Двойной интеграл.

;

1. Вычисление двойного интеграла.

Определение: Двойным интегралом функции f по области D называется число $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{d(R)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, где $R\{D_1, ..., D_n\}$ - разбиение области D, i
i, $i = \overline{1,n}$

Определение: Область D на плоскости Oxy называется y-правильной, если любая прямая $\|$-ая Oy, пересекает границу D не более чем в 2-х точках, либо содержит участок границы целиком.

y-правильная область D может быть задана в виде: $D = \{(x,y): \ a \leqslant x \leqslant b, \ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ $(*)$

Для y-правильной области D, заданной $(*)$, справедливо: $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$

Замечание:

1) в правой части этой формулы стоит так называемый повторный интеграл, под которым понимают число $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy =$

2)

Пример: Вычислить $I = \iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$ $a = 1$
$b = 2$
$\varphi_1(x) = 2$
$\varphi_2(x) = \frac{4}{x}$

$$I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_2^{4/x} (x+3y^2)dy = \int\limits_1^2 \left[xy + y^3\right]\Big|_{y=2}^{y=4/x} dx = \int\limits_1^2 \left(4 + \tfrac{64}{x^3} - (2x+8)\right)dx = \int\limits_1^2 \left(-4 + \tfrac{64}{x^3} - 2x\right)dx =$$

$$\boxed{\int\limits_a^b cdx = c(b-a)} = -4\left(-\tfrac{32}{x^2} + x^2\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \underbrace{-4-(8+4)}_{-16} + \underbrace{32+1}_{33} = 17$$

Замечание: Совершенно аналогично вышеизложенному: Определение: Область D называется x-правильной, если любая прямая, $\|$-ая Ox, пересекает границу D не более чем в двух точках, либо содержит участок границы целиком.

x-правильная область D можно задать в виде: $D = \{(x,y): \ c \leqslant y \leqslant d, \ \psi(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ $(**)$

Для x-правильной области D, заданной $(**)$, справедливо: $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$

Пример: (см выше) $I = \iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$

$c = 2$
$d = 4$
$\psi_1(y) = 1$
$\psi_2(y) = \frac{4}{y}$

$$\iint\limits_D (x+3y^2)dxdy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^{4/y} (x+3y^2)dx = \int\limits_2^4 dy \left[\tfrac{x^2}{2} + 3y^2x\right]\Big|_{x=1}^{x=4/y} = \int\limits_2^4 \left[\tfrac{8}{y^2} - \tfrac{1}{2} + 12y - 3y^2\right]dy = \int\limits_2^4 \left[\tfrac{8}{y^2} + 12y - 3y^2 - \tfrac{1}{2}\right] d$$

$$\left(-\tfrac{8}{y} + 6y^2 - y^3\right)\Big|_2^4 - 1 = (-2 + 6\cdot 16 - 4\cdot 16) - (-4+24-8) - 1 = 30 - 12 - 1 = 17$$

Пример: В двойном интеграле $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

а) Решение: $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^y fdy$ $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_x^1 f(x,y)dx$

б) $y = 2x^2$ $x^2 = \frac{y}{2}$ $x =$

$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)dx \quad I = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{2x^2}^2 f(x,y)dy$$

в) $y = I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$ $I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

2. Изменение порядка интегрирования.

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. $I = \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

Замечание: До сих пор мы решали примеры вида: $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$

Решение: $D = \left\{(x,y): \ 0 \leqslant x \leqslant 3, \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{25-x^2}\right\}$

$$I = \underbrace{\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} f(x,y)dx}_{D_1} + \underbrace{\int\limits_{4}^{5} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} dx}_{D_2}$$

Пример:

$$I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y}^{3y} f dx$$

Решение:

$D = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1, \ 2y \leqslant x \leqslant 3y\}$

$$I = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{2}} f dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{1} f dxy$$

Пример: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$I = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$$

Решение: $D = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1, \ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1-y\}$

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)dy$$

3. Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть

1) $I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$

2) $\Phi : D_{uv} \to D_{xy}$

$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

Тогда при вычислении некоторые условия

$I = \iint\limits_{D_{uv}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left|J_{\Phi}(u,v)\right| cdotdudv$

где $J_{\Phi}(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$

Замечание: Для нас основное значение будет иметь переход к полярным координатам:

$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$

$J_{\text{пол.}} = \rho$

$$\boxed{\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D\rho\varphi} f(\rho \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)\rho \ d\rho d\varphi}$$

Пример: В двойном интеграле

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$$

перейти к полярным координатам и расставить пределы по новым переменным.

а) $I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\ \rho\ d\rho\ d\varphi = \left(\begin{array}{l} \int d\varphi \int f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\rho d\rho \\ \int d\rho \int (\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\rho d\varphi \end{array}\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot \sin\varphi)\rho\ d\rho$

$x = 1 \Leftrightarrow \rho\cdot\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \rho\dfrac{1}{\cos\varphi}$

б) $I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)$

Решение: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\ d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\ d\rho$

в) $D_{xy}$ ограничена лемнискатой

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

$x = \rho\cdot\cos\varphi$

$y = \rho\cdot\sin\varphi$

$\left(\rho^2\cdot\cos^2\varphi + \rho^2\cdot\sin^2\varphi\right)^2 = a^2\left(\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right)$

$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

$\rho^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

$\rho^2 = a^2\cdot\cos 2\varphi$

$\rho = a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$

$\cos 2\varphi \geqslant 0$

$2\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\pi;\dfrac{5}{2}\pi\right] \Rightarrow \varphi \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3}{4}\pi;\dfrac{5}{4}\pi\right]$

$I = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\, d\rho + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\, d\rho$

Пример: Вычислить

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy$$

где $D_{xy}$, ограниченна кривой

$x^2+y^2 = 2ax$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 1^2$

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$

Перейдем в полярную систему координат:

$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \end{cases}$

$f(x,y) = x^2+y^2$

$f\left(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi\right) = \rho^2$

Уравнение границы области $D_{xy}$

$x^2+y^2 = 2ax$

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2a\rho\cos\varphi$

$\rho^2 = 2a\rho\cos\varphi$

$\rho = 2a\cos\varphi$

$$I=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)\rho\, d\rho\, d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{2a\cos\varphi}\rho^2\cdot\rho\, d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\left(\int\limits_{-a}^{a} f_{\text{четн}}(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f_{\text{четн}}(x)dx\right)=$$

$$8a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\left(\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)=8a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi=2a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$2a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=2a^4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+\frac{\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=2a^4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot a^4\pi$$

Пример: Вычислить

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,$$

где область $D_{xy}$ ограниченна эллипсом с полуосями 2a и 2b (‖-ны Ox и Oy соответственно) и центром в точке 0.

Решение:

Перейдем в полярную систему координат.

$$f\left(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi\right)=\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=\rho^2\left(\frac{cos^2\varphi}{a^2}+\frac{sin^2\varphi}{b^2}\right)$$

В декартовой системе координат

$$y=\pm 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}$$

$$I=\int\limits_{-2a}^{2a}dx\int\limits_{-2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}}^{2b\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=4\int\limits_{0}^{2a}\left[\frac{x^2}{a^2}\cdot 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{8b^3}{3b^2}\left(1-\frac{x^2}{4a^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}dx \text{ - все сложно}$$

Перейдем в обобщенную полярную систему координат

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$J_{\text{обоб. пол. с.к.}}=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix}=ab\rho$$

$$f\left(a\rho\cos\varphi,b\rho\sin\varphi\right)=\rho^2$$

Уравнение границы области $D_{xy}$: $\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$

Перейдем в обобщенную полярную систему координат

$$\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{4}=1$$

$$\rho^2=4$$

$$\rho=2$$

$$I=\iint\limits_{D_{\text{обю пол. с.к.}}} f\left(a\cdot\rho\cdot\cos\varphi,b\cdot\rho\cdot\sin\varphi\right)ab\rho\ d\rho\ d\varphi=ab\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{2}\rho\cdot\rho^2\ d\rho=ab\int\limits_{0}^{2\pi}\left.\frac{\rho^2}{4}\right|_0^2 d\varphi=4ab\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi=8ab\pi$$

4. Приложения двойного интеграла.

I. Вычисление площади плоской фигуры.

Пусть фигура занимает область D на плоскости Oxy.

Тогда

$$S(D)=\iint\limits_{D}dxdy$$

II. Вычисление массы пластины.

Пусть

1) пластина занимает область D на плоскости Oxy.

2) $f(x,y)$ - значение плотности (поверхностного) материалы пластины в точке $(x,y)$

Тогда масса пластины:
$m = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$

III. Вычисление объема тела.
Пусть

1) Тело задано в виде
$T = \{(x,y,z):\ (x,y) \in D_{xy},\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}$

Тогда
$V(T) = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\,dxdy$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$x^2 + y^2 = 2x$
$x^2 + y^2 = 4x$
$x = y$
$y = 0$
Решение: $S = \iint\limits_{D} dxdy$
Перейдем в полярную систему координат

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho\ d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cdot\cos\varphi}^{4\cdot\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_{2\cdot\cos\varphi}^{4\cdot\cos\varphi}\right] d\varphi = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$
$$3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) d2\varphi = 3\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)\right] = 3\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}$$

Пример: Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = 2x^2 + y^2 + 1$
$x + y = 1$
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
Метод сечений:
$z = x^2 + y^2$
$z = a$
$x^2 + y^2 = a$
$a < 0 \Rightarrow \emptyset$
$a = 0 \Rightarrow 0(0,0)$
$a > 0\ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$V = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[2x^2 + y^2 + 1 - 0\right] dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[2x^2 + y^2 + 1\right] dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[2x^2 + y^2 + 1\right] dy =$$
$$\int\limits_0^1 \left[2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right]\Big|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left[2x^2 - 2x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} + 1 - x\right] dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[6x^2 - 6x^3 + (1-x)^3 + 3 - 3x\right] dx =$$
$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[6x^2 - 6x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 3 - 3x\right] dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left[-7x^3 + 9x^2 - 6x + 4\right] dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{7}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 4x\right]\Big|_0^1 =$$
$$\frac{1}{3}\left[-\frac{7}{4} + \frac{9}{3} - 3 + 4\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{-21+36}{12} + 1\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{15}{12} + 1\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{12} = \frac{3}{4}$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$z=\dfrac{y^2}{a}$

$x^2+y^2=r^2$

$z=0$

$V=\iint\limits_{D_{xy}}[z_2(x,y)-z_1(x,y)]\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{y^2}{a}dxdy$

Перейдем в полярную систему координат $\dfrac{1}{a}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho^2\cdot\rho\cdot\sin^2\varphi\;d\varphi d\rho=\dfrac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r}\rho^3\cdot\sin^2\varphi\;d\rho=\dfrac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\rho^4}{4}\Big|_0^r\cdot$

$\sin^2\varphi d\varphi=\dfrac{1}{8a}\int\limits_0^{2\pi}r^4\cdot(1-\cos2\varphi)d\varphi=\dfrac{1}{8a}r^4\varphi\Big|_0^{2\pi}=\dfrac{\pi r^4}{4a}$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$2az=x^2+y^2$

