Indice

1 Lezione 1 - 24/09 **2**
1.1 Operazione Binaria . . . 2
1.2 Strutture Algebriche . . . 2
1.2.1 Gruppo . . . 3
1.2.2 Anello . . . 4
1.2.3 Campo . . . 5
1.2.4 Spazio Vettoriale . . . 5

2 Lezione 2 - 26/09 **7**
2.1 Matrice . . . 7
2.2 Polinomi . . . 7

3 Lezione 3 - 01/10 **8**
3.1 Matrice Trasposta . . . 8
3.2 Prodotto Scalare . . . 8
3.3 Matrice Conformabile . . . 8
3.4 Prodotto Riga per Colonna . . . 9
3.5 Sistema Lineare . . . 9
3.6 Operazioni o Trasformazioni Elementari sulle Righe di una Matrice . . . 11

4 Lezione 4 - 3/10 (Teams) **12**
4.1 Matrice a Gradini e Completamente a Gradini . . . 12
4.2 Algoritmo di Gauss . . . 12
4.3 Teorema di struttura . . . 14
4.4 Proprietà dell'insieme S_0 come sottospazio vettoriale . . . 15

5 Lezione 5 - 08/10 **16**
5.1 Sistemi di Generatori . . . 16
5.2 Dipendenza e indipendenza lineare . . . 17

Capitolo 1

Lezione 1 - 24/09

1.1 Operazione Binaria

Definizione (Operazioni su Insiemi)
Siano A, B, C insiemi. Diremo **operazione binaria** ogni applicazione

$$\varphi : A \times B \to C.$$

- Se in particolare $A = B = C$, allora diremo che $\varphi : A \times A \to A$ è un operazione binaria interna su A.
- Se $B = C$, allora diremo che φ si dice esterna con operatori in A.

1.2 Strutture Algebriche

Ricorda: Strutture Algebriche

- $(S, \perp)$ si dice **semigruppo** se $\perp$ è associativa;
- $(S, \perp)$ si dice **semigruppo commutativo** se $\perp$ è semigruppo con commutatività;
- $(S, \perp)$ si dice **monoide** se $\perp$ è semigruppo dotato di neutro;
- $(S, \perp)$ si dice **monoide commutativo** se $\perp$ è monoide con commutatività;
- $(S, \perp)$ si dice **gruppo** se $\perp$ è monoide dove ogni elemento è simmetrizzabile;
- $(S, \perp)$ si dice **gruppo abeliano** se $\perp$ è gruppo con commutatività.

Definizione (Struttura Algebrica)
Per **struttura algebrica** si intende una n-upla costituita da insiemi e operazioni su di essi. La più semplice struttura algebrica, spesso detta *gruppoide*, è una coppia $(X, \perp)$, dove X è un insieme e $\perp$ è un operazione binaria interna su X.

1.2.1 Gruppo

Definizione (Gruppo)
Un **gruppo** è una struttura algebrica $(G, \perp)$ formata da un insieme G e da un'operazione binaria interna $\perp : G \times G \to G$, che soddisfa le seguenti proprietà:

1. **Associatività:** $\forall\, a, b, c \in G,\ (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$;
2. **Elemento neutro:** esiste un elemento $e \in G$ tale che $\forall\, a \in G,\ a \perp e = e \perp a = a$;
3. **Elemento inverso:** per ogni $a \in G$ esiste un elemento $\bar{a} \in G$ tale che $a \perp \bar{a} = \bar{a} \perp a = e$.

Se inoltre vale la **proprietà commutativa**

$$a \perp b = b \perp a \quad \forall\, a, b \in G,$$

allora il gruppo si dice **abeliano**.

Proposizione: Proprietà elementari in un gruppo

Sia $(X, \perp)$ un gruppoide (cioè X insieme non vuoto con un'operazione binaria $\perp$ su X). Valgono le seguenti proprietà.

1. Se $(X, \perp)$ ammette un elemento neutro, questo è unico.
2. Se $(X, \perp)$ ammette un elemento neutro e e $\perp$ è associativa, allora per ogni $x \in X$ invertibile l'inverso di x è unico.
3. Inoltre, se $\perp$ è associativa e ha elemento neutro $u \in A$ e abbiamo $x, y \in A$ che hanno i loro inversi $\bar{x}, \bar{y}$, allora $x \perp y$ è invertibile e il suo inverso è $\bar{y} \perp \bar{x}$.

