Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Algorytmy geometryczne

Ćwiczenie 1

Autor:
Andrzej Zaborniak
Informatyka, rok II gr. 4

27.10.2022 r.

1 Specyfikacja techniczna

Parametry techniczne komputera na którym zostało wykonane ćwiczenie:
Procesor: Intel® Core™ i7-5600U CPU @ 2.60GHz × 4
Karta graficzna: Mesa Intel® HD Graphics 5500 (BDW GT2)
Pamięć RAM: 8,0 GB
System operacyjny: Ubuntu 22.04.1 LTS
Wersja GNOME: 42.4
Użyty język programowania: Python 3.10.6
Wykorzystany program: Jupyter Notebook

1.1 Narzędzie graficzne

Wykresy wizualizujące rozmieszczenie punktów na płaszczyźnie oraz tabele zawierające informacje na temat położenia punktów względem prostej (a,b) zostały wykonane przy użyciu funkcji zawartych w bibliotekach Seaborn oraz Pandas.

2 Cel ćwiczenia

Ćwiczenie miało na celu wprowadzić w zagadnienia geometrii obliczeniowej. Głównym zadaniem była implementacja podstawowych predykatów geometrycznych, przeprowadzenie testów oraz wizualizacja. Ćwiczenie polegało na określeniu dla wybranych punktów c położenie względem prostej (a, b). Położenie to można określić obliczając wartość jednego z dwóch wyznaczników.

Wyznacznik macierzy 3×3:

$$det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_y & c_y & 1 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik macierzy 2×2:

$$det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix}$$

Wartości wyznaczników macierzy 2×2 i 3×3 zostały policzone za pomocą ręcznej implementacji oraz korzystając z wbudowanej funkcji np.linalg.det(matrix) przyjmującej jako argument macierz zapisaną w postaci tablicy np.Array. Funkcja ta jest w bibliotece numerycznej Numpy.
W zależności od wartości można było określić położenie wyznaczonego punktu:

$$det(a, b, c) = \begin{array}{l} < 0 \; punkt\ c\ znajduje\ sie\ po\ prawej\ stronie\ prostej\ ab \\ > 0 \; punkt\ c\ znajduje\ sie\ po\ lewej\ stronie\ prostej\ ab \\ = 0 \; punkt\ c\ znajduje\ sie\ na\ prostej\ ab \end{array}$$

3 Treść zadania

3.1 Zbiory punktów

Na samym początku należało wygenerować dane zbiory punktów których współrzędne są typu zmiennoprzecinkowego a następnie przedstawić ich graficzną reprezentacje.

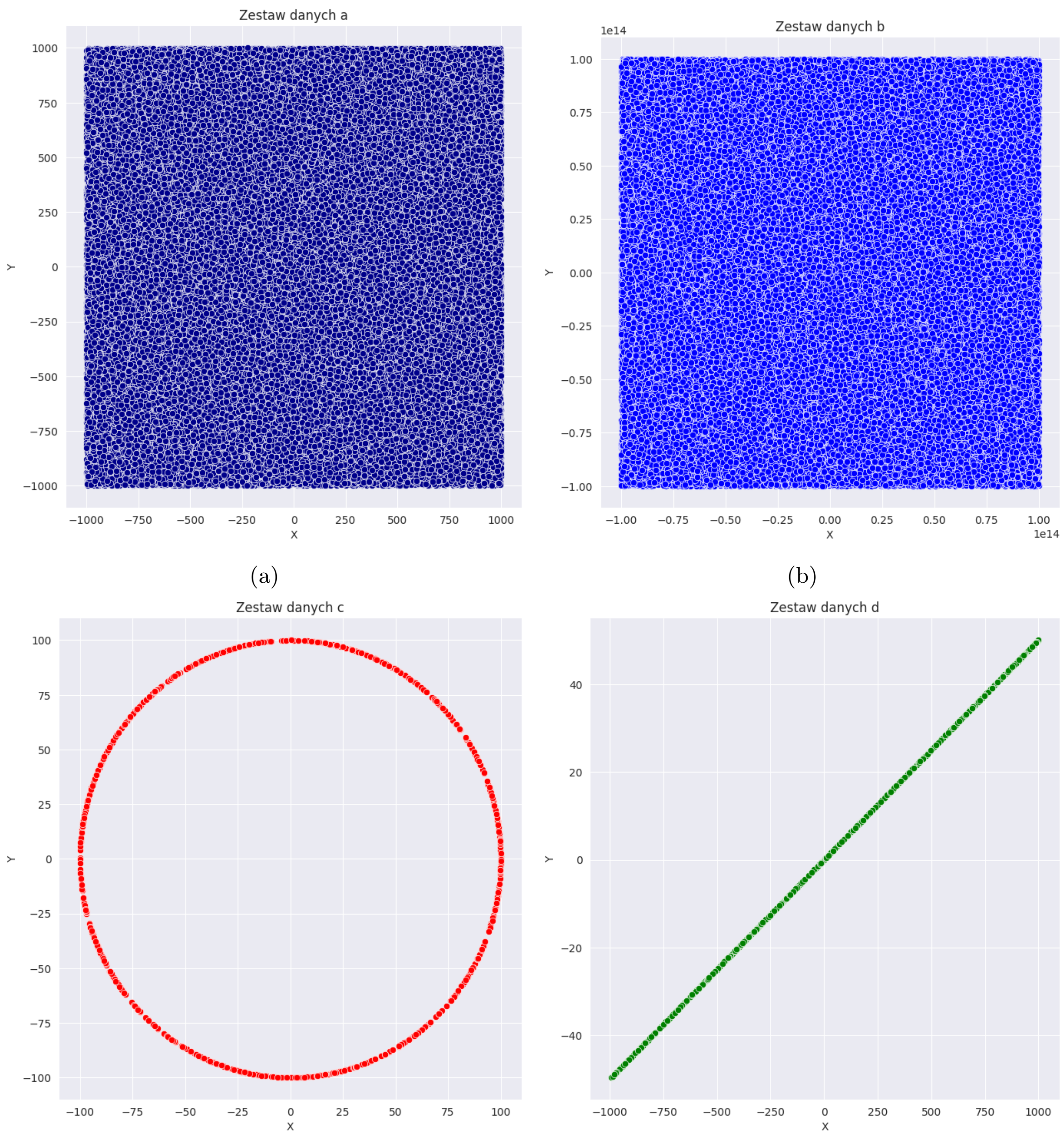
Zbiory punktów które należało przedstawić:
a) 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000]

b) 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału $[-10^{14}, 10^{14}]$
c) 1000 losowych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu R=100
d) 1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000] leżących na prostej wyznaczonej przez wektor (a, b) przyjmijmy a = [-1.0, 0.0], b = [1.0, 0.1].

