

Двойной интеграл.

1. Вычисление двойного интеграла.

Определение: Двойным интегралом функции f по области D называется

число $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d(R) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$, где $R\{D_1, \dots, D_n\}$ - разбиение области D , $i = \overline{1, n}$

Определение: Область D на плоскости Oxy называется y -правильной, если любая прямая \parallel -ая Oy , пересекает границу D не более чем в 2-х точках, либо содержит участок границы целиком.

y -правильная область D может быть задана в виде: $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ (*)

Для y -правильной области D , заданной (*), справедливо: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$

Замечание:

1) в правой части этой формулы стоит так называемый повторный интеграл, под которым понимают число $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy =$

2)

Пример: Вычислить $I = \iint_D (x + 3y^2) dx dy$ $a = 1$

$b = 2$

$\varphi_1(x) = 2$

$\varphi_2(x) = \frac{4}{x}$

$$I = \int_1^2 dx \int_2^{4/x} (x + 3y^2) dy = \int_1^2 [xy + y^3] \Big|_{y=2}^{y=4/x} dx = \int_1^2 \left(4 + \frac{64}{x^3} - (2x + 8)\right) dx =$$

$$\int_1^2 \left(-4 + \frac{64}{x^3} - 2x\right) dx = \left[\int_a^b c dx = c(b - a) \right] = -4 \left(-\frac{32}{x^2} + x^2\right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \underbrace{-4 - (8 + 4)}_{-16} + \underbrace{32 + 1}_{33} =$$

17

Замечание: Совершенно аналогично вышеизложенному: Определение: Область D называется x -правильной, если любая прямая, \parallel -ая Ox , пересекает границу D не более чем в двух точках, либо содержит участок границы целиком.

x -правильная область D можно задать в виде: $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ (**)

Для x -правильной области D , заданной (**), справедливо: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$

Пример: (см выше) $I = \iint_D (x + 3y^2) dx dy$

$c = 2$

$d = 4$

$$\psi_1(y) = 1$$

$$\psi_2(y) = \frac{4}{y}$$

$$\iint_D (x+3y^2) dx dy = \int_2^4 dy \int_1^{4/y} (x+3y^2) dx = \int_2^4 dy \left[\frac{x^2}{2} + 3y^2 x \right] \Big|_{x=1}^{x=4/y} = \int_2^4 \left[\frac{8}{y^2} - \frac{1}{2} + 12y - 3y^2 \right] dy =$$

$$\int_2^4 \left[\frac{8}{y^2} + 12y - 3y^2 - \frac{1}{2} \right] dy = \left(-\frac{8}{y} + 6y^2 - y^3 \right) \Big|_2^4 - 1 = (-2 + 6 \cdot 16 - 4 \cdot 16) -$$

$$(-4 + 24 - 8) - 1 = 30 - 12 - 1 = 17$$

Пример: В двойном интеграле $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

а) Решение: $I = \int_0^1 dx \int_0^y f dy$ $I = \int_0^1 dy \int_x^1 f(x, y) dx$

б) $y = 2x^2$ $x^2 = \frac{y}{2}$ $x =$

$$I = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x, y) dx$$

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 f(x, y) dy$$

в) $y = I = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$ $I = \int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$