Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовой проект по курсу «Уравнения математической физики»

Студент:	А. В. Куликов
Преподаватель:	С. А. Колесник
Группа:	М8О-308Б
Вариант:	23
Дата:	
Оценка:	
Подпись:	

Москва, 2020

Содержание

1 Задача №1

Постановка задачи

Сформулировать и решить задачу о тепловом состоянии стержня $x \in [0; l]$, $l = 0,1$м с начальным условием $T_0 = 300$, теплообменом на боковой поверхности по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_1 = 0,1$ и температурой окружающей среды $u_e = 1000$, когда на левом и правом концах заданы температура $\mu_1 = 300e^{-t}$ и тепловой поток $\mu_2 = 500e^{-t}$ соответственно ($a^2 = 10^{-6}, l = 0,1$м).

Исследовать ортогональность и нормировку собственных функций, построить график $u(x,t)$.

Вывод системы

Рассмотрим отрезок стержня от x до $x + \Delta x$.

Количество тепла, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на Δu:

$$c\rho\Delta u V$$

Количество тепла, протекающее через поперечное сечение x за время Δt:

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$$

Производная искомой функции u по x в точке x равна $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Тогда в точке $x + \Delta x$ с точностью до бесконечно малых высших порядков:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

Тогда количество тепла, сообщенного участку стержня за время Δt будет

$$\Delta Q_1 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t - \left(-kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\right)\Delta t = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t$$

Температура за тот же промежуток времени Δt повысилась на $\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Delta t$, тогда

$$\Delta Q = c\rho V\Delta u = c\rho S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\Delta t$$

К тому же по закону Ньютона количество тепла, поступившее на отрезок длины Δx через боковую поверхность за время Δt будет

$$\Delta Q_2 = \alpha_1 [u_e - u] P\Delta x\Delta t$$

Теперь составим уравнение теплового баланса

$$kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t + \alpha_1\left[u_e - u\right]P\Delta x\Delta t = c\rho S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\Delta t$$

Поделив на $c\rho S\Delta x\Delta t$ и положив $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}, b^2 = \dfrac{\alpha_1 P}{c\rho S}$ приходим к уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx} + b^2\left[u_e - u\right]$$

Тепловой поток при $x = l$ по условию равен $\mu_2(t)$

$$kS\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}\Delta t = \mu_2(t)\Delta t \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{\mu_2(t)}{kS}$$

Температура на левом конце стержня задана законом $\mu_1(t)$, тогда

$$u(0,t) = \mu_1(t)$$

Так же задано начальное распределение температуры по стержню

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

Т.о. приходим к системе

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + b^2\left[u_e - u\right], & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, t = 0 \\ u(0,t) = \mu_1(t), & x = 0, t > 0 \\ u_x(l,t) = \dfrac{\mu_2(t)}{kS}, & x = l, t > 0 \end{cases}$$

Решение

Имеем систему

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - b^2 u + f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = g_1(t) \\ u_x(l,t) = g_2(t) \end{cases}$$

Преобразуем систему к каноническому виду с тем, чтобы избавиться от члена с u заменой $u = ve^{\lambda x + \mu t}$. Тогда

$$\begin{aligned} &u_x = v_x e^{\lambda x + \mu t} + \lambda v e^{\lambda x + \mu t} \\ &u_{xx} = v_{xx} e^{\lambda x + \mu t} + 2\lambda v_x e^{\lambda x + \mu t} + \lambda^2 v e^{\lambda x + \mu t} \\ &u_t = v_t e^{\lambda x + \mu t} + \mu v e^{\lambda x + \mu t} \end{aligned}$$

Тогда, подставляя в уравнение и деля на $e^{\lambda x+\mu t}$ получаем

$$v_t + \mu v = a^2\left(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v\right) - b^2 v + \frac{f(x,t)}{e^{\lambda x+\mu t}}$$

Пусть $\mu = -b^2, \lambda = 0$, тогда получаем

$$v_t = a^2 v_{xx} + e^{b^2 t} f(x,t) = a^2 v_{xx} + f_1(x,t)$$

Преобразуем также начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned}
&u(x,0) = v(x,0)e^{-b^2 0} = v(x,0) = \varphi(x)\\
&u(0,t) = v(0,t)e^{-b^2 t} \Rightarrow v(0,t) = u(0,t)e^{b^2 t} = g_1(t)e^{b^2 t} = \psi_1(t)\\
&u_x(l,t) = v_x(l,t)e^{-b^2 t} \Rightarrow v_x(l,t) = u_x(l,t)e^{b^2 t} = g_2(t)e^{b^2 t} = \psi_2(t)
\end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{cases}
v_t = a^2 v_{xx} + f_1(x,t)\\
v(x,0) = \varphi(x)\\
v(0,t) = \psi_1(t)\\
v_x(l,t) = \psi_2(t)
\end{cases}$$

Применим метод редукции: пусть $v(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)$, тогда получим три отдельных системы.

$$\begin{cases}
u_{1t} = a^2 u_{1xx}\\
u_1(x,0) = \varphi(x) - u_3(x,0) = \varphi_1(x)\\
u_1(0,t) = 0\\
u_{1x}(l,t) = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
u_{2t} = a^2 u_{2xx} + f_1(x,t) - u_{3t} = a^2 u_{2xx} + f_2(x,t)\\
u_2(x,0) = 0\\
u_2(0,t) = 0\\
u_{2x}(l,t) = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
u_{3xx} = 0\\
u_3(0,t) = \psi_1(t)\\
u_{3x}(l,t) = \psi_2(t)
\end{cases}$$

Решим задачу для u_3. Решение будем искать в виде

$$u_3(x,t) = C_1(t)x + C_2(t)$$

Подставляя в краевые условия

$$u_3(0,t) = C_2(t) = \psi_1(t)$$
$$u_{3x}(l,t) = C_1(t) = \psi_2(t)$$

получим решение

$$u_3(x,t) = \psi_2(t)x + \psi_1(t)$$

Решим теперь первую задачу. Пусть $u_1(x,t) = X(x)T(t)$, тогда, подставив в уравнение имеем

$$\begin{aligned}
&XT' = a^2X''T \Rightarrow \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \\
&X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\
&X'(l)T(t) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0
\end{aligned}$$

