Двойной интеграл.

;

1. Вычисление двойного интеграла.

Определение: Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{d(R)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$,
где $R\{D_1, ..., D_n\}$ - разбиение области D, i
i, $i = \overline{1,n}$

Определение: Область D на плоскости Oxy называется y-правильной, если любая прямая $\|$-ая Oy, пересекает границу D не более чем в 2-х точках, либо содержит участок границы целиком.

y-правильная область D может быть задана в виде: $D = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ (∗)

Для y-правильной области D, заданной (∗), справедливо: $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$

Замечание:

1) в правой части этой формулы стоит так называемый повторный интеграл, под которым понимают число $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy =$

2)

Пример: Вычислить $I = \iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$ $a=1$
$b=2$
$\varphi_1(x)=2$
$\varphi_2(x)=\frac{4}{x}$

$$I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_2^{4/x} (x+3y^2)dy = \int\limits_1^2 \left[xy+y^3\right]\Bigg|_{y=2}^{y=4/x} dx = \int\limits_1^2 \left(4+\tfrac{64}{x^3}-(2x+8)\right)dx = \int\limits_1^2 \left(-4+\tfrac{64}{x^3}-2x\right)dx =$$
$$\boxed{\int\limits_a^b cdx = c(b-a)} = -4\left(-\tfrac{32}{x^2}+x^2\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \underbrace{-4-(8+4)}_{-16} + \underbrace{32+1}_{33} = 17$$

Замечание: Совершенно аналогично вышеизложенному: Определение: Область D называется x-правильной, если любая прямая, $\|$-ая Ox, пересекает границу D не более чем в двух точках, либо содержит участок границы целиком.

x-правильная область D можно задать в виде: $D = \{(x,y):\ c \leqslant y \leqslant d,\ \psi(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ (∗∗)

Для x-правильной области D, заданной (∗∗), справедливо: $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$

Пример: (см выше) $I = \iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$

$c=2$
$d=4$
$\psi_1(y)=1$
$\psi_2(y)=\frac{4}{y}$

$$\iint\limits_D (x+3y^2)dxdy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^{4/y} (x+3y^2)dx = \int\limits_2^4 dy \left[\tfrac{x^2}{2}+3y^2x\right]\Bigg|_{x=1}^{x=4/y} = \int\limits_2^4 \left[\tfrac{8}{y^2}-\tfrac{1}{2}+12y-3y^2\right]dy = \int\limits_2^4 \left[\tfrac{8}{y^2}+12y-3y^2-\tfrac{1}{2}\right]d$$
$$\left(-\tfrac{8}{y}+6y^2-y^3\right)\Bigg|_2^4 - 1 = (-2+6\cdot 16-4\cdot 16)-(-4+24-8)-1 = 30-12-1 = 17$$

Пример: В двойном интеграле $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

а) Решение: $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^y fdy$ $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_x^1 f(x,y)dx$

б) $y = 2x^2$ $x^2 = \frac{y}{2}$ $x =$

$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)dx$ $I = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{2x^2}^2 f(x,y)dy$

в) $y = I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$ $I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

2. Изменение порядка интегрирования.

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. $I = \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

Замечание: До сих пор мы решали примеры вида: $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$

Решение: $D = \left\{(x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{25-x^2}\right\}$

$$I = \underbrace{\int_{0}^{4} dy \int_{0}^{3} f(x,y)dx}_{D_1} + \underbrace{\int_{4}^{5} dy \int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} dx}_{D_2}$$

Пример:

$I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y}^{3y} f dx$

Решение:

$D = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 2y \leqslant x \leqslant 3y\}$

$$I = \int_{0}^{2} dx \int_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{2}} f dy + \int_{2}^{3} dx \int_{\frac{x}{3}}^{1} f dxy$$

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$I = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$$

Решение: $D = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1,\ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1-y\}$

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)dy$$

3. Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть

1) $I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$

2) $\Phi : D_{uv} \to D_{xy}$

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Тогда при вычислении некоторые условия

$I = \iint\limits_{D_{uv}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) |J_{\Phi}(u,v)|\, cdotdudv$

где $J_{\Phi}(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$

Замечание: Для нас основное значение будет иметь переход к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

$J_{\text{пол.}} = \rho$

$$\boxed{\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D\rho\varphi} f(\rho\cdot\cos\varphi, \sin\varphi)\rho\ d\rho d\varphi}$$

Пример: В двойном интеграле

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$$

перейти к полярным координатам и расставить пределы по новым переменным.