Dimostrazioni:

Dimostrazione della proprietà 1 (unicità dell'elemento neutro). Supponiamo che e ed e' siano due elementi neutri in $(X, \perp)$. Per definizione di elemento neutro:

$$\forall x \in X : \quad e \perp x = x \quad \text{e} \quad e' \perp x = x.$$

In particolare, considerando $x = e'$ nella prima uguaglianza e $x = e$ nella seconda otteniamo

$$e \perp e' = e' \quad \text{e} \quad e' \perp e = e.$$

Se non assumiamo necessariamente commutatività, bperpa usare una delle due uguaglianze applicata all'altro neutro: usando $e \perp e' = e'$ e insieme $e' \perp e = e$ otteniamo

$$e = e' \quad (\text{poiché } e = e' \perp e = e').$$

Quindi $e = e'$ e l'elemento neutro è unico. □

Dimostrazione della proprietà 2 (unicità dell'inverso e formula dell'inverso del prodotto). Sia $(X, \perp)$ associativo e con elemento neutro e.
Unicità dell'inverso. Sia $x \in X$ e supponiamo che y e y' siano due inversi di x, cioè

$$x \perp y = e = y \perp x, \qquad x \perp y' = e = y' \perp x.$$

Allora, usando l'associatività,

$$y = y \perp e = y \perp (x \perp y') = (y \perp x) \perp y' = e \perp y' = y'.$$

Quindi $y = y'$ e l'inverso è unico. □

Dimostrazione della proprietà 3. Siano $(A, \perp)$ un insieme con operazione binaria $\perp$, associativa, e dotato di elemento neutro $u \in A$. Supponiamo $x, y \in A$ invertibili e indichiamo con $\overline{x}$ e $\overline{y}$ i loro inversi, cioè

$$x \perp \overline{x} = \overline{x} \perp x = u, \qquad y \perp \overline{y} = \overline{y} \perp y = u.$$

Consideriamo il candidato $\overline{y} \perp \overline{x}$ come possibile inverso di $x \perp y$. Calcoliamo il prodotto a destra:

$$\begin{aligned}(x \perp y) \perp (\overline{y} \perp \overline{x}) &\overset{\text{(assoc.)}}{=} x \perp \big(y \perp (\overline{y} \perp \overline{x})\big) \\ &= x \perp \big((y \perp \overline{y}) \perp \overline{x}\big) \\ &= x \perp (u \perp \overline{x}) \\ &= x \perp \overline{x} \\ &= u.\end{aligned}$$

Analogamente, il prodotto a sinistra:

$$\begin{aligned}(\overline{y} \perp \overline{x}) \perp (x \perp y) &\overset{\text{(assoc.)}}{=} \overline{y} \perp \big(\overline{x} \perp (x \perp y)\big) \\ &= \overline{y} \perp \big((\overline{x} \perp x) \perp y\big) \\ &= \overline{y} \perp (u \perp y) \\ &= \overline{y} \perp y \\ &= u.\end{aligned}$$

Quindi $\overline{y} \perp \overline{x}$ è sia inverso a destra sia inverso a sinistra di $x \perp y$. Poiché in una struttura con elemento neutro e operazione associativa l'inverso (se esiste) è unico, segue che

$$\overline{(x \perp y)} = \overline{y} \perp \overline{x},$$

come volevamo dimostrare. $\square$

1.2.2 Anello

Definizione (Anello)
Un **anello** è una struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ formata da un insieme A e da due operazioni binarie interne:

$$+ : A \times A \to A, \qquad \cdot : A \times A \to A,$$

tali che valgono le seguenti proprietà:

1. $(A, +)$ è un **gruppo abeliano**
2. L'operazione $\cdot$ (detta *moltiplicazione*) è associativa
3. La moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall\, a, b, c \in A.$$

Se esiste un elemento $1 \in A$ tale che $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in A$, l'anello si dice **unitario** o **con elemento neutro moltiplicativo**.
Se inoltre la moltiplicazione è commutativa, l'anello si dice **commutativo**.

