

О. БОР
Б. МОТТЕЛЬСОН

СТРУКТУРА
АТОМНОГО
ЯДРА

NUCLEAR STRUCTURE

Volume I
SINGLE-PARTICLE MOTION

AAGE BOHR
The Niels Bohr Institute,
University of Copenhagen
BEN R. MOTTELSON
NORDITA,
Copenhagen

W. A. BENJAMIN,
Inc.
New York, Amsterdam, 1969

О. БОР, Б. МОТТЕЛЬСОН

СТРУКТУРА
АТОМНОГО
ЯДРА

ТОМ 1

*ОДНОЧАСТИЧНОЕ
ДВИЖЕНИЕ*

Перевод с английского

Под редакцией
Л. А. СЛИВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», МОСКВА,

1971

УДК 539.1

ЗДН2
Б820

3

Книга представляет собой первый том трехтомной монографии по теории ядра. Авторы книги — крупнейшие специалисты в области теоретической ядерной физики — обобщают огромный экспериментальный материал, накопленный к настоящему времени учеными всего мира. В первом томе изложены современные представления об одночастичном движении в ядрах и свойствах симметрии ядерных систем. (Том 2 будет посвящен ядерным деформациям, а том 3 — ядерным корреляциям.)

Книга, отличающаяся доступностью изложения, представит большой интерес для очень широкого круга читателей (научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, студентов старших курсов), занимающихся ядерной физикой.

Редакция литературы по физике

Инд. 2-3-7.
-71.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. Горького
МГУ

8388-25-41

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемый вниманию советского читателя трехтомный труд по существу представляет собой энциклопедию по структуре ядра.

Современная ядерная физика развивается очень быстро, так что число публикуемых работ растет с каждым годом. Разобраться в этом потоке информации и систематизировать результаты — задача чрезвычайно трудная.

Авторы поставили себе благородную цель обобщить весь материал по ядру, накопленный за двадцать лет, и на этой основе осветить различные стороны проблемы строения ядра. Нелегко было бы найти других авторов, которым была бы по плечу столь широкая программа. Даже для них это была не простая задача: на написание своего труда они потратили более десяти лет.

Авторы не стремились к единому подходу при анализе всех многообразных процессов, с которыми мы встречаемся в ядре. Их главным требованием при выборе того или иного способа рассмотрения было требование физической ясности и полноты описания данного явления. Поэтому они пользуются широким арсеналом средств теоретической физики, начиная с общих свойств симметрии систем, различных модельных представлений и идей, следующих из анализа экспериментальных данных.

Большое достижение авторов — полнота изложения, которую сочтут удовлетворительной и экспериментаторы, и теоретики. По всем рассмотренным в ней проблемам в книге даются исчерпывающие ссылки на литературу.

Нет сомнения в том, что капитальный труд О. Бора и Б. Моттельсона станет настольным пособием для советских специалистов, работающих в области физики атомного ядра.

Перевод гл. 1 и 3 и предисловий осуществлен Ю. И. Харитоновым, а гл. 2 — В. И. Исаковым.

Л. А. Слив

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Выход в свет русского издания «Структуры атомного ядра»— большая радость для нас. В течение многих лет мы поддерживаем плодотворные контакты со своими коллегами в Советском Союзе. Многие известные советские ученые, приезжавшие в наш институт в Копенгагене для участия в исследованиях и дискуссиях, стимулировали нашу работу и внесли существенный вклад в развитие идей, которые мы попытались изложить в этой книге. Первым в установлении такого сотрудничества был проф. Слив, и для нашей группы в Копенгагене он и сейчас остается самым ценным коллегой и критиком. Мы благодарны ему и его сотрудникам за их инициативу и за кропотливую работу, связанную с подготовкой настоящего издания.

*Оге Бор
Бен Моттельсон*

Копенгаген
Апрель 1970 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Мысль о написании этой книги возникла у нас примерно десять лет назад, когда появились важнейшие теоретические методы, позволяющие связать коллективные свойства ядер с движением отдельных нуклонов. Пытаясь изложить эти методы, мы постепенно пришли к выводу, что для того, чтобы можно было правильно ими пользоваться, нужно расширить рамки книги и начать с феноменологического анализа свойств ядра. Так мы в конце концов (не оценив времени, которое потребуется для этого) занялись более систематическим изложением современных представлений о структуре ядра.

Некоторые наши коллеги считали, что нам следует начинать с уравнения Шредингера для системы многих тел, а затем путем соответствующих приближений выводить из него наблюдающиеся свойства ядер. Но мы придерживаемся иной точки зрения. При исследовании такой многочастичной системы, как ядро с его «многогранистой» структурой, главное — это, по-видимому, установить, какие понятия и степени свободы соответствуют наблюдающимся явлениям. Успеха в этом направлении удалось достичь, исходя отчасти из экспериментальных данных, отчасти из результатов теоретического анализа модельных систем и отчасти из общих соотношений, основанных на соображениях симметрии.

Нам показалось удобным при изложении материала придерживаться всюду принципа тройного подразделения. Так, вся книга состоит из трех томов, но три главы в каждом. Том I посвящен в основном вопросу об одночастичном движении, но мы решили предпослать изложению материала обзор важнейших свойств симметрии ядерных систем, с которыми мы будем постоянно иметь дело во всей книге. Том II посвящен феноменологическому анализу явлений, связанных с деформацией ядер. В томе III рассматривается микроскопическая теория коллективных возбуждений начиная с простейшего случая конфигурации с малым числом частиц.

В силу «многомерного» характера связи теории с экспериментом нам пришлось ввести дополнительное разделение излагаемого материала на три части: основной текст, примеры и приложения. В основном тексте мы стараемся излагать материал систематически и последовательно. Содержание каждого параграфа основывается только на материале предыдущих параграфов. Хотя в основном тексте и приводятся важнейшие выводы, следующие из сравнения теории с экспе-

риментом, такого «одномерного» изложения недостаточно для извлечения всей информации, содержащейся в экспериментальных данных. В самом деле, во всяком реальном эксперименте принимает участие все ядро, и для анализа результатов может оказаться необходимым привлечь весь арсенал имеющихся методов и самые разнообразные сведения об исследуемом ядре. Поэтому экспериментальные данные мы рассматриваем преимущественно в специальных разделах, носящих название «Примеры». В таких разделах мы считаем возможным пользоваться результатами, полученными в любой части книги. В теории ядра и при анализе экспериментальных данных применяются общие методы, изложение которых удобно дать отдельно, поскольку они пригодны для анализа явлений в разных областях квантовой физики. Чтобы при чтении книги не нужно было прибегать к другим источникам, мы включили краткое изложение целого ряда подобных методов в приложения. Так, например, в теории электромагнитных и β -распадов и в теории ядерных реакций мы уделяем особое внимание определению матричных элементов, соответствующих этим различным процессам. В приложениях рассматривается также алгебра угловых моментов и другие вопросы симметрии, элементы статистической механики и различные простые модели.

В долгой и трудной работе, связанной с написанием книги, мы получили неоценимую помощь и поддержку многих наших коллег. Для каждой главы специальный куратор помогал собрать материал, а также давал советы по его изложению. За ценную помощь такого рода благодарим Г. Люткена, Я. Бондорфа, И. Дамгорда, Б. Андерсен, К. Вайя, И. Винга и Б. Соренсена. Невозможно упомянуть всех сотрудников и гостей Института, предложениями и помощью которых мы пользовались при подготовке книги. Как видно из подписей к фигурам, эта помощь сыграла важную роль при подготовке многих из них.

Хочется выразить также благодарность Софи Хеллман за помощь в бесчисленных организационных вопросах, связанных с подготовкой рукописи к печати.

*Оге Бор
Бен Моттельсон*

Копенгаген
Август 1968 г.

1.

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 1. СТРОЕНИЕ ЯДРА

Ядро представляет собой систему, состоящую из частиц (нуклонов) двух типов: протонов и нейтронов. С основными характеристиками свободных нуклонов можно ознакомиться по табл. 1.1.

Взаимодействие нуклонов в ядрах относится к так называемым сильным взаимодействиям, к которым относится также взаимодействие между мезонами и гиперонами. Все сильно взаимодействующие частицы называются адронами. Структура каждой такой частицы, а также силы, действующие между любыми двумя адронами, в той или иной степени обусловлены взаимодействием всех адронов. Сложный характер сильных взаимодействий особенно ярко обнаруживается при взаимном столкновении адронов, когда их энергия намного превышает их массу покоя. Так, при столкновениях двух нуклонов с энергией порядка гигаэлектронвольт имеется заметная вероятность образования самых разнообразных сильно взаимодействующих частиц. Целый ряд особенностей сильных взаимодействий уже удалось объяснить, но сущность таких взаимодействий и их связь с другими известными взаимодействиями еще остается загадкой.

Правда, в структуре ядер сложный характер сильных взаимодействий обычно не проявляется во всей своей полноте, так как ядра

представляют собой сравнительно слабо связанные системы. Чтобы удалить один нуклон из ядра, необходима энергия, равная примерно $5-10 \text{ МэВ}$, а средняя кинетическая энергия нуклона в ядре порядка 25 МэВ . Эти величины малы не только по сравнению с энергией покоя самих нуклонов ($Mc^2 \approx 1000 \text{ МэВ}$), но и с энергией покоя π-мезонов — самых легких из адронов ($m_\pi c^2 \approx 137 \text{ МэВ}$). Поэтому при анализе связанных состояний ядер и реакций, происходящих при не слишком больших энергиях, в первом приближении можно считать, что ядра состоят из вполне определенного числа нуклонов, которые движутся с нерелятивистскими скоростями ($v^2/c^2 < 0,1$) и обладают такими же свойствами, как и свободные нуклоны. Виртуальное же присутствие других частиц можно приближенно учесть, рассматривая силы, действующие между нуклонами. Оказывается, что основные особенности внутриядерных связей можно объяснить на основе представления о двухчастичных силах. Данные о таких силах проще всего получить из экспериментов по исследованию нуклон-нуклонного рассеяния и свойств основного состояния дейtronона. Имеющиеся экспериментальные данные позволяют довольно детально охарактеризовать такие силы, и они оказываются очень сложными (см. гл. 2, § 5). О многочастичных же силах, действующих между нуклонами, сейчас почти ничего не известно. Сведения о них проще всего можно было бы получить, исследуя закономерности рассеяния трех- и четырехнуклонных систем и свойства их связанных состояний.

Кроме сильных взаимодействий, для нуклонов характерно также наличие слабых взаимодействий — электромагнитного и еще более слабого взаимодействия, проявляющегося в процессах β-распада. В самой структуре ядра эти дополнительные взаимодействия играют сравнительно небольшую роль, но они очень важны для изучения ядерных процессов. Так, например, ими определяется степень стабильности связанных состояний ядер — состояний, в которых ядра не могут испускать нуклоны и которые поэтому были бы полностью стабильными, если бы существовали только сильные взаимодействия. Кроме того, исследование ядерных превращений по электромагнитным процессам представляет собой особенно важный метод изучения структуры ядра, так как электромагнитное взаимодействие сравнительно простое и хорошо изучено. Достаточно сказать, что регистрировать ядерные процессы мы можем лишь по электромагнитному излучению, испускаемому частицами ядра.

Поскольку ядерные силы очень сложны, а детальное описание систем с большим числом степени свободы представляет собой очень трудную задачу, чрезвычайно важное значение при исследовании свойств ядер приобретают свойства симметрии ядерных состояний, а также законы сохранения. Законы симметрии в ядерной физике вытекают, в частности, из инвариантности взаимодействий относительно преобразований пространственно-временной координатной

системы. И инвариантность относительно непрерывных преобразований (перенос, вращение и преобразование Лоренца) носит, по-видимому, универсальный характер, а симметрия относительно отражения оказалась неполной. Изучение свойств ядер во многом способствовало определению степени, в которой справедливы законы таких симметрий.

Ядерные процессы характеризуются еще и симметриями, не связанными явно с инвариантностью относительно пространственно-временных преобразований. Так, например, стабильность ядер определяется законом сохранения барионного числа (табл. 1.1), который аналогичен закону сохранения электрического заряда. При изучении процессов β -распада был установлен аналогичный закон сохранения лептонного числа (гл. 3, приложение 4, п. 1).

Другой тип симметрии связан с существованием двух состояний нуклона (нейтрон и протон), обладающих очень близкими свойствами (табл. 1.1). В таком «вырождении» отражается свойство инвариантности сильных взаимодействий, которое называется изобарической симметрией. Основная задача современной физики элементарных частиц — обобщить эту симметрию так, чтобы она охватывала и дополнительные приближенные вырождения, открытые в спектре адронов.

Нуклоны относятся к фермionам и, следовательно, подчиняются принципу Паули, который требует, чтобы волновая функция была антисимметричной относительно перестановки тождественных частиц. Изобарическая симметрия в структуре ядра тесно связана с перестановочной симметрией, соответствующей принципу Паули.

В данной главе рассматриваются разные виды симметрии, важные с точки зрения исследования ядерных явлений. Эта тема сама по себе весьма широка и входит составной частью в проблему исследования элементарных взаимодействий. Систематическое же изложение свойств ядер начинается с гл. 2. Для некоторых читателей может оказаться целесообразным лишь бегло ознакомиться с гл. 1, а позднее возвращаться к ней каждый раз, когда потребуется.

