Двойной интеграл.

1. Вычисление двойного интеграла.

Определение: Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{d(R)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, где $R\{D_1,...,D_n\}$ - разбиение области D, i
i, $i=\overline{1,n}$

Определение: Область D на плоскости Oxy называется y-правильной, если любая прямая $\|$-ая Oy, пересекает границу D не более чем в 2-х точках, либо содержит участок границы целиком.

y-правильная область D может быть задана в виде: $D=\{(x,y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$ $(*)$

Для y-правильной области D, заданной $(*)$, справедливо: $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$

Замечание:

1) в правой части этой формулы стоит так называемый повторный интеграл, под которым понимают число $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy =$

2)

Пример: Вычислить $I=\iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$ $a=1$
$b=2$
$\varphi_1(x)=2$
$\varphi_2(x)=\frac{4}{x}$

$I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_2^{4/x}(x+3y^2)dy = \int\limits_1^2\left[xy+y^3\right]\Bigg|_{y=2}^{y=4/x} dx = \int\limits_1^2\left(4+\frac{64}{x^3}-(2x+8)\right)dx =$
$\int\limits_1^2\left(-4+\frac{64}{x^3}-2x\right)dx = \boxed{\int\limits_a^b cdx = c(b-a)} = -4\left(-\frac{32}{x^2}+x^2\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \underbrace{-4-(8+4)}_{-16}+\underbrace{32+1}_{33} =$
17

Замечание: Совершенно аналогично вышеизложенному: Определение: Область D называется x-правильной, если любая прямая, $\|$-ая Ox, пересекает границу D не более чем в двух точках, либо содержит участок границы целиком.

x-правильная область D можно задать в виде: $D=\{(x,y):\ c\leqslant y\leqslant d,\ \psi(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}$ $(**)$

Для x-правильной области D, заданной $(**)$, справедливо: $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$

Пример: (см выше) $I=\iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$

$c=2$
$d=4$

$\psi_1(y) = 1$
$\psi_2(y) = \frac{4}{y}$

$$\iint\limits_D (x+3y^2)dxdy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^{4/y} (x+3y^2)dx = \int\limits_2^4 dy \left[\frac{x^2}{2} + 3y^2x\right]\Bigg|_{x=1}^{x=4/y} = \int\limits_2^4 \left[\frac{8}{y^2} - \frac{1}{2} + 12y - 3y^2\right] dy =$$

$\int\limits_2^4 \left[\frac{8}{y^2} + 12y - 3y^2 - \frac{1}{2}\right] dy = \left(-\frac{8}{y} + 6y^2 - y^3\right)\Bigg|_2^4 - 1 = (-2 + 6\cdot 16 - 4\cdot 16) -$
$(-4 + 24 - 8) - 1 = 30 - 12 - 1 = 17$

Пример: В двойном интеграле $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

а) Решение: $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^y f dy$ $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_x^1 f(x,y)dx$

б) $y = 2x^2$ $x^2 = \frac{y}{2}$ $x =$

$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)dx$ $I = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{2x^2}^2 f(x,y)dy$

в) $y =$ $I = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$ $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

2. Изменение порядка интегрирования.

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. $I = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

Замечание: До сих пор мы решали примеры вида: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

Решение: $D = \left\{(x,y): \ 0 \leqslant x \leqslant 3, \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{25-x^2}\right\}$

$$I = \underbrace{\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^3 f(x,y)dx}_{D_1} + \underbrace{\int\limits_4^5 dy \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} dx}_{D_2}$$