Теория вероятностей.

1. Случайные эксперименты.

Определение: Случайным называется эксперимент результат которого невозможно предсказать.

Пример:

1) Подбрасывают монету. Возможные исходы: $\Omega = \{\text{Г,Р}\}$ где Г - выпадение герба, Р - выпадение решки. $|\Omega| = 2$
2) Бросают игральную кость. Наблюдают результат: число выпавших ... $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   $|\Omega| = 6$
3) Бросают монету до первого появления герба. Наблюдают результат - количество бросков ... $\Omega = 1, 2, 3, ... = \mathbb{N}$
   $|\Omega| =$...
   (Ω является ...
4) В больнице измеряют температуру случайно выбранного пациента. $\Omega = [33, 42]$
   $|\Omega| = c$
   (Ω имеет мощность континуума).
5) Производят стрельбу по плоской мишени размеры которой 1м x 1м. Набл. результат - координаты (x,y).
   ...
   $\Omega = \left\{(x, y) : |x| \leqslant \frac{1}{2}; |y| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$
   $|\Omega| = c$

Определение: Множество Ω всех исходов данного случайных экспериментов называется пространством элементарных исходов.

Замечание: При рассмотрении пространства элементарных исходов предполагает: что

1) Каждый элементарный исход неделим, так как не может быть разложен на более мелкие исходы.
2) В результате случайного эксперимента всегда происходит ровно один элементарный исход из Ω.

Определение (нестрогое): Событием называется (любое) множество множества Ω.

Определение: Говорят, что в результате случайного эксперимента произошло событие А, если в результате этого эксперимента произошел один из входящих в А элементарных исходов.

Пример: Бросают игральную кость.
$\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$
$A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$
Если выпало 2 очка, то наступило А.

Определение: Событие А называют следствием события В, если наступление события В влечет наступление события А, то есть $B \subseteq A$.

Замечание: Любое множество Ω содержит в ... подмножество $\emptyset$ и Ω. Соответствующее события называются невозможными ($\emptyset$) и достоверными (Ω). Оба этих события называются ...

Пример: В урне находится 2 красных и 3 синих шара.
А = { извлеченный шар - зеленый } = $\emptyset$.
В = { извлеченный шар - синий } = Ω

2. Операции над событиями

События - множества (подмножество множества Ω) $\Rightarrow \cup, \cap, -, \setminus, \Delta$.

Определение: Суммой событий $A, B \subseteq \Omega$ называют событие $A + B = A \bigcup B$.

Определение: Произведение событий $A, B \subseteq \Omega$ называют событие $AB = A \bigcap B$.

Определение: $A \setminus B$ называется разностью событий А и В.

Определение: $\overline{A}$ называется событием, противоположным А.

Свойства операции над событиями:
(см. теоретико-множественное тождество (основные)).

Определение: События $A, B \in \Omega$ называется несовместными, если $AB = \emptyset$. В противном случае события А и В называются совместными.

Определение: События $A_1, ..., A_n$ называется попарно-несовместные, если $A_i, A_j = \emptyset,\ i \neq j$ - несовместными в совокупности, если $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = \emptyset$

Замечание: попарно-несовместные $\Rightarrow$ несовместные в совокупности.

3. Классическое определение вероятности.

Пусть

1) $|\Omega| = N$

2) по условию случайного эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход остальным (в этом случае говорят, что все элементарные исходы равновероятны).

3) $A \subseteq \Omega$, $|A| = N_A$

Определение: Вероятностью осуществления события А называется число $P(A) = \frac{N_A}{N}$
Пример: 2 раза бросают игральную кость.
А = {сумма выпавших очков $\geqslant 11$}
$P(A) = ?$

Решение:
Исход: (x_1, x_2), где x_i-количество очков, выпавшем при i-ом броске.
$\Omega = \{1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$ $|\Omega| = 36 = N$

б) $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
$n_a = |A| = 3$

в) $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Свойства вероятности (в соответствии с классическими определениями)

1^o $P(A) \geqslant 0$

2^o $P(\Omega) = 1$

3^o Если $AB = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Доказательство

1^o $P(A) = \frac{N_A}{N} \geqslant 0$

2^o $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$

3^o а) $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$
(Формула включений и исключений) По условию $|AB| = 0 \Rightarrow N_{A+B} = N_A + N_B$
б) $P(A + B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$

Замечание: Недостатком классического определения вероятности.

1) Неприменимо в случае, когда $|\Omega| = \infty$

2) Неприменимо, если некоторые исходы являются "более возможными чем другие.

4. Геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай бесконечное Ω, когда $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
Пусть

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\mu(\Omega) < \infty$
где μ - мера множества
$$\begin{cases} n = 1 - \mu - \text{длина} \\ n = 2 - \mu - \text{площадь} \\ \ldots \end{cases}$$

3) Возможность принадлежности исхода эксперимента некоторому событию прямо-пропорциональна мере этого события и не зависит от его (события) формы и расположения внутри Ω.

Определение: Вероятностью осуществления события А называется число $P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu\Omega}$.
Пример: "Задача о встрече".
Два человека договорились встретиться в условленном месте в промежутке от 12 до 13 часов. При этом если один из них пришел раньше другого, то он ждет 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что они встретятся, если появление каждого из них равновероятно в любой момент между 12 и 13 часами?
Решение:

1) Исход:
   (x_1, x_2) где $x_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$
   x_i - время появления i-ого человека после 12.
   $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 = [0;1]\} = [0;1]x[0;1]$

2) A $= \{$эти 2 человека встретились$\}$
   $A = \left\{(x_1, x_2) : |x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

3) В соответствии с геометрическим определением $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(\Omega) - 2\mu(\Delta)}{\mu(\Omega)} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Замечание:

1) Очевидно, что из геометрического определения следует те же свойства вероятности, что и из классического определения.

2) недостатком геометрического определения является то, что некоторая область внутри Ω могут быть более предпочтительные чем другие области той же меры. Например если в разобранном примере появление каждого из этих двух человек было более вероятным в середине часа, то геометрическое определение дало бы неудовлетворительный результат.

5. Статистическое определение вероятности.

Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

2) $A \subseteq \Omega$ - событие, связанные с этим экспериментом.

3) Этот случайным эксперимент произведен n раз, при этом событие A произошло n_A раз.

Определение: Вероятностью события A называется эмпирический (то есть из эксперимента) предел
$P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$
Замечание:

1) из статистического определения ... те же свойства вероятности, что и из двух предыдущих определений.

2) Недостатки статистического определения:

   - никакой эксперимент невозможно осуществить бесконечное число раз.
   - с точки зрения современной математики эти определения являются архаизмом, так как не дают достаточной базы для развития теории.

6. Сигма-алгебра событий.

Для аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события.
Заметим, что:

- данные ранее нестрогое определение события как произвольного подмножества в Ω использовать нельзя, так как ... в этом случае теория будет противоречивой (см. парадокс Рассела)

- по этой причине событиями мы будем называть лишь те подмножества множества Ω, которые $\in$ заранее оговоренному набору подмножеств.

- с точи зрения здравого смысла понятно, что если событий A и B известно, наступили они в данном эксперименте или нет, то также должно быть известно, наступили ли в этом эксперименте события $\overline{A},\ A + B,\ AB, \ldots$

по этой причине указанный набор подмножества должен быть замкнуто относительно операций $-, +, \cdot, \setminus, \ldots$.

Эти соображения приводят к следующему определению:
Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

2) β - набор подмножества множества Ω.

Определение: β называется σ-алгеброй событий, если:

1) $\beta \neq \emptyset$
2) $A \in \beta \Rightarrow \overline{A} \in \beta$
3) если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$
   то $A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \beta$

Простейшие свойства σ-алгебры событий

1^o $\Omega \in \beta$

2^o $\emptyset \in \beta$

3^o если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$, то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \beta$

4^o если $A, B \in \beta$, то $A \backslash B \in \beta$

Доказательство:

1^o а) $\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \beta$
б) в соответствии с аксиомой 2) $\overline{A} \in \beta$
в) в соответствии с 3) $\underbrace{A + \overline{A}}_{\Omega} \in \beta$

2^o $\Omega \in \beta \Rightarrow \underbrace{\overline{\Omega}}_{=\emptyset} \in \beta$

3^o $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta \Rightarrow \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}, \ldots \in \beta \Rightarrow \overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} \in \beta \Rightarrow \overline{\overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} + \ldots} \int \beta \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \beta$

4^o $A \backslash B = A\overline{B}$
$A, B \in \beta \Rightarrow A, \overline{B} \in \beta \Rightarrow A\overline{B} \in \beta$

Замечание:

1) В дальнейшем, говоря о вероятности, всегда будем предполагать, что задана некоторая σ-алгебра событий. При этом слово "событие"всегда будет обозначать элемент этой σ-алгебры.
2) Если множество Ω конечно, то в количестве σ-алгебры событий на Ω всегда будем рассматривать ...

7. Аксиоматическое определение вероятности.

Пусть

1) Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.
2) β - σ-алгебра на Ω

Определение: Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение
$P : \beta \to \mathbb{R}$,
обладающее свойствами:

1^o $\forall A \in \beta$ $P(A) \geqslant 0$ (аксиома неотрицательности)

2^o $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)

3^o если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$ попарно-несовместные события, то $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ (расширенная аксиома сложения).

Определение: Тройка (Ω, β, P) называется вероятностным пространством.
Свойства вероятности (следствия из аксиоматического определения.

1^o $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2^o $P(\emptyset) = 0$

3^o Если $A \subseteq B$, то $P(A) \subseteq P(B)$

4^o $\forall A \in \beta$ $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

5^o $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6^o Для любого <u>конечного</u> набора событий $A_1, \ldots, A_n \in \beta$ справедливо $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) - \sum\limits_{i \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum\limits_{i \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} P(A_1 A_2 A_3) - \ldots (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$

<u>Доказательство</u>

1^o а) $A + \overline{A} = \Omega$
б) $A\overline{A} = \emptyset \Rightarrow$ (акс 3^o) $\Rightarrow P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$
в) б) $\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2^o $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) =$ (свойство1^o) $= 1 - \underbrace{P(\Omega)}_{1} = 0$

3^o $A \subseteq B$
$B = A + (B \backslash A) \Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \backslash A)}_{\geqslant 0} \Rightarrow P(B) \geqslant P(A)$

4^o а) $P(A) \geqslant 0$ вытекает из аксиомы 1^o
б) Покажем, что $P(A) \leqslant 1$ $A \subseteq \Omega \Rightarrow$ (по свойству3^o) $\Rightarrow P(A) \leqslant \underbrace{P(\Omega}_{1}$

5^o а) $A + B = A + (B \backslash A) \Rightarrow$ (аксиома3^o) $\Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B \backslash A)$
б) $B = (B \backslash A) + (AB)$
(аксиома 3^o) $\Rightarrow P(B) = P(B \backslash A) + P(AB) \Rightarrow \boxed{P(B \backslash A) P(B) - P(AB)}$
в) Подставляем выражение для $P(B \backslash A)$ из пункта б) в пункт а): $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6^o Является обобщение свойства 5^o на случай n событий.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов исходов β - σ-алгебра на Ω.
<u>Определение</u>: Вероятностью называется отображение $P : \beta \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

1^o $P(A) \geqslant 0$ (аксиома неотрицательности)

2^o $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)

3^o любых попарно-несовместных событий $A_1, A_2, \ldots$
$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$ (расширенная аксиома сложения)

<u>Замечание</u>: Иногда вместо расширенной аксиомы сложения 3^o рассматривают аксиому

$3'$) для любых попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$
$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$

3) для любой неубывающей последовательности событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ справедливо $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$, где $A = A_1 + \ldots + A_n + \ldots$ (аксиома непрерывности).

Можно показать, что

$$3^o \Leftrightarrow \begin{cases} 3' \\ 3'' \end{cases}$$

<u>Условные вероятности</u>

1. Определение условной вероятности.

Пусть

1) A, B - случайные события связанные с некоторым экспериментом.

2) Известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Как эта информация повлияет на вероятность что, в результате этого эксперимента произошло событие A?