ПРИМЕРЫ К § 1

Свойства нуклонов (табл. 1.1)

Кинематические свойства частицы характеризуются массой и спином. Этими двумя релятивистскими инвариантами определяются трансформационные свойства одночастичных состояний относительно пространственно-временных переносов, вращений и преобразований Лоренца. (Массы и спин частицы можно рассматривать как квантовые числа, соответствующие разным представлениям группы Лоренца.) Кроме того, состояния, содержащие несколько тождественных частиц, характеризуются типом статистики, которой подчиняются частицы даже тогда, когда они не взаимодействуют друг с другом. (Раз-

Таблица 1.1

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВОБОДНЫХ НУКЛОНОВ

Характеристика	Протон		Нейtron	
	величина	метод определения	величина	метод определения
Масса $M c^2$	938,26 $M_{\text{эв}}$	Масс-спектрометрия	939,55 $M_{\text{эв}}$	Разность $n - p$ из ядерных реакций
Спин I	$\frac{1}{2}$	Атомная и молекулярная сверхтонкая структура ^{a)}	$\frac{1}{2}$	Магнитный резонанс нейтронного пучка ^{b)}
Статистика	Ферми — Дирака	Ротационный спектр H_2	Ферми — Дирака	Структура ядра
Среднее время жизни τ_m	$> 10^{21}$ лет ^{b)}	Прямой счет актов распада ^{c)}	$17,0 \pm 0,4$ мин $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	Счет протонов в нейтронном пучке ^{d)}
Электрический заряд	$(1 \pm 10^{-15}) e$	Отклонение молекулярного пучка в электрическом поле ^{e)}	$(0 \pm 6 \cdot 10^{-12}) e$	Отклонение в электрическом поле ^{f)}
Радиус распределения заряда $\langle r_E^2 \rangle^{1/2}$	$0,805 \pm 0,011$ ферми	Электрон-протонное рассеяние ^{g)}	$0,36 \pm 0,01$ ферми $(0 \pm 0,08$ ферми) ^{h)}	Нейтрон-электронное рассеяние (на атомах) ^{g)}
Магнитный dipольный момент μ	$(2,79274 \pm 0,00006) \times \frac{e\hbar}{2M_p c}$	Атомные и молекулярные пучки, ядерная индукция ^{a)}	$-(1,91314 \pm 0,00004) \times \frac{e\hbar}{2M_p c}$	Магнитный резонанс нейтронного пучка ^{a)}
Радиус магнитного момента $\langle r_M^2 \rangle^{1/2}$	$0,80 \pm 0,03$ ферми	Электрон-протонное рассеяние ^{g)}	$0,79 \pm 0,15$ ферми	Электрон-дейtronное рассеяние ^{g)}

Продолжение табл. 1.1

Характеристика	Протон		Нейтрон	
	величина	метод определения	величина	метод определения
Константа взаимодействия с π -мезонами $f^2/\hbar c$	$0,081 \pm 0,003$	$\pi^- p$ -рассеяние, $p - p$ -рассеяние ^{k)}	0,08	$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ $n - p$ -рассеяние ^{k)}

^{b)} См., например, книгу Рамсея [358]. Еще более точные результаты последних измерений можно найти в работе [181].

^{c)} См. работу [409].

^{d)} Стабильность протона, по-видимому, означает существование еще одного закона сохранения, а именно закона сохранения нуклонов. Но при столкновениях с высокой энергией наблюдаются процессы превращения нуклонов в другие частицы. Поэтому закон сохранения нуклонов нужно обобщить и говорить о законе сохранения числа барионов (барионный спектр представлен на фиг. 1.11). Никаких нарушений такого обобщенного закона сохранения пока что не наблюдается.

^{e)} См. работы [361, 362].

^{f)} См. работу [497]. Измерения, проведенные недавно, дали для времени жизни нейтрона величину $t_m = 15,60 \pm 0,23$ мин [97]. См. также гл. 3, приложение 3, где собраны различные данные относительно константы взаимодействия для ядерного β -распада. Такая же, но менее детальная информация имеется по другим слабым взаимодействиям нуклонов ($\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu$, $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ и т. д.).

^{g)} Вопрос об экспериментальных доказательствах нейтральности атомов рассматривается в гл. 13 книги [244]. Из экспериментов по измерению изменения потенциала, связанного с истечением макроскопического количества газа H_2 , следует, по-видимому, что заряд молекулы не может превышать $\sim 10^{-20}$ е.

^{h)} См. работу [502].

ⁱ⁾ Радиусы распределений электрического заряда и магнитного момента определяются через формфакторы, о которых говорится в гл. 3, приложение 3, п. 4. Обзор экспериментов по определению формфакторов дается в работе [219].

^{j)} В скобках указан среднеквадратичный радиус в случае дираковского электронного формфактора. Формфактор Дирака вместе с формфактором аномального магнитного момента Паули соответствует другому возможному способу описания электромагнитной структуры нуклонов [167, 219].

^{k)} Константа взаимодействия π -мезон — нуклон f характеризует напряженность π -мезонного поля вокруг нуклона подобно тому, как электрический заряд характеризует напряженность электрического поля (гл. 2, § 5, п. 1). Наиболее точное значение величины f получается из анализа дисперсионных отношений для прямого рассеяния π^+ и π^- -мезонов протонами. Константой взаимодействия определяется величина «полюсного члена», связанного с резонансным процессом $\pi^- + p \rightarrow n \rightarrow \pi^- + p$ (который протекает при отрицательной кинетической энергии падающего π -мезона). Данные о константе взаимодействия для процесса $n \rightarrow n + \pi^0$ получаются из рассеяния с обменом заряда $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ и согласуются с изобарической симметрией взаимодействия π -мезон — нуклон. Такой анализ проводится в обзорной статье [218]. (Вопрос о дисперсионных отношениях для системы π -мезон — нуклон, основанный на принципе причинности, рассматривается в работе [52].) Константу взаимодействия π -мезон — нуклон можно также определить путем анализа периферийных нуклон-нуклонных столкновений (работы [110, 303], а также гл. 2, § 5, п. 1).

ный тип статистики соответствует тому или иному представлению группы перестановок, см. приложение 3.) Для протонов и нейтронов масса, спин и тип статистики указаны в табл. 1.1.

Далее в табл. 1.1 приводится среднее время жизни нуклонов. Стого говоря, нестабильная частица представляет собой переходную стадию в процессе рассеяния. Но если ее время жизни настолько велико, что величина $\Gamma = \hbar/\tau$

мала по сравнению с массой и другими энергетическими характеристиками ее внутреннего строения, то распадающуюся частицу можно приближенно рассматривать как некоторый объект, свойства которого не зависят от того, как он образовался. (Постоянную распада Γ можно считать мнимой частью массы, см. гл. 3, приложение 6.)

Следующие параметры, указанные в табл. 1.1, характеризуют взаимодействие нуклонов с различными силовыми полями. Особое положение среди них занимают заряд и магнитный момент, так как эти константы взаимодействия можно определить путем классических экспериментов с использованием макроскопических электромагнитных полей. Когда длина волны электромагнитного поля достаточно мала, взаимодействие нуклонов с полем начинает зависеть от распределения заряда и магнитного момента внутри нуклона (от так называемого нуклонного электромагнитного формфактора). Основные моменты этих распределений указаны в данной таблице.

В последней строке табл. 1.1 дается константа взаимодействия нуклонов с полем π -мезонов. Эта константа — одна из многих характеристик сильного взаимодействия нуклонов с другими адронами. Но она особенно важна для ядерной физики низких энергий, так как именно ею определяется ход кривой нуклонного потенциала на больших расстояниях (гл. 2, § 5, п. 1). Характеристики, относящиеся к слабому взаимодействию нуклонов, рассмотрены в приложении 4.

§ 2. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ЯДЕРНЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ИНВАРИАНТНОСТЬЮ¹⁾

1. Непрерывные преобразования

Если на систему не действуют никакие внешние поля, то ее гамильтониан инвариантен относительно параллельного переноса координатной системы в пространстве и во времени, а также относительно вращения координатных осей. Кроме того, уравнения движения не изменяются при равномерном и прямолинейном движении системы (галилеева или лоренцева инвариантность).

Пространственный перенос

Общую связь между инвариантностью и законами сохранения проще всего показать на примере пространственного переноса, при котором координатная система \mathcal{K} смещается в положение \mathcal{K}' . Данный вид симметрии очень важен для физических процессов, так как из нее вытекает закон сохранения импульса. При анализе внутреннего строения ядер инвариантность относительно пространственного переноса играет второстепенную роль, но мы рассмотрим ее здесь как пример формулировки принципа симметрии для квантовых систем.

1) На большое значение пространственно-временной симметрии для теории атомных и субатомных явлений указывал Вигнер, когда квантовая теория еще только начала развиваться (см., например, работу [456]).

Инвариантность относительно пространственного переноса можно сформулировать так: каждому квантовому состоянию $|A\rangle$ соответствует некоторое смешенное состояние $|A'\rangle$, свойства которого, определенные наблюдателем в системе \mathcal{K}' , идентичны свойствам состояния $|A\rangle$ в системе \mathcal{K} .

Связь между эквивалентными совокупностями состояний $|A\rangle$, $|B\rangle, \dots$ и $|A'\rangle, |B'\rangle, \dots$ такова, что скалярные произведения соответствующих состояний равны, т. е.

$$\langle B' | A' \rangle = \langle B | A \rangle. \quad (1.1)$$

Поэтому преобразование, обеспечивающее переход от состояния $|A\rangle$ в состоянию $|A'\rangle$, должно быть унитарным, т. е. должно выполняться равенство

$$|A'\rangle = \mathcal{U} |A\rangle = \sum_B |B\rangle \langle B | \mathcal{U} |A\rangle, \quad (1.2)$$

где $\langle B | \mathcal{U} | A \rangle$ — матричный элемент унитарной матрицы ($\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^\dagger\mathcal{U} = 1$).

Поскольку в квантовой механике результаты выражают через вероятности (абсолютные величины квадратов амплитуд), из эквивалентности состояний $|A\rangle$ в $|A'\rangle$ следует равенство скалярных произведений только с точностью до фазы, т. е. $|\langle B' | A' \rangle| = |\langle B | A \rangle|$. Но путем подходящего выбора фаз состояний $|A\rangle$ и $|B\rangle$ всегда можно получить либо равенство (1.1), либо равенство $\langle B' | A' \rangle^* = \langle B | A \rangle$, которое соответствует антиунитарному преобразованию. Примером антиунитарного преобразования может служить операция обращения времени, о которой говорится ниже. Непрерывные преобразования, такие, как пространственный перенос, могут быть связаны только с унитарными преобразованиями. (Доказательство того, что унитарные и антиунитарные преобразования являются единственно возможными, приводятся в книгах [322, 456].)

В данной формулировке принцип инвариантности относительно пространственного переноса эквивалентен соотношению

$$\langle B' | T' | A' \rangle = \langle B | T | A \rangle, \quad (1.3)$$

справедливому для всех матричных элементов. В этом соотношении T — произвольный оператор, выраженный через переменные системы \mathcal{K} , а T' — соответствующий оператор в системе \mathcal{K}' . Если мы представим изменение координатной системы как преобразование операторов, то из равенств (1.2) и (1.3) получим, что

$$T' = \mathcal{U} T \mathcal{U}^{-1}. \quad (1.4)$$

Таким образом, радиус-вектор r_h , импульс p_h и спин s_h k -й частицы преобразуются в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} r'_h &= r_h - a = \mathcal{U} r_h \mathcal{U}^{-1}, \\ p'_h &= p_h = \mathcal{U} p_h \mathcal{U}^{-1}, \\ s'_h &= s_h = \mathcal{U} s_h \mathcal{U}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{a} — вектор смещения системы \mathcal{K}' относительно системы \mathcal{K} . Если оператор T — какая-то функция переменных \mathbf{r}_k , \mathbf{p}_k , \mathbf{s}_k , то преобразованный оператор T' представляет собой ту же самую функцию переменных \mathbf{r}'_k , \mathbf{p}'_k , \mathbf{s}'_k . Заметим, что если $T = \rho(\mathbf{r})$ — плотность частиц в точке \mathbf{r} , то смещение всех частиц действует на оператор T так же, как обратное смещение вектора \mathbf{r} , т. е. $T' = \rho(\mathbf{r} + \mathbf{a})$. (Примеры преобразования полевых операторов, таких, как $\rho(\mathbf{r})$, рассмотрены в приложении 1, п. 7.)

Оператор преобразования \mathcal{U} можно представить в виде

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} \right\}, \quad (1.6)$$

где \mathbf{P} — полный импульс, т. е. сумма импульсов всех нуклонов, а также фотонов, лептонов, мезонов и других частиц, из которых может состоять система. Преобразование (1.5) следует из формулы (1.6) и канонических коммутационных соотношений для координат и проекций импульса частицы.

Конечный перенос координатной системы можно осуществить путем ряда бесконечно малых сдвигов:

$$\mathcal{U}(\delta \mathbf{a}) = 1 - \frac{i}{\hbar} \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{P}. \quad (1.7)$$

Поэтому вектор \mathbf{P} называют генератором бесконечно малого сдвига.

Закон сохранения, связанный с симметрией пространственного переноса, выражает инвариантность гамильтониана (т. е. энергии) относительно параллельного переноса координатной системы. Поэтому гамильтониан коммутирует с $\mathcal{U}(\mathbf{a})$, а следовательно, и с импульсом \mathbf{P} , что приводит к закону сохранения импульса.

Исходя из инвариантности, можно сформулировать основные законы квантовой механики. Так, например, импульс \mathbf{P} можно определить как эрмитов оператор, связанный с бесконечно малым сдвигом соотношением (1.7). Тогда из геометрического соотношения $\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{a}$ [см. формулы (1.5)] следуют канонические коммутационные соотношения для координат и проекций импульса.

