

Физика Стандартной модели элементарных частиц

Лекция 3, 01.03.2019

Аномалии в СМ и выбор гиперзарядов

Квантовые аномалии возникают в законах сохранения классических токов после квантования носителей зарядов. В частности оказывается невозможным гарантировать одновременное сохранение векторных и аксиальных (или киральных) токов без того, чтобы разрушить их калибровочную инвариантность. Детали будут объяснены в следующем семестре в курсе В.А.Андрианова. В физически состоятельной модели общепринятая мотивировка сокращения аномалий состоит в том, что их появление в законах сохранения калибровочных токов ведет к рождению духовых состояний с отрицательным вкладом в баланс вероятностей. В самом деле, если какой-либо фермионный ток, несущий гиперзаряд и взаимодействующий с калибровочным полем (например, с полем B_μ в СМ) не сохраняется, $\partial_\mu J_{Y,(5 \text{ or } L,R)}^\mu \neq 0$, тогда продольная духовая мода калибровочного поля, $B_\mu^\parallel = \partial_\mu \alpha$, будет рождаться в аннигиляции фермионов и антифермионов, тем самым, нарушая унитарность СМ.

$$B_\mu = B_\mu^\perp + \partial_\mu \alpha; \quad \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu J_{Y,(5 \text{ or } L,R)}^\mu \neq 0.$$

Такое несохранение не возникает в классической теории, но оно может появиться после ее квантования.

Явление киральной или аксиальной аномалии в сохранении токов аксиального (кирального) заряда возникает в однопетлевом вкладе теории возмущений, более точно, в трёх-вершинной (= треугольной) диаграмме Адлера-Белла-Джакива фермионной петли (в неабелевом случае, добавляют также четырех- и даже пяти-вершинных диаграммы, в этом случае последние диаграммы добавляются из соображений симметрии). Треугольная диаграмма описывает рождение (или слияние) пары калибровочных бозонов (более детально, W- и B-векторных мезонов, глюонов и даже гравитонов) при воздействии 4х-дивергенции аксиального (кирального) тока фермионов

$\partial_\mu J_5^\mu$ или $L,R \implies$ (или \Longleftarrow) $W + W$ или $B + B$ или $G + G$ или g гравитон + g гравитон. Сохранение этих токов должно обеспечиваться обращением в нуль вклада треугольной диаграммы в каждом канале рождения пары бозонов. При этом виртуальные фермионы суммируются по всем мультиплетам в данном поколении.

Треугольная диаграмма выглядит расходящейся по соотношению степеней импульса в числителе и знаменателе, с учетом меры интегрирования. Однако её существенная часть оказывается конечной и не может быть удалена перенормировкой какой-либо вершины

Тем не менее аномалии опасны лишь в токах связанных с калибровочными бозонами. В частности, квантовая электродинамика, это - векторная теория, которая квантуется с сохранением векторного тока. Аномалия появляется в аксиальном токе КХД (некалибровочном), в рамках КЭД и КХД эта аномалия помогает описать распад нейтрального пиона на два фотона и позволяет установить число цветных степеней свободы кварков в КХД. А вот в слабых взаимодействиях аксиальная(левая/правая киральная) аномалия возникает в калибровочных токах гиперзарядов, которые принимают разные значения для лево- и правовинтовых фермионов.

Импульсная структура аномалии в законе сохранения аксиального (кирального) тока характеризуется следующим интегралом,

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\gamma_5 \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p}} + \gamma_5 \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} + \not{q}} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p}} \right),$$