$x^2+y^2+z^2=3a^2$

$x^2+y^2=3a^2-z^2$

$2az=3a^2-z^2$

$z^2+2az-3a^3=0$

$V=\iint\limits_{D_{xy}}[z_2(x,y)-z_1(x,y)]\,dxdy$

$x^2+y^2+z^2=3a^2$

$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$

$z_2(x,y)=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$

$z_1(x,y)=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2a}$

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3a^2\\x^2+y^2=2az\end{cases}\Rightarrow z^2=3a^2-2az$

$z^2+2az-3a^2=0$

$(z+2)^2=4a^2$

$z_1=-3a\quad z_2=a$

$x^2+y^2+a^2=3a^2$

$x^2+y^2=2a^2$

$r=a\sqrt{2}$

Перейдем в полярную систему координат

$=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\left[\sqrt{3a^2-\rho^2}-\dfrac{\rho^2}{2a}\right]\rho\;d\rho\;d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{3a^2-\rho^2}-\dfrac{\rho^2}{2a}\rho\;d\rho=2\pi\left[\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\rho\sqrt{3a^2-\rho^2}d\rho-\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\dfrac{\rho^3}{2a}d\rho\right]=$

$2\pi\left[-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{3a^2-\rho^2}d\left(3a^2-\rho^2\right)-\dfrac{\rho^4}{8a}\Big|_0^{a\sqrt{2}}\right]=2\pi\left[-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\left(3a^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\sqrt{2}}-\dfrac{a^3}{4}\right]=2\pi\left[-\dfrac{1}{3}\left(a^3-3\sqrt{3}a^3\right)-\dfrac{a^3}{4}\right]=$

$2\pi a^3\left[\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right]=2\pi a^3\left[\sqrt{3}-\dfrac{5}{6}\right]$

Тройной интеграл.

1. Вычисление тройного интеграла.

Определение: Область G называется z-правильной, если любая прямая $\|$-ая Oz пересекает границу G не более двух раз, либо содержит границу целиком.

z-правильную область можно задать в виде:

$G\left\{(x,y,z):\;(x,y)\in D_{xy},\;z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\right\}$

При выполнение некоторых условий для такой области G

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Пример: Расставить пределы в

$I = \iiint\limits_G f dxdydz,$

если G ограничена на следующими поверхностями

$x + y + z = 1$

$x = 0,\ y = 0$

$z = 0$

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f dz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{0}^{1-x-y} f dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz$$

Пример:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

$z = c$

$(c > 0,\ z \geqslant 0)$

$z = 0$

$\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$

$$I = \iiint\limits_G f dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1 = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}^{z_2 = c} f dz = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f dz$$

Пример: Вычислить

$I = \iiint\limits_G z dxdydz$

где G - область, ограниченная

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

и $z = 0$ $(z \geqslant 0)$ $I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1=0}^{z_2 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right] dxdy =$

$\frac{c^2}{2}\iint\limits_{D_{xy}} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right] dxdy =$ (Перейдем в полярную систему координат) $=$

$$\frac{c^2}{2}\iint\limits_{D_{xy}} \left[1-\rho^2\right] ab\rho\, d\rho d\varphi = \frac{abc^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[\rho - \rho^3\right] d\rho = \frac{abc^2}{2}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{abc^2}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot abc^2\pi$$

2. Замена переменных в тройном интеграле.

Пусть

1) $\Phi :\ G_{uvw} \to G_{xyz}$

2) $G_{xyz} = \Phi(G_{uvw})$

3) $\Phi$ биективна, ...

Тогда
$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_{uvw}} f\left(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\right)\cdot|J_\Phi(u,v,w)|\cdot dudvdw$$

Замечание:

1) Цилиндрическая система координат
$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$
$J_{\text{цил.}} = \rho$

2) Сферическая система координат
$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ z = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$
$J_{\text{сфер.}} = r^2\cdot\cos\theta$

Пример: Вычислить
$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a \underbrace{z\sqrt{x^2+y^2}}_{f(x,y,z)}dx$$
Решение: $G:\left\{(x,y,z):\ 0\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2},\quad 0\leqslant z\leqslant a\right\}$
$y=\sqrt{2x-x^2}$
$(x-1)^2+y^2=1$
Перейдем в полярную систему координат. $f(x,y,z)=z\rho$
$$I=\iiint\limits_G z\rho\rho\ d\rho d\varphi dz = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho^2\ d\rho d\varphi\int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} zdz = \frac{a^2}{2}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho^2\ d\rho d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\ d\rho = \frac{8a^2}{6}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi =$$
$$\frac{4a^3}{3}\int\limits_0^1(1-t^2)dt = \frac{4a^2}{3}\left(a-\frac{1}{3}\right)=\frac{8a^2}{9}$$
$$\int\cos^3\varphi d\varphi = \int\cos^2\varphi d\sin\varphi = \int(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi$$

Пример: Вычислить
$$I=\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)dz$$
$G:\ \left\{(x,y,z):\ -R\leqslant x\leqslant R,\ -\sqrt{R^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2},\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$
Перейдем в сферическую систему координат.
$f(x,y,z)=r^2\cdot\cos^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2\cos^2\theta$
$$I=\iiint\limits_{G_{r\varphi\theta}} r^2\cdot\cos^2\theta\cdot r^2\cdot\cos\theta\ drd\varphi d\theta = \iiint\limits_{G_{r\varphi\theta}} r^4\cos^3\theta\ drd\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^R r^4\cos^3\theta\ dr = 2\pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\theta d\theta\right)\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R =$$
$$\frac{2R^5\pi}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta = \frac{4\pi R^5}{15}$$

3. Вычисление объемов тела с использованием тройных интегралов.

Пусть тело занимает область G в пространстве Oxyz. Тогда объем этого тела
$$V(G)=\iiint\limits_G dxdydz$$

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$x^2 + y^2 = z^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
(внешнего по отношению конуса)
Решение:
$y^2 = z^2$
$y^2 - z^2 = 0$
$(y - z)(y + z) = 0$
$y = z)$
$(y = -z)$

$V = 2V(G_1) = 2 \iiint\limits_{G_{xyz}} dxdydz$ Перейдем к сферической системе координат $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \sin\theta \end{cases}$ $2 \iiint\limits_{G_{r\rho\varphi}} r^2 \cos\theta \, drd\varphi d\theta =$

$2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{a} r^2 \cos\theta \; dt = 2 \cdot 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \cos\theta \left[ \frac{r^3}{3} \Big|_0^a \right] \right) d\theta = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^3}{a} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{a}} = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} -$
$\frac{4\sqrt{2}}{6}\pi a^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

Пример: Вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями:
$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$
$x = a$
Решение:
$V = \iiint_{G_{xyz}} dxdydz$
Перейдем в обобщенную цилиндрическую систему координат
$\begin{cases} x = x \\ y = \rho \cdot b \cdot \cos\varphi \\ z = \rho \cdot c \cdot \sin\varphi \end{cases}$
$|J| = \rho bc$

$V = bc \iint\limits_{\rho\varphi} \rho d\rho d\varphi = bc \iint\limits_{D\rho\varphi} \left( a - \frac{a\rho^2}{2} \right) \rho d\rho d\varphi = abc \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \left( 1 - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho d\varphi = \frac{abc}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left( 2\rho - \rho^3 \right) d\rho = \frac{1bc}{2} 2\pi \left[ \rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right] \Big|_0^{\sqrt{2}}$
$abc\pi(2 - 1) = \pi abc$

Теория вероятностей.
Определение вероятностей.

1. Классическое определение вероятностей.

Пусть

1) $\Omega$ - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

2) $|\Omega| = N < \infty$

3) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход.

Определение: Вероятностью осуществления события А называется число
$P(A) = \frac{N_A}{N}$

Пример: Бросают 2 игральные кости.
А = {на обеих костях выпало одинаковое число очков}.
В = {сумма выпавших очков четная}.
С = {произведение выпавших очков = 6}.

P(A), P(B), P(C) - ?
Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2)$, где $x_i$ - количество очков выпавшей на i-ой кости.
   $(x_1, x_2)$ - размещение с повторениями из 6 по 2.
   N = 36

2) $A = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$
   $N_A = 6$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

3) $B = \{ \begin{matrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (2,2) & (2,4) & (2,6) \\ \ldots & & \\ (6,2) & (6,4) & (6,6) \end{matrix} \}$ $N_B = |B| = 18$
   $P(B)\ cfracN_BN = \dfrac{1}{2}$

4) $C = \{x_1 x_2 = 6\} = \{(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)\}$
   $N_C = |C| = 4$
   $P(C) = \dfrac{N_C}{N} = \dfrac{1}{9}$

Пример: Из колоды домино наудачу извлекают одну кость.
A = {это дубль}
B = {на кости ровно одна пустышка}
P(A)? P(B) = ?

1) $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant 6$
   Исход: $(x_1, x_2)$, где $x_1 \leqslant x_2,\ x_i \in \{0, \ldots, 6\}$
   $N = 28$

2) $A = \{(0,0),\ (1,1),\ \ldots, (6,6)\}$
   $N_A = 7$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$

3) $B = \{(0,1),\ (0,2), \ldots, (0,6)\}$
   $N_B = |B| = 6$
   $P(B) = \dfrac{N_B}{N} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$

2. Некоторые комбинаторные конфигурации.

При решении задач на классическое определение вероятности приходится подсчитывать число элементов в различных комбинаторных конфигурациях. При этом используется ряд стандартных приемов.

I. Сочетания без повторений.
Пусть

1) A - множество

2) $|A| = n$

Без ограничения общности можно считать, что
$A = \{1, 2, \dots, n\}$

Определение: Сочетанием без повторений из n по m называется любое m-элементное подмножество множества A, то есть набор
$\{x_1, \dots, x_n\}$

Замечание:

1) в определении подразумевается, что

   а) все входящие в сочетание элементы попарно различны.

   б) сочетание не изменится, если входящие в него элементы записать в другой последовательности например
   $\{1, 3, 10\} = \{3, 10, 1\}$

Th: Всего $\exists\ C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (биномиальные коэффициенты) различных сочетаний без повторений из n по m.

II. Размещение с повторениями.
$A = \{1, 2, \dots, n\}$
Определение: Размещение с повторениями называется кортеж (упорядоченный набор):
$(x_1, x_2, \dots, x_m)$
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, m}$

Замечание: Размещения различаются не только составом элементов но и последовательностью, в которой они записаны. Например
$(1, 1, 3) \neq (1, 3, 1)$

Th Всего $\exists\ \widetilde{A_n^m} = n^m$ различных размещений с повторениями из n по m.

III. Размещение без повторений.
Определение: Размещением без повторений из n по m называется кортеж
$(x_1, x_2, \dots, x_m)$,
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, m},\ x_i \neq n_j$ при $i \neq j$

Th Всего $\exists\ A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ различных размещений без повторения из n по m.