3.2 Tolerancja

Każdy zbiór punktów był badany w określonych tolerancjach:
- $Epsilon = 10^{-10}$
- $Epsilon = 10^{-14}$
- $Epsilon = 10^{-18}$
- $Epsilon = 10^{-20}$

3.2.1 Graficzna reprezentacja zbiorów



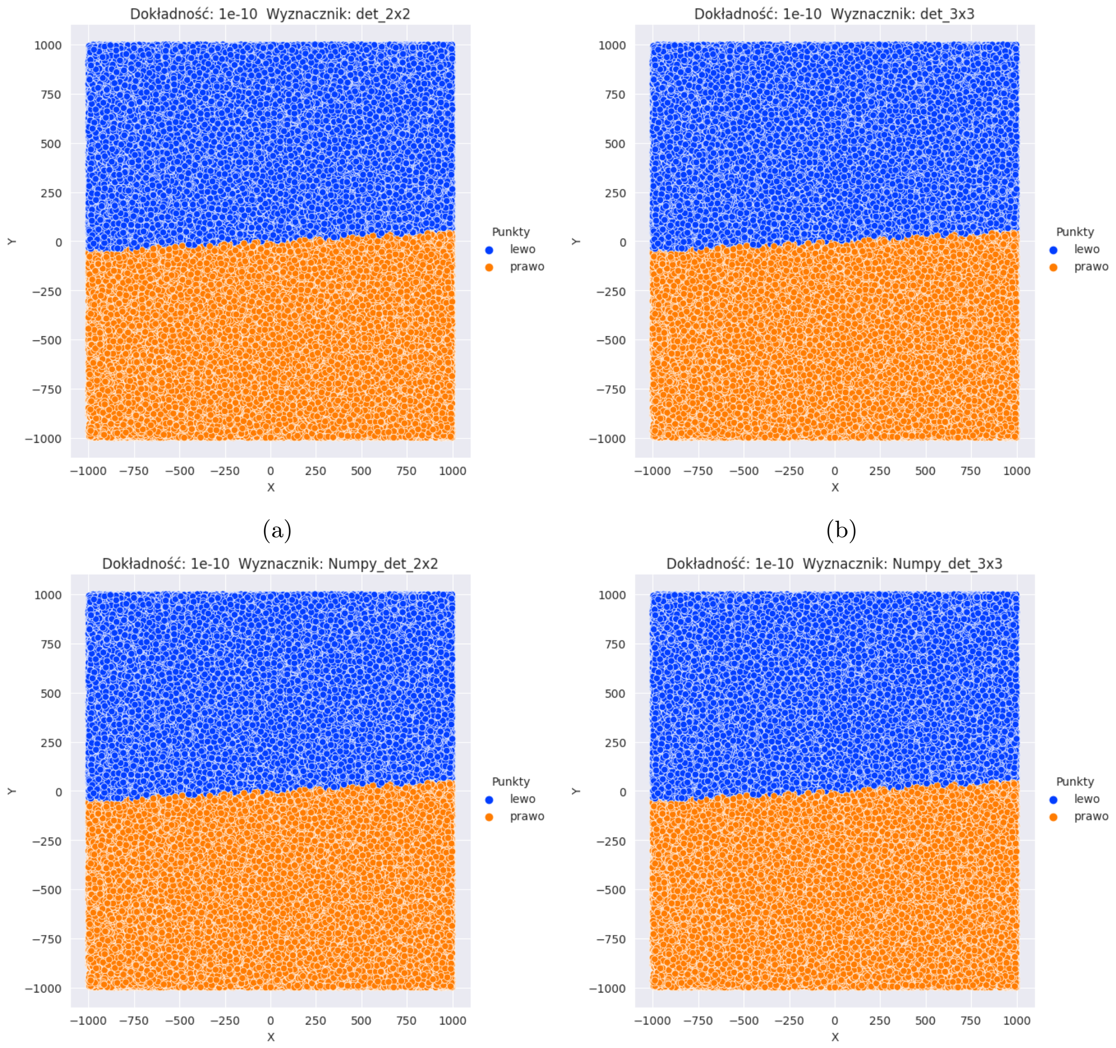
(a) (b) (c) (d)

Rysunek 1

4 Zbiór punktów a)

Graficzna wizualizacja wraz z tabelami przedstawia rozmieszczenie punktów względem prostej ab $a = [-1.0, 0.0], b = [1.0, 0.1]$. Każdy wykres zawiera tytuł w którym zostały zawarte informacje takie jak: tolerancja z jaką punkty były klasyfikowane oraz sposób liczenia wyznacznika, odpowiednio:
- det_2x2, det_3x3 oznacza własną implementację obliczania wyznacznika 2x2 i 3x3
- Numpy_det_2x2, Numpy_det_3x3 oznacza skorzystanie z funkcji zawartych w bibliotece Numpy do obliczania wyznacznika.

4.1 Tolerancja $e = 10^{-10}$



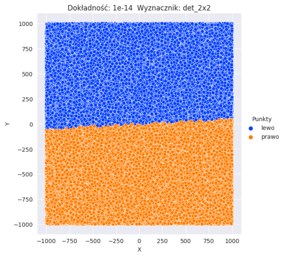
(a) (b) (c) (d)

Rysunek 2

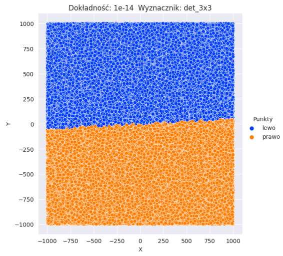
Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	49881	49881	49881	49881
prawo	50119	50119	50119	50119
środek	0	0	0	0

Rysunek 3

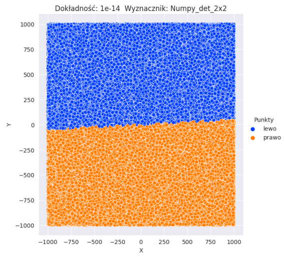
4.2 Tolerancja $e = 10^{-14}$



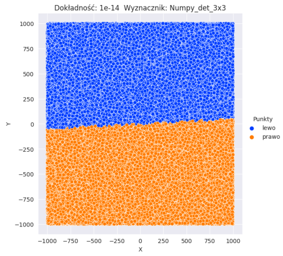
(a)



(b)



(c)



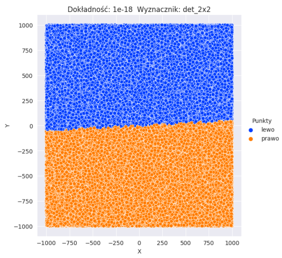
(d)

Rysunek 4

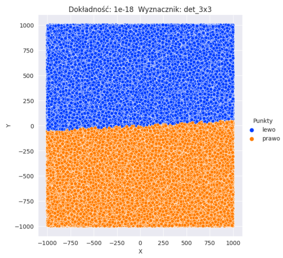
	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
Punkty				
lewo	49881	49881	49881	49881
prawo	50119	50119	50119	50119
środek	0	0	0	0