а) $I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\ \rho\ d\rho\ d\varphi = \begin{pmatrix} \int d\varphi \int f(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi)\rho d\rho \\ \int d\rho \int (\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi)\rho d\varphi \end{pmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\rho\ d\rho$

$x = 1 \Leftrightarrow \rho\cdot\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \rho\dfrac{1}{\cos\varphi}$

б) $I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)$

Решение: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\ d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\ d\rho$

в) D_{xy} ограничена лемнискатой

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

$x = \rho\cdot\cos\varphi$

$y = \rho\cdot\sin\varphi$

$\left(\rho^2\cdot\cos^2\varphi + \rho^2\cdot\sin^2\varphi\right)^2 = a^2\left(\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right)$

$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$

$\rho^2 = a^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$

$\rho^2 = a^2\cdot\cos 2\varphi$

$\rho = a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$

$\cos 2\varphi \geqslant 0$

$2\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\pi;\dfrac{5}{2}\pi\right] \Rightarrow \varphi\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3}{4}\pi;\dfrac{5}{4}\pi\right]$

$I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\,d\rho + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\,d\rho$

Пример: Вычислить

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy$$

где D_{xy}, ограниченна кривой

$x^2+y^2 = 2ax$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 1^2$

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$

Перейдем в полярную систему координат:

$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \end{cases}$

$f(x,y) = x^2+y^2$

$f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right) = \rho^2$

Уравнение границы области D_{xy}

$x^2+y^2 = 2ax$

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2a\rho\cos\varphi$

$\rho^2 = 2a\rho\cos\varphi$

$\rho = 2a\cos\varphi$

$$I=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{2a\cos\varphi}\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\left(\int\limits_{-a}^{a}f_{\text{четн}}(x)dx=2\int\limits_{0}^{a}f_{\text{четн}}(x)dx\right)=$$

$$8a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\left(\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\right)=8a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=2a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\varphi+\cos^22\varphi\right)d\varphi=$$

$$2a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=2a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+\frac{\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=2a^4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot a^4\pi$$

Пример: Вычислить

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,$$

где область D_{xy} ограниченна эллипсом с полуосями 2a и 2b ($\|$-ны Ox и Oy соответственно) и центром в точке 0.

Решение:

Перейдем в полярную систему координат.

$$f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)=\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=\rho^2\left(\frac{cos^2\varphi}{a^2}+\frac{sin^2\varphi}{b^2}\right)$$

В декартовой системе координат

$$y=\pm2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}$$

$$I=\int\limits_{-2a}^{2a}dx\int\limits_{-2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}}^{2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=4\int\limits_{0}^{2a}\left[\frac{x^2}{a^2}\cdot2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{8b^3}{3b^2}\left(1-\frac{x^2}{4a^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}dx \text{ - все сложно}$$

Перейдем в обобщенную полярную систему координат

$$\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi\\ y=b\rho\sin\varphi\end{cases}$$

$$J_{\text{обоб. пол. с.к.}}=\begin{vmatrix}x'_\rho & x'_\varphi\\ y'_\rho & y'_\varphi\end{vmatrix}=ab\rho$$

$$f\left(a\rho\cos\varphi,b\rho\sin\varphi\right)=\rho^2$$

Уравнение границы области D_{xy}: $\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$

Перейдем в обобщенную полярную систему координат

$$\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{4}=1$$

$$\rho^2=4$$

$$\rho=2$$

$$I=\iint\limits_{D_{\text{обю пол. с.к.}}}f\left(a\cdot\rho\cdot\cos\varphi,b\cdot\rho\cdot\sin\varphi\right)ab\rho\;d\rho\;d\varphi=ab\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{2}\rho\cdot\rho^2\;d\rho=ab\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\rho^2}{4}\bigg|_0^2d\varphi=4ab\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi=8ab\pi$$

4. Приложения двойного интеграла.

I. Вычисление площади плоской фигуры.

Пусть фигура занимает область D на плоскости Oxy.

Тогда

$$S(D)=\iint\limits_{D}dxdy$$

II. Вычисление массы пластины.

Пусть

1) пластина занимает область D на плоскости Oxy.