IV. Перестановка.
Определение: Перестановка длины n называется размещение без повторений из n по n, то есть кортеж
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
где $x_i \in A,\ i = \overline{1, n},\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j$

Th: Число перестановок длины n равно $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$

V. Схема упорядоченных разбиений.
Пусть

1) имеется n попарно различных шаров

2) имеется m попарно различных урн.

3) За j-ой урной закреплено число $n_j \in \mathbb{N}_0$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$

Вопрос: Сколькими способами можно разложить n шаром по m урнам, так, чтобы в j-ой урне лежало $n_j$ шаров?
Пример:

Th Общее число способов размещений n шаров по m урнам с учетом сделанных выше ограничений составит

$C(n_1, \ldots, n_m) = \dfrac{n!}{n! \cdot \ldots \cdot n_m!)}$

Пример: В партии из 10 однотипных изделий 3 изделия являются бракованными. Из партии случайным образом выбираются 3 изделия.
A = {в выборке ровно 1 брак}
B = {в выборке ровно 2 брака}
C = {в выборке 3 ровно 3 брака}
P(A), P(B), P(C) = ?
Решение:

1) 10 шаров Исход: $\{x_1, x_2, x_3\}$, где $x_i$ - номер извлеченного шара.
   Сочетание без повторения из 10 по 3
   $N = C_1^3 0 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120$

2) $P(A) =?$
   $\{\underbrace{x_1}_{\text{брак}}, \underbrace{x_2, x_3}_{\text{не брак}}\}$
   $N_A = 3 \cdot 21 = 63$
   $P(A) = \dfrac{61}{120} = \dfrac{21}{40}$

3) $P(B) =?$
   $\{\underbrace{x_1}_{\text{не брак}}, \underbrace{x_2, x_3}_{\text{брак}}\}$
   $N_B = 3 \cdot 7 = 21$
   $P(B) = \dfrac{21}{120} = \dfrac{7}{40}$

4) $P(C) =?$
   $\{\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{\text{брак}}\}$
   $N_C = 1$
   $P(C) = \dfrac{1}{12}$

Пример: 10 вариантов контрольной работы написаны на 10-ти отдельных картах. Варианты раздаются 8-ми сидящим рядом студентам (по 1-ому варианту в руки).
A = {варианты 1 и 2 не будут использоваться}
B = {варианты 1 и 2 достанутся сидящим рядом студентам}
C = {варианты будут распределены последовательно номера вариантов в порядке возрастания}
P(A), P(B), P(C) = ?
Решение:

1) Исход: $(x_1, \ldots, x_8)$,
   где $x_i$ - номер билета, который достался i-ому студенту.
   Размещение без повторений из 10 по 8
   $N = \dfrac{10!}{2!}$

2) $P(A) =?$
   $(x_1, \ldots, x_8),\ x_i \in \{3, 4, \ldots, 10\}$
   $N_A = A_8^8 = 8!$
   $P(A) = \dfrac{2 \cdot 8!}{10!} = \dfrac{1}{45}$

3) $P(B) =?$

$N_B = 2 \cdot A_8^6 \cdot 7 = 14 \cdot A_8^6$
$P(B) = \dfrac{14 \cdot 8! \cdot 2}{2! \cdot 10!} = \dfrac{14}{9 \cdot 10} = \dfrac{7}{45}$

4) $P(C) =?$
 $(1, 2, \ldots, 8)$
 $(2, 3, \ldots, 9)$
 $(3, 4, \ldots, 10)$
 $N_C = 3$
 $P(C) = \dfrac{3 \cdot 2}{10!}$

Пример: Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный телефонный номер. Считает, что в номере 7 цифр и все номера равно возможные. Найти вероятности следующих событий:
A = {4 последние цифры одинаковы}
B = {все цифры попарно различны}
C = {1-я цифра нечетная}
Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$,
 где $x_i \in \{0, \ldots 9\}$ - i-ая цифра номера.
 Размещение с повторениями из 10 по 7.
 $N = \widetilde{A}_1^7 0 = 10^7$

2) $P(A) =?$
 $(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{10^3}, \underbrace{x_4, x_4, x_4, x_4}_{10})$
 $N_A = 10^4$
 $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{10^4}{10^7} = \dfrac{1}{10^3}$

3) $P(B) =?$
 $(x_1, \ldots, x_7),\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j$
 $N_B = A_1^7 0 = \dfrac{10!}{3!}$
 $P(B) = \dfrac{10!}{3! \cdot 10^7} = \dfrac{10!}{3! \cdot 10^7}$

4) $PC() =?$
 $\widetilde{A}_1^6 0 = 10^6$
 $x_1 \in \{1, 3, 5, 6, 9\}$
 $N_C = 5 \cdot 10^6$
 $P(C) = \dfrac{5 \cdot 10^6}{10^7} = \dfrac{1}{2}$

Пример: На почту поступило 6 телеграмм. Их случайным образом распределяют по 4-ем каналам для обработки.
A = {на 1-ом канале окажется 3 телеграммы, на 2-ом - 2 телеграммы, на 3-ем - 1 телеграмма, на 4-ом - 0 телеграмм}.
P(A) = ?
Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ - Размещение с повторениями, где $x_i$ - номер канала, на который попала i-ая телеграмма.
 $\widetilde{A}_6^4 = 4^6$

2) $N_A = C(3,2,1,0) = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1\cdot 1} = \dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{2} = 60$

$P(A) = \dfrac{60}{4^6}$

Пример: Партия из 50-ти изделий 4 бракованных. Из партии выбирают 10 изделий случайным образом.
A = {среди выбранных изделий хотя бы одно бракованное}.
P(A) = ?
Решение:

1) Исход: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_10\}$ - сочетание без повторений из 50 по 10.
$x_i$ - номер извлеченного изделия.
$N = C^10_50 = \dfrac{50!}{10!\cdot 40!}$

2) $P(A) =?$
I способ.
$A = \underbrace{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}_{\text{несовместны}}$
$A_i$ - среди выбранных изделий ровно i бракованных, $i = \overline{1,4}$.
$P(A_i) =?$
$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{4} P(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{C_4^i\cdot C_{46}^{10-i}}{C^10_50}\right)$
II способ. $\overline{A}$ = {в выборке нет ни одного бракованного изделия}.
$N_{\overline{A}} = C^10_46$
$\{x_1, \dots, x_10\}$
$P_A(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C^10_46}{C^10_50}$

Пример: В шкафу находится 10 пар ботинок (все попарно различны). Из шкафа случайным образом вынимают 4 ботика.
A = {из вынутых из шкафа ботинок нельзя составить пару}.
P(A) = ?
Решение:

1) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ (сочетание без повторения из 10 по 4), где $x_i$ - номер ботинка.
$N = C_2^40$

2) $P(A) =?$
I способ.
$N_A = \dfrac{20\cdot 18\cdot 16\cdot 14}{4!}$

II способ.
$N_A = C_1^40\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4\cdot C_1^40$
$P(A) = \dfrac{N_A}{N}$

III способ.
$(a_1, x_2, x_3, x_4)$
$N = A_2^40$
$N_A = 20\cdot 18\cdot 16\cdot 14$

Пример: 6 пассажиров поднимаются в лифте 7-ми этажного дома. Считая, что движения начинается из подвала, найти вероятности событии:
A = {на первых трех этажах не выйдет никто}.
B = {все выйдут на первых 6-ти этажах}.
C = {все выйдут на 1-ом этаже}.

D = {на 5-ом, 6-ом, 7-ом этажах выйдут по два человека}.
Решение:

1) $(x_1, x_2, \dots x_6)$ - размещение с повторениями из 7 по 6.
   $x_i$ - этаж, на котором вышел i-й человек.
   $N = 7^6$

2) $P(A) =?$
   $(x_1, x_2, \dots, x_6)$
   $x_i \in \{4, 5, 6, 7\}$
   $N_A = 4^6$
   $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{4^6}{7^6} = \left(\dfrac{4}{7}\right)^6$

3) $P(B) =?$
   $(x_1, x_2, \dots, x_6)$
   $x_i \in \{1, 2, \dots, 6\}$
   $N_B = 6^6$
   $P(B) = \dfrac{N_B}{N} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^6$

4) $P(C) =?$
   $(x_1, x_2, \dots, x_6),\ x_i \in 1$
   $C = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$
   $N_C = 1$
   $P(C) = \dfrac{1}{7^6}$

5) $P(D) =?$
   Каждый кортеж из события D однозначно определяется номерами двух позиций в которых стоят две "5" и номерами в которых стоят две "6" .
   Схема упорядоченных разбиений.
   $N_D = C_6(2, 2, 2) = \dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$
   $P(D) = \dfrac{N_D}{N}$

   Замечание: $N_D$ можно подсчитать так:
   $N_D = C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 1 = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2} = C_6(2, 2, 2)$

3. Геометрическое определение вероятности.

Пусть

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\mu(\Omega) \subset \infty$, где $\mu$ - мера множества.

3) "степень возможности" осуществления события $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества A и не зависит от формы события A и его расположения внутри $\Omega$.

Определение: Вероятностью осуществления события A называется число
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega}$$

Пример: В отрезке [0; 1] случайным образом выбирают 2 точки.

A = {произведение из координат $< \dfrac{1}{2}$}.

P(A) = ?

Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2)$б где $x_i$ - координата i-ой точки.
   $\Omega = [0;1]x[0;1]$

2) $A = \{x_1 \cdot x_2 < \frac{1}{2}\}$
   $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$
   $\mu(\Omega) = 1$
   $\mu(A) = \frac{1}{2} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{2x_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln x_1\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln 2$

Условная вероятность.

1. Условная вероятность.

Пусть

1) $(\Omega, \beta, P)$ - вероятностное пространство

2) $A, B \in \beta$

3) $P(B) > 0$

Определение: Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B называется число
$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Определение: События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Th

Пусть

1) $P(B) > 0$
   Тогда A, B - независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Пример: 3 раза бросают игральную кость.
A = {результаты трех бросков попарно различны}.
B = {выпало хотя бы один раз "6" }.
$P(A), P(B), P(A|B) =?$
Указать, зависимы ли A и B.

Решение:

1) Исход: $(x_1, x_2, x_3)$ (размещение с повторениями из 6 по 3), где $x_i$ - количество очков, при i-ом броске.
   $N = 6^3$

2) $P(A) =?$
   $N_A = 6 \cdot 5 \cdot 4 = A_6^3$
   $P(A) = \frac{12-}{6^3}$

3) $P(B) =?$
   $P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$\overline{B} = \{"6" \text{ не выпало ни разу}\}$
$N_{\overline{B}} = 5^3$
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^3$

4) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$
AB = {все $x_i$ попарно различны и один из них = "6" }. $N_{AB} = 20 \cdot 3 = 60$
$$P(A|B) = \frac{\frac{60}{6^3}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{60}{6^3 - 5^3} = \frac{60}{(6-5)(6^2+50+25)} = \frac{60}{91}$$

5) $P(A) \neq P(A|B) \Rightarrow A, B$ - зависимы.

Пример: Из полной колоды в 52 карты случайным образом извлекают 1 карту.
A = {извлечен туз}
B = {извлечена карта черной масти}
C = {извлечена картинка}

1) Установить, является ли A,B,C независимыми попарно и независимы в совокупности.

