Уравнение DGLAP

$$\frac{d}{dt} F_{1s}^{NS}(e^{2t}Q_0^2) = \gamma_s^{NS}(t) + F_{1s}^{(NS)}(e^{2t}Q_0^2)$$

Можно переписать иначе: $Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} F_s^{(NS)}(Q^2) = \gamma_s^{(NS)}(Q^2)\, F_s^{(NS)}(Q^2)$

$$F_s^{NS}(Q^2) = \int_0^1 \frac{dx}{x}\, x^s F^{NS}(x, Q^2)$$ - ~~[illegible]~~

F_s можно продолжить на комплексную правую полуплоскость по S.

$$F_s^{NS}(Q^2) = \int_0^\infty d\xi\, e^{-\xi s} F^{NS}(\xi, Q^2), \quad x = e^{-\xi}$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} ds\, x^{-s} F_s^{NS}(Q^2),$$

контур интегрирования берется правее всех особенностей.
эта формула дает результат при $x < 1$
$x > 1 : F = 0$

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} F^{NS}(x, Q^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dS\, x^{-s} Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} F_s^{NS}(Q^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dS\, x^{-s} \gamma_s^{(NS)}(Q^2) F_s^{(NS)}(Q^2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dS\, x^{-s} \gamma_s^{(NS)}(Q^2) \int_0^1 \frac{dx'}{x'} x'^s F^{NS}(x', Q^2) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx'}{x'} \frac{1}{2\pi i}\int dS\, x^{-s} \gamma_s^{(NS)}(Q^2) F^{NS}(x', Q^2)(x')^s =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx'}{x'} F^{NS}(x', Q^2)\, k^{NS}\left(\frac{x}{x'}\right)$$

$$k^{NS}\left(\frac{x}{x'}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dS \left(\frac{x'}{x}\right)^s \gamma_s^{NS}(Q^2) = \Theta(x'-x)\, k^{NS}\left(\frac{x}{x'}, Q^2\right)$$

$k^{NS} \neq 0$ только если $x' \geq x$

Итого: $Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} F^{NS}(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dx'}{x'}\, k^{NS}\left(\frac{x}{x'}\right) F^{NS}(x', Q^2)$

Нам необходимо указать $F^{NS}(x, Q_0^2)$ при заданном Q_0^2, а потом ур-е решается итерациями

$$\gamma^{NS} = -g^2(Q^2)\, \rho_{1s}^{NS}$$

$$k^{NS}(z, Q^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dS\, z^{-s} \gamma_s^{NS}(Q^2)$$

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \psi(s+1) = -C + \sum_1^s \frac{1}{k} =, \quad C \text{ - постоянная Эйлера.}$$

$$= 1 - C + \sum_{k=2}^s \frac{1}{k}$$

$$\sum_2^s \frac{1}{k} = \psi(s+1) + C - 1$$

$$\rho_s = \frac{1}{8\pi^2}\frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4\psi(s+1) + 4C - 4\right] = \frac{1}{8\pi^2}\frac{4}{3}\left[1 + 4C - 4 - \frac{2}{s(s+1)} + 4\psi(s+1)\right]$$

(SI)

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} ds\, z^{-s}\left\{-\frac{2}{s(s+1)} + 4\psi(s+1) + const\right\} =$$, предполагая, что $z<1$

$const$ — не дает вклада при $z<1$, т.к. замыкаем в левую полуплоскость.

$\psi(s+1)$ имеет простые полюса в $s=-1,-2\ldots$

$Res = -1$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} ds\, z^{-s}\left[-\frac{2}{s}+\frac{2}{s+1}+4\psi(s+1)\right] = -2+2z-4\sum_{n=1}^{\infty} z^n =$$

$$= -2+2z+4-4\frac{1}{1-z} = -2(1+z)-\frac{4}{1-z} = \frac{2(1-z^2)-4}{1-z} = -2\,\frac{1+z^2}{1-z}$$

имеет особенность при $x=x'$, т.к. $z=\frac{x}{x'}$

$\gamma_1^{NS}=0$

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}F_s(Q^2) = \gamma_s^{NS}(Q^2)$$

$$s=1:\; Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}F_1^{NS}(Q^2)=0 \Rightarrow Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}\int_0^1 dx\, F(x,Q^2)=0$$

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}F(x,Q^2) = \int_x^1 dx'\, F(x',Q^2)\, k^{NS}\!\left(\frac{x}{x'}\right)$$

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}\int_0^1 dx\, F(x,Q^2) = 0 = \int_0^1 dx\int_x^1 dx'\, F(x',Q^2)\, k\!\left(\frac{x}{x'}\right) = \int dx\, dx' dx''\, \delta(x-x'x'')\, F(x',Q^2)\, k(\underbrace{x}_{x''}) =$$

$$= \int dx' dx''\, F(x',Q^2)\, k(x'',Q^2) = 0$$

$\Rightarrow$ необходимо чтобы $\int dx''\, k(x'',Q^2)=0$

Как этого добиться?