Rysunek 5

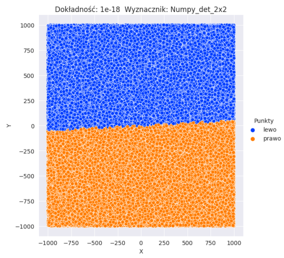
4.3 Tolerancja $e = 10^{-18}$



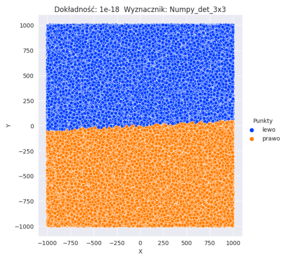
(a)



(b)



(c)



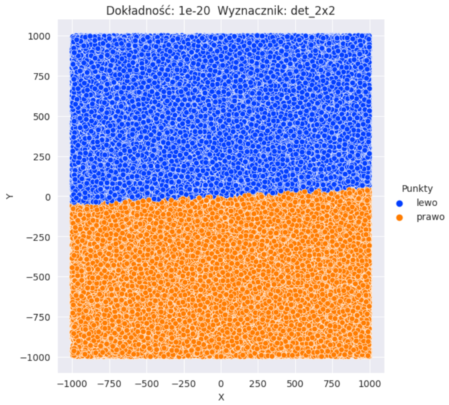
(d)

Rysunek 6

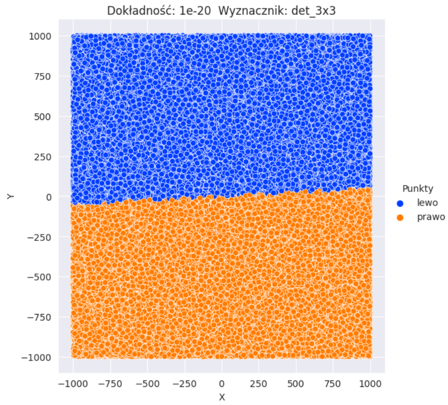
Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	49881	49881	49881	49881
prawo	50119	50119	50119	50119
środek	0	0	0	0

Rysunek 7

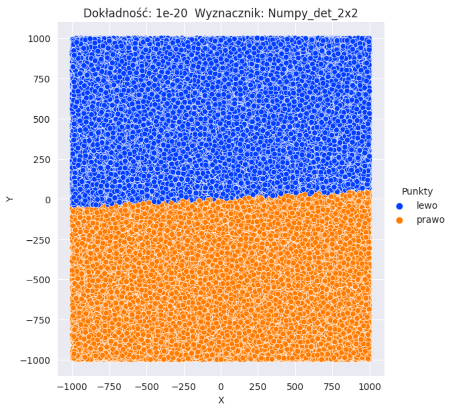
4.4 Tolerancja $e = 10^{-20}$



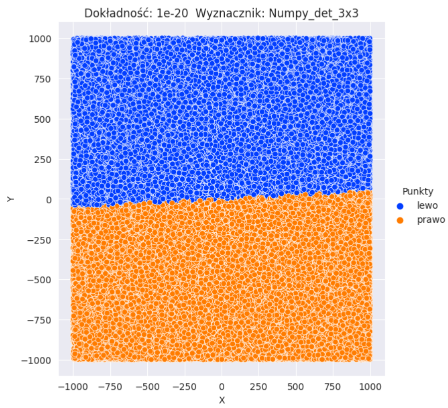
(a)



(b)



(c)



(d)

Rysunek 8

Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	49881	49881	49881	49881
prawo	50119	50119	50119	50119
środek	0	0	0	0

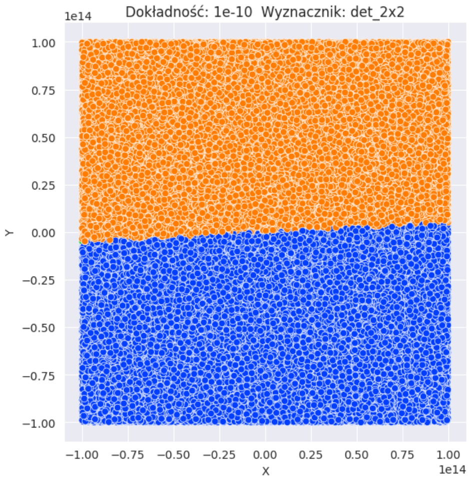
Rysunek 9

4.5 Wnioski dla zbioru a

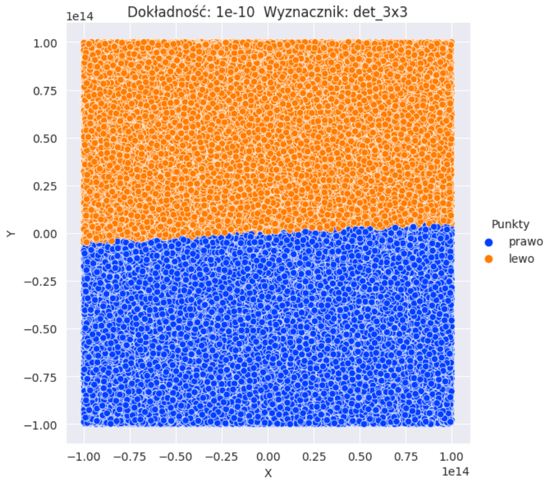
Jak możemy zauważyć z wizualizacji dla pierwszego zbioru punktów, Rysunki o numerach 2,4,6,8 jak i 3,5,7,9 nie różnią się między sobą, pomimo że zostały zastosowane róże sposoby liczenia wyznacznika. Wartości tolerancji również nie wpłynęły na podział punktów względem odcinka ab.

5 Zbiór punktów b)

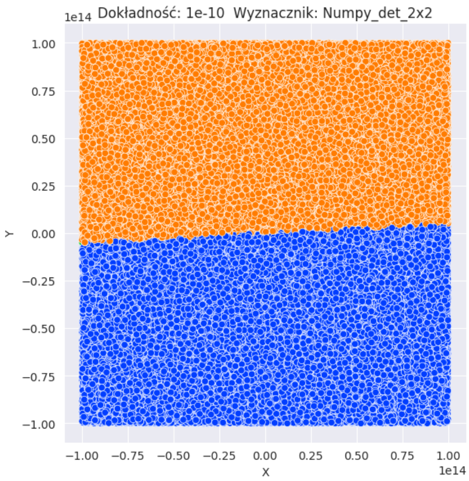
5.1 Tolerancja $e = 10^{-10}$



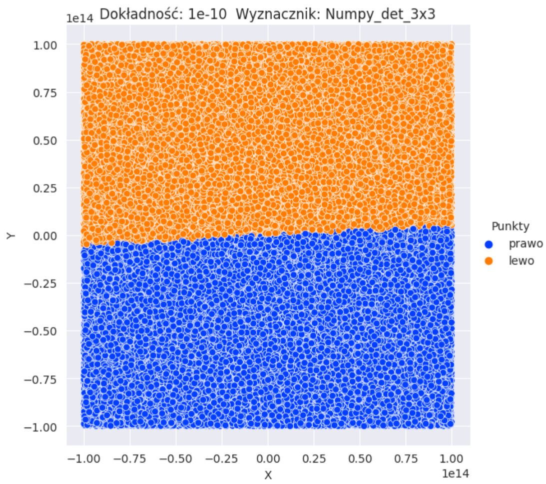
(a)