Для X имеем систему

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

тогда X будет вида

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

при этом

$$\begin{aligned}
&X'(0) = C_2 = 0 \\
&X'(l) = \lambda C_1 \cos(\lambda l) \Rightarrow \lambda_k = \frac{2k+1}{2l}\pi \text{ – собственные значения,}
\end{aligned}$$

тогда $X_k(x) = C_k \sin\left(\dfrac{2k+1}{2l}\pi x\right)$ – собственные функции.
Для T имеем уравнение

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0 \Rightarrow T_k(t) = C_k e^{-c^2 t},$$

где $c = a^2\lambda_k^2$. Тогда

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = C_k e^{-c^2 t} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$u_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-c^2 t} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

Проверим ортогональность системы функций $X_k(x)$ и найдем их нормы. Для этого возьмем два вспомогательных интеграла.

$$\int\limits_0^l \cos\left(\frac{m-n}{l}\pi x\right)dx = \frac{l}{(m-n)\pi}\int\limits_0^l \cos\left(\frac{m-n}{l}\pi x\right)d\left(\frac{m-n}{l}\pi x\right) =$$

$$= \frac{l}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{m-n}{l}\pi x\right)\Bigg|_0^l = \frac{l}{(m-n)\pi}\left(\sin\left((m-n)\pi\right) - \sin\left(\frac{m-n}{l}\pi 0\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} l\lim\limits_{m\to n}\dfrac{\sin((m-n)\pi)}{(m-n)\pi} = l,\ m=n \\ 0,\ m\neq n \end{cases}$$

и

$$\int\limits_0^l \cos\left(\frac{m+n+1}{l}\pi x\right) = \frac{l}{(m+n+1)\pi}\left(\sin\left((m+n+1)\pi\right) - \sin\left(\frac{m+n+1}{l}\pi 0\right)\right) = 0$$

Тогда, подставляя их в решение получаем

$$\int\limits_0^l \sin\left(\frac{2m+1}{2l}\pi x\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[\cos\left(\frac{m-n}{l}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n+1}{l}\pi x\right)\right]dx =$$

$$= \begin{cases} l/2,\ m=n \\ 0,\ m\neq n \end{cases}$$

Таким образом $\|X_k\| = \dfrac{l}{2}$, и система функций X_k ортогональна.
Продолжая решение, используем начальное условие

$$u_1(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = \varphi_1(x)$$

Если $\varphi_1(x)$ разложить в ряд Фурье по функциям X_k на, то

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right),$$

тогда

$$C_k = \varphi_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi_1(\xi) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi$$

таким образом

$$u_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi_1(\xi) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right).$$

Решим теперь вторую задачу. Решение будем искать с теми же собственными функциями X_k. Тогда

$$u_2(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$u_{2xx}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 \left(-\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)\right)$$

$$u_{2t}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$u_2(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = 0 \Rightarrow T_k(0) = 0$$

Функцию $f_2(x,t)$ так же можно разложить в ряд Фурье по X_k считая t параметром

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f_2(\xi,t) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi.$$

Тогда подставляя в уравнение получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[T_k'(t) + a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 T_k(t) - f_k(t)\right] \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = 0 \Leftrightarrow T_k' + c^2 T_k = f_k(t)$$

Имеем задачу Коши для ОДУ

$$\begin{cases} T_k' + c^2 T_k = f_k(t) \\ T_k(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда $T_{k_{\text{оо}}} = C_k e^{-c^2 t}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $T_{k_{\text{чн}}} = C_k(t) e^{-c^2 t}$ – частное решение неоднородного. Найдем $C_k(t)$ методом вариации произвольной постоянной.

$$T_k'(t) = C_k'(t)e^{-c^2t} - c^2C_k(t)e^{-c^2t}$$
$$C_k'(t)e^{-c^2t} - c^2C_k(t)e^{-c^2t} - c^2C_k(t)e^{-c^2t} = f_k(t) \Rightarrow C_k'(t) = e^{c^2t}f_k(t)$$
$$C_k(t) = \int\limits_0^t e^{c^2\tau}f_k(\tau)d\tau \Rightarrow T_{k_{\text{чн}}} = \int\limits_0^t e^{c^2\tau}f_k(\tau)d\tau\ e^{-c^2t} = \int\limits_0^t e^{-c^2(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau$$

Тогда

$$T_k(t) = T_{k_{\text{оо}}} + T_{k_{\text{чн}}} = C_ke^{-c^2t} + \int\limits_0^t e^{-c^2(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau$$

Применим начальное условие

$$T_k(t) = C_k + 0 = C_k = 0.$$

Тогда

$$T_k(t) = \int\limits_0^t e^{-c^2(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau.$$

Наконец, получаем

$$u_2(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^t \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_2(\xi,\tau)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi\ e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2(t-\tau)}d\tau\ \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

Выразим вспомогательные функции через исходные.