Временной сдвиг

Сдвиг во времени на величину t_0 соответствует переходу из системы \mathcal{K} в другую систему \mathcal{K}' : когда в системе \mathcal{K} часы показывают время t , часы в системе \mathcal{K}' показывают время $t' = t - t_0$. Таким образом, состояние $|A'\rangle$ характеризуется тем, что события, описываемые состоянием $|A\rangle$ при $t = t_1$, в системе \mathcal{K}' происходят при $t' = t_1$, т. е. при $t = t_1 + t_0$.

Унитарное преобразование от состояния $|A\rangle$ к состоянию $|A'\rangle$ осуществляется оператором

$$\mathcal{U}(t_0) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} H t_0 \right\}, \quad (1.8)$$

где H — полная энергия. Пользуясь этим преобразованием, получаем зависимость операторов от времени [см. соответствующее равенство (1.4)]

$$T' = T(t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} H t\right\} T(t=0) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H t\right\}. \quad (1.9)$$

Таким образом, закон сохранения полного импульса можно рассматривать как выражение того, что пространственный и временной сдвиги коммутируют друг с другом. Это значит, что пространственный сдвиг представляет собой операцию, не зависящую от времени.

Вращения

Инвариантность относительно вращения играет важнейшую роль при анализе ядерных явлений. При этом речь может идти и о бесконечно малых вращениях, которыми определяются угловой момент и сферические тензорные свойства ядерных состояний и операторов, и о конечных вращениях для определения внутренней координатной системы (например, в теории вращающихся ядер или при описании спиральности одночастичных волновых функций). Систематически вопрос о преобразованиях вращения рассматривается в приложении 1. Здесь же мы укажем на аналогию между этим анализом и проведенным выше анализом инвариантности относительно пространственного переноса.

Унитарный оператор, связанный с вращением χ (которое задается направлением оси вращения и величиной угла поворота χ), по аналогии с формулой (1.6) можно записать как

$$\mathbf{R}(\chi) = \exp\{-i\chi \cdot \mathbf{I}\}, \quad (1.10)$$

где \mathbf{I} — полный угловой момент в единицах \hbar . В законе сохранения углового момента отражается инвариантность гамильтонiana относительно вращения. Иначе говоря, пространственное вращение и временной сдвиг — коммутирующие операции.

Если операции переноса координатной системы в разных направлениях являются коммутирующими операциями (и поэтому составляющие импульса \mathbf{P} коммутируют друг с другом), то вращения относительно разных осей не коммутируют одно с другим. Коммутационные соотношения для составляющих углового момента \mathbf{I} , а именно

$$[I_x, I_y] = iI_z \text{ и циклические перестановки,} \quad (1.11)$$

можно получить из простых геометрических соображений, рассмотрев результат двух бесконечно малых вращений, выполненных в прямом и обратном порядке.

Вращательная инвариантность позволяет приписать стационарным состояниям квантовые числа полного углового момента I и M ,

которые представляют собой собственные значения операторов $I^2 = I(I+1)$ и $I_z = M$. Эти квантовые числа характеризуют преобразования состояний при вращении координатной системы. При таком подходе к операторам можно классифицировать их как неприводимые тензорные операторы, определяющиеся двумя числами λ и μ . Так, μ -я составляющая $T_{\lambda\mu}$ неприводимого тензорного оператора ранга λ передает состоянию, на которое она действует, угловой момент λ с проекцией μ .

Коммутационные соотношения для составляющих углового момента и импульса, так же как и соотношения (1.11), можно получить из геометрических соображений, рассматривая результат бесконечно малого пространственного сдвига и бесконечно малого вращения, выполненных в прямом и обратном порядке. Эти коммутационные соотношения таковы:

$$\begin{aligned} [I_x, P_x] &= 0, \\ [I_x, P_y] &= iP_z \text{ и циклические перестановки.} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, чтобы образовать состояния, которые являлись бы одновременно собственными состояниями полного импульса и полного углового момента, мы должны перейти в систему координат, в которой $P = 0$.

Преобразования Галилея

Свойства системы с импульсом $P \neq 0$ определяются свойствами покоящейся системы в силу галилеевской (или лоренцевой) инвариантности взаимодействий, т. е. их инвариантности относительно перехода к системе координат \mathcal{K}' , движущейся с постоянной скоростью относительно системы \mathcal{K} . Данный вид инвариантности относится к ядру в целом, а к отдельным нуклонам в ядре не имеет прямого отношения, так как системой покоя остальных нуклонов определяется предпочтительная система координат. Поэтому при анализе структуры ядра мы редко будем пользоваться данным важным видом симметрии.

В перелятивистском приближении переход к равномерно движущейся системе координат \mathcal{K}' , совпадающей в начальный момент времени с данной системой \mathcal{K} , определяется преобразованием Галилея, т. е. равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_k &= \mathbf{r}_k, \\ \mathbf{v}'_k &= \mathbf{v}_k - \mathbf{u}, \\ \mathbf{s}'_k &= \mathbf{s}_k, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где \mathbf{u} — скорость системы \mathcal{K}' относительно системы \mathcal{K} , а \mathbf{v}_k — скорость k -й частицы, т. е. производная вектора \mathbf{r}_k по времени.

Если взаимодействие между частицами зависит от скорости, то необходимо различать операторы скорости и операторы импульса, которые связаны друг

в другом соотношении

$$\mathbf{v}_k = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{r}_k] = \frac{\mathbf{p}_k}{M_k} + \frac{i}{\hbar} [W, \mathbf{r}_k], \quad (1.14)$$

где гамильтониан взят в форме

$$H = \sum_k \frac{(\mathbf{p}_k)^2}{2M_k} + W. \quad (1.15)$$

Здесь M_k — масса k -й частицы, а W — энергия взаимодействия частиц. Галилеева инвариантность означает, что величина W зависит только от относительной скорости частиц и поэтому инвариантна относительно преобразований (1.13), т. е. $W' = W$. Из равенства (1.14) и соответствующих соотношений для переменных, относящихся к движущейся системе, мы получаем закон преобразования импульсов [см. также равенства (1.13)] в следующем виде:

$$\mathbf{p}'_k = \mathbf{p}_k - M_k \mathbf{u}. \quad (1.16)$$

Преобразование координат и импульсов в соответствии с формулами (1.13) в (1.16) можно осуществить посредством унитарного оператора

$$\mathcal{U}(\mathbf{u}) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathcal{M} \mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_{\text{ц. м}} \right\}, \quad (1.17)$$

где \mathcal{M} — полная масса системы, а $\mathbf{R}_{\text{ц. м}}$ — радиус-вектор центра масс:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_k M_k, \\ \mathbf{R}_{\text{ц. м}} &= \frac{1}{M} \sum_k M_k \mathbf{r}_k. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Следовательно, координаты центра масс представляют собой генераторы бесконечно малых галилеевых преобразований. (Преобразование Галилея формально подобно преобразованию пространственного переноса, но только меняются ролями координаты и импульс.)

В случае галилеево-инвариантных взаимодействий гамильтониан (1.15) можно записать в виде

$$H = H_{\text{внутр}} + \frac{\mathbf{P}^2}{2\mathcal{M}}, \quad (1.19)$$

где галилеево-инвариантный потенциал внутреннего движения $H_{\text{внутр}}$ зависит только от относительных скоростей (и относительных координат, если предполагается инвариантность относительно пространственного переноса). Таким образом, движение системы разделяется на внутреннее галилеево-инвариантное движение и на движение центра масс системы в целом. Инвариантные свойства гамильтониана можно также выразить соотношением

$$\frac{i}{\hbar} [H, R_{\text{ц. м}}] = \frac{1}{\mathcal{M}} \mathbf{P}, \quad (1.20)$$

т. е. через коммутатор гамильтониана H с генератором преобразований Галилея.

Галилеевой инвариантностью обладает энергия взаимодействия и уравнения движения. Кинетическая же энергия и полный гамильтониан [формулы (1.16) и (1.20)] не инвариантны относительно преобразований Галилея. Таким образом, в противоположность тому, что было в случае инвариантности по отношению к пространственному переносу и вращению, здесь мы не получаем ни новых законов сохранения, ни новых квантовых чисел.

Релятивистское обобщение соотношения (1.19), выражающее лоренцеву инвариантность, дается выражением

$$H = (H_{\text{внутр}}^2 + c^2 \mathbf{P}^2)^{1/2}, \quad (1.21)$$

где в $H_{\text{внутр}}$ и H входят теперь и массы покоя частиц. Соотношение (1.21) отличается от соотношения (1.19) не только наличием членов более высокой степени относительно \mathbf{P} , но и тем, что полная масса покоя $H_{\text{внутр}}$ теперь содержит энергию связи и, следовательно, зависит от внутреннего движения.

Унитарное преобразование, порождающее преобразование Лоренца, не может быть представлено в форме, аналогичной формуле (1.17), так как координаты центра масс и координаты частицы нельзя определить релятивистски инвариантным образом. Генератор преобразования Лоренца можно выразить через оператор производной в пространстве импульсов. Кроме того, этот генератор содержит член, действующий на спиновые переменные. (Вызываемое им вращение вектора спина называется прецессией Томаса.)

Вращение системы координат

Если зависимость энергии от импульса (1.19) следует из галилеевой инвариантности, то для зависимости энергии от углового момента нет такого общего соотношения, поскольку во вращающейся системе координат уравнения движения изменяются из-за появления кориолисовых и центробежных сил. В некоторых случаях эти силы лишь незначительно возмущают внутреннее строение системы, и тогда энергию можно приближенно выразить в виде простой функции полного углового момента I , подобно соотношению (1.19). При таких условиях спектр системы имеет структуру ротационной полосы. В других случаях, когда центробежные эффекты велики даже для отдельного кванта вращения, не имеется какого-либо простого физического соотношения между энергией квантовых состояний с разными значениями полного углового момента I . Условия, при которых в ядерных спектрах появляются ротационные полосы, будут подробно рассмотрены в последующих главах.

Зависимость энергии от углового момента, который формально рассматривается как непрерывная переменная при аналитическом продолжении уравнений движения, часто называют траекторией Редже. Для некоторых простых моделей, таких, как модель перелятивистской двухчастичной системы, движение которой можно полностью разделить на внутреннее и вращательное, возможен точный анализ таких траекторий [120]. (Относительно релятивистского обобщения анализа Редже и его приложения к теории рассеяния см., например, обзорную работу [344].) Пример неоднозначности, которая может возникнуть при определении траекторий для многочастичных систем, приводится в гл. 4, § 5.

2. Пространственное отражение

Пространственное отражение, или пространственная инверсия, — это один из видов симметрии отражения, который обладает особенно простыми, но важными для исследования структуры ядра особенностями. Открытие несохранения четности при β -распаде явилось толчком

и более широкому исследованию различных симметрий отражения и в более глубокому пониманию связей между этими симметриями.

Отражению трех пространственных координат, в результате которого правая система преобразуется в левую, можно сопоставить оператор унитарного преобразования \mathcal{P} , который меняет знаки всех пространственных координат. При этом степени свободы частицы изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_h &= -\mathbf{r}_h = \mathcal{P} \mathbf{r}_h \mathcal{P}^{-1}, \\ \mathbf{p}'_h &= -\mathbf{p}_h = \mathcal{P} \mathbf{p}_h \mathcal{P}^{-1}, \\ \mathbf{s}'_h &= \mathbf{s}_h = \mathcal{P} \mathbf{s}_h \mathcal{P}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Закон преобразования импульсов и спинов следует из геометрических обобщений о коммутации пространственного отражения с пространственным сдвигом и вращениями

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{U}(\mathbf{a}) &= \mathcal{U}(-\mathbf{a})\mathcal{P}, \\ \mathcal{P}\mathcal{R}(\chi) &= \mathcal{R}(\chi)\mathcal{P}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

При геометрической интерпретации операции отражения не ясно, как действует оператор \mathcal{P} на другие квантовые числа, такие, как электрический заряд или барионное число, для которых не установлена какая-либо связь с пространственно-временным описанием. Мы определим \mathcal{P} как оператор пространственного отражения, который оставляет эти величины неизменными. Хорошо известно, что гамильтониан системы частиц, поведение которых определяется электромагнитными силами (атомы, молекулы и т. д.), коммутирует с оператором пространственного отражения вследствие \mathcal{P} -инвариантности электромагнитного взаимодействия. Проверяя предположение о \mathcal{P} -инвариантности для ядерных систем, можно установить, в какой степени ядерное взаимодействие обладает этой симметрией.

Если взаимодействие коммутирует с отражением \mathcal{P} , то можно одновременно диагонализовать гамильтониан и оператор \mathcal{P} и приписать, таким образом, стационарному состоянию $|A\rangle$ соответствующее собственное значение π_A оператора \mathcal{P} , т. е. написать, что

$$\mathcal{P}|A\rangle = \pi_A|A\rangle. \quad (1.24)$$

Состояние покоящегося нуклона (нейтрона или протона) должно быть собственным состоянием оператора \mathcal{P} , так как других состояний в той же самой массой и с теми же зарядом и барионным числом не существует. В силу закона сохранения барионного числа A и электрического заряда Ze относительная четность состояний с разными A или Z может быть любой. Мы можем фиксировать ее, положив, что внутренняя четность нейтрона и протона равна +1. Таким образом, четность ядерного состояния является свойством относительного движения нуклонов. Двукратное действие оператора \mathcal{P} на ядерную

волновую функцию, выраженную в виде функции координат (или импульсов), а также спиновых переменных, приводит к тождеству, и, следовательно,

$$\pi_A = \pm 1. \quad (1.25)$$

[Взаимодействие между нуклонами может привести к реальному или виртуальному рождению других частиц (мезонов, фотонов и др.), но полная четность остается неизменной при условии, что взаимодействия \mathcal{F} -инвариантны.]