(b)



(c)



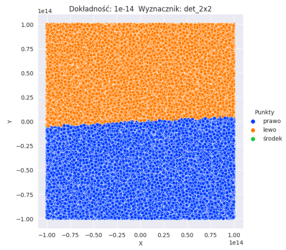
(d)

Rysunek 10

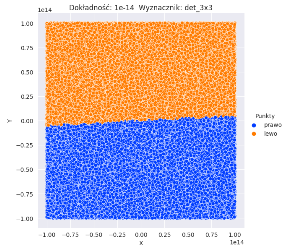
	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
Punkty				
lewo	49808	49810	49807	49810
prawo	50188	50190	50187	50190
środek	4	0	6	0

Rysunek 11

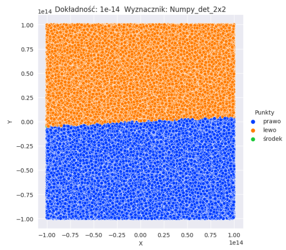
5.2 Tolerancja $e = 10^{-14}$



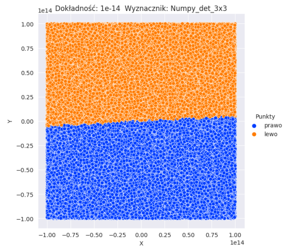
(a)



(b)



(c)



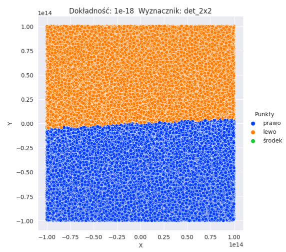
(d)

Rysunek 12

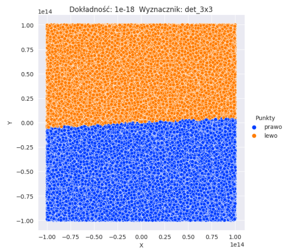
Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	49808	49810	49807	49810
prawo	50188	50190	50187	50190
środek	4	0	6	0

Rysunek 13

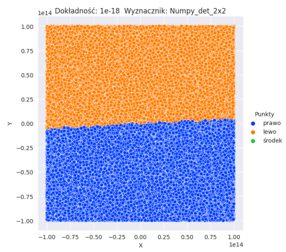
5.3 Tolerancja $e = 10^{-18}$



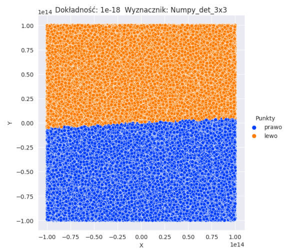
(a)



(b)



(c)



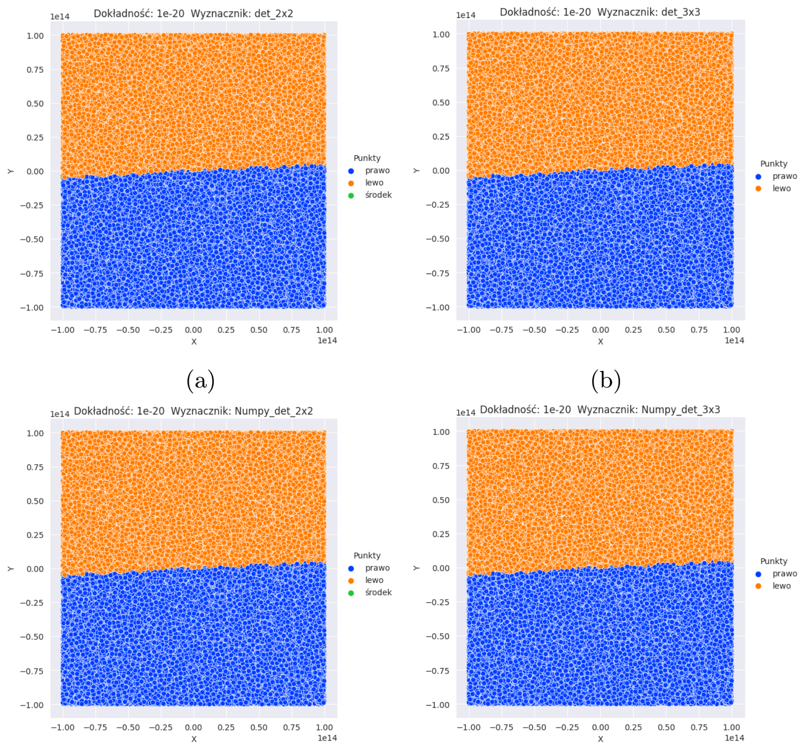
(d)

Rysunek 14

Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	49808	49810	49807	49810
prawo	50188	50190	50187	50190
środek	4	0	6	0

Rysunek 15

5.4 Tolerancja $e = 10^{-20}$



(a) (b) (c) (d)

Rysunek 16

Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	49808	49810	49807	49810
prawo	50188	50190	50187	50190
środek	4	0	6	0

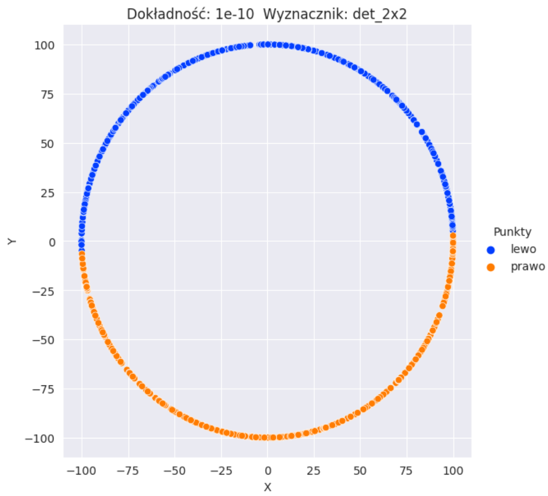
Rysunek 17

5.5 Wnioski dla zbioru b

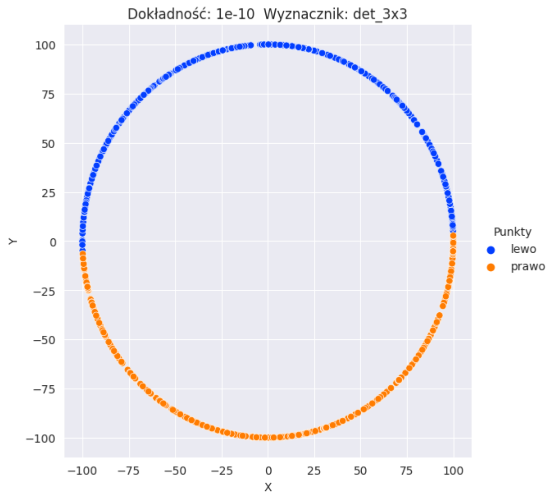
Dla drugiego zbioru punktów wartość tolerancji nie wpłynęła na wynik, zaś korzystanie z różnych metod obliczania wyznacznika pozwoliło nam dostrzec różnice w położeniu punktów. W tym przypadku użycie wyznacznika 2x2 wydaje się lepsze, ponieważ pozwala nam określić punkty leżące na prostej *ab* przy czym wyznacznik 3x3 nie daje nam takiej możliwości