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - u_3(x,0) = T_0 - \psi_2(0)x - \psi_1(0) = T_0 - g_2(0)x - g_1(0) = T_0 - \frac{\mu_2(0)}{kS}x - \mu_1(0)$$

$$\psi_2'(t) = \left(e^{b^2t}g_2(t)\right)_t' = \frac{1}{kS}\left(e^{b^2t}\mu_2(t)\right)_t' = \frac{e^{b^2t}}{kS}\left(b^2\mu_2(t) + \mu_2'(t)\right)$$
$$\psi_1'(t) = \left(e^{b^2t}g_1(t)\right)_t' = \left(e^{b^2t}\mu_1(t)\right)_t' = e^{b^2t}\left(b^2\mu_1(t) + \mu_1'(t)\right)$$

$$f_2(x,t) = f_1(x,t) - u_{3t}(x,t) = e^{b^2t}f(x,t) - (\psi_2(t)x + \psi_1(t))_t' = e^{b^2t}f(x,t) - \psi_2'(t)x - \psi_1'(t) =$$
$$= e^{b^2t}\left(f(x,t) - \frac{1}{kS}\left(b^2\mu_2(t) + \mu_2'(t)\right)x - \left(b^2\mu_1(t) + \mu_1'(t)\right)\right)$$

Итак, получаем решение исходной системы.
Ответ:

$$u(x,t) = \left(u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)\right) e^{-b^2 t} =$$

$$= e^{-b^2 t}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l}\int\limits_0^l \left(T_0 - \frac{\mu_2(0)}{kS}\xi - \mu_1(0)\right)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) + \right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^t \frac{2}{l}\int\limits_0^l e^{b^2\tau}\left[f(\xi,\tau) - \frac{1}{kS}\left(b^2\mu_2(\tau) + \mu_2'(\tau)\right)\xi - \left(b^2\mu_1(\tau) + \mu_1'(\tau)\right)\right]\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \cdot$$

$$\left.\cdot e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 (t-\tau)} d\tau \; \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) + e^{b^2 t}\left(\frac{\mu_2(t)}{kS}x + \mu_1(t)\right)\right],$$

где $f(x,t) = b^2 u_e$, $\mu_1(t) = 300e^{-t}$, $\mu_2(t) = 500e^{-t}$, $T_0 = 300$, $u_e = 1000$.

Проверка

Проверим выполнение условий для u_1.

$$u_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_1(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$u_{1t}(x,t) = -a^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l}\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2\int\limits_0^l \varphi_1(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$u_{1x}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l}\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)\int\limits_0^l \varphi_1(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t}\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$u_{1xx}(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l}\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2\int\limits_0^l \varphi_1(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

т.о. $u_{1t} = a^2 u_{1xx}$

$$u_1(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_1(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \; \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = \varphi_1(x)$$

$$u_1(0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi_1(\xi) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi\; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi 0\right) = 0$$

$$u_{1x}(l,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right) \int\limits_0^l \varphi_1(\xi) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi\; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t} \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi l\right) =$$
$$= \ldots\ \cos(\pi k + \frac{\pi}{2}) = 0$$

т.о. все условия на u_1 выполняются.

Проверим выполнение условий для u_2. Пусть

$$I_k(t) = \int\limits_0^t f_k(\tau)\; e^{a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 \tau} d\tau$$
$$S_k(t) = I_k(t) e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t}$$

$$u_{2t}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S'_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$S'_k(t) = I'_k(t) e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t} - a^2 \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 I_k(t) e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t} =$$
$$= f_k(t) - a^2 \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 I_k(t) e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 t}$$

тогда

$$u_{2t}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) -$$
$$-a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 \int\limits_0^t f_k(\tau)\; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 (t-\tau)} d\tau\ \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) =$$
$$= f_2(x,t) - a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 \int\limits_0^t f_k(\tau)\; e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 (t-\tau)} d\tau\ \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$u_{2x}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right) \int\limits_0^t f_k(\tau)\ e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2(t-\tau)} d\tau\ \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$u_{2xx}(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 \int\limits_0^t f_k(\tau)\ e^{-a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2(t-\tau)} d\tau\ \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

т.о. $u_{2t} = a^2 u_{2xx} + f_2(x,t)$

$$u_2(0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi 0\right) = 0$$

$$u_2(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^0 f_k(\tau)\ e^{a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 \tau} d\tau\ \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = 0$$

$$u_{2x}(l,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right) S_k(t) \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi l\right) = \ldots\ \cos(\pi k + \frac{\pi}{2}) = 0$$

т.о. все условия на u_2 выполняются.

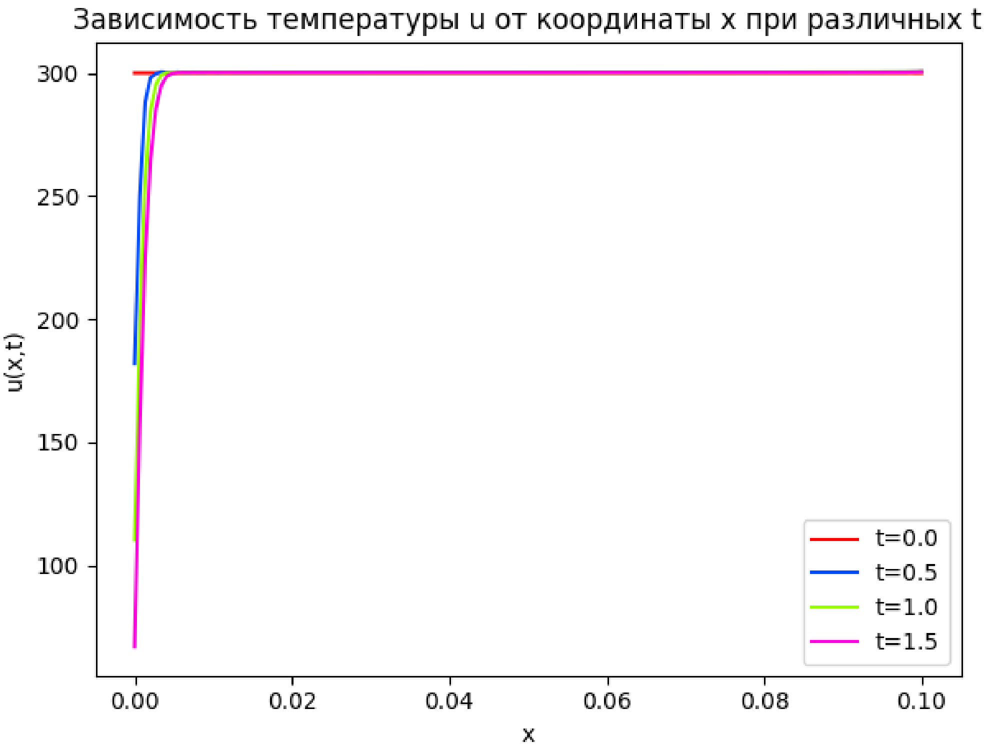
Проверим выполнение условий для u_3.

$$u_3(x,t) = \psi_2(t)x + \psi_1(t)$$
$$u_{3x}(x,t) = \psi_2(t)$$
$$u_{3xx}(x,t) = 0$$
$$u_3(0,t) = \psi_1(t)$$
$$u_{3x}(l,t) = \psi_2(t)$$

т.о. все условия на u_3 выполняются.

