Explisit isometric embeddings of collapsing black hole

A.D. Kapustin, S.A. Paston
Saint-Petersburg state university, Saint-Petersburg, Russia

Аннотация

В этой работе ищутся явные вложения наименьшей размерности для метрики коллапсирующего сферически симметричного облака пылевидной материи, образующего Шварцшильдовскую черную дыру. В работе рассматриваются два подхода, в одном из которых находится глобальное семимерное вложение с изломом, а в другом локальное семимерное, также содержащее излом. Однако для частного случая во втором подходе удается найти гладкое шестимерное вложение, покрывающее все области многообразия.

1 Введение

Как известно, любое риманово многообразие размерности d может быть изометрически вложено в плоское объемлющее пространство размерности $N \geqslant \frac{d(d+1)}{2}$ как минимум локально [1, 2, 3]. В таком случае можно описывать многообразие набором функций вложения $y^a(x)$, а метрику считать индуцированной

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu y^a \partial_\nu y^b \eta_{ab}. \tag{1}$$

Такой подход может оказаться наглядным и полезным для изучения структуры многообразия, однако для этого требуется отыскание явного вида функций вложения. Изучение структуры многообразия очень актуально в отношении черных дыр, так как соответствующие им многообразия часто имеют нетривиальную структуру. Кроме того, отыскание явных вложений геометрии черных дыр является важной задачей с точки зрения формулировки гравитации Редже-Тейтельбойма [4].

Сложность заключается в том, что для четырехмерного пространства-времени в случае общего положения задача отыскания явного вида функций вложения это система 10 уравнений в частных производных с 4 независимыми переменными. Задача облегчается, если у многообразия присутствуют дополнительные симметрии. Если этих симметрий достаточно, то существует конструктивный метод упрощения задачи вплоть до решения системы ОДУ. В частности, таким образом были найдены и проклассифицированы вложения наименьшей размерности для Шварцшильдовских черных дыр [5].

Физически интересным оказывается случай, в котором глобальная симметрия многообразия оказывается меньшей, чем симметрия Шварцшильдовой черной дыры. Речь идет о коллапсе, при котором облако материи сжимается, образуя черную дыру динамически. В этой задаче происходит образование горизонта, что было бы интересно пронаблюдать на языке вложеной поверхности. Предлагается рассмотреть наиболее простой случай коллапса, в котором считать материю пылевидной, а ее распределение сферически симметричным.

2 Выбор координат для описания коллапса

Для описания движения пылевидной материи кажется разумным использовать систему синхронных сопутствующих координат, а, в силу сферической симметрии, в качестве двух пространственных следует выбрать углы θ и φ. Оставшиеся координаты обозначим τ и χ. Метрика решения для произвольного распределения материи задается линейным элементом вида

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(r'(\tau,\chi))^2}{1+f(\chi)} d\chi^2 - r^2(\tau,\chi) d\Omega, \tag{2}$$

где функция $r(\tau, \chi)$ определяется одним из трех способов

$$r(\tau, \chi) = \begin{cases} \frac{F(\chi)}{2f(\chi)} H\left(\frac{2(f(\chi))^{3/2}}{F(\chi)}(\tau_0(\chi) - \tau)\right), & f(\chi) > 0 \\ \left(\frac{9F(\chi)}{4}\right)^{1/3} [\tau_0(\chi) - \tau]^{2/3}, & f(\chi) = 0 \\ -\frac{F(\chi)}{2f(\chi)} E\left(\frac{2(-f(\chi))^{3/2}}{F(\chi)}(\tau_0(\chi) - \tau)\right), & f(\chi) < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Функции $E(x)$ и $H(x)$ служат для обращения параметрических зависимостей

$$\begin{aligned} E &= 1 - \cos\eta, \qquad & H &= \operatorname{ch}\eta - 1, \\ x &= \eta - \sin\eta, \qquad & x &= \operatorname{sh}\eta - \eta, \end{aligned} \tag{4}$$

а функции $F(\chi)$, $f(\chi)$ и $\tau_0(\chi)$ задают распределение плотности материи и начальные скорости [6].