6 Zbiór punktów c)

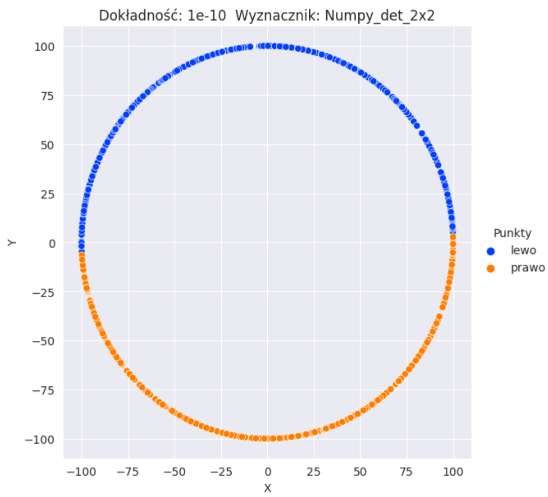
6.1 Tolerancja $e = 10^{-10}$



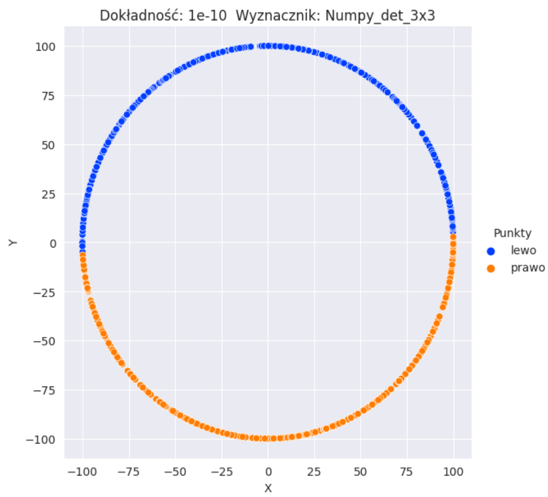
(a)



(b)



(c)



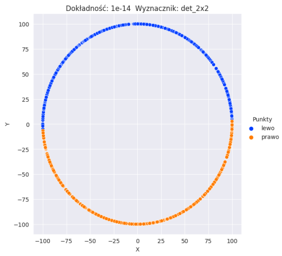
(d)

Rysunek 18

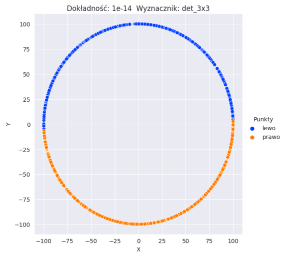
Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	502	502	502	502
prawo	498	498	498	498
środek	0	0	0	0

Rysunek 19

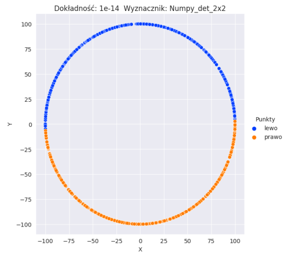
6.2 Tolerancja $e = 10^{-14}$



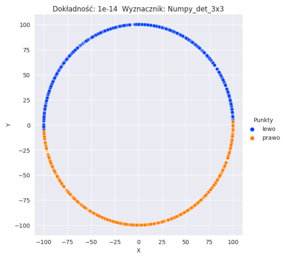
(a)



(b)



(c)



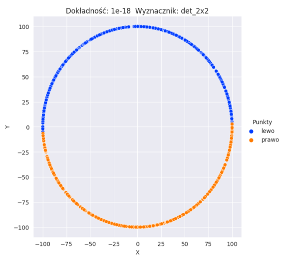
(d)

Rysunek 20

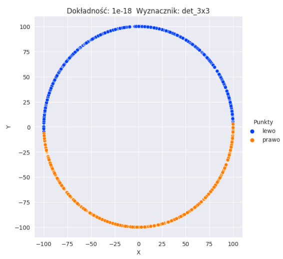
Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	502	502	502	502
prawo	498	498	498	498
środek	0	0	0	0

Rysunek 21

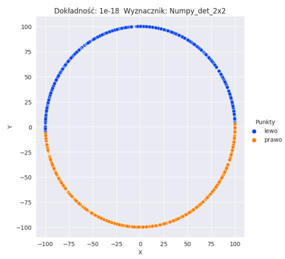
6.3 Tolerancja $e = 10^{-18}$



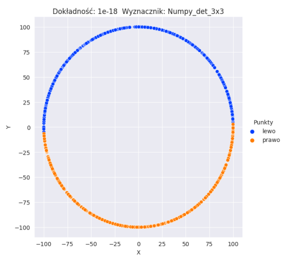
(a)



(b)



(c)