Мы можем классифицировать различные операторы, пользуясь свойствами их преобразования под действием оператора \mathcal{F} . Для операторов T , которые с точностью до фазового множителя преобразуются сами в себя, имеем

$$\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1} = \pi_T T, \text{ где } \pi_T = \begin{cases} +1 & \text{для четного оператора,} \\ -1 & \text{для нечетного оператора.} \end{cases} \quad (1.26)$$

Любой оператор можно разделить на две части, одна из которых будет четной, а другая нечетной по отношению к операции пространственного отражения. В случае оператора T , удовлетворяющего условию (1.26), матричные элементы, вычисленные с собственными функциями оператора \mathcal{F} , подчиняются соотношению

$$\begin{aligned} \langle B | T | A \rangle &= \langle B | \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} T \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} | A \rangle = \\ &= \pi_A \pi_B \pi_T \langle B | T | A \rangle, \end{aligned} \quad (1.27)$$

откуда следует важное правило отбора

$$\pi_A \pi_B \pi_T = 1. \quad (1.28)$$

Например, электрический дипольный момент есть линейная функция координат частицы, и поэтому $\pi(E1) = -1$, тогда как магнитный дипольный момент пропорционален угловому моменту системы и поэтому для него $\pi(M1) = +1$. В более общем случае для электрического момента мультипольности λ четность $\pi(E\lambda) = (-1)^\lambda$, а для магнитного мультипольного момента четность $\pi(M\lambda) = (-1)^{\lambda+1}$ (см. гл. 3, приложение 3). Таким образом, между состояниями с одинаковой четностью возможны только четные электрические и нечетные магнитные мультипольные переходы, а между состояниями с разной четностью возможны только нечетные электрические и четные магнитные переходы. Равенство нулю средних значений всех нечетных электрических и четных магнитных мультипольных моментов для состояний с определенной четностью представляет собой частный случай этих правил.

Для проверки одного из этих правил были проведены самые тщательные измерения электрического дипольного момента нейтрона. В результате эксперимента [326, 397] для этой величины был установлен верхний предел $D \approx 10^{-22} e \text{ см.}$ Несмотря на электрическую

нейтральность нейтрона, наличие у него магнитного момента указывает на существование в нейтроне электрических токов, сравнимых с токами в протоне (см. табл. 1.1), и, следовательно, при отсутствии специальных симметрий можно ожидать, что $D \approx 10^{-13}$ е см, так как внутренняя структура нейтрона имеет линейные размеры порядка 10^{-13} см. Таким образом, указанный выше экспериментальный верхний предел для величины D можно было бы интерпретировать как верхний предел для амплитуды F примеси состояний с отрицательной четностью для нейтрона, равный 10^{-9} . Но такой вывод нельзя делать с полной уверенностью, ибо равенство нулю нейтронного дипольного момента D вытекает также из инвариантности относительно обращения времени, а поэтому не ясно, \mathcal{P} - или \mathcal{T} -инвариантность проверяется в данном эксперименте.

Следствия инвариантности относительно пространственного отражения можно также сформулировать иначе. Именно, если гамильтониан коммутирует с оператором \mathcal{P} , то квантовое число четности должно быть интегралом движения и поэтому можно говорить о законе сохранения четности. Правила отбора для мультипольного излучения можно также рассматривать как следствие из этого закона. Необходимо только принять, что четность испускаемого фотона равна $(-1)^\lambda$ для электрических мультиполей и $(-1)^{\lambda+1}$ для магнитных мультиполей. Тогда правило (1.28) получается как требование, чтобы полная четность системы до и после перехода была одинаковой. В процессах рассеяния и ядерных реакциях различным каналам можно приписать свои квантовые числа четности. Тогда закон сохранения четности говорит нам, что связанные между собой могут только каналы с одинаковой четностью.

Экспериментальные данные, подтверждающие правила отбора по четности в процессах α -распада, приведены на фиг. 1.1. Правила отбора в процессах γ -распада были проверены путем эксперимента, о котором говорится в связи с фиг. 1.2. В результате данного и многих других подобных экспериментов было установлено, что в процессах, связанных с ядерным и электромагнитным взаимодействиями, правила отбора по четности выполняются с высокой степенью точности. В слабых же взаимодействиях симметрия пространственного отражения нарушается, как было установлено в работах [288, 469]. На фиг. 1.3 показано, каким образом нарушение четности проявляется в процессах β -распада.

Взаимодействия, ответственные за β -распад, должны, по-видимому, вызывать появление слабых межнуcléонных сил, нарушающих четность, и, следовательно, приводить к небольшому нарушению правил отбора по четности (гл. 3, приложение 4, п. 1). Об экспериментальных данных относительно такого эффекта, очень важного для исследования слабых взаимодействий, говорится в связи с фиг. 1.2.

Рассмотренная выше \mathcal{P} -инвариантность требует дополнительного предположения о том, что пространственное отражение не затраги-

вает таких динамических характеристик, как электрический заряд. Можно получить значительно более универсальную симметрию, комбинируя операцию \mathcal{P} с операцией \mathcal{C} , при которой частицы заменяются античастицами и наоборот (операция зарядового сопряжения, см. то, что говорится в тексте относительно фиг. 1.3). И все же было установлено, что при распаде K^0 -мезона нарушается даже комбинированная \mathcal{PC} -симметрия [98]. Таким образом, вопрос о полноте и природе таких симметрий остается предметом непрекращающихся и увлекательных исследований.

3. Обращение времени

Большое значение симметрии относительно обращения времени для ядерных систем лишь постепенно выяснилось в последние десятилетия. В настоящем разделе мы изложим только основные понятия о такой симметрии и основные следствия из нее, но, поскольку симметрия относительно обращения времени существенно отличается от других рассмотренных видов симметрий, вопрос об этой операции будет более детально разобран в приложении 2. Недавние исследования подняли вопрос о том, в какой мере инвариантны при обращении времени различные фундаментальные взаимодействия, и сейчас эта проблема вызывает большой интерес.

Классические уравнения движения, которым подчиняется система взаимодействующих частиц, инвариантны относительно направления течения времени, т. е. относительно преобразования, в результате которого направление движения всех частей системы меняется на обратное. В случае квантовых систем такое преобразование для операторов координат, импульса и спина частицы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_h &= \mathbf{r}_h = \mathcal{T} \mathbf{r}_h \mathcal{T}^{-1}, \\ \mathbf{p}'_h &= -\mathbf{p}_h = \mathcal{T} \mathbf{p}_h \mathcal{T}^{-1}, \\ \mathbf{s}'_h &= -\mathbf{s}_h = \mathcal{T} \mathbf{s}_h \mathcal{T}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Как и в случае пространственного отражения, результат операции обращения времени в отношении некоторых характеристик, например электрического заряда, не вытекает из геометрического смысла операции \mathcal{T} . Рассмотрим следствия, вытекающие из предполагаемой инвариантности относительно операции \mathcal{T} , производимой только над кинематическими характеристиками частей системы [см. формулы (1.29)]. Такой инвариантностью обладают, например, уравнения квантовой электродинамики, которые, как известно, имеют широкую область применимости.

Преобразование, описываемое равенствами (1.29), нельзя получить при помощи операторов обычного унитарного типа. Действительно, при унитарном преобразовании алгебраические соотношения между операторами сохраняются, а при операции обращения

времени изменяется знак некоторых коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [p_x, x] &= -i\hbar \rightarrow [p'_x, x'] = i\hbar, \\ [s_x, s_y] &= is_z \rightarrow [s'_x, s'_y] = -is'_z. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Таким образом, при унитарном преобразовании, меняющем знак импульса \mathbf{p} , должен также измениться знак вектора \mathbf{r} (как при операции пространственного отражения) и не может измениться знак всех трех составляющих спина \mathbf{s} .

Но оператор \mathcal{T} можно представить в виде произведения унитарного оператора $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ на оператор комплексного сопряжения K , действующий на все с-числа, т. е. в виде

$$\mathcal{T} = \mathcal{U}_{\mathcal{T}} K. \quad (1.31)$$

Такое преобразование, называемое антиунитарным, дает необходимое дополнительное изменение знака при преобразовании коммутационных соотношений (1.30).

Результат действия оператора K зависит от выбранного представления. Так, например, если через $|\alpha\rangle$ обозначить базисные векторы, определяющие заданное представление, то оператор комплексного сопряжения будет преобразовывать состояние $|A\rangle$ в состояние с комплексно-сопряженными составляющими в представлении $|\alpha\rangle$, т. е.

$$\begin{aligned} |A\rangle &= \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| A \rangle, \\ K|A\rangle &= \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| A^* \rangle. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Если выбрать новый базис $|\alpha'\rangle$, для которого $\langle \alpha | \alpha' \rangle$ не будет действительным числом при всех α и α' , то действие оператора K изменится. Так, например, в представлении, в котором состояние $|A\rangle$ содержиться среди базисных векторов, будет справедливо равенство $K|A\rangle = |A\rangle$.

Но операция обращения времени имеет определенный физический смысл, и, следовательно, ее результат не должен зависеть от представления, в котором она рассматривается. Поэтому зависимость действия оператора K от выбранного представления компенсируется соответствующей зависимостью унитарного оператора $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ в формуле (1.31). Примеры приведены в приложении 2.

Для антиунитарного преобразования мы имеем

$$\begin{aligned} |A'\rangle &= \mathcal{U}K|A\rangle, \\ \langle B|A\rangle &= \langle B|\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}K|A\rangle = \langle KB|\mathcal{U}^{-1}|A'\rangle^* = \langle B'|A'\rangle^*. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Перевод оператора K из его положения перед оператором \mathcal{U}^{-1} , где он выполняет комплексное сопряжение как всех последующих операторов, так и состояния $|A\rangle$, в положение перед B , где K действует только на состояние $\langle B|$, эквивалентен комплексному сопряжению всего матричного элемента. Соотношение (1.33) между скалярными произведениями означает полную эквивалентность совокупностей состояний $|A\rangle$ и $|A'\rangle$, так как физические результаты

выражаются через абсолютные значения матричных элементов (см. примечание на стр. 15).

На основании соображений, аналогичных высказанным по поводу равенства (1.33), можно показать, что соотношение (1.3) между матричными элементами, относящимися к системам отсчета \mathcal{K} и \mathcal{K}' , заменяется соотношением

$$\langle B' | T' | A' \rangle = \langle \mathcal{T}B | \mathcal{T}T\mathcal{T}^{-1} | \mathcal{T}A \rangle = \langle B | T | A \rangle^*. \quad (1.34)$$

Коммутационные соотношения, соответствующие формулам (1.29), можно также интерпретировать как выражение коммутативности операции обращения времени с пространственным переносом и вращениями. Действительно, поскольку при операции \mathcal{T} изменяется знак числа i , коммутация с операциями $\mathcal{U}(a)$ и $\mathcal{H}(x)$ означает, что оператор \mathcal{T} антикоммутирует с операторами импульса и углового момента [см. соотношения (1.29)]. Для операции временного сдвига (1.8) мы имеем равенство

$$\mathcal{T}\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(-t)\mathcal{T}. \quad (1.35)$$

Следовательно, оператор \mathcal{T} преобразует оператор $T(t)$ в оператор $T'(-t)$, где $T'(t=0)$ — оператор, для которого ход времени противоположен ходу времени для оператора $T(t=0)$.

С оператором \mathcal{T} невозможно связать квантовое число, которое играло бы такую же роль, как и квантовое число четности. Действительно, если $|A\rangle$ — собственное состояние оператора \mathcal{T} , то его собственное значение зависит от фазы $|A\rangle$. Так, например,

$$\mathcal{T}|A\rangle = \exp(i\varphi_A)|A\rangle, \quad (1.36)$$

то, изменения соответствующим образом фазу, можно получить состояние, для которого собственное значение оператора \mathcal{T} равно единице, т. е.

$$\mathcal{T} \exp\left(i \frac{\varphi_A}{2}\right) |A\rangle = \exp\left(-i \frac{\varphi_A}{2}\right) \mathcal{T}|A\rangle = \exp\left(i \frac{\varphi_A}{2}\right) |A\rangle. \quad (1.37)$$

Поэтому результат операции обращения времени тесно связан с фазой состояния.

Следствия, вытекающие из \mathcal{T} -инвариантности, можно обнаружить, пользуясь совокупностью базисных состояний, фазы которых определены в зависимости от их преобразования под действием оператора \mathcal{T} . Мы построим такую совокупность в представлении собственных функций углового момента.

