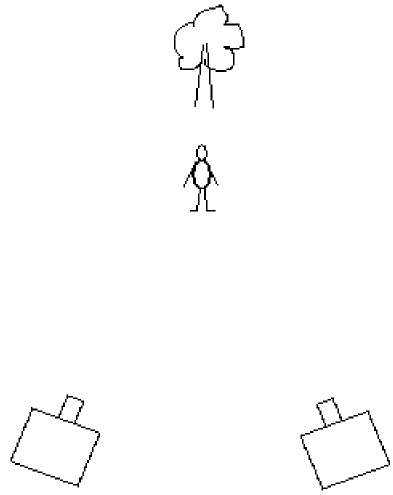
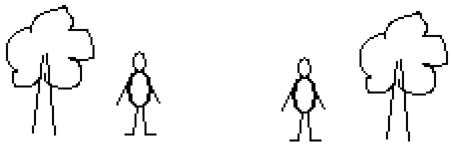
Экзамен. Поляроидные очки для стереокино.

Пусть мы собираемся фотографировать человека, стоящего перед деревом.

Сделаем снимок двумя фотоаппаратами одновременно из двух точек, разнесенных по горизонтали.



На снимке левого фотоаппарата человек будет справа, а дерево — слева. На втором снимке — наоборот.



Положим два снимка рядом и будем смотреть на них так, чтобы левым глазом видеть только снимок, снятый левым фотоаппаратом, а правым глазом — снимок снятый правым фотоаппаратом. Тогда, чтобы увидеть двумя глазами человека, глаза нужно будет свести ближе к переносице, а чтобы увидеть дерево, глаза нужно будет развести дальше от переносицы.

В результате человек будет казаться расположенным ближе, а дерево — дальше.

На этом принципе может быть создано стереоизображение на киноэкране.

Стереофильм (3D) снимают одновременно двумя разнесенными кинокамерами. Чтобы усилить стереоэффект расстояние между кинокамерами намеренно делают больше, чем расстояние между двумя глазами одного человека.

Две проявленные кинопленки одновременно демонстрируют на одном и том же киноэкране двумя проекторами. Свет от каждого проектора пропускают через поляроид. Оси поляроидов скрещены, то есть, направлены под прямым углом друг относительно друга.

Зрители смотрят на экран через очки, стекла которых заменены точно такими же скрещенными поляроидами.

В результате каждый глаз видит изображение снятое соответствующей камерой, что и создает стереоэффект.

Экзамен. Циркулярно поляризованный свет или свет круговой поляризации.

Свет поляризован по кругу, если в каждой точке пространства вектор $\vec{E}$ вращается вокруг луча.

Факультативная вставка.

В разных учебниках по оптике один и тот же свет называют то светом левой, то светом правой круговой поляризации. Если для вас важно, какую из двух круговых поляризаций называть левой, то вы должны сами дать определение левой и правой круговой поляризации.

В учебнике Бутикова и в монографии Борна и Вольфа дано следующее определение света левой круговой поляризации. Если вы смотрите навстречу лучу и конец вектора $\vec{E}$ вращается налево, против часовой стрелки, то вы видите свет левой круговой поляризации.

Логика такого определения состоит в том, что если вы смотрите на вращающийся электрический диполь, то диполь, вращающийся налево, излучает в вашем направлении свет левой круговой поляризации.

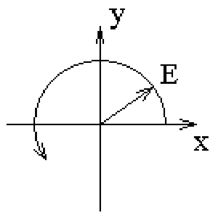
Заметим, что в таком случае направление вращения вектора $\vec{E}$ образует правый винт с направлением света. По этой причине в курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица такой свет называют светом правой круговой поляризации.

Примем определение левой круговой поляризации в соответствии с учебником Бутикова и монографией Борна и Вольфа.

Конец факультативной вставки.

Рассмотрим свет, который распространяется вдоль оси z, тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$.

Ось z направлена на нас, и для левой круговой поляризации вектор $\vec{E}$ вращается налево, против часовой стрелки.