2) P(ABC) = ?

Решение:

1) $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
$P(B) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$
$P(C) = \dfrac{16}{52}\dfrac{4}{13}$

2) $P(AB)$ = (AB = {туч черной масти}) = $\dfrac{2}{52} = \dfrac{1}{26}$
$P(AC)$ = (AC = A) = $P(A) = \dfrac{1}{13}$
$P(BC)$ = (BC = {картинка черной масти}) = $\dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$

3) Определение: События A и B называется независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$
$P(AB) = \dfrac{1}{26}$
$P(A)P(B) = \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{26}$
$\Rightarrow A, B$ - независимы.
$P(AC) = \frac{1}{13}$
$P(A) \cdot P(C) = \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{4}{13} = \dfrac{4}{169}$
$\Rightarrow A, C$ - зависимы.
$P(BC) = \dfrac{2}{13}$
$P(C) \cdot P(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{13} = \dfrac{2}{13}$
$\Rightarrow B, C$ - независимы.
A,B,C не является независимыми попарно (так как A и C зависимы). A, B, C не являются независимы в совокупности, так как они не являются попарно независимыми.

Пример: В аудитории находится 100 студентов из которых
английский знают: 50 человек
французский знают: 40 человек
немецкий знают: 35 человек

английский и французский: 20 человек
английский и французский: 8 человек
французский и немецкий: 5 человек

английский,французский и немецкий: 5 человек

Случайно выбранного студента вызывают к доске.
A = {он знает английский}
B = {он знает французский}
C = {он знает немецкий}

1) Установить, являются ли A, B, C попарно независимыми и независимыми в совокупности.
2) $P(AB|C) =?$

Решение:

1) $P(A) = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$
   $P(B) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$
   $P(C) = \dfrac{35}{100} = \dfrac{7}{20}$

2) $P(AB) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$
   $P(AC) = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25}$
   $P(BC) = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

3) $P(AB) = \dfrac{1}{5}$
   $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5}$
   $\Rightarrow A, B$ – независимы

   $P(AC) = \dfrac{2}{25}$
   $P(A) \cdot P(C) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7}{20} = \dfrac{7}{40}$
   $\Rightarrow A, C$ - зависимы

   $P(BC) = \dfrac{1}{10}$
   $P(B) \cdot P(C) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{25}$
   $\Rightarrow B, C$ - зависимы

   A, B, C - не являются попарно независимы $\Rightarrow$ A, B, C не являются независимы в совокупности.

4) $$P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{7}{20}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{20}{7} = \frac{1}{7}$$

2. Теорема сложения и умножения.

Th 1 Сложения.

1) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$

2) $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n}^{n} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n}^{n} P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$

Th 2 Умножения.

1) Если $P(A_1) > 0$, то $P(A_1A_2) = P(A_) \cdot P(A_2|A_1)$

2) Если $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$, то
$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$

Пример: Оператор ЗРК видит на экране 10 целей, среди которых 8 самолетов и 2 помехи (на экране они неразличимы). Оператор последовательно атакует 4 раза.
A = {большая часть атакованных целей - самолеты}
B = {все помехи были атакованы}
C = {помеха была атакована но не ранее, чем 3-им выстрелом}
D = {самолеты и помехи атакованы вперемежку}
Решение:

1) Исход: $(x_1x_2x_3x_4)$ (размещение без повторений из 10 по 4), где $x_i$ - номер цели, атакованный i-ым выстрелом.
$N = A_1^40 = \dfrac{10!}{6!}$

2) $A_1 = \{$атаковано ровно 3 самолета$\}$
$A_2 = \{$атаковано ровно 4 самолета$\}$ $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1A_2)}_{0} = P(A_1) + P(A_2)$

$A_2 = \{(\text{с, с, с, с})\}$
$N_{A_2} = A_8^4 = \dfrac{8!}{4!}$
$P(A_2) = \dfrac{N_{A_2}}{N} = \dfrac{\frac{8!}{4!}}{\frac{10!}{6!}}$
$P(A_1) =?$
$8 \cdot A_8^3 = N_{A_1}$
$P(A_1) = \dfrac{8A_8^3}{A_1^40}$

3) $P(B) =?$
(п, п, с, с)
$C_4^2$ - число способов выбрать две позиции для помех.
2! - число способов расставить 2 помехи по выбранным позициям.
$A_8^2$ - число способов расставить самолеты.
$N_B = C_4^2 \cdot 2 \cdot A_8^2$
$P(B) = \dfrac{N_B}{N}$

4) $C = C_1 + C_2$, где
$C_1 = \{$помехи впервые атакованы 3-м выстрелом$\}$
$C_2 = \{$помехи впервые атакованы 4-м выстрелом$\}$

$P(C)=P(C_1+C_2)=P(C_1)+P(C_2)-\underbrace{P(C_1C_2)}_{0}$

$P(C_1)=?$
<u>I способ</u>.
(с, с, п, *)
<u>II способ</u>.
$Q_i=\{$i-ым выстрелом атакован самолет$\}$ $i=\overline{1,4}$
$\overline{Q_i}=\{$i-ым выстрелом атакована помеха$\}$
$C_1=Q_1\cdot Q_2\cdot\overline{Q_3}$
$P(C_1)=P(Q_1Q_2\overline{Q_3})=\underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}}\cdot\underbrace{P(Q_2|Q_1)}_{\frac{7}{9}}\cdot\underbrace{P(\overline{Q_3}|Q_1Q_2}_{\frac{2}{8}}=\frac{2\cdot 7}{9\cdot 10}=\frac{7}{35}$

$C_2=Q_1\cdot Q_2\cdot Q_3\cdot\overline{Q_4}$
$P(C_2)=\underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}}\cdot\underbrace{P(Q_2|Q_1)}_{\frac{7}{9}}\cdot\underbrace{P(Q_3|Q_1Q_2)}_{\frac{6}{8}}\cdot\underbrace{P(\overline{Q_4}|Q_3Q_2Q_1)}_{\frac{2}{7}}=\frac{2\cdot 6}{10\cdot 9}=...$

5) $P(D)=?$
$D_2=\{$(с, п, с, п)$\}$
$D_1=\{$(п, с, п, с)$\}$
$D=D_1+D+2$
$P(D)=P(D_1+D_2)=P(D_1)+P(D_2)-\underbrace{P(D_1D_2)}_{0}$

$D_1=\overline{Q_1}\cdot Q_2\cdot\overline{Q_3}\cdot Q_4$
$P(D_1)=\underbrace{P(\overline{Q_1})}_{\frac{2}{10}}\cdot\underbrace{P(Q_2|\overline{Q_1})}_{\frac{8}{9}}\cdot\underbrace{P(\overline{Q_3}|\overline{Q_1}Q_2)}_{\frac{1}{8}}\cdot\underbrace{P(Q_4|\overline{Q_1}Q_2\overline{Q_3})}_{\frac{7}{7}}=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$

$D_2=Q_1\cdot\overline{Q_2}\cdot Q_3\cdot\overline{Q_4}$
$P(D_2)=\underbrace{P(Q_1)}_{\frac{8}{10}}\cdot\underbrace{P(\overline{Q_2}|Q_1)}_{\frac{2}{9}}\cdot\underbrace{P(Q_3|Q_1\overline{Q_2})}_{\frac{7}{8}}\cdot\underbrace{P(\overline{Q_4}|Q_1\overline{Q_2}Q_3)}_{\frac{1}{7}}=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$

$P(D)=P(D_1+D_2)$

<u>Пример</u>: По каналу связи, подверженному воздействию помех, передаются кодовые последовательности из 0 и 1. При этом вероятность того, что
$1\mapsto 1$ $p_1$
$1\mapsto 0$ $1-p_1$
$0\mapsto 0$ $p_2$
$0\mapsto 1$ $1-p_2$
В канал подают последовательность "10" . Считая, что отдельные символы искажаются независимо, найти вероятности событии:
A $=\{$принята последовательность 10$\}$
B $=\{$приняты 2 одинаковые символы$\}$
<u>Решение</u>:

1) Исход: $(x_1,x_2)$, где $x_i\in 0,1$ - i-ый принятый символ.

2) $A=\{(10)\}$
$A=A_1\cdot A_2$, где
$A_1=\{$1-ый принятый символ 1$\}$
$A_2=\{$2-ой принятый символ 0$\}$
$P(A)=$ (th умножения) $=\underbrace{P(A_1)}_{p_1}\cdot\underbrace{P(A_2|A_1)}_{P(A_2)=p_2\text{т.к. отдельные символы искажаются независимо}}$

3) $B=B_1+B_2$
$B_1=\{(1,1)\}$

$B_2 = \{(0,0)\}$
$P(B_1) = P\{\{1 \mapsto 1\} \cdot \{0 \mapsto 1\}\} =$ (искажения отдельных символов независимы) $= P\{1 \mapsto 1\} \cdot P\{0 \mapsto 1\} = p_1 \cdot (1-p_2)$

$P(B_2) = P\{\{1 \mapsto 0\} \cdot \{0 \mapsto 0\}\} = P\{1 \mapsto 0\} \cdot P\{0 \mapsto 0\} = (1-p_1) \cdot p_2$

$P(B) = P(B_1 + P_2) = P(B_1) + P(B_2) - \underbrace{P(B_1 B_2)}_{0} = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$

Пример: На карточках написаны буквы слова "дезоксирибонуклеиновая" . Эти карточки тщательно перемешиваются и последовательно извлекают 5 карточек без возвращения.
Найти вероятность того, что в порядке появления они извлекают слово "кокос" .
Решение:
A = {карточки образуют слово "кокос" }
Тогда
$A = A_1 \cdot \ldots \cdot A_5$, где
$A_1 =$ {на 1-ой карточке "к" }
$A_2 =$ {на 2-ой карточке "о" }
$A_3 =$ {на 3-ей карточке "к" }
$A_4 =$ {на 4-ой карточке "о" }
$A_5 =$ {на 5-ой карточке "с" }

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot P(A_4|A_1A_2A_3) \cdot P(A_5|A_1A_2A_3A_4) = \frac{2}{22} \cdot \frac{3}{21} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = \ldots$

Пример: Известно, что A, B - наблюдаемые в некотором случайном эксперименте события и
$P(B) = 0.4$ $P(A|B) = 0.3$ $P(A|\overline{B}) = 0.2$
$P(A),\ P(\overline{AB}),\ P(\overline{A} + \overline{B}),\ P(A \vartriangle B) = ?$
Решение:

1) $P(AB) =$ (по th умножения) $= P(A) \cdot P(B|A)$
$\Rightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$

2) $P(A) = P(A\Omega) + P(A(B+\overline{B})) = P(AB + A\overline{B}) =$ (по th сложения) $= \underbrace{P(AB)}_{0.12} + P(A\overline{B}) - \underbrace{P(ABA\overline{B})}_{0} = 0.12 + \underbrace{P(B)}_{0.6} \cdot \underbrace{P(A|\overline{B})}_{0.2} = 0.12 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.12 + 0.12 = 0.24$

3) $P(\overline{AB}) = \underbrace{P(\overline{B})}_{0.6} \cdot \underbrace{P(\overline{A}|\overline{B})}_{=1-P(A|\overline{B})} = 0.6 \cdot (1-0.2) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$

4) $P(\overline{A} + \overline{B}) =$ (th сложения) $= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{AB}) = 0.76 + 0.6 - 0.48 = 0.88$

5) $P(A \vartriangle B) = P(A \backslash B) + B \backslash A) = P(A\overline{B} + B\overline{A}) =$ (th сложения) $= P(A|overlineB) + P(\overline{A}B) - \underbrace{P(A\overline{B}\overline{A}B}_{0} = \underbrace{P(\overline{B}}_{0.6} \cdot \underbrace{A|\overline{B}}_{0.2} + \underbrace{P(B)}_{0.4} \cdot \underbrace{P(\overline{A}|B)}_{\text{при фикс.}=1-P(A|B)} = 0.12 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.4$

3. Формула полной вероятности.