Условия на все функции, составляющие решение выполняется, следовательно решение верно.

Графики



Зависимость температуры u от координаты x при различных t
u(x,t)
x
300
250
200
150
100
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
t=0.0
t=0.5
t=1.0
t=1.5

2 Задача №2

Постановка задачи

Сформулировать и решить задачу о свободных колебаниях конечного стержня $x \in [0; l]$, $l = 0,1$м, $a^2 = 10^6$ с нулевым начальным отклонением и скоростью, когда левый конец движется по заданному закону $\mu_1 = \sin t$, а правый – свободен. Результаты $u(x,t)$ оформить графически.

Вывод системы

Пусть имеется стержень длины l и с площадью поперечного сечения S. $u(x,t)$ – смещение сечения x от своего начального положения в момент времени t. Рассмотрим отрезок стержня от x до $x + \Delta x$ и найдем его относительное удлинение. Тогда координата левого конца в момент времени t будет $x + u(x,t)$, координата правого будет $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$. Тогда относительное удлинение отрезка $[x, x + \Delta x]$:

$$\frac{[u(x + \Delta x, t) + x + \Delta x - u(x,t) - x] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ относительное удлинение будет равно u_x.
Тогда по закону Гука действующая на сечение сила натяжения будет:
$T(x,t) = ESu_x(x,t)$ – на левом конце отрезка,
$T(x + \Delta x, t) = ESu_x(x + \Delta x, t)$ – на правом.
Тогда равнодействующая сил, действующих на отрезок $[x, x + \Delta x]$ будет равна:

$$R = T(x + \Delta x, t) - T(x,t) = ES\left[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x,t)\right].$$

При этом $R = ma$, тогда

$$ma = \Delta x S \rho u_{tt}(x,t) = ES\left[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x,t)\right].$$

Поделив на $S\Delta x\rho$ получим

$$u_{tt}(x,t) = \frac{E}{\rho}\frac{\left[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x,t)\right]}{\Delta x}.$$

Приняв $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, и при $\Delta x \to 0$, имеем уравнение:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Получим начальные условия. В условии задачи сказано, что начальная скорость $v(x,0) = 0$, значит $u_t(x,0) = 0$. Также указано, что начальное отклонение $u(x,0) = 0$.

Получим граничные условия. В условии задачи сказано, что левый конец стержня движется по закону $\mu_1(t) = \sin t$, поэтому $u(0,t) = \mu_1(t) = \sin t$. Правый конец стержня свободен, значит сила натяжения $T(l,t) = 0$, отсюда:

$$T(l,t) = ESu_x(l,t) = 0 \Rightarrow u_x(l,t) = 0$$

Таким образом приходим к системе

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < l, t = 0 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < l, t = 0 \\ u(0,t) = \mu_1(t), & x = 0, t > 0 \\ u_x(l,t) = 0, & x = l, t > 0 \end{cases}$$

Решение

Для решения системы применим метод редукции. Пусть $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$. Разделим исходную систему на две:

$$\begin{cases} u_{1xx} = 0 \\ u_1(0,t) = \mu_1(t) \\ u_{1x}(l,t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} - u_{1tt} \\ u_2(x,0) = -u_1(x,0) \\ u_t(x,0) = -u_{1t}(0) \\ u_2(0,t) = 0 \\ u_{2x}(l,t) = 0 \end{cases}$$

Решим первую систему

$$u_1(x,t) = C_1(t)x + C_2(x,t)$$
$$u_1(0,t) = C_2(t) = \mu_1(t)$$
$$u_{1x}(l,t) = C_1(t) = 0$$
$$u_1(x,t) = \mu_1(t)$$

Т.о. вторая система примет вид:

$$\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} - \mu_1''(t) = a^2 u_{2xx} + f(x,t) \\ u_2(x,0) = -\mu_1(0) = g_1(x) \\ u_t(x,0) = -\mu_1'(0) = g_2(x) \\ u_2(0,t) = 0 \\ u_{2x}(l,t) = 0 \end{cases}$$

Применим редукцию еще раз. Пусть $u_2(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$. Получим две системы:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(x,0) = g_1(x) \\ v_t(x,0) = g_2(x) \\ v(0,t) = 0 \\ v_x(l,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t) \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \\ w(0,t) = 0 \\ w_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

Решим систему для v. Пусть $v(x,t) = X(x)T(t)$, тогда

$$XT'' = a^2 XT''$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$v(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$v_x(l,t) = X'(l)T(t) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0$$

Для X имеем уравнение $X'' + \lambda^2 X = 0$. Его решение имеет вид:

$$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

тогда, подставив в граничные условия, получаем

$$X(0) = A\sin(\lambda 0) + B\cos(\lambda 0) = B = 0$$

$$X'(l) = \lambda A\cos(\lambda x) = 0 \Rightarrow \cos(\lambda x) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{2k+1}{2l}\pi$$

т.о $X_k(x) = A\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$ – собственные функции.

