 1 = (-2 + 6 \cdot 16 - 4 \cdot 16) - (-4 + 24 - 8) - 1 = 30 - 12 - 1 = 17$$

Пример: В двойном интеграле $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

$$\text{а) Решение: } I = \int_0^1 dx \int_0^y f dy \quad I = \int_0^1 dy \int_x^1 f(x, y) dx$$

$$\text{б) } y = 2x^2 \quad x^2 = \frac{y}{2} \quad x =$$

$$I = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x, y) dx \quad I = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 f(x, y) dy$$

$$в) \quad y = I = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \quad I = \int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$$

2. Изменение порядка интегрирования.

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. $I = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy$

Замечание: До сих пор мы решали примеры вида: $\iint_D f(x, y) dx dy$

Решение: $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\}$

$$I = \underbrace{\int_0^4 dy \int_0^3 f(x, y) dx}_{D_1} + \underbrace{\int_4^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx}_{D_2}$$

Пример:

$$I = \int_0^1 dy \int_{2y}^{3y} f dx$$

Решение:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \leq 3y\}$$

$$I = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{2}} f dy + \int_2^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^1 f dx y$$

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$$

Решение: $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y\}$

$$I = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$$

3. Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть

$$1) \quad I = \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$$

$$2) \quad \Phi : D_{uv} \rightarrow D_{xy} \\ \Phi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Тогда при вычислении некоторые условия

$$I = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J_{\Phi}(u, v)| du dv$$

$$\text{где } J_{\Phi}(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Замечание: Для нас основное значение будет иметь переход к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases} \\ J_{\text{пол.}} = \rho$$

$$\boxed{\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D\rho\varphi} f(\rho \cdot \cos \varphi, \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi}$$

Пример: В двойном интеграле

$$I = \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$$

перейти к полярным координатам и расставить пределы по новым переменным.

$$\text{а) } I = \iint_{D_{\rho\varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \left(\int d\varphi \int f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho d\rho \right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho d\rho$$

$$x = 1 \Leftrightarrow \rho \cdot \cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\text{б) } I = \iint_{D_{\rho\varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi)$$

$$\text{Решение: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho d\rho$$

в) D_{xy} ограничена лемнискатой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

$$(\rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi)^2 = a^2 (\rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi))$$

$$\rho^4 = a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$\rho^2 = a^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$\rho^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$$

$$\rho = a \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$\cos 2\varphi \geq 0$$

$$2\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right] \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$$

$$I = \iint_{D_{\rho\varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho d\rho$$

Пример: Вычислить

$$I = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy$$

где D_{xy} , ограничена кривой

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 1^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

Перейдем в полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) = \rho^2$$

Уравнение границы области D_{xy}

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2a\rho \cos \varphi$$

$$\rho^2 = 2a\rho \cos \varphi$$

$$\rho = 2a \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D_{\rho\varphi}} f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \left(\int_{-a}^a f_{\text{четн}}(x) dx = 2 \int_0^a f_{\text{четн}}(x) dx \right) = \\
&8a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \left(\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) = 8a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \\
&2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = 2a^4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot a^4 \pi
\end{aligned}$$

Пример: Вычислить

$$I = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy,$$

где область D_{xy} ограничена эллипсом с полуосями $2a$ и $2b$ (\parallel -ны Ox и Oy соответственно) и центром в точке 0 .

Решение:

Перейдем в полярную систему координат.

$$f(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) = \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = \rho^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)$$

В декартовой системе координат

$$\begin{aligned}
y &= \pm 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}} \\
I &= \int_{-2a}^{2a} dx \int_{-2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}}}^{2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dy = 4 \int_0^{2a} \left[\frac{x^2}{a^2} \cdot 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{8b^3}{3b^2} \left(1 - \frac{x^2}{4a^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}} dx - \text{все сложно}
\end{aligned}$$

Перейдем в обобщенную полярную систему координат

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$J_{\text{обоб. пол. с.к.}} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = ab\rho$$

$$f(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi) = \rho^2$$

$$\text{Уравнение границы области } D_{xy}: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$$

Перейдем в обобщенную полярную систему координат

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{4} + \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{4} = 1$$

$$\rho^2 = 4$$

$$\rho = 2$$

$$I = \iint_{D_{\text{обю пол. с.к.}}} f(a \cdot \rho \cdot \cos \varphi, b \cdot \rho \cdot \sin \varphi) ab\rho \, d\rho \, d\varphi = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \cdot \rho^2 \, d\rho = ab \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^2}{4} \right|_0^2 d\varphi = 4ab \int_0^{2\pi} d\varphi = 8ab\pi$$

4. Приложения двойного интеграла.

I. Вычисление площади плоской фигуры.

Пусть фигура занимает область D на плоскости Oxy .

Тогда

$$S(D) = \iint_D dx dy$$

II. Вычисление массы пластины.

Пусть

1) пластина занимает область D на плоскости Oxy .

2) $f(x, y)$ - значение плотности (поверхностного) материала пластины в точке (x, y)

Тогда масса пластины:

$$m = \iint_D f(x, y) dx dy$$

III. Вычисление объема тела.

Пусть

1) Тело задано в виде

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

Тогда

$$V(T) = \iint_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$x = y$$

$$y = 0$$

Решение: $S = \iint_D dx dy$

Перейдем в полярную систему координат

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{xy}} dx dy = \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2 \cdot \cos \varphi}^{4 \cdot \cos \varphi} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{2 \cdot \cos \varphi}^{4 \cdot \cos \varphi} d\varphi = 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \varphi d\varphi = 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d2\varphi = 3 \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \right] = 3 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Пример: Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 2x^2 + y^2 + 1$$

$$x + y = 1$$

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

Метод сечений:

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = a$$

$$x^2 + y^2 = a$$

$$a < 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$a = 0 \Rightarrow 0(0, 0)$$

$$a > 0 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy = \iint_{D_{xy}} [2x^2 + y^2 + 1 - 0] dx dy = \iint_{D_{xy}} [2x^2 + y^2 + 1] dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [2x^2 + y^2 + 1] dy = \\ &= \int_0^1 \left[2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right] \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[2x^2 - 2x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} + 1 - x \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 [6x^2 - 6x^3 + (1-x)^3 + 3 - 3x] dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 [6x^2 - 6x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 3 - 3x] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 [-7x^3 + 9x^2 - 6x + 4] dx = \frac{1}{3} \left[-\frac{7}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 4x \right] \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} \left[-\frac{7}{4} + \frac{9}{3} - 3 + 4 \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{-21 + 36}{12} + 1 \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{15}{12} + 1 \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = \frac{y^2}{a}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$z = 0$$

$$V = \iint_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{y^2}{a} dx dy$$