Пусть $(\Omega, \beta, P)$ - вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.
Определение: Будем говорить, что события $H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу, если

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

2) $H_i H_j = \emptyset$, при $i \neq j$

3) $P(H_i) > 0,\ i = \overline{1,n}$

<u>Th</u> о формуле полной вероятности
Пусть

1) $H_1, \ldots, H_n$ - полная группа событий

2) A - событие

Тогда
$$\boxed{P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)}$$

<u>Пример</u>: В баскетбольной команде 12 игроков, из которых
4 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.95
5 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.8
3 выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.5
Найти вероятности событий:
A = {случайно выбранный игрок выполнит успешный трех очковый бросок}
B = {случайно выбранный игрок выполнит трех очковый бросок в серии из 3-х попыток}
<u>Решение</u>:

1) Рассмотрим
$H_1$ = {случайно выбранный игрок из отличной группы}
$H_2$ = {случайно выбранный игрок из хорошей группы}
$H_3$ = {случайно выбранный игрок из группы новичков}

Используем формулу полной вероятности:
$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{0.95} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{4}{12}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{0.8} \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{5}{12}} + \underbrace{P(A|H_3)}_{0.5} \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{3}{12}} = ...$

2) $P(B) = P(B|H_1) \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{4}{12}} + P(B|H_2) \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{5}{12}} + P(B|H_3) \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{3}{12}}$
$P(B|H_1)$ = (схема испытаний Бернулли: успех - выполнение броска; неудача - невыполнение) = (формула для вычисления вероятности хотя бы одного успеха $= 1 - q^n$ $q = 1 - 0.95 = 0.05$) = $1 - (0.05)^3$
$P(B|H_2) = 1 - (0.2)^3$
$P(B|H_3) = 1 - (0.5)^3)$
$P(B) = \left[1 - (0.05)^3\right] \cdot \dfrac{4}{12} + \left[1 - (0.2)^3\right] \cdot \dfrac{5}{12} + \left[1 - (0.5)^3\right] \cdot \dfrac{3}{12} = ...$

<u>Пример</u>: 10 студентов пришли сдавать экзамен. Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров знает 15 билетов, остальные знают все билеты.
Вероятность сдать экзамен по известному билету составляет 0.85, по неизвестному - 0.1.
A = {случайно выбранный студент группы сдал экзамен}.
<u>Решение</u>:
$H_1$ = {выбран Иванов или Петров}.
$H_2$ = {выбран Сидоров}.
$H_3$ = {выбран студент, который знает все билеты}.
$P(A) = P(A|H_1) \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{2}{10}} + P(A|H_2) \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{10}} + P(A|H_3) \cdot \underbrace{P(H_3)}_{\frac{7}{10}}$

$P(A|H_1)$ = {рассмотрим еще одну группу событий}
$B_1$ = {получен известный билет}
$B_2$ = {получен неизвестный билет}
Используя полную вероятность:

$P(A|H_1) = 0.85 \cdot \underbrace{\frac{20}{30}}_{P(B_1)} + 0.1 \cdot \underbrace{\frac{10}{30}}_{P(B_2)} = ...$

Аналогично

$P(A|H_2) = 0.85 \cdot \frac{15}{30} + 0.1 \cdot \frac{15}{30} = ...$

$P(A|H_3) = 0.85 \cdot \frac{30}{30} + 0.1 \cdot \frac{0}{30} = ...$

4. Формула Байеса.

Th Пусть

1) $H_1, \ldots, H_n$ - полная группа событий.
2) A - событие; $P(A) > 0$

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\underbrace{P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)}_{=P(A)\text{см. формулу полной вероятности}}}}$$ - формула Байеса.

Пример: В ящике лежит шар неизвестного цвета - с равной вероятностью белый или черный. В ящик кладут белый шар, шары тщательно перемешивают и вынимают 1 шар. Найти вероятность того, что в урне изначально был белый шар, если известно, что извлеченный шар оказался белым.

Решение:

1) Введем полную группу событий.
   $H_1 = \{$в урне изначально был белый шар$\}$
   $H_2 = \{$в урне изначально был черный шар$\}$
   $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

2) A $= \{$извлеченный шар - белый$\}$
   По формуле полной вероятности
   $P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{1} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3) $P(H_1|A) =$ (формула Байеса) $= \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{cfrac12}{cfrac34} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Замечание: Вероятности $P(H_i),\ i = \overline{1,n}$ называются априорными, так как известны до проведения эксперимента.

Вероятности $P(H_i|A),\ i = \overline{1,n}$ называются апостериорными (известны после проведения эксперимента).

В рассмотреном примере

$P(H_1) = \frac{1}{2}$

$P(H_i|A) = \frac{2}{3}$

Учет дополнительной информации об исходе эксперимента привел к тому, что

$P(H_i|A) > P(H_i)$

Пример: (см ранее)

В баскетбольной команде 12 игроков.

4 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.95

5 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.8

3 игрока выполняют трех очковый бросок с вероятностью 0.5

Случайно выбранный игрок выполнил трех очковый бросок. К какой части команды он вероятнее всего принадлежит?

Решение:

1) Полная группа события
   $H_1 = \{$выбран игрок из отличной группы$\}$
   $H_2 = \{$выбран игрок из хорошей группы$\}$
   $H_3 = \{$выбран игрок из посредственной группы$\}$

   A = {выбранный игрок выполнил 3-х очковый бросок}.
   $P(A) = ...$ (см выше).

2) Формула Байеса
   $P(H_1|A) = \dfrac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \dfrac{0.95 \cdot 4}{12 \cdot P(A)} = \dfrac{3.8}{12 \cdot P(A)}$
   $P(H_2|A) = \dfrac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \dfrac{0.8 \cdot 5}{12 \cdot P(A)} = \dfrac{4}{12 \cdot P(A)}$ - MAX
   $P(H_3|A) = \dfrac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \dfrac{0.5 \cdot 3}{12 \cdot P(A)} = \dfrac{1.5}{12 \cdot P(A)}$

Ответ: Вероятнее всего этот игрок из хорошей группы.

5. Схема Бернулли.

Рассмотрим случайный эксперимент, в ходе которого возможна реализация одного из 2-х элементарных исходов, то есть
$\Omega = \{$успех, неудача$\}$.

Пусть
P{успех} $= p \in (0; 1)$
Тогда
P{неудача} $= 1 - p = q$ - обозначение.
Замечание: Описанный выше случайный эксперимент будем называть испытанием.

Определение: Схемой Бернулли называется серия однотипных испытаний, в которой отдельные испытания независимы в совокупности. Замечание: Независимость отдельных испытаний означает, что в ходе всей серии вероятность реализации успеха (и, следовательно, вероятность неудачи) неизменна.

Th:

1) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ - вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний

2) $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$ - вероятность того, что в серии из n испытаний число k успехов лежит между $k_1$ и $k_2$.

3) $P_n(l \geqslant 1) = 1 - q^n$ - вероятность того, что в серии из n испытаний произошел хотя бы один успех.

Пример: 10 раз бросают правильную игральную кость.
A = {"6" появится ровно 2 раза}
B = {"6" появится от 2 до 4 раза}
C = {"6" не появится ни разу}
D = {"6"появится хотя бы 1 раз}
P(A) = ?, P(B) = ?, P(C) = ?, P(D) = ?
Решение:

1) Используем схему Бернулли для "успех" - выпадение "6" ; "неудача" - выпадение "1" , ... , "5"
   $p = \dfrac{1}{6}$

$q = \frac{5}{5}$
n = 10

2) $P(A) = P_1^2 0 = C_1^2 0 p^2 q^8 = \frac{10!}{2 \cdot 8!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0.291$

3) $P(B) = \sum\limits_{k=2}^{4} C_n^k p^k q^{n-k} = P(A) + C_1^3 0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 + C_1^4 0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.291 + 0.155 + 0.054 \approx 0.5$

4) $P(C) = P_1 0(0) = C_1^0 0 \cdot p^0 \cdot q^1 0 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 0 \approx 0.162$

5) $P(D) = P_1 0(l \geqslant 1) = 1 - P(C) \approx 1 - 0.162 \approx 0.838$

Пример: ЗРК атакует самолет противника, обстреливая его зенитными ракетами. Вероятность попадания в самолет каждой ракеты равна 0.6; для поражения требуется как минимум 3 попадания. Найти вероятность поражения цели после 6 выстрелов.
Решение:

1) $\Omega = \{$"успешное попадание" , "неудачное попадание" $\}$
   Серия событий - серия выстрелов.
   Так как вероятность успеха неизменна по отдельные испытания независимы и используем схему Бернулли.
   $p = 0.6;\ q = 0.4;\ n = 6$

2) A = {цель поражена}
   $P(A) = P_6(3 \leqslant k \leqslant 6) = \sum\limits_{k=3}^{6} C_6^k p^k q^{n-k} = C_6^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^4 + C_6^4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^2 + C_6^5 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^1 + C_6^6 \cdot 0.6^6 \cdot 0.4^0 \approx 0.82$

Пример: Вероятность того, что приобретенный лотерейный билет окажется выигрышным, равна 0.01. Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы вероятность выиграть хотя бы по одному из них была $\geqslant 0.95$?
Решение:

1) Используем схему Бернулли.
   "успех" - приобретенный билет выигрышный.
   $p = 0.01$

2) Пусть купленно n билетов. Тогда вероятность выиграть хотя бы по одному
   $P = P_n(k \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n \geqslant 0.95$
   $1 - (1 - p^n) \geqslant 0.95$
   $(1-p)^n \leqslant 0.05$
   $n \geqslant \log_{1-p} 0.05 = \frac{\ln 0.05}{\ln(1-p)} = \frac{\ln 0.05}{\ln 0.99} \approx 298.07$

Ответ: $n \geqslant 299$.
Замечание: Вообще схема Бернулли неприменима в это примере, так как отдельные испытания не являются независимыми (например, если в начале серии куплено несколько пустых билетов, то вероятность того, что очередной билет будет выигрышным, увеличивается).
Однако, если общий тираж велик, а количество приобретаемых билетов сравнительно невелико, то вероятность успеха изменится несущественно и схема Бернулли удовлетворяет описанному эксперименту.