2) $f(x, y)$ - значение плотности (поверхностного) материалы пластины в точке (x, y)

Тогда масса пластины:
$m = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy$

III. Вычисление объема тела.
Пусть

1) Тело задано в виде
$T = \{(x, y, z) : \ (x, y) \in D_{xy}, \ z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}$

Тогда
$V(T) = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)]\, dxdy$

<u>Пример</u>: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$x^2 + y^2 = 2x$
$x^2 + y^2 = 4x$
$x = y$
$y = 0$
<u>Решение</u>: $S = \iint\limits_{D} dxdy$
Перейдем в полярную систему координат

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho \ d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cdot\cos\varphi}^{4\cdot\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_{2\cdot\cos\varphi}^{4\cdot\cos\varphi} \right] d\varphi = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$
$$3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) d2\varphi = 3\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)\right] = 3\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}$$

<u>Пример</u>: Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = 2x^2 + y^2 + 1$
$x + y = 1$
$x = 0, \ y = 0, \ z = 0$
Метод сечений:
$z = x^2 + y^2$
$z = a$
$x^2 + y^2 = a$
$a < 0 \Rightarrow \emptyset$
$a = 0 \Rightarrow 0(0, 0)$
$a > 0 \ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$V = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)]\, dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[2x^2 + y^2 + 1 - 0\right] dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[2x^2 + y^2 + 1\right] dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[2x^2 + y^2 + 1\right] dy =$$
$$\int\limits_0^1 \left[2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right]\Bigg|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left[2x^2 - 2x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} + 1 - x\right] dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[6x^2 - 6x^3 + (1-x)^3 + 3 - 3x\right] dx =$$
$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[6x^2 - 6x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 3 - 3x\right] dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[-7x^3 + 9x^2 - 6x + 4\right] dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{7}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 4x\right]\Bigg|_0^1 =$$
$$\frac{1}{3}\left[-\frac{7}{4} + \frac{9}{3} - 3 + 4\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{-21+36}{12} + 1\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{15}{12} + 1\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{12} = \frac{3}{4}$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$z = \dfrac{y^2}{a}$
$x^2 + y^2 = r^2$
$z = 0$
$V = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\, dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{y^2}{a} dxdy$
Перейдем в полярную систему координат $\dfrac{1}{a}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \cdot \rho \cdot \sin^2\varphi \;\, d\varphi d\rho = \dfrac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^r \rho^3 \cdot \sin^2\varphi \;\, d\rho = \dfrac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\rho^4}{4}\Big|_0^r \cdot$
$\sin^2\varphi d\varphi = \dfrac{1}{8a}\int\limits_0^{2\pi} r^4 \cdot (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \dfrac{1}{8a} r^4 \varphi\Big|_0^{2\pi} = \dfrac{\pi r^4}{4a}$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями:
$2az = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$
$x^2 + y^2 = 3a^2 - z^2$
$2az = 3a^2 - z^2$
$z^2 + 2az - 3a^3 = 0$
$V = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\, dxdy$
$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$
$z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$
$z_2(x,y) = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$
$z_1(x,y) = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2a}$
$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases} \Rightarrow z^2 = 3a^2 - 2az$
$z^2 + 2az - 3a^2 = 0$
$(z+2)^2 = 4a^2$
$z_1 = -3a \quad z_2 = a$
$x^2 + y^2 + a^2 = 3a^2$
$x^2 + y^2 = 2a^2$
$r = a\sqrt{2}$
Перейдем в полярную систему координат

$$= \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \left[\sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{2a}\right] \rho \; d\rho \; d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{2a}\rho \; d\rho = 2\pi \left[\int\limits_0^{a\sqrt{2}} \rho\sqrt{3a^2 - \rho^2} d\rho - \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{2a} d\rho\right] =$$

$$2\pi \left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{3a^2 - \rho^2} d\left(3a^2 - \rho^2\right) - \frac{\rho^4}{8a}\Big|_0^{a\sqrt{2}}\right] = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(3a^2 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\sqrt{2}} - \frac{a^3}{4}\right] = 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(a^3 - 3\sqrt{3}a^3\right) - \frac{a^3}{4}\right] =$$

$$2\pi a^3\left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 2\pi a^3\left[\sqrt{3} - \frac{5}{6}\right]$$

Тройной интеграл.

1. Вычисление тройного интеграла.

