Возможные решения задач. 8 класс

Вариант 1

Задача 1. Остывание пирамиды

В условии сказано, что количество тепла в единицу времени, которое уходит в окружающую среду через единицу площади, пропорционально разности температур. Рассмотрим некоторый маленький промежуток времени Δt, в течении которого температуру тела можно считать постоянной. Тепло, которое тело отдало в окружающую среду равно:

$$\Delta Q = \alpha \cdot S \cdot (T_{\text{тело}} - T_{\text{комнаты}}) \cdot \Delta t, \tag{1}$$

где α — некоторый постоянный коэффициент, S — площадь, через которую уходит тепло.

Пускай удельная теплоёмкость тела равна c, тогда этот же закон переписывается в виде:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{S}{m} \cdot (T_{\text{тело}} - T_{\text{комнаты}}). \tag{2}$$

Отсюда следует, что скорость изменения температуры прямо пропорционально зависит от отношения S/m. Посчитаем эту величину для кубика, учитывая, что тепло уходит только через поверхность, которая граничит с воздухом.

$$\frac{S_{\text{кубик}}}{m_{\text{кубик}}} = \frac{5a^2}{a^3\rho} = 5 \cdot \frac{1}{a\rho}. \tag{3}$$

Проделав то же для пирамиды, получим:

$$\frac{S_{\text{кубик}}}{m_{\text{кубик}}} = \frac{[5(3a)^2 - (2a)^2] + [5(2a)^2 - a^2] + 5a^2}{(3a)^3\rho + (2a)^3\rho + a^3\rho} = \frac{65}{32} \cdot \frac{1}{a\rho}. \tag{4}$$

Конструкции изготовлены из одного материала, поэтому равны их плотности и удельные теплоёмкости, значит можно посчитать во сколько раз скорость остывания кубика больше,

$$\frac{5}{\frac{65}{32}} = \frac{32}{13} \approx 2{,}5. \tag{5}$$

Поэтому если пирамидка кубик остывает за 10 секунд, пирамидка остынет за 25 секунд.

Ответ: пирамидка остынет за 25 секунд

Задача 2. Царская

Введём координатную ось. Усадьбе сопоставим точку 0, а дворцу — 1. Время будем измерять в днях. Скорость боярина (измеряемая в $\frac{\text{расстояние до дворца}}{\text{1 день}}$) тогда будет равна $v = \frac{1}{4}$, а скорость гонца — $u = 1$.

Первый день уйдёт на доставку приказа немедленно явиться. За второй день боярин проедет $x_0 = \frac{1}{4}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$ расстояния до дворца. В третий день начинает движение второй гонец. Он встретится с боярином через

$$t_1 = \frac{x_{\text{г}2} - x_0}{u+v} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \quad \left[\frac{2}{3}\right]$$

Координата боярина в момент разворота:

$$x_{\text{р}1} = x_0 + t_1 v = \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \quad \left[\frac{1}{3}\right]$$

Остаток третьего дня $(1 - t_1)$ боярин едет назад. Его координата к концу третьего дня:

$$x_3 = x_{\text{р}1} - (1 - t_1)v = \frac{2}{5} - \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10} \quad \left[\frac{4}{15}\right]$$

В четвёртый день начинает движение третий гонец. Он догонит боярина через

$$t_2 = \frac{x_{\text{г}3} - x_3}{u - v} = \frac{1 - \frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{14}{15} \quad \left[\frac{11}{12}\right]$$

Координата боярина в момент второго разворота:

$$x_{\text{р}2} = x_3 - t_2 v = \frac{3}{10} - \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15} \quad \left[\frac{1}{12}\right]$$

Остаток четвёртого дня $(1 - t_2)$ боярин едет вперёд. Его координата к концу четвёртого дня:

$$x_4 = x_{\text{р}2} + (1 - t_2)v = \frac{1}{15} + \left(1 - \frac{14}{15}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad \left[\frac{1}{10}\right]$$

Чтобы доехать до дворца, боярину потребуется ещё

$$t_3 = \frac{1 - x_4}{v} = \frac{1 - \frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{11}{3} \quad \left[\frac{9}{2}\right]$$

Всего с момента отправления первого гонца пройдёт $T = 4 + t_3 = 7\frac{2}{3}$ $\left[8\frac{1}{2}\right]$ дня.

Ответ: Боярин приедет во дворец через 7,6 дней.

Задача 3. Качели

Обозначим плечи качелей как l_1, l_2, а расстояние между правым концом левых качелей и левым концом правых качелей (то есть длину их перекрытия) за x. По условию, $2l_1 = 8$, то есть $l_1 = 4$.