Случайные величины.

Одномерные случайные величины.

1. Функция распределения случайной величины.

Определение: (нестрогое)
Пусть исход случайного эксперимента можно описать числом X.
Тогда X - случайная величина.

Пусть $(\Omega, \beta, P)$ - вероятностное пространство.
Определение: Случайной величиной называется отображение $X : \Omega \to \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in \mathbb{R}$ множество $\{w \in \Omega : \ X(w) < x\} \in \beta$

Замечание:

1) На случайную величину можно смотреть как на случайный эксперимент, в котором на числовую прямую бросают точку.
При этом координата $x_0$ падения точки является реализация рассматриваемой случайной величиной.

2) При многократном повторении такого эксперимента в различные области на прямой с различной частотой.
Определение: Законом распределения случайной величины называют правило, которое разл. значениям (различными областям на прямой) ... вероятности, с которыми случайная величина принимает эл. значениям (попадает в эти области на прямой).

3) Универсальным способом задания закона распределения случайной величины является использование функции распределения.

Определение: Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется отображение $F : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F(x) = P\{X < x\}, \ x \in \mathbb{R}$

Замечание:

Пример: В ящике находится 5 шаров: 2 белых и 3 черных. Из ящика случайным образом вынимают 2 шара (без возвращения). X - количество белых шаров среди извлеченных.
Найти функцию распределения случайной величины X.
Решение:

1) $X \in \{0, 1, 2\}$
$P\{X = 0\} = \dfrac{3}{10}$
$\{X = 0\}$ = {1-ый шар черный}·{2-ой шар черный}
$P\{X = 0\} = P\{A_1 \cdot A_2\} = (\text{th умножения}) = \underbrace{P(A_1)}_{\frac{3}{5}}\underbrace{P(A_2|A_1)}_{\frac{2}{4}} = \dfrac{3}{10}$

$P\{X = 2\} = \dfrac{1}{10}$
$P\{X = 1\}$ = P{ {1-ый шар белый, 2-ой шар черный} + {1-ый шар черный, 2-ой шар белый} } = (th умножения) $= P(B_1) + P(B_2) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{6}{10}$
$P\{X = 1\} = \dfrac{6}{10}$

2) $F(x) = P\{X < x\}$
$F(x_1) = P\{X < x_1\} = 0$
$F(0) = P\{X < 0\} = 0$
$F(x_2) = P\{X < x_2\} = P\{X = 0\} = \dfrac{3}{10}$
$F(1) = P\{X < 1\} = \dfrac{3}{10}$
$F(x_3) = P\{X < x_3\} = P\left\{\underbrace{\{X = 0\} + \{X = 1\}}_{\text{несовместны}}\right\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{6}{10} = \dfrac{9}{10}$
$F(2) = \dfrac{9}{10}$

$F(x_4) = P\{X < x_4\} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leqslant 0 \\ \frac{3}{10}, \ 0 < x \leqslant 1 \\ \frac{9}{10}, \ 1 < x \leqslant 2 \\ 1, \ 2 < x \end{cases}$$

Замечание: Этот пример иллюстрирует свойства функции распределения.

Свойства функции распределения:

$1^o$ $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

$2^o$ F является неубывающей

$3^o$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$4^o$ В каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ непрерывна слева, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$

$5^o$ $P\{a \leqslant X < b\} = F(b) - F(a)$

2. Дискретные случайные величины.

Определение: Случайной величиной называют дискретной, если множество её возможных значений конечно или счетно.
Если случайная величина X принимает значения из конечного множества, закон её распределения можно задать с использованием таблицы, которая называется рядом распределения.
Здесь $x_i, \ i = \overline{1, n}$ - всевозможные значения случайной величины X.
$p_i = P\{X = x_i\}, \ i = \overline{1, n}$
Очевидно, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

Пример: Бросают игральную кость. X - число выпавших очков.

1) Построить ряд распределения случайной величины X.
2) Найти функцию распределения случайной величины X.
3) $P\{2 \leqslant x < 5\} =?$

Решение:

1)

2) $F(x) = P\{X < x\}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leqslant 1 \\ \frac{1}{6}, \ 1 < x \leqslant 2 \\ \frac{2}{6}, \ 2 < x \leqslant 3 \\ \frac{3}{6}, \ 3 < x \leqslant 4 \\ \frac{4}{6}, \ 4 < x \leqslant 5 \\ \frac{5}{6}, \ 5 < x \leqslant 6 \\ 1, 6 < x \end{cases}$$

3) $P\{2 \leqslant X < 5\} =$ (Свойство функции распределения) $= F(5) - F(2) = \dfrac{4}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

3. Непрерывные случайные величины.

Определение: Случайная величина X называется непрерывной, если $\exists$ функция $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

где

1) F - функция распределения случайной величины X

2) предполагается, что несобственный интеграл в правой части сходится для всех $x \in \mathbb{R}$.
При этом f называют функцию плотности распределения вероятностей случайной величины X.

Замечание:

1)

2) Можно показать, что во всех точках непрерывности $f(x)$ справедливо $f(x) = F'(x)$

3) Таким образом
$f(x) \Rightarrow F(x)$ (см. определение непрерывности случайной величины).
$F(x) \Rightarrow f(x)$ (см. пункт 2 замечания)

Это означает, что функция плотности, как и функция распределения, содержит всю информацию о законе распределения случайной величины X.

Свойства непрерывности случайной величины

$1^o$ $f(x) \geqslant 0$

$2^o$ $P\{a \leqslant X < b\} = \int\limits_a^b f(x)dx$

$3^o$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки)

$4^o$ Если X - непрерывная случайная величина, то для любого наперед заданного $x_0$ $P\{X = x_0\} = 0$

Пример: Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leqslant 2 \\ (x-2)^2, \ 2 < x \leqslant 3 \\ 1, \ 3 < x \end{cases}$

1) Найти функцию плотности и построить её график

2) $P\{X \in [1; 2,5)\}, \ P\{X \in [2,5; 3,5]\}, \ P\left\{X > \dfrac{9}{4}\right\} - ?$

Решение:

1) $f(x) = F'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \leqslant 2 \\ 2(x-2), & 2 < x \leqslant 3 \\ 0, & 3 < x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2(x-2), \ 2 < x \leqslant 3 \\ 0, \text{ иначе} \end{array} \right\}$

2) $P\{X \in [1; 2,5)\} = P\{1 \leqslant X < 2,5\} =$ (свойство функции распределения) $= F(2,5) - F(1) = (2,5-2)^2 - 0 = \dfrac{1}{4}$

$P\{X \in [2,5; 3,5]\} = P\{2,5 \leqslant X \leqslant 3,5\} = P\left\{\underbrace{\{2,5 \leqslant X < 3,5\} + \{X = 3,5\}}_{\text{несовместны}}\right\} = P\{2,5 \leqslant X < 3,5\} + \underbrace{P\{X = 3,5\}}_{\text{0,т.к. X - непрер. сл. вел.}} = F(3,5) - F(2,5) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$P\left\{X > \dfrac{9}{4}\right\} = P\left\{\dfrac{9}{4} < X < +\infty\right\} = \underbrace{P\left\{X = \dfrac{9}{4}\right\}}_{=0} + P\left\{\dfrac{9}{4} < X < +\infty\right\} = (\text{th сложения}) = P\left\{\dfrac{9}{4} \leqslant X < +\infty\right\}$

$= (\text{свойство функции распределения}) = F(+\infty) - F\left(\dfrac{9}{4}\right) = 1 - \left(\dfrac{9}{4} - 2\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

Замечание: Так как для непрерывной случайной величины $P\{X = x_0\} = 0$, то в дальнейшем для непрерывной случайной величины при вычислении вероятностей мы не будем различать события $\{X \in [a; b]\}$, $\{X \in [a, b)\}$, $\{X \in (a; b]\}$, $\{X \in (a, b)\}$.

Пример: Дана функция $f(x) = ce^{-4|x-3|},\ x \in \mathbb{R}$.

1) Подобрать c = const так, чтобы f являлась функцией плотности некоторой случайной величины X.
2) Найти функцию распределения случайной величины X.
3) $P\{1 < X < 5\}$, $P\{X \leqslant 13\}$

Решение:

1) $f(x) \geqslant 0$, если $c \geqslant 0$

   При этом должно выполняться $1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2c \int\limits_{3}^{+\infty} e^{-4|x-3|}dx = \{x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow |x-3| = x - 3\} =$

   $2c \int\limits_{3}^{+\infty} e^{-4(x-3)}dx = -\frac{2}{4} \cdot c \cdot e^{-4(x-3)}\Big|_{3}^{+\infty} = 0 - \frac{2}{4} \cdot c(0 - 1) = \frac{1}{2}c$

   $1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2$

2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} f(t)dt = \begin{cases} func1,\ x \leqslant 3 \\ func2,\ x > 3 \end{cases}$ $\quad$ function 1) $= 2\int\limits_{-\infty}^{x} e^{4(t-3)}dt = 2 \cdot \frac{1}{4}e^{4(t-3)}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} \cdot e^{4(x-3)}$

   unction 2) $= \frac{1}{2} \int\limits_{3}^{+\infty} e^{-4(t-3)}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4(t-3)}\Big|_{3}^{+\infty} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(e^{-4(x-3)} - 1\Big) = 1 - \frac{1}{2}e^{-4(x-3)}$

   $$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{4(x-3)},\ x \leqslant 3 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-4(x-3)},\ 3 < x \end{cases}$$

3) $P\{1 < X < 5\} =$ (свойство функции распределения + свойство непрерывности случайной величины)

   $= F(5) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-4(5-3)} - \frac{1}{2}e^{4(1-3)} = 1 - e^{-8}$

   $P\{X \leqslant 13\} = P\{-\infty < X \leqslant 13\} = F(13) - F(-\infty) - 1 - \frac{1}{2}e^{-40} \approx 1$

4. Нормальное распределение.

Определение: Говорят, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m и $\sigma^2$, если её функция плотности имеет вид

Обозначение: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}$

$X \sim N(m, \sigma^2)$

Замечание:

1)

2) Определение: Нормальным распределением называется стандартным нормальным, если $m = 0, \sigma = 1$ то есть функция плотности этого распределения имеет вид

   $f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}$

3) Функция распределения стандартной нормальной случайной величины

   $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{0,1}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty} xe^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ x \in \mathbb{R}$

   $\Phi(x)$ - эта функция не является элементарной, для нее составлена таблица значений.

4) Вместо $\Phi(x)$ часто используется функция

$$\Phi_0(x) = \int\limits_0^x f_{0,1}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e_{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

<u>Свойства $\Phi_0$</u>

$1^o$ $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi_0(x)$

$2^o$ $\Phi_0(-x) \equiv -\Phi_0(x)$

$3^o$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_0(x) = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi_0(x) = -\dfrac{1}{2}$

$4^o$ $\Phi_0(0) = 0$

$5^o$ Если $X \sim N(m, \sigma^2)$, то $\begin{matrix} P\{a < X < b\} \\ P\{a < X \leqslant b\} \\ P\{a \leqslant X < b\} \\ P\{a \leqslant X \leqslant b\} \end{matrix} = \Phi\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right).$

<u>Пример:</u> $X \sim N(2,1)$
$P\{1 < X < 5\}$–?
<u>Решение:</u>

$$P\{1 < X < 5\} = \Phi_0\left(\frac{5-2}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{1-2}{1}\right) = \Phi_0(3) + \Phi_0(1) = 0.49865 + 0.34134 \approx ...$$

Случайные векторы.