Если потребовать однородности распределения материи в начальный момент, то пространство внутри коллапсирующего шара будет описываться геометрией открытой, пространственно-плоской или закрытой модели Фридмана соответственно выбору первого, второго или третьего способа определения $r(\tau, \chi)$. Внешнее к шару пространство, согласно теореме Биркгофа, во всех случаях описывается геометрией Шварцшильда. Метрика будет иметь координатную особенность в виде скачка на границе шара, которую можно устранить переходом к координатам $(\tau, r, \theta, \varphi)$, что будет использовано в одном из подходов.

3 Случай с пространственно-плоской моделью Фридмана

Произведем описанную выше замену координат. Тогда метрика общего вида (2) перейдет в

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{1 + f(\chi)}\right) d\tau^2 + 2\frac{\dot{r}}{1 + f(\chi)} dr d\tau - \frac{dr^2}{1 + f(\chi)} - r^2 d\Omega. \tag{5}$$

Если теперь выбрать $f(\chi) = 0$, то $r(\tau, \chi)$ выразится через элементарные функции и можно вычислить $\dot{r} = \frac{\partial r(\tau,\chi)}{\partial \tau}$. После всех преобразований метрика примет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{4F(\tau, r)}{9r}\right) d\tau^2 - 2\frac{3}{2}\sqrt{\frac{F(\tau, r)}{r}} dr d\tau - dr^2 - r^2 d\Omega. \tag{6}$$

Как уже упоминалось, выбор $f(\chi) = 0$ соответствует тому, что часть пространства, содержащая материю описывается пространственно-плоской моделью Фридмана.

Чтобы метрика (6) отвечала однородной плотности материи в шаре, следует выбрать

$$F(\tau, r) = \min\left(\frac{r^3}{(1 - \tau)^2}, F_0\right). \tag{7}$$

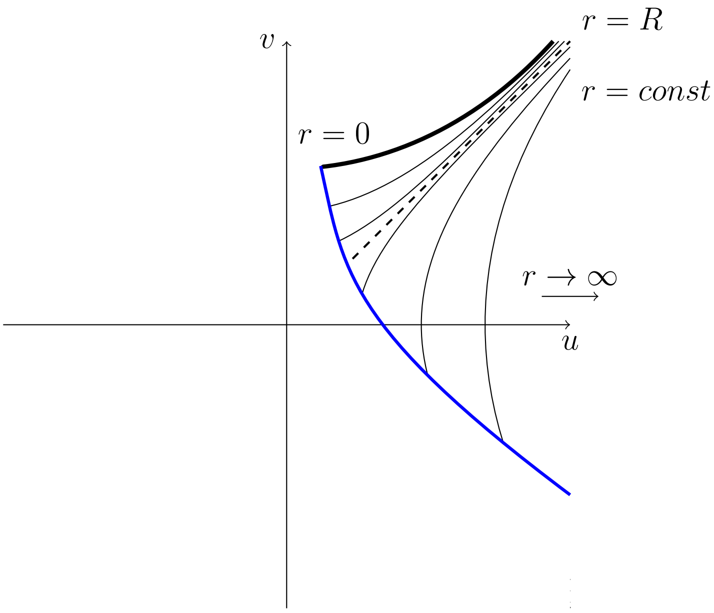

Рис. 1: The Kruskal diagram for matter collapsing from infinity.

Тогда видно, что метрика оказывается непрерывной, однако не всюду дифференцируемой функцией.

Можно представить область пространства, соответствующую константе F_0, на диаграмме Крускала 1. Она ограничена мировой линией частицы, лежащей на границе сферы. Для этого случая характерно то, что коллапс происходит с бесконечности, в отличие от второго подхода. Оставшаяся часть многообразия описывается метрикой Фридмана и может быть восстановлена с помощью построеного вложения.