Определение: Область G называется z-правильной, если любая прямая $\|$-ая Oz пересекает границу G не более двух раз, либо содержит границу целиком.

z-правильную область можно задать в виде:
$G\left\{(x,y,z): \; (x,y) \in D_{xy}, \; z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\right\}$
При выполнение некоторых условий для такой области G

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Пример: Расставить пределы в
$$I = \iiint\limits_G fdxdydz,$$
если G ограничена на следующими поверхностями
$x + y + z = 1$
$x = 0,\ y = 0$
$z = 0$
$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} fdz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_0^{1-x-y} fdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz$$

Пример:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$
$z = c$
$(c > 0,\ z \geqslant 0)$
$z = 0$
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$
$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$$
$$I = \iiint\limits_G fdxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1 = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{z_2 = c} fdz = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} fdz$$

Пример: Вычислить
$$I = \iiint\limits_G zdxdydz$$
где G - область, ограниченная
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
и $z = 0$ $(z \geqslant 0)$ $I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1=0}^{z_2 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \frac{z^2}{2}\Big|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right] dxdy =$
$\frac{c^2}{2}\iint\limits_{D_{xy}} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right] dxdy =$ (Перейдем в полярную систему координат) $=$
$$\frac{c^2}{2}\iint\limits_{D_{xy}} \left[1-\rho^2\right] ab\rho\ d\rho d\varphi = \frac{abc^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[\rho - \rho^3\right] d\rho = \frac{abc^2}{2}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]\Big|_0^1 = \frac{abc^2}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot abc^2\pi$$

2. Замена переменных в тройном интеграле.

Пусть

1) $\Phi:\ G_{uvw} \to G_{xyz}$

2) $G_{xyz} = \Phi(G_{uvw})$

3) Φ биективна, ...

Тогда
$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_{uvw}} f\left(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\right)\cdot|J_\Phi(u,v,w)|\cdot dudvdw$$

Замечание:

1) Цилиндрическая система координат
$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$
$J_{\text{цил.}}=\rho$

2) Сферическая система координат
$$\begin{cases} x=r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ y=r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ z=r\cdot\sin\theta \end{cases}$$
$J_{\text{сфер.}}=r^2\cdot\cos\theta$

Пример: Вычислить
$$I=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int\limits_0^a \underbrace{z\sqrt{x^2+y^2}}_{f(x,y,z)}dx$$
Решение: $G:\left\{(x,y,z):\ 0\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2},\quad 0\leqslant z\leqslant a\right\}$
$y=\sqrt{2x-x^2}$
$(x-1)^2+y^2=1$
Перейдем в полярную систему координат. $f(x,y,z)=z\rho$
$$I=\iiint\limits_G z\rho\rho\ d\rho d\varphi dz=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho^2\ d\rho d\varphi\int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} zdz=\frac{a^2}{2}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho^2\ d\rho d\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\ d\rho=\frac{8a^2}{6}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=$$
$$\frac{4a^3}{3}\int\limits_0^1(1-t^2)dt=\frac{4a^2}{3}\left(a-\frac{1}{3}\right)=\frac{8a^2}{9}$$
$$\int\cos^3\varphi d\varphi=\int\cos^2\varphi d\sin\varphi=\int(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi$$

Пример: Вычислить
$$I=\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)dz$$
$G:\ \left\{(x,y,z):\ -R\leqslant x\leqslant R,\ -\sqrt{R^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2},\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$
Перейдем в сферическую систему координат.
$f(x,y,z)=r^2\cdot\cos^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2\cos^2\theta$
$$I=\iiint\limits_{G_{r\varphi\theta}} r^2\cdot\cos^2\theta\cdot r^2\cdot\cos\theta\ drd\varphi d\theta=\iiint\limits_{G_{r\varphi\theta}} r^4\cos^3\theta\ drd\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^R r^4\cos^3\theta\ dr=2\pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\theta d\theta\right)\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R=$$
$$\frac{2R^5\pi}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{4\pi R^5}{15}$$

3. Вычисление объемов тела с использованием тройных интегралов.

Пусть тело занимает область G в пространстве Oxyz. Тогда объем этого тела
$$V(G)=\iiint\limits_G dxdydz$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$x^2+y^2=z^2$
$x^2+y^2+z^2=a^2$
(внешнего по отношению конуса)
Решение:
$y^2=z^2$
$y^2-z^2=0$
$(y-z)(y+z)=0$
$y=z)$
$(y=-z)$

$V=2V(G_1)=2\iiint\limits_{G_{xyz}}dxdydz$ Перейдем к сферической системе координат $\begin{cases}x=r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\\ y=r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\\ z=r\cdot\sin\theta\end{cases}$ $2\iiint\limits_{G_{r\rho\varphi}}r^2\cos\theta\,drd\varphi d\theta=$
$2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^a r^2\cos\theta\;dt=2\cdot2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\theta\left[\frac{r^3}{3}\Big|_0^a\right]\right)d\theta=2\cdot2\pi\cdot\frac{a^3}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=\frac{2}{3}\pi a^3\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{a}}=2\cdot\frac{2}{3}\pi a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-$
$\frac{4\sqrt{2}}{6}\pi a^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