1. Функции распределения случайного вектора.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве.

Определение: n-мерным случайным вектором называется кортеж $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Закон распределения случайного вектора удобно задавать с использованием функции распределения.

Определение: Функцией распределения вероятностей случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ называется отображение
$F:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
определенное правилом $F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$.

Замечание: На двумерный ($n = 2$) случай вектор $(X_1, X_2)$ можно смотреть как на случайный эксперимент, в котором на плоскость бросают точку. Значение $F(x_1^o, x_2^o)$ - функция распределения этого вектора в точке $(x_1^o, x_2^o)$ равно вероятности того, что брошенная на плоскость точка упадет левее и ниже точки $(x_1^o, x_2^o)$, так как
$F(x_1^o, x_2^o) = P\{X_1 < x_1^o, X_2 < x_2^o\}$

Пример: Закон распределения вектора $(X_1, X_2)$ задан таблицей.
Найти функцию распределения вероятностей вектора $(X_1, X_2)$.
Решение:

$$F(x_1, x_2) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\} = \begin{cases} 0,\ x_1 \leqslant 1 \\ 0,\ 1 < x_1 \leqslant 2,\ x_2 \leqslant -1 \\ 0.15,\ 1 < x_1 \leqslant 2,\ -1 < x_2 \leqslant 3 \\ 0.45,\ 1 < x_1 \leqslant 2,\ 3 < x_2 \leqslant 5 \\ 0.7,\ 1 < x_1 \leqslant 2,\ 5 < x_2 \\ 0,\ 2 < x_1,\ x_2 \leqslant -1 \\ 0.2,\ 2 < x_1,\ -1 < x_2 \leqslant 3 \\ 0.6,\ 2 < x_1,\ 3 < x_2 \leqslant 5 \\ 1,\ 2 < x_1,\ 5 < x_2 \end{cases}$$

2. Дискретные случайне векторы.

Определение: Случайные вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ называется дискретной, если каждая из случайных величин $X_i,\ i = \overline{1, n}$ является дискретной.

Пример: Закон распределения дискретного случайного вектора задан таблицей.
Найти:

а) $F(1.5, 0.5), F(1, 2)$

б) $P\{-2 < X \leqslant 2,\ 0 \leqslant Y \leqslant 1\}$

в) Ряды распределения случайных величин X и Y

г) $F_X, F_Y$

Решение:

а) $F(1.5, 0.5) = P\{X < 1.5, Y < 0.5\} = 0.13 + 0.25 = 0.38$
$F(1, 2) = P\{X < 1, Y < 2\} = 0.13 + 0.25 + 0.17 + 0.15 = 0.7$

б) $P\{-2 < X \leqslant 2,\ 0 \leqslant Y \leqslant 1\} = 0 + 0.15 + 0.09 = 0.24$

в)

г) $F_X(x) = \begin{cases} 0, \ x < -2 \\ 0.7, \ -2 < x \leqslant 2 \\ 1, \ x < 2 \end{cases}$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \ y \leqslant -0.5 \\ 0.19, \ -0.5 < y \leqslant 0 \\ 0.44, \ 0 < y \leqslant 0.5 \\ 0.76, \ 0.5 < y \leqslant 1 \\ 1, \ y < 1 \end{cases}$

3. Непрерывные случайные векторы.

<u>Определение:</u> Случайный вектор (X,Y) называется непрерывным, если $\exists$ функция $f : \mathbb{R}^{\nleq} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall\forall x, y \in \mathbb{R} \ F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2) dt_2 \ (*)$$

При этом такая функция f называется функцией плотности распределения вероятностей случайного вектора (X,Y).

<u>Замечание:</u>

1) Если (x,y) - точка непрерывности функции f, то
$f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

2) $f(x,y) \Rightarrow F(x,y)$ (см. $(*)$).
$F(x,y) \Rightarrow f(x,y)$ (см. часть 1) замечания).

   Это означает, что функция плотности, как и функция распределения содержит всю информацию о законе распределения случайного вектора.

<u>Пример:</u> Функция распределения случайного вектора (X,Y) имеет вид
$$F(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\left[4 \cdot \arctan(x) \cdot \arctan(y) + 2\pi \cdot \arctan(x) + 2\pi \cdot \arctan(y) + \pi^2\right]$$
Найти:

1) Совместную плотность распределения случайных величин X и Y.

2) Маргинальные плотности распределения X и Y.

3) Маргинальные функции распределения случайных величин X и Y.

4) $P\{Y > X, \ X > 0\}$

<u>Решение:</u>
<u>1 способ</u>

$$F(x,y) \Rightarrow f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Rightarrow \begin{matrix} f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \\ f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt \\ F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) dt \end{matrix}$$

<u>2 способ</u>

$$F(x,y) \Rightarrow f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$F(x,y) \Rightarrow \begin{matrix} F_X(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y) \\ F_Y(y) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x,y) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_X(x) = F'_X \\ f_Y(y) = F'_Y \end{matrix}$$

1) Используем способ 2 $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{4}{1+x^2} \cdot \arctan x + \frac{2\pi}{1+x^2} + 0 + 0\right]$$

$$f(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

2) $F_X(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = \dfrac{1}{4\pi^2}\left[4\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\arctan x + 2\pi\cdot\arctan x + 2\pi\cdot\dfrac{\pi}{2} + \pi^2\right] = \dfrac{\arctan x}{\pi} + \dfrac{1}{2}$

Аналогично $F_Y(y)$

3) $f_X(x) = \dfrac{d}{dx}[F_X(x)] = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

$f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2}$

4) $P\{Y > X,\ X > 0\} = P\{(X,Y)\in D\} =$ (свойство непрерывности случайного вектора) $= \iint\limits_D f(x,y)dxdy =$

$\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{y} = \dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{(1+y^2)}dx = \dfrac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+y^2}\cdot\arctan x\Big|_0^y dy = \dfrac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\arctan y}{1+y^2}dy = \dfrac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty}\arctan y d(\arctan y) =$
$\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{2}\arctan^2 y\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{8}$

Пример: Функция плотности случайного вектора имеет вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} Ax^2y^2,\ (x,y)\in k \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найти постоянную А.
2. Найти маргинальные плотности случайной величины X и Y.
3. Найти маргинальные функции распределения случайной величины X и Y.
4. $P\{X+Y \leqslant 1\}$

Решение:

1) А найдем из условия нормировки:

$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^{\not{2}}} f(x,y)dxdy = [f(x,y) = 0 \text{ вне } k] = \iint\limits_k Ax^2y^2dxdy = A\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 x^2y^2dy = A\int\limits_0^1 x^2dx\cdot\int\limits_0^1 y^2dy =$
$A\cdot\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1\cdot\dfrac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{A}{9} \Rightarrow A = 9$

2) $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \left\{\begin{array}{l} 0,\ x\notin(0;1) \\ 9\int\limits_0^1 x^2y^2dx,\ x\in[0;1] \end{array}\right\} = \begin{cases} 0,\ x\notin(0;1) \\ 3x^2,\ x\in[0;1] \end{cases}$

Аналогично $f_Y(y) = \begin{cases} 0,\ y\notin(0;1) \\ 3y^2,\ y\in[0;1] \end{cases}$

3) $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \left\{\begin{array}{l} 0,\ x\leqslant 0 \\ \int\limits_0^x 3t^2dt,\ 0 < x \leqslant 1 \\ \int\limits_0^1 3t^2dt,\ x > 1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 0,\ x\leqslant 0 \\ x^3,\ 0 < x\leqslant 1 \\ 1,\ x > 1 \end{array}\right\}$

Аналогично $f_Y(y) = \begin{cases} 0,\ y\leqslant 0 \\ y^3,\ 0 < y\leqslant 1 \\ 1,\ y > 1 \end{cases}$

4) $P\{X+Y \leqslant 1\} = P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = (f = 0 \text{ вне } k) = \iint\limits_{D_1} 0x^2y^2dxdy = 9\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-y} x^2y^2dy =$

$9\int\limits_0^1 x^2dx \cdot \int\limits_0^{1-y} y^2dy = 3\int\limits_0^1 y^3(1-y)^3dy = \dots$

4. Независимые случайные величины.

Пусть (X,Y) - двумерный случайный вектор.
Определение: Случайные величины X и Y называются независимыми, если
$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$,
где F - совместная функция распределения X и Y
$F_X$ и $F_Y$ - маргинальные функции распределения X и Y.

Th

1) Если $(X,Y)$ - дискретный случайный вектор, то
$X,Y$ - независимы $\Leftrightarrow p_{ij} \equiv p_{X_i}p_{Y_j}$,
где $p_{ij} = P\left\{(X,Y) = (x_i, y_j)\right\}$
$P_{X_i} = P\{X = x_i\}$
$P_{Y_j} = P\{Y = y_j\}$

2) Если (X,Y) - непрерывный случайный вектор, то
X,Y - независимы $\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, где
f - совместная плотность распределения X и Y
$f_X, f_Y$ - их маргинальные плотности

Пример: (см. выше)
$0 \neq 0.3 \cdot 0.25$
то есть $P\left\{(X,Y) - (2;0)\right\} \neq P\{X=2\} \cdot P\{Y=0\} \Rightarrow X,Y$ - зависимы

Пример: (см.выше)
$F(x,y) = \dfrac{1}{4\pi^2}\left[4 \cdot \arctan x \cdot \arctan y + 2\pi \cdot \arctan x + 2\pi \cdot \arctan y + \pi^2\right]$
Было получено:
$F_X(x) = \dfrac{\arctan x}{\pi} + \dfrac{1}{2}$
$F_Y(y) = \dfrac{\arctan y}{\pi} + \dfrac{1}{2}$
$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \Rightarrow X,Y$ - независимы. Другой способ:
$f(x,y) = \dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$
$f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$
$f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$
Так как $f(x,y) \equiv f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow X,Y$ - независимы.

Пример: (см. выше)
$f(x,y) = \begin{cases} 9x^2y^2, \ (x,y) \in k \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$
Было получено:
$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \ x \in (0;1) \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$
$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2, \ y \in (0;1) \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$
Так как $f(x,y) \equiv f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow X,Y$ - независимы.

5. Условные законы распределения.

Пусть

1) (X,Y) - двумерный случайный вектор.

2) известно, что $Y = y_o$.

Вопросы:

1) что в этом случае можно сказать о возможных значениях случайной величины X?

2) о распределении вероятностей между этими значениями?

