Indice

Capitolo 1

Lezione 1 - Napoli

1.1 Introduzione

Contenuto della prima lezione.

Capitolo 2

Lezione 3 - 01/10

2.1 Matrice Trasposta

Definizione (Matrice Trasposta)
Sia $A \in M_{m,n}(K)$. La trasposta di A, denotata ${}^tA$, è la matrice del tipo $[n, m]$ che come righe ha le colonne di A.

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{n,m}(K), \text{ ottenuta scambiando righe e colonne di } A.$$

2.2 Prodotto Scalare

Definizione (Prodotto scalare)
Sia $K = \mathbb{R}$ e siano due vettori $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$.
Il **prodotto scalare** è la funzione

$$K^n \times K^n \longrightarrow K, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ,$$

che associa la coppia di vettori ad uno scalare, dato dalla somma delle componenti omonime dei due vettori.

2.3 Matrice Conformabile

Definizione (Matrice Conformabile)
Due matrici $A \in M_{m,n}(K)$ e $B \in M_{p,q}(K)$ si dicono **conformabili** per il prodotto se e solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B, cioè $n = p$. In tal caso, il prodotto AB è definito ed è una matrice di dimensione $m \times q$.
Esempio: Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(K), \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(K).$$

Allora A e B sono conformabili e

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 11 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 12 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 11 & 3 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 10 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 11 & 5 \cdot 9 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} \in M_{3,3}(K).$$

2.4 Prodotto Riga per Colonna

Definizione (Prodotto Riga Per Colonna)
Siano $A \in M_{m,n}(K)$ e $B \in M_{n,p}(K)$. Il prodotto di una riga i-esima di A per una colonna j-esima di B è definito come la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

In altre parole, per ottenere l'elemento in posizione (i, j) del prodotto AB, si moltiplicano elemento per elemento la riga i di A con la colonna j di B e si sommano i risultati.
Esempio: Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Allora

$$(AB)_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 58, \quad (AB)_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 68,$$

e così via per gli altri elementi del prodotto.

2.5 Sistema Lineare

Definizione (Sistema Lineare)
Siano $m, n \in \mathbb{N}$, e sia K un campo. Un **sistema lineare** di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ su un campo K è un insieme di m equazioni del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m = 0 \end{cases}$$

In forma compatta, un sistema lineare può essere scritto come:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove:

- $A \in M_{m,n}(K)$ è la **matrice dei coefficienti**;
- $\mathbf{x} \in K^n$ è il **vettore incognite**;
- $\mathbf{b} \in K^m$ è il **vettore dei termini noti**.

Osservazione: Soluzioni di un sistema lineare
L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è dato da

$$S_1 \text{ soluzioni della prima equazione } E_1(x)$$

$$S_2 \text{ soluzioni della seconda equazione } E_2(x)$$

$$\dots$$

$$S_m \text{ soluzioni della m-esima equazione } E_m(x)$$

Noi siamo interessati a

$$S = \bigcap_{i=1}^{m} S_i,$$

ovvero l'intersezione di tutte le soluzioni del sistema.

Definizione (Compatibilità di un sistema lineare)
Un sistema lineare Σ si dice **compatibile** se ammette almeno una soluzione, ossia se l'insieme delle soluzioni è diverso dal vuoto.

Altrimenti se $S = \varnothing$, allora il sistema si dice **incompatibile**.

Definizione (Matrice completa e incompleta)
Dato un sistema lineare Σ si distinguono due matrici:

- La **matrice incompleta** (o matrice dei coefficienti) di un sistema lineare contiene solo i coefficienti delle incognite.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- La **matrice completa** (o matrice dei coefficienti estesa) si ottiene aggiungendo a quella incompleta una colonna aggiuntiva con i termini noti del sistema.

$$C = (A \,|\, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Esempi di matrici complete e incomplete
Consideriamo due sistemi lineari in due incognite x_1, x_2.