Пример: Из колоды в 36 карт случайным образом извлекают одну карту.
A = {извлекают туз}
B = {извлечена картинка}
Тогда
$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
$P_B(A) =$ (наступило B $\Rightarrow$ извлечена карта: Валет, Дама, Король, Туз, то есть извлечена одна из 16 карт) $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Замечание: Рассмотрим классическую схему для определения вероятности. Имеется N равно возможных исходов.
$|A| = N_A, \ |B| = N_B$

Так как известно, что в результате случайного эксперимента наступило B, то все исходы, не попавшие B, можно не рассматривать.
В этом случае событие A может наступить лишь при реализации одного из исходов, входящих в AB.
Поэтому
$P_B(A) = \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Пусть (Ω, β, P) - вероятностное пространство (не обязательно оно реализует классическую схему).

Определение: Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число
$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$

Замечание:

1) Для того, чтобы подчеркнуть разницу, "об..."вероятностью иногда будем называть безусловной.

2) Зафиксируем некоторое событие B и будем рассматривать $P(A|B)$ как функцию события $A \in \beta$

Th: Условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет трем аксиомам безусловной вероятности.

Доказательство

1) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geqslant 0$

2) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

3) Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ - набор попарно непересекающихся событий
   $P(A_! + A_2 + \ldots |B) \frac{P(A_1 + A_2 + \ldots |B)}{P(B)} =$ (свойство ...) $= \frac{P(A_1 B + A_2 B + \ldots)}{P(B)} =$

   а) $A_i \cdot A_j = \emptyset$ при $i \neq j$
   б) $A_i B \subseteq A_i$
      $A_j B \subseteq A_j$

   в) а)б) $\Rightarrow (A_i B)(A_j B) = \emptyset \Rightarrow$ рассматрив. аксиому сложения для набора $A_1 B, A_2 b, \ldots$

$= \frac{P(A_1 B) + P(A_2 B) + \ldots}{P(B)} =$ (... свойство сходимости рядов) $= \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} + \ldots = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \ldots$

Следствие. Условная вероятность $P(A|B)$ при фиксированном событии B обладает всеми свойствами безусловной вероятности:

1^o $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$

2^o $P(\emptyset|B) = 0$

3^o Если $A_1 \subseteq A_2$, то $P(A_1|B) \subseteq P(A_2|B)$

4^o $0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$

5^o $P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 A_2|B)$

6^o Для любого конечного набора событий $A_1, \ldots, A_n$
$P(A_1 + \ldots + A_n|B) = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} P(A_{i_1}|B) - \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} P(A_{i_1} A_{i_2}|B) + \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}|B) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n|B)$

Доказательство Свойства $1^o - 6^o$ безусловной вероятности является следствием аксиом $1^o - 3^o$ вероятности. Так как, условная вероятность удовлетворяет этим аксиомам, то для нас выполняются и аналогии свойств $1^o - 6^o$.

Пример: Среди 15 лотерейных билетов 5 выигрышных. Сначала 1-ый игрок тянет 1 билет затем 2-ой игрок тянет 1 билет.
$A_1 =$ {1-ый игрок достал выигрышный билет}

$A_2 = \{$2-ой игро достал выигрышный билет$\}$
$P(A_2|A_1) =?$

Решение: I способ: по определению условной вероятности
$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$

1) Исход: (x_1, x_2), где x_I - номер билета, извлеченный i-ым игроком, $x_i \in \{1, \dots, 15\}$ (x_1, x_2) - размещение без повторений из 15 по 2.
   $N = 15 \cdot 14$

2) $N_{A_1} = 5 \cdot 14$
   $P(A_1) = \frac{5 \cdot 14}{15 \cdot 14} = \frac{1}{3}$

3) $N_{A_1A_2} = 5 \cdot 4 = 20$
   $P(A_1A_2) = \frac{20}{15 \cdot 14} = \frac{2}{11}$

4) $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{2/21}{1/3} = \frac{1}{7}$

II способ: подсчитает $P(A_2|A_1)$, перестроив пространство Ω.
$P(A_2|A_1) =$ (известно, что наступило $A_1 \Rightarrow$ осталось 14 билетов из которых 4 выигрышных) $= \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$
2. Формула умножения вероятностей.

Th 1: формула умножения вероятностей для 2-х событий. Пусть

1) A_1, A_2 - события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

2) $P(A_1) > 0$ Тогда $\boxed{P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)}$ - формула умножения вероятностей для 2-х событий.

Доказательство.

1) Так как $P(A_1) \neq 0$, то определена условная вероятность
   $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$

Th 2: формула умножения вероятностей для n событий. Пусть

1) $A_1, \dots, A_n$ - события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

2) $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$
   Тогда
   $\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})}$ - формула умножения вероятностей для n событий.

Доказательство.

1) $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \subseteq A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$, если $k \leqslant n-1$
   $\Rightarrow P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \supseteq P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$, $k = \overline{1, n-1}$
   То есть все входящие в правую часть формулы умножения условной вероятности определены.

2) $P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}_{A} \cdot \underbrace{A_n}_{B}) =$ (из th умножения для 2-х событий $P(AB) = P(A)P(B|A)) = P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots}_{A} \cdot \underbrace{A_{n-1}}_{B})P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) = P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$

Пример: На 7 карточках написаны буквы, составляющие слово "шоколад". Карточки перемешивают и случайным образом извлекают последовательно 3 карточки (без возвращения).
A $= \{$в порядке извлечения эти карточки образуют слово "код"$\}$.
Решение:

1) Обозначение: $A_1 = \{$при 1-ом извлечении появилось "к"$\}$
   $A_2 = \{$при 2-ом извлечении появилось "о"$\}$
   $A_3 = \{$при 3-ем извлечении появилось "д"$\}$
   Тогда
   $A = A_1A_2A_3$

2) $P(A) = P(A_1A_2A_3) = (\text{th умножения}) = \underbrace{P(A_1)}_{\frac{1}{7}} \cdot \underbrace{P(A_2|A_1)}_{\frac{2}{6}=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(A_3|A_1A_2)}_{\frac{1}{5}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$

3. Независимые события.

Пусть A,B - события, связанные со случайным экспериментом.

Определение: События A и B называются независимыми, если:
$P(AB) = P(A)P(B)$

Th

1) Пусть $P(B) > 0$
   Тогда A,B - независимы $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

2) Пусть $P(A) > 0$
   Тогда A,B - независимы $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

Доказательство Докажем 1).

а) $\Rightarrow$ необходимость
   $P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(BA)}{P(B)} = (\text{A,B - независимы}) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$

б) $\Leftarrow$ достаточность
   $P(AB) = (P(B) > 0 \Rightarrow$ используем th умножения вероятностей$) = P(B)P(A|B) =$ (по условию P(A|B) = P(A)) $=$ $P(A)P(B) \Rightarrow$ A и B независимы.

Замечание: В качестве определения независимых событий кажется более логичным выбрать условие $P(A|B) = P(A)$ или $P(B|A) = P(B)$, а не условие $P(AB) = P(A)P(B)$. Однако последнее условие работает всегда, в то время как первые два условия работают лишь при $P(B) > 0 (P(A) > 0)$.

Пример: из колоды в 36 карт случайным образом извлекают одну карту.
A = {извлечен туз}
B = {извлечена карта красной масти}.
Выяснить,являются ли события A и B независимыми.
Решение?

1) $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

2) $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
   P(AB) = (AB = {извлечен туз красной масти} = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

3) $P(AB) \stackrel{?}{=} P(A)P(B)$
   $\frac{1}{18} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}$ верно $\Rightarrow$ A,B - независимы.

Th Пусть A, B - независимы. Тогда независимыми являются события:

1) $\overline{A}\text{и}B$

2) $A\text{и}\overline{B}$

3) $\overline{A}\text{и}\overline{B}$

Доказательство:

1) Проверим равенство $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$

   а) если $\underbrace{P(B)}_{\overline{A}B \subseteq B \Rightarrow P(\overline{A}B) \leqslant P(B) = 0} = 0 \Rightarrow$ правая часть $= 0$

   б) если $P(B) > 0$, то $P(\overline{A}B) = (\text{th умножения}) = P(B) \underbrace{P(\overline{A}|B}_{1-P(A|B)} =$ (условная вероятность обладает всеми свойствами

   $P(B)(1 - P(A|B) = (\text{A,B - независимы} \Rightarrow P(A|B) = P(A)) = P(B)\underbrace{1 - P(A)}_{P(\overline{A})} = P(\overline{A})P(B).$

   Левая часть = правая часть $\Rightarrow$ верно.

2), 3) доказываются аналогично (доказать самостоятельно)

Пример: События $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми попарно, если
$\forall\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad i \neq j$
A_i и A_j - независимы.

Определение: События $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если
$\forall K \in \{2, \ldots, n\} \; \forall\forall i_1, \ldots, i_k : \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$
$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$.

Замечание: Это определение означает, что $A_1, \ldots, A_n$ - независимые в совокупности, если:

1) $P(A_{i_1}, A_{i_2}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}), \quad i_1 < i_2.(k = 2)$

2) $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot P(A_{i_3}).(k = 3)$

... .

k-1) $P(A_i \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_i) \cdot \ldots \cdot P(A_n).(k = n)$

Замечание:

1) Очевидно, что
$A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности $\Rightarrow A_1, \ldots, A_n$ независимы попарно.
Обратное неверно.

Пример: Бернштейна. Рассмотрим правильный тетраэдр на сторонах которого написаны цифры 1, 2, 3. Тетраэдр подбрасывают.
$A_1 = \{$на нижней грани есть 1$\}$ $A_2 = \{$на нижней грани есть 2$\}$ $A_3 = \{$на нижней грани есть 3$\}$

1) $P(A_1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
$P(A_2) = \dfrac{1}{2}$
$P(A_3) = \dfrac{1}{2}$

2) $P(A_1A_2) = ($на нижней грани есть 1 и 2$) = \dfrac{1}{4} = P(A_2A_3) = P(A_3A_1)$ Таким образом
$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$
$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$
$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$
$\Rightarrow A_1A_2A_3$ - независимы попарно.

3) $P(A_1A_2A_3) = ($на нижней грани присутствуют 1, 2, 3$) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$
Таким образом A_1, A_2, A_3 не являются независимыми в совокупности.

4. Формула полной вероятности.

Пусть (Ω, β, P) - вероятностное пространство.

Определение: Будем говорить, что события $H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу, если

1) $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$

2) $H_iH_j = \emptyset, \quad i \neq j$

3) $P(H_i) > 0, \quad i = \overline{1, n}$

Th о формуле полной вероятности. Пусть

1) $H_1, \ldots, H_n$ - полная группа событий.

2) $A \in \beta$ - некоторое событие.

Тогда
$\boxed{P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}$

Доказательство: $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \ldots + H_n)) = P(AH_1 + \ldots + AH_n) =$

а) $H_iH_j = \emptyset$

б) $(AH_i) \subseteq H_j$
$(AH_j) \subseteq H_j$

в) а) б) $\Rightarrow (AH_i)(AH_j) = \emptyset$

$=$[1] $P(AH_1) + \ldots + P(AH_2) =$ (th умножения) $= P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)$

Пример: В магазине поступили телевизоры 3-х фирм из которых:
30% произвела 1-я фирма
50% произвела 2-я фирма
20% произвела 3-я фирма
Известно, что среди телевизоров
1-ой фирмы 7% брака
2-ой фирмы 5% брака
3-ей фирмы 10% брака
. Найти вероятность того, что случайно выбранный телевизор окажется бракованным?

Решение:

1) $H_1 = \{$выбранный телевизор произведен 1-ой фирмой$\}$
$H_2 = \{$выбранный телевизор произведен 2-ой фирмой$\}$
$H_3 = \{$выбранный телевизор произведен 3-ей фирмой$\}$
Обозначение:
A $= \{$выбранный телевизор бракованный$\}$

2) Формула полной вероятности
$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{0.07}\underbrace{P(H_1)}_{0.3} + \underbrace{P(A|H_2)}_{0.05}\underbrace{P(H_2)}_{0.5} + \underbrace{P(A|H_3)}_{0.1}\underbrace{P(H_3)}_{0.2} = 0.066$

5. Формула Байеса.

Th о формуле Байеса. Пусть

1) Выполнено условие th о формуле полной вероятности

2) $P(A) > 0$

Тогда
$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}, \quad i = \overline{1,n}}$ - формула Байеса.