Тогда в фиксированной пространственной точке электрическое поле имеет следующий вид:

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin(\omega t) = E_0 \cdot \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad =>$$

Круговая поляризация — это сумма двух линейных поляризаций со сдвигом фаз $\frac{\pi}{2}$.

Тогда в комплексном представлении плоская световая волна левой круговой поляризации имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = E_0 \cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} \\ \tilde{E}_y = E_0 \cdot e^{i\left(kz-\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_0\right)} \end{cases}, \text{ где } kz = \left(\vec{k},\vec{r}\right), \text{ так как } \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z.$$

Объединим две комплексных проекции вектора $\vec{E}$ в один комплексный вектор и получим:

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_x\vec{e}_x + \tilde{E}_y\vec{e}_y = E_0\vec{e}_x e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} + E_0\vec{e}_y e^{i\left(kz-\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_0\right)} =$$

$$= E_0\vec{e}_x e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} + E_0\vec{e}_y e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} = E_0\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)\cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)}.$$

Здесь удобно ввести единичный вектор круговой поляризации. Вектор $\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)$ не вполне для этого подходит, так как его длина не равна единице.

Найдем длину вектора $\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)$. Квадрат длины вектора равен скалярному произведению вектора самого на себя. Скалярное произведение двух произвольных комплексных векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ выражается через комплексные проекции этих векторов следующим образом:

$$\left(\vec{A},\vec{B}\right) = A_x B_x^* + A_y B_y^* + A_z B_z^*.$$

Пусть в этом равенстве векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равны друг другу $\vec{A} = \vec{B} = \vec{e}_x + i\vec{e}_y$, тогда

$$\left|\vec{A}\right|^2 = \left(\vec{A},\vec{A}\right) = \left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y,\ \vec{e}_x + i\vec{e}_y\right) = 1\cdot 1^* + i\cdot\left(i\right)^* = 1\cdot 1 + i\cdot\left(-i\right) = 2.$$

Следовательно, длина вектора $\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)$ равна $\sqrt{2}$. Разделим вектор на его длину и получим единичный вектор.

$$\begin{cases} \vec{e}_+ \equiv \dfrac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_- \equiv \dfrac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ — единичные векторы левой и правой круговых поляризаций света, распространяющегося вдоль оси z.

Вернемся к рассмотрению плоской световой волны левой круговой поляризации:

$$\tilde{\vec{E}} = E_0\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)\cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} = \sqrt{2}\cdot E_0\cdot\vec{e}_+\cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)},$$ где E_0 — вещественная амплитуда каждой линейной поляризации.

Будем называть величину $\sqrt{2}E_0$ вещественной амплитудой волны круговой поляризации.

Переобозначим $\sqrt{2}E_0$ за новое E_0, тогда в новых обозначениях:

$\tilde{\vec{E}} = E_0\vec{e}_+ e^{i(kz-\omega t+\varphi_0)}$, где $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ — вещественная амплитуда каждой линейной поляризации, E_0 — вещественная амплитуда круговой поляризации.

Новые обозначения удобны тем, что выражение для интенсивности света $I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2$ оказывается справедливым и для линейной и для круговой поляризации света.

Экзамен. Эллиптическая поляризация света.

Направим ось z вдоль луча, тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$.

Сложим две волны, линейно поляризованные вдоль осей x и y. Пусть разность фаз этих волн произвольна. Суммарную волну можно записать в виде:

$\tilde{\vec{E}} = E_0\vec{e}_p e^{i(kz-\omega\cdot t+\varphi_0)}$, где

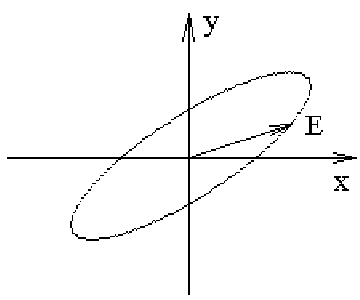
$\vec{e}_p$ — единичный комплексный вектор эллиптической поляризации.

