

# Indice

<b>1</b>	<b>Lezione 1 - 24/09</b>	<b>2</b>
1.1	Operazione Binaria . . . . .	2
1.2	Strutture Algebriche . . . . .	2
1.2.1	Gruppo . . . . .	3
1.2.2	Anello . . . . .	4
1.2.3	Campo . . . . .	5
1.2.4	Spazio Vettoriale . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Lezione 2 - 26/09</b>	<b>7</b>
2.1	Matrice . . . . .	7
2.2	Polinomi . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Lezione 3 - 01/10</b>	<b>8</b>
3.1	Matrice Trasposta . . . . .	8
3.2	Prodotto Scalare . . . . .	8
3.3	Matrice Conformabile . . . . .	8
3.4	Prodotto Riga per Colonna . . . . .	9
3.5	Sistema Lineare . . . . .	9
3.6	Operazioni o Trasformazioni Elementari sulle Righe di una Matrice . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Lezione 4 - 3/10 (Teams)</b>	<b>12</b>
4.1	Matrice a Gradini e Completamente a Gradini . . . . .	12
4.2	Algoritmo di Gauss . . . . .	12
4.3	Teorema di struttura . . . . .	14
4.4	Proprietà dell'insieme $S_0$ come sottospazio vettoriale . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Lezione 5 - 08/10</b>	<b>16</b>
5.1	Sistemi di Generatori . . . . .	16
5.2	Dipendenza e indipendenza lineare . . . . .	17

# Capitolo 1

## Lezione 1 - 24/09

### 1.1 Operazione Binaria

#### Definizione (Operazioni su Insiemi)

Siano  $A, B, C$  insiemi. Diremo **operazione binaria** ogni applicazione

$$\varphi : A \times B \rightarrow C.$$

- Se in particolare  $A = B = C$ , allora diremo che  $\varphi : A \times A \rightarrow A$  è un'operazione binaria interna su  $A$ .
- Se  $B = C$ , allora diremo che  $\varphi$  si dice esterna con operatori in  $A$ .

### 1.2 Strutture Algebriche

#### Ricorda: Strutture Algebriche

- $(S, \perp)$  si dice **semigrupp** se  $\perp$  è associativa;
- $(S, \perp)$  si dice **semigrupp commutativo** se  $\perp$  è semigrupp con commutatività;
- $(S, \perp)$  si dice **monoide** se  $\perp$  è semigrupp dotato di neutro;
- $(S, \perp)$  si dice **monoide commutativo** se  $\perp$  è monoide con commutatività;
- $(S, \perp)$  si dice **gruppo** se  $\perp$  è monoide dove ogni elemento è simmetrizzabile;
- $(S, \perp)$  si dice **gruppo abeliano** se  $\perp$  è gruppo con commutatività.

#### Definizione (Struttura Algebrica)

Per **struttura algebrica** si intende una  $n$ -upla costituita da insiemi e operazioni su di essi. La più semplice struttura algebrica, spesso detta *gruppoide*, è una coppia  $(X, \perp)$ , dove  $X$  è un insieme e  $\perp$  è un'operazione binaria interna su  $X$ .

### 1.2.1 Gruppo

#### Definizione (Gruppo)

Un **gruppo** è una struttura algebrica  $(G, \perp)$  formata da un insieme  $G$  e da un'operazione binaria interna  $\perp: G \times G \rightarrow G$ , che soddisfa le seguenti proprietà:

1. **Associatività:**  $\forall a, b, c \in G, (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$ ;
2. **Elemento neutro:** esiste un elemento  $e \in G$  tale che  $\forall a \in G, a \perp e = e \perp a = a$ ;
3. **Elemento inverso:** per ogni  $a \in G$  esiste un elemento  $\bar{a} \in G$  tale che  $a \perp \bar{a} = \bar{a} \perp a = e$ .

Se inoltre vale la **proprietà commutativa**

$$a \perp b = b \perp a \quad \forall a, b \in G,$$

allora il gruppo si dice **abeliano**.

#### Proposizione: Proprietà elementari in un gruppo

Sia  $(X, \perp)$  un gruppoide (cioè  $X$  insieme non vuoto con un'operazione binaria  $\perp$  su  $X$ ). Valgono le seguenti proprietà.