1.2.3 Campo

Definizione (Campo)
Un **campo** è una struttura algebrica $(K, +, \cdot)$ formata da un insieme K e da due operazioni binarie interne:

$$+ : K \times K \to K, \qquad \cdot : K \times K \to K,$$

che soddisfano le seguenti proprietà:

1. $(K, +)$ è un **gruppo abeliano**:
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un **gruppo abeliano** rispetto alla moltiplicazione:
3. Le due operazioni sono collegate dalle proprietà distributive:

In altre parole, un campo è un **anello commutativo con elemento unità** in cui **ogni elemento non nullo è invertibile**.

1.2.4 Spazio Vettoriale

Definizione (Spazio vettoriale)
Diremo che $(V, \boxplus, \boxdot)$ è **spazio vettoriale** sul campo $\mathbb{R}$ se:

1. $V \neq \emptyset$
   Operazione interna: $\boxplus : V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u + v$
   Operazione esterna: $\boxdot : K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$
2. $(V, \boxplus)$ è gruppo abeliano, $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in V$
   (a) Proprietà associativa: $(\underline{v} \boxplus \underline{w}) \boxplus \underline{z} = \underline{v} \boxplus (\underline{w} \boxplus \underline{z})$
   (b) Proprietà commutativa: $\underline{v} \boxplus \underline{w} = \underline{w} \boxplus \underline{v}$
   (c) Esiste opposto: $\underline{v} \boxplus (-\underline{v}) = \underline{0}$
   (d) Esiste elemento neutro: $\underline{v} \boxplus \underline{0} = \underline{0} \boxplus \underline{v} = \underline{v}$
3. Esiste elemento neutro rispetto a $\boxdot$: $1 \boxdot \underline{v} = \underline{v} = \underline{v} \boxdot 1$
4. **Per tutti** $h, k \in \mathbb{R}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ valgono le seguenti proprietà:
   (a) Compatibilità della moltiplicazione scalare: $(h \cdot k) \boxdot \underline{v} = h \boxdot (k \boxdot \underline{v})$
   (b) Distributività rispetto alla somma scalare: $(h + k) \boxdot \underline{v} = (h \boxdot \underline{v}) \boxplus (k \boxdot \underline{v})$
   (c) Distributività rispetto alla somma vettoriale: $h \boxdot (\underline{v} \boxplus \underline{w}) = (h \boxdot \underline{v}) \boxplus (h \boxdot \underline{w})$

Proposizione: Proprietà aritmetiche degli Spazi Vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$ si ha:

1. $\alpha \boxdot v = 0 \iff \alpha = 0$ oppure $v = 0$
2. $(-\alpha) \boxdot v = \alpha \boxdot (-v) = -(\alpha \boxdot v)$
3. se $\alpha \boxdot v = \beta \boxdot v$ e $v \neq \varnothing$, allora $\alpha = \beta$
4. se $\alpha \boxdot u = \alpha \boxdot v$ e $\alpha \neq \varnothing$, allora $u = v$

Dimostrazione delle proprietà. **(i)** Dimostriamo che

$$av = 0 \iff a = 0 \text{ oppure } v = 0.$$

Direzione "⇒": se $a = 0$ oppure $v = 0$, allora chiaramente $av = 0$. Infatti:

- se $a = 0$, per le proprietà dello spazio vettoriale abbiamo $0 \cdot v = 0$;
- se $v = 0$, allora $a \cdot 0 = 0$.

Direzione "$\Leftarrow$": supponiamo che $av = 0$ e $a \neq 0$. Poiché $a \neq 0$, esiste l'inverso $a^{-1} \in K$. Moltiplicando entrambi i membri per a^{-1} otteniamo:

$$a^{-1}(av) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Usando l'associatività della moltiplicazione scalare:

$$(a^{-1}a)v = 1 \cdot v = v = 0.$$

Quindi, se $a \neq 0$ e $av = 0$, necessariamente $v = 0$. Pertanto, la proprietà (i) è dimostrata.

(ii) Dimostriamo ora che

$$(-a)v = a(-v) = -(av).$$

Si ha immediatamente:

$$av + (-a)v = (a + (-a))v = 0v = 0,$$

e anche

$$av + a(-v) = a(v + (-v)) = a0 = 0.$$

Poiché in entrambi i casi la somma è nulla, segue che

$$(-a)v = -(av) = a(-v).$$

(iii) Se $av = \beta v$, allora

$$(a + (-\beta))v = av + (-\beta)v = \beta v + (-\beta)v = 0.$$

Poiché $v \neq 0$ per ipotesi, per la proprietà (i) segue che $a + (-\beta) = 0$, e quindi $a = \beta$.