$\vec{e}_p \perp \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$ <=> $\left(\vec{e}_p, \vec{e}_z\right) = 0$

$\vec{e}_p = \frac{a\vec{e}_x + b\vec{e}_y}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}$, где a и b — произвольные комплексные числа для произвольной эллиптической поляризации.

$\vec{e}_p$ — единичный вектор, что следует из равенства $\left(\vec{e}_p, \vec{e}_p\right) = 1$, которое легко проверить, расписав скалярное произведение в декартовых координатах.

В эллиптически поляризованной волне конец вектора $\vec{E}$ двигается по эллипсу в плоскости перпендикулярной лучу.



Для каждой эллиптической поляризации $\vec{e}_{p1}$ существует ортогональная к ней поляризация $\vec{e}_{p2}$:

$\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}\right) = 0$.

Любую монохроматическую волну, направленную вдоль оси z, можно представить, как суперпозицию двух линейных поляризаций $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$, как суперпозицию двух круговых поляризаций $\vec{e}_+$ и $\vec{e}_-$ или двух эллиптических поляризаций $\vec{e}_{p1}$ и $\vec{e}_{p2}$.

Для света эллиптической поляризации выполняется тоже соотношение между интенсивностью света и амплитудой волны $I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2$, что и для света линейной и круговой поляризации.

Неполяризованный свет — это обязательно не совсем монохроматический свет. Неполяризованный свет — это свет эллиптически поляризованный, но параметры эллипса случайным образом медленно изменяются во времени. Характерное время изменения параметров эллипса поляризации равно $\frac{1}{\Delta\omega}$, где $\Delta\omega$ — ширина спектра источника света. Пример неполяризованного света — солнечный свет.

Экзамен. Стоячие световые волны.

При нормальном падении света на зеркало свет отражается обратно.

Две встречные волны одинаковой амплитуды образуют стоячую волну.

Рассмотрим встречные волны, направленные вдоль оси z. Пусть волны линейно поляризованы вдоль оси x. Запишем встречные волны в вещественном представлении:

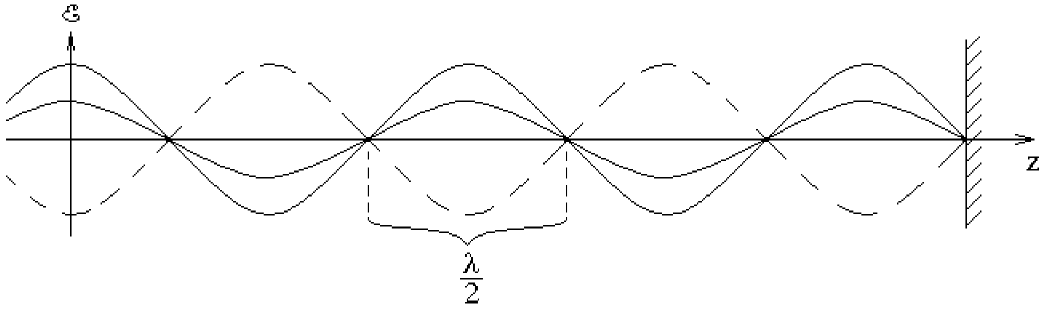
$$E_x(t,z) = E_0\cos(kz - \omega t) + E_0\cos(-kz - \omega t).$$

Второе слагаемое описывает встречную волну, так как в нем z заменено на (-*z*). Следовательно, если первая волна распространяется вдоль оси *z*, то вторая волна — вдоль оси (-*z*).

Преобразуем сумму косинусов в произведение согласно формуле $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ и получим

$$E_x(t,z) = E_0\cos(kz - \omega t) + E_0\cos(-kz - \omega t) = 2E_0\cos(kz)\cdot\cos(\omega t)$$

Построив эту функцию от z в разные моменты времени t, мы увидим, что в некоторых точках $\cos(kz) = 0$, и суммарная волна остается равной нулю в любой момент времени. Эти точки называются узлами стоячей волны. Они расположены на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$ друг от друга.