- **Sistema omogeneo** Σ (con termini noti nulli):

$$\Sigma_0 : \begin{cases} 3x_2 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

- Matrice incompleta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Sistema non omogeneo** Σ (con termini noti $\neq 0$):

$$\Sigma : \begin{cases} 3x_2 - x_2 + 2x_4 - 3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5 = 0 \end{cases}$$

- Matrice completa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & | & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

2.6 Operazioni o Trasformazioni Elementari sulle Righe di una Matrice

Definizione (Operazioni elementari sulle righe)
Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice. Si chiamano **operazioni elementari sulle righe** le seguenti trasformazioni che possono essere applicate alle righe di A:

1. **Scambio di due righe:** per ogni $h, k \in \{1, \dots, m\}$,
$$\mathbf{b}^{(h)} \longleftrightarrow \mathbf{b}^{(k)}.$$
2. **Moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo:** per ogni $h \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $\lambda \in K \setminus \{0\}$,
$$\mathbf{b}^{(h)} \longrightarrow \lambda \mathbf{b}^{(h)}.$$
3. **Somma di una riga con un multiplo di un'altra:** per ogni $h, k \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $\beta \in K$,
$$\mathbf{b}^{(h)} \longrightarrow \mathbf{b}^{(h)} + \beta \mathbf{b}^{(k)}.$$

Osservazione: Invarianza dell'insieme delle soluzioni
Le operazioni elementari sulle righe di una matrice (e quindi sul sistema lineare associato) **modificano la forma del sistema**, ma **non alterano il suo insieme delle soluzioni**.

Capitolo 3

Lezione 4 - 3/10 (Teams)

3.1 Matrice a Gradini e Completamente a Gradini

Definizione (Matrice ridotta a gradini)
Una matrice si dice a gradini se ha le seguenti proprietà:

- Se una riga è nulla, tutte le righe successive sono nulle:

$$\exists\, h \in \{1, \ldots, m\} \mid a^h = 0 \;\Rightarrow\; a^i = 0 \;\; \forall i > h$$

- Il primo elemento diverso da zero di una riga non nulla, detto *pivot*, è più a sinistra del primo elemento non nullo delle righe successive:

$$\text{Se } a_{ij} \neq 0 \text{ e } a_{ih} = 0,\; \forall\, h < j,\; \text{allora } a_{i+1,h} = 0,\; \forall\, h \leq j.$$

Definizione (Matrice completamente ridotta a gradini)
Una matrice si dice completamente ridotta a gradini se oltre le precedenti due proprietà verifica anche le seguenti:

- il pivot di una qualunque riga non nulla è 1;
- ogni colonna che contiene il pivot di una riga ha tutti gli altri elementi nulli.

3.2 Algoritmo di Gauss

Teorema (Algoritmo di Gauss)
Ogni matrice su un campo K può essere ridotta o completamente ridotta a gradini mediante un numero finito di operazioni elementari.

Dimostrazione (per induzione)

Procediamo per induzione sul numero di righe m:

- **Per** $m = 1$**:**

$$A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$

Se a_{1j} è il pivot, basta eseguire la seguente operazione di normalizzazione (ridurre a 1):

$$a^{(1)} \;\to\; \frac{1}{a_{1j}}\, a^{(1)}.$$

- **Per** $m > 1$**:** Dimostriamo che, se vale per $m - 1$, allora vale anche per m. Prima di tutto, individuiamo la prima riga non nulla:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sia

$$j = \min\{\, l \in \{1, \dots, n\} \mid a_{1l} \neq 0 \,\}$$

la posizione del primo elemento non nullo nella prima riga.

Analogamente, poniamo

$$k = \min\{\, i \in \{1, \dots, m\} \mid a_{ij} \neq 0 \,\},$$

cioè l'indice della prima riga (a partire dall'alto) che contiene un elemento non nullo nella colonna j.

Una volta individuati tali indici, scambiamo la riga a_k con la prima riga a_1:

$$a_k \;\longleftrightarrow\; a_1.$$

Dopo lo scambio, otteniamo:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{1j} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{2j} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{mj} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dato a'_{1j} (pivot della prima riga, diverso da 0), dobbiamo annullare tutti gli elementi sottostanti: Per la riga 2, basta prendere $B = -\dfrac{a'_{2j}}{a'_{1j}}$ in modo che

$$a'_{2j} + Ba'_{1j} = 0.$$

Procediamo quindi in questo modo per tutte le righe sottostanti, ottenendo:

$$\begin{aligned} a^{(2)} &\;\to\; a^{(2)} - \frac{a'_{2j}}{a'_{1j}}\, a^{(1)}, \\ a^{(3)} &\;\to\; a^{(3)} - \frac{a'_{3j}}{a'_{1j}}\, a^{(1)}, \\ &\vdots \\ a^{(m)} &\;\to\; a^{(m)} - \frac{a'_{mj}}{a'_{1j}}\, a^{(1)}. \end{aligned}$$

Se si vuole la matrice completamente ridotta, bisogna normalizzare il pivot a''_{kj} di ogni riga e annullare gli elementi della stessa colonna che si trovano sopra ai pivot delle righe successive.