(iv) Se $au = av$ e $a \neq 0$, allora

$$a(u + (-v)) = au + a(-v) = au - av = 0.$$

Poiché $a \neq 0$, per la proprietà (i) si ha $u + (-v) = 0$, cioè $u = v$.

□

Capitolo 2

Lezione 2 - 26/09

2.1 Matrice

2.2 Polinomi

Capitolo 3

Lezione 3 - 01/10

3.1 Matrice Trasposta

Definizione (Matrice Trasposta)
Sia $A \in M_{m,n}(K)$. La trasposta di A, denotata ${}^tA$, è la matrice del tipo $[n, m]$ che come righe ha le colonne di A.

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{n,m}(K), \text{ ottenuta scambiando righe e colonne di } A.$$

3.2 Prodotto Scalare

Definizione (Prodotto scalare)
Sia $K = \mathbb{R}$ e siano due vettori $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$.
Il **prodotto scalare** è la funzione

$$K^n \times K^n \longrightarrow K, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ,$$

che associa la coppia di vettori ad uno scalare, dato dalla somma delle componenti omonime dei due vettori.

3.3 Matrice Conformabile

Definizione (Matrice Conformabile)
Due matrici $A \in M_{m,n}(K)$ e $B \in M_{p,q}(K)$ si dicono **conformabili** per il prodotto se e solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B, cioè $n = p$. In tal caso, il prodotto AB è definito ed è una matrice di dimensione $m \times q$.
Esempio: Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(K), \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(K).$$

Allora A e B sono conformabili e

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 11 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 12 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 11 & 3 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 10 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 11 & 5 \cdot 9 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} \in M_{3,3}(K).$$

3.4 Prodotto Riga per Colonna

Definizione (Prodotto Riga Per Colonna)
Siano $A \in M_{m,n}(K)$ e $B \in M_{n,p}(K)$. Il prodotto di una riga i-esima di A per una colonna j-esima di B è definito come la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

In altre parole, per ottenere l'elemento in posizione (i, j) del prodotto AB, si moltiplicano elemento per elemento la riga i di A con la colonna j di B e si sommano i risultati.
Esempio: Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Allora

$$(AB)_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 58, \quad (AB)_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 68,$$

e così via per gli altri elementi del prodotto.

3.5 Sistema Lineare

Definizione (Sistema Lineare)
Siano $m, n \in \mathbb{N}$, e sia K un campo. Un **sistema lineare** di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ su un campo K è un insieme di m equazioni del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m = 0 \end{cases}$$

In forma compatta, un sistema lineare può essere scritto come:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove:

- $A \in M_{m,n}(K)$ è la **matrice dei coefficienti**;
- $\mathbf{x} \in K^n$ è il **vettore incognite**;
- $\mathbf{b} \in K^m$ è il **vettore dei termini noti**.

Osservazione: Soluzioni di un sistema lineare
L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è dato da

$$S_1 \text{ soluzioni della prima equazione } E_1(x)$$

$$S_2 \text{ soluzioni della seconda equazione } E_2(x)$$

$$\dots$$

$$S_m \text{ soluzioni della m-esima equazione } E_m(x)$$

Noi siamo interessati a

$$S = \bigcap_{i=1}^{m} S_i,$$

ovvero l'intersezione di tutte le soluzioni del sistema.

Definizione (Compatibilità di un sistema lineare)
Un sistema lineare Σ si dice **compatibile** se ammette almeno una soluzione, ossia se l'insieme delle soluzioni è diverso dal vuoto.

Altrimenti se $S = \varnothing$, allora il sistema si dice **incompatibile**.

Definizione (Matrice completa e incompleta)
Dato un sistema lineare Σ si distinguono due matrici:

- La **matrice incompleta** (o matrice dei coefficienti) di un sistema lineare contiene solo i coefficienti delle incognite.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- La **matrice completa** (o matrice dei coefficienti estesa) si ottiene aggiungendo a quella incompleta una colonna aggiuntiva con i termini noti del sistema.

$$C = (A \,|\, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Esempi di matrici complete e incomplete
Consideriamo due sistemi lineari in due incognite x_1, x_2.