Пример: Вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями:
$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$
$x=a$
Решение:
$V=\iiint_{G_{xyz}}dxdydz$
Перейдем в обобщенную цилиндрическую систему координат
$\begin{cases}x=x\\ y=\rho\cdot b\cdot\cos\varphi\\ z=\rho\cdot c\cdot\sin\varphi\end{cases}$
$|J|=\rho bc$
$V=bc\iint\limits_{\rho\varphi}\rho d\rho d\varphi=bc\iint\limits_{D\rho\varphi}\left(a-\frac{a\rho^2}{2}\right)\rho d\rho d\varphi=abc\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\left(1-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho d\rho d\varphi=\frac{abc}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho-\rho^3\right)d\rho=\frac{1bc}{2}2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]\Big|_0^{\sqrt{2}}$
$abc\pi(2-1)=\pi abc$

Теория вероятностей.
Определение вероятностей.

1. Классическое определение вероятностей.

Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

2) $|\Omega|=N<\infty$

3) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход.

Определение: Вероятностью осуществления события А называется число
$P(A)=\frac{N_A}{N}$

Пример: Бросают 2 игральные кости.
A = {на обеих костях выпало одинаковое число очков}.
B = {сумма выпавших очков четная}.
C = {произведение выпавших очков = 6}.

P(A), P(B), P(C) - ?

Решение:

1) Исход: (x_1, x_2), где x_i - количество очков выпавшей на i-ой кости.
   (x_1, x_2) - размещение с повторениями из 6 по 2.
   N = 36

2) $A = \{(1,1), \dots, (6,6)\}$
   $N_A = 6$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

3) $B = \{ \begin{matrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (2,2) & (2,4) & (2,6) \\ ... \\ (6,2) & (6,4) & (6,6) \end{matrix} \} \ N_B = |B| = 18$

   $P(B) \ cfracN_B N = \dfrac{1}{2}$

4) $C = \{x_1 x_2 = 6\} = \{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)\}$
   $N_C = |C| = 4$
   $P(C) = \dfrac{N_C}{N} = \dfrac{1}{9}$

Пример: Из колоды домино наудачу извлекают одну кость.
A = {это дубль}
B = {на кости ровно одна пустышка}
P(A)? P(B) = ?

1) $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant 6$
   Исход: (x_1, x_2), где $x_1 \leqslant x_2, \ x_i \in \{0, \dots, 6\}$
   $N = 28$

2) $A = \{(0,0), \ (1,1), \ \dots, (6,6)\}$
   $N_A = 7$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$

3) $B = \{(0,1), \ (0,2), \dots, (0,6)\}$
   $N_B = |B| = 6$
   $P(B) = \dfrac{N_B}{N} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$

2. Некоторые комбинаторные конфигурации.

При решении задач на классическое определение вероятности приходится подсчитывать число элементов в различных комбинаторных конфигурациях. При этом используется ряд стандартных приемов.

I. Сочетания без повторений.

Пусть

1) A - множество

2) $|A| = n$

Без ограничения общности можно считать, что
$A = \{1, 2, \dots, n\}$

Определение: Сочетанием без повторений из n по m называется любое m-элементное подмножество множества A, то есть набор
$\{x_1, \dots, x_n\}$

Замечание:

1) в определении подразумевается, что

   а) все входящие в сочетание элементы попарно различны.

   б) сочетание не изменится, если входящие в него элементы записать в другой последовательности например
   $\{1, 3, 10\} = \{3, 10, 1\}$

Th: Всего $\exists\ C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (биномиальные коэффициенты) различных сочетаний без повторений из n по m.

II. Размещение с повторениями.
$A = \{1, 2, \dots, n\}$
Определение: Размещение с повторениями называется кортеж (упорядоченный набор):
$(x_1, x_2, \dots, x_m)$
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, m}$

Замечание: Размещения различаются не только составом элементов но и последовательностью, в которой они записаны. Например
$(1, 1, 3) \neq (1, 3, 1)$

Th Всего $\exists\ \widetilde{A}_n^m = n^m$ различных размещений с повторениями из n по m.

