Возможные решения задач. 7 класс

Задача 1. Проверка работ

Поймем, как среднее время T, затрачиваемое на проверку одной работы, связано с долей нулевых работ α. Время T запишется как

$$T = \frac{1}{5} \cdot 0\text{ с} + \alpha \cdot 20\text{ с} + \left(\frac{4}{5} - \alpha\right) \cdot 100\text{ с}. \tag{1}$$

Нас интересует расход чернил, поэтому по аналогии со средним временем найдем величину среднего расхода чернил на одну работу. Эта величина определяется следующим выражением

$$P = \frac{1}{5} \cdot 0{,}5\text{ см} + \alpha \cdot 2\text{ см} + \left(\frac{4}{5} - \alpha\right) \cdot 2{,}5\text{ см}. \tag{2}$$

Выразим α через T из первого уравнения

$$\alpha = \frac{(80 - T)}{80} = \frac{1}{5}, \tag{3}$$

$$P = 2{,}1\text{ см} - \frac{1}{5} \cdot 0{,}5\text{ см} = 2\text{ см}. \tag{4}$$

Теперь, чтобы найти расход чернил нужно умножить эту величину на количество проверенных работ. Расход окажется равным

$$L = 2000\text{ см} = 20\text{ м}. \tag{5}$$

Тогда в ручке останется 80 м, что составляет 0,8 от первоначального количества.

Ответ: 0,8.

- **2 балла** — За нахождение доли нулевых работ или работ с полным баллом,
- **1 балл** — За нахождение среднего расхода,
- **1 балл** — За верный ответ.

Задача 2. Упаковка камней

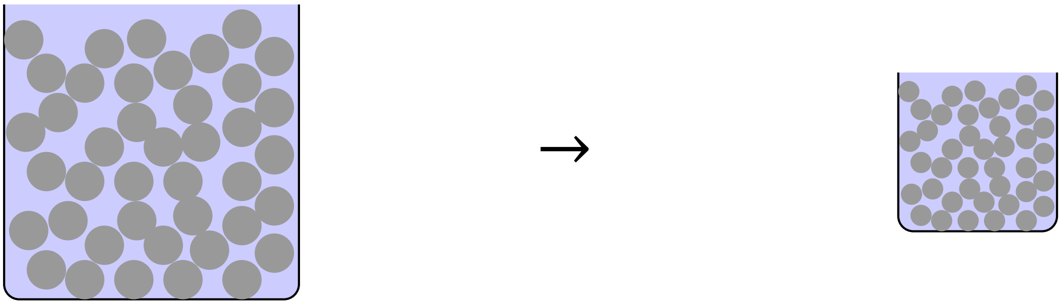


Рис. 1: Независимость от линейных размеров.

Из условия ясно, что камни занимают $\eta = 74\%$ объема в сосуде. Заметим, что если уменьшить объем сосуда и объем каждого шарика в 100 раз, то эта доля η не изменится, так как объем воды уменьшится во столько же раз, во сколько изменится суммарный объем камней. Можно теперь объединить 100 маленьких сосудов в один большой. Очевидно, доля объема, занимаемого камнями, снова будет равна η. Исходя из таких соображений можно понять, что доля η не зависит от объема системы и от размера камней, лишь бы размеры сосуда были много больше размеров камней.

Тогда можно считать, что промежутки между большими камнями в большом сосуде являются сосудами для маленьких камушков, а значит они вытеснят из него такую же долю η воды, что и большие камни.

Значит выльется

$$V = 0{,}74 \cdot 13 \text{ л} \approx 9{,}6 \text{ л}. \tag{6}$$

Ответ: 9,6 л.

- **3 балла** — За идею о масштабной независимости,
- **1 балл** — За верный ответ.