- **Sistema omogeneo** Σ (con termini noti nulli):

$$\Sigma_0 : \begin{cases} 3x_2 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

- Matrice incompleta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Sistema non omogeneo** Σ (con termini noti $\neq 0$):

$$\Sigma : \begin{cases} 3x_2 - x_2 + 2x_4 - 3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5 = 0 \end{cases}$$

- Matrice completa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & | & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

3.6 Operazioni o Trasformazioni Elementari sulle Righe di una Matrice

Definizione (Operazioni elementari sulle righe)
Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice. Si chiamano **operazioni elementari sulle righe** le seguenti trasformazioni che possono essere applicate alle righe di A:

1. **Scambio di due righe:** per ogni $h, k \in \{1, \dots, m\}$,
$$\mathbf{b}^{(h)} \longleftrightarrow \mathbf{b}^{(k)}.$$

2. **Moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo:** per ogni $h \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $\lambda \in K \setminus \{0\}$,
$$\mathbf{b}^{(h)} \longrightarrow \lambda \mathbf{b}^{(h)}.$$

3. **Somma di una riga con un multiplo di un'altra:** per ogni $h, k \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $\beta \in K$,
$$\mathbf{b}^{(h)} \longrightarrow \mathbf{b}^{(h)} + \beta \mathbf{b}^{(k)}.$$

Osservazione: Invarianza dell'insieme delle soluzioni
Le operazioni elementari sulle righe di una matrice (e quindi sul sistema lineare associato) **modificano la forma del sistema**, ma **non alterano il suo insieme delle soluzioni**.

Capitolo 4

Lezione 4 - 3/10 (Teams)

4.1 Matrice a Gradini e Completamente a Gradini

Definizione (Matrice ridotta a gradini)
Una matrice si dice a gradini se ha le seguenti proprietà:

- Se una riga è nulla, tutte le righe successive sono nulle:

$$\exists\, h \in \{1, \dots, m\} \mid a^h = 0 \;\Rightarrow\; a^i = 0 \;\; \forall i > h$$

- Il primo elemento diverso da zero di una riga non nulla, detto *pivot*, è più a sinistra del primo elemento non nullo delle righe successive:

$$\text{Se } a_{ij} \neq 0 \text{ e } a_{ih} = 0,\ \forall\, h < j, \text{ allora } a_{i+1,h} = 0,\ \forall\, h \leq j.$$

Definizione (Matrice completamente ridotta a gradini)
Una matrice si dice completamente ridotta a gradini se oltre le precedenti due proprietà verifica anche le seguenti:

- il pivot di una qualunque riga non nulla è 1;
- ogni colonna che contiene il pivot di una riga ha tutti gli altri elementi nulli.

4.2 Algoritmo di Gauss

Teorema (Algoritmo di Gauss)
Ogni matrice su un campo K può essere ridotta o completamente ridotta a gradini mediante un numero finito di operazioni elementari.

Dimostrazione (per induzione)

Procediamo per induzione sul numero di righe m:

- **Per** $m = 1$**:**

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

Se a_{1j} è il pivot, basta eseguire la seguente operazione di normalizzazione (ridurre a 1):

$$a^{(1)} \;\rightarrow\; \frac{1}{a_{1j}}\, a^{(1)}.$$

- **Per** $m > 1$**:** Dimostriamo che, se vale per $m-1$, allora vale anche per m. Prima di tutto, individuiamo la prima riga non nulla:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sia

$$j = \min\{\, l \in \{1, \dots, n\} \mid a_{1l} \neq 0 \,\}$$

la posizione del primo elemento non nullo nella prima riga.

Analogamente, poniamo

$$k = \min\{\, i \in \{1, \dots, m\} \mid a_{ij} \neq 0 \,\},$$

cioè l'indice della prima riga (a partire dall'alto) che contiene un elemento non nullo nella colonna j.