III. Размещение без повторений.
Определение: Размещением без повторений из n по m называется кортеж
$(x_1, x_2, \dots, x_m)$,
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, m},\ x_i \neq n_j$ при $i \neq j$

Th Всего $\exists\ A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ различных размещений без повторения из n по m.

IV. Перестановка.
Определение: Перестановка длины n называется размещение без повторений из n по n, то есть кортеж
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, n},\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j$

Th: Число перестановок длины n равно $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$

V. Схема упорядоченных разбиений.
Пусть

1) имеется n попарно различных шаров

2) имеется m попарно различных урн.

3) За j-ой урной закреплено число $n_j \in \mathbb{N}_0$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$

Вопрос: Сколькими способами можно разложить n шаром по m урнам, так, чтобы в j-ой урне лежало n_j шаров?
Пример:

Th Общее число способов размещений n шаров по m урнам с учетом сделанных выше ограничений составит

$C(n_1, \dots, n_m) = \dfrac{n!}{n! \cdot \ldots \cdot n_m!)}$

Пример: В партии из 10 однотипных изделий 3 изделия являются бракованными. Из партии случайным образом выбираются 3 изделия.
A = {в выборке ровно 1 брак}
B = {в выборке ровно 2 брака}
C = {в выборке 3 ровно 3 брака}
P(A), P(B), P(C) = ?
Решение:

1) 10 шаров Исход: $\{x_1, x_2, x_3\}$, где x_i - номер извлеченного шара.
   Сочетание без повторения из 10 по 3
   $N = C_1^3 0 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120$

2) $P(A) =?$
   $\{\underbrace{x_1}_{\text{брак}}, \underbrace{x_2, x_3}_{\text{не брак}}\}$
   $N_A = 3 \cdot 21 = 63$
   $P(A) = \dfrac{61}{120} = \dfrac{21}{40}$

3) $P(B) =?$
   $\{\underbrace{x_1}_{\text{не брак}}, \underbrace{x_2, x_3}_{\text{брак}}\}$
   $N_B = 3 \cdot 7 = 21$
   $P(B) = \dfrac{21}{120} = \dfrac{7}{40}$

4) $P(C) =?$
   $\{\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{\text{брак}}\}$
   $N_C = 1$
   $P(C) = \dfrac{1}{12}$

Пример: 10 вариантов контрольной работы написаны на 10-ти отдельных картах. Варианты раздаются 8-ми сидящим рядом студентам (по 1-ому варианту в руки).
A = {варианты 1 и 2 не будут использоваться}
B = {варианты 1 и 2 достанутся сидящим рядом студентам}
C = {варианты будут распределены последовательно номера вариантов в порядке возрастания}
P(A), P(B), P(C) = ?
Решение:

1) Исход: $(x_1, \dots, x_8)$,
   где x_i - номер билета, который достался i-ому студенту.
   Размещение без повторений из 10 по 8
   $N = \dfrac{10!}{2!}$

2) $P(A) =?$
   $(x_1, \dots, x_8),\ x_i \in \{3, 4, \dots, 10\}$
   $N_A = A_8^8 = 8!$
   $P(A) = \dfrac{2 \cdot 8!}{10!} = \dfrac{1}{45}$

3) $P(B) =?$

$N_B = 2 \cdot A_8^6 \cdot 7 = 14 \cdot A_8^6$
$P(B) = \dfrac{14 \cdot 8! \cdot 2}{2! \cdot 10!} = \dfrac{14}{9 \cdot 10} = \dfrac{7}{45}$

4) $P(C) =?$
$(1, 2, \ldots, 8)$
$(2, 3, \ldots, 9)$
$(3, 4, \ldots, 10)$
$N_C = 3$
$P(C) = \dfrac{3 \cdot 2}{10!}$

Пример: Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный телефонный номер. Считает, что в номере 7 цифр и все номера равно возможные. Найти вероятности следующих событий:
A = {4 последние цифры одинаковы}
B = {все цифры попарно различны}
C = {1-я цифра нечетная}
Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$,
где $x_i \in \{0, \ldots 9\}$ - i-ая цифра номера.
Размещение с повторениями из 10 по 7.
$N = \tilde{A}_1^7 0 = 10^7$

2) $P(A) =?$
$(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{10^3}, \underbrace{x_4, x_4, x_4, x_4}_{10})$
$N_A = 10^4$
$P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{10^4}{10^7} = \dfrac{1}{10^3}$

3) $P(B) =?$
$(x_1, \ldots, x_7),\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j$
$N_B = A_1^7 0 = \dfrac{10!}{3!}$
$P(B) = \dfrac{10!}{3! \cdot 10^7} = \dfrac{10!}{3! \cdot 10^7}$