Для T имеем уравнение $T'' + a^2\lambda^2 T = 0$. Его решение имеет вид:

$$T_k(t) = c_k \sin(a\lambda_k t) + D_k\cos(a\lambda_k t)$$

Тогда

$$v_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(C_{1k}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a t\right) + C_{2k}\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a t\right)\right)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[C_{1k}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a t\right) + C_{2k}\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a t\right)\right]\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

Используем начальные условия

$$v(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = g_1(x)$$

$$v_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k}\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a\right)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = g_2(x)$$

Функции $g_1(x)$, $g_2(x)$ можно разложить в ряд Фурье по X_k.

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$
$$g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$
$$g_{1k} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l g_1(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi$$
$$g_{2k} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l g_2(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi$$

Тогда, сопоставляя выражения для разложения функций g_1, g_2 и полученные выше из начальных условий, имеем:

$$C_{2k} = g_{1k}$$
$$C_{1k}\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a\right) = g_{2k} \Rightarrow \frac{2l}{(2k+1)\pi a}\, g_{2k}$$

Подставив в выражение для v, получаем:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4}{(2k+1)\pi a}\int\limits_0^l g_2(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi at\right)+\right.$$
$$\left.\frac{2}{l}\int\limits_0^l g_1(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi at\right)\right]\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

Решим теперь систему для w. Будем искать решение в виде ряда по собственным функциям $X_k = \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$.

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд по тем же функциям считая t параметром.

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi$$

Подставим все в уравнение.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[w_k''(t) + a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 w_k(t) - f_k(t)\right]\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_k''(t) + a^2\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 w_k(t) = f_k(t)$$

$$w(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(0)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) \Rightarrow w_k(0) = 0$$

$$w_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k'(0)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) \Rightarrow w_k'(0) = 0$$

Получаем задачу Коши для ОДУ относительно w_k

$$\begin{cases} w_k'' + a^2\left(\dfrac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 w_k = f_k(t) \\ w_k(0) = 0 \\ w_k'(0) = 0 \end{cases}$$

Положим $c^2 = a^2\left(\dfrac{2k+1}{2l}\pi\right)^2$. Общим решением соответствующего однородного уравнения будет

$$w_{k\text{oo}}(t) = A_k\sin(ct) + B_k\cos(ct).$$

Найдем частное решение неоднородного. Оно будет в виде

$$w_k(t) = A_k(t)\sin(ct) + B_k(t)\cos(ct).$$

Найдем коэффициенты методом вариации произвольных постоянных. Для этого решим систему

$$\begin{cases} A_k'(t)\sin(ct) + B_k'(t)\cos(ct) = 0 \\ cA_k'(t)\cos(ct) - cB_k'(t)\sin(ct) = f_k(t) \end{cases}$$

относительно $A'_k(t), B'_k(t)$ методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin(ct) & \cos(ct) \\ c\cos(ct) & -c\sin(ct) \end{vmatrix} = -c\sin^2(ct) - c\cos^2(ct) = -c \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos(ct) \\ f_k(t) & -c\sin(ct) \end{vmatrix} = -f_k(t)\cos(ct)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin(ct) & 0 \\ c\cos(ct) & f_k(t) \end{vmatrix} = f_k(t)\sin(ct)$$

Тогда имеем

$$A'_k(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{f_k(t)\cos(ct)}{c} \Rightarrow A_k(t) = \frac{1}{c}\int\limits_0^t f_k(\tau)\cos(c\tau)d\tau$$

$$B'_k(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{f_k(t)\sin(ct)}{c} \Rightarrow B_k(t) = -\frac{1}{c}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin(c\tau)d\tau$$

Таким образом с учетом, $\sin(t)\cos(\tau) - \cos(t)\sin(\tau) = \sin(t-\tau)$, получаем:

$$w_{k\text{чн}}(t) = \frac{1}{c}\int\limits_0^t f_k(\tau)\cos(c\tau)d\tau\sin(ct) - \frac{1}{c}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin(c\tau)d\tau\cos(ct) =$$

$$= \frac{1}{c}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau$$

Тогда общее решение неоднородного

$$w_k(x,t) = w_{k\text{оо}}(t) + w_{k\text{чн}}(t) = A_k\sin(ct) + B_k\cos(ct) + \frac{1}{c}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau$$

Используем начальные условия

$$w_k(0) = B_k = 0$$
$$w'_k(0) = A_k = 0$$

. Наконец, получаем

$$w_k(t) = \frac{1}{c}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau$$

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{c}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) =$$

$$= \frac{4}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a(t-\tau)\right)d\tau \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

Собирая все воедино получаем ответ.

Ответ:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + v(x,t) + w(x,t) = \mu_1(t) + v(x,t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4}{(2k+1)\pi a}\int\limits_0^l g_2(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a t\right) + \right.$$
$$\left.\frac{2}{l}\int\limits_0^l g_1(\xi)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a t\right)\right]\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) +$$
$$+\frac{4}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a(t-\tau)\right)d\tau \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right),$$

где

$$f(x,t) = -\mu_1''(t) = -\sin t$$
$$g_1(x) = -\mu_1(0) = -\sin 0 = 0$$
$$g_2(x) = -\mu_1'(0) = -\cos 0 = -1$$

Проверка

Проверим выполнение условий для v. Пусть

$$G_{2k} = \frac{4}{(2k+1)\pi a} \int\limits_0^l g_2(\xi) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi$$

$$G_{1k} = \frac{2}{l} \int\limits_0^l g_1(\xi) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi$$

$$S_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a} G_{2k} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi at\right) + G_{1k} \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi at\right)$$

тогда

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$v_x(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right) \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$v_{xx}(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty} S_k \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$v_t(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi a\right) \left[G_{2k} \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi at\right) - G_{1k} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi at\right)\right] \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$v_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 \left[-G_{2k} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi at\right) - \right.$$

$$\left. -G_{1k} \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi at\right)\right] \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = -a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right)^2 S_k \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

т.о $v_{tt} = a^2 v_{xx}$.

$$v(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l} \int\limits_0^l g_1(\xi) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = g_1(x)$$

$$v_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2l}\pi a\right) \left[G_{2k} \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a0\right) - G_{1k} \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a0\right)\right] \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l} \int\limits_0^l g_2(\xi) \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right) d\xi \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = g_2(x)$$

$$v(0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi 0\right) = 0$$

$$v_x(l,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \left(\frac{2k+1}{2l}\pi\right) \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi l\right) = \ldots \cos\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

т.о. все условия на v выполняются.