1. Se  $(X, \perp)$  ammette un elemento neutro, questo è unico.
2. Se  $(X, \perp)$  ammette un elemento neutro  $e$  e  $\perp$  è associativa, allora per ogni  $x \in X$  invertibile l'inverso di  $x$  è unico.
3. Inoltre, se  $\perp$  è associativa e ha elemento neutro  $u \in A$  e abbiamo  $x, y \in A$  che hanno i loro inversi  $\bar{x}, \bar{y}$ , allora  $x \perp y$  è invertibile e il suo inverso è  $\bar{y} \perp \bar{x}$ .

#### Dimostrazioni:

*Dimostrazione della proprietà 1 (unicità dell'elemento neutro).* Supponiamo che  $e$  ed  $e'$  siano due elementi neutri in  $(X, \perp)$ . Per definizione di elemento neutro:

$$\forall x \in X : \quad e \perp x = x \quad e \quad e' \perp x = x.$$

In particolare, considerando  $x = e'$  nella prima uguaglianza e  $x = e$  nella seconda otteniamo

$$e \perp e' = e' \quad e \quad e' \perp e = e.$$

Se non assumiamo necessariamente commutatività, bperpa usare una delle due uguaglianze applicata all'altro neutro: usando  $e \perp e' = e'$  e insieme  $e' \perp e = e$  otteniamo

$$e = e' \quad (\text{poiché } e = e' \perp e = e').$$

Quindi  $e = e'$  e l'elemento neutro è unico. □

*Dimostrazione della proprietà 2 (unicità dell'inverso e formula dell'inverso del prodotto).* Sia  $(X, \perp)$  associativo e con elemento neutro  $e$ .

*Unicità dell'inverso.* Sia  $x \in X$  e supponiamo che  $y$  e  $y'$  siano due inversi di  $x$ , cioè

$$x \perp y = e = y \perp x, \quad x \perp y' = e = y' \perp x.$$

Allora, usando l'associatività,

$$y = y \perp e = y \perp (x \perp y') = (y \perp x) \perp y' = e \perp y' = y'.$$

Quindi  $y = y'$  e l'inverso è unico. □

*Dimostrazione della proprietà 3.* Siano  $(A, \perp)$  un insieme con operazione binaria  $\perp$ , associativa, e dotato di elemento neutro  $u \in A$ . Supponiamo  $x, y \in A$  invertibili e indichiamo con  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  i loro inversi, cioè

$$x \perp \bar{x} = \bar{x} \perp x = u, \quad y \perp \bar{y} = \bar{y} \perp y = u.$$

Consideriamo il candidato  $\bar{y} \perp \bar{x}$  come possibile inverso di  $x \perp y$ . Calcoliamo il prodotto a destra:

$$\begin{aligned} (x \perp y) \perp (\bar{y} \perp \bar{x}) &\stackrel{(\text{assoc.})}{=} x \perp (y \perp (\bar{y} \perp \bar{x})) \\ &= x \perp ((y \perp \bar{y}) \perp \bar{x}) \\ &= x \perp (u \perp \bar{x}) \\ &= x \perp \bar{x} \\ &= u. \end{aligned}$$

Analogamente, il prodotto a sinistra:

$$\begin{aligned} (\bar{y} \perp \bar{x}) \perp (x \perp y) &\stackrel{(\text{assoc.})}{=} \bar{y} \perp (\bar{x} \perp (x \perp y)) \\ &= \bar{y} \perp ((\bar{x} \perp x) \perp y) \\ &= \bar{y} \perp (u \perp y) \\ &= \bar{y} \perp y \\ &= u. \end{aligned}$$

Quindi  $\bar{y} \perp \bar{x}$  è sia inverso a destra sia inverso a sinistra di  $x \perp y$ . Poiché in una struttura con elemento neutro e operazione associativa l'inverso (se esiste) è unico, segue che

$$\overline{(x \perp y)} = \bar{y} \perp \bar{x},$$

come volevamo dimostrare. □

## 1.2.2 Anello

### Definizione (Anello)

Un **anello** è una struttura algebrica  $(A, +, \cdot)$  formata da un insieme  $A$  e da due operazioni binarie interne:

$$+ : A \times A \rightarrow A, \quad \cdot : A \times A \rightarrow A,$$

tali che valgono le seguenti proprietà:

1.  $(A, +)$  è un **gruppo abeliano**
2. L'operazione  $\cdot$  (detta *moltiplicazione*) è associativa
3. La moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall a, b, c \in A.$$

Se esiste un elemento  $1 \in A$  tale che  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  per ogni  $a \in A$ , l'anello si dice **unitario** o **con elemento neutro moltiplicativo**.

Se inoltre la moltiplicazione è commutativa, l'anello si dice **commutativo**.

