Kacper Czernik 242371
Mateusz Grzeszczak 242398

Rok akademicki 2022/23
wtorek, 10:30

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM
Zadanie 5 – aproksymacja przy pomocy wielomianów Hermite'a

Opis rozwiązania

Aproksymacja to proces znalezienia funkcji, która najlepiej pasuje do zestawu danych pomiarowych. Jedną z metod aproksymacji jest wykorzystanie wielomianów Hermite'a. Wielomiany Hermite'a są szczególnym rodzajem wielomianów, które mogą być używane do dokładnej reprezentacji funkcji oraz ich pochodnych.

Wzór ogólny wielomianu Hermite'a: Wielomian Hermite'a stopnia n można zapisać jako kombinację liniową wielomianów bazowych $H_k(x)$, gdzie $k = 0, 1, 2, ..., n$. Oznacza to, że wielomian Hermite'a $H_n(x)$ może być zapisany jako:

$$H_n(x) = c_0 * H_0(x) + c_1 * H_1(x) + c_2 * H_2(x) + ... + c_n * H_n(x)$$

gdzie $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ są współczynnikami aproksymacji.

Wzór jawny dla wielomianu Hermite'a to:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{(x^2)} * d^n(e^{(-x^2)})/dx^n$$

gdzie $d^n(e^{(-x^2)})/dx^n$ oznacza n-tą pochodną funkcji $e^{(-x^2)}$.

Aproksymacja przy pomocy wielomianów Hermite'a polega na znalezieniu wielomianu, który najlepiej pasuje do danych punktów wokół funkcji, wraz z ich wartościami i pochodnymi. Proces aproksymacji można podzielić na kilka kroków:

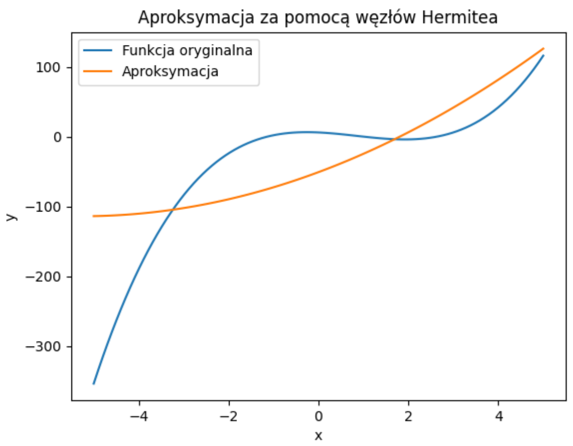
- Wybór węzłów: Węzły to punkty wokół funkcji, w których znamy wartości funkcji oraz jej pochodne. Ważne jest, aby węzły były dobrze rozłożone wokół funkcji, aby zapewnić dokładność aproksymacji.
- Zdefiniowanie wielomianów Hermite'a: W oparciu o wybrane węzły, tworzymy wielomiany Hermite'a, które będą bazą aproksymacji.
- Obliczenie współczynników: Następnie, korzystając z danych węzłowych, obliczamy współczynniki wielomianów Hermite'a, które minimalizują różnicę między wartościami aproksymowanego wielomianu a wartościami rzeczywistej funkcji w tych węzłach.
- Wartości aproksymowane: Na podstawie obliczonych współczynników, możemy obliczyć wartości funkcji aproksymowanej w dowolnym punkcie w określonym przedziale.