при $x<1$: $-\frac{2(1+z^2)}{1-z}$; $\frac{1}{1-z}\xrightarrow{\text{регуляризация}}\frac{1}{(1-z)_+}$: $\int dz\,\frac{F(z)}{(1-z)_+} \equiv \int dz\,\frac{F(z)-F(1)}{1-z}$

$$-\frac{2(1+z^2)}{1-z} \to -2\,\frac{1+z^2}{(1-z)_+}$$

$$-2\int dz\,\frac{1+z^2}{(1-z)_+} = -2\int dz\,\frac{1+z^2-2}{1-z} = -2\int dz\,\frac{z^2-1}{1-z} = 2\int_0^1 dz\,(1+z) = 3$$

т.е. нужная замена $-\frac{2(1+z^2)}{1-z} \to -2\,\frac{1+z^2}{(1-z)_+} - 3\delta(1-z)$

тогда $k^{NS}(z) = \frac{g^2(Q^2)}{8\pi^2}\left[\frac{8}{3}\,\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 4\delta(1-z)\right]$

Ур-е DGLAP обобщается и на остальное F:

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}F^q(x,Q^2)=\int_x^1\frac{dx'}{x'}\left\{k^{NS}\left(\frac{x}{x'},Q^2\right)F^q(x',Q^2)+k^{qg}\left(\frac{x}{x'},Q^2\right)F^g(x',Q^2)\right\}$$

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}F^g(x,Q^2)=\int_x\frac{dx'}{x'}\left\{k^{gq}\left(\frac{x}{x'},Q^2\right)F^q(x',Q^2)+k^{gg}\left(\frac{x}{x'},Q^2\right)F^g(x',Q^2)\right\}$$

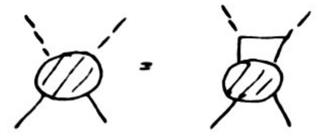
$$k^{qg}=\frac{g^2(Q^2)}{8\pi^2}\left[z^2+(1-z)^2\right]$$

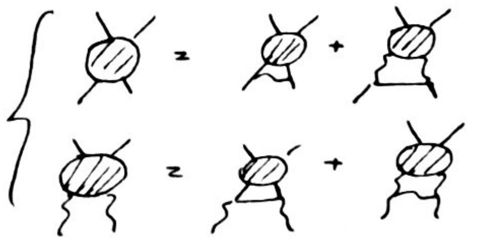
$$k^{gq}=\frac{g^2(Q^2)}{8\pi^2}N_F\,\frac{1+(1-z)^2}{z}$$

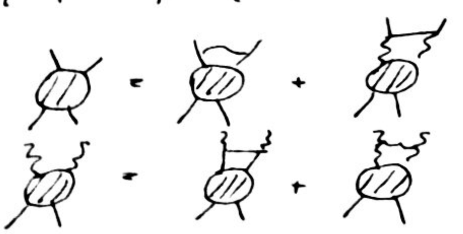
$$k^{gg}=\frac{g^2(Q^2)}{8\pi^2}\left[12\left(\frac{z}{(1-z)_+}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)\right)+\left(11-\frac{2}{3}N_F\,\delta(1-z)\right)\right]$$

Чтобы получить „настоящие" ур-я DGLAP, рассмотрим:

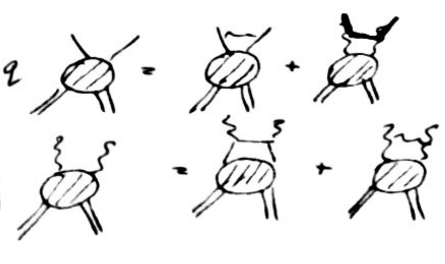
Потом :







=> q



g

и ур-я DGLAP:

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}q(x,Q^2)=\int_x^1\frac{dx'}{x'}\left(k^{NS}\left(\frac{x}{x'},Q^2\right)q(x',Q^2)+k^{qg}\left(\frac{x}{x'},Q^2\right)g(x',Q^2)\right)$$

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}g(x,Q^2)=\int_x^1\frac{dx'}{x'}\left(k^{gq}\left(\frac{x}{x'},Q^2\right)q(x',Q^2)+k^{gg}\left(\frac{x}{x'},Q^2\right)g(x',Q^2)\right)$$

$x \to 0$, пренебрегаем всем, кроме глюонов: (SI)

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} g(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} k^{gg}\left(\frac{x}{x'}, Q^2\right) g(x', Q^2)$$

K_{gg} было ранее, пренебрегаем всеми не сингулярными членами, т.е.

$$k^{gg} = \frac{g^2(Q^2)}{8\pi^2} \cdot 12 \cdot \frac{x'}{x}$$

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} g(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \frac{12 g^2(Q^2)}{8\pi^2 x} x' g(x', Q^2) = \frac{12 g^2(Q^2)}{8\pi^2 x} \int_x^1 dx' g(x', Q^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} g(x, Q^2) = -\frac{12 g^2(Q^2)}{8\pi^2} g(x, Q^2)$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} x g(x, Q^2) = -\frac{12 g^2(Q^2)}{8\pi^2} x g(x, Q^2)$$

$$, \quad x = e^{-y}$$

$$x \frac{d}{dx} = -\frac{d}{dy}$$

$$\ln Q^2 Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} = \ln Q^2 \frac{\partial}{\partial \ln Q^2} = \frac{\partial}{\partial \ln \ln Q^2}$$

$$g^2(Q) = \frac{a}{\ln Q^2} \; ; \quad a = \frac{24}{11 - \frac{2}{3} N_F}$$

$$\ln \ln Q^2 \equiv z$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} x g(x, z) = a\, x g(x, z)$$

Нужна асимптотика при $y = -\ln x \to \infty$
$z = \ln \ln Q^2$

$$xg \sim e^{\sqrt{a z y}}$$

$$xg \sim e^{\sqrt{a |\ln x| \ln \ln Q^2}}$$