Université catholique de Louvain LEPL1101 - Algèbre Professeurs M. Verleysen, V. Wertz

## Devoir 2

Votre devoir est attendu sur l'activité Moodle : Devoir 2, pour le 04 décembre à 23h59. Veuillez insérer vos réponses dans les cadres prévus à cet effet. Une grande importance sera apportée à la clarté, la précision et la concision de vos réponses.

Préalable. Recopiez à la main la phrase suivante dans le cadre indiqué :

Sur l'honneur, je certifie que le contenu de ce devoir est le fruit de mon travail personnel et a été réalisé sans autre aide extérieure que les supports autorisés.

| —— Déclaration – |
|------------------|
|                  |
|                  |
|                  |
|                  |

Question 1. Soit  $E = \mathbb{R}^{n \times n}$ , l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de dimension n.

a. Soit la forme  $(-|-): E \times E \to \mathbb{R}: (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})$  où  $\operatorname{tr}(\cdot)$  désigne la trace. Prouvez que la forme (-|-) est un produit scalaire sur E.

**Rappel** : La trace d'une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est définie comme la somme des éléments de sa diagonale:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$



A partir de maintenant, on considère  $E=\mathbb{R}^{3\times 3}$ , l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille  $3\times 3$ , muni du produit scalaire défini en 1.a. On dit d'une matrice  $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$  qu'elle est *circulante* si pour  $a,b,c\in\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{C}$  est de la forme

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Soit V l'ensemble des matrices circulantes réelles de dimension  $3\times 3$ .

| b. Démontrez que $V$ est un espace vectoriel. |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|
|   |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |

c. Soit v la base de V définie comme

$$v = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Montrez que cette base est orthogonale par rapport au produit scalaire défini en 1.a. Calculez ensuite une base orthonormée  $w=(\mathbf{W}_1,\mathbf{W}_2,\mathbf{W}_3)$  de l'espace V à partir de la base v.

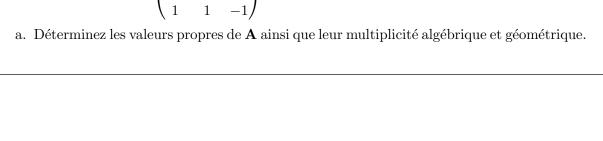
| d. | A partir de la base $w$ calculée à       | la d          | ques | stio          | n précédente, trouvez $P_V(\mathbf{M})$ , la projection   |
|----|--|---------------|------|---------------|---|
|    |  | /a            | b    | $c \setminus$ | · ·   |
|    | orthogonale d'une matrice $\mathbf{M} =$ | d             | e    | f             | n précédente, trouvez $P_V(\mathbf{M})$ , la projection , avec $a,b,c,d,e,f,g,h,i\in\mathbb{R}$ , dans l'espace . |
|    | _  | $\setminus_g$ | h    | i             |   |
|    | des matrices circulantes de dimer        | nsio          | n 3  | $\times$ 3    | s.  |

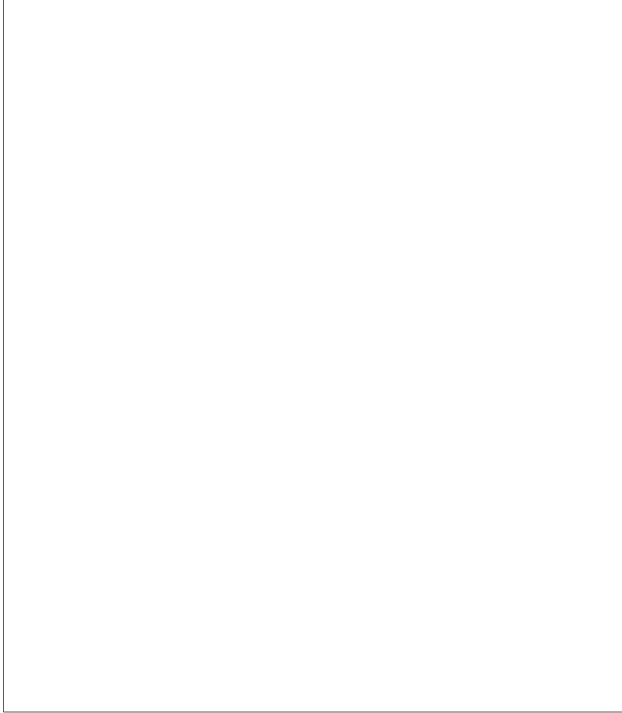


Université catholique de Louvain LEPL1101 - Algèbre

Professeurs M. Verleysen, V. Wertz

Question 2. Soit 
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
.





| b. La matrice ${\bf A}$ est-elle diagonalisable? Justifiez. |                          |                   |           |  |  |
|---|--------------------------|-------------------|-----------|--|--|
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
| c Diagonalise   | z la matrice <b>A</b> si | i elle est diagor | nalisable |  |  |
| c. Diagonanse   | Z Id Induited 21 Si      | ene est diagor    |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |
|   |                          |                   |           |  |  |

| d. | d. Est-il possible de trouver ur canonique de $\mathbb{R}^3$ :              | ne base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ , par rapport au produit scalaire  |
|----|---|---|
|    | (.  | $ \;\cdot):\mathbb{R}^3	imes\mathbb{R}^3	o\mathbb{R}:(oldsymbol{x},oldsymbol{y})=oldsymbol{x}^{	op}oldsymbol{y},$   |
|    | constituée de vecteurs proporthogonale telle que ${\bf A}={\bf C}$ propres. | eres de $\bf A$ . Si oui, calculez-la. Donnez la matrice $\bf Q} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $\bf Q} \bf D} \bf Q}^{\top}$ où $\bf D$ est la matrice diagonale constituée des valeurs |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |
|    |   |   |