Перейдем в полярную систему координат $\frac{1}{a} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \cdot \rho \cdot \sin^2 \varphi d\varphi d\rho = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3 \cdot \sin^2 \varphi d\rho = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r$

$$\sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} r^4 \cdot (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{8a} r^4 \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi r^4}{4a}$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$2az = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

$$x^2 + y^2 = 3a^2 - z^2$$

$$2az = 3a^2 - z^2$$

$$z^2 + 2az - 3a^2 = 0$$

$$V = \iint_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

$$z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$$

$$z_2(x, y) = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$$

$$z_1(x, y) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2a}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases} \Rightarrow z^2 = 3a^2 - 2az$$

$$z^2 + 2az - 3a^2 = 0$$

$$(z + 2a)^2 = 4a^2$$

$$z_1 = -3a \quad z_2 = a$$

$$x^2 + y^2 + a^2 = 3a^2$$

$$x^2 + y^2 = 2a^2$$

$$r = a\sqrt{2}$$

Перейдем в полярную систему координат

$$\begin{aligned} &= \iint_{D_{\rho\varphi}} \left[\sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{2a} \right] \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left[\sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{2a} \right] \rho d\rho = 2\pi \left[\int_0^{a\sqrt{2}} \rho \sqrt{3a^2 - \rho^2} d\rho - \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{2a} d\rho \right] = \\ &2\pi \left[-\frac{1}{2} \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{3a^2 - \rho^2} d(3a^2 - \rho^2) - \frac{\rho^4}{8a} \Big|_0^{a\sqrt{2}} \right] = 2\pi \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (3a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a\sqrt{2}} - \frac{a^3}{4} \right] = 2\pi \left[-\frac{1}{3} (a^3 - 3\sqrt{3}a^3) - \frac{a^3}{4} \right] = \\ &2\pi a^3 \left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 2\pi a^3 \left[\sqrt{3} - \frac{5}{6} \right] \end{aligned}$$

Тройной интеграл.

1. Вычисление тройного интеграла.

Определение: Область G называется z-правильной, если любая прямая ||-ая Oz пересекает границу G не более двух раз, либо содержит границу целиком.

z-правильную область можно задать в виде:

$$G \{ (x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \}$$

При выполнении некоторых условий для такой области G

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Пример: Расставить пределы в

$$I = \iiint_G f dx dy dz,$$

если G ограничена на следующими поверхностями

$$x + y + z = 1$$

$$x = 0, y = 0$$

$$z = 0$$

$$I = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{1-x-y} f dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$

Пример:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

$$(c > 0, z \geq 0)$$

$$z = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

$$I = \iiint_G f dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}^{z_2=c} f dz = \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}^c f dz$$

Пример: Вычислить

$$I = \iiint_G z dx dy dz$$

где G - область, ограниченная

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{и } z = 0 \ (z \geq 0) \quad I = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1=0}^{z_2=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \iint_{D_{xy}} dx dy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \iint_{D_{xy}} \left[\frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right] dx dy =$$

$$\frac{c^2}{2} \iint_{D_{xy}} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right] dx dy \quad (\text{Перейдем в полярную систему координат}) =$$

$$\frac{c^2}{2} \iint_{D_{xy}} [1 - \rho^2] ab \rho d\rho d\varphi = \frac{abc^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [\rho - \rho^3] d\rho = \frac{abc^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right] \Big|_0^1 = \frac{abc^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot abc^2 \pi$$

2. Замена переменных в тройном интеграле.

Пусть

$$1) \Phi: G_{uvw} \rightarrow G_{xyz}$$

$$2) G_{xyz} = \Phi(G_{uvw})$$

3) Φ биективна, ...

Тогда

$$\iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J_{\Phi}(u, v, w)| \cdot du dv dw$$

Замечание:

1) Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \\ z = z \\ J_{\text{цил.}} = \rho \end{cases}$$

2) Сферическая система координат

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \sin \theta \\ J_{\text{сфер.}} = r^2 \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Пример: Вычислить

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a \underbrace{z \sqrt{x^2+y^2}}_{f(x,y,z)} dz$$

Решение: $G : \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 0 \leq z \leq a\}$

$$y = \sqrt{2x-x^2}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

Перейдем в полярную систему координат. $f(x, y, z) = z\rho$

$$I = \iiint_G z\rho \, d\rho d\varphi dz = \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \, d\rho d\varphi \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} z \, dz = \frac{a^2}{2} \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \, d\rho d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{8a^2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi =$$

$$\frac{4a^3}{3} \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{4a^2}{3} \left(a - \frac{1}{3}\right) = \frac{8a^2}{9}$$

$$\int \cos^3 \varphi \, d\varphi = \int \cos^2 \varphi \, d\sin \varphi = \int (1 - \sin^2 \varphi) \, d\sin \varphi$$

Пример: Вычислить

$$I = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz$$

$$G : \{(x, y, z) : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$$

Перейдем в сферическую систему координат.

$$f(x, y, z) = r^2 \cdot \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \cos^2 \theta$$

$$I = \iiint_{G_{r\varphi\theta}} r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot r^2 \cdot \cos \theta \, dr d\varphi d\theta = \iiint_{G_{r\varphi\theta}} r^4 \cos^3 \theta \, dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^4 \cos^3 \theta \, dr = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \theta \, d\theta) \frac{r^5}{5} \Big|_0^R =$$

$$\frac{2R^5\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \, d\sin \theta = \frac{4\pi R^5}{15}$$

3. Вычисление объемов тела с использованием тройных интегралов.

Пусть тело занимает область G в пространстве $Oxyz$. Тогда объем этого тела

$$V(G) = \iiint_G dx dy dz$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

(внешнего по отношению конуса)

Решение:

$$y^2 = z^2$$

$$y^2 - z^2 = 0$$

$$(y - z)(y + z) = 0$$

$$y = z)$$

$$(y = -z)$$

$$V = 2V(G_1) = 2 \iiint_{G_{xyz}} dx dy dz \text{ Перейдем к сферической системе координат } \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad 2 \iiint_{G_{r\rho\varphi}} r^2 \cos \theta \, dr d\varphi d\theta =$$

$$2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^a r^2 \cos \theta \, dt = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \right) d\theta = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = \frac{2}{3} \pi a^3 \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} -$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{6} \pi a^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a^3$$

Пример: Вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2 \frac{x}{a}$$

Решение:

$$V = \iiint_{G_{xyz}} dx dy dz$$

Перейдем в обобщенную цилиндрическую систему координат

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho \cdot b \cdot \cos \varphi \\ z = \rho \cdot c \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$|J| = \rho bc$$

$$V = bc \iint_{\rho\varphi} \rho d\rho d\varphi = bc \iint_{D_{\rho\varphi}} \left(a - \frac{a\rho^2}{2} \right) \rho d\rho d\varphi = abc \iint_{D_{\rho\varphi}} \left(1 - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho d\varphi = \frac{abc}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) d\rho = \frac{1bc}{2} 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right] \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$abc\pi(2 - 1) = \pi abc$$

Теория вероятностей.

Определение вероятностей.

1. Классическое определение вероятностей.

Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

2) $|\Omega| = N < \infty$

3) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход.

Определение: Вероятностью осуществления события А называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Пример: Бросают 2 игральные кости.

A = {на обеих костях выпало одинаковое число очков}.

B = {сумма выпавших очков четная}.

C = {произведение выпавших очков = 6}.

$P(A), P(B), P(C)$ - ?

Решение:

- 1) Исход: (x_1, x_2) , где x_i - количество очков выпавшей на i -ой кости.
 (x_1, x_2) - размещение с повторениями из 6 по 2.
 $N = 36$

2) $A = \{(1, 1), \dots, (6, 6)\}$
 $N_A = 6$
$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3) $B = \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 1) & (1, 3) & (1, 5) \\ (2, 2) & (2, 4) & (2, 6) \\ \dots & & \\ (6, 2) & (6, 4) & (6, 6) \end{array} \right\} N_B = |B| = 18$
$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

4) $C = \{x_1 x_2 = 6\} = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$
 $N_C = |C| = 4$
$$P(C) = \frac{N_C}{N} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Пример: Из колоды домино наудачу извлекают одну кость.