Посередине между узлами стоячей волны колебания суммарной волны максимальны. Эти точки называются пучностями стоячей волны.

Оказывается, что в узлах поля $\vec{E}$ находятся пучности поля $\vec{B}$ и наоборот. Дело в том, что если в некоторой точке электрические поля встречных волн синфазны и усиливают друг друга, то магнитные поля противофазны. И действительно. Векторы $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Если один из тройки векторов $\vec{E}$ направления не меняет, а второй $\vec{k}$ — меняет на противоположное (для встречной волны), то третий вектор $\vec{B}$ тоже обязан изменить знак для правой тройки векторов. Значит, если в некоторой точке в некоторый момент времени векторы $\vec{E}$ встречных волн синфазны и образуют пучность поля $\vec{E}$, то в этой точке в этот же момент векторы $\vec{B}$ противофазны и образуют узел поля $\vec{B}$.

При отражении света от металлического зеркала на зеркале образуется узел поля $\vec{E}$, как на рисунке и пучность поля $\vec{B}$. Чтобы понять, почему так происходит, рассмотрим отражение от идеального металлического зеркала.

Сверхпроводник — это идеальное зеркало для радиоволн и электромагнитного излучения более низких частот.

Свет падает на зеркало нормально, а световые волны поперечны, поэтому на зеркале будут присутствовать только тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей. Нормальные составляющие равны нулю.

Рассмотрим граничные условия для тангенциальных составляющих полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$:

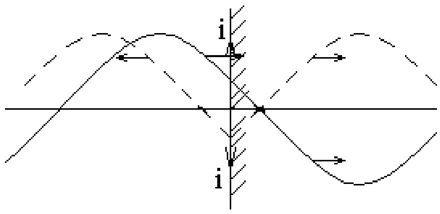
$$\begin{cases} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i \end{cases}.$$

В сверхпроводнике нет ни электрического поля $\vec{E}$, ни магнитного поля $\vec{B}$. Тогда для полей над поверхностью сверхпроводника справедливы следующие граничные условия:

$$\begin{cases} E_{\tau} = 0 \\ B_{\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i \end{cases}.$$

Следовательно, на поверхности идеального зеркала поле $\vec{E}$ обращается в ноль, а поле $\vec{B}$ может быть отлично от нуля, и это приведет только к появлению поверхностных токов i. Это и означает, что на зеркале находится узел поля $\vec{E}$ и пучность поля $\vec{B}$.

Заметим, что поле $\vec{B}$ на зеркале осциллирует с оптической частотой и $B_\tau = \frac{4\pi}{c} i$. Следовательно, по поверхности металлического зеркала течет переменный поверхностный ток i.



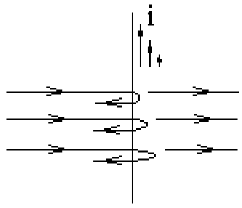
На зеркало слева направо падает световая волна (поля E). Она изображена сплошной линией. По поверхности зеркала течет переменный ток i с оптической частотой. Этот ток излучает плоскую электромагнитную волну одинаково в обе стороны от поверхности зеркала. Волна, излученная в глубину зеркала (изображена пунктиром), интерферирует с прошедшей падающей волной (сплошная линия) и полностью ее гасит. Волна, излученная от зеркала налево, представляет собой отраженную зеркалом волну. Гасящие друг друга волны обязаны быть равны по амплитуде, иначе они не могут полностью погасить друг друга. Излученные в обе стороны плоским током волны также равны по амплитуде, следовательно, падающая и отраженная волны равны по амплитуде.

Если сдвинуть на π фазу бегущей волны, то волна поменяет знак. Для поля $\vec{E}$ на зеркале две встречные волны вычитаются, образуя узел поля $\vec{E}$. Следовательно, можно сказать, что волна поля $\vec{E}$ отражается от зеркала со сдвигом фазы π или, как говорят, в противофазе.