где q и $-k - q$ обозначают импульсы двух испускаемых бозонов (см.Рис.3). В этом случае импульс, входящий в закон сохранения (4х дивергенцию тока), равен k . Спиновая и внутренняя структуры вершин устроены так, что испускаться могут два одинаковых векторных бозона. Поэтому результат должен быть бозе-симметричен: $q \leftrightarrow -k - q$; $\nu \leftrightarrow \rho$. Очевидно, аномальная диаграмма содержит след произведения матрицы γ_5 с шестью векторами γ матриц (три из вершин $\sim \gamma_\mu$ и три из пропагаторов фермионов $\sim \gamma_\nu p^\nu / p^2$, если пренебречь массами фермионов). После взятия следа мы находим матричную структуру $\text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\delta \gamma_\kappa) = 4i \sum_{perm.} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\delta\kappa}$. Соответствующий интеграл формально расходится, но после регуляризации дает конечный результат. Вместе с тем, в зависимости от регуляризации он определен с точностью до бозе-симметричной величины

$$\Delta \Gamma_{\mu\alpha\beta} = c \epsilon_{\mu\alpha\beta\sigma} (2q + k)^\sigma.$$

Поэтому с учетом этого произвола калибровочную инвариантность (поперечность) в вершинах взаимодействия с калибровочными полями можно обеспечить подходящей

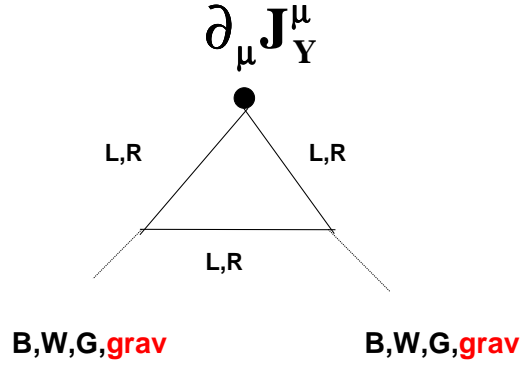


Рис. 2: Аномальный треугольник

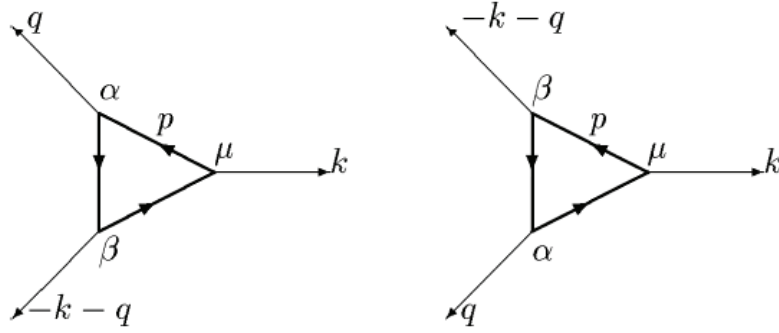


Рис. 3: Аномальный треугольник в КЭД

перенормировкой треугольной диаграммы так, чтобы $q^\alpha \Gamma_{\mu\alpha\beta;ren} = (q+k)^\beta \Gamma_{\mu\alpha\beta;ren} = 0$. Четыре индекса в антисимметричном тензоре Леви-Чивита $\epsilon_{\mu\alpha\beta\sigma}$ свертываются с двумя поляризациями векторных полей и двумя импульсами, которые несут испускаемые (идентичные!) векторные бозоны ,

$$k^\mu \Gamma_{\mu\alpha\beta;ren} = \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\sigma} k^\mu q^\sigma.$$

Остальные индексы свертываются между собой в результате интегрирования по виртуальному импульсу петли. В координатном представлении функционал аномальной структуры имеет вид,

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\sigma} \text{tr}(\hat{F}_{\mu\alpha} \hat{F}_{\beta\sigma}),$$

где $\hat{F}_{\mu\alpha}$ является напряженностью калибровочного поля - матрицей в пространстве внутренних степеней свободы, а g - константа взаимодействия. Отметим, что коэффициент $1/32$ соответствует сохранению двух векторных токов и аномалии в одном аксиальном токе. Это т.н. ковариантные аномалии. Если все три тока - киральные (в нашем случае левые) и идентичные то условие самосогласованности аномалии определяет коэффициент $1/24$.