$A = \{\text{это дубль}\}$

$B = \{\text{на кости ровно одна пустышка}\}$

$P(A)? P(B) = ?$

1) $0 \leq m \leq n \leq 6$
Исход: (x_1, x_2) , где $x_1 \leq x_2, x_i \in \{0, \dots, 6\}$
 $N = 28$

2) $A = \{(0, 0), (1, 1), \dots, (6, 6)\}$
 $N_A = 7$
$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

3) $B = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, 6)\}$
 $N_B = |B| = 6$
$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

2. Некоторые комбинаторные конфигурации.

При решении задач на классическое определение вероятности приходится подсчитывать число элементов в различных комбинаторных конфигурациях. При этом используется ряд стандартных приемов.

I. Сочетания без повторений.

Пусть

1) A - множество

2) $|A| = n$

Без ограничения общности можно считать, что
 $A = \{1, 2, \dots, n\}$

Определение: Сочетанием без повторений из n по m называется любое m -элементное подмножество множества A , то есть набор
 $\{x_1, \dots, x_m\}$

Замечание:

1) в определении подразумевается, что

- а) все входящие в сочетание элементы попарно различны.
- б) сочетание не изменится, если входящие в него элементы записать в другой последовательности
например
 $\{1, 3, 10\} = \{3, 10, 1\}$

Th: Всего $\exists C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (биномиальные коэффициенты) различных сочетаний без повторений из n по m .

II. Размещение с повторениями.

$A = \{1, 2, \dots, n\}$

Определение: Размещение с повторениями называется кортеж (упорядоченный набор):

(x_1, x_2, \dots, x_m) ,
где $x_i \in A, i = \overline{1, m}$

Замечание: Размещения различаются не только составом элементов но и последовательностью, в которой они записаны. Например
 $(1, 1, 3) \neq (1, 3, 1)$

Th Всего $\exists \tilde{A}_n^m = n^m$ различных размещений с повторениями из n по m .

III. Размещение без повторений.

Определение: Размещением без повторений из n по m называется кортеж

(x_1, x_2, \dots, x_m) ,
где $x_i \in A, i = \overline{1, m}, x_i \neq x_j$ при $i \neq j$

Th Всего $\exists A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ различных размещений без повторения из n по m .

IV. Перестановка.

Определение: Перестановка длины n называется размещение без повторений из n по n , то есть кортеж

(x_1, x_2, \dots, x_n) ,
где $x_i \in A, i = \overline{1, n}, x_i \neq x_j$ при $i \neq j$

Th: Число перестановок длины n равно $P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$

V. Схема упорядоченных разбиений.

Пусть

- 1) имеется n попарно различных шаров
- 2) имеется m попарно различных урн.
- 3) За j -ой урной закреплено число $n_j \in \mathbb{N}_0$, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$

Вопрос: Сколькими способами можно разложить n шаров по m урнам, так, чтобы в j -ой урне лежало n_j шаров?

Пример:

Th Общее число способов размещений n шаров по m урнам с учетом сделанных выше ограничений составит

$$C(n_1, \dots, n_m) = \frac{n!}{n! \cdot \dots \cdot n_m!}$$

Пример: В партии из 10 однотипных изделий 3 изделия являются бракованными. Из партии случайным образом выбираются 3 изделия.

$A = \{\text{в выборке ровно 1 брак}\}$

$B = \{\text{в выборке ровно 2 брака}\}$

$C = \{\text{в выборке 3 ровно 3 брака}\}$

$P(A), P(B), P(C) = ?$

Решение:

1) 10 шаров Исход: $\{x_1, x_2, x_3\}$, где x_i - номер извлеченного шара.

Сочетание без повторения из 10 по 3

$$N = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120$$

2) $P(A) = ?$

$$\underbrace{\{x_1\}}_{\text{брак}}, \underbrace{\{x_2, x_3\}}_{\text{не брак}}$$

$$N_A = 3 \cdot 21 = 63$$

$$P(A) = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

3) $P(B) = ?$

$$\underbrace{\{x_1\}}_{\text{не брак}}, \underbrace{\{x_2, x_3\}}_{\text{брак}}$$

$$N_B = 3 \cdot 7 = 21$$

$$P(B) = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

4) $P(C) = ?$

$$\underbrace{\{x_1, x_2, x_3\}}_{\text{брак}}$$

$$N_C = 1$$

$$P(C) = \frac{1}{120}$$

Пример: 10 вариантов контрольной работы написаны на 10-ти отдельных картах. Варианты раздаются 8-ми сидящим рядом студентам (по 1-ому варианту в руки).

$A = \{\text{варианты 1 и 2 не будут использоваться}\}$

$B = \{\text{варианты 1 и 2 достанутся сидящим рядом студентам}\}$

$C = \{\text{варианты будут распределены последовательно номера вариантов в порядке возрастания}\}$

$P(A), P(B), P(C) = ?$

Решение:

1) Исход: (x_1, \dots, x_8) ,

где x_i - номер билета, который достался i -ому студенту.

Размещение без повторений из 10 по 8

$$N = \frac{10!}{2!}$$

2) $P(A) = ?$

$$(x_1, \dots, x_8), x_i \in \{3, 4, \dots, 10\}$$

$$N_A = A_8^8 = 8!$$

$$P(A) = \frac{2 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{45}$$

3) $P(B) = ?$

$$N_B = 2 \cdot A_8^6 \cdot 7 = 14 \cdot A_8^6$$

$$P(B) = \frac{14 \cdot 8! \cdot 2}{2! \cdot 10!} = \frac{14}{9 \cdot 10} = \frac{7}{45}$$

4) $P(C) = ?$
 $(1, 2, \dots, 8)$
 $(2, 3, \dots, 9)$
 $(3, 4, \dots, 10)$
 $N_C = 3$
 $P(C) = \frac{3 \cdot 2}{10!}$

Пример: Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный телефонный номер. Считают, что в номере 7 цифр и все номера равно возможные. Найти вероятности следующих событий:

A = {4 последние цифры одинаковы}

B = {все цифры попарно различны}

C = {1-я цифра нечетная}

Решение:

1) Исход: (x_1, x_2, \dots, x_7) ,
где $x_i \in \{0, \dots, 9\}$ - i-ая цифра номера.
Размещение с повторениями из 10 по 7.
 $N = A_1^7 0 = 10^7$

2) $P(A) = ?$
 $\underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{10^3}, \underbrace{(x_4, x_4, x_4, x_4)}_{10}$
 $N_A = 10^4$
 $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{10^4}{10^7} = \frac{1}{10^3}$

3) $P(B) = ?$
 $(x_1, \dots, x_7), x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j$
 $N_B = A_1^7 0 = \frac{10!}{3!}$
 $P(B) = \frac{10!}{3! \cdot 10^7} = \frac{10!}{3! \cdot 10^7}$

4) $P(C) = ?$
 $A_1^6 0 = 10^6$
 $x_1 \in \{1, 3, 5, 6, 9\}$
 $N_C = 5 \cdot 10^6$
 $P(C) = \frac{5 \cdot 10^6}{10^7} = \frac{1}{2}$

Пример: На почту поступило 6 телеграмм. Их случайным образом распределяют по 4-ем каналам для обработки.

A = {на 1-ом канале окажется 3 телеграммы, на 2-ом - 2 телеграммы, на 3-ем - 1 телеграмма, на 4-ом - 0 телеграмм}.