### 1.2.3 Campo

#### Definizione (Campo)

Un **campo** è una struttura algebrica  $(K, +, \cdot)$  formata da un insieme  $K$  e da due operazioni binarie interne:

$$+ : K \times K \rightarrow K, \quad \cdot : K \times K \rightarrow K,$$

che soddisfano le seguenti proprietà:

1.  $(K, +)$  è un **gruppo abeliano**:
2.  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  è un **gruppo abeliano** rispetto alla moltiplicazione:
3. Le due operazioni sono collegate dalle proprietà distributive:

In altre parole, un campo è un **anello commutativo con elemento unità** in cui **ogni elemento non nullo è invertibile**.

### 1.2.4 Spazio Vettoriale

#### Definizione (Spazio vettoriale)

Diremo che  $(V, \boxplus, \boxminus)$  è **spazio vettoriale** sul campo  $\mathbb{R}$  se:

1.  $V \neq \emptyset$   
Operazione interna:  $\boxplus : V \times V \rightarrow V, (u, v) \mapsto u + v$   
Operazione esterna:  $\boxminus : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$
2.  $(V, \boxplus)$  è gruppo abeliano,  $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in V$ 
  - (a) Proprietà associativa:  $(\underline{v} \boxplus \underline{w}) \boxplus \underline{z} = \underline{v} \boxplus (\underline{w} \boxplus \underline{z})$
  - (b) Proprietà commutativa:  $\underline{v} \boxplus \underline{w} = \underline{w} \boxplus \underline{v}$
  - (c) Esiste opposto:  $\underline{v} \boxplus (-\underline{v}) = \underline{0}$
  - (d) Esiste elemento neutro:  $\underline{v} \boxplus \underline{0} = \underline{0} \boxplus \underline{v} = \underline{v}$
3. Esiste elemento neutro rispetto a  $\boxminus$ :  $1 \boxminus \underline{v} = \underline{v} = \underline{v} \boxminus 1$
4. **Per tutti**  $h, k \in \mathbb{R}, \underline{v}, \underline{w} \in V$  valgono le seguenti proprietà:
  - (a) Compatibilità della moltiplicazione scalare:  $(h \cdot k) \boxminus \underline{v} = h \boxminus (k \boxminus \underline{v})$
  - (b) Distributività rispetto alla somma scalare:  $(h + k) \boxminus \underline{v} = (h \boxminus \underline{v}) \boxplus (k \boxminus \underline{v})$
  - (c) Distributività rispetto alla somma vettoriale:  $h \boxminus (\underline{v} \boxplus \underline{w}) = (h \boxminus \underline{v}) \boxplus (h \boxminus \underline{w})$

#### Proposizione: Proprietà aritmetiche degli Spazi Vettoriali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ .  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$  si ha:

1.  $\alpha \boxminus v = 0 \iff \alpha = 0$  oppure  $v = 0$
2.  $(-\alpha) \boxminus v = \alpha \boxminus (-v) = -(\alpha \boxminus v)$
3. se  $\alpha \boxminus v = \beta \boxminus v$  e  $v \neq \emptyset$ , allora  $\alpha = \beta$
4. se  $\alpha \boxminus u = \alpha \boxminus v$  e  $\alpha \neq \emptyset$ , allora  $u = v$

*Dimostrazione delle proprietà. (i) Dimostriamo che*

$$av = 0 \iff a = 0 \text{ oppure } v = 0.$$

**Direzione “ $\Rightarrow$ ”:** se  $a = 0$  oppure  $v = 0$ , allora chiaramente  $av = 0$ . Infatti:

- se  $a = 0$ , per le proprietà dello spazio vettoriale abbiamo  $0 \cdot v = 0$ ;
- se  $v = 0$ , allora  $a \cdot 0 = 0$ .

**Direzione “ $\Leftarrow$ ”:** supponiamo che  $av = 0$  e  $a \neq 0$ . Poiché  $a \neq 0$ , esiste l'inverso  $a^{-1} \in K$ . Moltiplicando entrambi i membri per  $a^{-1}$  otteniamo:

$$a^{-1}(av) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Usando l'associatività della moltiplicazione scalare:

$$(a^{-1}a)v = 1 \cdot v = v = 0.$$

Quindi, se  $a \neq 0$  e  $av = 0$ , necessariamente  $v = 0$ . Pertanto, la proprietà (i) è dimostrata.