Osservazione: Derivata dal Teorema di Rouché-Capelli
Un sistema lineare $\Sigma : Ax = b$ è compatibile $\Leftrightarrow$ la matrice completa, una volta ridotta a gradini tramite operazioni elementari, non presenta una riga in cui tutti gli elementi della matrice dei coefficienti sono 0 ma l'elemento nella colonna dei termini noti è diverso da 0.

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Matrice completa:} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Applichiamo } R_2 \to R_2 - 2R_1 :$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è impossibile.

3.3 Teorema di struttura

Teorema (Teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare)
Sia $\Sigma : A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare di equazioni in n incognite e sia $\Sigma_0 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ il sistema lineare omogeneo associato.
Sia

$$\mathbf{S} = \{(y_1, \dots, y_n) \in K^n \mid A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}\}$$

l'insieme delle soluzioni di Σ, e sia

$$\mathbf{S}_0 = \{(z_1, \dots, z_n) \in K^n \mid A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$$

l'insieme delle soluzioni di Σ_0.
Allora, se $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in \mathbf{S}$, si ha

$$\mathbf{S} = \{(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) + (z_1, \dots, z_n) \mid (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{S}_0\} = \mathbf{X}.$$

Dimostrazione:

Mostriamo che $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ verificando le due inclusioni:

1. $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$: Sia $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{S}$. Consideriamo $(z_1, \dots, z_n) = (y_1, \dots, y_n) - (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$. Poiché

$$A\mathbf{z} = A(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = A\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

   si ha $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$. Quindi $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \in \mathbf{X}$.

2. $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{S}$: Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Allora $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$ con $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$. Allora

$$A\mathbf{x} = A(\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z}) = A\bar{\mathbf{y}} + A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b},$$

   quindi $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$.

Da queste due inclusioni segue che $\mathbf{S} = \mathbf{X}$. $\square$

3.4 Proprietà dell'insieme S_0 come sottospazio vettoriale

Proposizione: Proprietà dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

Sia $\Sigma_0 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo in n incognite, e sia

$$\mathbf{S}_0 = \{\, \mathbf{z} \in K^n \mid A\mathbf{z} = \mathbf{0} \,\}$$

l'insieme delle sue soluzioni. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. Il vettore nullo $\mathbf{0}$ appartiene a $\mathbf{S}_0$.
2. Se $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbf{S}_0$, allora $\mathbf{z} + \mathbf{z}' \in \mathbf{S}_0$.
3. Se $\alpha \in K$ e $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$, allora $\alpha\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$.

In conclusione, $\mathbf{S}_0$ è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari, e quindi costituisce un sottospazio vettoriale di K^n.

Definizione (Sottospazio vettoriale)
Un sottoinsieme V si dice *linearmente chiuso* se:

1. $V \neq \emptyset$;
2. $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$;
3. $\forall\, \alpha \in K$, $\mathbf{u} \in V \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in V$.

Poiché $\mathbf{S}_0$ soddisfa esattamente queste proprietà, segue che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale di K^n.

Proposizione: Sottoinsiemi linearmente chiusi come sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia

$$W \subseteq V$$

un sottoinsieme non vuoto tale che:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$;
2. $\forall \alpha \in K, \mathbf{u} \in W \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in W$.

Allora W è un sottospazio vettoriale di V.

Osservazione: Operazioni interne
Le proprietà di chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalare garantiscono che le operazioni siano interne anche se considerate come:

$$+ : W \times W \to W, \qquad \cdot : K \times W \to W.$$

In altre parole, la somma di due elementi di W appartiene ancora a W e il prodotto di uno scalare con un elemento di W appartiene sempre a W.