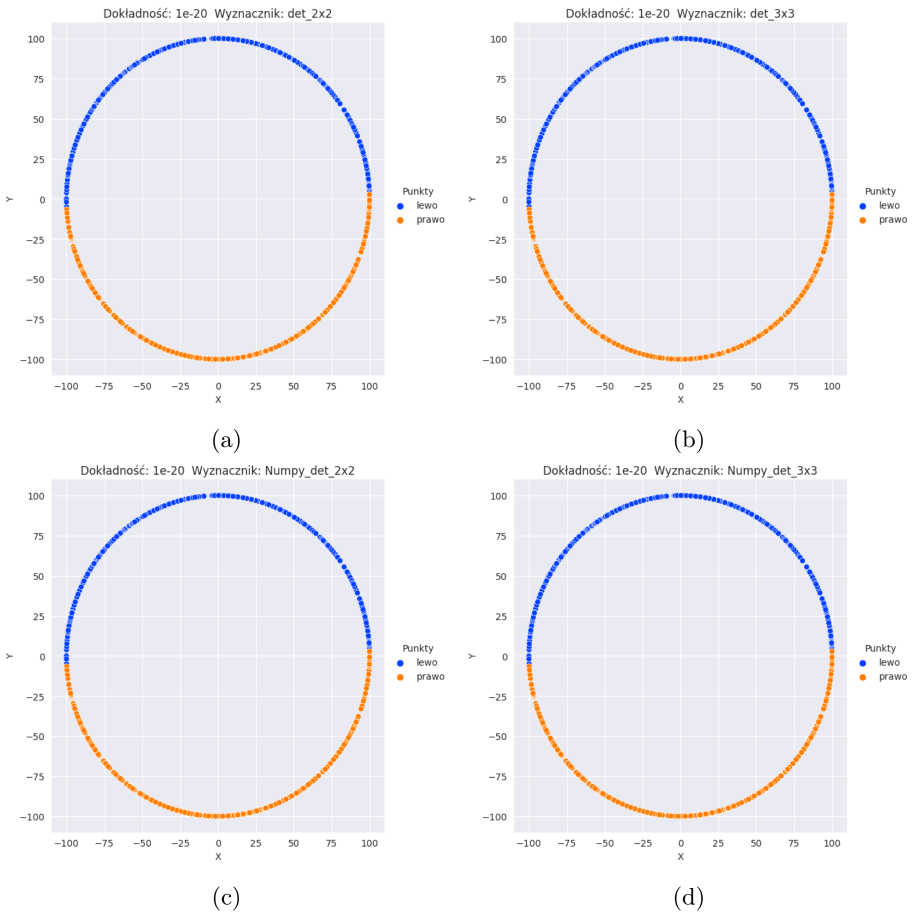
(d)

Rysunek 22

Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	502	502	502	502
prawo	498	498	498	498
środek	0	0	0	0

Rysunek 23

6.4 Tolerancja $e = 10^{-20}$



(a) (b) (c) (d)

Rysunek 24

Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	502	502	502	502
prawo	498	498	498	498
środek	0	0	0	0

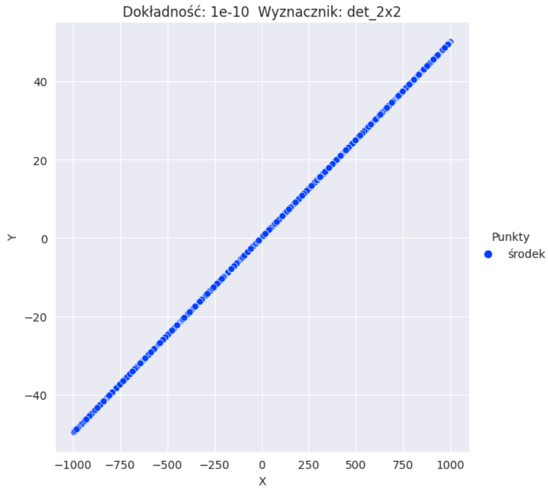
Rysunek 25

6.5 Wnioski dla zbioru c

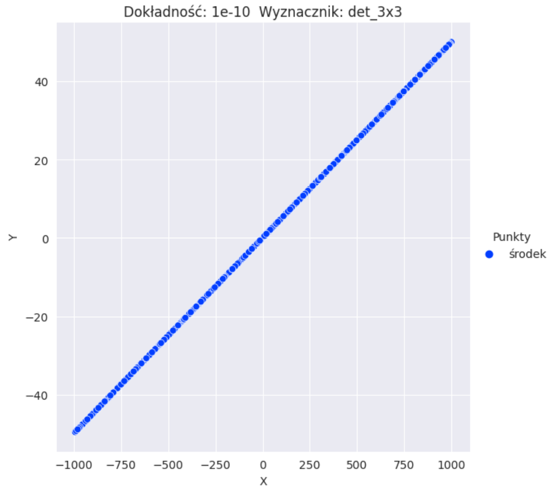
W zbiorze punktów C doszło do sytuacji podobnej jak dla zbioru A, czyli wyniki podziału punktów nie różnią się od siebie pomimo zastosowania różnej wartości tolerancji oraz innych metod obliczania wyznacznika.

7 Zbiór punktów d)

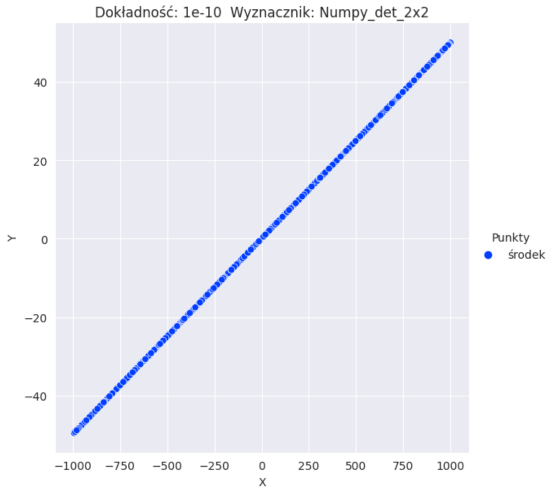
7.1 Tolerancja $e = 10^{-10}$



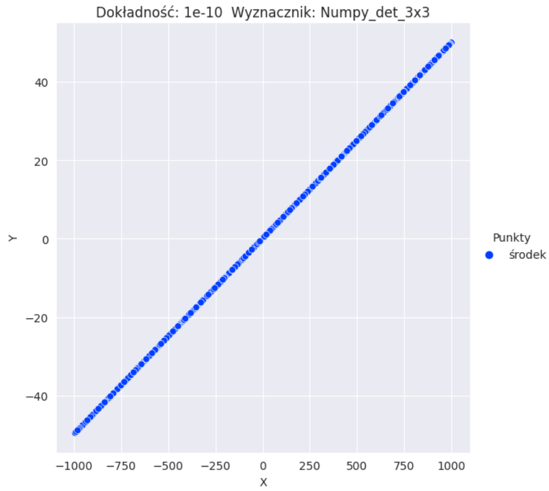
(a)



(b)



(c)