**(ii)** Dimostriamo ora che

$$(-a)v = a(-v) = -(av).$$

Si ha immediatamente:

$$av + (-a)v = (a + (-a))v = 0v = 0,$$

e anche

$$av + a(-v) = a(v + (-v)) = a0 = 0.$$

Poiché in entrambi i casi la somma è nulla, segue che

$$(-a)v = -(av) = a(-v).$$

**(iii)** Se  $av = \beta v$ , allora

$$(a + (-\beta))v = av + (-\beta)v = \beta v + (-\beta)v = 0.$$

Poiché  $v \neq 0$  per ipotesi, per la proprietà (i) segue che  $a + (-\beta) = 0$ , e quindi  $a = \beta$ .

**(iv)** Se  $au = av$  e  $a \neq 0$ , allora

$$a(u + (-v)) = au + a(-v) = au - av = 0.$$

Poiché  $a \neq 0$ , per la proprietà (i) si ha  $u + (-v) = 0$ , cioè  $u = v$ .

□

## Capitolo 2

### Lezione 2 - 26/09

2.1 Matrice

2.2 Polinomi

# Capitolo 3

## Lezione 3 - 01/10

### 3.1 Matrice Trasposta

#### Definizione (Matrice Trasposta)

Sia  $A \in M_{m,n}(K)$ . La trasposta di  $A$ , denotata  ${}^tA$ , è la matrice del tipo  $[n, m]$  che come righe ha le colonne di  $A$ .

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{n,m}(K), \text{ ottenuta scambiando righe e colonne di } A.$$

### 3.2 Prodotto Scalare

#### Definizione (Prodotto scalare)

Sia  $K = \mathbb{R}$  e siano due vettori  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$ .

Il **prodotto scalare** è la funzione

$$K^n \times K^n \longrightarrow K, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,$$

che associa la coppia di vettori ad uno scalare, dato dalla somma delle componenti omonime dei due vettori.

### 3.3 Matrice Conformabile

#### Definizione (Matrice Conformabile)

Due matrici  $A \in M_{m,n}(K)$  e  $B \in M_{p,q}(K)$  si dicono **conformabili** per il prodotto se e solo se il numero di colonne di  $A$  è uguale al numero di righe di  $B$ , cioè  $n = p$ . In tal caso, il prodotto  $AB$  è definito ed è una matrice di dimensione  $m \times q$ .

**Esempio:** Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(K), \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(K).$$

Allora  $A$  e  $B$  sono conformabili e

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 11 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 12 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 11 & 3 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 10 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 11 & 5 \cdot 9 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} \in M_{3,3}(K).$$



### 3.4 Prodotto Riga per Colonna

#### Definizione (Prodotto Riga Per Colonna)

Siano  $A \in M_{m,n}(K)$  e  $B \in M_{n,p}(K)$ . Il prodotto di una riga  $i$ -esima di  $A$  per una colonna  $j$ -esima di  $B$  è definito come la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}.$$

In altre parole, per ottenere l'elemento in posizione  $(i, j)$  del prodotto  $AB$ , si moltiplicano elemento per elemento la riga  $i$  di  $A$  con la colonna  $j$  di  $B$  e si sommano i risultati.

**Esempio:** Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Allora

$$(AB)_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 58, \quad (AB)_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 68,$$

e così via per gli altri elementi del prodotto.

### 3.5 Sistema Lineare

#### Definizione (Sistema Lineare)

Siano  $m, n \in \mathbb{N}$ , e sia  $K$  un campo. Un **sistema lineare** di  $m$  equazioni in  $n$  incognite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  su un campo  $K$  è un insieme di  $m$  equazioni del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - b_m = 0 \end{cases}$$

In forma compatta, un sistema lineare può essere scritto come:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove:

- $A \in M_{m,n}(K)$  è la **matrice dei coefficienti**;
- $\mathbf{x} \in K^n$  è il **vettore incognite**;
- $\mathbf{b} \in K^m$  è il **vettore dei termini noti**.

#### Osservazione: Soluzioni di un sistema lineare

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è dato da

$S_1$  soluzioni della prima equazione  $E_1(x)$

$S_2$  soluzioni della seconda equazione  $E_2(x)$

...

$S_m$  soluzioni della  $m$ -esima equazione  $E_m(x)$

Noi siamo interessati a

$$S = \bigcap_{i=1}^m S_i,$$

ovvero l'intersezione di tutte le soluzioni del sistema.

### Definizione (Compatibilità di un sistema lineare)

Un sistema lineare  $\Sigma$  si dice **compatibile** se ammette almeno una soluzione, ossia se l'insieme delle soluzioni è diverso dal vuoto.