3.1 Построение вложения для полученной метрики

Если ввести переменные $t = (1-\tau)^{2/3}$ и $p = \frac{r^3}{(1-\tau)^{4/3}}$, метрика примет вид

$$ds^2 = (\alpha t + f(p))\, dt^2 + h(p)t\, dpdt - (dr(t,p))^2 - r^2(t,p)d\Omega, \tag{8}$$

где

$$\alpha = \frac{9}{4}, \quad f(p) = 2F(p)^{1/2}p^{1/6} - F(p)p^{-1/3}, \quad h(p) = \frac{2F(p)^{1/2}}{3p^{5/6}}.$$

Если в качестве трех функций вложния выбрать блок $(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi)$, то останется вложить метрику

$$ds^2 = (\alpha t + f(p))\, dt^2 + h(p)t\, dpdt. \tag{9}$$

Видно, что ее компоненты являются полиномами по переменной t. Тогда можно искать решение уравнений вложения также в виде полиномов. Удобнее всего это сделать в светоподобных координатах объемлющего пространства. Решение представимо в виде

$$y^+ = t^3 - \frac{\alpha}{4}t^2 - \frac{f(p)}{2}t, \tag{10}$$

$$y^1 = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\int h(p)dp - \frac{1}{2\sqrt{6}}f(p), \tag{11}$$

$$y^- = t, \tag{12}$$

$$y^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\int h(p)dp - \frac{1}{2\sqrt{6}}f(p). \tag{13}$$

Чтобы получить полный набор функций вложения нужно дописать блок

$$y^4 = p^{1/3}t\cos\theta, \tag{14}$$

$$y^5 = p^{1/3}t\sin\theta\cos\varphi, \tag{15}$$

$$y^6 = p^{1/3}t\sin\theta\sin\varphi. \tag{16}$$

Итого, если вернуться к более естественным переменным, получится набор функций вложения

$$y^+ = (\tau')^2 - \frac{\alpha}{4}(\tau')^{4/3} - \frac{f\left(\frac{r^3}{(\tau')^2}\right)}{2}(\tau')^{2/3}, \tag{17}$$

$$y^1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\tau')^{4/3} + \frac{1}{\sqrt{6}}\int\limits_C^{\frac{r^3}{(\tau')^2}} h(p)dp - \frac{1}{2\sqrt{6}}f\left(\frac{r^3}{(\tau')^2}\right), \tag{18}$$

$$y^- = (\tau')^{2/3}, \tag{19}$$

$$y^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\int\limits_C^{\frac{r^3}{(\tau')^2}} h(p)dp - \frac{1}{2\sqrt{6}}f\left(\frac{r^3}{(\tau')^2}\right), \tag{20}$$

$$y^4 = r\cos\theta, \tag{21}$$

$$y^5 = r\sin\theta\cos\varphi, \tag{22}$$

$$y^6 = r\sin\theta\sin\varphi, \tag{23}$$

где τ' можно воспринимаь как собственное время частиц, оставшееся до падения на сингулярность.

Таким образом, вложение получается семимерным с сигнатурой $(+,+,-,-,-,-,-)$. Оно, однако, содержит излом, так как выражается через функцию $F(p)$, которая является лишь непрерывной.

4 Случай закрытой модели Фридмана

В рамах второго подхода мы будем работать в сопутствующей системе координат, несмотря на наличие координатной особенности метрики, и попробуем совершить сшивку уже известных вложений для метрики Фридмана и Шварцшильда.

В сопутствующих координатах уравнение движения метерии имеет вид $\chi = const$, поэтому можно сказать, что область $0 \leqslant \chi < \chi_0$ содержит материю, область $\chi > \chi_0$ соответствует пустому пространству, а $\chi = \chi_0$ — граница пылевидного шара.

Выберем $r(\tau, \chi)$ согласно третьему способу. Тогда при выборе функций F, f, τ_0, отвечающему постоянной плотности, получится функция

$$r(\tau, \chi) = \frac{R\sin\chi}{2\sin^3\chi_0} \cdot E\left(\pi - \frac{2\sin^3\chi_0}{R}\tau\right), \quad \text{при } 0 \leqslant \chi < \chi_0, \tag{24}$$

дающая метрику Фридмана

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\left(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega\right) \tag{25}$$

с $a(\tau) = \frac{R}{2\sin^3\chi_0}E\left(\pi - \frac{2\sin^3\chi_0}{R}\tau\right)$, и

$$r(\tau, \chi) = \frac{r_m(\chi)}{2} \cdot E\left(\pi - \frac{2R^{1/2}}{r_m^{3/2}(\chi)}\tau\right), \quad \text{при } \chi > \chi_0, \tag{26}$$

дающая метрику Шварцшильда. Параметр χ_0 определяет максимальный размер шара. Функция $r_m(\chi)$ содержит произвол, ограничивающийся лишь требованием непрерывности $r(\tau, \chi)$ и стремлением $r_m \to \infty$ при $\chi \to \infty$.