Доказательство:

$P(H_i|A) = (P(A) > 0 \Rightarrow$ условные вероятности определена$) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}$

Пример: Рассмотрим пример о покупке телевизора.
Пусть известно, что куплен брак. Телевизор какое фирмой он вероятнее всего произведен?
$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.07 \cdot 0.3}{P(A)} = \frac{0.021}{P(A)}$
$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.05 \cdot 0.5}{P(A)} = \frac{0.025}{P(A)}$
$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{P(A)} = \frac{0.02}{P(A)}$
Ответ: вероятнее всего этот телевизор произведен 2-ой фирмой.

Замечание:

[1] аксиома 3^o вероятности

1) События $H_1, \dots, H_n$ образующие полную группу, часто называют гипотезами.

2) Вероятности $P(H_i)$ $i = \overline{1, n}$ называются априорными, так как они известно ...

Вероятности $P(H_i|A)$, $i = \overline{1, n}$ которое становятся известными после ...

6. Схема испытаний Бернулли.

Рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из 2-х этих исходов, условно независимых успехом и неудачей, то есть
$\Omega = \{0, 1\}$, где 0 - "неудача 1 - "успех".
Обозначение: P{"успех"} = p
Тогда P{"неудача"} = 1 - p

Пример:

1) Подбрасывают монету.
"успех выпадение герба.
"неудача выпадение решки.

2) Бросают игральную кость.
"успех выпадение "6".
"неудача выпадение "1 ... , "5".

3) Наблюдают пол новорожденного.
"успех рождение мальчика.
"неудача рождение девочки.

Пример: Схемой испытании Бернулли будем называть серию однотипных экспериментов успешного вида, в которой вероятность реализации успеха не изменяется от эксперимента к эксперименту.

Замечание:

1) Условие неизмен. вероятности успеха на протяжении всей серии означает, что отдельным исключением незав. ...

Обозначение: $P_n(K)$ - вероятность того, что в серии из n экспериментов по схеме Бернулли произошло ровно k успехов.

Th Пусть проводится серия из n экспериментов по схеме Бернулли с вероятностью p успеха.

Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - биномиальные коэффициенты; $q = 1 - p$, $k = \overline{0, n}$.

Доказательство.

1) Запишем результат проведения серии из n экспериментов с использованием кортежа.
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$
где $x_i = 1$, если в i-ом испытании имел место успех, или 0 если имело неудача.
A = {в серии из n экспериментов произошло k успехов} = $\left\{(x_1, \dots, x_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = k\right\}$

2) $|A| =?$
Каждый входящий в A кортеж однозначно определяется позицией, в которых стоят 1-цы.
Таких наборов $\exists\ C_n^k$ штук
То есть $|A| = C_n^k$

3) Рассмотрим исход $(x_1, \dots, x_n) \in A$.
Вероятность осуществления ... $P\{x_1, \dots, x_n)\} =$...

Следствие: $P_n(K_1 \leqslant k \leqslant k_2)^2 = \sum\limits_{j=k_1}^{k_2} C_n^j p^j q^{n-j}$

Доказательство

1) Обозначим:
$A = \{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\}$, k -число успехов.
$A_j = \{k = j\}$, $j = \overline{k_1, k_2}$
Тогда $A = \sum\limits_{i=k_1}^{k_2} A_j$

[2] вероятность того, что число успехов в серии из n экспериментов по схеме Бернулли заключенного между k_1 и k_2

2) $A_i \cdot A_j =$ {в серии произошло одновременно ровно j и L успехов} $= \begin{cases} A_j, \ j = L \\ \emptyset, \ j = neqL \end{cases}$

$$displaystyle P(A) = P\left(\sum_{j=k_1}^{k_2} A_j\right) = (A_j, \ j = \overline{k_1, k_2} \text{ попарно}) = \sum_{j=k_1}^{k_2} P(A_j) \overset{th1}{=} \sum_{j=k_1}^{k_2} C_n^j p^j q...$$

Следствие 2: $P_n(k \geqslant 1)^3 = 1 - q^n$

Доказательство

Пусть А = {в серии ...}

$P(A) = 1 - P(\overline{A} = (\overline{A}$ ни одного успеха в серии$) = 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^n = 1 - q^n$

Случайные величины.

2. Функции распределения случайной величины.

Пусть x - случайная величина.

Определение: Функция распределения случайной величины X называется отображение $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

определенное правилом $F(x) = P\{X > x\}$

Замечание:

Свойства функции распределения.

1^o $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

2^o если $x1 \leqslant x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$

3^o $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4^o $P\{x_1 \leqslant x < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

5^o $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} -F(x_0)$ то есть f(x) непрерывна слева в ...

Доказательство

3^o Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Рассмотрим последовательности чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такую, что

1) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$ - неубывающая последовательность.
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x_n) = +\infty$

Пусть $A_n = \{X < x_n\}$ - событие.

Тогда

а) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ - неубывающая последовательность событий.

б) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < +\infty\}$

Согласно аксиоме

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = \underbrace{\lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A)n\right)}_{\lim\limits_{n \to \infty} P(X < x_n) = P\{X < +\infty\}}$$

$\{X < +\infty\} \Rightarrow P\{X < +\infty\} = 1$

$\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = 1}$

так как $x_1, X_2, \ldots, x_n$ - ...

[3] вероятность того, что в серии из n экспериментов по схеме Бернулли произошел хотя бы 1 успех

5^o 1) Рассмотрим последовательность:

а) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n < x_0$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0$

Очевидно, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ - (стремится к x_0 слева).

а) Пусть $A_n\{X < x_n\}$

Тогда $A_1, A_2, \ldots$ - неубывающая последовательность событий $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < x_0\}$

$F(x_0) = P\{X < X_0\} = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} F(x_0)$

3. Дискретные случайные величины.

Определение: Случайной величиной X называют дискретной, если множество её возможных значений конечное или счетно.

Закон распределения дискретной случайной величины X можно задать с использованием таблицы:

Здесь $p_i = P\{X = x_i\}$

$\sum\limits_i p_i = 1$

Замечание: Эта таблица называется рядом распределения вероятностей случайной величины.

Пример:

1) Пусть X - число выпадения герба при подбрасывании симметричной монеты.

2) Пусть X - число бросков симметричной монеты до 1-го выпадения герба (не считая тот бросок, при котором выпал герб).

$X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$P\{X = 0\} = P\{\text{при 1-м броске выпал герб}\} = \frac{1}{2}$

$P\{X = 1\} = \{\text{при первом броске - решка, при втором - гебр}\} = P\{(\text{Р,Г})\} = (\text{отдельные испытания независимы}) = P\{\text{Решка}\}P\{\text{Герб}\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P\{X = 2\} = P\{\text{решка, решка, герб}\} = \frac{1}{8};$

$P\{X = n\} = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

Проверка (условие нормировки)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} P\{X = n\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

4. Непрерывные случайные величины.

Определение: Случайная величина X называется непрерывной, если $\exists$ функция f”$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, где F - функция распределения случайной величины X.

При этом функция f называется функцией плотности распределения вероятностей случайной величины X.

Замечание:

1)

2) Для большинства представляющих практический интерес непр. случайная величина функции плотности является кусочно-непрерывным. Это означает, что F - непрерывна. Именно по этой причине такие случайные величины называют ...

3) Если f непрерывна в точке x_0 , то $f(x_0) = F'(x)\Big|_{x=x_0}$

(мы использует th о производной интеграла с переменным верхним пределом)

4) из определения непрерывной случайной величины $\Rightarrow$
   $f(x) \Rightarrow F(x)$
   (если известна f, то можно найти F).
   из замечания 3) $\Rightarrow$
   $F(x) \Rightarrow f(t)$
   (если известна F, то известна f)
   Таким образом функция f плотности, как и функция F распределения, содержит всю информацию о законе распределения случайной величины.
   Поэтому закон распределения непрерывной случайной величины можно задавать как с использованием функции распределения, так и с использованием функции плотности.

Свойства непрерывной случайной величины (свойства функции плотности).

1^o $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \geqslant 0$

2^o $P\{x_1 \leqslant X, x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, где f - функция плотности случайной величины X.

3^o $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки)

4^o $P\{x \leqslant X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$, где f - функция плотности случайной величины X; x_0 - точка непрерывности функции f.

5^o Если X - непрерывная случайная величина, то для любого наперед заданного x_n

Доказательство:

1^o $f(x) = F'(x)$
   Так как F - неубывающая функция, то $F(x)$ ... $f(x) \geqslant 0$.

2^o $P\{x_1 \leqslant X < x_2\}$ = (свойство функции распределения) = $F(x_2) - F(x_1)$ = (F - первообразная, поэтому ...) = $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to -\infty \\ x_2 \to +\infty \end{cases}} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ = (формула Н-Л) = $\lim\limits_{\begin{cases} x_2 \to +\infty \\ x_1 \to -\infty \end{cases}} [F(x_2) - F(x_1)] = 1 - 0 = 1$

5^o $P\{X = x_0\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P\{x_0 < X < x_0 + \Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)]$ = (так как мы считает F непрерыв. (см. замечание выше), то $\lim F(x_0 + \Delta x) = F(x_0)$) = $F(x_0) - F(x_0) = 0$

Замечание:

1) Пусть X - непрерывная случайная величина
   $P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = (\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \{x_1 \leqslant X < x_2\} + \{X = x_2\}) = P\{\underbrace{\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} + \{X = x_2\}}_{\text{несовместны}}\} = P\{x_1 \leqslant X < x_2\} + \underbrace{P\{X = x_2\}}_{0 \text{т.к. X - непрерывна}} = P\{x_1 \leqslant X < x_2\}$

2) Аналогично можно доказать, что для непрерывной случайно величины $P\{x_1 < X <\leqslant x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} + P\{x_1 \leqslant X < x_2\}$
   Иногда с учетом этих результатов свойства 2^o записаны в виде $= \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

5. Основные законы распределения случайной величины.

В этом пункте мы рассмотрим некоторые примеры случайных величин, законы распределения которых часто встречаются на практике.

I. Биномиальные случайные величины. Определение: Говорят, что случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$, если она принимает значения $0, 1, \ldots, n$ с вероятностями
$P\left\{X = \frac{1}{k}\right\} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \;\; k \in \{0, \ldots, n\}$, где $q = 1 - p$.

Обозначение: $X \sim B(n,p)$

Замечание:

1) Очевидно, X - дискретная случайная величина

2) Случайная величина $X \sim B(n,p)$ - число успехов испытании по схеме Бернулли с вероятностью успеха "p".

II. Пуассоновская случайная величина. Определение: Говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$
($\lambda \in (0, +\infty)$), если она принимает значения $0, 1, 2, \dots$ с вероятностями
$P\left\{X = \frac{1}{\lambda}\right\} = \frac{\lambda^k}{k!}\exp^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$
Обозначение: $X \sim \Pi(\lambda)$
Замечание:

1) Проверим условие нормировки
$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left\{X = \frac{1}{\lambda}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\exp^{-\lambda} = \exp^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

2) Распределение Пуассона называется законом редких событий, так как оно проявляется там, где происходит большое число испытаний с малой вероятностью успеха.

III. Геометрическое распределение. Определение: Говорят, что случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметрами p, если X принимает целое геометрическое значения.
$P\{X = k\} = pq^k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, где $p \in (0,1), \quad q = 1 - p$

Замечание:

1) Проверим условие нормировки
$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{i=0}^{\infty} pq^k = p \sum_{k=0}^{\infty} pq^k = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \left((q^0 - q^1 + q^2 + \dots)\right) = (\text{сумма бесконечной геометрической прогрессии}$$
$$p \cdot \frac{1}{1-p} = 1$$

2) С содержательной точки зрения случайная величина X, имеющая геометрическое распределение с параметром p - количество экспериментов в схеме Бернулли, которое нужно произвести <u>до</u> 1-го появления "успеха"(то есть если первый успех произошел в (n+1)-м испытании, то X = n).
В самом, деле, если в серии было n+1 испытаний ...
$P\{X = n\}$ = P{ {в 1-м испытании - неудача} $\cdot$ {во 2-м - неудача} $\cdot \ldots \cdot$ {в n-с - неудача} $\cdot$ {в (n+1)-м - успех}} = (в схеме испытании Бернулли отдельные испытания независимы) =

4) График функции распределения случайной величины X равномерно распределена на $[a,b]$
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \quad a < x \leq b \\ 1 \end{cases}$$

V. Экспоненциальное распределение.
Определение: Говорят, что случайная величина X распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$, если X является некоторой случайной величиной, функция плотности распределения которой имеет вид
$$f(x) = \begin{cases} 2\exp^{-\lambda x}, \quad x > 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$$
Замечание:

1) Обозначение: $X \sim Exp(\lambda)$

4) График функции распределения:
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, \ x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \ x > 0 \end{cases}$$

5) Для многих технических устройств время X не будет ... работы распределена по экспоненциальному закону с подходящим значением параметра λ. Так, если некоторое устройство начинает работать в момент времени t = 0, а момент времени ...

