1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле и сделать поясняющий рисунок: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

<u>Решение:</u> $D : \left\{(x,y) : \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}\right\}$

$y = -\sqrt{4-x^2}$
$y^2 = 4 - x^2$
$x^2 + y^2 = 4$

$y = \sqrt{2x-x^2}$
$y^2 = 2x - x^2$
$x^2 - 2x - 1 + y^2 = 1$
$(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$I = \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{4-y^2} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dy$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 = 4y$
$y + z = 4$
$y + 2z = 4$

$z_1 = \frac{4-y}{2}$
$z_2 = 4 - y$

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \left[z_2(x,y) - z_1(x,y)\right] dxdy = \int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{4} \left[4 - y - \tfrac{4-y}{2}\right] dy = \frac{1}{2} \int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{4} \left[8 - 2y - 4 - y\right] dy =$$
$$\frac{1}{2} \int\limits_{-4}^{4} \left[\frac{x^4}{32} - x^2 + 8\right] dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{160} - \frac{x^3}{3} + 8x\right]\Bigg|_{-4}^{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{2048}{160} - \frac{128}{3} + 664\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{5} - \frac{128}{3} + 64\right) =$$
$$\frac{256}{15}$$

Ответ: $V = \frac{256}{15}$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2 = 1$ $x^2+y^2 = 4$ $z = 0$ $x + y + z = 4$

$z_1 = 0$ $z_2 = 4 - x - y$

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \left[z_2(x,y) - z_1(x,y)\right] dxdy = ((\text{Перейдем в полярную С.К.})) = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \left[z_2(\rho,\varphi) - z_1(\rho,\varphi)\right] \rho\, d\rho d\varphi =$$
$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{2} 4\rho\, d\rho - \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{2} \rho^2 \cos\varphi d\rho - \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{2} \rho^2 \sin\varphi d\varphi = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{1}^{2} - \frac{7}{3} \int\limits_{0}^{2\pi} \cos\varphi d\varphi -$$
$$\frac{7}{3} \int\limits_{0}^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 12\pi - \frac{7}{3} \cdot \sin\varphi\Bigg|_{0}^{2\pi} + \frac{7}{3}\cos\varphi\Bigg|_{0}^{2\pi} = 12\pi.$$