Область $\chi > \chi_0$ может также быть представлена на диаграмме Крускала 2. По ней видно, что в этом случае крайняя и все внутренние частицы материи вылетают из белой сингулярности, достигают максимального удаления и коллапсируют в черную сингулярность. Остальная часть многообразия описывается геометрией Фридмана, как и в предыдущем случае.

4.1 Построение вложения в общем случае

Согласно [7], минимальная размерность вложения для метрики Шварцшильда равна 6, поэтому известные пятимерные вложения для метрики Фридмана (можно найти в [8] или [9, 10]) следует модифицировать добавлением дополнительных функций вложения. Основная идея заключается в том, чтобы «не трогать» зависимость функций вложения от координаты χ, а добавить только функции, зависящие от τ.

Пятимерное вложение метрики Фридмана имеет вид

$$y^0 = f(\tau), \tag{27}$$
$$y^1 = a(\tau)\cos\chi, \tag{28}$$
$$y^2 = a(\tau)\sin\chi\cos\theta, \tag{29}$$
$$y^3 = a(\tau)\sin\chi\sin\theta\cos\varphi, \tag{30}$$
$$y^4 = a(\tau)\sin\chi\sin\theta\sin\varphi. \tag{31}$$

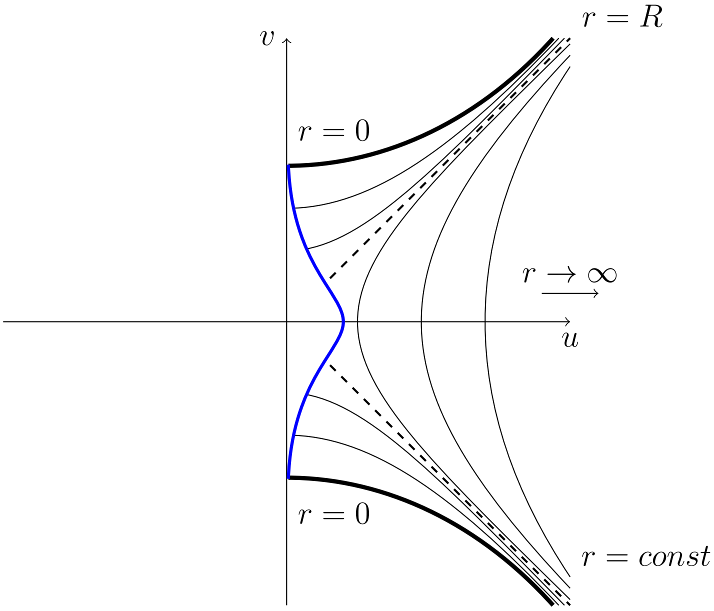

Рис. 2: The Kruskal diagram for the collapse of matter, which flew out of the white singularity.

Функция y^0 будет изменена, а оставшийся блок мы договорились оставить без изменений. Тогда при $\chi = \chi_0$ этот блок должен совпадать с какими-нибудь четыремя функциями вложения метрики Шварцшильда.

