Александр Андрианов

Физика Стандартной Модели элементарных частиц

Лекция 7, 12.04.2019

Ренормгруппа Стандартной Модели II

Non-abelian gauge theories

SU(N)

$$\mathrm{tr}(t^a t^b) = C(N)\delta^{ab}; \quad C(N) = \frac{1}{2}; \quad \sum_a t^a t^a = C_2(N) \cdot I; \quad C_2(N) = \frac{N^2-1}{2N}.$$

$$\mathcal{L}(G_\mu, \psi, \bar{\psi}, c, \bar{c}, j_\mu, \eta, \bar{\eta}) = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{i}{\xi g^2}\mathrm{tr}\big(\partial^\mu G_\mu(x)\big)^2$$

$$+2\mathrm{tr}\big(\partial_\mu \bar{c}(x)\big(\partial_\mu c(x) + i[G_\mu, c(x)]\big) + \bar{\psi}(i\,\not{\partial} - \not{G} - m)\psi + \frac{2}{g}\mathrm{tr}(j_\mu G^\mu) + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta.$$

$$\Gamma(G_c^{a,\mu}, \bar{\psi}_c, \psi_c|\xi) = -\mathcal{W}(j_\mu^a, \eta, \bar{\eta}|\xi) - \frac{1}{g}(G_c^{a,\mu}, j_\mu^a) - (\bar{\psi}_c, \eta) - (\bar{\eta}, \psi_c)$$

$$\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta j_\mu^a(x)} = -\frac{1}{g}G_c^{a,\mu}(x); \quad \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\eta(x)} = \bar{\psi}_c(x); \quad \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\bar{\eta}(x)} = -\psi_c(x),$$

Background approach to nonabelian gauge theories

$$G_\mu^a(x) = G_{\mu,cl}^a(x) + \mathcal{G}_\mu^a(x); \quad \psi(x) = \psi_{cl}(x) + q(x); \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_{cl}(x) + \bar{q}(x),$$

$$\frac{1}{g^2}\Big(\partial_\mu F_{cl}^{a,\mu\nu}(x) - f^{abc}G_{\mu,cl}^b(x)F_{cl}^{c,\mu\nu}\Big) + \mathrm{G.f.} - \bar{\psi}_{cl}(x)\gamma^\nu t^a\psi_{cl}(x) + \frac{1}{g}j^{a,\nu}(x) = 0;$$

$$\mathrm{G.f.} = \frac{1}{\xi g^2}\partial^\nu\partial_\mu G_{cl}^{a,\mu}(x) + f^{abd}\partial^\mu\bar{c}_{cl}^b(x)c_{cl}^d(x);$$

$$(i\,\not{\partial} - \not{G}_{cl}^a(x)t^a - m)\psi_{cl}(x) = -\eta(x); \quad \bar{\psi}_{cl}(x)(-i\,\overleftarrow{\not{\partial}} - \not{G}_{cl}^a(x)t^a - m) = -\bar{\eta}(x);$$

$$-\partial_\mu^2 c_{cl}^a(x) + f^{abd}\partial_\mu\big(G_{cl}^{b,\mu}(x)c_{cl}^d(x)\big) = 0; \quad -\partial_\mu^2\bar{c}_{cl}^a(x) + f^{abd}G_{cl}^{b,\mu}(x)\partial_\mu\bar{c}_{cl}^d(x) = 0.$$

Калибровочные преобразования можно произвольным образом распределить между фоновым полем и квантовым полем флуктуаций

$$UG_\mu U^\dagger + iU\partial_\mu U^\dagger = G^U_{\mu,cl} + \mathcal{G}^U_\mu(x) \Rightarrow \begin{cases} G^U_{\mu,cl} = UG_{\mu,cl}U^\dagger + iU\partial_\mu U^\dagger; & \mathcal{G}^U_\mu(x) = U\mathcal{G}_\mu(x)U^\dagger; \\ \text{or} & \\ G^U_{\mu,cl} = UG_{\mu,cl}U^\dagger; & \mathcal{G}^U_\mu(x) = U\mathcal{G}_\mu(x)U^\dagger + iU\partial_\mu U^\dagger; \end{cases}$$

В первом случае разложение по полю флуктуаций СОХРАНЯЕТ общую калибровочную инвариантность каждого члена разложения , если использовать длинную производную с фоновым полем.