Поскольку \mathcal{T} антикоммутирует с полным угловым моментом, удобно объединить \mathcal{T} с вращением \mathcal{R} на угол π вокруг оси, перпендикулярной оси пространственного квантования (т. е. перпендикулярной оси z). В результате такого вращения меняет знак I_z и, сле-

довательно,

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}\mathcal{T}, I_z] &= 0, \\ [\mathcal{R}\mathcal{T}, I^2] &= 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

Поэтому можно построить совокупность базисных состояний с квантовыми числами I и M , которые будут также собственными векторами оператора $\mathcal{R}\mathcal{T}$. При соответствующем выборе фаз этих состояний собственные значения оператора $\mathcal{R}\mathcal{T}$ можно сделать равными единице, т. е.

$$\mathcal{R}\mathcal{T} |\alpha IM\rangle = |\alpha IM\rangle, \quad (1.39)$$

где α — совокупность дополнительных квантовых чисел, определяющих внутреннюю структуру состояний. Обычное соглашение о фазе соответствует выбору оси y в качестве оси вращения \mathcal{R} . Пользуясь выражением для \mathcal{R}_y (п) [см. формулу (1.140)], из (1.39) получаем, что

$$|\overline{\alpha IM}\rangle \equiv \mathcal{T} |\alpha IM\rangle = (-1)^{I+M} |\alpha I, -M\rangle. \quad (1.40)$$

Здесь мы ввели обозначение, которым будем часто пользоваться в последующем, а именно черта над совокупностью квантовых чисел (таких, как $\overline{\alpha IM}$) обозначает состояние с обращенным временем. [При выборе фазы в соответствии с формулой (1.39) \mathcal{T} -инвариантность связывается с \mathcal{R} -инвариантностью. Вопрос об удобных базисных состояниях и о вещественности матричных элементов для систем, инвариантных относительно операции \mathcal{T} , но не инвариантных относительно операции \mathcal{R} , рассмотрен в приложении 2, п. 2.]

Оператор \mathcal{T}^2 представляет собой унитарный оператор, коммутирующий со всеми координатами частиц [см. соотношения (1.29)]. Действуя оператором $\mathcal{R}\mathcal{T}$ на обе части равенства (1.39) и учитывая то обстоятельство [см. формулу (1.140)], что вращение \mathcal{R}^2 на угол 360° дает $+1$ при целом спине (т. е. при четном числе n нуклонов) и -1 при полуцелом спине (при нечетном числе n), находим, что

$$\mathcal{T}^2 = (-1)^n. \quad (1.41)$$

На основании равенства (1.41) можно заключить, что состояния нечетного числа частиц не являются собственными состояниями оператора \mathcal{T} , так как, согласно (1.37), для любого собственного состояния оператора \mathcal{T} собственное значение оператора $\mathcal{T}^2 = +1$.

Если $|A\rangle$ является собственным состоянием \mathcal{T} -инвариантного гамильтонiana H с энергией E_A , то состояние $\mathcal{T}|A\rangle$ также является собственным состоянием оператора H с энергией E_A . Поскольку при нечетном числе частиц состояние $\mathcal{T}|A\rangle$ не может быть пропорциональным состоянию $|A\rangle$, отсюда следует, что стационарные состояния систем нечетного числа частиц двукратно вырождены. (Дан-

ный вывод называется теоремой Крамерса и был первоначально сделан при изучении электронных орбит в кристаллах [273].) В системах, обладающих сферической симметрией, такое вырождение проявляется как частный случай $(2I + 1)$ -кратного вырождения, связанного с собственными состояниями углового момента I [так как число $(2I + 1)$ четно при нечетных n]. В деформированных ядрах орбиты отдельных нуклонов сохраняют двукратное вырождение как результат теоремы Крамерса.

Для базисных функций (1.39) соотношение (1.34) принимает вид

$$\langle \alpha_2 I_2 M_2 | T | \alpha_1 I_1 M_1 \rangle = \langle \alpha_2 I_2 M_2 | \mathcal{R} \mathcal{T} T (\mathcal{R} \mathcal{T})^{-1} | \alpha_1 I_1 M_1 \rangle^*. \quad (1.42)$$

Таким образом, если оператор T инвариантен относительно операции $\mathcal{R} \mathcal{T}$, то все его матричные элементы вещественны, а если при такой операции оператор T меняет знак, то все его матричные элементы чисто мнимые. Следовательно, преобразованием операторов при обращении времени определяется фаза их матричных элементов. Соответствующие соотношения для операции \mathcal{P} , в которую не включается комплексное сопряжение, вместо этого приводили к правилам отбора для матричных элементов [см. формулу (1.27)].

В случае систем, инвариантных относительно обращения времени и вращений, гамильтониан H коммутирует с \mathcal{T} и \mathcal{R} . Поэтому все матричные элементы гамильтониана H вещественны, а стационарные состояния системы являются вещественными векторами в представлении (1.39).

В качестве следующего примера фазовых соотношений, вытекающих из равенства (1.42), рассмотрим составляющую по оси z электрического дипольного момента. Она инвариантна относительно операции \mathcal{T} , но меняет знак под действием оператора вращения \mathcal{R} . Поэтому матричные элементы z -составляющей электрического дипольного момента чисто мнимы. Составляющая же по оси z магнитного дипольного оператора, меняющая знак отдельно под действием обоих операторов \mathcal{T} и \mathcal{R} и, следовательно, коммутирующая с оператором $\mathcal{R} \mathcal{T}$, имеет вещественные матричные элементы. В более общем случае фаза матричных элементов для электрических мультипольных моментов равна i^λ , а для магнитных мультипольных моментов $i^{\lambda+1}$ [см. формулы (1.169) и (3.139)].

Из инвариантности электромагнитного взаимодействия относительно обращения времени вытекает вещественность относительных фаз амплитуд различных мультипольных составляющих в γ -переходах смешанной мультипольности. Действительно, такие амплитуды пропорциональны матричным элементам электромагнитного взаимодействия между начальным состоянием ядра и его конечным состоянием, содержащим γ -квант, а матричные элементы в силу соотношения (1.42) вещественны. Пример этого правила фаз приведен ниже в данном параграфе.

Исходя из трансформационных свойств операторов относительно операции $\mathcal{R}\mathcal{T}$, можно получить правила отбора для их средних значений. Поскольку средние значения эрмитовых операторов вещественны, из соотношения (1.42) следует, что средние значения тех эрмитовых операторов, которые меняют знак под действием оператора $\mathcal{R}\mathcal{T}$, должны быть равными нулю. Примером может служить электрический дипольный момент D , равный среднему значению составляющей оператора электрического дипольного момента в состоянии с магнитным квантовым числом $M = I$. Поэтому тот очень малый верхний предел, который установлен экспериментально для электрического дипольного момента нейтрона, может служить мерой амплитуды состояния нейтрона, связанного с нарушением как \mathcal{P} -, так и \mathcal{T} -инвариантности.

Из \mathcal{T} -инвариантности вытекают также важные следствия для ядерного рассеяния и ядерных реакций. Состояния, описывающие такие процессы, хотя и могут иметь определенную энергию, являются квазистационарными, поскольку процессы связаны с направлением течения времени (различие между начальными и конечными условиями). Поэтому оператор обращения времени не только переворачивает импульсы и спины частиц, участвующих в реакции, но изменяет и направление протекания самого процесса. Таким образом, \mathcal{T} -симметрия устанавливает соотношение между прямыми и обратными реакциями (см. приложение 2, п. 3).

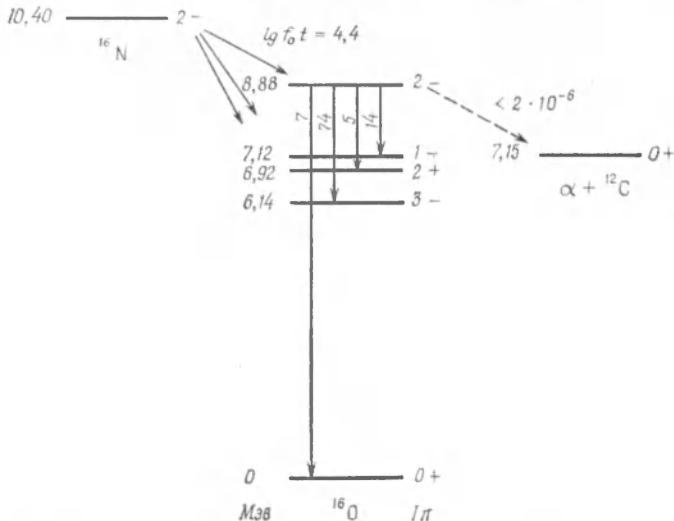
Проверка \mathcal{T} -инвариантности в процессах рассеяния и ядерных реакциях иллюстрируется данными фиг. 1.4 и 1.6. Экспериментальные данные о ядерных взаимодействиях согласуются с предположением о \mathcal{T} -инвариантности, но гораздо менее точно, чем данные проверки инвариантности относительно пространственного отражения (см. выше). Эксперимент показывает, что если и имеется часть ядерного взаимодействия, которая изменяет знак при операции \mathcal{T} , то она должна быть по крайней мере на два порядка слабее инвариантной части взаимодействия. С такой же точностью была проверена \mathcal{T} -инвариантность электромагнитных и слабых взаимодействий в ядре. (См., например, проверку правила фаз для электромагнитных переходов смешанной мультипольности, проведенную Кистнером [265], и данные по корреляции в β -распаде, упомянутые в связи с фиг. 1.3. Более подробно вопрос о проверке симметрии, связанной с обращением времени, рассматривается в работе [230].)

Можно показать, что из релятивистской инвариантности и некоторых довольно общих предположений относительно локальности взаимодействий следует комбинированная симметрия отражения $\mathcal{PC}\mathcal{T}$, где C — зарядовое сопряжение [260, 413]. Если сделать такие предположения, то наличие \mathcal{T} -инвариантности оказывается эквивалентным наличию \mathcal{PC} -инвариантности. Таким образом, из данных, свидетельствующих о нарушениях \mathcal{PC} -инвариантности при распаде K^0 -мезона, следует и соответствующее нарушение \mathcal{T} -инвариантности. Относительно экспериментальной проверки $\mathcal{PC}\mathcal{T}$ -инвариантности см. работы [286, 287].

ПРИМЕРЫ К § 2

Проверка закона сохранения четности при α -распаде (фиг. 1.1)

Процесс α -распада с переходом в состояние $0+$ дочернего ядра (например, в основное состояние четно-четного ядра) подчиняется простым правилам отбора по четности. Конечное состояние, в котором должны быть две частицы с нулевыми спинами (α -частица и дочернее ядро), характеризуется полным угловым моментом, равным орбитальному моменту относительного движения ($I = L$),



Фиг. 1.1. Верхний предел для вероятности α -распада с уровня 8,88 Мэв в ядре ^{16}O был установлен в работах [392, 393].

Дополнительные данные, приведенные здесь, взяты из обзора [2]. Энергия отсчитывается от основного состояния ядра ^{16}N .

а полная четность определяется четностью состояния относительного движения [$\pi = (-1)^L = (-1)^I$]. Таким образом, в силу закона сохранения четности α -распад ядра в состоянии с четностью $\pi = -(-1)^I$ (т. е. на уровнях $I\pi = 0-, 1+, 2-, \dots$) оказывается запрещенным.

Данным правилом отбора объясняется стабильность по отношению к испусканию α -частиц ряда состояний ядра ^{16}O , энергия которых превышает порог α -распада в основное состояние ядра ^{12}C (фиг. 1.1). Среди таких состояний имеется уровень с энергией 8,88 Мэв, который может быть заселен при разрешенном β -распаде ядра ^{16}N . Поскольку для основного состояния ядра ^{16}N мы имеем $I\pi = 2-$ (это следует из формы β -спектра для переходов на основное состояние ядра ^{16}O), уровень ядра ^{16}O с энергией 8,88 Мэв должен иметь отрицательную четность и спин $I = 1, 2$ или 3 . Таким образом, на основании α -стабильности указанного уровня мы можем предположить, что его спин равен $2-$, и это подтверждается данными по угловой корреляции при γ -распаде.

Очень тщательные поиски ветви α -распада с уровня 8,88 Мэв позволили установить для отношения вероятностей α - и γ -распадов верхний предел, равный $2 \cdot 10^{-6}$ (фиг. 1.1).

Вероятность γ -распада экспериментально не была определена, но ее можно приблизительно рассчитать, если принять, что уровень с энергией $8,88 \text{ MeV}$ приблизительно описывается частично-дирочкой конфигурацией ($p_{1/2}^1 d_{3/2}^1$); $I = 3 -$, $T = 0$ [см. раздел о спектре ядра ^{16}O в гл. 7]. Тогда для перехода $M2$ из основного состояния, пользуясь формулами (3.111) и (3.168) и тем обстоятельством, что возбужденное состояние с $T = 0$ содержит симметрическую комбинацию возбужденных нейтрона и протона, получаем, что $B(M2, 2 - \rightarrow 0 +) \approx 4,2 \cdot 10^{-20} (\text{eV}/2\text{MeV})^2 \text{ см}^2$. Это соответствует парциальной ширине $(\Gamma_y)_{2 - \rightarrow 0 +} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ эв}$ [см. формулу (3.147)]. Распад на основное состояние составляет 7% от всего распада, а следовательно, полученная оценка парциальной ширины означает, что $(\Gamma_y)_{\text{пол}} \approx 10^{-2} \text{ эв}$.

Но вероятность перехода $2 - \rightarrow 0 +$ очень сильно зависит от смещения конфигураций. Расчеты показывают, что такое смещение уменьшает парциальную ширину примерно в 10 раз [146]. Тот экспериментальный факт, что уровень с энергией $8,88 \text{ MeV}$ слабо возбуждается при неупругом рассеянии протона, также указывает на то, что данный переход гораздо слабее, чем он должен быть в случае чисто одиночечной конфигурации. Учитывая источники в интерпретации спектра возбуждения ядра ^{16}O , мы возьмем указанную выше оценку ширины Γ_y лишь в качестве завышенного верхнего предела. Тогда ширина Γ_x должна быть меньше $2 \cdot 10^{-8} \text{ эв}$. Для уровня же $2 +$ с той же энергией, но с единичной приведенной шириной [см. формулу (3.337)] мы должны были бы иметь $\Gamma_x = (\Gamma_x)_{\text{одн}} \approx 60 \text{ кэв}$. Таким образом, экспериментальные данные говорят о наличии фактора заторможенности порядка $3 \cdot 10^{12}$ и более.