Выберем для сшивки какое-либо известное вложение метрики Шварцшильда, содержащее блок

$$r \cos\theta, \tag{32}$$

$$r \sin\theta \cos\varphi, \tag{33}$$

$$r \sin\theta \sin\varphi. \tag{34}$$

Он совпадет на границе с (29) — (31), но функция (28) в общем случае не совпадет ни с какой из известных функций вложения. Поэтому искуственно добавим еще одну функцию $y^6 = r \operatorname{ctg} \chi_0$ к вложению метрики Шварцшильда, расширив его до семимерного. Это было сделано для вложения Фронсдала и обнаружено, что оно перестает покрывать область с большими значениями r. При остальных значениях r оно существует и имеет вид

$$y^0 = y^0(t(\tau,\chi), r(\tau,\chi)), \tag{35}$$
$$y^1 = y^1(t(\tau,\chi), r(\tau,\chi)), \tag{36}$$
$$y^2 = y^2(t(\tau,\chi), r(\tau,\chi)), \tag{37}$$
$$y^3 = r(\tau,\chi)\cos\theta, \tag{38}$$
$$y^4 = r(\tau,\chi)\sin\theta\cos\varphi, \tag{39}$$
$$y^5 = r(\tau,\chi)\sin\theta\sin\varphi, \tag{40}$$
$$y^6 = r(\tau,\chi)\operatorname{ctg}\chi_0. \tag{41}$$

Возвращаясь к вложению метрики Фридмана, следует заменить функцию $f(\tau)$ на блок (35) — (37) функций известного вида, взятых при фиксированном значении $\chi = \chi_0$. Всилу того, что оставшийся набор функций вложения совпадает на границе, и компонента g_{00} метрики в обоих областях равна 1, получившийся набор

$$y^0 = y^0(t(\tau,\chi_0), r(\tau,\chi_0)), \tag{42}$$
$$y^1 = y^1(t(\tau,\chi_0), r(\tau,\chi_0)), \tag{43}$$
$$y^2 = y^2(t(\tau,\chi_0), r(\tau,\chi_0)), \tag{44}$$
$$y^3 = a(\tau)\sin\chi\cos\theta, \tag{45}$$
$$y^4 = a(\tau)\sin\chi\sin\theta\cos\varphi, \tag{46}$$
$$y^5 = a(\tau)\sin\chi\sin\theta\sin\varphi, \tag{47}$$
$$y^6 = a(\tau)\cos\chi. \tag{48}$$

является вложением метрики Фридмана в семимерное пространство.

Сшивка полученного вложения с вложением (35) — (41) задает непрерывную поверхность в пространстве с сигнатурой $(+,-,-,-,-,-,-)$, которая имеет излом на границе $\chi = \chi_0$ и покрывает лишь область конечных r.

4.2 Построение вложения в случае $\chi_0 = \frac{\pi}{2}$

В этом случае максимальный радиус шара $r_{max} = \frac{R}{\sin^2\chi_0}$ оказывается равным радиусу шварцшильда R. Во время движения материя не выходит из под горизонта, а значит и сшивка будет происходить при значениях $r \leqslant R$.

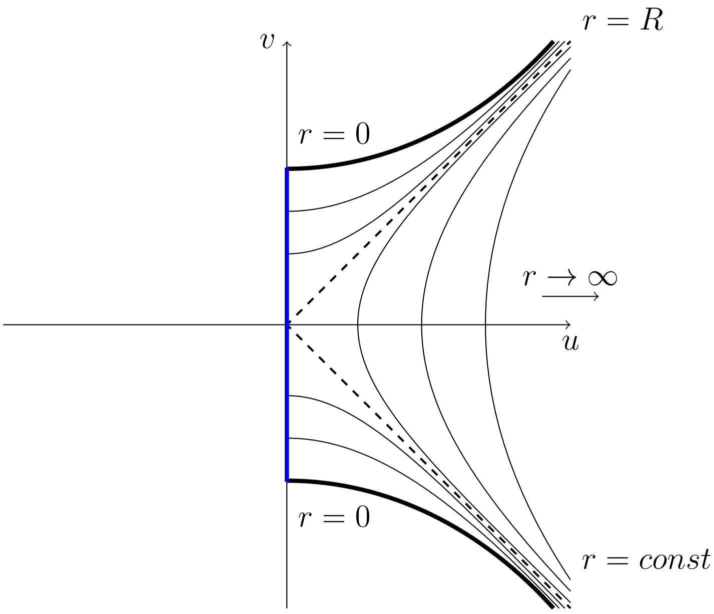

Рис. 3: The Kruskal diagram for the special case in which matter does not leave the limits of the Schwarzschild radius