replace the gauge fixing condition in the Lagrangian,

$$\begin{array}{lll} \partial^\mu G^a_\mu(x) = f^a & \Rightarrow & \partial^\mu \mathcal{G}^a_\mu(x) - f^{abc} G^{b,\mu}_{cl}(x)\mathcal{G}^a_\mu(x) = 2\mathrm{tr}(t^a[D^\mu_{cl}, \mathcal{G}_\mu(x)]) = f^a; \\ \mathcal{L}_{G.f.} = -\frac{1}{\xi g^2}\mathrm{tr}\big((\partial^\mu G_\mu(x))^2\big) & \Rightarrow & -\frac{1}{\xi g^2}\mathrm{tr}\big([D^\mu_{cl}, \mathcal{G}_\mu]^2\big); \\ \mathcal{L}_{FP} = 2\mathrm{tr}\big(\partial_\mu \bar{c}(x)\big(\partial_\mu c(x) + i[G_\mu, c(x)]\big) & \Rightarrow & 2\mathrm{tr}\big([D^\mu_{cl}, \bar{c}(x)]\big([D^\mu_{cl}, c(x)] + i[\mathcal{G}_\mu, c(x)]\big). \end{array}$$

As the field strength,

$$F^{\mu\nu} = -i[D^\mu, D^\nu] = F^{\mu\nu}_{cl} + [D^\mu_{cl}, \mathcal{G}^\nu] - [D^\nu_{cl}, \mathcal{G}^\mu] + i[\mathcal{G}^\mu, \mathcal{G}^\nu],$$

the full action in a given background reads,

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_\mu, q, \bar{q}, c, \bar{c}|G^{b,\mu}_{cl}, \psi_{cl}, \bar{\psi}_{cl}) = \mathcal{L}_{cl} - \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\Big([D^\mu_{cl}, \mathcal{G}^\nu][D^{cl}_\mu, \mathcal{G}_\nu] - [D^\mu_{cl}, \mathcal{G}^\nu][D^{cl}_\nu, \mathcal{G}_\mu] + iF^{\mu\nu}_{cl}[\mathcal{G}_\mu, \mathcal{G}_\nu]\Big)$$

$$-\frac{1}{\xi g^2}\mathrm{tr}\big([D^\mu_{cl}, \mathcal{G}_\mu]\big)^2 + 2\mathrm{tr}\big([D^\mu_{cl}, \bar{c}(x)][D^{cl}_\mu, c(x)]$$

$$+\bar{q}(i\,\not{\partial} - \not{G}_{cl} - m)q + \bar{q}(i\,\not{\partial} - \not{\mathcal{G}} - m)\psi_{cl} + \bar{\psi}_{cl}(i\,\not{\partial} - \not{\mathcal{G}} - m)q + \Delta\mathcal{L},$$

$$\mathcal{L}_{cl} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\left(F^{cl}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{cl}\right) + \bar{\psi}_{cl}(i\,\not{\partial} - \not{G}_{cl} - m)\psi_{cl} + \frac{2}{g}\mathrm{tr}(j_\mu G^\mu_{cl}) + \bar{\eta}\psi_{cl} + \bar{\psi}_{cl}\eta,$$

and the cubic and quartic interactions between fluctuation fields are assembled into

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\Big(4i[D^\mu_{cl}, \mathcal{G}^\nu][\mathcal{G}_\mu, \mathcal{G}_\nu] - [\mathcal{G}^\mu, \mathcal{G}^\nu][\mathcal{G}_\mu, \mathcal{G}_\nu]\Big) + 2i\mathrm{tr}\big([D^\mu_{cl}, \bar{c}(x)][\mathcal{G}_\mu, c(x)] - \bar{q}\,\not{\mathcal{G}}q.$$

quadratic part of the gauge field Lagrangian is evaluated to,

$$\mathcal{L}^{(2)}(\mathcal{G}_\mu, q, \bar{q}, c, \bar{c}) \to \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\Big(\mathcal{G}^\nu[D^\mu_{cl}, [D^{cl}_\mu, \mathcal{G}_\nu]] - \mathcal{G}_\nu[D^\mu_{cl}[D^\nu_{cl}, \mathcal{G}_\mu]] + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\left([D^\mu_{cl}, \mathcal{G}_\mu]\right)^2 - iF^{\mu\nu}_{cl}[\mathcal{G}_\mu, \mathcal{G}_\nu]\Big)$$

$$= \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\Big(\mathcal{G}^\nu[D^\mu_{cl}, [D^{cl}_\mu, \mathcal{G}_\nu]] + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\left([D^\mu_{cl}, \mathcal{G}_\mu]\right)^2 + 2i\mathcal{G}_\mu[F^{\mu\nu}_{cl}, \mathcal{G}_\nu]\Big).$$