Проверим выполнение условий для w.

$$w(x,t)=\frac{4}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$w_k(t)=\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau=\int\limits_0^t F_k(\tau)\cos(c\tau)d\tau\sin(ct)-\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin(c\tau)d\tau\cos(ct)=$$
$$=F_c(t)\sin(ct)-F_s(t)\cos(ct)$$

$$w_{kt}(x,t)=F_c'(t)\sin(ct)+cF_c\cos(ct)-(F_s'(t)\cos(ct)-cF_s\sin(ct))=$$
$$=F_k(t)\cos(ct)\sin(ct)+c\int\limits_0^t F_k(\tau)\cos(c\tau)d\tau\cos(ct)-$$
$$-\left(F_k(t)\cos(ct)\sin(ct)-c\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin(c\tau)d\tau\sin(ct)\right)=$$
$$=cF_c(t)\cos(ct)+cF_s(t)\sin(ct)=c\int\limits_0^t F_k(\tau)\cos(c(t-\tau))d\tau$$

$$w_t(x,t)=\frac{4}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}c\int\limits_0^t F_k(\tau)\cos(c(t-\tau))d\tau\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^t f_k(\tau)\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a(t-\tau)\right)d\tau\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

$$w_{ktt}(x,t)=c\left(F_c'(t)\cos(ct)-cF_c(t)\sin(ct)+(F_s'(t)\sin(ct)+cF_s(t)\cos(ct))\right)=$$
$$=c\left[F_k(t)\cos(ct)\cos(ct)-c\int\limits_0^t F_k(\tau)\cos(c\tau)d\tau\sin(ct)+\right.$$
$$\left.+F_k(t)\sin(ct)\sin(ct)+c\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin(c\tau)d\tau\cos(ct)\right]=c\left[F_k(t)-c\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau\right]$$

Тогда, подставляя обратно, получаем

$$w_{tt}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a\right)\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a(t-\tau)\right)d\tau\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)=$$

$$=f(x,t)-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a\right)\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi a(t-\tau)\right)d\tau\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)$$

т.о $w_{tt}=a^2w_{xx}+f(x,t)$.

$$w(x,0)=\frac{4}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\int\limits_0^0 F_k(\tau)\sin(c(-\tau))d\tau\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)=0$$

$$w_t(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^0 f_k(\tau)\cos(c(-\tau))d\tau\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)=0$$

$$w(0,t)=\frac{4}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi 0\right)=0$$

$$w_x(l,t)=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin(c(t-\tau))d\tau\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi l\right)=\ldots\cos\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

т.о. все условия на w выполняются.

Проверим выполнение условий для u_1.

$$u_1(x,t)=\mu_1(t)$$
$$u_{1x}(x,t)=0$$
$$u_{1xx}(x,t)=0$$
$$u_{1x}(l,t)=0$$
$$u_1(0,t)=\mu_1(t)$$

т.о. все условия на u_1 выполняются.

Условия на все функции, составляющие решение выполняется, следовательно решение верно.

Графики

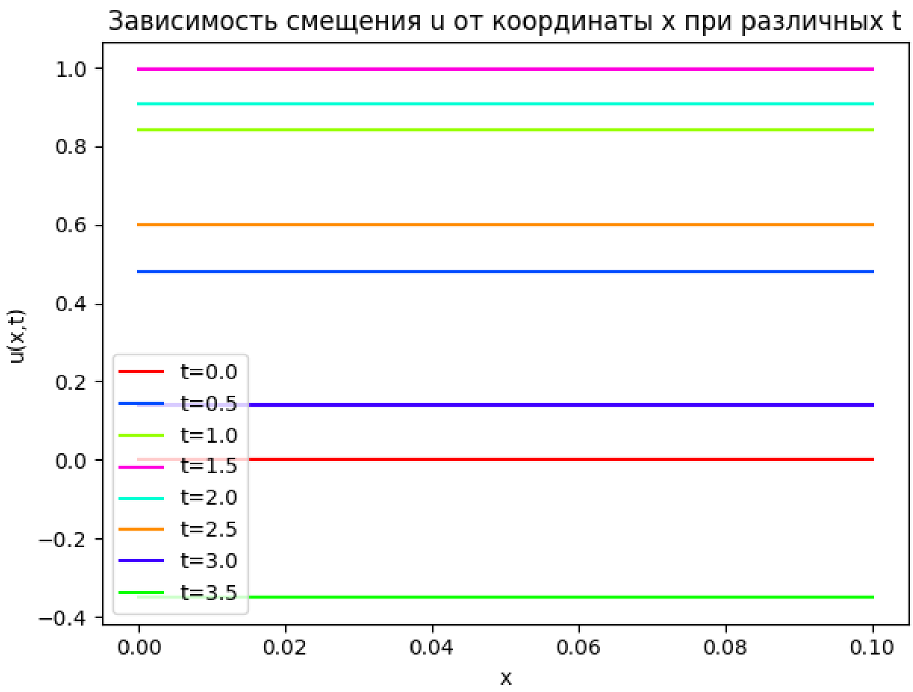
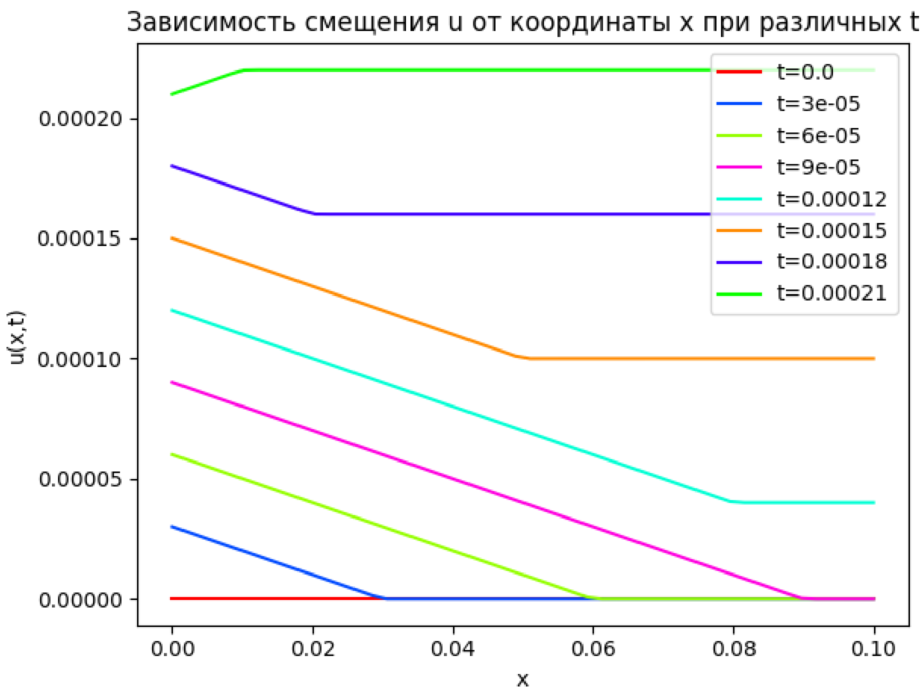