VI. Нормальная случайная величина.

Определение: Говорят, что случайная величина X имеет нормальное (гауссовское) распределение с параметрами m и σ^2, если X является геометрической величиной, функция плотности которой имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}\ m \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

Замечание:

1) $X \sim N(m, \sigma^2)$ - обозначение.

2) Параметр m "отвечает" за смещение графика вдоль оси Ox.
Параметр σ "отвечает" за "концентрацию" графика в районе точки x = m: чем меньше значение σ? тем выше концентрация.

3) Функция распределения случайной величины $X \sim N(m, \sigma^2)$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Доказывается, что F не является элементарной функцией (соответствующий интеграл является "неберущимся").

4) Говорят, что случайная величина $X \sim N(0, 1)$ имеет стандартное $(m = 0, \sigma^2 = 1)$ нормальное распределение. Функция распределения такой случайной величины:

$$\Phi(x) = F(x)\Bigg|_{\substack{n=0\\ \sigma^2=1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Значения функции Φ за табулированы (то есть составлены таблицы значений функции Φ).

5) Вместо функции Φ часто рассматривают функцию

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ Свойства функции Φ_0:

1^o $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$

2^o $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ (нечетная функция)

3^o $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi_0(x) = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_0(x) = \frac{1}{2}$

4^o $\Phi_0(0) = 0$

6) Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \text{(свойство непрерывной случайной величины)} = \int\limits_a^b f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_a^b e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \Bigg(\text{Замена переменны}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \underbrace{f_{0,1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}}_{\text{функция плотности } N(0,1)} = \int\limits_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} f_{0,1}(y)dy = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Таким образом $\boxed{\begin{array}{l}\text{Если } X \sim N(m, \sigma^2) \\ \text{то } P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \Phi\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)\end{array}}$

Так как $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi_0(x)$, то справедливо

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Если } X \sim M(m, \sigma^2) \\ \text{то } P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \Phi_0\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)\end{array}}$$

2) Нормальное распределение играет особую роль в теории вероятностей и математической статистике. Большинство случайных величин, описывающих естественные процессы, протекание которых зависит от большого числа случайных факторов, имеет нормальное распределение.

Случайные векторы.

1. Функция распределения случайного вектора.

Пусть

1) (Ω, β, P) - вероятностное пространство
2) $X_1, \ldots, X_n$ - случайные величины, заданные на этом пространстве

Определение: Случайным вектором размерности n называется кортеж $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Замечание:

1) иногда n-мерный случайные вектор называют n-мерной случайной величиной.
2) компоненты случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ называется его коорди ...

Пример:

1) Производят стрельбу по плоской мишени (пулей).
   (x_1, x_2) - координаты точки попадания пули образуют двумерный случайный вектор.

Определение: Функция распределения случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ называется отображением
$F : \mathbb{R}^n \to R$,
определенное следующим правилом:
$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$

Замечание:

1) в определении под знаком вероятности написано произведение событий:
   $\{X_1 < x_1\} \cdot \ldots \cdot \{X_n < x_n\}$
2) в случае n=2, если интерпретировать вектор (x_1, x_2), как эксперимент в котором на плотность бросают точку, значение $F(x_1, x_2)$ равно вероятности того, что случайным образом брошена на плоскости точки упадет левее и ниже точки (x_1, x_2)

Свойства функции распределения (n=2)

1^o $0 \leqslant F(x_1, x_2) \leqslant 1$

2^o а) при фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция одной переменной x_1 является неубывающей.
б) при фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ ак функция одной переменной x_2 является неубывающей.

3^o $$\lim_{\begin{cases} x_1 \to -\infty \\ x_2 = const \end{cases}} F(x_1, x_2) = 0$$
$$\lim_{\begin{cases} x_1 \to const \\ x_2 \to -\infty \end{cases}} F(x_1, x_2) = 0$$

4^o $\lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to +\infty \\ x_2 \to -\infty \end{cases}} F(x_1, x_2) = 1$

5^o $\lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to +\infty \\ x_2 \to const \end{cases}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$

$\lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to const \\ x_2 \to +\infty \end{cases}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$

где F_{X_1}, F_{X_2} - функции распределения случайных величин X_1 и X_2 соответственно.

Замечание: Рассмотрим случайный вектор (X_1, X_2) можно временно "забыть" о случайной величине X_2 и наблюдать только за X_1.
F_{X_1} - функция распределения случайной величины X_1.

6^o $P\{a_1 \leqslant X < b_1,\ a_2 \leqslant X < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$

7^o а) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция одной переменной x_1 является непрерывной слева в каждой точке.

б) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция одной переменной x_2 является непрерывной слева в каждой точке.

Доказательство:

1^o $F(x_1, x_2) =$ [4] $= P\{\ldots\{\Rightarrow 0 \leqslant F(x_1, x_2) \leqslant 1$

2^o доказывается аналогично одномерному случаю.

3^o Докажем, что $\lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to -\infty \\ x_2 = const \end{cases}} F(x_1, x_2) = 0,$

второе равенство доказывается аналогично.
$F(x_1, x_2) = P\left\{\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\}\right\}$
Если $x_1 \to -\infty$, то событие $\{X_1 < x_1\}$ становится невозможным; произведение невозможного события на событие $\{X_2 < x_2\}$ является невозможным $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to \infty \\ x_2 \to const \end{cases}} F(x_1, x_2) = (P\{\text{невозможное}\} \cdot \{X_2 < x_2\}) = 0$

4^o $F(x_1, x_2) : P\left\{\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\}\right\}$
При $x_1 \to +\infty$ событие $\{X_1 < x_1\}$ становится достоверным; при $x_2 \to +\infty$ событие $\{X_2 < x_2\}$ также становится достоверным, а поскольку произведением достоверных событий является достоверным событием, то
$\lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty \end{cases}} F(x_1, x_2) = (P\left\{\{\text{достоверное}\} \cdot \{\text{достоверное}\}\right\}) = 1$

5^o Докажем, что
$\lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to +\infty \\ x_2 = const \end{cases}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$
$F(x_1, x_2) = P\left\{\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\}\right\}$
При $x_1 \to +\infty$ событие $\{X_1 < x_1\}$ становится достоверным , произведение достоверного события на событие $\{X_2 < x_2\}$ равно последнему, поэтому
$\lim\limits_{\begin{cases} x_1 \to +\infty \\ x_2 = const \end{cases}} F(x_1, x_2) = (P\left\{\{\text{достоверное}\} \cdot \{X_2 < x_2\}\right\}) = P\{X_2 < x_2\} \ldots$

[4] определение функции распределения

6^o 1) Найдем вероятность попадания случайного вектора (X_1, X_2) в полуполосу:
$P\{X_1 < x_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\}$
Заметим, что
$\underbrace{\{X_1 < x_1,\ X_2 < b_2\}}_{1} = \underbrace{\{X_1 < x_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\}}_{2} + \underbrace{\{X_1 < x_1,\ X_2 < a_2\}}_{3}$
От обеих частей возьмем вероятность, и используя теорему сложения получим
$P\{\underbrace{X_1 < x_1,\ X_2 < b_2}_{=F(x_1,b_2)}\} = P\{X_1 < x_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\} + P\{\underbrace{X_1 < x_1,\ X_2 < a}_{F(x_1,a_2}\}$
Таким образом
$P\{X_1 < x_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\} = F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)$

2) Найдем $P\{a_1 \leqslant X_1 < b_2,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\}$
$\{X_1 < b_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\} = \{X_1 < a_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\} + \{a_1 \leqslant X_1 < b_2,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\}$
Берем P от обеих частей и используем th сложения получаем
$\underbrace{P\{X_1 < b_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\}}_{=F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)} = \underbrace{P\{X_1 < a_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\}}_{=F(a_1,b_2)-F(a_1,a_2)} + P\{a_1 \leqslant X_1 < b_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\}$
$\Rightarrow P\{a_1 \leqslant X_1 < b_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$

7^o Доказательство аналогично одномерному случаю.

Замечание:

1) Рассмотрим свойство 5^o. В нем использовались $F(x_1, x_2)$ - функции распределения вектора (X_1, X_2).
$F_{X_1}(x_1),\ F_{X_2}(x_2)$ - функции распределения случайных величин.
В теории вероятностей используется следующая терминология:
$F(x_1, x_2)$ называется также совместной функцией распределения случайных величин x_1 и x_2,
$F_{X_1}(x_1),\ F_{X_2}(x_2)$ называется маргинальными (частными) функциями распределения случайных величин x_1 и x_2.

2) Если известна $F(x_1, x_2)$, то с использованием свойства 5^o можно найти F_{X_1}, F_{X_2}, то есть
Вопрос: Можно ли зная F_{X_1} и F_{X_2}, найти $F(x_1, x_2)$?
Вообще говоря, нет (так ка неизвестна связь между X_1 и X_2).

2. Дискретные случайные векторы.

Определение: Случайный вектор $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ называется дискретным, если каждая из случайных величин $X_i,\ i = \overline{1, n}$ является дискретной.

Рассмотрим случай n = 2- случайный вектор (x, y). Для упрощения рассуждений будем считать, что случайная величина X и Y принимают значения из конечных множеств.
$X \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$
Закон распределения такого случайного вектора удобно задавать с использованием таблицы

Здесь
$p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_i)\} = P\{\{X = x_i\} \cdot \{Y = y_j\}\}$
Эту таблицу дополняют строкой и столбцом. В j-й клетке дополнительной строки записывают величину $P_{Y_j} = \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}$
В i-ой клетке дополнительной строки записывают $P_{X_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}$
Покажем, что
$P_{X_i} = P\{X = x_i\},\ p_{Y_j} = P\{Y = y_j\}$
$P\{X = x_i\} = P\{(X, y) \in \{(x_i, y_1), \ldots, (x_i, y_n)\}\} = P\{\{(X, Y) = (x_i, y_1)\} + \ldots + \{(X, Y) = (x_i, y_n)\}\} = (\text{th сложения}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}}_{=P_{ij}} = P_{X_i}$
Второе равенство доказывается аналогично.
При этом, очевидно, должно выполняться условие нормировки:
$\sum\limits_{i=1}^{m} P_{X_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} P_{Y_j} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

Пример: Симметричную монету подбрасывают 2 раза.
X - количество выпадений герба.

Y = - номер броска, при котором герб выпал впервые (будем считать, что Y = 3, если герб ни разу не выпал).

$P\{(X,Y)=(0,1)\} = $ P{{герб не выпал ни разу} · {герб выпал при 3-м броске}

$P\{(X,Y)=(0,3)\} = $ P{{при первом броске была решка} · {при втором - решка}} $= \dfrac{1}{4}$

$P\{(X,Y)=(1,1)\} = $ P{{герб} · {решка}} $= \dfrac{1}{4}$

$P\{(X,Y)=(1,2)\} = $ P{(Р, Г)} $= \dfrac{1}{4}$

$P\{(X,Y)=(1,3)\} = 0$

$P\{(X,Y)=(2,1)\} = $ P{(Г, Г)} $= \dfrac{1}{4}$

$P\{(X,Y)=(2,2)\} = 0$

$P\{(X,Y)=(2,3)\} = 0$

3. Непрерывные случайные векторы.

Определение: Случайный вектор $(X_1,\dots,X_n)$ называется непрерывный, если $\exists$ функция:
$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
такая, что для любой точки $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$F(x_1,\dots,x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{x_2} dt_2 \dots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\dots,t_n)dt_n$ - функция распределения вектора $(X_1,\dots,X_n)$.