Choose $\xi = 1$ (the t'Hooft-Feynman gauge). The quadratic Lagrangian in components,

$$\mathcal{L}^{(2)}(\mathcal{G}) = \frac{1}{2g^2}\mathcal{G}^a_\mu\Big((D^2_\rho)^{ac}g^{\mu\nu} - f^{abc}F^{b,\rho\sigma}_{cl}(S^{(1)}_{\rho\sigma})^{\mu\nu}\Big)\mathcal{G}^c_\nu;$$

$$(D^2_\rho)^{ac} \equiv (\partial_\rho)^2\delta^{ac} - f^{abc}(\mathcal{G}^b_\rho\partial^\rho + \partial^\rho\mathcal{G}^b_\rho) + f^{abd}f^{dec}\mathcal{G}^b_\rho\mathcal{G}^{e,\rho},$$

where the Lorentz spin-1 matrix $(S^{(1)}_{\rho\sigma})^{\mu\nu} = i(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma)$ is introduced. The integration over fields $\mathcal{G}^a_\mu$ gives the bosonic determinant,

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{\mathcal{G}} = \det{}^{-1/2}\big[-(D^2_\rho) - F^{\rho\sigma}_{cl}(S^{(1)}_{\rho\sigma})\big]; \quad F^{\rho\sigma}_{cl} \equiv if^{abc}F^{b,\rho\sigma}_{cl} = T^bF^{b,\rho\sigma}_{cl}.$$

The quadratic Lagrangian for the ghost fields has the same structure with spin $= 0$ but yields the fermionic determinant after integration over $c, \bar{c}$,

$$\mathcal{L}^{(2)}(c,\bar{c}) = \bar{c}^a\Big((D^2_\rho)^{ab}\Big)c^b; \quad \mathcal{Z}^{(2)}_{\mathcal{G}} = \det\big[-(D^2_\rho)\big].$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}_f = \det{}^{n_f}\big[i\not{D}_{cl} - m\big] = \Big(\det\big[i\not{D}_{cl} - m\big]\det\big[i\not{D}_{cl} + m\big]\Big)^{\frac{n_f}{2}} = \det{}^{\frac{n_f}{2}}\big[-(\not{D}_{cl})^2 - m^2\big],$$

for n_f equivalent species of fermions. Let's evaluate,

$$(\not{D}_{cl})^2 = \frac{1}{2}(\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} + [\gamma_\mu,\gamma_\nu])D^\mu_{cl}D^\nu_{cl} = (D^\mu_{cl})^2 + \frac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu][D^\mu_{cl},D^\nu_{cl}] = (D^\mu_{cl})^2 + i\frac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]F^{\mu\nu}_{cl}.$$

This operator has the form of previous kinetic operators for spin-1/2 and in the fundamental representation. The Lorentz spin-1/2 operator $S^{(1/2)}_{\mu\nu} = i\frac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$.

Let's summarize the contributions into the one-loop effective action,

$$i\Gamma_1(G^{a,\mu}_{cl}) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log\big(-(D^2_\rho) - F^{\rho\sigma}_{cl}S^{(1)}_{\rho\sigma}\big) + \mathrm{tr}\log\big(-(D^2_\rho)\big) + \frac{n_f}{2}\mathrm{tr}\log\big(-(D^\mu_{cl})^2 - S^{(1/2)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{cl} - m^2\big).$$

$$\Gamma_{1,f} = -i\frac{n_f}{2}\mathrm{tr}\{\log\Big(-(\partial_\mu)^2 - m^2 + i(\partial_\mu G^\mu_{cl} + G^\mu_{cl}\partial_\mu) + (G^\mu_{cl})^2 - S_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{cl}\Big) - \log\Big(-(\partial_\mu)^2\Big)\}$$