Altrimenti se  $S = \emptyset$ , allora il sistema si dice **incompatibile**.

### Definizione (Matrice completa e incompleta)

Dato un sistema lineare  $\Sigma$  si distinguono due matrici:

- La **matrice incompleta** (o matrice dei coefficienti) di un sistema lineare contiene solo i coefficienti delle incognite.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- La **matrice completa** (o matrice dei coefficienti estesa) si ottiene aggiungendo a quella incompleta una colonna aggiuntiva con i termini noti del sistema.

$$C = (A | \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

### Esempi di matrici complete e incomplete

Consideriamo due sistemi lineari in due incognite  $x_1, x_2$ .

- **Sistema omogeneo**  $\Sigma$  (con termini noti nulli):

$$\Sigma_0 : \begin{cases} 3x_2 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

- Matrice incompleta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Sistema non omogeneo**  $\Sigma$  (con termini noti  $\neq 0$ ):

$$\Sigma : \begin{cases} 3x_2 - x_2 + 2x_4 - 3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5 = 0 \end{cases}$$

- Matrice completa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & | & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

### 3.6 Operazioni o Trasformazioni Elementari sulle Righe di una Matrice

#### Definizione (Operazioni elementari sulle righe)

Sia  $A \in M_{m,n}(K)$  una matrice. Si chiamano **operazioni elementari sulle righe** le seguenti trasformazioni che possono essere applicate alle righe di  $A$ :

1. **Scambio di due righe:** per ogni  $h, k \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$\mathbf{b}^{(h)} \longleftrightarrow \mathbf{b}^{(k)}.$$

2. **Moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo:** per ogni  $h \in \{1, \dots, m\}$  e per ogni  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ,

$$\mathbf{b}^{(h)} \longrightarrow \lambda \mathbf{b}^{(h)}.$$

3. **Somma di una riga con un multiplo di un'altra:** per ogni  $h, k \in \{1, \dots, m\}$  e per ogni  $\beta \in K$ ,

$$\mathbf{b}^{(h)} \longrightarrow \mathbf{b}^{(h)} + \beta \mathbf{b}^{(k)}.$$

#### Osservazione: Invarianza dell'insieme delle soluzioni

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice (e quindi sul sistema lineare associato) **modificano la forma del sistema**, ma **non alterano il suo insieme delle soluzioni**.

# Capitolo 4

## Lezione 4 - 3/10 (Teams)

### 4.1 Matrice a Gradini e Completamente a Gradini

#### Definizione (Matrice ridotta a gradini)

Una matrice si dice a gradini se ha le seguenti proprietà:

- Se una riga è nulla, tutte le righe successive sono nulle:

$$\exists h \in \{1, \dots, m\} \mid a^h = 0 \Rightarrow a^i = 0 \quad \forall i > h$$

- Il primo elemento diverso da zero di una riga non nulla, detto *pivot*, è più a sinistra del primo elemento non nullo delle righe successive:

$$\text{Se } a_{ij} \neq 0 \text{ e } a_{ih} = 0, \forall h < j, \text{ allora } a_{i+1,h} = 0, \forall h \leq j.$$

#### Definizione (Matrice completamente ridotta a gradini)

Una matrice si dice completamente ridotta a gradini se oltre le precedenti due proprietà verifica anche le seguenti:

- il pivot di una qualunque riga non nulla è 1;
- ogni colonna che contiene il pivot di una riga ha tutti gli altri elementi nulli.

### 4.2 Algoritmo di Gauss

#### Teorema (Algoritmo di Gauss)

Ogni matrice su un campo  $K$  può essere ridotta o completamente ridotta a gradini mediante un numero finito di operazioni elementari.

#### Dimostrazione (per induzione)

Procediamo per induzione sul numero di righe  $m$ :

- **Per  $m = 1$ :**

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

Se  $a_{1j}$  è il pivot, basta eseguire la seguente operazione di normalizzazione (ridurre a 1):

$$a^{(1)} \rightarrow \frac{1}{a_{1j}} a^{(1)}.$$

- **Per  $m > 1$ :** Dimostriamo che, se vale per  $m - 1$ , allora vale anche per  $m$ . Prima di tutto,

individuiamo la prima riga non nulla:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sia

$$j = \min\{l \in \{1, \dots, n\} \mid a_{1l} \neq 0\}$$

la posizione del primo elemento non nullo nella prima riga.