$P(A) = ?$

Решение:

1) Исход: (x_1, x_2, \dots, x_6) - Размещение с повторениями, где x_i - номер канала, на который попала i-ая телеграмма.
 $A_6^4 = 4^6$

$$2) N_A = C(3, 2, 1, 0) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60$$

$$P(A) = \frac{60}{4^6}$$

Пример: Партия из 50-ти изделий 4 бракованных. Из партии выбирают 10 изделий случайным образом.
 $A = \{\text{среди выбранных изделий хотя бы одно бракованное}\}.$

$P(A) = ?$

Решение:

- 1) Исход: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{10}\}$ - сочетание без повторений из 50 по 10.

x_i - номер извлеченного изделия.

$$N = C^{10}_{50} = \frac{50!}{10! \cdot 40!}$$

- 2) $P(A) = ?$

I способ.

$$A = \underbrace{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}_{\text{несовместны}}$$

A_i - среди выбранных изделий ровно i бракованных, $i = \overline{1, 4}$.

$P(A_i) = ?$

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A_i) = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{C_4^i \cdot C_{46}^{10-i}}{C^{10}_{50}} \right)$$

II способ. $\overline{A} = \{\text{в выборке нет ни одного бракованного изделия}\}.$

$$N_{\overline{A}} = C^{10}_{46}$$

$$\{x_1, \dots, x_{10}\}$$

$$P_A(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C^{10}_{46}}{C^{10}_{50}}$$

Пример: В шкафу находится 10 пар ботинок (все попарно различны). Из шкафа случайным образом вынимают 4 ботинка.

$A = \{\text{из вынутых из шкафа ботинок нельзя составить пару}\}.$

$P(A) = ?$

Решение:

- 1) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ (сочетание без повторения из 10 по 4), где x_i - номер ботинка.

$$N = C^4_{20}$$

- 2) $P(A) = ?$

I способ.

$$N_A = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{4!}$$

II способ.

$$N_A = C^4_{10} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \cdot C^4_{10}$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

III способ.

$$(a_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$N = A^4_{20}$$

$$N_A = 20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14$$

Пример: 6 пассажиров поднимаются в лифте 7-ми этажного дома. Считая, что движения начинается из подвала, найти вероятности событий:

$A = \{\text{на первых трех этажах не выйдет никто}\}.$

$B = \{\text{все выйдут на первых 6-ти этажах}\}.$

$C = \{\text{все выйдут на 1-ом этаже}\}.$

$D = \{\text{на 5-ом, 6-ом, 7-ом этажах выйдут по два человека}\}.$

Решение:

- 1) (x_1, x_2, \dots, x_6) - размещение с повторениями из 7 по 6.
 x_i - этаж, на котором вышел i -й человек.
 $N = 7^6$

- 2) $P(A) = ?$
 (x_1, x_2, \dots, x_6)
 $x_i \in \{4, 5, 6, 7\}$
 $N_A = 4^6$
$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{4^6}{7^6} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$$

- 3) $P(B) = ?$
 (x_1, x_2, \dots, x_6)
 $x_i \in \{1, 2, \dots, 6\}$
 $N_B = 6^6$
$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \left(\frac{6}{7}\right)^6$$

- 4) $P(C) = ?$
 $(x_1, x_2, \dots, x_6), x_i \in 1$
 $C = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$
 $N_C = 1$
$$P(C) = \frac{1}{7^6}$$

- 5) $P(D) = ?$
Каждый кортеж из события D однозначно определяется номерами двух позиций в которых стоят две "5" и номерами в которых стоят две "6".
Схема упорядоченных разбиений.

$$N_D = C_6(2, 2, 2) = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

$$P(D) = \frac{N_D}{N}$$

Замечание: N_D можно подсчитать так:

$$N_D = C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 1 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{4!}{2! \cdot 2} = C_6(2, 2, 2)$$

3. Геометрическое определение вероятности.

Пусть

- 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- 2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ - мера множества.
- 3) "степень возможности" осуществления события $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества A и не зависит от формы события A и его расположения внутри Ω .

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Пример: В отрезке $[0; 1]$ случайным образом выбирают 2 точки.

$$A = \{\text{произведение из координат} < \frac{1}{2}\}.$$

$P(A) = ?$

Решение:

- 1) Исход: (x_1, x_2) где x_i - координата i -ой точки.
 $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$

2) $A = \{x_1 \cdot x_2 < \frac{1}{2}\}$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

$$\mu(\Omega) = 1$$

$$\mu(A) = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{2x_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln x_1 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln 2$$

Условная вероятность.

1. Условная вероятность.

Пусть

- 1) (Ω, β, P) - вероятностное пространство

- 2) $A, B \in \beta$

- 3) $P(B) > 0$

Определение: Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение: События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Th

Пусть

- 1) $P(B) > 0$

Тогда A, B - независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Пример: 3 раза бросают игральную кость.

$A = \{\text{результаты трех бросков попарно различны}\}.$

$B = \{\text{выпало хотя бы один раз "6"}\}.$

$P(A), P(B), P(A|B) = ?$

Указать, зависимы ли A и B .

Решение:

- 1) Исход: (x_1, x_2, x_3) (размещение с повторениями из 6 по 3), где x_i - количество очков, при i -ом броске.
 $N = 6^3$

- 2) $P(A) = ?$

$$N_A = 6 \cdot 5 \cdot 4 = A_6^3$$

$$P(A) = \frac{120}{6^3}$$

- 3) $P(B) = ?$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B})$$

$$\overline{B} = \{\text{"6" не выпало ни разу}\}$$

$$N_{\overline{B}} = 5^3$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$4) P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$AB = \{\text{все } x_i \text{ попарно различны и один из них = "6"}\}. N_{AB} = 20 \cdot 3 = 60$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{60}{6^3}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{60}{6^3 - 5^3} = \frac{60}{(6-5)(6^2 + 50 + 25)} = \frac{60}{91}$$

$$5) P(A) \neq P(A|B) \Rightarrow A, B - \text{зависимы.}$$

Пример: Из полной колоды в 52 карты случайным образом извлекают 1 карту.

A = {извлечен туз}

B = {извлечена карта черной масти}

C = {извлечена картинка}

1) Установить, является ли A, B, C независимыми попарно и независимы в совокупности.

2) P(ABC) = ?

Решение:

$$1) P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

$$2) P(AB) = (AB = \{\text{туз черной масти}\}) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

$$P(AC) = (AC = A) = P(A) = \frac{1}{13}$$

$$P(BC) = (BC = \{\text{картинка черной масти}\}) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

3) Определение: События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

$$P(AB) = \frac{1}{26}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{26}$$

$\Rightarrow A, B$ - независимы.

$$P(AC) = \frac{1}{13}$$

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{169}$$

$\Rightarrow A, C$ - зависимы.

$$P(BC) = \frac{2}{13}$$

$$P(C) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{13} = \frac{2}{13}$$

$\Rightarrow B, C$ - независимы.

A, B, C не являются независимыми попарно (так как A и C зависимы). A, B, C не являются независимы в совокупности, так как они не являются попарно независимыми.

Пример: В аудитории находится 100 студентов из которых
английский знают: 50 человек
французский знают: 40 человек
немецкий знают: 35 человек

английский и французский: 20 человек
английский и немецкий: 8 человек
французский и немецкий: 5 человек

английский, французский и немецкий: 5 человек

Случайно выбранного студента вызывают к доске.

$A = \{\text{он знает английский}\}$

$B = \{\text{он знает французский}\}$

$C = \{\text{он знает немецкий}\}$

1) Установить, являются ли A, B, C попарно независимыми и независимыми в совокупности.