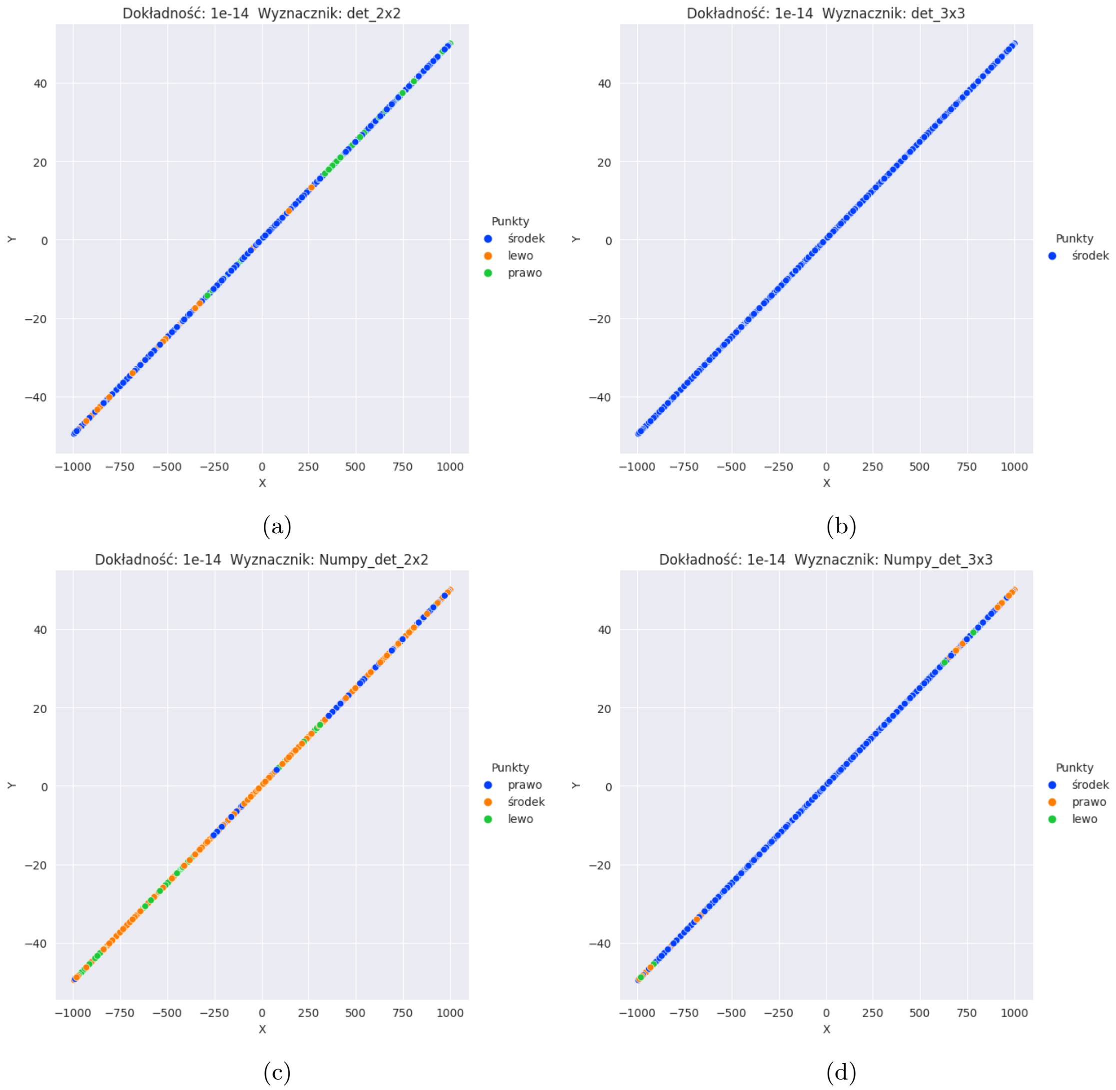
(d)

Rysunek 26

	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
Punkty				
lewo	0	0	0	0
prawo	0	0	0	0
środek	1000	1000	1000	1000

Rysunek 27

7.2 Tolerancja $e = 10^{-14}$



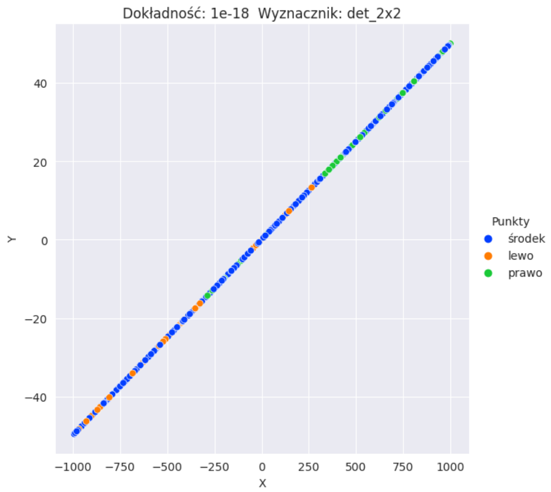
(a) (b) (c) (d)

Rysunek 28

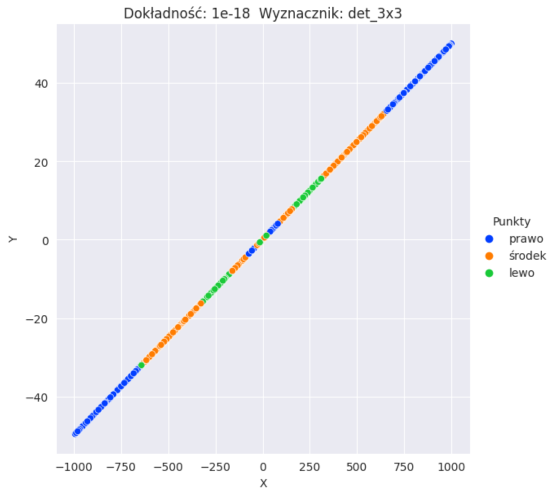
Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	127	0	155	25
prawo	131	0	180	91
środek	742	1000	665	884

Rysunek 29

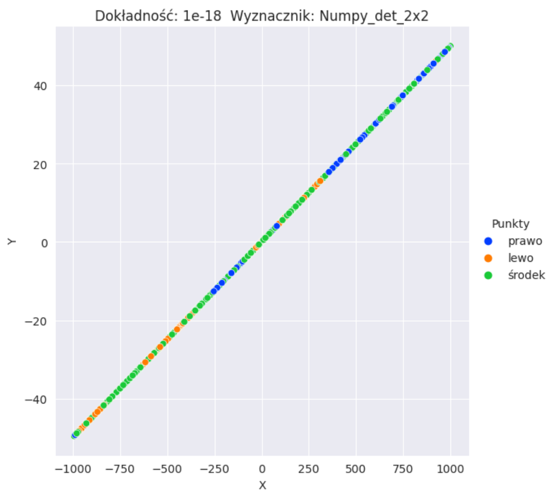
7.3 Tolerancja $e = 10^{-18}$



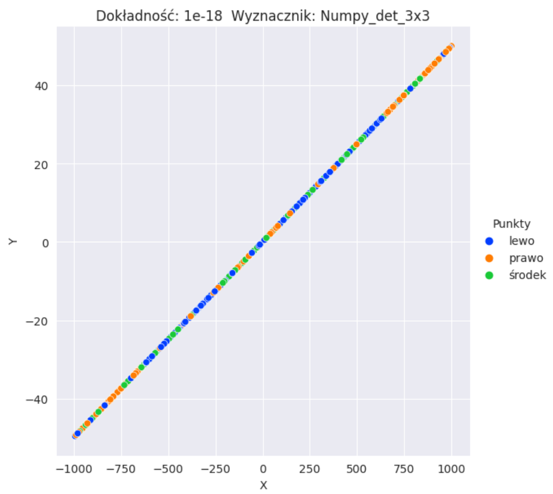
(a)



