Université catholique de Louvain
LEPL1101 - Algèbre
Professeurs M. Verleysen, V. Wertz

Devoir 2

Votre devoir est attendu sur l'activité Moodle : Devoir 2, pour le 04 décembre à 23h59. Veuillez insérer vos réponses dans les cadres prévus à cet effet. Une grande importance sera apportée à la clarté, la précision et la concision de vos réponses.

Préalable. Recopiez à la main la phrase suivante dans le cadre indiqué :
Sur l'honneur, je certifie que le contenu de ce devoir est le fruit de mon travail personnel et a été réalisé sans autre aide extérieure que les supports autorisés.

Déclaration

Question 1. Soit $E = \mathbb{R}^{n\times n}$, l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de dimension n.

a. Soit la forme $(-|-) : E \times E \to \mathbb{R} : (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})$ où $\operatorname{tr}(\cdot)$ désigne la trace. Prouvez que la forme $(-|-)$ est un produit scalaire sur E.
Rappel : La trace d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie comme la somme des éléments de sa diagonale :
$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

A partir de maintenant, on considère $E = \mathbb{R}^{3\times 3}$, l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille 3×3, muni du produit scalaire défini en 1.a. On dit d'une matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ qu'elle est *circulante* si pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{C}$ est de la forme

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Soit V l'ensemble des matrices circulantes réelles de dimension 3×3.

b. Démontrez que V est un espace vectoriel.

c. Soit v la base de V définie comme

$$v = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Montrez que cette base est orthogonale par rapport au produit scalaire défini en 1.a. Calculez ensuite une base orthonormée $w = (\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3)$ de l'espace V à partir de la base v.

d. A partir de la base w calculée à la question précédente, trouvez $P_V(\mathbf{M})$, la projection orthogonale d'une matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$, dans l'espace des matrices circulantes de dimension 3×3.

e. Quelle est la dimension de $V^\perp$?

Question 2. Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminez les valeurs propres de $\mathbf{A}$ ainsi que leur multiplicité algébrique et géométrique.

b. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ? Justifiez.

c. Diagonalisez la matrice $\mathbf{A}$ si elle est diagonalisable.

d. Est-il possible de trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y},$$

constituée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$. Si oui, calculez-la. Donnez la matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ orthogonale telle que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$ où $\mathbf{D}$ est la matrice diagonale constituée des valeurs propres.