При этом предполагается, что для любой точки $(x_1,\dots,x_n)$ этот несобственный интеграл сходится.

Замечание:

1) функция f из определения непрерывного случайного вектора называется функцией распределения вероятностей случайного вектора $(X_1,\dots,X_n)$.

2) для n = 2:

   $$F(x_1,x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{x_2} f(t_1,t_2)dt_2$$

3) Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена и непрерывна всюду, кроме, быть может, множеств меры нуль.
   Для n = 2 это означает, что $f(x_1,x_2)$ непрерывна всюду, роме быть может, отдельных точек или линий.

4) По th о производной интеграла с переменным верхним пределом:
   $f(x_1,x_2) = \dfrac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$ - для всех (x_1,x_2), в которых f непрерывна.

5) Таким образом

   - знaя f, можно найти F
   - зная F, можно найти f

Это означает, что функция плотности, как и функция ... , содержит всю информацию о законе распределения непрерывного случайного вектора. Для задания закона распределения непрерывного случайного вектора можно использовать любую из этих функций.

Свойства двумерного непрерывных случайных векторов n = 2

1^o $f(x_1,x_2) \geqslant 0$

2^o $P\{a_1 \leqslant X_1 < b,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2$

3^o $P\left\{(X_1,X_2) \in D\right\} = \iint\limits_D f(x_1,x_2)dx_1dx_2$, где D - область на плоскости $O_{x_1x_2}$

4^o $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)dx_1,dx_2 = 1$ (условие нормировки)

5^o $P\{x_1 \leqslant X_1 < x_1 + \triangle x_1,\ x_2 \leqslant X_2 < x_2 + \triangle x_2\} \approx f(x_1, x_2)\triangle x_1 \triangle x_2$, где $\triangle x_1 \triangle x_2$ ...
а (x_1, x_2) - точка непрерывности функции $f(x_1, x_2)$.

6^o Если (X_1, X_2) - непрерывный случайный вектор, то для любого наперед заданного значения (x_1^o, x_2^o): $P\{(X_1, X_2) = (x_1^o, x$
0

7^o а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = f_{X_1}(x_1)$

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_1 = f_{X_2}(x_2)$

Доказательство:

1) свойства $1^o, 2^o, 4^o, 5^o, 6^o$ доказываются аналогично одномерному случаю.

2) свойство 3^o является обобщением свойства 2^o

3) докажем 7^o а) (7^o б) доказывается аналогично)

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = \text{(в случае непрерывного случайного вектора)} = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)dt_2$$

$$f_(X_1)(x_1) = \frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left[\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t_1 t_2)dt_2\right] = \text{(th о производной интеграла с переменным верхним пределом)}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(X_1, t_2)dt_2.$$

$t_2 = x_2$

Замечание: функция $f(x_1, x_2)$ - плотность распределения случайного вектора (X_1, X_2) - также называется двумерной плотностью или совместной плотностью распределения случайных величин X_1, X_2.
Функция f_{X_1}, f_{X_2} называется одномерными (частными, маргинальными) плотностями.

Пример: случайным вектор плотности (X_1, X_2) имеет функцию
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c \cdot x_1 \cdot x_2,\ (x_1, x_2) \in k \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$
где k - квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).
Найти одномерные плотности распределения случайных величин X_1 и X_2.
Решение:

1) Найдем c.
Условие нормировки
$$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = (f(x_1, x_2) = 0 \text{вне} k) = \iint\limits_{K} c \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot dx_1dx_2 = c\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 x_1x_2dx_2 = c\int\limits_0^1 x_1dx_1 \cdot \int\limits_0^1 x_2dx_2 =$$
$$c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{4}$$

2) Найдем $f_{X_1}(x_1)$
$$f_{X_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = \left\{\begin{array}{l} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0dx_2,\ \text{если } x_1 \notin [0;1] \\ c\int\limits_0^1 x_1x_2dx_2,\ \text{если } x_1 \in [0;1] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 0,\ x_1 \notin [0;1] \\ 4x_1 \underbrace{\int\limits_0^1 x_2dx_2}_{=\frac{1}{2}},\ x_1 \in [0;1] \end{array}\right\} = \begin{cases} 2x_1,\ x_1 \in [0;1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

б) Аналогично
$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 2x_2,\ x_2 \in [0;1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

4. Независимые случайные величины.

Пусть

1) (X, Y) - двумерный дискретный случайный вектор

2) $X \in \{x_1, \ldots, x_n\}$
$Y \in \{y_1, \ldots, y_n\}$

Для такого вектора определение независимости случайных величин можно дать следующим образом:
случайные величины X и Y называется независимыми, если
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$
$\forall j \in \{1, \ldots, n\}$
$P\left\{(X, Y = (x_i, y_j)\right\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$
Посмотрим, что означает выполнение этого "промежуточного" определения для функции распределения вектора (X, Y)

$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} = \left\{ \begin{array}{l} x_i = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{x_i : \ x_i < x\} \\ y_j = \max\limits_{j=\overline{1,n}}\{y_j : \ y_j < y\} \end{array} \right\} = P\left\{\{X \in \{x_1, \ldots, x_k\}\} \cdot \{Y \in \{y_1, \ldots, y_l\}\}\right\} = P\left\{(X,Y) = \{x_i, y_j\right.$
$\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{l} p\left\{(X,Y) = (x_i, y_j)\right\} =$ (... "предварит." определение независимости случайных величин) $= \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l} \underbrace{P\{X = x_i\}}_{\text{независим. от } j} P\{Y =$
$y_j\} = \sum\limits_{i=1}^{k} P\{X = x_i\} \sum\limits_{j=1}^{l} P\{Y = y_j\} = P\{X < x\}P\{Y = y\} = F_X(x)F_Y(x)$
Таким образом для произвольного случайного вектора (X, Y) ... сформулировать (полноценное) определение:
Определение: случайные величины X и Y называются независимы, если
$\overline{F(x,y) = F_X}(x)F_Y(y)$, где F - функция распределения вектора (X,Y), F_X, F_Y - частные функции распределения случайных величин X и Y.

Свойства независимых случайных величин

1^o Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall x \ \forall y$ события {X < x} и {Y < y} независимы.

2^o Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall\forall x_1, x_2, y_1, y_2$ события $\{x_1 \leqslant X < x_2\}$ и $\{y_1 \leqslant Y < y_2\}$ независимы.

3^o случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow$ события $\{X \in M_1\}$ и $\{Y \in M_2\}$ независимы для любых M_1 и M_2 - промежутков или объединений промежутков в $\mathbb{R}$.

4^o Пусть

1) (X,Y) - дискретный случайный вектор
2) $p_{ij} = P\left\{(X,Y) = (x_i, y_j)\right\}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$
3) $p_{X_i} = P\{X = x_i\}, \ i = \overline{1,m}$
$p_{Y_j} = P\{Y = y_j\}, \ j = \overline{1,n}$

Тогда X и Y -независимы $\Leftrightarrow p_{ij} \equiv p_{x_i} o_{y_j}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$

5^o Пусть

1) (X,Y) - непрерывный случайный вектор
2) f(x,y) - совместная плотность распределения X и Y
3) f_X, f_Y - маргинальная плотности

Тогда X, Y - независимые $\Leftrightarrow f(x,y) \equiv f_X(x)f_Y(y)$

Доказательство

1^o непосредственно следует из определения независимой случайной величины и определения функции распределения.

2^o а) $\boxed{\Rightarrow}$ необходимость

Пусть $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

Тогда

$P\{x_1 \leqslant X < x_2,\ y_1 \leqslant Y < y_2\}$ = (по свойству двум. функции распределения) = $F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$ = (X,Y - независимы) = $F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) - F_X(x_2)F_Y(y_1) + F_X(x_1)F_Y(y_1) = F_X(x_2)\left[F_Y(y_2) - F_Y(y_1)\right] - F_X(x_1)\left[F_Y(y_2) - F_Y(y_1)\right] = \underbrace{\left[F_X(x_2) - F_X(x_1)\right]}_{P\{x_1 \leqslant X < x_2\}}\underbrace{\left[F_Y(y_2) - F_Y(y_1)\right]}_{P\{y_1 \leqslant Y < y_2\}} = P\{x_1 \leqslant X < x_2,\ y_1 \leqslant Y < y_2\} \Rightarrow$ события $\{x_1 \leqslant X < x_2\}$ и $\{y_1 \leqslant Y < y_2\}$ независимы.

2^o б) $\boxed{\Leftarrow}$ достаточность

Пусть $\underbrace{P\{x_1 \leqslant X < x_2,\ y_1 \leqslant Y < y_2\}}_{(*)} = P\{x_1 \leqslant X < x_2\}P\{y_1 \leqslant Y < y_2\}$

Тогда

$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{\underbrace{-\infty}_{"x_1"} < X < \underbrace{x}_{"x_2"}, \underbrace{-\infty}_{"y_1"} < Y < \underbrace{y}_{"y_2"}\} = (*) = P\{X < x\}P\{Y < y\} = F_X(x)F_Y(y)$

3^o является обобщением свойств 1^o и 2^o и доказывается аналогично.

4^o а) $\boxed{\Rightarrow}$ достаточность была доказана выше при рассуждениях между "предвар." и "полноценным" определениям.
б) $\boxed{\Leftarrow}$ необходимость доказать самостоятельно

5^o а) $\boxed{\Rightarrow}$ (необходимость)

Пусть X,Y - независимы, то есть

$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

Тогда

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[F_X(x)F_Y(y)\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}F_X(x)\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y}F_Y(y)\right] = f_X(x)f_Y(y)$$

5^o б) $\boxed{\Leftarrow}$ (достаточность)

Пусть $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

Тогда

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{y} f(t_1,t_2)dt_2 = (f(t_1,t_2) = f_X(t_1)f_Y(t_2)) = \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t_1)dt_1\right) \cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(t_2)dt_2\right) = F_X(x)F_Y(y) \Rightarrow$$

X, Y - независимы.

Пример: Рассмотрим двумерный случайный вектор из примера выше

Пример: (см выше)

Функция плотности непрерывности случайного вектора (X,Y) имеет вид $f(x,y) = \begin{cases} 4xy,\ (x,y) \in K \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

Исследовать независимость случайных величин X и Y.

Решение:

Ранее были найдены маргинальная плотность

$f_X(x) = \begin{cases} 2x,\ x \in [0,1] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 2x,\ y \in [0;1] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

Так как $f(x,y) \equiv f_X(x)f_Y(y)$ то случайные величины X и Y - независимы (свойство 5^o).

Определение: Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются попарно независимыми, если $\forall\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \Rightarrow X_i$ и Y_j - независимы.

-независимы в совокупности, если $F(x_1, \ldots, x_n) \equiv F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$, где F - функция распределения случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$,

а $F_{X_i},\ i = \overline{1,n}$ - маргинальная функция распределения его компонента.

Замечание: Можно доказать

1) если $X_1, \ldots, X_n$ независимы в совокупности $\Rightarrow X_1, \ldots, X_n$ - попарно независимы.
2) для случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ будут справедливы обобщения свойств 4^o и 5^o на случай независимых в совокупности случайных величин.

5. Условные распределения.

Пусть

1) (X, Y) - двумерный случайный вектор.
2) известно, что случайная величина Y приняла значение $Y = y_0$

Вопрос:

1) что в этом случае можно сказать о значениях случайной величины X?
2) что можно сказать о распределении вероятностей между этими возможными значениями случайной величины X?

I. Случай дискретного случайного вектора.
Пусть:

1) (X, Y) - дискретный случайный вектор.
2) $X \in \{x_1, \dots, x_m\}$
   $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$p_{ij} = P\left\{(X, Y) = (x_i, y_j)\right\},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$
$p_{x_i} = P\{X = x_i\},\ i = \overline{1, m}$
$p_{y_j} = P\{Y = y_j\},\ j = \overline{1, n}$
$P\{\underbrace{X = x_i}_{A} | \underbrace{Y = y_j}_{B}\} =$ (определение условной вероятности) $= \dfrac{P\left\{(X, Y) = (x_i, y_j)\right\}}{P\{Y = y_j\}} = \dfrac{p_{ij}}{p_{y_j}}$

<u>Определение:</u> Условным распределением компоненты X двумерного дискретного случайного вектора при условии, что случайная величина $Y = y_j$ называется набор чисел

$\Pi_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{y_j}},\ i = \overline{1, n}$

(Для каждого значения j будет "свое" условие распределения случайной величины X, так как для каждого j имеет место "свое" условие $Y = y_j$).

