Kacper Czernik 242371
Mateusz Grzeszczak 242398

Rok akademicki 2022/23
wtorek, 10:30

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 4 – wzór Simpsona oraz całki Laguerre'a

Opis rozwiązania

Wzór Simpsona:

Złożona kwadratura Newtona-Cotesa oparta na trzech węzłach, znana również jako wzór Simpsona, jest jedną z metod numerycznego obliczania wartości całki z funkcji. Ta metoda polega na przybliżeniu krzywej funkcji na odcinku całkowania za pomocą paraboli i obliczeniu pola pod tą parabolą.

Oto kroki które należy podjąć w celu obliczenia wartości całki przy pomocy adaptacyjnej kwadratury Newtona-Cotesa

1. Wybierz początkową wartość a > 0, zakładaną dokładność ε oraz inicjalizuj sumę całkową na 0: S = 0.
2. Oblicz całkę na przedziale [0, a) za pomocą kwadratury Newtona-Cotesa opartej na trzech węzłach (wzoru Simpsona), wykorzystując wcześniej opisane wzory. Otrzymujemy wartość I1.
3. Zainicjalizuj zmienną delta (δ) na pewną wartość większą od zera, na przykład $\delta = 1$.
4. W pętli wykonuj następujące kroki:

a. Oblicz całkę na przedziale [a, a + δ) za pomocą kwadratury Newtona-Cotesa. Otrzymujemy wartość I2.
b. Jeśli I2 > ε, dodaj I1 do sumy całkowej: S = S + I1.
c. Zaktualizuj wartość a: a = a + δ.
d. Zmniejsz wartość δ, na przykład $\delta = \delta/2$.
e. Przejdź do kroku 4a.

5. Jeśli I2 <= ε, oznacza to, że wartość całki na przedziale [a, a + δ) jest dostatecznie mała. W takim przypadku dodaj I2 do sumy całkowej: S = S + I2.
6. Kontynuuj pętlę, wykonując kolejne kroki 4-5, aż wartość całki na danym przedziale będzie mniejsza niż zakładana dokładność ε.
7. Ostatecznym wynikiem całki na przedziale [0, +∞) z wagą e^(-x) jest wartość sumy całkowej S

Całki Laguerre'a:

Całkowanie na przedziale [0, +∞) z wagą e^(-x) jest związane z wielomianami Laguerre'a. Całki tego rodzaju są znane jako całki Laguerre'a i mają wiele zastosowań w matematyce i fizyce, szczególnie w teorii kwantowej.

Całka postaci ∫[0, +∞) e^(-x) f(x) dx, gdzie f(x) jest dowolną funkcją, może być obliczana za pomocą wzoru całkowego Laguerre'a. Wzór ten jest postaci:

$\int[0, +\infty)\ e^{(-x)} f(x)\ dx = \Sigma[k=0, +\infty)\ w_k f(x_k)$,

gdzie w_k to wagi Laguerre'a, a x_k to zera wielomianów Laguerre'a, w naszym przypadku wartości te pobieramy z predefiniowanych tablic.

Wyniki

Poniższa tabela przedstawia wyniki dla 2 z 4 funkcji zaimplementowanych w programie, wykorzystane przybliżenie wynosiło 0.001

<table>
<tr><th>Liczba węzłów</th><th>Wynik Gauss-Laugerre</th><th>Wynik Newton-Cotes</th><th>Różnica w wynikach</th></tr>
<tr><td colspan="4">x^4-x^3-x^2-x+1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1,0</td><td rowspan="5">15,99967</td><td>16,99967</td></tr>
<tr><td>2</td><td>11,99997</td><td>3,99970</td></tr>
<tr><td>3</td><td>16,00010</td><td>0,00042</td></tr>
<tr><td>4</td><td>15,99999</td><td>0,00032</td></tr>
<tr><td>5</td><td>16,00004</td><td>0,00036</td></tr>
<tr><td colspan="4">x^3-2*x+|x-5|</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3,0</td><td rowspan="5">8,01298</td><td>5,01298</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8,0</td><td>0,01298</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8,02682</td><td>0,01384</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8,00474</td><td>0,00824</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8,01543</td><td>0,00246</td></tr>
</table>

Wnioski

- Metoda Simpsona jest bardziej specjalizowana i zoptymalizowana dla funkcji, które można aproksymować wielomianami Laguerre'a. Jeśli funkcja jest tego typu, metoda ta może być bardziej efektywna i dokładna.

- Metoda Całki Laguerre'a: jest bardziej ogólna i elastyczna, ponieważ może być stosowana do różnych funkcji. Jednak wymaga dodatkowego obliczania granicy i iteracji, co może wprowadzać dodatkową złożoność obliczeniową.