Analogamente, poniamo

$$k = \min\{i \in \{1, \dots, m\} \mid a_{ij} \neq 0\},$$

cioè l'indice della prima riga (a partire dall'alto) che contiene un elemento non nullo nella colonna  $j$ .

Una volta individuati tali indici, scambiamo la riga  $a_k$  con la prima riga  $a_1$ :

$$a_k \longleftrightarrow a_1.$$

Dopo lo scambio, otteniamo:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{1j} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{2j} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{mj} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dato  $a'_{1j}$  (pivot della prima riga, diverso da 0), dobbiamo annullare tutti gli elementi sottostanti:

Per la riga 2, basta prendere  $B = -\frac{a'_{2j}}{a'_{1j}}$  in modo che

$$a'_{2j} + Ba'_{1j} = 0.$$

Procediamo quindi in questo modo per tutte le righe sottostanti, ottenendo:

$$\begin{aligned} a^{(2)} &\rightarrow a^{(2)} - \frac{a'_{2j}}{a'_{1j}} a^{(1)}, \\ a^{(3)} &\rightarrow a^{(3)} - \frac{a'_{3j}}{a'_{1j}} a^{(1)}, \\ &\vdots \\ a^{(m)} &\rightarrow a^{(m)} - \frac{a'_{mj}}{a'_{1j}} a^{(1)}. \end{aligned}$$

Se si vuole la matrice completamente ridotta, bisogna normalizzare il pivot  $a''_{kj}$  di ogni riga e annullare gli elementi della stessa colonna che si trovano sopra ai pivot delle righe successive.

**Osservazione: Derivata dal Teorema di Rouché-Capelli**

Un sistema lineare  $\Sigma : Ax = b$  è compatibile  $\Leftrightarrow$  la matrice completa, una volta ridotta a gradini tramite operazioni elementari, non presenta una riga in cui tutti gli elementi della matrice dei coefficienti sono 0 ma l'elemento nella colonna dei termini noti è diverso da 0.

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Matrice completa:  $C = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \right]$

Applichiamo  $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$  :

$$C = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Il sistema è impossibile.

### 4.3 Teorema di struttura

**Teorema (Teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare)**

Sia  $\Sigma : Ax = \mathbf{b}$  un sistema lineare di equazioni in  $n$  incognite e sia  $\Sigma_0 : Ax = \mathbf{0}$  il sistema lineare omogeneo associato.

Sia

$$\mathbf{S} = \{(y_1, \dots, y_n) \in K^n \mid A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}\}$$

l'insieme delle soluzioni di  $\Sigma$ , e sia

$$\mathbf{S}_0 = \{(z_1, \dots, z_n) \in K^n \mid A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$$

l'insieme delle soluzioni di  $\Sigma_0$ .

Allora, se  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in \mathbf{S}$ , si ha

$$\mathbf{S} = \{(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) + (z_1, \dots, z_n) \mid (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{S}_0\} = \mathbf{X}.$$

**Dimostrazione:**

Mostriamo che  $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$  verificando le due inclusioni:

1.  $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ : Sia  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{S}$ . Consideriamo  $(z_1, \dots, z_n) = (y_1, \dots, y_n) - (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ . Poiché

$$Az = A(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = A\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

si ha  $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$ . Quindi  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \in \mathbf{X}$ .

2.  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{S}$ : Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ . Allora  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$  con  $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$ . Allora

$$A\mathbf{x} = A(\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z}) = A\bar{\mathbf{y}} + A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b},$$

quindi  $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ .

Da queste due inclusioni segue che  $\mathbf{S} = \mathbf{X}$ .  $\square$

## 4.4 Proprietà dell'insieme $S_0$ come sottospazio vettoriale

### Proposizione: Proprietà dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

Sia  $\Sigma_0 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un sistema lineare omogeneo in  $n$  incognite, e sia

$$S_0 = \{ \mathbf{z} \in K^n \mid A\mathbf{z} = \mathbf{0} \}$$

l'insieme delle sue soluzioni. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. Il vettore nullo  $\mathbf{0}$  appartiene a  $S_0$ .
2. Se  $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in S_0$ , allora  $\mathbf{z} + \mathbf{z}' \in S_0$ .
3. Se  $\alpha \in K$  e  $\mathbf{z} \in S_0$ , allora  $\alpha\mathbf{z} \in S_0$ .

In conclusione,  $S_0$  è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari, e quindi costituisce un sottospazio vettoriale di  $K^n$ .