Задача 3. Почти Дидона

Пусть сначала человек мог бежать со скоростью v. Тогда периметр запланированного квадрата равен $24v$, сторона $6v$ и площадь $36v^2$. Однако после того, как было пройдено расстояние $3v$, человек стал двигаться со скоростью $\frac{v}{2}$, и получившийся периметр нового квадрата равен $3v + 10{,}5v = 13{,}5v$. Сторона меньшего квадрата равна $3,375v$, а площадь равна $\approx 11{,}4v^2$. Тогда искомое отношение равно

$$\frac{11{,}4\ v^2}{36\ v^2} \approx 0{,}317. \tag{7}$$

Если проводить точные вычисления, то ответ окажется

$$\left(\frac{9}{16}\right)^2. \tag{8}$$

Ответ: $0{,}317$ или $\left(\frac{9}{16}\right)^2$.

- **1 балл** — За нахождение изначального периметра,
- **1 балл** — За нахождение итогового периметра,
- **1 балл** — За связь периметра квадрата с площадью,
- **1 балл** — За верный ответ.

Задача 4. Расход дров

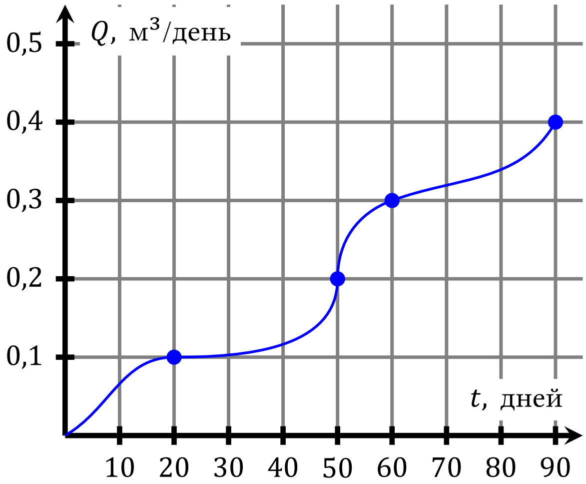


Рис. 2: Пример функции расхода дров от времени.

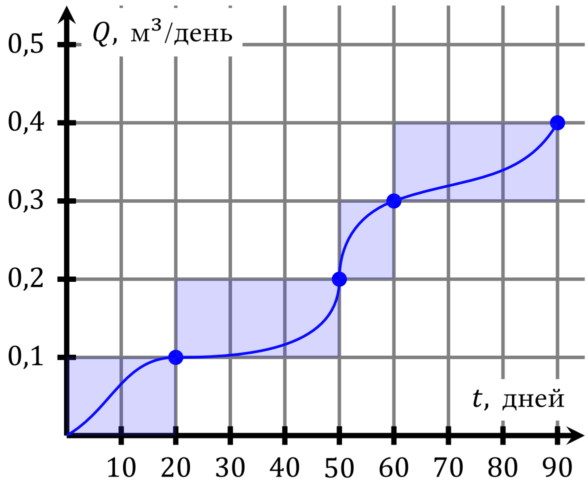


Рис. 3: Области, в которых может лежать линия графика.

По условию, расход дров с каждым днем не убывал. Это значит, что он задается линией на графике, проходящей через заданные точки, и, всегда направленной вправо и верх. Тогда можо провести горизонтальные и вертикальные линии, проходящие через известные нам точки графика, и сам график будет лежать внутри получившихся прямоугольников.

Если бы мы знали всю линию графика, мы могли бы точно найти расход дров как площадь фигуры, ограниченной этим графиком. Чтобы это понять, можно усмотреть явную аналогию с графиком скорости от времени. Но раз нам известны только некоторые условия, задающие целый набор возможных линий расхода дров, нужно найти максимальное и минмальное возможные значения расхода дров. Для этого из набора всех возможных линий следует выбрать те две, которые задают минимальную и максимальную площади. Ясно, что эти линии являются границами нарисованных прямоугольников.