Una volta individuati tali indici, scambiamo la riga a_k con la prima riga a_1:

$$a_k \longleftrightarrow a_1.$$

Dopo lo scambio, otteniamo:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{1j} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{2j} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{mj} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dato a'_{1j} (pivot della prima riga, diverso da 0), dobbiamo annullare tutti gli elementi sottostanti:

Per la riga 2, basta prendere $B = -\dfrac{a'_{2j}}{a'_{1j}}$ in modo che

$$a'_{2j} + B a'_{1j} = 0.$$

Procediamo quindi in questo modo per tutte le righe sottostanti, ottenendo:

$$\begin{aligned} a^{(2)} &\to a^{(2)} - \frac{a'_{2j}}{a'_{1j}}\, a^{(1)}, \\ a^{(3)} &\to a^{(3)} - \frac{a'_{3j}}{a'_{1j}}\, a^{(1)}, \\ &\vdots \\ a^{(m)} &\to a^{(m)} - \frac{a'_{mj}}{a'_{1j}}\, a^{(1)}. \end{aligned}$$

Se si vuole la matrice completamente ridotta, bisogna normalizzare il pivot a''_{kj} di ogni riga e annullare gli elementi della stessa colonna che si trovano sopra ai pivot delle righe successive.

Osservazione: Derivata dal Teorema di Rouché-Capelli
Un sistema lineare $\Sigma : Ax = b$ è compatibile $\Leftrightarrow$ la matrice completa, una volta ridotta a gradini tramite operazioni elementari, non presenta una riga in cui tutti gli elementi della matrice dei coefficienti sono 0 ma l'elemento nella colonna dei termini noti è diverso da 0.

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Matrice completa:} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Applichiamo } R_2 \to R_2 - 2R_1 :$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è impossibile.

4.3 Teorema di struttura

Teorema (Teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare)
Sia $\Sigma : A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare di equazioni in n incognite e sia $\Sigma_0 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ il sistema lineare omogeneo associato.
Sia

$$\mathbf{S} = \{(y_1, \dots, y_n) \in K^n \mid A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}\}$$

l'insieme delle soluzioni di Σ, e sia

$$\mathbf{S}_0 = \{(z_1, \dots, z_n) \in K^n \mid A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$$

l'insieme delle soluzioni di Σ_0.
Allora, se $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in \mathbf{S}$, si ha

$$\mathbf{S} = \{(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) + (z_1, \dots, z_n) \mid (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{S}_0\} = \mathbf{X}.$$

Dimostrazione:

Mostriamo che $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ verificando le due inclusioni:

1. $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$: Sia $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{S}$. Consideriamo $(z_1, \dots, z_n) = (y_1, \dots, y_n) - (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$. Poiché
$$A\mathbf{z} = A(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = A\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$
si ha $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$. Quindi $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \in \mathbf{X}$.
2. $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{S}$: Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Allora $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$ con $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$. Allora
$$A\mathbf{x} = A(\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z}) = A\bar{\mathbf{y}} + A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b},$$
quindi $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$.

Da queste due inclusioni segue che $\mathbf{S} = \mathbf{X}$. $\square$

4.4 Proprietà dell'insieme S_0 come sottospazio vettoriale

Proposizione: Proprietà dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

Sia $\Sigma_0 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo in n incognite, e sia

$$\mathbf{S}_0 = \{ \mathbf{z} \in K^n \mid A\mathbf{z} = \mathbf{0} \}$$

l'insieme delle sue soluzioni. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. Il vettore nullo $\mathbf{0}$ appartiene a $\mathbf{S}_0$.
2. Se $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbf{S}_0$, allora $\mathbf{z} + \mathbf{z}' \in \mathbf{S}_0$.
3. Se $\alpha \in K$ e $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$, allora $\alpha\mathbf{z} \in \mathbf{S}_0$.

In conclusione, $\mathbf{S}_0$ è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari, e quindi costituisce un sottospazio vettoriale di K^n.

Definizione (Sottospazio vettoriale)
Un sottoinsieme V si dice *linearmente chiuso* se:

1. $V \neq \emptyset$;
2. $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$;
3. $\forall\, \alpha \in K,\ \mathbf{u} \in V \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in V$.

Poiché $\mathbf{S}_0$ soddisfa esattamente queste proprietà, segue che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale di K^n.

Proposizione: Sottoinsiemi linearmente chiusi come sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia

$$W \subseteq V$$

un sottoinsieme non vuoto tale che:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$;
2. $\forall \alpha \in K, \mathbf{u} \in W \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in W$.

Allora W è un sottospazio vettoriale di V.

Osservazione: Operazioni interne
Le proprietà di chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalare garantiscono che le operazioni siano interne anche se considerate come:

$$+ : W \times W \to W, \qquad \cdot : K \times W \to W.$$

In altre parole, la somma di due elementi di W appartiene ancora a W e il prodotto di uno scalare con un elemento di W appartiene sempre a W.