(b)



(c)



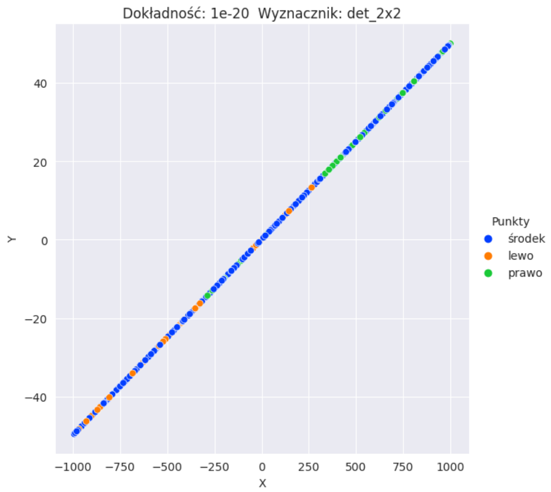
(d)

Rysunek 30

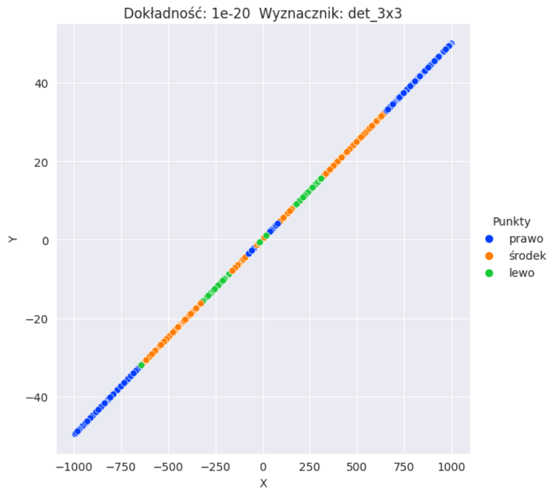
Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	137	183	166	410
prawo	138	367	186	309
środek	725	450	648	281

Rysunek 31

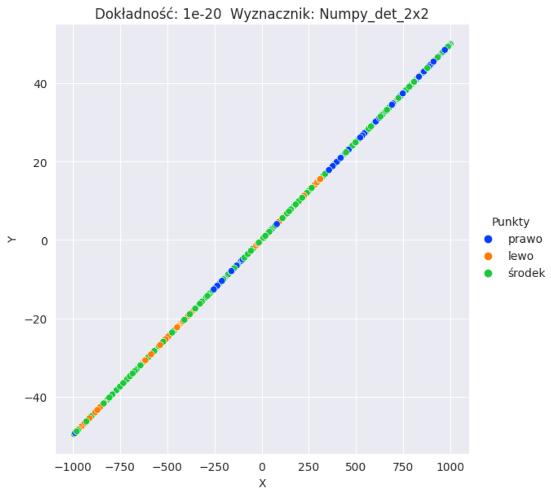
7.4 Tolerancja $e = 10^{-20}$



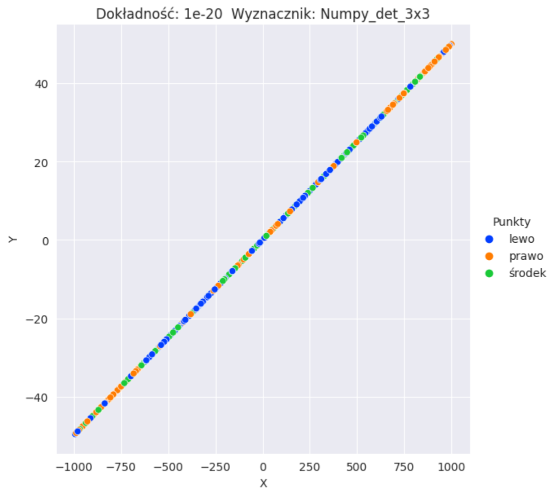
(a)



(b)



(c)



(d)

Rysunek 32

Punkty	det_2x2	det_3x3	Numpy_det_2x2	Numpy_det_3x3
lewo	137	183	166	410
prawo	138	367	186	309
środek	725	450	648	281

Rysunek 33

7.5 Wnioski dla zbioru d

Dla zbioru *d* sytuacja jest znacznie ciekawsza, ponieważ dla tolerancji wynoszącej 10^{-10} wszystkie punkty leżą na odcinku *ab* bez względu na zastosowany sposób liczenia wyznacznika.

Dla *Epsilona* wynoszącego 10^{-14} det_2x2 ponownie pozwala nam określić dokładniejsze położenie punktów zarówno w wersji implementowanej ręcznie jak i użytej z biblioteki. Natomiast dla wyznacznika 3x3 wyniki są znacznie mniej sprecyzowane, jeszcze gorszy efekt potrafimy uzyskać przy użyciu metody obliczania zaimplementowanej w bibliotece Numpy.

Przy *Epsilonie* równym 10^{-20} możemy znacznie zauważyć przewagę w dokładności ręcznie implementowanej funkcji obliczania wyznacznika dla macierzy 2x2, sposób ten daje najdokładniejsze wyniki, ponieważ dla 1000 losowo wybranych punktów z prostej ab aż 725 zostało poprawnie zakwalifikowanych, zaś dla funkcji obliczania wyznacznika dostarczonej przez bibliotekę Numpy jedyne 281 punktów zostało poprawnie określonych.

8 Wnioski

Ćwiczenie miało na celu porównanie wyników dla różnego rodzaju tolerancji jak i precyzji obliczeń. Z wyżej przedstawionych wyników klasyfikacja punktów dla zbiorów a) (*Rysunek* 1*a*) i c) (*Rysunek* 1*c*) nie dała wyników umożliwiających porównanie metod. Z uwagi iż w tych przypadkach dla wszystkich badanych tolerancji obydwa sposoby klasyfikowania położenia punktów względem prostej wydawały się równie skuteczne.

Inna sytuacja miała miejsce dla zbioru b (*Rysunek* 1*b*) przy którym zastosowanie funkcji z biblioteki Numpy obliczającej wyznacznik macierzy 2x2 pozwoliła nam określić najwięcej punktów należących do prostej bez względu na zastosowaną tolerancję.

Największą przewagę ręcznie implementowanej metody obliczania wyznacznika 2x2 jesteśmy w stanie zauważyć w zbiorze d (Rysunek 1d), ponieważ to właśnie ta metoda dała nam najwięcej poprawnie rozpoznanych punktów.

Patrząc na wykresy *Rysunek* 30*b* oraz *Rysunek* 30*c* jesteśmy w stanie zaobserwować iż dla metody obliczania wyznacznika 2x2 znaczna ilość punktów jest poprawianie rozpoznawana na całej długości prostej, zaś dla det_3x3 głównie dla punktów których współrzędne osiągają wartości bliższe punktom a i b.