Рассмотрим явный вид вложения Фронсдала (можно найти в [5, 8] или [11])

$$y^0 = 2R\sqrt{\frac{R}{r(\tau,\chi)} - 1} \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{t(\tau,\chi)}{2R}\right), \tag{49}$$

$$y^1 = 2R\sqrt{\frac{R}{r(\tau,\chi)} - 1} \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{t(\tau,\chi)}{2R}\right), \tag{50}$$

$$y^2 = R \cdot q\left(\frac{r(\tau,\chi)}{R}\right), \tag{51}$$

$$y^3 = r(\tau,\chi)\cos\theta, \tag{52}$$

$$y^4 = r(\tau,\chi)\sin\theta\cos\varphi, \tag{53}$$

$$y^5 = r(\tau,\chi)\sin\theta\sin\varphi. \tag{54}$$

Оказывается, что $t(\tau, \frac{\pi}{2}) \equiv 0$, поэтому y^1 на границе сшивки обнуляется, как и функция (28) во вложении метрики Фридмана. Получается, что в этом случае нет необходимости расширять вложение Фронсдала до семимерного, а во вложении метрики Фридмана достаточно заменить $f(\tau)$ на две функции (49), (51), взятые при $\chi = \frac{\pi}{2}$. Интересно, что в этом случае после сшивки вложение получается гладким и покрывает все значения $r > 0$. Вложение оказывается шестимерным с сигнатурой $(+,-,-,-,-,-)$.

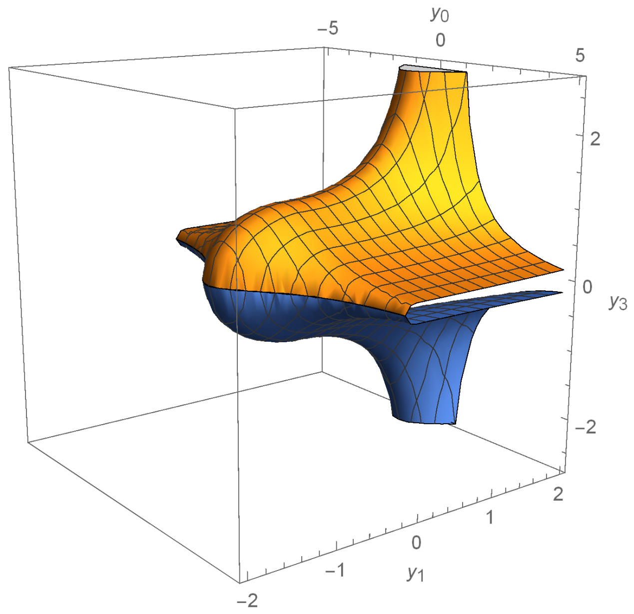

Рис. 4: The section $y^4 = y^5 = 0$ in the coordinates y^0, y^1 and y^3.

Список литературы

[1] M. Janet, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **5** (1926), 38–43.

[2] E. Kartan, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **6** (1927), 1–7.

[3] A. Friedman, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 625.

[4] T. Regge, C. Teitelboim, "General relativity à la string: a progress report", in *Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting, Trieste, Italy, 1975*, edited by R. Ruffini, 77–88, North Holland, Amsterdam, 1977, arXiv:1612.05256.

[5] S. A. Paston, A. A. Sheykin, *Class. Quant. Grav.*, **29** (2012), 095022, arXiv:1202.1204.

[6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, "Theoretical physics", vol. 2, "Nauka", 1988.

[7] E. Kasner, *Am. J. Math.*, **43**: 2 (1921), 126–129.

[8] S. A. Paston, A. A. Sheykin, *Theor. Math. Phys*, **175**: 3 (2013), 806–815, arXiv:1306.4826.

[9] J. Rosen, *Rev. Mod. Phys.*, **37**: 1 (1965), 204–214.

[10] H. P. Robertson, *Rev. Mod. Phys.*, **5** (1933), 62–90.

[11] C. Fronsdal, *Phys. Rev.*, **116**: 3 (1959), 778–781.