2) $P(AB|C) = ?$

Решение:

$$\begin{aligned} 1) \quad P(A) &= \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \\ P(B) &= \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \\ P(C) &= \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad P(AB) &= \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \\ P(AC) &= \frac{8}{100} = \frac{2}{25} \\ P(BC) &= \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad P(AB) &= \frac{1}{5} \\ P(A) \cdot P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow A, B &- \text{независимы} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(AC) &= \frac{2}{25} \\ P(A) \cdot P(C) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{20} = \frac{7}{40} \\ \Rightarrow A, C &- \text{зависимы} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(BC) &= \frac{1}{10} \\ P(B) \cdot P(C) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{20} = \frac{7}{50} \\ \Rightarrow B, C &- \text{зависимы} \end{aligned}$$

A, B, C - не являются попарно независимы $\Rightarrow A, B, C$ не являются независимы в совокупности.

$$4) \quad P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{7}{20}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{20}{7} = \frac{1}{7}$$

2. Теорема сложения и умножения.

Th 1 Сложения.

$$1) P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

$$2) P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n)$$

Th 2 Умножения.

$$1) \text{ Если } P(A_1) > 0, \text{ то } P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$$

$$2) \text{ Если } P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0, \text{ то}$$

$$P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$$

Пример: Оператор ЗРК видит на экране 10 целей, среди которых 8 самолетов и 2 помехи (на экране они неразличимы). Оператор последовательно атакует 4 раза.

A = {большая часть атакованных целей - самолеты}

B = {все помехи были атакованы}

C = {помеха была атакована но не ранее, чем 3-им выстрелом}

D = {самолеты и помехи атакованы вперемежку}

Решение:

$$1) \text{ Исход: } (x_1 x_2 x_3 x_4) \text{ (размещение без повторений из 10 по 4), где } x_i \text{ - номер цели, атакованный } i\text{-ым выстрелом.}$$

$$N = A_1^4 0 = \frac{10!}{6!}$$

$$2) A_1 = \{\text{атаковано ровно 3 самолета}\}$$

$$A_2 = \{\text{атаковано ровно 4 самолета}\} \quad P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1 A_2)}_0 = P(A_1) + P(A_2)$$

$$A_2 = \{(c, c, c, c)\}$$

$$N_{A_2} = A_8^4 = \frac{8!}{4!}$$

$$P(A_2) = \frac{N_{A_2}}{N} = \frac{\frac{8!}{4!}}{\frac{10!}{6!}} = \frac{8!}{10!} \cdot \frac{6!}{4!}$$

$$P(A_1) = ?$$

$$8 \cdot A_8^3 = N_{A_1}$$

$$P(A_1) = \frac{8 A_8^3}{A_1^4 0}$$

$$3) P(B) = ?$$

$$(p, p, c, c)$$

$$C_4^2 \text{ - число способов выбрать две позиции для помех.}$$

$$2! \text{ - число способов расставить 2 помехи по выбранным позициям.}$$

$$A_8^2 \text{ - число способов расставить самолеты.}$$

$$N_B = C_4^2 \cdot 2 \cdot A_8^2$$

$$P(B) = \frac{N_B}{N}$$

$$4) C = C_1 + C_2, \text{ где}$$

$$C_1 = \{\text{помехи впервые атакованы 3-м выстрелом}\}$$

$$C_2 = \{\text{помехи впервые атакованы 4-м выстрелом}\}$$

$$P(C) = P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) - \underbrace{P(C_1 C_2)}_0$$

$$P(C_1) = ?$$

I способ.

(с, с, п, *)

II способ.

$$Q_i = \{\text{i-ым выстрелом атакован самолет}\} \quad i = \overline{1, 4}$$

$$\overline{Q}_i = \{\text{i-ым выстрелом атакована помеха}\}$$

$$C_1 = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \overline{Q}_3$$

$$P(C_1) = P(Q_1 Q_2 \overline{Q}_3) = \underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}} \cdot \underbrace{P(Q_2|Q_1)}_{\frac{7}{9}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q}_3|Q_1 Q_2)}_{\frac{2}{8}} = \frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 10} = \frac{7}{35}$$

$$C_2 = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot \overline{Q}_4$$

$$P(C_2) = \underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}} \cdot \underbrace{P(Q_2|Q_1)}_{\frac{7}{9}} \cdot \underbrace{P(Q_3|Q_1 Q_2)}_{\frac{6}{8}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q}_4|Q_3 Q_2 Q_1)}_{\frac{2}{7}} = \frac{2 \cdot 6}{10 \cdot 9} = \dots$$

$$5) P(D) = ?$$

$$D_2 = \{(с, п, с, п)\}$$

$$D_1 = \{(п, с, п, с)\}$$

$$D = D_1 + D_2$$

$$P(D) = P(D_1 + D_2) = P(D_1) + P(D_2) - \underbrace{P(D_1 D_2)}_0$$

$$D_1 = \overline{Q}_1 \cdot Q_2 \cdot \overline{Q}_3 \cdot Q_4$$

$$P(D_1) = \underbrace{P(\overline{Q}_1)}_{\frac{2}{10}} \cdot \underbrace{P(Q_2|\overline{Q}_1)}_{\frac{8}{9}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q}_3|\overline{Q}_1 Q_2)}_{\frac{1}{8}} \cdot \underbrace{P(Q_4|\overline{Q}_1 Q_2 \overline{Q}_3)}_{\frac{7}{7}} = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

$$D_2 = Q_1 \cdot \overline{Q}_2 \cdot Q_3 \cdot \overline{Q}_4$$

$$P(D_2) = \underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q}_2|Q_1)}_{\frac{2}{9}} \cdot \underbrace{P(Q_3|Q_1 \overline{Q}_2)}_{\frac{7}{8}} \cdot \underbrace{P(\overline{Q}_4|Q_1 \overline{Q}_2 Q_3)}_{\frac{1}{7}} = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

$$P(D) = P(D_1 + D_2)$$

Пример: По каналу связи, подверженному воздействию помех, передаются кодовые последовательности из 0 и 1. При этом вероятность того, что

$$1 \mapsto 1 \quad p_1$$

$$1 \mapsto 0 \quad 1 - p_1$$

$$0 \mapsto 0 \quad p_2$$

$$0 \mapsto 1 \quad 1 - p_2$$

В канал подают последовательность "10". Считая, что отдельные символы искажаются независимо, найти вероятности событий:

$$A = \{\text{принята последовательность 10}\}$$

$$B = \{\text{приняты 2 одинаковые символы}\}$$

Решение:

$$1) \text{ Исход: } (x_1, x_2), \text{ где } x_i \in 0, 1 - i\text{-ый принятый символ.}$$

$$2) A = \{(10)\}$$

$$A = A_1 \cdot A_2, \text{ где}$$

$$A_1 = \{1\text{-ый принятый символ } 1\}$$

$$A_2 = \{2\text{-ой принятый символ } 0\}$$

$$P(A) = (\text{th умножения}) = \underbrace{P(A_1)}_{p_1} \cdot \underbrace{P(A_2|A_1)}_{P(A_2)=p_2 \text{ т.к. отдельные символы искажаются независимо}}$$

$$3) B = B_1 + B_2$$

$$B_1 = \{(1, 1)\}$$

$$B_2 = \{(0, 0)\}$$

$$P(B_1) = P\{\{1 \mapsto 1\} \cdot \{0 \mapsto 1\}\} = (\text{искажения отдельных символов независимы}) = P\{1 \mapsto 1\} \cdot P\{0 \mapsto 1\} = p_1 \cdot (1 - p_2)$$

$$P(B_2) = P\{\{1 \mapsto 0\} \cdot \{0 \mapsto 0\}\} = P\{1 \mapsto 0\} \cdot P\{0 \mapsto 0\} = (1 - p_1) \cdot p_2$$

$$P(B) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) - \underbrace{P(B_1 B_2)}_0 = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$$

Пример: На карточках написаны буквы слова "дезоксирибонуклеиновая". Эти карточки тщательно перемешиваются и последовательно извлекают 5 карточек без возвращения.