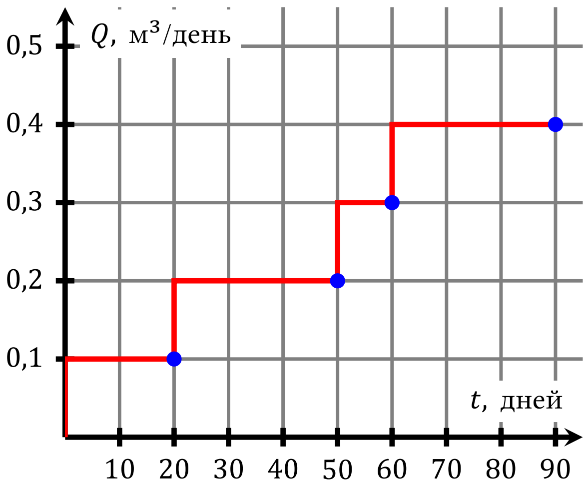


Рис. 4: Линия, задающая максимальную площадь.

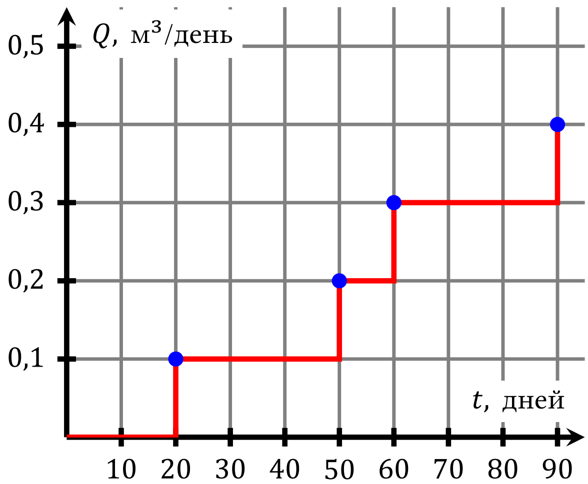


Рис. 5: Линия, задающая минимальную площадь.

Теперь для получения ответа осталось только посчитать получившиеся площади. В случае максимального расхода

$$P_{max} = (0{,}1 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 30 + 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 30)\ \text{м}^3 = 23\ \text{м}^3. \tag{9}$$

В случае минимального

$$P_{min} = (0{,}1 \cdot 30 + 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 30)\ \text{м}^3 = 14\ \text{м}^3. \tag{10}$$

Ответ: 23 м^3 и 14 м^3.

- **1 балл** — За идею о том, что количество потраченных дров это $Q \cdot t$,
- **1 балл** — Нахождение минимизирующей траектории,
- **1 балл** — Нахождение максимизирующей траектории,
- **0,5 балла** — Ответ для первого случая,
- **0,5 балла** — Ответ для второго случая.

Примечание: Если ребенок озвучивает идею о том, среди каких траекторий ему нужно искать минимум и максимум, но затрудняется с определением крайних случаев, ему следует задать наводящий вопрос.

Задача 5. Узелки

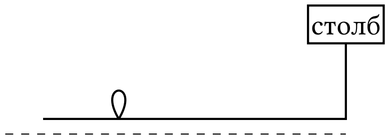


Рис. 6: Сокращение длины веревки при завязывании узелка.

Как видно из условия, Миша при расчетах получил различные значения скорости, хотя известно, что она не менялась. Значит его расчеты содержат ошибку, связанную с завязыванием узелков. Как видно из рисунка, она заключается в том, что при завязывании очередного узелка, пройденный до этого кусок веревки сокращается на длину узелка, и скорость, рассчитанная Мишей оказывается меньше действительной. Учтем эту ошибку, и рассмотрим два участка движения.