$$= -i\frac{n_f}{2}\mathrm{tr}\Big(\frac{1}{-(\partial_\mu)^2 - m^2 + i\epsilon}(G^\nu_{cl})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{-(\partial_\mu)^2 - m^2 + i\epsilon}(\partial_\sigma G^\sigma_{cl} + G^\sigma_{cl}\partial_\sigma)\frac{1}{-(\partial_\nu)^2 - m^2 + i\epsilon}(\partial_\rho G^\rho_{cl} + G^\rho_{cl}\partial_\rho)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{-(\partial_\cdot)^2 - m^2 + i\epsilon}S_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}_{cl}\frac{1}{-(\partial_\cdot)^2 - m^2 + i\epsilon}S_{\rho'\sigma'}F^{\rho'\sigma'}_{cl}\Big) + \mathcal{O}((G_{cl})^3) \equiv \Gamma_{11,f} + \Gamma_{21,f} + \Gamma_{31,f} + \cdots.$$

$$\Gamma_{11,f} + \Gamma_{21,f} + \Gamma_{31,f} = \frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G^{a,\mu}_{cl}(-p)(-p^2g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)G^{a,\nu}_{cl}(p)C_f\log\frac{M^2}{-p^2};$$

$$C_f = \frac{n_f}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{\pi^2}(-\frac{1}{48} + \frac{1}{16}) = \frac{n_f}{24\pi^2},$$

$$\mathrm{tr}(S^{(1)}_{\rho\mu}S^{(1)}_{\alpha\nu}) = 2(g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu} - g^{\rho\nu}g^{\mu\alpha})).$$

$$\Gamma_{11,G} + \Gamma_{21,G} + \Gamma_{31,G} = \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G^{a,\mu}_{cl}(-p)(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) G^{a,\nu}_{cl}(p)\ C_G\ \log\frac{M^2}{-p^2};$$

$$C_G = 0 + \frac{N}{24\pi^2} - \frac{N}{4\pi^2} = -\frac{5N}{24\pi^2}.$$

$$\Gamma_{11,c}+\Gamma_{21,c}+\Gamma_{31,c} = \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G^{a,\mu}_{cl}(-p)(-p^2 g_{\mu\nu}+p_\mu p_\nu) G^{a,\nu}_{cl}(p)\ C_c\ \log\frac{M^2}{-p^2}; \quad C_c = 0 - \frac{N}{48\pi^2} + 0.$$

The total coefficient,

$$C_{YM} = -C_G - C_c - C_f = \frac{1}{48\pi^2}\big(N(10+1) - 2n_f\big) = \frac{1}{48\pi^2}\big(11N - 2n_f\big).$$

In QCD $N = 3, n_f = 6$ and $C_{YM} > 0$.

The effective charge,

$$\frac{1}{g^2(p^2)} = \frac{1}{g^2(M^2)} + C_{YM}\log\frac{-p^2}{M^2} = \frac{1}{g^2_{ren}(\mu^2)} + C_{YM}\log\frac{-p^2}{\mu^2}.$$

$$\frac{d\alpha_s}{d\tau} = -\beta_0\alpha_s^2 \equiv \beta(\alpha_s); \quad \beta_0 = \frac{1}{12\pi}(11N - 2n_f); \quad \text{with the boundary condition} \quad \alpha_s(\tau = 0) = \tilde{\alpha}_s.$$

Ренормгруппа Стандартной модели: тривиальность скалярного потенциала, стабильность (метастабильность)

РГ уравнения для пяти констант взаимодействия СМ: трех калибровочных , константы Юкавы топ-кварка (как самого тяжелого) и константы самодействия поля Хиггса

$$\frac{dg_1}{dt} = \frac{41}{10}\frac{g_1^3}{16\pi^2}, \quad \frac{dg_2}{dt} = -\frac{19}{6}\frac{g_2^3}{16\pi^2}, \quad \frac{dg_3}{dt} = -7\frac{g_3^3}{16\pi^2}$$

N=3, n_f =6

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{y_t}{16\pi^2}\left(-\frac{17}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_3^2 + \frac{9}{2}y_t^2\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{16\pi^2}\left(24\lambda^2 - \lambda\left(\frac{9}{5}g_1^2 + 9g_2^2 + 12y_t^2\right) + \frac{9}{8}\left(\frac{3}{25}g_1^4 + \frac{2}{5}g_1^2g_2^2 + g_2^4\right) - 6y_t^4\right)$$