Найти вероятность того, что в порядке появления они извлекают слово "кокос".

Решение:

$A = \{\text{карточки образуют слово "кокос"}\}$

Тогда

$A = A_1 \cdot \dots \cdot A_5$, где

$A_1 = \{\text{на 1-ой карточке "к"}\}$

$A_2 = \{\text{на 2-ой карточке "о"}\}$

$A_3 = \{\text{на 3-ей карточке "к"}\}$

$A_4 = \{\text{на 4-ой карточке "о"}\}$

$A_5 = \{\text{на 5-ой карточке "с"}\}$

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot P(A_4|A_1 A_2 A_3) \cdot P(A_5|A_1 A_2 A_3 A_4) = \\ \frac{2}{22} \cdot \frac{3}{21} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = \dots$$

Пример: Известно, что A, B - наблюдаемые в некотором случайном эксперименте события и

$$P(B) = 0.4 \quad P(A|B) = 0.3 \quad P(A|\bar{B}) = 0.2$$

$$P(A), \quad P(\bar{A}\bar{B}), \quad P(\bar{A} + \bar{B}), \quad P(A \triangle B) = ?$$

Решение:

$$1) \quad P(AB) = (\text{по th умножения}) = P(A) \cdot P(B|A) \\ \Rightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$$

$$2) \quad P(A) = P(A\Omega) + P(A(B + \bar{B})) = P(AB + A\bar{B}) = (\text{по th сложения}) = \underbrace{P(AB)}_{0.12} + P(A\bar{B}) - \underbrace{P(AB A\bar{B})}_0 = \\ 0.12 + \underbrace{P(B)}_{0.6} \cdot \underbrace{P(A|\bar{B})}_{0.2} = 0.12 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.12 + 0.12 = 0.24$$

$$3) \quad P(\bar{A}\bar{B}) = \underbrace{P(\bar{B})}_{0.6} \cdot \underbrace{P(\bar{A}|\bar{B})}_{=1-P(A|\bar{B})} = 0.6 \cdot (1 - 0.2) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$$

$$4) \quad P(\bar{A} + \bar{B}) = (\text{th сложения}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}) = 0.76 + 0.6 - 0.48 = 0.88$$

$$5) \quad P(A \triangle B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = P(A\bar{B} + B\bar{A}) = (\text{th сложения}) = P(A\overline{B}) + P(\bar{A}B) - \underbrace{P(\overline{A\bar{B}}B)}_0 = \\ \underbrace{P(\bar{B})}_{0.6} \cdot \underbrace{P(A|\bar{B})}_{0.2} + \underbrace{P(B)}_{0.4} \cdot \underbrace{P(\bar{A}|B)}_{\text{при фикс.}=1-P(A|B)} = 0.12 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.4$$

3. Формула полной вероятности.

Пусть (Ω, β, P) - вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Определение: Будем говорить, что события H_1, \dots, H_n образуют полную группу, если

$$1) \quad \sum_{i=1}^n H_i = \Omega$$

2) $H_i H_j = \emptyset$, при $i \neq j$

3) $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$

То формуле полной вероятности

Пусть

1) H_1, \dots, H_n - полная группа событий

2) A - событие

Тогда

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)$$

Пример: В баскетбольной команде 12 игроков, из которых

4 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.95

5 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.8

3 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.5

Найти вероятности событий:

$A = \{\text{случайно выбранный игрок выполнит успешный трех очковый бросок}\}$

$B = \{\text{случайно выбранный игрок выполнит трех очковый бросок в серии из 3-х попыток}\}$

Решение:

1) Рассмотрим

$H_1 = \{\text{случайно выбранный игрок из отличной группы}\}$

$H_2 = \{\text{случайно выбранный игрок из хорошей группы}\}$

$H_3 = \{\text{случайно выбранный игрок из группы новичков}\}$

Используем формулу полной вероятности:

$$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{0.95} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{4}{12}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{0.8} \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{5}{12}} + \underbrace{P(A|H_3)}_{0.5} \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{3}{12}} = \dots$$

$$2) P(B) = P(B|H_1) \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{4}{12}} + P(B|H_2) \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{5}{12}} + P(B|H_3) \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{3}{12}}$$

$P(B|H_1) = (\text{схема испытаний Бернулли: успех - выполнение броска; неудача - невыполнение}) =$
(формула для вычисления вероятности хотя бы одного успеха $= 1 - q^n$ $q = 1 - 0.95 = 0.05$) $=$
 $1 - (0.05)^3$

$$P(B|H_2) = 1 - (0.2)^3$$

$$P(B|H_3) = 1 - (0.5)^3$$

$$P(B) = [1 - (0.05)^3] \cdot \frac{4}{12} + [1 - (0.2)^3] \cdot \frac{5}{12} + [1 - (0.5)^3] \cdot \frac{3}{12} = \dots$$

Пример: 10 студентов пришли сдавать экзамен. Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров знает 15 билетов, остальные знают все билеты.

Вероятность сдать экзамен по известному билету составляет 0.85, по неизвестному - 0.1.

$A = \{\text{случайно выбранный студент группы сдал экзамен}\}$.

Решение:

$H_1 = \{\text{выбран Иванов или Петров}\}$.

$H_2 = \{\text{выбран Сидоров}\}$.

$H_3 = \{\text{выбран студент, который знает все билеты}\}$.

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{2}{10}} + P(A|H_2) \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{10}} + P(A|H_3) \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{7}{10}}$$

$P(A|H_1) = \{\text{рассмотрим еще одну группу событий}\}$

$B_1 = \{\text{получен известный билет}\}$

$B_2 = \{\text{получен неизвестный билет}\}$

Используя полную вероятность:

$$P(A|H_1) = 0.85 \cdot \underbrace{\frac{20}{30}}_{P(B_1)} + 0.1 \cdot \underbrace{\frac{10}{30}}_{P(B_2)} = \dots$$

Аналогично

$$P(A|H_2) = 0.85 \cdot \frac{15}{30} + 0.1 \cdot \frac{15}{30} = \dots$$

$$P(A|H_3) = 0.85 \cdot \frac{30}{30} + 0.1 \cdot \frac{0}{30} = \dots$$

4. Формула Байеса.

Th Пусть

1) H_1, \dots, H_n - полная группа событий.

2) A - событие; $P(A) > 0$

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\underbrace{P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)}_{=P(A) \text{ см. формулу полной вероятности}}} - \text{формула Байеса.}$$

Пример: В ящике лежит шар неизвестного цвета - с равной вероятностью белый или черный. В ящик кладут белый шар, шары тщательно перемешивают и вынимают 1 шар. Найти вероятность того, что в урне изначально был белый шар, если известно, что извлеченный шар оказался белым.

Решение:

1) Введем полную группу событий.