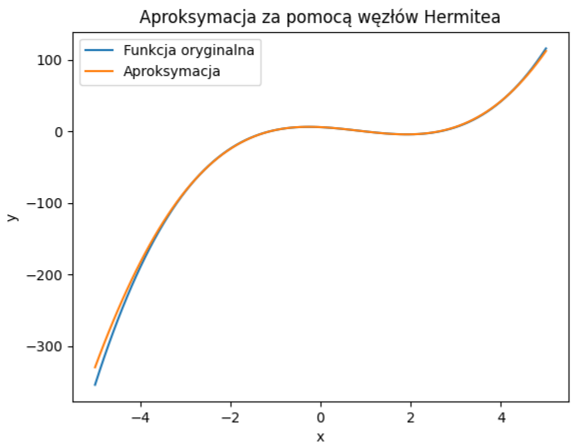
Po obliczeniu współczynników aproksymacji, możemy obliczyć wartość aproksymowanej funkcji w dowolnym punkcie x za pomocą wzoru:

$$f_{aprox}(x) = c_0 * H_0(x) + c_1 * H_1(x) + c_2 * H_2(x) + ... + c_n * H_n(x)$$

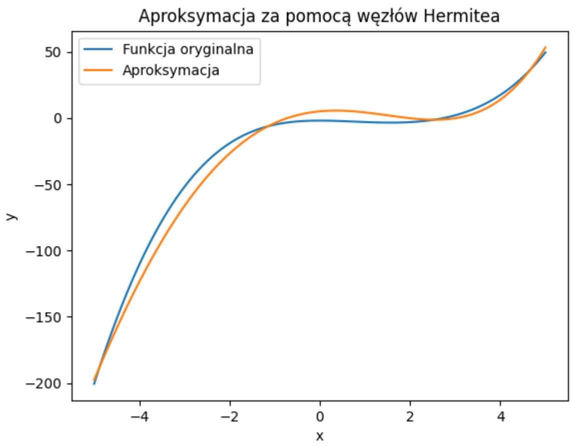
Wyniki

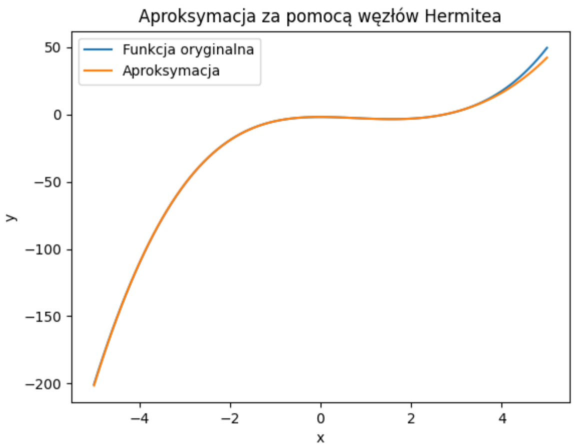
Wykresy funkcji 2x^3-5x^2-3x+6 dla wielomianów hermitea stopni 2 (lewo) oraz 5 (prawo).





Wykresy funkcji -2cos(x)-3x^2+x^3dla wielomianów hermitea stopni 4 (lewo) oraz 8 (prawo).





Wnioski

Wnioski dotyczące aproksymacji przy użyciu wielomianów Hermite'a:

1. Zalety aproksymacji wielomianami Hermite'a:
   - Precyzyjne odwzorowanie funkcji oraz jej pochodnych.
   - Uwzględnianie wartości funkcji i pochodnych węzłów aproksymacyjnych.
   - Właściwości numeryczne związane z ortogonalnością wielomianów Hermite'a.
2. Zastosowanie aproksymacji wielomianami Hermite'a:
   - Analiza danych, interpolacja funkcji, rozwiązywanie równań różniczkowych, symulacje numeryczne itp.
3. Wybór węzłów aproksymacyjnych:
   - Równomierne rozmieszczenie węzłów wokół funkcji.
4. Stopień wielomianu Hermite'a:
   - Odpowiedni dobór stopnia zależny od złożoności aproksymowanej funkcji.
5. Ograniczenia aproksymacji wielomianami Hermite'a:
   - Skomplikowane obliczenia dla większej liczby węzłów i wyższych stopni wielomianu.
   - Może nie uwzględniać nagłych zmian, ekstremów lokalnych lub skomplikowanego zachowania funkcji.