В первой ситуации из условия выигрыш в силе $\frac{l_1}{l_1} \cdot \frac{l_2 - x}{l_2} = \frac{1}{2}$, а во второй $\frac{l_2}{l_2} \cdot \frac{l_1 - x}{l_1} = \frac{1}{4}$. Тогда:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{x}{l_2} = \dfrac{1}{2} \\ 1 - \dfrac{x}{l_1} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} l_2 = 2x \\ x = \dfrac{3}{4} l_1 \end{cases} \tag{7}$$

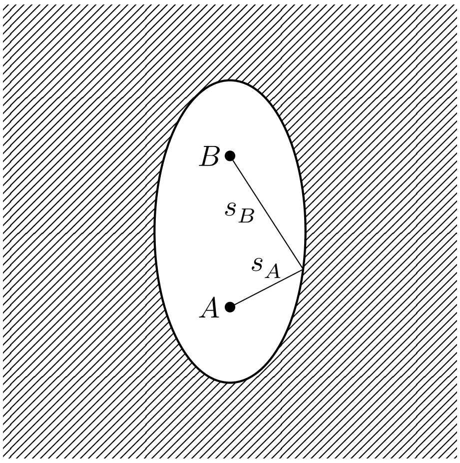
Значит, $x = 3$ м, $l_2 = 6$ м. Расстояние между опорами тогда $l_1 + l_2 - x = 7$ м.

Задача 4. Неопытный водитель

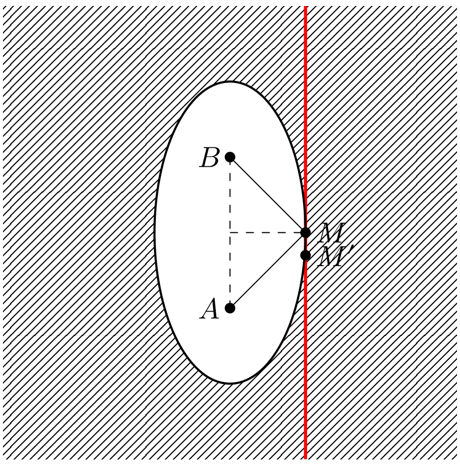
За время движения из точки A в точку B величина перемещения водителя равна длине отрезка AB. Обозначим ее за d. При этом известно, что путь должен быть больше в определенное число раз, то есть $s = \frac{5}{3}d$. Заметим, что тогда водитель не мог оказаться в таких точках, сумма расстояний от которых до A и B больше чем s.

$$s_A + s_B \geqslant s.$$

И наоборот, всилу неопределенности его траектории, она могла проходить через любую точку, не принадлежащую вышеуказанной области.



Тогда, чтобы столкновения не произошло, прямая, по которой движется поток машин должна полностью лежать в «Запрещенной зоне», а для того, чтобы расстояние до отрезка было минимальным, она должна касаться границы. Граница задается условием $s_A + s_B = s$, которое определяет эллипс на плоскости, однако знание этого факта не необходимо. Раз прямая должна касаться границы, давайте докажем, что точка касания должна быть равноудалена от A и B. Для этого нужно показать, что эта точка будет наиболее удалена от отрезка AB.



Сдвинем точку M на Δx вниз. При этом сумма расстояний до точек A и B

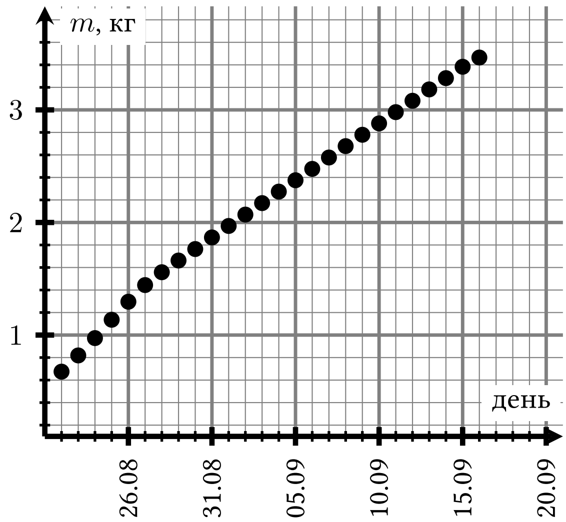
$$s'_A + s'_B = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + \Delta x\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2} - \Delta x\right)^2 + y^2}$$

увеличится, в чем можно убедиться возведениями неравенства в квадрат. Значит для того, чтобы точка M' лежала на границе нужно уменьшить y, а следовательно первоначальный y является наибольшим. Найдем его по теореме Пифагора.

<u>Ответ:</u> $y = \frac{4}{3}L$.

Задача 5. Масса яблок

В условии сказано, что 22 августа упало 10 яблок, из графика видно, что средняя масса яблок в этот день была равна 135 г, поэтому в тот день упало $135\text{ г} \cdot 10 = 1{,}35$ кг. Проделаем такую же процедуру для каждого дня и перестроим график так, чтобы получить зависимость массы выпавших яблок от дня.



Теперь чтобы узнать суммарную массу яблок достаточно посчитать площадь под графиком в период с 27 августа по 15 сентября. Она равна 48 кг яблок.