4) $PC() =?$
$\tilde{A}_1^6 0 = 10^6$
$x_1 \in \{1, 3, 5, 6, 9\}$
$N_C = 5 \cdot 10^6$
$P(C) = \dfrac{5 \cdot 10^6}{10^7} = \dfrac{1}{2}$

Пример: На почту поступило 6 телеграмм. Их случайным образом распределяют по 4-ем каналам для обработки.
A = {на 1-ом канале окажется 3 телеграммы, на 2-ом - 2 телеграммы, на 3-ем - 1 телеграмма, на 4-ом - 0 телеграмм}.
P(A) = ?
Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ - Размещение с повторениями, где x_i - номер канала, на который попала i-ая телеграмма.
$\tilde{A}_6^4 = 4^6$

2) $N_A = C(3,2,1,0) = \dfrac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1 \cdot 1} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60$

   $P(A) = \dfrac{60}{4^6}$

Пример: Партия из 50-ти изделий 4 бракованных. Из партии выбирают 10 изделий случайным образом.
A = {среди выбранных изделий хотя бы одно бракованное}.
P(A) = ?
Решение:

1) Исход: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_10\}$ - сочетание без повторений из 50 по 10.
   x_i - номер извлеченного изделия.
   $N = C^10_50 = \dfrac{50!}{10! \cdot 40!}$

2) $P(A) =?$
   I способ.
   $A = \underbrace{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}_{\text{несовместны}}$
   A_i - среди выбранных изделий ровно i бракованных, $i = \overline{1,4}$.
   $P(A_i) =?$
   $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{4} P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{4} \left(\dfrac{C_4^i \cdot C_{46}^{10-i}}{C^10_50} \right)$
   II способ. $\overline{A}$ = {в выборке нет ни одного бракованного изделия}.
   $N_{\overline{A}} = C^10_46$
   $\{x_1, \ldots, x_10\}$
   $P_A(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C^10_46}{C^10_50}$

Пример: В шкафу находится 10 пар ботинок (все попарно различны). Из шкафа случайным образом вынимают 4 ботика.
A = {из вынутых из шкафа ботинок нельзя составить пару}.
P(A) = ?
Решение:

1) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ (сочетание без повторения из 10 по 4), где x_i - номер ботинка.
   $N = C_2^40$

2) $P(A) =?$
   I способ.
   $N_A = \dfrac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{4!}$

   II способ.
   $N_A = C_1^40 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \cdot C_1^40$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N}$

   III способ.
   (a_1, x_2, x_3, x_4)
   $N = A_2^40$
   $N_A = 20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14$

Пример: 6 пассажиров поднимаются в лифте 7-ми этажного дома. Считая, что движения начинается из подвала, найти вероятности событии:
A = {на первых трех этажах не выйдет никто}.
B = {все выйдут на первых 6-ти этажах}.
C = {все выйдут на 1-ом этаже}.

D = {на 5-ом, 6-ом, 7-ом этажах выйдут по два человека}.
Решение:

1) $(x_1, x_2, \dots x_6)$ - размещение с повторениями из 7 по 6.
x_i - этаж, на котором вышел i-й человек.
$N = 7^6$

2) $P(A) = ?$
$(x_1, x_2, \dots, x_6)$
$x_i \in \{4, 5, 6, 7\}$
$N_A = 4^6$
$P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{4^6}{7^6} = \left(\dfrac{4}{7}\right)^6$

3) $P(B) = ?$
$(x_1, x_2, \dots, x_6)$
$x_i \in \{1, 2, \dots, 6\}$
$N_B = 6^6$
$P(B) = \dfrac{N_B}{N} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^6$

4) $P(C) = ?$
$(x_1, x_2, \dots, x_6),\ x_i \in 1$
$C = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$
$N_C = 1$
$P(C) = \dfrac{1}{7^6}$

5) $P(D) = ?$
Каждый кортеж из события D однозначно определяется номерами двух позиций в которых стоят две "5" и номерами в которых стоят две "6" .
Схема упорядоченных разбиений.
$N_D = C_6(2, 2, 2) = \dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$
$P(D) = \dfrac{N_D}{N}$

Замечание: N_D можно подсчитать так:
$N_D = C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 1 = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2} = C_6(2, 2, 2)$

3. Геометрическое определение вероятности.

Пусть

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\mu(\Omega) \subset \infty$, где μ - мера множества.

