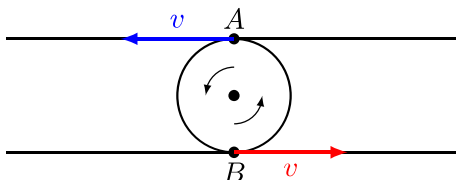


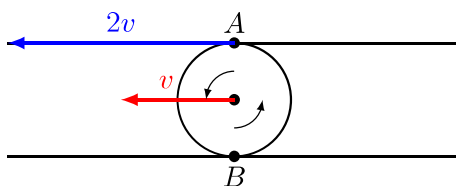
Возможные решения задач. 7 класс

Первый этап

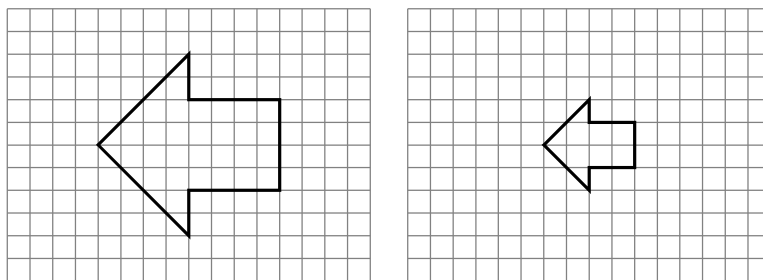
Задача 1. Шарик



Рассмотрим, как движется шарик, если верхнюю пластину сдвигают в одном направлении. Шарик в общем случае может совершать поступательное движение и вращение. Можно перейти в систему отсчета, связанную с центром этого шарика. В ней центр шарика покоится, а все его движение связано с вращением вокруг центра. Тогда можно заметить, что скорости точек, в которых шарик касается пластин равны по величине и направлены противоположно друг другу. А так как проскальзывания нет, пластины движутся так же, как точки касания в данный момент времени.



Тогда вернемся в систему отсчета, в которой нижняя пластина покоится. В ней нижняя точка шарика покоится, а центр шарика движется сонаправлено с верхней пластиной со скоростью v . Верхняя пластина движется в этот момент со скоростью $2v$. Значит можно сделать вывод о том, что скорость центра шарика всегда вдвое меньше скорости пластины, а значит вдвое меньше и все перемещения. Траектория шарика, в таком случае, будет иметь такую же форму, как траектория центра пластины, но длины всех линий будут уменьшены в два раза. Тогда с соблюдением масштаба она будет выглядеть так



- 2 балла — Утверждение о том, что смещение шарика вдвое меньше смещения пластины.
- 2 балла — Верный ответ в виде рисунка с соблюдением масштаба.

Задача 2. Улитки на склоне

Для начала поймем, что оптимальным (с точки зрения затраченного времени) будет движение, при котором улитки оказываются на вершине одновременно. В противном случае первая из добравшихся улиток могла потратить больше времени, неся свой домик, тем самым сократив время пути второй улитки, и общее время было бы меньше.

Во вторых, заметим, что быстрой улитке невыгодно двигаться вверх без домика, так как потом ей придется дольше ждать медленную, которой придется этот участок пути пройти, неся домик.

Значит оптимальный путь для медленной улитки состоит из кусков, на которых она несет домик вверх сама и кусков, на которых она движется вверх без домика. Быстрая улитка может нести домик вверх, либо двигаться вниз без домика, чтобы помочь медленной.

Обозначим скорость медленной улитки v_1 , а быстрой — v_2 .

Пусть медленная улитка прошла путь S с домиком и $L - S$ без домика, где L — весь путь по вертикали, который улиткам нужно преодолеть. Тогда время, которое для этого потребовалось

$$t_1 = \frac{S}{v_1} + \frac{L - S}{2v_1}. \quad (1)$$

Движение быстрой улитки заключается в том, что ей нужно пронести один домик, спуститься за вторым, когда медленная улитка его оставит и пронести его, как минимум до высоты первого. Тогда суммарное время ее движения будет иметь вид

$$t_2 = \frac{L}{v_2} + \frac{L - S}{2v_2} + \frac{L - S}{v_2}. \quad (2)$$

Приравнивая времена $t_1 = t_2$ получаем уравнение, из которого можно найти S . После подстановки скоростей и домножения на $2v_2$ оно принимает вид

$$8S + 4L - 4S = 2L + L - S + 2L - 2S. \quad (3)$$

Его решение $S = \frac{L}{7}$.

Можем подставить найденное значение в t_1 и получить общее время пути, которое по построению является минимальным

$$t = \frac{L}{7v_1} + \frac{3L}{7v_1} = \frac{4L}{7v_1} \approx 216 \text{ ч.} \quad (4)$$

Ответ: 216 ч.

- **1 балл** — Идея о равенстве времен,
- **1 балл** — Утверждение о том, из чего состоит движение быстрой улитки,
- **1 балл** — Выражение для нахождения S ,
- **1 балл** — Ответ.

Задача 3. Голубая бездна

Первым делом заметим, что давление в конце наблюдения равно атмосферному, значит дельфин вынырнул на поверхность и перемещение по вертикали равно нулю. Таким образом необходимо следить только за горизонтальным перемещением.