$H_1 = \{\text{в урне изначально был белый шар}\}$

$H_2 = \{\text{в урне изначально был черный шар}\}$

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

2) $A = \{\text{извлеченный шар - белый}\}$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_1 \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$3) P(H_1|A) = (\text{формула Байеса}) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Замечание: Вероятности $P(H_i)$, $i = \overline{1, n}$ называются априорными, так как известны до проведения эксперимента.

Вероятности $P(H_i|A)$, $i = \overline{1, n}$ называются апостериорными (известны после проведения эксперимента).

В рассмотренном примере

$$P(H_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_i|A) = \frac{2}{3}$$

Учет дополнительной информации об исходе эксперимента привел к тому, что

$$P(H_i|A) > P(H_i)$$

Пример: (см ранее)

В баскетбольной команде 12 игроков.

4 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.95

5 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.8

3 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.5

Случайно выбранный игрок выполнил трех очковый бросок. К какой части команды он вероятнее всего принадлежит?

Решение:

- 1) Полная группа события

$$H_1 = \{\text{выбран игрок из отличной группы}\}$$

$$H_2 = \{\text{выбран игрок из хорошей группы}\}$$

$$H_3 = \{\text{выбран игрок из посредственной группы}\}$$

$$A = \{\text{выбранный игрок выполнил 3-х очковый бросок}\}.$$

$$P(A) = \dots \text{ (см выше).}$$

- 2) Формула Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.95 \cdot 4}{12 \cdot P(A)} = \frac{3.8}{12 \cdot P(A)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot 5}{12 \cdot P(A)} = \frac{4}{12 \cdot P(A)} - \text{MAX}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 3}{12 \cdot P(A)} = \frac{1.5}{12 \cdot P(A)}$$

Ответ: Вероятнее всего этот игрок из хорошей группы.

5. Схема Бернулли.

Рассмотрим случайный эксперимент, в ходе которого возможна реализация одного из 2-х элементарных исходов, то есть

$$\Omega = \{\text{успех, неудача}\}.$$

Пусть

$$P\{\text{успех}\} = p \in (0; 1)$$

Тогда

$$P\{\text{неудача}\} = 1 - p = q - \text{обозначение.}$$

Замечание: Описанный выше случайный эксперимент будем называть испытанием.

Определение: Схемой Бернулли называется серия однотипных испытаний, в которой отдельные испытания независимы в совокупности. Замечание: Независимость отдельных испытаний означает, что в ходе всей серии вероятность реализации успеха (и, следовательно, вероятность неудачи) неизменна.

Th:

- 1) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ - вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний

- 2) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$ - вероятность того, что в серии из n испытаний число k успехов лежит между k_1 и k_2 .

- 3) $P_n(l \geq 1) = 1 - q^n$ - вероятность того, что в серии из n испытаний произошел хотя бы один успех.

Пример: 10 раз бросают правильную игральную кость.

$$A = \{\text{"6" появится ровно 2 раза}\}$$

$$B = \{\text{"6" появится от 2 до 4 раза}\}$$

$$C = \{\text{"6" не появится ни разу}\}$$

$$D = \{\text{"6" появится хотя бы 1 раз}\}$$

$$P(A) = ?, P(B) = ?, P(C) = ?, P(D) = ?$$

Решение:

- 1) Используем схему Бернулли для "успех" - выпадение "6" ; "неудача" - выпадение "1" , ... , "5"

$$p = \frac{1}{6}$$

$$q = \frac{5}{10}$$

$$2) P(A) = P_1^2 0 = C_1^2 0 p^2 q^8 = \frac{10!}{2 \cdot 8!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0.291$$

$$3) P(B) = \sum_{k=2}^4 C_n^k p^k q^{n-k} = P(A) + C_1^3 0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 + C_1^4 0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.291 + 0.155 + 0.054 \approx 0.5$$

$$4) P(C) = P_1 0(0) = C_1^0 0 \cdot p^0 \cdot q^1 0 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 0 \approx 0.162$$

$$5) P(D) = P_1 0(l \geq 1) = 1 - P(C) \approx 1 - 0.162 \approx 0.838$$

Пример: ЗРК атакует самолет противника, обстреливая его зенитными ракетами. Вероятность попадания в самолет каждой ракеты равна 0.6; для поражения требуется как минимум 3 попадания. Найти вероятность поражения цели после 6 выстрелов.

Решение:

$$1) \Omega = \{ \text{"успешное попадание"} , \text{"неудачное попадание"} \}$$

Серия событий - серия выстрелов.

Так как вероятность успеха неизменна по отдельные испытания независимы и используем схему Бернулли.

$$p = 0.6; q = 0.4; n = 6$$

$$2) A = \{ \text{цель поражена} \}$$

$$P(A) = P_6(3 \leq k \leq 6) = \sum_{k=3}^6 C_6^k p^k q^{n-k} = C_6^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^3 + C_6^4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^2 + C_6^5 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^1 + C_6^6 \cdot 0.6^6 \cdot 0.4^0 \approx 0.82$$

Пример: Вероятность того, что приобретенный лотерейный билет окажется выигрышным, равна 0.01. Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы вероятность выиграть хотя бы по одному из них была ≥ 0.95 ?

Решение:

$$1) \text{Используем схему Бернулли.}$$

"успех" - приобретенный билет выигрышный.

$$p = 0.01$$

$$2) \text{Пусть куплено } n \text{ билетов. Тогда вероятность выиграть хотя бы по одному}$$

$$P = P_n(k \geq 1) = 1 - (1 - p)^n \geq 0.95$$

$$1 - (1 - p)^n \geq 0.95$$

$$(1 - p)^n \leq 0.05$$

$$n \geq \log_{1-p} 0.05 = \frac{\ln 0.05}{\ln (1 - p)} = \frac{\ln 0.05}{\ln 0.99} \approx 298.07$$

Ответ: $n \geq 299$.

Замечание: Вообще схема Бернулли неприменима в это примере, так как отдельные испытания не являются независимыми (например, если в начале серии куплено несколько пустых билетов, то вероятность того, что очередной билет будет выигрышным, увеличивается).

Однако, если общий тираж велик, а количество приобретаемых билетов сравнительно невелико, то вероятность успеха изменится несущественно и схема Бернулли удовлетворяет описанному эксперименту.

Случайные величины.

Одномерные случайные величины.

1. Функция распределения случайной величины.

Определение: (нестрогое)

Пусть исход случайного эксперимента можно описать числом X .

Тогда X - случайная величина.

Пусть (Ω, β, P) - вероятностное пространство.

Определение: Случайной величиной называется отображение $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in \mathbb{R}$ множество $\{w \in \Omega : X(w) < x\} \in \beta$

Замечание:

- 1) На случайную величину можно смотреть как на случайный эксперимент, в котором на числовую прямую бросают точку.

При этом координата x_0 падения точки является реализация рассматриваемой случайной величиной.

- 2) При многократном повторении такого эксперимента в различные области на прямой с различной частотой.

Определение: Законом распределения случайной величины называют правило, которое разл. значениям (различными областям на прямой) ... вероятности, с которыми случайная величина принимает эл. значениям (попадает в эти области на прямой).

- 3) Универсальным способом задания закона распределения случайной величины является использование функции распределения.

Определение: Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное правилом $F(x) = P\{X < x\}$, $x \in \mathbb{R}$

Замечание:

Пример: В ящике находится 5 шаров: 2 белых и 3 черных. Из ящика случайным образом вынимают 2 шара (без возвращения). X - количество белых шаров среди извлеченных.

Найти функцию распределения случайной величины X .