В случае гравитации можно вывести аналогичное выражение, которое содержит пространственно-нечётную плотность Черна-Понтрягина $\sim \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\alpha,\mu\nu}^\beta R_{\beta,\rho\sigma}^\alpha$, синглетную по отношению ко всем группам внутренней симметрии.

Теперь обратимся к структуре функционала аномалии по отношению к генераторам внутренних симметрий (флейворных и цветных). Из-за Бозе симметрии эта структура образуется симметризованным произведением генераторов групповых алгебр, \sim

$\text{tr}[T_f^a \{t^b, t^c\}]$. Представления элементов алгебры симметрии СМ выбираются для произвольных токов фермионов как T_f^a и для токов, рождающих калибровочные бозоны как $t^a = \mathbf{Y}/2$ для $U(1)_Y$ или $= \tau^a/2$ для $SU(2)_L$ или $\lambda^a/2$ для $SU(3)_c$ или \mathbf{I} для гравитации. Напомним, что существуют и симметричные структурные константы, определяющие трилинейный след $\text{tr}\{\lambda^a \lambda^b \lambda^c\} = d^{abc}$

Требование сохранения калибровочной инвариантности и невозможности рождения духовых состояний, ассоциированных с продольными квантами калибровочных полей удовлетворяется отбором представлений фермионов, которые свободны от аномалий, т.е. для всех генераторов калибровочных групп вклады левых и правых фермионов сокращают друг друга,

$$\text{tr}[T_f^a \{t^b, t^c\}]_L - \text{tr}[T_f^a \{t^b, t^c\}]_R = 0,$$

при сохранении векторных токов. Напомним, что существуют в ряде групп существуют и симметричные структурные константы, определяющие трилинейный след $\text{tr}\{\lambda^a \lambda^b \lambda^c\} = d^{abc}$. Для соответствующих калибровочных теорий киральные, левые или правые, взаимодействия с фермионами приводят к нарушению калибровочной инвариантности из-за аномалий. В частности, аксиальная или киральная электродинамика или левая хромодинамика содержат духовые состояния, которые не отщепляются от пространства физических поперечных состояний.

Условие сокращения аномалий в СМ диктует набор гиперзарядов СМ единственным образом, который повторяется в каждом поколении (универсальность электрослабых взаимодействий). Действительно, для испускаемых W- и V- векторных мезонов, глюонов и гравитонов, получаются следующие соотношения,

$$\begin{aligned} \mathbf{YWW} : \quad & \sum_{quarks, leptons} Y_L = N_c \cdot N_f \cdot Y_{L,q} + N_f \cdot Y_{L,l} = 0; \\ \mathbf{YBB} : \quad & \sum_{quarks, leptons} (Y_L^3 - Y_R^3) = N_c \cdot N_f \cdot Y_{L,q}^3 + N_f \cdot Y_{L,l}^3 - N_c \cdot (Y_{R,u}^3 + Y_{R,d}^3) - Y_{R,e}^3 = 0; \\ \mathbf{YGG} : \quad & \sum_{quarks} (Y_L - Y_R) = N_c \cdot N_f \cdot Y_{L,q} - N_c \cdot (Y_{R,u} + Y_{R,d}) = 0; \\ \mathbf{Ygg} : \quad & \sum_{quarks, leptons} (Y_L - Y_R) = \sum_{leptons} (Y_L - Y_R) = N_f \cdot Y_{L,l} - Y_{R,e} = 0, \end{aligned}$$

где суммирование по кварковым гиперзарядам происходит $N_c = 3$ раза, для левого дублета лептонов $N_f = 2$ и подразумевается нормировка на заряд электрона $Y_{R,e} = -2$. Легко проверить, что выбор ,

$$Y_{L,q} = 1/3; Y_{L,l} = -1; Y_{R,u} = 4/3; Y_{R,d} = -2/3; Y_{R,e} = -2,$$

является единственным решением (с точностью до перестановки $u \leftrightarrow d$) условий, приведённых выше. Все остальные токи фермионов, взаимодействующих с калибровочными

бозонами, не аномальны, т.к. либо являются векторными, либо строятся с генераторами алгебр, свободных от аномалий.