На одном участке улитка проходила за 100 секунд вдоль веревки расстояние, равное

$$v \cdot 100 \text{ с}. \tag{11}$$

Оно складывается из длины веревки между узелками, которую измерял Миша и длины самого узелка, которую мы не знаем. Длину узелка мы обозначим за x, а расстояние измеренное Мишей можно выразить через вычисленную им скорость v_1, как $v_1 \cdot 100$ с. Тогда для первого случая можно написать равенство

$$v \cdot 100 \text{ с} = v_1 \cdot 100 \text{ с} + x. \tag{12}$$

На другом участке все происходило аналогично, однако, раз скорость получилась другая, вместо одного узелка завязывалось два, и аналогичное уравнение примет вид

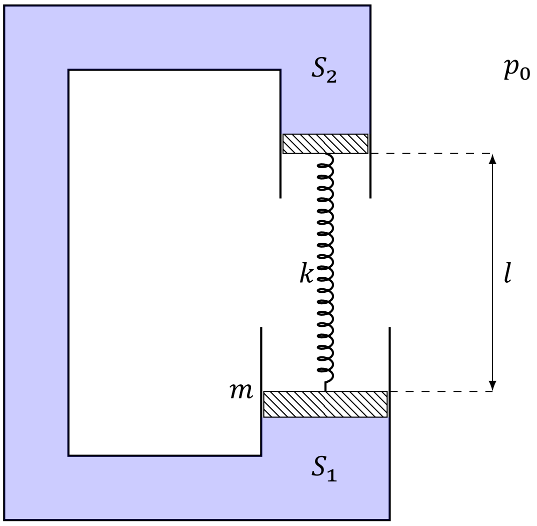
$$v \cdot 100 \text{ с} = v_2 \cdot 100 \text{ с} + 2x. \tag{13}$$

Теперь подставляем известные значения v_1 и v_2 и решаем систему, исключая из нее x. Получившееся значение $v = 1{,}5$ мм/с.

Ответ: $v = 1{,}5$ мм/с.

- **4 балла** — За идею о сокращении длины веревки при завязывании узелка,
- **2 балла** — За любое из уравнений, связывающих вычисленную скорость с настоящей,
- **2 балла** — За верный ответ.

Задача 6. Сосуд



Рассмотрим условия, выполнение которых необходимо для равновесия системы. Чтобы система могла оставаться в покое, сумма всех сил, действующих на каждый элемент, должна быть равна нулю. Найдем все силы, действующие на верхний и нижний поршни.

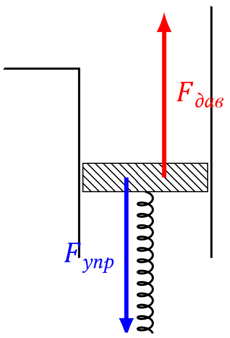


Рис. 7: Верхний поршень

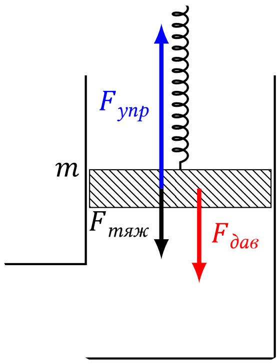


Рис. 8: Нижний поршень

В случае верхнего поршня присутствуют только сила упругости пружины $F_{упр}$ и сила давления $F_{дав}$. По закону Гука, сила упругости равна

$$F_{упр} = k \cdot l, \tag{14}$$

где l — удлинение пружины, которое равно расстоянию между поршнями. Сила давления будет равна разности давлений с нижней и верхней сторон поршня, умноженной на площадь поверхности поршня

$$F_{дав} = (p_0 - p) \cdot S_2, \tag{15}$$

где за p мы обозначили давление воды на уровне верхнего поршня. Условие равновесия верхнего поршня тогда запишется в виде

$$k \cdot l = (p_0 - p) \cdot S_2. \tag{16}$$

В случае нижнего поршня присутствует еще сила тяжести, равная

$$F_{тяж} = mg, \tag{17}$$

и сила давления выразится через уже введенные величины как

$$F_{дав} = (p_0 - (p + \rho g l)) \cdot S_1, \tag{18}$$

где $p + \rho g l$ — давление под нижним поршнем. Оно отличается от давления p на давление столба жидкости высотой l. Условие равновесия нижнего поршня тогда запишется в виде

$$k \cdot l = (p_0 - (p + \rho g l)) \cdot S_1 + mg. \tag{19}$$

Решим систему из уравнений (16) и (19). Избавимся от величины $p - p_0$, так как она содержит неизвестное нам p, которое найти не требуется. Выразим эту величину из уравнения (16)

$$p - p_0 = -\frac{k \cdot l}{S_2}. \tag{20}$$

Подставим эту величину во второе уравнение и получим

$$k \cdot l = \left(\frac{k \cdot l}{S_2} - \rho g l\right) S_1 + mg. \tag{21}$$

Если выразить отсюда l, то получится, что

$$l = \frac{mg}{k\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) + \rho g S_1}. \tag{22}$$