Решение:

- 1) $X \in \{0, 1, 2\}$

$$P\{X = 0\} = \frac{3}{10}$$

$$\{X = 0\} = \{1\text{-ый шар черный}\} \cdot \{2\text{-ой шар черный}\}$$

$$P\{X = 0\} = P\{A_1 \cdot A_2\} = (\text{th умножения}) = \underbrace{P(A_1)}_{\frac{3}{5}} \underbrace{P(A_2|A_1)}_{\frac{2}{4}} = \frac{3}{10}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{1}{10}$$

$$P\{X = 1\} = P\{ \{1\text{-ый шар белый, 2-ой шар черный}\} + \{1\text{-ый шар черный, 2-ой шар белый}\} \} = (\text{th умножения}) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

$$P\{X = 1\} = \frac{6}{10}$$

- 2) $F(x) = P\{X < x\}$

$$F(x_1) = P\{X < x_1\} = 0$$

$$F(0) = P\{X < 0\} = 0$$

$$F(x_2) = P\{X < x_2\} = P\{X = 0\} = \frac{3}{10}$$

$$F(1) = P\{X < 1\} = \frac{3}{10}$$

$$F(x_3) = P\{X < x_3\} = P\left\{ \underbrace{\{X = 0\} + \{X = 1\}}_{\text{несовместны}} \right\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} = \frac{9}{10}$$

$$F(2) = \frac{9}{10}$$

$$F(x_4) = P\{X < x_4\} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{3}{10}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{9}{10}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & 2 < x \end{cases}$$

Замечание: Этот пример иллюстрирует свойства функции распределения.

Свойства функции распределения:

$$1^\circ \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

2^o F является неубывающей

$$3^\circ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

4^o В каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ непрерывна слева, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$

$$5^\circ \quad P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$$

2. Дискретные случайные величины.

Определение: Случайной величиной называют дискретной, если множество её возможных значений конечно или счетно.

Если случайная величина X принимает значения из конечного множества, закон её распределения можно задать с использованием таблицы, которая называется рядом распределения.

Здесь $x_i, i = \overline{1, n}$ - всевозможные значения случайной величины X.

$$p_i = P\{X = x_i\}, i = \overline{1, n}$$

Очевидно, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Пример: Бросают игральную кость. X - число выпавших очков.

1) Построить ряд распределения случайной величины X.

2) Найти функцию распределения случайной величины X.

3) $P\{2 \leq x < 5\} = ?$

Решение:

1)

$$2) \quad F(x) = P\{X < x\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{6}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{3}{6}, & 3 < x \leq 4 \\ \frac{4}{6}, & 4 < x \leq 5 \\ \frac{5}{6}, & 5 < x \leq 6 \\ 1, & 6 < x \end{cases}$$

$$3) \quad P\{2 \leq X < 5\} = (\text{Свойство функции распределения}) = F(5) - F(2) = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Непрерывные случайные величины.

Определение: Случайная величина X называется непрерывной, если \exists функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

где

- 1) F - функция распределения случайной величины X
- 2) предполагается, что несобственный интеграл в правой части сходится для всех $x \in \mathbb{R}$.
При этом f называют функцию плотности распределения вероятностей случайной величины X.

Замечание:

- 1)
- 2) Можно показать, что во всех точках непрерывности $f(x)$ справедливо $f(x) = F'(x)$
- 3) Таким образом
 $f(x) \Rightarrow F(x)$ (см. определение непрерывности случайной величины).
 $F(x) \Rightarrow f(x)$ (см. пункт 2 замечания)

Это означает, что функция плотности, как и функция распределения, содержит всю информацию о законе распределения случайной величины X.

Свойства непрерывности случайной величины

$$1^\circ f(x) \geq 0$$

$$2^\circ P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x) dx$$

$$3^\circ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \text{ (условие нормировки)}$$

$$4^\circ \text{ Если } X - \text{непрерывная случайная величина, то для любого наперед заданного } x_0 \quad P\{X = x_0\} = 0$$

Пример: Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$

- 1) Найти функцию плотности и построить её график

$$2) P\{X \in [1; 2, 5)\}, P\{X \in [2, 5; 3, 5]\}, P\left\{X > \frac{9}{4}\right\} - ?$$

Решение:

$$1) f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 2(x-2), & 2 < x \leq 3 \\ 0, & 3 < x \end{cases} = \begin{cases} 2(x-2), & 2 < x \leq 3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$2) P\{X \in [1; 2, 5)\} = P\{1 \leq X < 2, 5\} = (\text{свойство функции распределения}) = F(2, 5) - F(1) = (2, 5 - 2)^2 - 0 = \frac{1}{4}$$

$$P\{X \in [2, 5; 3, 5]\} = P\{2, 5 \leq X \leq 3, 5\} = P\left\{\underbrace{\{2, 5 \leq X < 3, 5\} + \{X = 3, 5\}}_{\text{несовместны}}\right\} = P\{2, 5 \leq X <$$

$$3, 5\} + \underbrace{P\{X = 3, 5\}}_{\substack{0, \text{ т.к. } X - \text{непрер. сл. вел.}}} = F(3, 5) - F(2, 5) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\left\{X > \frac{9}{4}\right\} = P\left\{\frac{9}{4} < X < +\infty\right\} = \underbrace{P\left\{X = \frac{9}{4}\right\}}_{=0} + P\left\{\frac{9}{4} < X < +\infty\right\} = (\text{th сложения}) = P\left\{\frac{9}{4} \leq X < +\infty\right\}$$

$$= (\text{свойство функции распределения}) = F(+\infty) - F\left(\frac{9}{4}\right) = 1 - \left(\frac{9}{4} - 2\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Замечание: Так как для непрерывной случайной величины $P\{X = x_0\} = 0$, то в дальнейшем для непрерывной случайной величины при вычислении вероятностей мы не будем различать события $\{X \in [a; b]\}$, $\{X \in (a; b)\}$, $\{X \in (a; b]\}$, $\{X \in (a, b)\}$.

Пример: Дана функция $f(x) = ce^{-4|x-3|}$, $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Подобрать $c = \text{const}$ так, чтобы f являлась функцией плотности некоторой случайной величины X .
- 2) Найти функцию распределения случайной величины X .
- 3) $P\{1 < X < 5\}$, $P\{X \leq 13\}$

Решение:

- 1) $f(x) \geq 0$, если $c \geq 0$

$$\text{При этом должно выполняться } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2c \int_3^{+\infty} e^{-4|x-3|}dx = \{x-3 \geq 0 \Rightarrow |x-3| = x-3\} =$$

$$2c \int_3^{+\infty} e^{-4(x-3)}dx = -\frac{2}{4} \cdot c \cdot e^{-4(x-3)} \Big|_3^{+\infty} = 0 - \frac{2}{4} \cdot c(0-1) = \frac{1}{2}c$$

$$1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2$$

$$2) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} func1, & x \leq 3 \\ func2, & x > 3 \end{cases} \quad \text{function 1) } = 2 \int_{-\infty}^x e^{4(t-3)}dt = 2 \cdot \frac{1}{4} e^{4(t-3)} \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{2} \cdot e^{4(x-3)}$$

$$\text{function 2) } = \frac{1}{2} \int_3^{+\infty} e^{-4(t-3)}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4(t-3)} \Big|_3^{+\infty} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^{-4(x-3)} - 1) = 1 - \frac{1}{2} e^{-4(x-3)}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{4(x-3)}, & x \leq 3 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-4(x-3)}, & 3 < x \end{cases}$$