Фаза волны имеет период 2π, а пространственный период бегущей волны — λ, тогда сдвиг фазы на π эквивалентен пространственному перемещению на $\frac{\lambda}{2}$. При отражении от зеркала происходит как бы изменение пути, пройденного волной, на $\frac{\lambda}{2}$, или, как говорят, при отражении от зеркала происходит потеря полуволны.

Это справедливо только для волны электрического поля, но не справедливо для волны магнитного поля. Тем не менее, говорят, что при отражении света от зеркала происходит потеря полуволны. Дело в том, что с веществом в основном взаимодействует электрическое поле световой волны. Воздействием магнитного поля световой волны на среду можно пренебречь.

Если металлическое зеркало не идеально, то поверхностные токи имеют заметную толщину. Для оптического диапазона длин волн толщина слоя токов имеет порядок $\frac{\lambda}{10}$.



Излучение этих токов вглубь зеркала (направо) синфазно друг другу и полностью гасит прошедшую падающую волну. Излучения различных слоев тока в обратном направлении (налево) имеют несколько различные фазы, так как свет проходит до очередной плоскости с током и обратно различные расстояния. Волны, излученные назад, не совсем синфазны, не вполне усиливают друг друга. Поэтому отраженная от зеркала волна меньше падающей, и коэффициент отражения неидеального зеркала с толстым слоем токов меньше единицы. Свет частично поглощается таким зеркалом.

А что будет, если поверхностные токи текут в слое толщиной несколько длин волн или несколько десятков длин волн?

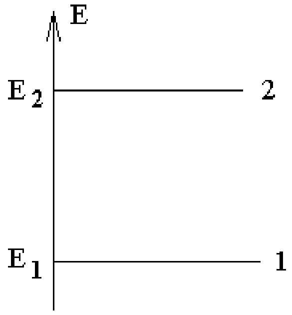
В этом случае волны, отраженные назад разными параллельными плоскостями токов, будут значительно сдвинуты по фазе, так как они проходят разные пути от входа в зеркало до плоскости с током и обратно до поверхности зеркала. При сложении волн в разных фазах суммарная отраженная волна имеет очень малую амплитуду. Следовательно, свет не отражается. Весь свет поглощается.

Интересно отметить, что если среда имеет очень большой коэффициент поглощения, то глубина проникновения света оказывается гораздо меньше длины волны. В таком случае весь свет отражается вместо того, чтобы поглощаться.

Факультатив. Коэффициенты Эйнштейна.

В этом вопросе описание будет проводиться в формализме скоростных или балансных уравнений.

Рассмотрим двухуровневую схему уровней энергии атома. При этом справедливо предполагается, что наличие других уровней энергии ничего не изменяет.



Взаимодействие со светом этих двух уровней энергии описывается тремя процессами. Для каждого из этих процессов частота фотона связана с разностью энергий уровней соотношением

$E_2 - E_1 = h\nu = \hbar\omega$.

Первый процесс — спонтанное излучение. В этом процессе происходит ничем не спровоцированное излучение светового кванта с переходом атома с уровня 2 на уровень 1.

Второй процесс — поглощение света. В этом процессе происходит поглощение светового кванта с переходом атома с уровня 1 на уровень 2.

Третий процесс — вынужденное излучение. Это процесс вынужденного светом перехода атома с уровня 2 на уровень 1 с излучением светового кванта.

Обсудим, каковы вероятности этих трех процессов.

Для описания вероятностей Эйнштейн ввел в рассмотрение так называемые коэффициенты Эйнштейна:

A_{21}, B_{12}, B_{21}.

$A_{21}\,dt$ — вероятность спонтанного перехода $2 \to 1$ для одного атома за время dt.

$B_{12}\,w_\omega\,dt$ — вероятность перехода $1 \to 2$ для одного атома за время dt под действием света, где $w_\omega \equiv \dfrac{dw}{d\omega}$ — спектральная плотность объемной плотности энергии светового поля на частоте рассматриваемого перехода $\omega = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$.