Capitolo 5

Lezione 5 - 08/10

5.1 Sistemi di Generatori

Definizione (Combinazione Lineare)
Dati due vettori $(u_1, ..., u_t) \in V$ e degli scalari $(\alpha_1, ..., \alpha_t) \in K$, la **combinazione lineare** dei vettori dati mediante gli scalari dati è il vettore seguente:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_t + u_t$$

Se vogliamo permettere che ci siano ripetizioni tra i vettori e gli scalari, allora consideriamo t-uple $(u_1, ..., u_t) \in V^t$, $(\alpha_1, ..., \alpha_t) \in K^t$.

Definizione (Chiusura Lineare)
Dato un sottinsieme $X \neq \emptyset$ di V, diremo **chiusura lineare** di X il sottoinsieme $L(X)$ di V, costituito da tutti e soli i vettori che sono combinazioni lineari di vettori di X. Se:

- $X = \emptyset$, porremo convenzionalmente $L(\emptyset) = 0$
- $X = x_1, ..., x_t$ è un insieme finito, scriveremo $L(x_1, .., x_t)$.

Esempio: $L((2,3),(1,1)) = \{\alpha_1(2,3) + \alpha_2(1,1) | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.

Definizione (Sistema di Generatori)
Un sistema di generatori di V è un sottinsieme di V tale che ogni vettore di S è combinazione lineare di vettori diversi, ossia $V = L(S)$. Inoltre se lo spazio vettoriale V ammette un sistema di generatori finito, allora si dirà **finitamente generato**.

Proposizione: Importante sulla chiusura lineare

Sia $X \subseteq V$. Allora valgono le seguenti proprietà:

- $X \subseteq L(X)$;
- $L(X)$ è un sottospazio vettoriale di V;
- Se $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V tale che $X \subseteq W$, allora $L(X) \subseteq W$.

Dimostrazione del primo punto. Consideriamo un qualunque $u \in X$. Poiché $u = 1 \cdot u$, ed $1 \in K$, si ha che u è combinazione lineare di un elemento di X. Dunque $u \in L(X)$, e quindi:

$$X \subseteq L(X).$$

□

Dimostrazione del secondo punto. Dimostriamo che $L(X)$ è un sottospazio vettoriale di V.
(1) Non vuoto. Poiché $L(X) \supseteq X$ e $X \neq \emptyset$, segue immediatamente che $L(X) \neq \emptyset$.

(2) Chiusura rispetto all'addizione. Siano $u, u' \in L(X)$. Allora, per definizione di chiusura lineare, esistono $t, t' \in \mathbb{N}$, vettori $u_1, \ldots, u_t, u'_1, \ldots, u'_{t'} \in X$ e scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_t, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{t'} \in K$ tali che:

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t, \qquad u' = \alpha'_1 u'_1 + \cdots + \alpha'_{t'} u'_{t'}.$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$u + u' = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t + \alpha'_1 u'_1 + \cdots + \alpha'_{t'} u'_{t'} \in L(X),$$

poiché è ancora una combinazione lineare di vettori di X.
(3) Chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare. Sia $\lambda \in K$. Allora:

$$\lambda u = \lambda(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t) = (\lambda\alpha_1)u_1 + \cdots + (\lambda\alpha_t)u_t \in L(X),$$

poiché anche in questo caso otteniamo una combinazione lineare di elementi di X.
Pertanto, $L(X)$ è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalare, quindi è un sottospazio vettoriale di V. □

Dimostrazione del terzo punto. Ipotizziamo che W sia un sottospazio vettoriale di V tale che $X \subseteq W$. Vogliamo mostrare che $L(X) \subseteq W$; cioè, per ogni $u \in L(X)$, si ha $u \in W$.
Sia dunque $u \in L(X)$. Per definizione di chiusura lineare, esistono $u_1, \ldots, u_t \in X$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in K$ tali che:

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t.$$

Poiché $X \subseteq W$, ciascun $u_i \in W$. Poiché W è sottospazio vettoriale, è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalare:

$$\alpha_i u_i \in W \quad \forall i.$$

Inoltre, W è chiuso rispetto all'addizione, dunque:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t \in W.$$

Quindi $u \in W$, e pertanto $L(X) \subseteq W$. □

5.2 Dipendenza e indipendenza lineare