При наличии небольших сил, нарушающих четность, α -распад был бы возможен за счет небольшой примеси состояния $2 +$ в волновой функции ядра ^{16}O или примеси состояния $0 -$ в волновых функциях ядра ^{12}C или α -частицы. Порядок величины такой примеси в грубо соответствует отношению сил, нарушающих четность, к силам, сохраняющим ее. Поскольку α -ширина пропорциональна ε^2 , из эксперимента следует, что величина ε не превышает 10^{-6} . Но для уточнения этой величины требуется более детальный анализ влияния сил, нарушающих четность, как на волновые функции начального и конечного состояний, так и на сам механизм испускания α -частиц.

Поиск смеси ядерных состояний различной четности путем анализа круговой поляризации γ -излучения (фиг. 1.2)

Предположение о наличии \mathcal{P} -инвариантности означает, что свойства γ -лучей, испускаемых ядром в состоянии с определенной четностью, должны быть инвариантными при отражении относительно источника. При таком отражении направление распространения γ -квантов изменяется на обратное, а угловые моменты остаются прежними. Поскольку круговая поляризация определяется составляющей углового момента в направлении распространения (т. е. спиральностью), при отражении она изменяет свой знак. Поэтому из \mathcal{P} -симметрии следует, что число правополяризованных γ -квантов, испускаемых в произвольном направлении, равно числу левополяризованных γ -квантов, испущенных в противоположном направлении. Если излучающие ядра ориентированы произвольно, то излучение изотропно, а круговая поляризация равна пулю во всех направлениях.

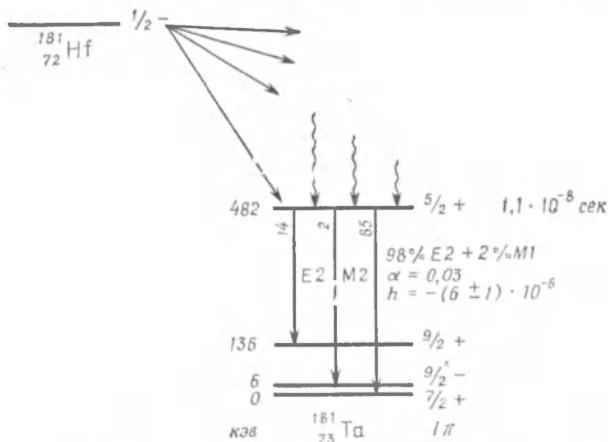
Особенно тщательно поиски нарушения этого правила четности были проведены для перехода с энергией 482 кэв в ядре ^{181}Ta (фиг. 1.2). Возбужденное состояние заселяется при β -распаде ядра ^{181}Hf , а так как при этом β -лучи не регистрировались, мы здесь имеем дело с γ -излучением беспорядочно ориентированных ядер. Круговая поляризация излучения измерялась по рассеянию на парамагнитном железе.

Излучение с энергией 482 кэв в основном посит характер смеси $M1 + E2$. Поэтому наличие круговой поляризации требует небольшой примеси излуче-

ния $E1$ или $M2$. Поскольку излучение $M2$ значительно слабее излучения $E1$, основной вклад должен соответствовать примеси перехода $E1$. При такой примеси круговая поляризация возникает вследствие интерференции составляющих излучения $E1$ и $M1$. (В случае беспорядочно ориентированных ядер интерференции излучения с разной мультипольностью λ не может быть.) Фотон с полной круговой поляризацией ($h = \pm 1$) представляет собой суперпозицию состояний разной четности, взятых с одинаковыми долями:

$$\lambda h = \pm 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|E\lambda\rangle \pm |M\lambda\rangle)$$

Это следует из того, что при пространственном отражении каждое состояние преобразуется в состояние с противоположной спиральностью. {Коэффициенты



Фиг. 1.2. Круговая поляризация h γ -лучей с энергией 482 кэВ в ядре ^{181}Ta была измерена в работе [492].

Дополнительные данные, приведенные здесь, взяты из работы [283].

преобразования вещественны, если у состояний λh , $E\lambda$ и $M\lambda$ обычное соотношение фаз [$\mathcal{R}\mathcal{T} = 1$, см. формулу (1.39)].} Следовательно, $\langle h \rangle = 2c(E1)c(M1)$, где $c(E1)$ и $c(M1)$ — амплитуды излучений $E1$ и $M1$, нормированные на единицу [$c^2(E2) + c^2(M1) + c^2(E1) \approx c^2(E2) + c^2(M1) = 1$]. Отсюда вытекает вещественность относительных амплитуд различных мультипольных составляющих излучения, как этого требует инвариантность относительно обращения времени. Если \mathcal{T} -инвариантность тоже нарушается, то величина $\langle h \rangle$ уменьшается [$\langle h \rangle = 2\text{Re}\{c(E1)c(M1)\}$] и оказывается равной нулю, когда $c(E1)$ и $c(M1)$ различаются по фазе на 90° (максимальное нарушение \mathcal{T} -инвариантности). Таким образом, эксперимент позволяет проверить нарушение четности для взаимодействий, инвариантных относительно обращения времени.

Поскольку примесь излучения $M1$ равна $c^2(M1) = 2 \cdot 10^{-2}$, а круговая поляризация равна $-6 \cdot 10^{-6}$ (фиг. 1.2), мы имеем $c^2(E1) \approx 4 \cdot 10^{-10}$. Зная измеренное время жизни уровня с энергией 482 кэВ, а также учитывая, что $85\% \cdot (1 - 0.03) = 82\%$ распадов связано с γ -переходами такой энергии, получаем полную вероятность γ -распада $T_\gamma(482) \approx 5 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Таким образом, вероятность парциального перехода $E1$ равна $T(E1) \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$, что соответствует приведенной вероятности $B(E1, {}^{5/2}_- \rightarrow {}^7_2) \approx 10^{-42} \text{ эн}^2 \text{ см}^2$ [см. формулу (3.147)].

Основное состояние и уровень с энергией 482 кэВ ядра ^{181}Ta можно описать с помощью различных одиночастичных состояний последнего протона, движущегося в сфероцентрическом потенциале, а затем можно сравнить экспериментальное значение $B(E1)$ с теоретической вероятностью одиночастичного перехода $E1$ для такого ядра. Уровень с энергией 482 кэВ характеризуется квантовыми числами $[503 \frac{7}{2}]$ (гл. 5) и связан переходом $E1$ с уровнем $[503 \frac{7}{2}]$, $I = \frac{7}{2}$, который соответствует тем же самим квантовым числам K, I , что и основное состояние. Для осцилляторных волновых функций приведенная вероятность такого перехода (гл. 4 и 5) равна $B(E1; [402 \frac{5}{2}], I = \frac{5}{2} \rightarrow [503 \frac{7}{2}], I = \frac{7}{2}) \approx 10^{-26} e^2 \text{ см}^2$. Данные значение величины $B(E1)$ для перехода с энергией 482 кэВ соответствует фактору заторможенности порядка 10^{-16} .

Мы могли попытаться учесть эффект взаимодействий, нарушающих четность, действием некоторого среднего псевдоскалярного поля. Если мы потребуем инвариантности относительно обращения времени, то такое одиночастичное поле должно будет зависеть от скорости (поскольку произведение $\sigma \cdot r$ меняет знак при инверсии \mathcal{T}), а если мы ограничимся первым порядком по скорости, то такое поле будет иметь вид $(Mc)^{-1}[\sigma \cdot \text{Речети}(\mathbf{r}) + V_{\text{речети}}(\mathbf{r}) \cdot \sigma \cdot \mathbf{p}]$. Наличие псевдоскалярной вспомогательной поля означает, что преобладающие одиночастичные состояния положительной четности будут содержать небольшую примесь отрицательной четности. Состояния отрицательной четности, связанные с большими матричными элементами переходов $E1$ (такие, как рассмотренные выше состояние $[503 \frac{7}{2}]$), появляются при энергиях возбуждения порядка $5-10 M_{\text{эв}}$. Полученное выше значение $B(E1)$ дает для матричных элементов, связанных с нарушением четности, величину порядка 10^{-1} эв . Это соответствует псевдоскалярному потенциальному $V_{\text{речети}}$ порядка 10^{-8} от скалярного потенциала.

Таким образом величина взаимодействия, нарушающие четность, можно рассматривать в рамках теории слабых взаимодействий. Если принять, что слабое взаимодействие не только между нуклонами с лептонами, но и между самими нуклонами, то мы получим ядерные силы (нарушающие четность), величина которых будет составлять $10^{-3}-10^{-7}$ от сил, соответствующих сильным взаимодействиям. [См. гл. 3, приложение 4, п. 1 и 2. Теория возмущений по нуклон-лептонному взаимодействию во втором порядке также дает ядерные силы, нарушающие четность, но еще меньшей величины ($\sim 10^{-12}$).]

Некоторая попытка количественного анализа эффектов нарушения четности, обусловленных слабыми взаимодействиями, включает в себя проверку ряда положений:

1. Оценка эффективных ядерных двухчастичных сил, возникающих благодаря слабым взаимодействиям. Из-за связи между слабыми и сильными взаимодействиями эти силы должны быть, по-видимому, довольно сложными.

2. Построение нарушающего четность среднего поля, вызванного этими силами, и оценка возможного вклада более специфических эффектов такого двухчастичного взаимодействия. Некоторые стороны этих вопросов были раскрыты в работах [43, 325].

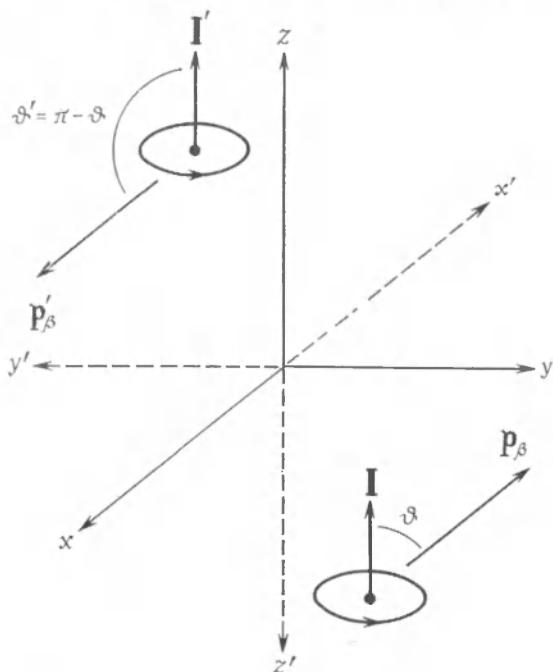
3. Детальный анализ влияния, которое поле, нарушающее четность, оказывает на одиночастичное движение. Подобные вопросы рассматривались в работе [438].

Нарушение четности при β -распаде, проверка инвариантности относительно обращения времени (фиг. 1.3)

Факт нарушения четности в процессах, связанных со слабым взаимодействием, был установлен путем наблюдения целого ряда корреляционных эффектов, обнаруживающих отклонение от зеркальной симметрии.

На фиг. 1.3 схематически показано, какова корреляция между ориентацией I родительского ядра и направлением движения p_B испускаемой им β -частицы. Если распадающаяся система обладает определенной четностью, сохраняющейся во время процесса, то она идентична своему зеркальному изображению,

которое получается при отражении относительно начала координат (состояния $|A\rangle$ и $|\bar{A}\rangle = \mathcal{P} |A\rangle = \pi_A |A\rangle$ отличаются только фазовым множителем). Таким образом, симметрия относительно пространственной инверсии означает, что число β -частиц, испущенных под углом ϑ к направлению ориентации ядра, должно быть равно числу частиц, испущенных под углом $\pi - \vartheta$. В действительности же в таких процессах наблюдается большая асимметрия прямого и обратного направлений. Впервые нарушение четности было открыто на основании подобного эксперимента с поляризованным источником ядер ^{60}Co [469].



Фиг. 1.3. Нарушение симметрии отражения в β -распаде.

Наблюдающееся отклонение от симметрии отражения можно также характеризовать отличным от нуля средним значением произведения $I \cdot p_\beta$. Это произведение представляет собой псевдоскаляр, т. е. оно инвариантно относительно вращения, но меняет знак при отражениях и поэтому для состояний с определенной четностью его среднее значение равно нулю. Примером для других псевдоскалярных корреляций, наблюдавшихся в процессах β -распада, могут служить величины $\langle s_\beta \cdot p_\beta \rangle$ (спиральность β -частиц, испускаемых беспорядочно ориентированными ядрами) и $\langle (p_\beta \cdot p_y) (s_y \cdot p_\beta) \rangle$ (круговая поляризация γ -лучей, сопровождающих β -распад беспорядочно ориентированных ядер).

Правила отбора по четности, которые можно сформулировать как равенство нулю средних значений псевдоскалярных величин, носят полуklassический характер, так как они прямо выражают внутреннюю симметрию отражения данной системы. Чтобы сформулировать другие правила отбора, не имеющие классических аналогий, необходимы квантовые числа четности. Так, например, при распаде на две частицы ($A \rightarrow B + C$) закон сохранения четности выражает-

и равенство $\pi_A = \pi_B \pi_C (-1)^L$, где L — угловой момент относительного движения частиц B и C . Пример такого правила отбора рассматривался в связи с фиг. 1.1.