<u>Замечание:</u> Аналогичным образом определяется условное распределение случайной величины Y при условии $X = x_i$:

$\tau_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{x_i}},\ i = \overline{1, n}$

(Для каждого $i = \{1, \dots, m\}$ "свое" условие $\{X = x_i\}$ и "свое условное распределение" распределение).

<u>Пример:</u> Рассмотрим двумерный случайный вектор из задачи о подбрасывании монеты.

а) Найдем условное распределение случайной величины X.

   $\Pi_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{y_j}},\ j = \overline{1, 2}$

   $\Pi_{i1} = \dfrac{p_{ij}}{p_{y_j}}$

   $\Pi_{i2} = \dfrac{p_{ij}}{p_{y_j}}$

б) Найдем условное распределение случайной величины X.

   $\tau_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{x_i}},\ j = \overline{1, 3}$

Пусть (X, Y) - <u>произвольный</u> (не обязательно дискретный или непрерывный) случайный вектор.
<u>Определение:</u> Условной функцией распределения случайной величины X при условии, что $Y = y$ называется отображение

$F_X(x|Y = y) = P\{X < x|Y = y\}$

<u>Замечание:</u>

1) Условная функция распределения компоненты Y определяется аналогично:
   $F_Y(y|X=x) = P\{Y < y|X=x\}$

2) Если (X, Y) - дискретный случайный вектор из пункта 1), то
   $$F_X(x|Y=y_j) = \frac{P\{X < x|Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{\sum p_{ij}}{p_{y_j}} \ (*)$$

II. Случай непрерывной случайного вектора.
Пусть

1) (X, Y) - непрерывный случайный вектор

2) $f(x, y)$ - совместная плотность распределения случайной величины X и Y.

В случае непрерывного случайного вектора использовать формулу $(*)$ "в лоб" не получится, так как для любого наперед заданного y $P\{Y=y\} = 0$

Рассуждение, аналогичные ... приведенными в пункте $\boxed{\text{I.}}$ приводят к следующему определению.
Определение: Условной плотностью распределения случайной величины X при условии $Y = y$ называется функция
$f_X(x|Y=y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, где
$f_Y(y)$ - маргинальная функция плотности распределения случайной величины Y;
$f_Y(y) \neq 0$
Замечание: Условной плотностью случайной величины Y при условии $X = x$ определяется аналогично
$f_Y(y|X=x)\ cfracf(x,y)f_X(x)$
где $f_X(x) \neq 0$ - маргинальная функция плотности распределения случайной величины X.

Th критерии независимости случайной величины в терминах условных распределений.

1) Пусть (X, Y) - двумерный случайный вектор.
   Тогда 3 следующих утверждения эквивалентны:

   а) X и H независимы
   б) $F_X(x) \equiv F_X(x|Y=y)$ для всех y, при которых определена функция $F_X(x|Y=y)$
   в) $F_Y(y) \equiv F_Y(y|X=x)$ для всех x, для которых определена функция $F_Y(y|X=x)$

2) Пусть (X, Y) - дискретный случайный вектор.
   Тогда следующие 3 утверждения эквивалентны:

   а) X, Y - независимы
   б) $P\{X=x_i\} \equiv P\{X=x_i|Y=y_j\}$ для всех y_j
   в) $P\{Y=y_j\} \equiv P\{Y=y_j|X=x_i\}$ для всех x_i

3) Пусть (X, Y) - непрерывные случайные величины.
   Тогда следующие 3 утверждения эквивалентны

   а) (X, Y) - независимы
   б) $f_X(x) \equiv f_X(x|Y=y)$ для всех y, для которых определена $f_X(x|Y=y)$
   в) $f_Y(y) \equiv f_Y(y|X=x)$ для всех x, для которых определена $f_Y(y|X=x)$

Пример: Рассмотрим задачу о подбрасывании монеты (см. выше).
$$\left.\begin{matrix} P\{X=0\} = \dfrac{1}{4} \\ P\{X=0|Y=3\} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(1 \neq \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \text{X и Y - зависимы.}$$
Функции от случайных величин.

1. Функции от одномерных случайных величин.

Пусть

1) X - случайная величина

2) $\varphi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Рассмотрим $\varphi(x) = Y$ - тоже случайная величина.

Пример: При изготовлении вала на токарном станке его диаметр X является случайной величиной, тогда $Y = \dfrac{\pi \cdot X^2}{4}$ - площадь поперечного сечения этого вала - тоже случайная величина.
В этом примере $\varphi(X) = \dfrac{\pi \cdot X^2}{4}$.

Основной вопрос: Как, зная закон распределения случайной величины X и функцию φ, найти закон распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$?

I. Пусть X - диаметр случайной величины, имеющее ряд распределения
$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$
Пусть $Y = \varphi(x)$
Случайная величина Y также будет дискретной, так как функция не может принимать значений больше, чем её аргументы.
Тогда случайная величина Y принимает значение из множества $\varphi(x_i), \ i = \overline{1, n}$
Если в верхней строке некоторые значения совпадут (то есть $\varphi(x_i) = \varphi(x_i)$ при $i \neq j$), то соответствующие столбцы следует объединить, приписав общему значению суммарную вероятность.

Пример: X имеет ряд распределения:
Найти ряд распределения случайной величины $Y = X^2 + 1$. В этом примере $\varphi(x) = x^2 + 1$

Th Пусть

1) X - непрерывная случайная величина

2) $\varphi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - монотонная функция
   ($\Rightarrow \exists \varphi^{-1} = \psi$ - обратная к φ функция)

3) φ - непрерывная и непрерывно дифференцируема

4) $\varphi = \varphi(X)$

Тогда случайная величина Y также является непрерывной, причем
$f_Y(y) = f_X\left(\psi(y)\right)|\psi'(y)|$,
где f_X, f_Y - функции плотности случайных величин X и Y соответственно.

Доказательство

1) $F_Y(y) = P\{Y < y\} = (Y = \varphi(X)) = P\{\varphi(X) < y\}$
   F_Y - функция распределения случайной величины Y.
   Рассмотрим 2 случая:

   А. φ - монотонная возрастающая функция $\Rightarrow \varphi(X) < y \Leftrightarrow X < \varphi^{-1}(y) = \psi(y)$.

   Б. φ - монотонная убывающая функция $\Rightarrow \varphi(X) < y \Leftrightarrow X > \psi(y)$.

   Тогда

   А. $F_Y(y) = P\left(X < \psi(y)\right) = F_X\left(\psi(y)\right)$.

   Б. $F_Y(y) = P\left(X > \psi(y)\right) = 1 - P\{X \leqslant \psi(y)\} =$ (X - непрерывная случайная величина) $= 1 - P\{X < \psi(y)\} = 1 - F_X\left(\psi(y)\right)$.

2) Так как $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy} F_Y(y)$, то

   А. $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}\left[F_X\left(\psi(y)\right)\right] =$ (th о произведении случайных функций) $= \underbrace{F'_X}_{f_X}\left(\psi(y)\right) \cdot \psi'(y) = f_X\left(\psi(y)\right) \cdot \varphi(y)$.

   Б. $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}\left[1 - F_X\left(\psi(y)\right)\right] = \ldots = f_X\left(\psi(y)\right) \cdot \left(-\psi'(y)\right)$

Оба случая описываются общей формулой $f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|$

Пример: Пусть

1) X - непрерывная случайная величина
2) F(x) - функция распределения случайной величины. X непрерывна.

Найдем закон распределения случайной величины $Y = F(x)$ (то есть $\varphi = F$)
Решение: Очевидно, что $Y \in [0;1]$
Это означает, что

а) $F_Y(y) = 0$, если $y \leqslant 0$

б) $F_Y(y) = 1$, если $y > 0$

в) $y \in (0;1] \Rightarrow$ (см. доказательство предыдущей th для случая монотонно возрастающей φ) $\Rightarrow F_Y(y) = \underbrace{F}_{F_X}\left(\underbrace{F^{-1}}_{\varphi^{-1}}(y)\right) =$ y

Таким образом
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0,\ \ y \leqslant 0 \\ y, 0 < y \leqslant 1 \\ 1,\ \ y > 1 \end{cases}$$
Тогда
$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} 1,\ \ y \in [0;1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$
Таким образом
$Y \sim R[0;1]$ - равномерное распределение на [0;1] случайной величины.

Замечание: Из предыдущего примера следует, что если $Y \sim R[0;1]$, то случайная величина $X = F^{-1}(y)$ будет иметь функцию F своей функции распределения.
Этот факт широко используется при моделировании случайных величин: достаточно иметь генератор случайных чисел для $R[0;1]$, тогда для генерировании значений случайной величины X с непрерывной функцией распределения F(x) достаточно подвинуть выборку из $R[0;1)$, ...

Th Случай немонотонной функции φ
Пусть

1) X - непрерывная случайная величина.
2) f_X - функция плотности случайной величины X.
3) $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет n интервалов монотонности (то есть φ является кусочно-монотонной).
4) φ
5) для данного $y \in \mathbb{R}$
   $x_1 = \psi_1(y), \ldots, x_n = \psi_n(y)$ - все распределения уравнения $\varphi(x) = y$.
   При этом $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ - функции обратные φ на интервалах монотонности, которые ...
6) $Y = \varphi(X)$
   Тогда
   $$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_X(\psi_j(y)) \cdot \left|\psi_j'(y)\right|$$

Доказательство (без доказательств).

2. Скалярная функция от случайного вектора.

Пусть

1) $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - случайный вектор.

2) $\varphi: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Тогда
$Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ - скалярная случайная величина.

Вопрос: Как, зная закон распределения случайного вектора $\vec{X}$ и функцию φ, найти закон распределения случайной величины Y?

Пример: Пусть (X_1, X_2) - координаты точки попадания пули при стрельбе по плоской мишени.
Тогда
$Y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ - расстояние от точки попадания до центра мишени (здесь $\varphi(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$).

Далее ограничимся n = 2.

I. Если (X_1, X_2) - дискретный случайный вектор, закон распределения которого задан таблицей.
Тогда $Y = \varphi(X_1, X_2)$ - дискретная случайная величина, принимающее значения $\varphi(x_{1_i}, x_{2_j})$ $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Пример: Пусть проводится серия из 2-х испытаний по схеме Бернулли.
$x_i = \begin{cases} 1, \text{если в i-ом испытании произошел успех} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$
$i = \overline{1, 2}$
Тогда $Y = X_1 + X_2$ - общее число успехов в серии из двух испытаний.
Записать таблицу распределения вероятностей вектора (x_1, x_2) и найти закон распределения случайной величины Y.
$(q = 1 - p)$
$Y = X_1 + X_2$

II. Если (X_1, X_2) - непрерывный случайный вектор, а $\varphi: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция.
Тогда случайная величина $Y = \varphi(X_1, X_2)$ также будет непрерывной, причем значение функции распределения случайной величины Y можно найти по формуле:
$F_Y(y_0) = \iint\limits_{D(y_0)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \ (*)$
где f - функция плотности распределения вектора (x_1, x_2)
$D(y_o) = \{(x_1, x_2): \ \varphi(x_1, x_2) < y\}$.
Обоснование формулы $(*)$.

$F_Y(y_0) = P\{Y < y_0\} = \{\varphi(X_1, X_2) < y_0\} \boxed{=}$
События $\varphi(X_1, X_2) < y_0$ и $(X_1, X_2) \in D$ эквивалентны, поэтому
$\boxed{=} \ P\left\{(X_1, X_2) \in D(y_0)\right\} =$ (свойство непрерывности случайного вектора) $= \iint\limits_{D(y_0)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

Пример: Пусть

1) (X_1, X_2) - координаты точки попадания пули при стрельбе по плоской мишени.

2) $(X_1, X_2) \sim R(k)$
где
(k - круг радиуса r)

3) $Y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ - расстояние от точки попадания пули до центра мишени.