**I.** Пусть

1. (X,Y) - дискретный случайный вектор

2. $X \in \{x_1, \dots, x_n\}$, $P\{X = x_i\} = p_{X_i}$

3. $Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$, $P\{Y = y_j\} = p_{Y_j}$

4. $p_{ij} = P\left\{(X,Y) = (x_i, y_j)\right\}$

На лекции было показано, что

$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \dfrac{p_{ij}}{p_{X_i}}$

Определение: Условным рядом/законом распределения случайной величины X при условии $Y = y_j$ называется набор вероятностей

$\Pi_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{Y_j}},\ i = \overline{1,m}$

(для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$ свой условный закон распределения).

Замечание: Условные законы распределения случайной величины Y при условии $X = x_i$ определяется аналогично - это наборы вероятностей

$\tau_{ij} = \dfrac{P_{ij}}{p_{X_i}},\ j = \overline{1,n}$

(для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ свой закон условного закона распределения).

Пример: Двумерный дискретный случайный вектор (X,Y) имеет закон распределения, заданный таблицей

1. Найти условный закон распределения X и ...

2. Построить графики
   $F_X(x|Y = 1)$
   $F_Y(y|X = 0)$

Решение:

1) Пусть $Y = 0$ (то есть $Y = y_1,\ j = 1$).
   Условный закон распределения случайной величины X в этом случае задается набором вероятностей
   $\Pi_{i1} = \dfrac{p_{i1}}{p_{Y_1}},\ \overline{1,3}$

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| -1 | $\frac{0.3}{04} = \frac{3}{4}$ | $\frac{0.2}{0.6} = \frac{2}{6}$ |
| 0 | $\frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$ | $\frac{0.3}{0.6} = \frac{3}{6}$ |
| 2 | $\frac{0}{0.4} = 0$ | $\frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}$ |
| | 1 | 1 |

| X | -1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

2) Условные законы распределения случайной величины Y.

| | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| -1 | $\frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}$ | $\frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$ | 1 |
| 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |

Условный закон распределения случайной величины Y при X = -1 (то есть $X = x_i$)

$\tau_{1j} = \frac{p_{ij}}{p_{X_i}},\ i = \overline{1,2}$

$F_Y(y|X = 0) = P\{Y < y|X = 0\}$

| Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

**II.** Пусть

1) (X,Y) - непрерывный случайный вектор.
2) f(x,y) - совместная плотность распределения X и Y.
3) $f_X(x), f_Y(y)$ - маргинальные плотности X и Y.

Рассмотрим условную функцию распределения случайной величины X при условии $Y = y$.

$F_X(x|Y = y) = P\{X < x|Y = y\}$

Производная по x этой функции - условная плотность распределения случайной величины X при условии Y = y.

$f_X(X|Y = y) =$ (можно показать) $= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

Замечание: Аналогично:

$f_Y(y|X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ - условная плотность распределения случайной величины Y при условии X = x.

Пример: Совместная плотность распределения случайной величины X и Y имеет вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} 10y,\ (x,y) \in D \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

Найти условные плотности распределения случайных величин X и Y.

Решение:

1) Найдем маргинальные плотности распределения X и Y.

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ \text{если } x \notin (0;1) \\ \int\limits_0^{x^2} 10ydy,\ x \in (0;1) \end{array} \right\{ = \begin{cases} 0,\ \text{если } x \notin (0;1) \\ 5x^4,\ x \in (0;1) \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^4,\ x \in (0;1) \\ 0,\ \text{если } x \notin (0;1) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ y \notin (0;1) \\ \int\limits_{\sqrt{y}}^{1} 10ydx,\ y \in (0;1) \end{array} \right\} = \begin{cases} 10y(1-\sqrt{y}),\ y \in (0;1) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 10y(1-\sqrt{y}),\ y \in (0;1) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

2) Условные плотности

$$f_X(x|Y=y)=\frac{x,y}{f_Y(y)}=\left\{\begin{array}{l}\text{не опр.},\ y\notin(0;1)\\ 0,\ y\in(0;1),\ x\notin(\sqrt{y};1)\\ \frac{10y}{10y(1-\sqrt{y})},\ y\in(0;1),\ x\in(\sqrt{y};1)\end{array}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{1-\sqrt{y}},\ y\in(0;1),\ x\in(\sqrt{y};1)\\ 0,\ y\in(0;1),\ x\notin(\sqrt{y};1)\\ \text{не опр.},\ y\in(0;1)\end{cases}$$

$$f_Y(y|X=x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\left\{\begin{array}{l}\text{не опр.},\ x\notin(0;1)\\ 0,\ x\in(0;1),\ y\notin(0;x^2)\\ \frac{10y}{5x^4},\ x\in(0;1),\ y\in(0;x^2)\end{array}\right\}=\begin{cases}\frac{2y}{x^4},\ x\in(0;1),\ y\in(0;x^2)\\ 0,\ x\in(0;1),\ y\notin(0;x^2)\\ \text{не опр.},\ x\notin(0;1)\end{cases}$$

Функции от случайных величин.

Пусть

1) X - случайная величины

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Тогда
$Y = \varphi(X)$ - некоторые случайная величина.
Основной вопрос: Как, зная закон распределения случайной величины X и функции $\varphi$, найти закон распределения случайной величины Y?

1. Функции от дискретных случайных величин.

Если X - дискретная случайная величина, то Y также будет дискретной, так как функция не может принимать больше значений чем не аргумент.

Пример: Закон распределения случайной величины X задан таблицей

| X | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.15 | 0.3 | 0.1 | 0.05 | 0.3 |

Найти закон распределения случайной величины $Y = ||X - 1| - 1|$.
Решение:

| Y | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.15 | 0.3 | 0.1 | 0.05 | 0.3 |

Ответ:

| Y | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | 0.25 | 0.45 | 0.3 |

$P\{Y = 1\} = P\{X \in \{-1; 1.3\}\}$
$P\{Y = 0\} = P\{X \in \{0; 2\}\}$
$P\{Y = 3\} = ...$

2. Функции от непрерывных случайных величин.

Пусть

1) X - непрерывная случайная величина.

2) $f_X(x)$ - функция плотности случайной величины X.

3) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонная функция.

4) $\varphi$ - непрерывно дифференцируема.

5) $\psi = \varphi^{-1}$ - обратная к $\varphi$ функция.

6) $Y = \varphi(X)$

Тогда
$f_Y(y) = f_X(\psi(y)) \cdot |\psi'(x)|$.

Пример: Плотность распределения случайной величины X имеет вид:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, \ x \in (0; 2) \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$
Найти плотности распределения случайных величин

а) $Y = X^3$

б) $Y = X^2 + 1$

Решение:

а) $\varphi(x) = x^3$ - монотонная на всей числовой прямой.
Тогда
$f_Y(y) = f_X\left(\psi(y)\right) \cdot |\psi'(y)|$
$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$
Таким образом

$$f_Y(y) = f_X\left(\psi(y)\right) \cdot |\psi'(y)| = f_X(\sqrt[3]{y}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \ \sqrt[3]{y} \notin (0;2) \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}, \ \sqrt[3]{x} \in (0;2) \end{array} \right\} = \begin{cases} 0, \ y \in (0;8) \\ \frac{1}{6\sqrt[3]{y}}, \ \in (0;8) \end{cases}$$

б) $\varphi(x) = x^2 + 1$ - не является монотонной.
Однако $x \in (0;2) \Rightarrow$ можно считать что $\varphi$ - монотонна (так как при $x \geqslant 0$, $\varphi(x)$ монотонная).
$f_Y(y) = f_X\left(\psi(y)\right) \cdot |\psi(y)|$,
где $\psi(y)$ - обратная к $\varphi$ на участке $x \geqslant$, то есть $\psi(y) = +\sqrt{y-1}$

$$f_Y(y) = (x \geqslant 0 \Rightarrow \varphi(x) \geqslant 1) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \ y < 1 \\ f_X\left(\psi(y)\right) \cdot |\psi'(y)|, \ y > 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \ y < 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{y-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}}, \ \sqrt{y-1} \in (0;2) \\ 0, \ \sqrt{y-1} \notin (0;2) \end{array} \right\} =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}, \ y \in (1;5) \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

Пример:
$X \sin N(m, \sigma^2)$
Найти плотности распределения случайных величин

а) $Y = e^X$

б) $Y = |X|$

Решение:

а) $\varphi(x) = e^x$
$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, то есть $\psi(y) \ln y$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\dfrac{(x-m)^2)}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$\varphi$ - монотонная $\Rightarrow$

$$f_Y(y) = f_X\left(\psi(y)\right) \cdot |\psi'(y)| = \left\{ \begin{array}{l} 0, \ y < 0 \\ f_X(\ln y)\frac{1}{y}, \ y > 0 \end{array} \right\} = \begin{cases} 0, \ y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \cdot e^{-\dfrac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}}, \ y > 0 \end{cases}$$

б) $\varphi(x) = |x|$ - не является монотонной
$f_Y(y) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_X\left(\psi_k(y)\right) |\psi_k'(y)|$
где $\psi_1(y), \ldots, \psi_k(y)$ - все решения уравнения $y = \varphi(x)$

$$f_Y(y) = \begin{array}{l} 0, \ y < 0 \\ (*), \ y > 0 \end{array} \ \boxed{=}$$

$(*)$: при y $> 0$
$y = |x| \Leftrightarrow x \pm y$, то есть $\psi_1(y) = -x$, $\psi_x(y) = x$, m $= 2$

$$\boxed{=} \left\{ \begin{array}{l} 0, \ y < 0 \\ f_X\left(\psi_1(y)\right) \cdot \underbrace{|\psi_1'(y)|}_{=1} + f_X\left(\psi_2(y)\right) \cdot \underbrace{|\psi_2'(y)|}_{=1}, \ y > 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} f_X(-y) + f_X(y), \ y > 0 \\ 0, \ y < 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \left(e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} + e \right. \\ 0, \ y < 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{y^2+m^2}{2\sigma^2}} \cdot ch\left(\frac{my}{\sigma^2}\right), \ y > 0 \\ 0, \ y < 0 \end{cases}$$

Числовые характеристики случайных величин.

1. Математическое ожидание.

Пусть X - дискретная случайная величина, принимающая значения
$x_i, \ i \in I$
Математическое ожидание случайной величины X называется число
$M[X] = \sum\limits_{i \in I} p_i x_i$
где $p_i = P\{X = x_i\}$

Замечание: если X принимает множество значений, то в определении предполагается, что соответствующий ряд сходится абсолютно.

Пример: Пусть X имеет ряд распределения

| X | -1 | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.3 |

Найти MX. Решение:
по определению:
$MX = \sum\limits_{i} p_i x_i = -1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3 = \ldots = 1.5$

Определение: Математическое ожидание непрерывной случайной величины X называется число
$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$
где f - функция плотности распределения случайной величины X.

Замечание: предполагается, что несобственный интеграл в определении сходится абсолютно. В противном случае, что $\nexists MX$

Пример: Случайная величина X имеет плотность распределения
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \ x \in (0;1) \\ 0, \ x \notin (0;1) \end{cases}$$
Найти MX.
Решение:
$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = (f(x) \equiv 0 \text{ вне } (0;1)) = \int\limits_{0}^{1} x \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$