Подставим сюда численные значения

$$l = \frac{1\text{ кг} \cdot 10\text{ Н/кг}}{-50\text{ Н/м} + 1000\text{ кг/м}^3 \cdot 10\text{ Н/кг} \cdot 0{,}015\text{ м}^2} = 0{,}1\text{ м}. \tag{23}$$

Ответ: $l = 10$ см.

- **3 балла** — За верное указание всех действующих сил,
- **2 балла** — За уравнение равновесия верхнего поршня,
- **2 балла** — За уравнение равновесия нижнего поршня,
- **1 балл** — За верный ответ.

Задача 7. Снежная

Для начала построим график зависимости плотности снега от расстояния до земли. Плотность максимальна в самой глубине и линейно уменьшается до нуля к поверхности. При этом задан фиксированный угловой коэффициент прямой и высота сугроба. Тогда график примет вид, изображенный на рисунке.

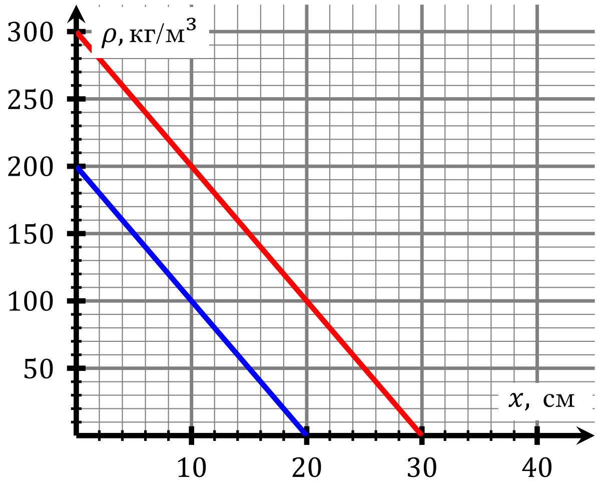


Рис. 9: График зависимости плотности снега от высоты после первого (нижняя линия) и второго (верхняя линия) дня.

Можно понять, что площадь под графиком пропорциональна массе снега на одном квадратном метре площадки, а если перевести значение координаты x в метры, то площадь окажется численно равна массе. Вычислим массу снега, выпавшего в первый день. Для этого можно взять среднюю плотность $\rho_{\text{ср}} = 100$ кг/м^3, и умножить на высоту снега в метрах $h = 0{,}2$ м. Оказывается, что на каждый квадратный метр выпало 20 кг снега. Во второй день выпало еще 25 кг и итоговая масса оказалась 45 кг на каждом квадратном метре. При этом, согласно условию, распределение плотности с высотой задается линией, параллельной исходной, но площадь, отделяемая ей, в $\frac{9}{4}$ раза больше. Из подобия треугольников или расчета средней плотности можно понять, что линия будет иметь представленный вид. Например, если обозначить глубину сугроба в метрах за x, то средняя плотность в кг/м^3 будет численно равна $500x$. Тогда можно составить уравнение

$$45 = 500x \cdot x. \tag{24}$$

Можно убедиться, что его решением будет $x = 0{,}3$. И тогда высота снега, соответствующая такому распределению равна 30 см.

<u>Ответ:</u> 30 см.

- **3 балла** — За связь толщины снега и массы,
- **3 балла** — За использование этого для нахождения массы всего снега,
- **2 балла** — За верный ответ.