где $t \equiv \ln(Q/Q_0)$ и

значения констант нормализованы на их большое объединение в SU(5) (детали в следующем семестре)

$$\begin{aligned} g_1 &= \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{4\pi\alpha(m_Z)}}{\cos\theta_W} \simeq 0.46 \\ g_2 &= \frac{\sqrt{4\pi\alpha(m_Z)}}{\sin\theta_W} \simeq 0.65 \\ g_3 &= \sqrt{4\pi\alpha_3(m_Z)} \simeq 1.2 \\ \lambda &= \frac{m_h^2}{2v^2} \quad \text{where } v = 246\,\mathrm{GeV} \end{aligned}$$

Потенциал Хиггса нормирован следующим образом

V= $\lambda|\Phi^\dagger\Phi|^2 + \cdots$ (i.e., $m_h^2 = 2\lambda v^2$ where $\langle\Phi\rangle = v/\sqrt{2}$)

При очень больших массах частиц Хиггса главным является первый член в РГ уравнении для константы самодействия   и уравнение становится

$$\frac{d\lambda}{dt} \simeq \frac{3\lambda^2}{2\pi^2}$$

его решение указывает на появление полюса Ландау

$$\lambda(Q) = \frac{\lambda(Q_0)}{1 - \frac{3\lambda(Q_0)}{2\pi^2}\ln(Q/Q_0)}$$

при

$$Q_{LP} = m_h \exp\left(\frac{4\pi^2 v^2}{3m_h^2}\right)$$

Например для $m_h = 200\,\mathrm{GeV}\ (300\,\mathrm{GeV})$ полюс возникает на масштабах $Q_{LP} \simeq 9\times10^9\,\mathrm{GeV}\ (2\times10^6\,\mathrm{GeV})$.

В этой области теория прекращает быть пертурбативной. До измерения массы Хиггса отсюда следовала оценка на максимальную массу < 180 GeV для того, чтобы теория ЕС взаимодействий оставалась пертурбативной вплоть до масштаба Планка $\sim 10^{18}\,\mathrm{GeV}$.

Вторая опасность связана с большой величиной константы Юкавы топ-кварка $-6y_t^4$. Тогда, если масса Хиггса не слишком велика, т.е. мала константа $\lambda(Q)$, то при высоких энергиях она будет убывать и на некотором масштабе Q_{NG} станет отрицательной. Тем самым, СМ потеряет стабильность. При этом при еще больших энергиях знак может снова стать положительным и вакуум оказывается метастабильным. Двух-трех петлевые расчеты показывают, что СМ была бы нестабильной при массах Хиггса менее 112 GeV и остается метастабильной до масс < 130GeV. Таким образом современные данные о массе частицы Хиггса ~ 125 GeV указывают на ***метастабильность*** вакуума нашей вселенной.

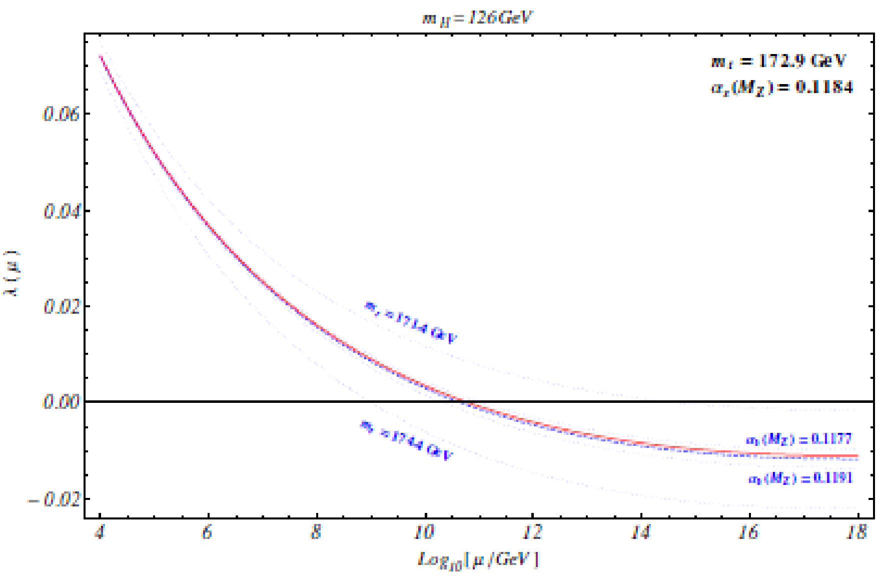

Рис. 9. Метастабильность (Chetyrkin,Zoller,JHEP (2012)033)