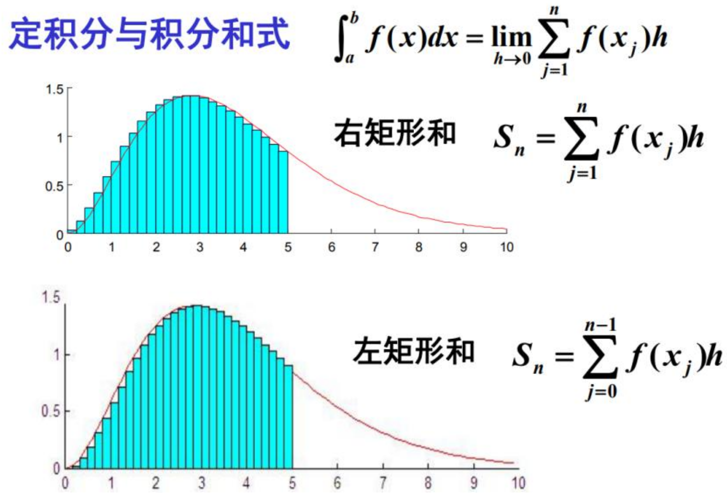
《数值分析》第七章

思考题

姓名：邵尚祖　　　　学号：202022011942

1．第一型曲线积分的左矩阵公式和右矩形公式有何区别？

答：左矩形公式是用小矩形的左边进行近似，右矩形公式是用小矩形的右边进行近似。如图所示。



2．简单梯形公式与两点线性插值公式是如何联系的？

答：利用两点构造插值函数：$f(x) \approx \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$。对上式的两个基函数积分可得 $\int_b^a f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) - f(b)]$，这就推出简单梯形公式，其几何意义为用梯形面积代替曲边梯形面积。

3．插值型求积公式与插值公式是如何联系的？

答：插值型求积公式就是构建插值公式代替原始被积函数求得近似结果。

4．中矩形公式的误差余项是如何估计的？

答：将函数 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开到含 $f(x)$ 的一阶导数的 Taylor 公式在区间 $[a,b]$ 积分即可推出余项公式。$R[f]=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$。

5．复合型中矩形公式的误差余项是如何估计的？

答：将求积区间划分为 n 等分，在每一个区间上都用中矩形近似，类似的得到每一个小区间上的余项，再将这些余项加起来，就为复合中矩形求积公式的余项，最后再根据介值定理，即可得到最终的复合中矩形求积公式误差余项。

6．高斯型求积公式中的高斯点是如何定义的？

答：选互异的求积结点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，使插值型求积公式的代数精确度为 $2n+1$，则称该求积公式为高斯型求积公式，称这些求积结点为高斯点。

7．两点数值积分公式代数精度最高能达到多少阶？

答：两点数值积分公式代数精度最高达到 3 阶。

8．函数的泰劳展式与数值求导公式有何联系？

答：按导数的定义可以简单用差商代替导数，为了选取合适的步长，需要进行截断误差分析，由此就可以利用泰勒展开，估计各阶导数的表达式并估计每一种差商公式具有几阶精度。

9．何谓数值求导的隐式方法？

答：对给定的自变量步长 h，设 $x_k a+kh(k=0,1,2,\cdots,n)$，由泰勒展开式可得

$$f'(x_k)=\frac{f(x_{k+1})-f(x_{k-1})}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_k)+O(h^4)。$$

利用二阶中心差商得

$$f^{(3)}(x_k)=\frac{f'(x_{k+1})-2f'(x_k)+f'(x_{k-1})}{h^2}+O(h^2)$$

所以有

$$f'(x_k)=\frac{f(x_{k+1})-f(x_{k-1})}{2h}-\frac{1}{6}\left[f'(x_{k+1})-2f'(x_k)+f'(x_{k-1})\right]+O(h^4)$$

令 $m_k=f'(x_k)(k=0,1,2\cdots,n)$，则有：$m_{k-1}+4m_k+m_{k+1}=\frac{3}{h}\left[f(x_{k+1})-f(x_{k-1})+O(h^4)\right]$

在上式中，一阶导数隐含在线性方程中，当给定 m_n, m_1 时方程有唯一解。

10. 数值求导公式的阶与数值求导公式误差余项有何联系？

答：数值求导公式的误差余项代表了截断误差，而截断误差决定了该求导公式具有几阶代数精度。