$B_{21}\,w_\omega\,dt$ — вероятность перехода $2 \to 1$ для одного атома за время dt под действием света.

Эйнштейн нашел отношения этих коэффициентов из термодинамических соображений, рассматривая тепловое равновесие между излучением и поверхностью абсолютно черного тела. Эйнштейн при этом опирался на формулу Планка для спектральной плотности объемной плотности энергии излучения, находящегося в тепловом равновесии с абсолютно черным телом (спектр излучения абсолютно черного тела)

$$w_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1}.$$

При очень высокой температуре спонтанным излучением можно пренебречь по сравнению с вынужденными световым полем переходами атома между уровнями энергии 1 и 2. Тогда вероятность перехода $1 \to 2$ за время dt равна вероятности перехода $2 \to 1$ за то же время dt:

$$B_{12}\, w_\omega\, dt = B_{21}\, w_\omega\, dt$$

откуда получаем

$$B_{12} = B_{21}.$$

Получим теперь соотношение коэффициентов Эйнштейна A_{21} и B_{21}.

Для этого введем понятие заселенности уровня энергии. По определению $N_1 \equiv \rho_{11} N$ — заселенность или населенность уровня 1 с энергией E_1, здесь N — концентрация атомов или молекул, ρ_{11} — вероятность обнаружить атом на уровне E_1. N_1 — это квантовомеханический аналог концентрации атомов на уровне 1.

Вероятность ρ_{11} имеет два индекса, так как при квантовом описании атомов используется матрица плотности, диагональными элементами которой являются вероятности обнаружить атом на каждом из уровней энергии.

Аналогично $N_2 \equiv \rho_{22} N$ — заселенность уровня 2, ρ_{22} — вероятность обнаружить атом на уровне 2.

Согласно распределению Больцмана при термодинамическом равновесии

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_Б T}}.$$

В нашем случае взаимодействия со световым полем $E_2 - E_1 = \hbar\omega$. Тогда

$$N_2 = N_1 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_Б T}}.$$

В единице объема за время dt число переходов $1 \to 2$ равно числу переходов $2 \to 1$:

$$N_1 B_{12}\, w_\omega\, dt = N_2 \left(B_{21}\, w_\omega\, dt + A_{21}\, dt \right)$$

Подставим сюда $B_{12} = B_{21}$, $N_2 = N_1 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_Б T}}$, $w_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1}$ и получим

$$\begin{cases} B_{21} = B_{12} \\ \dfrac{A_{21}}{B_{21}} = \dfrac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \end{cases}.$$

Интересно, что вероятность спонтанных переходов равна вероятности вынужденных переходов под действием света, в котором в каждом объеме когерентности содержится половина фотона. Позднее была разработана квантовая теория светового поля, в которой считается, что в пустом пространстве, из которого нельзя поглотить кванты света, тем не менее, в каждом объеме когерентности содержится энергия половины фотона.

Если вместо циклической частоты ω в определении коэффициентов Эйнштейна использовать обычную частоту ν, то коэффициенты $B_{21}^{'}$ и $B_{12}^{'}$ будут несколько отличаться от B_{21} и B_{12}. Дело в том, что w_{ω} в 2π раз меньше, чем w_{ν}. И действительно

$$w_{\omega} \equiv \frac{dw}{d\omega} = \frac{dw}{2\pi \cdot d\nu} = \frac{1}{2\pi} w_{\nu} .$$

Вероятность перехода $2 \to 1$ для одного атома за время dt под действием света может быть выражена и через B_{21} и через $B_{21}^{'}$:

$$B_{21} w_{\omega} dt = B_{21}^{'} w_{\nu} dt .$$

Тогда с учетом $w_{\omega} = \frac{1}{2\pi} w_{\nu}$ получаем $B_{21}^{'} = \frac{1}{2\pi} B_{21}$ и окончательно:

$$\begin{cases} B_{21}^{'} = B_{12}^{'} \\ \dfrac{A_{21}}{B_{21}^{'}} = \dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3} \end{cases} \cdot$$