Kacper Czernik 242371
Mateusz Grzeszczak 242398

Rok akademicki 2022/23
Wtorek 10:30)

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 1 – Wyznaczanie miejsca zerowego równań nieliniowych

Opis rozwiązania

Nasza grupa dostała za zadanie wykonać dwa algorytmy wyznaczania miejsca zerowego dla równań nieliniowych. Pierwszym z nich była metoda bisekcji (równego podziału) kolejną była metoda siecznych. Dodatkowo kolejnym z celów zadania było zaimplementowanie warunków stopu dla wspomnianych metod, pierwszym z nich było zakończenie wykonywania aplikacji po osiągnięciu z góry podanej przez użytkownika ilości iteracji, kolejnym było wykonywanie odpowiedniej funkcji do osiągnięcia zadanej dokładności.

Poniżej opisane zostały wykorzystane przez nas metody:

Metoda bisekcji:

Metoda bisekcji polega na iteracyjnym dzieleniu przedziału zawierającego pierwiastek na pół i wyznaczaniu nowego przedziału, w którym pierwiastek musi się znajdować. Proces ten jest powtarzany do momentu uzyskania dostatecznie małego przedziału, w którym pierwiastek jest szukany.

Warunki które funkcja musi spełniać aby możliwe było zastosowanie metody bisekcji:

1. Funkcja musi być ciągła w przedziale, w którym szukany jest pierwiastek równania.
2.W przedziale tym funkcja musi zmieniać znak - w jednym końcu przedziału musi być wartość dodatnia, a w drugim - wartość ujemna. Innymi słowy, przedział musi zawierać pierwiastek równania.

Schemat przebiegu tej metody można przedstawić w następujący sposób:

1. Wybierz przedział początkowy [a, b], w którym szukamy pierwiastka.
2. Oblicz wartość funkcji w punkcie środkowym przedziału, czyli x = (a + b) / 2.
3. Jeśli wartość funkcji f(x) w punkcie x jest bliska zeru lub spełnia określony warunek dokładności, to x jest szukanym pierwiastkiem. W przeciwnym przypadku kontynuuj krok 4.
4. Porównaj wartość funkcji w punkcie x z zerem i określ, czy pierwiastek znajduje się w przedziale [a, x] czy [x, b]. Następnie wybierz ten przedział, w którym funkcja zmienia znak i kontynuuj od kroku 2.
5. Powtarzaj kroki 2-4 do uzyskania dostatecznie małego przedziału zawierającego szukany pierwiastek.

Metoda siecznych:

Metoda polega na iteracyjnym wyznaczaniu punktów przecięcia siecznych przechodzących przez dwa ostatnie punkty, w których wartość funkcji ma przeciwny znak. W każdej iteracji obliczane jest nowe przybliżenie pierwiastka równania, a następnie dwa ostatnie punkty są przesuwane o jeden krok w kierunku nowego punktu.

Warunki które funkcja musi spełniać aby możliwe było zastosowanie metody siecznych są tożsame z tymi z metody bisekcji.

Schemat przebiegu tej metody można przedstawić w następujący sposób:

1. Wybieramy dwa punkty startowe a i b takie, że f(a) i f(b) mają przeciwne znaki.
2. Obliczamy nowy punkt c, który przecina oś OX prosta przechodząca przez punkty (a, f(a)) i (b, f(b)), czyli:
c = a - (f(a) * (b - a)) / (f(b) - f(a))
3. Jeśli |f(c)| jest mniejsze niż zadaną dokładność, kończymy iteracje i zwracamy c jako przybliżenie pierwiastka.
4. W przeciwnym przypadku, porównujemy znak f(c) z f(a) i f(b), aby określić w którym z przedziałów [a, c] lub [c, b] znajduje się pierwiastek równania. Następnie uaktualniamy a i b, tak aby zachodził warunek f(a) * f(b) < 0 i wykonujemy kolejną iterację.

Wyniki

Poniższa tabela prezentuje podsumowanie wyników działania aplikacji dla poszczególnych warunków:

Tabela 1.

predefiniowana funkcja:	kryterium stopu	badany przedział	ε	maksymalna liczba iteracji	liczba iteracji		uzyskany wynik		wynik rzeczywisty	różnica w wynikach	
					metoda bisekcja	metoda siecznych	metoda bisekcja	metoda siecznych		metoda bisekcja	metoda siecznych
2x^3-5x^2-3x+6	liczba iteracji	2;22	1e-6	30	23	12	2.637458562850952	2.6374586084764964	2.6374586088177	4.597E-08	-3.412E-10
	dokładność	2;22	0,1	∞	9	9	2.64453125	2.631044223701357		-7.073E-03	6.414E-03
-3sin(x)+6cos(x)	liczba iteracji	-4;0	1e-6	30	21	3	-2.0344438552856445	-2.034443901994189	-2.034444011326	-1.560E-07	-1.093E-07
	dokładność	-4;0	0,1	∞	6	2	-2.03125	-2.0344685712903674		-3.194E-03	2.456E-05
5^x-2^x-2	liczba iteracji	-1;1	1e-6	30	8	6	0.824763059616088	0.824763248959999	0.8247630705553	1.094E-08	-1.784E-07
	dokładność	-1;1	0,1	∞	6	4	0.8125	0.822311097251618		1.226E-02	2.452E-03
-2cos(x)-x^3+x^2-1	liczba iteracji	-10;10	1e-6	30	25	15	-1.0119637846946716	-1.0119638092449985	- 1.0119639258275	-1.411E-07	-1.166E-07
	dokładność	-10;10	0,1	∞	7	13	-1.015625	-1.0108409180414624		3.661E-03	-1.123E-03

Wnioski

Już na pierwszy rzut oka możemy zauważyć że metoda siecznych cechuje się znacząco większą wydajnością od metody bisekcji. Przez wydajność rozumiemy tutaj ilość iteracji potrzebnych do znalezienia miejsca zerowego. Różnica ta zależy w dużej mierze od funkcji oraz wybranego przedziału.

Metoda siecznych narażona jest na błąd związany z dzieleniem przez 0 (taki przypadek ma miejsce dla funkcji 5^x-2^x-2 dla przedziału -10,10). Metoda bisekcji nie ma podobnego problemu gdyż jej algorytm nie wymaga dzielenia.

Analizując wyniki z Tabeli 1. Możemy dojść do wniosku że metoda siecznych cechuje się nieznacznie większą dokładnością od metody siecznych.

Może mieć miejsce sytuacja w której metoda bisekcji oraz metoda siecznych wskazują inne miejsca zerowe (taka sytuacja ma miejsce dla funkcji 2x^3-5x^2-3x+6 na przedziale -10,10). Taka sytuacja może mieć miejsce w każdej funkcji mającej więcej niż 1 miejsce zerowe i zależy od wybranego przedziału.

Długość wykonywania programu zależy w dużej mierze od przyjętej dokładności oraz zadanego przedziału. Im większa dokładność tym większej ilości iteracji będzie potrzebował program na znalezienie miejsca spełniającego warunek, to samo tyczy się wybranego przedziału.