3) "степень возможности" осуществления события $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества A и не зависит от формы события A и его расположения внутри Ω.

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число
$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega}$

Пример: В отрезке [0; 1] случайным образом выбирают 2 точки.
A = {произведение из координат $< \dfrac{1}{2}$}.

P(A) = ?
Решение:

1) Исход: (x_1, x_2)б где x_i - координата i-ой точки.
$\Omega = [0;1]x[0;1]$

2) $A = \{x_1 \cdot x_2 < \frac{1}{2}\}$
$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$
$\mu(\Omega) = 1$
$\mu(A) = \frac{1}{2} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{2x_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln x_1 \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln 2$

Условная вероятность.

1. Условная вероятность.

Пусть

1) (Ω, β, P) - вероятностное пространство

2) $A, B \in \beta$

3) $P(B) > 0$

Определение: Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B называется число
$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Определение: События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$
Th
Пусть

1) $P(B) > 0$
Тогда A, B - независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Пример: 3 раза бросают игральную кость.
A = {результаты трех бросков попарно различны}.
B = {выпало хотя бы один раз "6" }.
$P(A), P(B), P(A|B) =?$
Указать, зависимы ли A и B.
Решение:

1) Исход: (x_1, x_2, x_3) (размещение с повторениями из 6 по 3), где x_i - количество очков, при i-ом броске.
$N = 6^3$

2) $P(A) =?$
$N_A = 6 \cdot 5 \cdot 4 = A_6^3$
$P(A) = \dfrac{12-}{6^3}$

3) $P(B) =?$
$P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$\overline{B}$ = {"6" не выпало ни разу}
$N_{\overline{B}} = 5^3$
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$

4) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
AB = {все x_i попарно различны и один из них = "6" }. $N_{AB} = 20 \cdot 3 = 60$
$$P(A|B) = \frac{\frac{60}{6^3}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{60}{6^3 - 5^3} = \frac{60}{(6-5)(6^2+50+25)} = \frac{60}{91}$$

5) $P(A) \neq P(A|B) \Rightarrow A, B$ - зависимы.

Пример: Из полной колоды в 52 карты случайным образом извлекают 1 карту.
A = {извлечен туз}
B = {извлечена карта черной масти}
C = {извлечена картинка}

1) Установить, является ли A,B,C независимыми попарно и независимы в совокупности.

2) P(ABC) = ?

Решение:

1) $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
$P(C) = \frac{16}{52}\frac{4}{13}$

2) $P(AB)$ = (AB = {туч черной масти}) = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$
$P(AC)$ = (AC = A) = $P(A) = \frac{1}{13}$
$P(BC)$ = (BC = {картинка черной масти}) = $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

3) Определение: События A и B называется независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$
$P(AB) = \frac{1}{26}$
$P(A)P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{26}$
$\Rightarrow A, B$ - независимы.
$P(AC) = \frac{1}{13}$
$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{169}$
$\Rightarrow A, C$ - зависимы.
$P(BC) = \frac{2}{13}$
$P(C) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{13} = \frac{2}{13}$
$\Rightarrow B, C$ - независимы.
A,B,C не является независимыми попарно (так как A и C зависимы). A, B, C не являются независимы в совокупности, так как они не являются попарно независимыми.

Пример: В аудитории находится 100 студентов из которых
английский знают: 50 человек
французский знают: 40 человек
немецкий знают: 35 человек

английский и французский: 20 человек
английский и французский: 8 человек
французский и немецкий: 5 человек

английский,французский и немецкий: 5 человек

Случайно выбранного студента вызывают к доске.
A = {он знает английский}
B = {он знает французский}
C = {он знает немецкий}

1) Установить, являются ли A, B, C попарно независимыми и независимыми в совокупности.
2) $P(AB|C)$ =?

Решение:

1) $P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
   $P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$
   $P(C) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

2) $P(AB) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
   $P(AC) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$
   $P(BC) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

3) $P(AB) = \frac{1}{5}$
   $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$
   $\Rightarrow A, B$ – независимы

   $P(AC) = \frac{2}{25}$
   $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{20} = \frac{7}{40}$
   $\Rightarrow A, C$ - зависимы

   $P(BC) = \frac{1}{10}$
   $P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$
   $\Rightarrow B, C$ - зависимы

   A, B, C - не являются попарно независимы $\Rightarrow$ A, B, C не являются независимы в совокупности.

4) $P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{7}{20}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{20}{7} = \frac{1}{7}$