Обозначим атмосферное давление p_A . Тогда давление жидкости на глубине h равно $\rho gh + p_A$, поэтому изменение давления за единицу времени с точностью до ρg равно вертикальной скорости тюленя

$$\Delta p = \rho g \Delta h = \rho g v \Delta t, \quad \text{или} \quad v = \frac{\Delta p}{\rho g \Delta t}. \quad (5)$$

Посчитаем из коэффициента наклона вертикальную составляющую в зависимости от времени.

Можно вычислить, что на участке $0 - 12$ с вертикальная составляющая скорости равна

$$\frac{\Delta p}{\rho g \Delta t} = \frac{240 \text{ кПа}}{10 \text{ м/с}^2 \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 12 \text{ с}} = 2 \text{ м/с}. \quad (6)$$

Она равна полной скорости дельфина, а это значит, что он двигался вертикально вниз. Нетрудно заметить, что такой же коэффициент наклона с точностью до знака имеют все наклонные участки. Значит вклад в перемещение дельфина вносят только горизонтальные участки графика, на которых он двигался строго горизонтально. Тогда нетрудно найти его перемещение

$$\Delta x = 2 \text{ м/с} \cdot (20 \text{ с} + 20 \text{ с} + 28 \text{ с}) = 136 \text{ м}. \quad (7)$$

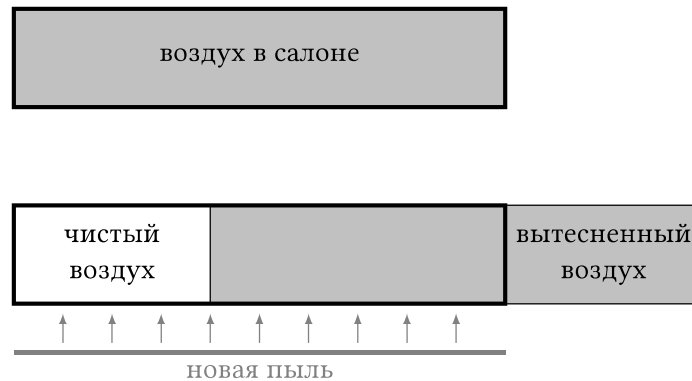
Ответ: 136 м.

- **1 балл** — Формула связи изменения давления со скоростью
- **1 балл** — Утверждение о том, что на наклонных участках движение строго вертикально,
- **2 балла** — Ответ.

Задача 4. Непыльная

На рисунке схематически показано, что происходит с воздухом в салоне самолета за одну минуту:

- Поступает объем воздуха без пыли, равный U . В нижней части схемы этому объему соответствует левый кусок.
- Такой же объем U грязного воздуха выходит из салона самолета. Это следует из того, что количество воздуха в салоне сохраняется. Очевидно, что количество пылинок, которые покинули самолет, равняется $N_{out} = CU$. Кажется, что грязи должно стать меньше, но:
- в воздух поступает $N = N_P + N_F$ пылинок, где мы обозначили как N_P количество пылинок от людей, и N_F количество пылинок с полу.



Так как количество пылинок в салоне со временем не меняется (концентрация и объем салона постоянны), значит число поступающих и выходящих пылинок равно друг другу:

$$CU = N_{out} = N_P + N_F. \quad (8)$$

Если увеличить наддув воздуха кондиционером, то правая часть уравнения не изменится. Значит при увеличении U в два раза, концентрация уменьшится в два раза. Исходя из условия можно записать:

$$C - \frac{C}{2} = \Delta C_1 = 100 \text{ (1/см}^3\text{)} \text{ или } C = 200 \text{ (1/см}^3\text{)}. \quad (9)$$

Рассмотрим далее второй случай: когда наддув остается неизменным, а количество пассажиров удваивается. Во-первых, величина N_P увеличится два раза. Во-вторых, концентрация увеличится от значения C до $C + \Delta C_2$, или в $\frac{3}{2}$ раза. Так же из условия следует, что N_F не измениться. Этих данных достаточно, чтобы найти все неизвестные. Например, составим систему уравнений, которая описывает приведенные условия:

$$CU = N_P + N_F \quad (10)$$

$$\frac{3}{2}CU = 2N_P + N_F. \quad (11)$$

Из этих двух уравнений можно получить, что:

$$N_F = \frac{1}{2}CU. \quad (12)$$

Величина CU это, фактически, количество частиц, находящихся в объеме 15 м^3 . Таким образом, $N_F = 1500 \cdot 10^6$, где мы учли, что $1 \text{ м}^3 = 10^6 \text{ см}^3$. За одну секунду с пола улетает в 60 раз меньше частиц, т.е. $N_F/60$.

Ответ: За одну секунду с пола улетает $25 \cdot 10^6$ частиц пыли.

- **1 балл** — Обнаружено понимание факта, что "добавленный" чистый воздух вытесняет запыленный. При этом уход частиц пыли компенсируется приходом пыли от людей и с пола. В идеале, должно быть написано уравнение типа (8), но это необязательно.

- **1 балл** — Правильно рассмотрен случай увеличения U в два раза. Вычислено значение концентрации $C = 200 \text{ см}^{-3}$.
- **1 балл** — Правильно рассмотрен случай увеличения числа пассажиров в два раза. Записано уравнение типа (11). Или словами выражены утверждения про $\frac{3}{2}$ и $2N_P$.
- **1 балл** — Правильный численный ответ.