Найти закон распределения случайной величины Y.
Решение:

1) $f(x_1,x_2) = \left\{\begin{matrix} c,\ (x_1,x_2) \in k \\ 0,\ \text{иначе} \end{matrix}\right\}$

Из условия нормировки:

$1 = \iint\limits_{R^2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{k} c dx_1 dx_2 = c \cdot \text{Площадь}(k) = c \cdot \pi r^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\pi r^2}$

$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2},\ (x_1,x_2) \in k \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

2) $\varphi(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. График функции φ: $y = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = y^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

3) $F_Y(y_0) = \iint\limits_{D(y_o)} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$

а) $y_0 \leqslant 0 \Rightarrow D(y_0) = \emptyset$ или состоит из одной точки $\Rightarrow F_Y(y_0) = 0$

б) $0 < y_1 \leqslant r$

$D(y_1) = \left\{(x_1,x_2):\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant y_1^2\right\}$

$F_Y(y_1) = \iint\limits_{D(y_1)} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = c \cdot \text{Площадь}(D(y_1)) = \dfrac{\pi y_1^2}{\pi r^2} = \dfrac{y_1^2}{r^2}$

в) Если $y_2 > r \Rightarrow F_Y(y) = \iint\limits_{D(y_0)} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$ (Вставить график $= \iint\limits_{k} dx_1dx_2 = 1$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0,\ y \leqslant 0 \\ \dfrac{y^2}{r^2},\ 0 < y \leqslant r \\ 1,\ y > r \end{cases}$

$f_Y(y) = \dfrac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2y}{r^2},\ y \in (0,r) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

3. Формула свертки.

Рассмотрим частный случай функционального преобразования случайного вектора (X_1, X_2).

Th о формуле свертки.

Пусть

1) X_1, X_2 - непрерывные случайные величины.
2) X_1, X_2 - независимы.
3) $Y = X_1 + X_2$ (то есть $\varphi(X_1, X_2) = X_1 + X_2$)

Тогда

$$F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y-x) f_{X_2}(x) dx$$

Доказательство:

1) $F_Y(y) = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \boxed{=}$

$$D(y) = \left\{ (x_1, x_2) : \underbrace{x_1 + x_2}_{\varphi(x_1, x_2)} < y \right\}$$

$$\boxed{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int\limits_{-\infty}^{y-x_2} f(x_1, x_2) dx_1$$

$f_Y(y) = \dfrac{d}{dy} F_Y(y) =$ (th о производной интеграла с переменным верхним пределом) $= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y - x_2, x_2) dx_2 =$

$(X_1, X_2 -$ независимы $\Rightarrow f(X_1, X_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2.$

Замечание:

1) Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   Определение: сверткой функции f и g называется функция
   $$(f * g)(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y-x) g(x) dx, \ y \in \mathbb{R}.$$
2) Очевидно, что свертки коммутативны, так как:
   $f * g = g * f$
   $t = y - x$
   $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(y-t) dt = (g * f)$$

Числовые характеристики случайных величин.

1. Математическое ожидание.

Пусть X - дискретная случайная величина.

Определение: Математическим ожиданием случайной величины X называется число
$M[X] = \sum\limits_i p_i x_i$, $(*)$
где x_i - все возможные значения случайной величины X, $p_i = P\{X = x_i\}$.

Замечание:

1) Если X принимает счетное множество значений, то предполагается, что ряд $(*)$ сходится абсолютно. В противном случае говорят, что $\nexists M[X]$.

2) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - с..ма математических ожиданий точек на прямой, $m_1, \ldots, m_n$ - масса этих точек.
$x_{\text{ц.м.}} = \dfrac{\sum\limits_i x_i m_i}{\sum\limits_i m_o}$

3) Пусть X - дискретная случайная величина, которая может принимать значения $x_1, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$
$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

Будем интерпретировать значения x_i, как координаты точек на прямой, а p_i - как массы, сосредоточенными в этих точках.
Тогда
$$x_{\text{ц.м.}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = M[X]$$
Таким образом $M[X]$ характеризует положение центра тяжести вероятностной массы (1 кг вероятностной массы распределяется по точкам $x_1, \ldots, x_n$ на прямой).

Пример:
$p \in (0; 1)$
Найдем MX:
$MX = \sum\limits_i p_i x_i = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$
Пусть X - непрерывная случайная величина.
Определение: Математическим ожиданием случайной величины X называется число
$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$
где f - функция плотности случайной величины X.

Замечание:

1) В этом определении предполагается, что несобственный интеграл в правой части сходится абсолютно, то есть $\exists$ ...
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx.$$
Если это не так, то говорят, что $\nexists MX$.

2) Если интегрировать функцию плотности распределения случайной величины X как линейную плотность бесконечного стержня (то есть 1 кг вероятностной массы изготавливают стержень, значение плотности равно f(x)), то MX - координата центра масс этого стержня.

Пример: Пусть X - случайная величина, распределенная ...
Найдем

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \ (**)$$

$$xf(x) = \frac{x}{\pi(1+x^2)} \sim \frac{1}{\pi x} \text{ при } x \to +\infty$$

Так как $\int\limits_{x}^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то интеграл $(**)$ не сходится абсолютно $\Rightarrow \nexists MX$ (хотя ....)

Замечание:

1) Если X - дискретная случайная величина, а $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - некоторая функция, то $M\left[\varphi(X)\right] = \sum\limits_{i} p_i \varphi(x_i)$

2) Если X - непрерывная случайная величина, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$M\left[\varphi(X)\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(X) f(x) dx$$

3) Если (X_1, X_2) - дискретный случайный вектор, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$M\left[\varphi(X_1, X_2)\right] = \sum\limits_{i,j} \varphi(x_{1,i}, x_{2,j}) p_{ij}$,
где $(x_{1,i}, x_{2,j})$ - всевозможные значения вектора (X_1, X_2), $p_{ij} = P\left\{(X_1, X_2) = (x_{1,i}, x_{2,j})\right\}$.

4) Если (X_1, X_2) - непрерывный случайный вектор, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, то
$$M\left[\varphi(X_1, X_2)\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$
где f - совместная плотность распределения X_1 и X_2.

Свойства математического ожидания

1^o Если $P\{X = x_0\} = 1$, то есть
то $MX = x_0$

2^o Если $a, b = const$, то
$M[aX + b] = aM[X] + b$

3^o $M[X_1 + x_2] = MX_1 MX_2$

4^o Если X_1, X_2 - независимые случайные величины, то $M[X_1 X_2] = (MX_1)(MX_2)$

Доказательство

1^o $MX = (\sum x_i p_i) = 1 \cdot x_0 = x_0$

2^o Докажем для случая непрерывной случайной величины X.
$$M[aX + b] = (M[\varphi(X)], \text{где} \varphi(x) = ax + b) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(ax+b)}_{\varphi(x)} f(x)dx = a \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}_{=MX} + b \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}_{=1} = aMX + b$$

3^o Докажем для случая, когда (X_1, X_2) - дискретный случайный вектор.
$$M[X_1 + X_2] = (M[\varphi(X_1, X_2)], \text{где} \varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2) = \sum_i \sum_j (x_{1,i}, x_{2,j})\, p_{ij} = \sum_i \sum_j x_{1,i} p_{ij} + \sum_i \sum_j x_{2,j} p_{ij} = \sum_i x_{1,i} \underbrace{\sum_j p_{ij}}_{P\{X_1 = x_{1,i}\}}$$

$$\underbrace{\sum_i P\{X_1 = x_{1,i}\} \cdot x_{1,i}}_{=MX_1} + \underbrace{\sum_j P\{X_2 = x_{2,j}\} \cdot x_{2,j}}_{=MX_2} = MX_1 + MX_2$$

Пусть $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ - n-мерный случайный вектор.

Определение: Числовой вектор $M\vec{X} = (MX_1, \ldots, MX_n)$ называется вектором средних (вектором математического ожидания) вектора $\vec{X}$.

2. Дисперсия.

Определение: Дисперсией случайной величины X называется число $D[X] = M\left[(X-m)^2\right]$, где $m = MX$.

Замечание:

1) Если X - дискретный случайный вектор, то
$DX = \sum\limits_i (x_i - m)^2 p_i$

2) Если X - непрерывный случайный вектор, то
$$DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx.$$

3) Механический смысл дисперсии.
Дисперсия является моментом инерции вероятностной массы, относительно математического ожидания, то есть она характеризует разброс масс относительно математического ожидания: чем больше дисперсия, тем больше разброс.

Пример:
$$DX = \left(\sum_i p_i(x_i-m)^2; m = p\right) = (1-p)(0-p)^2 + p\cdot(1-p)^2 = p^2(1-p) + p(1-p^2) = p(1-p)[p+1-p] = pq$$
где $q = 1-p$.

Свойства дисперсии

1^o $DX \geqslant 0$

2^o Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $DX = 0$

3^o Если $a, b = const$, то $D[aX+b] = a^2 DX$

4^o $DX = M[X^2] - (MX)^2$

5^o Если X_1, X_2 - независимы, то $D[X_1+X_2] = DX_1 + DX_2$

Доказательство:

1^o $DX = M[Y]$, где $Y = (X-m)^2 \geqslant 0 \Rightarrow MY \geqslant 0$

2^o $DX = \left(= \sum (x_i-m)^2 \cdot p_i^2,\ m = x_0\right) = (x_0 - x_0)^2 \cdot 1 = 0$

3^o $D[aX+b] = (Y = aX+b) = DY = M\left[(Y-MY)^2\right] = M\left[(aX+b-(am+b))^2\right] = M\left[a^2(X-m)^2\right] = a^2 \underbrace{M\left[(X-m)^2\right]}_{DX} =$
$a^2 DX$

4^o $D[X] = M\left[(X-m)^2\right] = M\left[X^2 - 2mX + m^2\right] = M[X^2] - \underbrace{2m\underbrace{MX}_{=m}}_{=2m^2} + m^2 = M[X^2] - m^2 = M[x^2] - (MX)^2$

5^o $D[X_1+X_2] = M\left[(Y - MY^2)^2\right] = M\left[[(X_1+X_2) - (MX_1+MX_2)]^2\right] = M\left[[(X_1-m_1)+(X_2-m_2)]^2\right] = M\left[(X_1-m_1)^2 +\right.$
$\underbrace{M\left[(X_1-m_1)^2\right]}_{DX_1} + \underbrace{M\left[(X_2-m_2)^2\right]}_{DX_2} - \underbrace{2M\left[(X_1-m_1)(X_2-m_2)\right]}_{Z} = DX_1 + DX_2$
$Z = M\left[(X_1X_2 - m_1X_2 - m_2X_1 + m_1m_2)\right] = \underbrace{M[X_1X_2]}_{(MX_1)(MX_2)=m_1m_2} - m_1\underbrace{M[X_2]}_{m_2} - m_2\underbrace{M[X_1]}_{m_1} + m_1m_2 = m_1m_2 - m_1m_2 -$
$m_1m_2 + m_1m_2 = 0$

Замечание:

1) Можно показать, что справедливо свойство, обратное свойству 2^o: Если $DX = 0$, то X принимает единственное значение с вероятностью 1.

2) Свойство 5^o справедливо для любого набора попарно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$:
$D(X_1 + \ldots + X_n) = DX_1 + \ldots + DX_n$

3) DX имеет размерность квадрата случайной величины X. Это не очень удобно, поэтому вместе с дисперсией рассматривают величину $\sigma_X = \sqrt{DX}$, которое называется среднеквадратичным отклонением случайной величины X.
σ_X имеет ту же размерность, что и X.

3. Математические ожидания и дисперсии некоторых случайных величин.

I. Биномиальная случайная величина $X \sim B(n, p)$
$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = \overline{0, n}$
Найти MX и DX.

а) X - число успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

б) Введем случайную величину
$X_i = \begin{cases} 1, \text{если в i-ом испытании произошел успех} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$
$i = \overline{1, n}$
Тогда
$q = 1 - p$
Ранее $MX_i = p$, $DX_i = pq$, $i = \overline{1, n}$

в) $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$
$M[X] = M\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} MX_i = pn.$
$D[X] = D\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right] =$ (в схеме испытании Бернулли отдельные испытания независимы $\Rightarrow$ все X_i независимы) $= \sum\limits_{i=1}^{n} DX_i = npq.$

II. Пуассоновская случайная величина $X \sim \Pi(\lambda)$.
$P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots$

а) $MX = (\sum p_i x_i) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1} \dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = [j = k - 1;\ k = 1 \Rightarrow j = 0] = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^j}{j!}}_{=e^{\lambda}} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}\cdot\lambda = \lambda$
Аналогично можно показать, что $DX = \lambda$.