Подчеркнём, что уникальность выбора гиперзарядов в каждом поколении объясняет универсальность слабых взаимодействий в различных поколениях.

Сохранение $B - L$ заряда и препятствие для введения ему соответствующего калибровочного поля

На классическом уровне сохраняющиеся барионные и лептонные токи порождаются генераторами лептонных и барионных зарядов, которые являются синглетами фундаментальной группы СМ $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Однако их сохранение потенциально может быть нарушено квантовыми аномалиями. Действительно, оказывается, что барионный ток J_B^μ или отдельно лептонный J_l^μ могут не сохраняться из-за аномалий в каналах рождения двух W или двух B векторных бозонов. Тем не менее, оказывается, что их разность не аномальна, если барионный и лептонный заряды $Q_B = 1/3$, $Q_l = 1$ и число флейворов в дублете $N_f = 2$. В каждом поколении,

$$\begin{aligned} \mathbf{WW} : \quad \partial_\mu J_B^\mu &\sim N_c \cdot Q_B \cdot N_f = 2; \quad \partial_\mu J_l^\mu = Q_l \cdot N_f = 2; \quad \partial_\mu (J_B^\mu - J_l^\mu) = 0; \\ \mathbf{BB} : \quad \partial_\mu J_B^\mu &\sim N_c \cdot Q_B \cdot (N_f \cdot Y_{L,q}^2 - (Y_{R,u}^2 + Y_{R,d}^2)) = -2; \\ \partial_\mu J_l^\mu &= Q_l \cdot (N_f \cdot Y_{L,l}^2 - Y_{R,e}^2) = -2; \quad \partial_\mu (J_B^\mu - J_l^\mu) = 0. \end{aligned}$$

Раз эта комбинация зарядов остаётся сохраняющейся после квантования, то возникает вопрос почему $B - L$ заряды не взаимодействуют между собой подобно сохраняющимся электрическим зарядам в электродинамике, посредством калибровочного абелевого векторного поля, сопровождающего глобальную симметрию $U(1)_{B-L}$ и соответствующего бариолептонному векторному бозону. Фактически, ответ скрыт в структуре аномалий в треугольных вершинах рождения таких бозонов, образованных фермионными петлями в СМ.

Предположим, что существует нейтральный бозон Z' калибровочной симметрии $U(1)_{B-L}$. Тогда локальное сохранение соответствующего фермионного тока – обращение в нуль его четырех-дивергенции, выполняется в каналах испускания других калибровочных бозонов СМ (см. выше). Однако необходимо также проверить сохранение этого тока и в процессах рождения новых Z' . Условие компенсации аномалий состоит из барионной и лептонной частей,

$$\partial \mathbf{J}_{Z'}, \mathbf{Z}' \mathbf{Z}' : \quad \sum_{quarks, leptons} N_c \cdot N_f \cdot Q_B^3 + N_f \cdot Q_l^3 - N_c \cdot 2 \cdot Q_B^2 - Q_l^3 = Q_l^3 = 1.$$

Таким образом, $B - L$ ток не сохраняется в этом канале, если число левых и правых нейтрино не одинаково, как в СМ. Тем самым, $B - L$ заряды в СМ не могут быть связаны калибровочными полями. Последнее становится возможным, если а) существуют правые нейтрино и б) они взаимодействуют с Z' .

Недавно появились достоверные данные о смешивании между нейтрино разных поколений, и сообразно им некоторые из нейтрино должны быть массивными. Если предположить, что они дираковского типа, то либо правые компоненты оказываются стерильными с нулевым гиперзарядом в минимальной СМ, либо мы вынуждены добавить дополнительный векторный бозон, связанный с собственным гиперзарядом, для того, чтобы вовлечь правые нейтрино во взаимодействие с остальной материей. Тогда при подходящем выборе дополнительного гиперзаряда появляется возможность того, чтобы этот бозон описывался калибровочным полем $B - L$ заряда, .