### Definizione (Sottospazio vettoriale)

Un sottoinsieme  $V$  si dice *linearmente chiuso* se:

1.  $V \neq \emptyset$ ;
2.  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ ;
3.  $\forall \alpha \in K, \mathbf{u} \in V \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in V$ .

Poiché  $S_0$  soddisfa esattamente queste proprietà, segue che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale di  $K^n$ .

### Proposizione: Sottoinsiemi linearmente chiusi come sottospazi vettoriali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e sia

$$W \subseteq V$$

un sottoinsieme non vuoto tale che:

1.  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ ;
2.  $\forall \alpha \in K, \mathbf{u} \in W \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in W$ .

Allora  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

#### Osservazione: Operazioni interne

Le proprietà di chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalare garantiscono che le operazioni siano interne anche se considerate come:

$$+ : W \times W \rightarrow W, \quad \cdot : K \times W \rightarrow W.$$

In altre parole, la somma di due elementi di  $W$  appartiene ancora a  $W$  e il prodotto di uno scalare con un elemento di  $W$  appartiene sempre a  $W$ .

# Capitolo 5

## Lezione 5 - 08/10

### 5.1 Sistemi di Generatori

#### Definizione (Combinazione Lineare)

Dati due vettori  $(u_1, \dots, u_t) \in V$  e degli scalari  $(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in K$ , la **combinazione lineare** dei vettori dati mediante gli scalari dati è il vettore seguente:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$$

Se vogliamo permettere che ci siano ripetizioni tra i vettori e gli scalari, allora consideriamo t-uple  $(u_1, \dots, u_t) \in V^t$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in K^t$ .

#### Definizione (Chiusura Lineare)

Dato un sottoinsieme  $X \neq \emptyset$  di  $V$ , diremo **chiusura lineare** di  $X$  il sottoinsieme  $L(X)$  di  $V$ , costituito da tutti e soli i vettori che sono combinazioni lineari di vettori di  $X$ . Se:

- $X = \emptyset$ , porremo convenzionalmente  $L(\emptyset) = 0$
- $X = x_1, \dots, x_t$  è un insieme finito, scriveremo  $L(x_1, \dots, x_t)$ .

Esempio:  $L((2, 3), (1, 1)) = \{\alpha_1(2, 3) + \alpha_2(1, 1) | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ .

#### Definizione (Sistema di Generatori)

Un sistema di generatori di  $V$  è un sottoinsieme di  $V$  tale che ogni vettore di  $S$  è combinazione lineare di vettori diversi, ossia  $V = L(S)$ . Inoltre se lo spazio vettoriale  $V$  ammette un sistema di generatori finito, allora si dirà **finitamente generato**.

#### Proposizione: Importante sulla chiusura lineare

Sia  $X \subseteq V$ . Allora valgono le seguenti proprietà:

- $X \subseteq L(X)$ ;
- $L(X)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ ;
- Se  $W \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  tale che  $X \subseteq W$ , allora  $L(X) \subseteq W$ .

*Dimostrazione del primo punto.* Consideriamo un qualunque  $u \in X$ . Poiché  $u = 1 \cdot u$ , ed  $1 \in K$ , si ha che  $u$  è combinazione lineare di un elemento di  $X$ . Dunque  $u \in L(X)$ , e quindi:

$$X \subseteq L(X).$$

□

*Dimostrazione del secondo punto.* Dimostriamo che  $L(X)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

(1) **Non vuoto.** Poiché  $L(X) \supseteq X$  e  $X \neq \emptyset$ , segue immediatamente che  $L(X) \neq \emptyset$ .



**(2) Chiusura rispetto all'addizione.** Siano  $u, u' \in L(X)$ . Allora, per definizione di chiusura lineare, esistono  $t, t' \in \mathbb{N}$ , vettori  $u_1, \dots, u_t, u'_1, \dots, u'_{t'} \in X$  e scalari  $\alpha_1, \dots, \alpha_t, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{t'} \in K$  tali che:

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t, \quad u' = \alpha'_1 u'_1 + \dots + \alpha'_{t'} u'_{t'}.$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$u + u' = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t + \alpha'_1 u'_1 + \dots + \alpha'_{t'} u'_{t'} \in L(X),$$

poiché è ancora una combinazione lineare di vettori di  $X$ .

**(3) Chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare.** Sia  $\lambda \in K$ . Allora:

$$\lambda u = \lambda(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = (\lambda \alpha_1) u_1 + \dots + (\lambda \alpha_t) u_t \in L(X),$$

poiché anche in questo caso otteniamo una combinazione lineare di elementi di  $X$ .