Правило о \mathcal{PC} -инвариантности означает, что распадающаяся античастица должна представлять собой зеркальное отражение распадающейся частицы (о той же самой поляризации) и поэтому псевдоскалярные корреляции для частиц и античастиц должны быть равными по величине и обратными по знаку. Справедливость данного предположения непосредственно для ядер или мезонов пока что не удалось проверить, но для распада π - и μ -мезонов \mathcal{PC} -инвариантность была установлена. Удалось показать, что спиральности μ -мезона при распаде π^+ - и π^- -мезонов противоположны и что распад μ^- -мезона предполагает собой зеркальное отражение распада μ^+ -мезона (см., например, работу [477]). Небольшое нарушение \mathcal{PC} -инвариантности при распаде K^0 -мезона было отмечено нами на стр. 24.

Преобразование, соответствующее операции \mathcal{T} , непосредственно связывает процесс распада с обратным процессом образования. В случае β -распада таким процессом была бы реакция захвата электронно-нейтринной пары дочерним ядром, которую трудно осуществить экспериментально. Конечное состояние при распаде и начальное состояние в процессе образования различаются не только направлением движения (и направлением спинов) частиц, но и разностью фаз, обусловленной взаимодействием между частицами (которая для двух данных состояний имеет разный знак). Компенсируя эту (в случае β -распада пулоновскую) разность фаз, можно получить соотношения между амплитудами распада, которые будут следствиями \mathcal{T} -инвариантности [см. формулу (1.267)].

Положение особенно упрощается, когда можно пренебречь взаимодействием в начальном состоянии. Это возможно в случае γ -распада и (приближенно) в случае β -распада легких ядер. Тогда следствия \mathcal{T} -инвариантности оказываются совершенно аналогичными следствиям \mathcal{P} -инвариантности и означают, что средние значения величин, меняющих свой знак при операции \mathcal{T} , должны быть равными нулю.

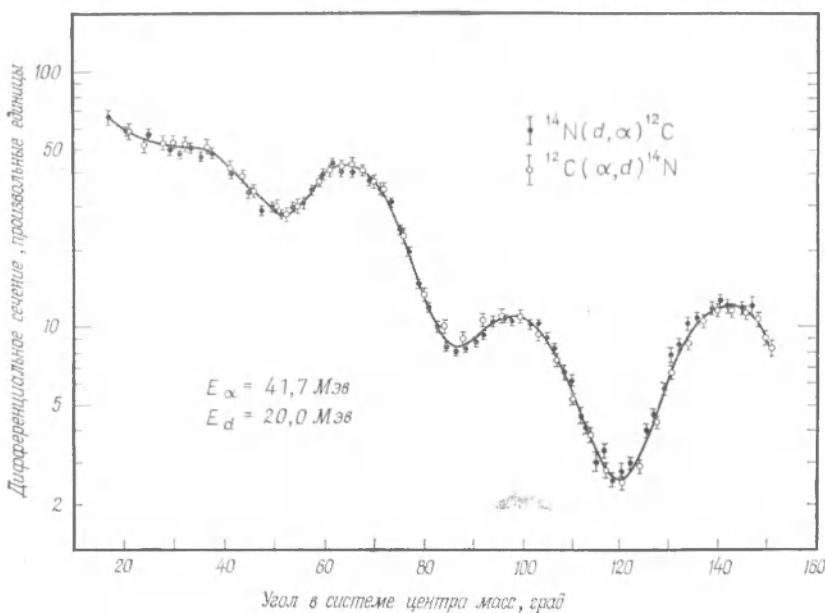
Рассмотренные выше корреляции, такие, как $I \cdot p_\beta$ и $s_\beta \cdot p_\beta$, четны относительно операции \mathcal{T} . Примером корреляции, изменяющей знак при операции \mathcal{T} , может служить произведение $I \cdot p_\beta \times p_R$, где p_R — импульс ядра-отдачи. Фактически $\langle I \cdot p_\beta \times p_R \rangle$ была измерена при распаде нейтрона. Оказалось, что она составляет менее 10% от максимального значения такого произведения, равного $I p_R p_R$ [468]. Для β -распада ядра ^{19}Ne справедливость соотношений, связанных с обращением времени, была установлена с точностью до нескольких процентов [83].

Сравнение сечений прямых и обратных реакций (фиг. 1.4)

Сечения прямых и обратных реакций $a_1 + a_2 \rightleftharpoons b_1 + b_2$ взаимосвязаны в силу симметрии относительно обращения времени. Симметрия амплитуды рассеяния, связанная с \mathcal{T} -инвариантностью, рассматривается в приложении 2, п. 3. Из соотношения (1.257) для матричного элемента S -матрицы совместно с соотношениями (1.259) и (1.262) для амплитуд рассеяния и сечений следует, что сечения прямых и обратных реакций удовлетворяют условию

$$\frac{d\sigma (a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2)}{d\sigma (b_1 + b_2 \rightarrow a_1 + a_2)} = \frac{p_b^2 (2b_1 + 1) (2b_2 + 1)}{p_a^2 (2a_1 + 1) (2a_2 + 1)}. \quad (1.43)$$

Дифференциальные сечения для прямого и обратного процессов относятся к одной и той же энергии и к одному и тому же углу в системе центра масс, в which частиц обозначены через a_1 , a_2 и т. д. В равенстве (1.43) сечения относятся к неполяризованным частицам и поэтому усреднены по начальным и проектированы по конечным поляризациям.



Фиг. 1.4. Сечения прямых и обратных реакций, определенные в работе [49].

Правая часть равенства (1.43) не зависит от угла рассеяния. Это было проверено в реакциях $\alpha + ^{12}\text{C} \rightleftarrows d + ^{14}\text{N}$ (фиг. 1.4). Абсолютные значения сечений не были определены. Относительные же сечения этих реакций очень близки друг к другу. Отклонения составляют в среднем около 5%, что не превышает экспериментальной ошибки.

Более поздние исследования реакций типа $^{24}\text{Mg} + d \rightleftarrows ^{25}\text{Mg} + p$ [50] и $^{24}\text{Mg} + \alpha \rightleftarrows ^{27}\text{Al} + p$ [463] подтвердили соотношение (1.43) с точностью до долей процента.

Соотношение поляризационной асимметрии при упругом рассеянии (фиг. 1.5 и 1.6)

Симметрия относительно обращения времени связывает поляризацию конечной частицы в реакции $a_1 + a_2 \rightleftarrows b_1 + b_2$ с азимутальной симметрией обратного процесса для поляризованных частиц.

В качестве примера мы рассмотрим процесс упругого рассеяния частицы со спином $1/2$ (например, n , p или ^3H) на ядре. Обозначим через $\sigma(\Pi; m_s \rightarrow m'_s)$ сечение рассеяния с отклонением направо. Здесь m_s и m'_s характеризуют поляризацию падающей и рассеянной частиц в направлении, перпендикулярном плоскости столкновения (фиг. 1.5). Сечение усредняется по поляризациям начального состояния и суммируется по конечным поляризациям.

Из симметрии относительно обращения времени получаем, что

$$\sigma(\Pi; m_s \rightarrow m'_s) = \sigma(\Pi; -m'_s \rightarrow -m_s), \quad (1.44)$$

так как после поворота на угол $\pi + \vartheta$ вокруг оси z обратный процесс переходит в прямое рассеяние с отклонением влево (Л) (фиг. 1.5). Кроме того, процессы Π и Λ связаны между собой вращением на угол π вокруг оси y , а именно:

$$\sigma(\Pi; m_s \rightarrow m'_s) = \sigma(\Lambda; -m_s \rightarrow -m'_s). \quad (1.45)$$

Поляризация рассеянной частицы для неполяризованного пучка падающих частиц равна

$$P = \frac{\sum_{m_s} \sigma(\Pi; m_s \rightarrow 1/2) - \sum_{m_s} \sigma(\Pi; m_s \rightarrow -1/2)}{\sum_{m_s} \sigma(\Pi; m_s \rightarrow 1/2) + \sum_{m_s} \sigma(\Pi; m_s \rightarrow -1/2)}. \quad (1.46)$$

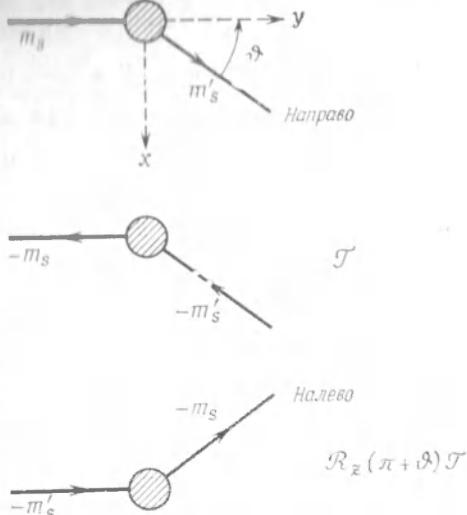
Легко видеть, что в силу соотношений (1.44) и (1.45) поляризация P равна взаиммутуальной асимметрии A , определяющейся выражением

$$A = \frac{\sum_{m_s} \sigma(\Pi; 1/2 \rightarrow m_s) - \sum_{m_s} \sigma(\Lambda; 1/2 \rightarrow m_s)}{\sum_{m_s} \sigma(\Pi; 1/2 \rightarrow m_s) + \sum_{m_s} \sigma(\Lambda; 1/2 \rightarrow m_s)}. \quad (1.47)$$

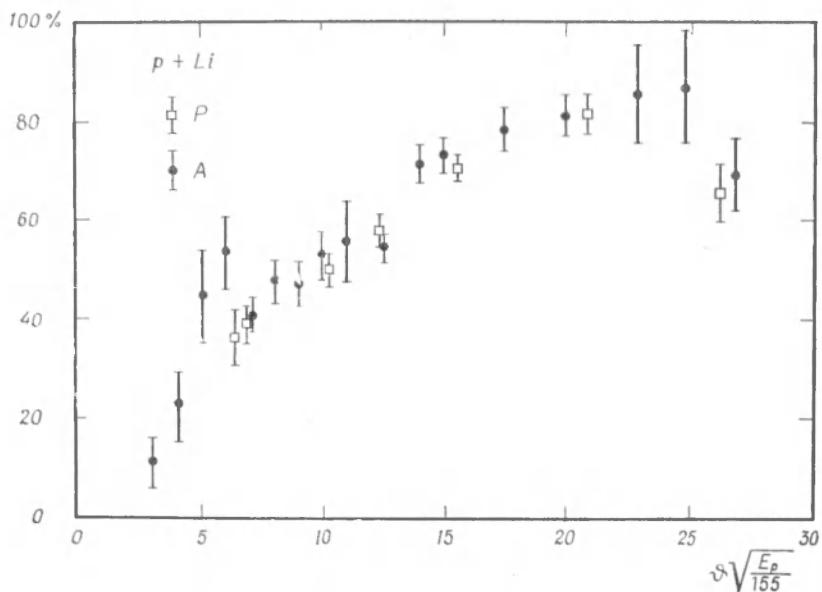
На фиг. 1.6 представлены данные измерения величин P и A при рассеянии протонов высокой энергии на Li . Данные о поляризации относятся к средней энергии $E_p = 180$ МэВ, а измерения асимметрии проводились на поляризованном пучке, полученному в результате рассеяния протонов в энергией 155 МэВ на мишени из углерода. Масштаб угловой шкалы на графике выбран так, чтобы приближенно скорректировать эту разницу в энергии. Из графика явствует, что результаты этих двух измерений согласуются друг с другом в пределах экспериментальной ошибки (порядка 4%).

Для того чтобы можно было однозначно проверить наличие \mathcal{T} -симметрии, если ядра-мишени должны быть отличными от пуля, так как при пулемовом спине равенство $P = A$ следует из \mathcal{P} -инвариантности. Действительно, при отражении в плоскости столкновения каждой частицы, участвующей в реакции, приобретет фазу $(-1)^{m_s}$. Таким образом, для ядра-мишени со спином, равным 0, \mathcal{P} -инвариантность означает, что $(-1)^{m_s-m'_s} = +1$, а это при $s = 1/2$ возможно лишь в случае процессов, протекающих без изменения ориентации спина, т. е. при $m_s = m'_s$. В этом случае соотношение (1.44) вытекает из соотношения (1.45) и оказывается следствием вращательной симметрии.

Итак, для ядра Li , спин которого определяется главным образом последним протоном, проверку \mathcal{T} -симметрии обеспечивает только вклад этой частицы в рассеяние (если предполагается наличие \mathcal{P} -симметрии). Поэтому данные



Фиг. 1.5. Асимметрия отклонений вправо и влево при упругом рассеянии поляризованных частиц.



Фиг. 1.6. Поляризация P и азимутальная асимметрия A , полученные в работе [235].

фиг. 1.6 лишь очень приближенно указывают границы для отношения ядерных сил, нарушающих T -симметрию, к силам, инвариантным относительно обращения времени. Связь поляризации и азимутальной асимметрии была также проверена в других процессах рассеяния, в том числе в процессе $p-p$ -рассеяния (см., например, работу [235]).

§ 3. ИЗОБАРИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

1. Изоспиновая симметрия

Изоспин нуклонов

Основная особенность строения ядра — наличие в нем нуклонов двух типов: протонов и нейтронов. Приблизительное равенство масс этих двух частиц ($\Delta M/M = 1,4 \cdot 10^{-3}$, см. табл. 1.1) сразу же навело на мысль о глубоком сходстве между ними [227], а при более детальном изучении их роли в ядерных процессах обнаружилась симметрия протона и нейтрона во всех ядерных взаимодействиях. Впервые симметрия в ядерных взаимодействиях была обнаружена при анализе $n-p$ - и $p-p$ -рассеяний при низких энергиях [63, 64]. При низких энергиях ($E < 5$ Мэв) система нейtron — протон взаимо-

действует главным образом в состояниях 1S и 3S , а для системы протон — протон в силу принципа Паули взаимодействие ограничено единством протонного 1S . Детальный анализ данных по рассеянию показывает, что $n - p$ -взаимодействие в состоянии 1S (за вычетом взаимодействия нуклонов) с точностью до нескольких процентов равно $p - p$ -взаимодействию (соответствующая литература указана в гл. 2, § 5). Существование общей симметрии между $n - p$, $n - n$ и $p - p$ -взаимодействиями поразительно подтверждается сравнением спектральной разности изобаров (ядер с одинаковым числом нуклонов, но разным числом нейтронов и протонов). Примеры будут рассмотрены в конце параграфа.