III. Геометрическое распределение.
Пусть X имеет геометрическое распределение с параметрами $p \in (0; 1)$.
то есть $P\{X = k\} = pq^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$
Тогда можно показать, что
$MX = \dfrac{q}{p}$
$DX = \dfrac{q}{p^2}$

IV. Равномерное распределение случайной величины.
$X \sim P[a, b]$
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in [a, b] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$
$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = (f(x) \equiv 0 \text{ вне } [a, b]) = \int\limits_{a}^{b} x\dfrac{1}{b-a}dx = \dfrac{b^2 - a^2}{a(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$
$DX = M\left[(X - MX)^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 f(x)dx = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 dx = \ldots = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

V. Экспоненциальное распределение.
$\lambda = Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = (f(x) \equiv 0 \text{ при } x < 0) = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x} = -xe^{\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$DX = M[X^2] - (MX)^2$

$$M[X^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx = \ldots = \frac{2}{\lambda^2}$$

Тогда $DX = \dfrac{2}{\lambda^2} - \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$

VI. Нормальное распределение: $X \sim N(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{c} \frac{x-m}{\sigma} = t \\ dx = \sigma dt \\ x = \sigma t + m \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \sigma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + n)e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + m \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\right.$$

$$m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = m$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = f_{0,1}(t)$ - функция плотности распределения $N(0;1)$

$$DX = M\left[(X - MX)^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left\{\frac{(x-m)}{\sigma} = t\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \sigma \cdot \sigma^2 \cdot$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tde^{-\frac{t^2}{2}} = \{\text{по частям}\} = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right] =$$

$$\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sigma^2$$

$\boxed{\text{Таким образомесли } X \sim N(m, \sigma^2) \text{то } m = MX \quad \sigma^2 = DX}$

4. Моменты.

Пусть X - случайная величина.
Определение: Моментом k-ого порядка (k-м моментом k-м начальным порядком) случайной величины X называется число
$m_k = M\left[X^k\right], \ (k = 1, 2, \ldots)$
Определение: Центральным моментом k-ого порядка случайной величины X называется число
$\overset{\circ}{m}_k = M\left[(x-m)^k\right]$, где $m = MX, \ (k = 1, 2, \ldots)$

Замечание:

1) если X - дискретная случайная величина, то
   $m_k = \sum\limits_i p_i(x_i - m)^k$

2) если X - непрерывная случайная величина, то
   $$m_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx,$$

$\overset{\circ}{m}_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^k f(x)dx$

3) $m_1 = MX$
$\overset{\circ}{m}_2 = DX$
$\overset{\circ}{m}_1 = 0$

5. Квантиль.

Пусть X - случайная величина
$\alpha \in (0;1)$

Определение: Квантилью уровня α случайной величины X называется число q_α, определяемое условиями:
$P\{X < q_\alpha\} \leqslant \alpha$, $P\{X > q_\alpha\} \leqslant 1-\alpha$

Замечание:

1) если X - непрерывная случайная величины, то $\forall \alpha \in (0;1)$ квантиль уровня α определена однозначно и является решением уравнения
$F_X(t) = \alpha$ $F_X(t) = \alpha \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \alpha$

Определение: Медианой случайной величины X называется квантиль уровня $\frac{1}{2}$, то есть $q_{\frac{1}{2}}$.

Пример: Пусть $X \sim Exp(\lambda)$. Найти q_α и медиану.
$\int\limits_{-\infty}^{q_\alpha} f(x)dx = \alpha \Leftrightarrow \lambda \int\limits_{0}^{q_\alpha} e^{-\lambda x}dx = \alpha$
То есть
$\alpha = \lambda \int\limits_{0}^{q_\alpha} e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x} bigg|_0^{q_\alpha} = \left(1 - e^{-\lambda q_\alpha}\right) \Rightarrow e^{-\lambda q_\alpha} = 1-\alpha \Rightarrow -\lambda q_\alpha = \ln 1 - \alpha \Rightarrow \boxed{q_\alpha = \frac{-\ln(1-\alpha)}{\lambda}}$ - квантиль уровня α.
Медиана:
$q_{\frac{1}{2}} = \frac{-\ln(1-\frac{1}{2})}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

6. Ковариация.

До сих пор мы изучали численные характеристики одномерных случайных величин. Ковариация является характеристикой случайного вектора.
Пусть (X,Y) - двумерный случайный вектор.

Определение: Ковариацией случайной величины X и Y называется число
$cov(X,Y) = M\left[(X-m_1)(Y-m_2)\right]$
где $m_1 = MX$, $m_2 = MY$.

Замечание:

1) если (X,Y) - дискретный случайный вектор, то
$cov(X,Y) = \sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij}(x_i - m_1)(y_j - m_2)$,
где $p_{ij} = P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}$

2) если (X,Y) - непрерывный случайный вектор, то
$cov(X,Y) = \iint\limits_{\mathbb{R}^{\not 2}} (x-m_1)(y-m_2)f(x,y)dxdy$,

где $f(x,y)$ - совместная плотность распределения X и Y.

Свойства ковариации

1^o $D(X+Y) = DX + DY + 2cov(X,Y)$

2^o $cov(X,X) = DX$

3^o Если X, Y - независимы, то $cov(X,Y) = 0$

4^o $cov(a_1X + a_2, b_1Y + b_2) = a_1b_1 \cdot cov(X,Y)$

5^o $|cov(X,Y)| \leqslant \sqrt{DX \cdot DY}$
причем
$|cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \Leftrightarrow$ X и Y связаны мн. зависимостью, то есть $Y = aX + b$, где $a, b = const$

6^o $cov(X,Y) = M[XY] - (MX)(MY)$

Доказательство

1^o $D(X+Y) = M\left[\{(X+Y) - (M(X+Y))\}^2\right] = \begin{Bmatrix} m_1 = MX \\ m_2 = MY \end{Bmatrix} = M\left[\{(X-m_1) + (Y-m_2)\}^2\right] = M\left[(X-m_1)^2 + (Y-m_2$
$\underbrace{M\left[(X-m_1)^2\right]}_{DX} + \underbrace{M\left[(Y-m_2)^2\right]}_{DY} + 2\underbrace{M\left[(X-m_1)(Y-m_2)\right]}_{cov(X,Y)} = DX + DY + 2cov(X,Y)$

2^o $cov(X,X) = M\left[(X-m)(X-m)\right] = M\left[(X-m)^2\right] = DX$

3^o $cov(X,Y) - M\left[(X-m_1)(Y-m_2)\right] = \underbrace{M\left[(X-m\right]}_{m=0} \cdot M[Y-m_2] = 0$

4^o $cov(a_1X + a_2,\ b_1Y + b_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Обозначения:} \\ \mu_1 = M[a_1X + a_2] \\ \mu_2 = M[b_1Y + b_2] \end{array} \right\} = M\left[(a_1X + a_2 - \mu_1)(b_1Y + b_2 - \mu_2)\right] = \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = a_1m_1 + a_2 \\ \mu_2 = b_1m_2 + b_2 \end{array} \right\} =$
$M\left[(a_1X - a_2m_1)(b_1Y - b_1m_2)\right] = \{\mu - \text{ линейно}\} = a_1b_1M\left[(X-m_1)(Y-m_2)\right] = a_1b_1 \cdot cov(X,Y)$.

6^o $cov(X,Y) = M\left[(X-m_1)(Y-m_2)\right] = M\left[XY - m_2X - m_1Y + m_1m_2\right] = M[XY] - \underbrace{m_2MX}_{m_1m_2} - \underbrace{m_1MY}_{m_1m_2} + m_1m_2 =$

$M[XY] - m_1m_2$

5^o а) Покажем, что $|cov(X,Y)| \leqslant \sqrt{DX \cdot DY}$
Рассмотрим случайную величину $Z(t) = tX - Y,\ t \in \mathbb{R}$
Тогда
$D[Z(t)] = D[tX - Y] = \{\text{свойство } 1^o\} = D(tX) - D(-Y) + 2cov(tX, -Y) = \left\{D(aX) = a^2DX - \text{свойство } 4^o cov\right\} =$
$t^2DX + DY - 2tcov(X,Y) = (DX)t^2 - 2(cov(X,Y))t + DY \geqslant 0$
Дисперсия $= \left\{\left(\frac{t^2}{2}\right) - ac\right\} = |cvo(X,Y)|^2 - DX \cdot DY \leqslant 0 \Rightarrow |cov(X,Y) \leqslant \sqrt{DX \cdot DY}$

б) Покажем, что
$|cov(X,Y) = \sqrt{DX \cdot DY} \Leftrightarrow Y = aX + b$
$\boxed{\Rightarrow}$ Необходимость
Если $|cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \Rightarrow$ дисперсия $= 0 \Rightarrow$ уравнение $D[Z(t)] = 0$ имеет единственный корень.
Обозначим его $t = a$
Тогда случайная величина $Z(a) = aX - Y$ имеет $D[Z(a)] = 0 \Rightarrow$ Она принимает одно единственное значение (обозначим его - b)
с вероятностью 1, то есть $Z(a) = \underbrace{aX - Y = -b}_{Y = aX + b}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Достаточность
Если $Y = aX + b$, то случайная величина $Z(a) = -b \Rightarrow D(Z(a)) = 0 \Rightarrow$ Дисперсия $= 0 \Rightarrow |cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY}$

Замечание:

1) Свойства 1^o с учетом 4^o допускает обобщение
$D[aX + bY + c] = a^2 DX + b^2 DY + 2abcov(X, Y)$

2) Рассмотрим свойство 5^o.
Пусть $Y = aX + b \Rightarrow$ {в соответствии с 4^o} $\Rightarrow cov(X, Y) = cov(X, aX + b) = a \cdot cov(X, X) = aDX$
Если $DX \geqslant 0$, то знак $(cov(X, Y))$ = значу (a).
Таким образом свойство 5^o можно уточнить:
Если $Y = aX + b$, то
$cov(X, Y) = \begin{cases} \sqrt{DX \cdot DY}, \text{ если } a > 0 \\ -\sqrt{DX \cdot DY}, \text{ если } a < 0 \end{cases}$

Определение: Случайная величина X и Y называется некоррелированными, если $cov(X, Y) = 0$

Замечание: из свойства $3^o \Rightarrow$
X, Y - независимы $\Rightarrow$ X, Y - некоррелированные.
Обратное неверно.

ДЗ: привести пример случайного вектора (X, Y), для которого X, Y - зависимы, но некоррелируемы.

Замечание: недостатком ковариации является то, что она имеет размерность произведения случайных величин X и Y. В то же самое время удобно иметь некоторую безразмерную характеристику.

Определение: Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называют число
$\rho(X, Y) = \dfrac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$
(здесь предполагается, что $DX \cdot DY > 0$

Свойства коэффициента корреляции

1^o $\rho(X, X) = 1$

2^o Если X, Y - независимы, то $\rho(X, Y) = 0$

3^o $\rho(a_1 X + a_2,\ b_1 Y b_2) = \pm\rho(X, Y)$
где "$+$" , если $a_1 a_2 > 0$
" , если $a_1 a_2 < 0$

4^o $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$, причем
$|\rho(X, Y) = 1| \Leftrightarrow$ X и Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$.
При этом
$\rho(X, Y) = \begin{cases} 1, \text{ если } a > 0 \\ -1, \text{ если } a < 0 \end{cases}$

Доказательство
Эти свойства являются прямым следствием свойств ковариации.
(Доказать самостоятельно).

Замечание: Коэффициент корреляции показывает "степень" линейной зависимости случайный величин X и Y. Пусть проведено достаточно много экспериментов, и все реализации вектора (X, Y) изображена на плоскости. Чем ближе эти реализации группируются около некоторой прямой, тем ближе значение (ρ) к 1.
Если все эти значения лежат на одной прямой, то $|\rho| = 1$.
При этом если соответствующая прямая имеет положительный коэффициент, то $\rho > 0$ и $\rho \leqslant 1$.
Если оно...