График в меньшем по времени масштабе:



3 Задача №3

Постановка задачи

Сформулировать и решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $l_1 \times l_2$, когда на верхней границе задана функция $u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{l_1}$, а на остальных границах заданы нулевые значения.

Решение

Имеем систему

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in (0, l_1), y \in (0, l_2) \\ u(x,0) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{l_1}\right), & x \in (0, l_1), y = 0 \\ u(x, l_2) = 0, & x \in (0, l_1), y = l_2 \\ u(0, y) = 0, & x = 0, y \in (0, l_2) \\ u(l_1, y) = 0, & x = l_1, y \in (0, l_2) \end{cases}$$

Пусть $u(x,y) = X(x)Y(y)$, тогда

$$X''Y + Y''X = 0$$
$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$
$$u(x, l_2) = X(x)Y(l_2) = 0 \Rightarrow Y(l_2) = 0$$
$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$
$$u(l_1, y) = X(l_1)Y(y) = 0 \Rightarrow X(l_1) = 0$$

Для X имеем уравнение $X'' + \lambda^2 X = 0$, его решение будет в виде:

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

Используем граничные условия

$$X(0) = C_2 \cos(\lambda 0) = C_2 = 0$$
$$X(l_1) = C_1 \sin(\lambda l_1) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{\pi k}{l_1}$$

Таким образом $X_k(x) = C_{1k}\sin\left(\dfrac{\pi k}{l_1}x\right)$. Для Y имеем уравнение $Y'' - \lambda^2 Y = 0$, его решение будет в виде:

$$Y_k(y) = D_{1k}e^{\lambda_k y} + D_{2k}e^{-\lambda_k y} = D_{1k}\left(\operatorname{sh}(\lambda_k y) + \operatorname{ch}(\lambda_k y)\right) + D_{2k}\left(-\operatorname{sh}(\lambda_k y) + \operatorname{ch}(\lambda_k y)\right) =$$
$$= (D_{1k} - D_{2k})\operatorname{sh}(\lambda_k y) + (D_{1k} + D_{2k})\operatorname{ch}(\lambda_k y) = D_{3k}\operatorname{sh}(\lambda_k y) + D_{4k}\operatorname{ch}(\lambda_k y)$$

Таким образом получаем

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \left[A_k\operatorname{sh}\left(\frac{\pi k}{l_1}y\right) + B_k\operatorname{ch}\left(\frac{\pi k}{l_1}y\right)\right]\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}x\right)$$
$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\operatorname{sh}\left(\frac{\pi k}{l_1}y\right) + B_k\operatorname{ch}\left(\frac{\pi k}{l_1}y\right)\right]\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}x\right)$$

Используем граничные условия

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}x\right) = f(x) = \sin\frac{\pi x}{l_1} \Rightarrow B_k = f_k = \frac{2}{l_1}\int\limits_0^{l_1} f(\xi)\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}\xi\right)d\xi$$
$$u(x,l_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\operatorname{sh}\left(\frac{\pi k}{l_1}l_2\right) + B_k\operatorname{ch}\left(\frac{\pi k}{l_1}l_2\right)\right]\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}x\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_k\operatorname{sh}\left(\frac{\pi k}{l_1}l_2\right) + B_k\operatorname{ch}\left(\frac{\pi k}{l_1}l_2\right) = 0 \Rightarrow A_k = -\frac{B_k\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi k}{l_1}l_2\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi k}{l_1}l_2\right)} =$$
$$= -B_k\operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{l_1}l_2\right)$$

Таким образом получаем выражение для u:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[-B_k\operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{l_1}l_2\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi k}{l_1}y\right) + B_k\operatorname{ch}\left(\frac{\pi k}{l_1}y\right)\right]\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}x\right)$$

Найдем значение коэффициента B_2:

$$B_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^{l_1} f(\xi)\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}\xi\right)d\xi = \frac{2}{l}\int\limits_0^{l_1}\sin\left(\frac{\pi}{l_1}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l_1}\xi\right)d\xi =$$
$$= \begin{cases}1, & \text{при } k = 1\\ 0, & \text{при } k \neq 1\end{cases}$$

Таким образом получаем ответ.
Ответ:

$$u(x,y) = \left[-\operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{l_1}l_2\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{l_1}x\right)$$