Pertanto,  $L(X)$  è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalare, quindi è un sottospazio vettoriale di  $V$ .  $\square$

*Dimostrazione del terzo punto.* Ipotizziamo che  $W$  sia un sottospazio vettoriale di  $V$  tale che  $X \subseteq W$ .

Vogliamo mostrare che  $L(X) \subseteq W$ ; cioè, per ogni  $u \in L(X)$ , si ha  $u \in W$ .

Sia dunque  $u \in L(X)$ . Per definizione di chiusura lineare, esistono  $u_1, \dots, u_t \in X$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$  tali che:

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t.$$

Poiché  $X \subseteq W$ , ciascun  $u_i \in W$ . Poiché  $W$  è sottospazio vettoriale, è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalare:

$$\alpha_i u_i \in W \quad \forall i.$$

Inoltre,  $W$  è chiuso rispetto all'addizione, dunque:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \in W.$$

Quindi  $u \in W$ , e pertanto  $L(X) \subseteq W$ .  $\square$

## 5.2 Dipendenza e indipendenza lineare

### Definizione (Linearmente dipendente e indipendente)

Una  $n-pla(v_1, \dots, v_n)$  di vettori di  $V$  sarà detta **linearmente dipendente** se esiste una  $n-pla(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  di scalari non tutti nulli, tale che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

In caso contrario, e cioè se

$$(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \Rightarrow (\alpha_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}_n)$$

la  $n-pla(v_1, \dots, v_n)$  sarà detta **linearmente indipendente**.

#### Osservazione:

Se  $X \subseteq T \subseteq V$ , con  $X$  linearmente **dipendente**  $\Rightarrow T$  è linearmente **dipendente**.

Se  $Y \subseteq X \subseteq V$ , con  $X$  linearmente **indipendente**  $\Rightarrow Y$  è linearmente **indipendente**.

### Teorema (Caratterizzazione della dipendenza lineare)

Un sottoinsieme  $X$  di  $V$  è **linearmente dipendente** se e solo se

$$\exists u \in X \text{ tale che } L(X) = L(X \setminus \{u\}).$$

Non consideriamo il caso  $X = \emptyset$ , poiché l'insieme vuoto è per definizione linearmente indipendente. Quindi supponiamo  $X \neq \emptyset$ .

#### Dimostrazione.

**(Direzione " $\Rightarrow$ "):** Sia  $X$  linearmente dipendente. Per definizione, esistono  $u_1, \dots, u_t \in X$  e scalari

$\alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$ , non tutti nulli, tali che:

$$\vec{0} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_t u_t.$$

Sia  $\alpha_t \neq 0$ . Allora esiste  $\alpha_t^{-1} \in K$ . Moltiplicando entrambi i membri per  $\alpha_t^{-1}$ , otteniamo:

$$\vec{0} = (\alpha_t^{-1} \alpha_1) u_1 + \dots + (\alpha_t^{-1} \alpha_{t-1}) u_{t-1} + (\alpha_t^{-1} \alpha_t) u_t.$$

Ma  $\alpha_t^{-1} \alpha_t = 1$ , quindi:

$$u_t = -(\alpha_t^{-1} \alpha_1) u_1 - \dots - (\alpha_t^{-1} \alpha_{t-1}) u_{t-1}.$$

Da cui segue che  $u_t$  è combinazione lineare degli altri vettori  $u_1, \dots, u_{t-1}$ , cioè:

$$u_t \in L(\{u_1, \dots, u_{t-1}\}) \subseteq L(X \setminus \{u_t\}).$$

Quindi:

$$L(X) = L(X \setminus \{u_t\}),$$

perché rimuovere  $u_t$  non cambia la chiusura lineare dell'insieme. Ciò dimostra la direzione “ $\Rightarrow$ ”.

**(Direzione “ $\Leftarrow$ ”):** Supponiamo ora che esista  $u \in X$  tale che  $L(X) = L(X \setminus \{u\})$ . Allora  $u \in L(X \setminus \{u\})$ , cioè:

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t,$$

con  $u_1, \dots, u_t \in X \setminus \{u\}$  e  $\alpha_i \in K$ .

Portando tutto a primo membro otteniamo:

$$\vec{0} = (-1)u + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t.$$

Questa è una combinazione lineare non banale (poiché il coefficiente di  $u$  è  $-1 \neq 0$ ) che dà il vettore nullo. Quindi  $X$  è linearmente dipendente.

□