Проверка

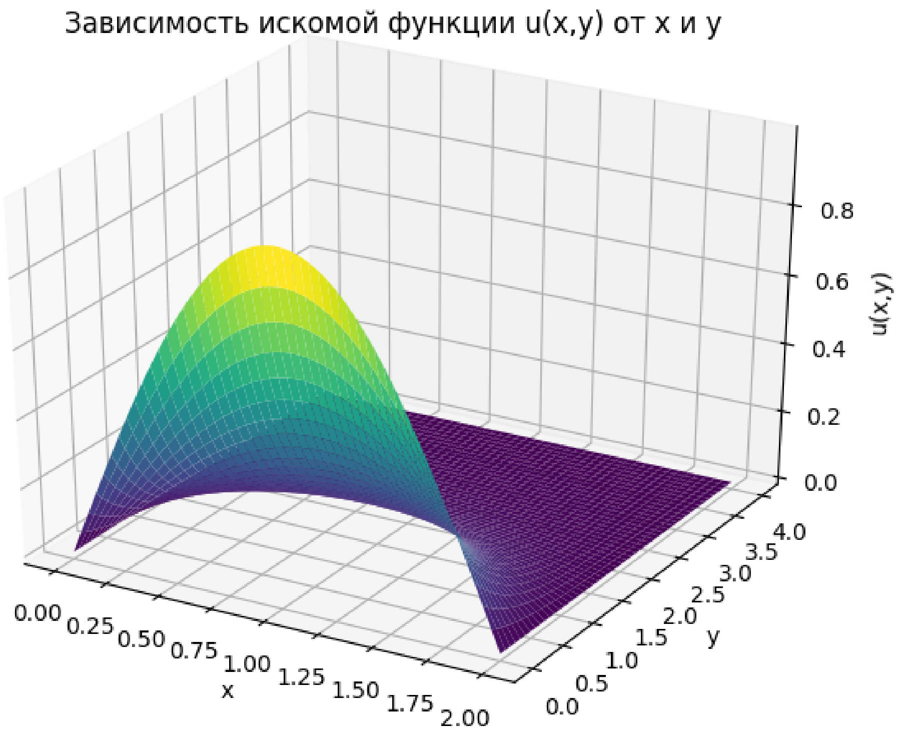
$$u_x(x,y) = \left[a\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right)\right]\left(\frac{\pi}{l_1}\right)\cos\left(\frac{\pi}{l_1}x\right)$$
$$u_{xx}(x,y) = -\left[a\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right)\right]\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{l_1}x\right)$$
$$u_y(x,y) = \left[a\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right)\right]\left(\frac{\pi}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi}{l_1}x\right)$$
$$u_{yy}(x,y) = \left[a\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right)\right]\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{l_1}x\right)$$

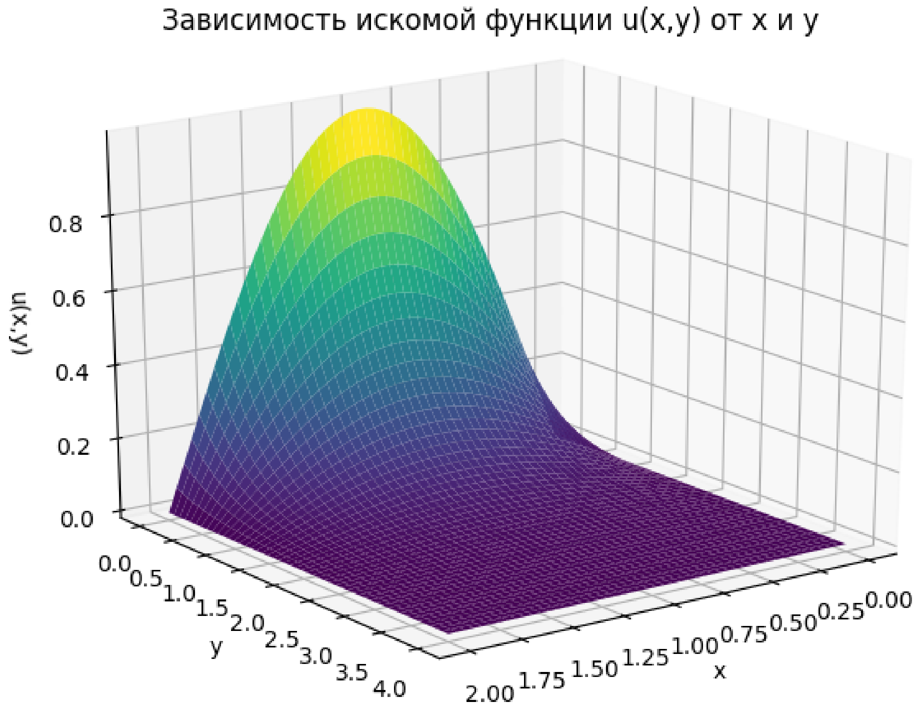
т.о $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

$$u(x,0) = \left[-\operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{l_1}l_2\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}0\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}0\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{l_1}x\right) = \sin\frac{\pi x}{l_1}$$
$$u(x,l_2) = \left[-\operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{l_1}l_2\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}l_2\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}l_2\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{l_1}x\right) = 0$$
$$u(0,y) = \left[-\operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{l_1}l_2\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{l_1}0\right) = 0$$
$$u(l_1,y) = \left[-\operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{l_1}l_2\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l_1}y\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{l_1}l_1\right) = \ldots \sin(\pi) = 0$$

т.о. все условия на u выполняются, значит решение верно.

Графики


Зависимость искомой функции u(x,y) от x и y
u(x,y)
x
y


Зависимость искомой функции u(x,y) от x и y
u(x,y)
x
y

Список литературы

[1] Тихонов А. Н, Самарский А. А. *Изд. 5, стереотипное.* — М.: «Наука», 1977.

[2] Боголюбов А. Н, Кравцов В. В. *Задачи по математической физике* — М.: «Издательство Московского университета», 1998.

[3] Будак Б. М, Тихонов А. Н, Самарский А. А. *Сборник задач по математической физике.* — М.: «Наука», 1980.