Таким образом, мы приходим к гипотезе о независимости ядерных сил от заряда нуклона. В силу принципа Паули о симметрии зарядовой независимости можно говорить лишь в отношении состояний, описываемых антисимметричными пространственно-спиновыми волновыми функциями, т. е. состояний, содержащих спиновый雙重 (S = 0) и четные значения орбитального углового момента (1S , 3D , . . .) или же спиновый триплет (S = 1) и нечетные значения орбитального углового момента (3P , 3F , . . .). Предполагается, что в этих состояниях взаимодействие для систем $n - n$, $n - p$ и $p - p$ одинаково. Симметричные состояния 3S , 1P , 3D , . . . разрешены только для системы нейtron — протон.

Следствия из зарядовой независимости удобнее всего вывести методом, при котором нейtron и протон рассматриваются как два состояния одной частицы. Тогда волновая функция нуклона будет зависеть и от обычных пространственных и спиновых переменных [\mathbf{r} и σ_z ($= 2s_z = \pm 1$)], и от изобарической переменной τ_z , разной для нейтрона ($\tau_z = +1$) и протона ($\tau_z = -1$). Таким образом, для нейтрона в состоянии $\Psi(\mathbf{r}, \sigma_z)$ напишем

$$\psi_n(\mathbf{r}, \sigma_z) = \psi(\mathbf{r}, \sigma_z, \tau_z = 1) = \psi(\mathbf{r}, \sigma_z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

и для протона в том же состоянии

$$\psi_p(\mathbf{r}, \sigma_z) = \psi(\mathbf{r}, \sigma_z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Как известно, протоны и нейтроны подчиняются принципу Паули, который требует, чтобы волновая функция была антисимметричной относительно перестановки всех координат любых двух протонов или двух нейтронов. Чтобы можно было использовать связь между нуклонами двух разных типов, мы введем обобщенный принцип Паули, согласно которому волновая функция антисимметрична относительно перестановки всех координат (пространственных, спиновых и изоспиновых) любых двух нуклонов.

Такой обобщенный принцип Паули не дополнительное предположение, а просто один из приемов удобного для нас метода. Действительно, обозначения, связанные с изобарическим спином, приводят к некоторой избыточности при перечислении состояний, так как конфигурацию, при которой имеются протон и нейтрон с координатами \mathbf{r}_p , $\sigma_z(p)$ и \mathbf{r}_n , $\sigma_z(n)$, можно охарактеризовать и совокупностью переменных $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_p$, $\sigma_z(1) = \sigma_z(p)$, $\tau_z(1) = -1$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_n$, $\sigma_z(2) = \sigma_z(n)$, $\tau_z(2) = +1$, и той же совокупностью переменных с переставленными всеми координатами (пространственными, спиновыми и изоспиновыми) частиц 1 и 2. Таким образом, условия антисимметрии нужны для устранения подобной лишней степени свободы. Следствия же зарядовой независимости можно рассматривать и не вводя изобарические перемещенные или обобщенный принцип Паули [25].

При методе изобарического спина операторы, действующие на изобарические переменные частицы, представляют собой матрицы. Например, в случае взаимодействия двух нейтронов можно написать

$$V_{nn}(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_2 V(1, 2), \quad (1.50)$$

где индексы у матриц указывают на то, что данная матрица действует на изобарические переменные частицы 1 или частицы 2.

Как хорошо известно из теории частиц со спиновой переменной, любую матрицу размерности 2×2 можно представить в виде линейной комбинации единичной матрицы и трех матриц Паули. Поэтому для отдельных нуклонов операторы в изобарическом пространстве можно выразить через изоспиновые матрицы

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Эти матрицы рассматриваются как составляющие вектора τ в трехмерном изопространстве с осями x , y , z . Составляющая по оси z (она представляет собой диагональную матрицу) соответствует введенной выше изобарической переменной.

Из матриц (1.51) мы получаем оператор изобарического спина

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}, \quad (1.52)$$

составляющие которого подчиняются коммутационным соотношениям для составляющих вектора углового момента [см. формулы (1.11)]. Поскольку $(\mathbf{t})^2 = \frac{3}{4}$, полный изоспин нуклона $t = \frac{1}{2}$, а его z -составляющая $m_t = t_z$ равна $+\frac{1}{2}$ (для нейтрона) и $-\frac{1}{2}$ (для протона)¹⁾.

1) Здесь мы приняли для нейтрона и протона такие значения проекций изоспина, которые наиболее удобны в ядерной физике и которые обладают тем преимуществом, что в случае тяжелых ядер с большим избытком нейтронов изоспины последних выстраиваются в положительном направлении оси z ($M_T > 0$). В физике же элементарных частиц для протона обычно берут $m_t = +\frac{1}{2}$, а для нейтрона $m_t = -\frac{1}{2}$.

Вращательная инвариантность в изопространстве

В системах с двумя и более нуклонами изоспины отдельных нуклонов можно связать в полный изоспин

$$\mathbf{T} = \sum_h \mathbf{t}_h \quad (1.53)$$

и вспомогательной по оси z

$$M_T = T_z = \frac{1}{2}(N - Z). \quad (1.54)$$

Несмотря на то что составляющие изоспина \mathbf{T} также удовлетворяют коммутационным соотношениям для вектора углового момента, собственные значения оператора \mathbf{T}^2 равны $T(T+1)$, где $T = 0, 1, 2, \dots$ для систем с четным числом нуклонов и $T = 1/2, 3/2, \dots$ для систем с нечетным числом нуклонов. Оператор \mathbf{T} так же связан с вращениями в изопространстве, как оператор момента \mathbf{I} с вращениями в обычном пространстве.

Наряду с независимостью сил означает, что взаимодействие, в следствии которого, и полный гамильтониан можно записать в такой форме, чтобы в них не входили явно изоспиновые переменные нуклонов. Но необходимо помнить, что, переходя к методу изобарического спина, мы ввели обобщенный принцип Паули, который можно выразить соотношением

$$P(i k) = P^r(i k) P^\sigma(i k) P^\tau(i k) = -1, \quad (1.55)$$

справедливым для каждой пары частиц $i k$. Операторы P^r , P^σ и P^τ являются пространственные, спиновые и изоспиновые переменные двух частиц. Таким образом, P представляет собой оператор полного обмена.

Соотношение (1.55) подразумевает наличие связи между изоспиновой и пространственно-спиновой степенями свободы. Так, например, двухчастичное взаимодействие, зависящее от симметрии двухчастичного состояния в спин-орбитальном пространстве, можно записать в двух формах:

$$V(i k) = \begin{cases} \frac{1}{2}(V^{(s)} + V^{(a)}) + \frac{1}{2}(V^{(s)} - V^{(a)}) P^r P^\sigma, \\ \frac{1}{2}(V^{(s)} + V^{(a)}) - \frac{1}{2}(V^{(s)} - V^{(a)}) P^\tau, \end{cases} \quad (1.56)$$

где $V^{(s)}$ и $V^{(a)}$ — функции пространственных и спиновых переменных взаимодействующих нуклонов. Взаимодействие в состояниях 3S , 1P , ..., симметричных в спин-орбитальном пространстве, обозначено через $V^{(s)}$, а $V^{(a)}$ представляет собой взаимодействие в антисимметричных состояниях 1S , 3P , ... (Зарядовой независимостью не устанавливается никакого соотношения между функциями $V^{(a)}$)

и $V^{(s)}$, которые в действительности оказываются совсем разными.) Часть взаимодействия $V(ik)$, содержащая оператор P^{τ} , называется зарядово-обменным взаимодействием и может быть связана с обменом квантами заряда, например π -мезонами, между двумя нуклонами. Оператор зарядового обмена P^{τ} выражается через изоспины нуклонов, а именно:

$$P^{\tau} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_h) = \begin{cases} +1 & \text{при } T=1, \\ -1 & \text{при } T=0, \end{cases} \quad (1.57)$$

что легко проверить непосредственным вычислением действия оператора P^{τ} на двухчастичное состояние или же исходя из соотношения

$$T^2 = T(T+1) = (\mathbf{t}_i + \mathbf{t}_h)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_h, \quad (1.58)$$

где полный изоспин T двух частиц для состояний, симметричных по изоспину ($P^{\tau} = +1$), равен единице, а для состояний, антисимметричных по изоспину ($P^{\tau} = -1$), — нулю.

Таким образом, зависимость от изоспинов нуклонов в соотношениях (1.55) и (1.56) можно выразить через скалярные произведения $\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_h$ для разных пар нуклонов. Поскольку такие произведения — изоскаляры, полное описание инвариантно относительно вращений в изопространстве.

И наоборот, из вращательной инвариантности в изопространстве вытекает зарядовая независимость, так что для систем нуклонов это как бы синонимы. Действительно, легко видеть, что функцию самого общего вида от изоспиновых переменных, являющихся скаляром в изопространстве, можно выразить через произведения $\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_h$ и, следовательно, через операторы обмена $P^{\tau}(ik)$. Поэтому гамильтониан, инвариантный относительно вращений в изопространстве, с помощью соотношения (1.55) можно записать, не пользуясь в явном виде изобарическими переменными.

Вращательная инвариантность в изопространстве означает, что гамильтониан коммутирует с полным изоспином \mathbf{T} . Таким образом, стационарным состояниям можно приписать квантовое число T . Такие состояния образуют вырожденный мультиплет, состоящий из $2T+1$ компонент с разными значениями $M_T = T_z$. Было установлено, что изобарическая мультиплетная структура — общее свойство ядерных спектров. Это дало многочисленные экспериментальные доказательства зарядовой независимости ядерных взаимодействий. Вырождение компонент мультиплета с разными значениями M_T (изобарические аналоговые состояния) снимается кулоновскими силами (см. ниже). Примеры изобарической мультиплетной структуры приведены на фиг. 1.7, 1.9, а также на фиг. 3.2a — 3.2e.

Изобарическая инвариантность имеет важные следствия для ядерных реакций, приводя к правилам отбора и соотношениям

изотопонийей, связанных с сохранением изоспина (см. примеры в § 3). Кроме того, в методе изобарического спина некоторые операции перевода принимают очень простую форму и тем самым дают правила отбора для соответствующих переходов. (Примеры рассматриваются в связи с фиг. 1.8, 1.10 и табл. 1.3.)

Зарядовая симметрия

Некоторые соотношения, вытекающие из зарядовой независимости, можно также получить, исходя из более слабого предположения о зарядовой симметрии, основанного на равенстве $p - p_{\pi} \pi - \pi$ -взаимодействий. Такую симметрию можно представить себе как инвариантность относительно операции \mathcal{R}_τ , при которой все нейтроны заменяются протонами и наоборот. Для ядер с $N = Z$ зарядовая симметрия означает, что стационарные состояния либо четны ($r_\tau = +1$), либо нечетны ($r_\tau = -1$) относительно операции \mathcal{R}_τ .

В методе изоспина операция зарядовой симметрии соответствует вращению в изопространстве на 180° вокруг оси, перпендикулярной оси π , и может быть представлена соотношением

$$\mathcal{R}_\tau = \exp \{-i\pi T_y\}. \quad (1.59)$$

Таким образом, для состояний с $N = Z$ (т. е. с $M_T = 0$) имеем

$$r_\tau = (-1)^T. \quad (1.60)$$

Примеры правил отбора, которые можно связать с квантовым числом зарядовой симметрии, рассматриваются ниже.

Нарушение изобарической симметрии

Изобарическая инвариантность нарушается электромагнитным взаимодействием. В структуре ядра эффекты, нарушающие симметрию, частично связаны с кулоновскими (и магнитными) силами, действующими между нуклонами. Дополнительные эффекты возникают вследствие разницы масс нейтрона и протона и из-за наличия небольших, зависящих от заряда компонент в сильных нуклонных взаимодействиях, которые, по-видимому, связаны с электромагнитной структурой нуклонов.

В самых легких ядрах такие эффекты сравнительно малы, и их можно с достаточной точностью рассматривать как возмущения, приводящие главным образом к небольшим энергетическим расщеплениям между изобарическими мультиплетами (см., например, фиг. 1.7). В тяжелых же ядрах кулоновское поле может оказаться очень сильным и достигать величины порядка 20 Мэв. Поэтому долгое время считали, что для тяжелых ядер изобарическая симметрия мало существенна. Но, как показало открытие четко выраженной

изобарической мультиплетной структуры, большие кулоновские силы довольно слабо нарушают изобарическую симметрию. Примеры изобарических аналоговых состояний в области тяжелых ядер приведены на фиг. 1.9.

Применимость квантового числа T в случае тяжелых ядер можно объяснить исходя из того, что кулоновское поле довольно слабо изменяется в пределах ядра. Поэтому под действием кулоновского поля волновые функции отдельных протонов изменяются лишь незначительно, а основной вклад кулоновского поля состоит в том, что к энергии ядра добавляется член, зависящий от числа протонов (т. е. от M_T) и не изменяющий квантового числа T . О чистоте квантового числа T для низколежащих уровней ядер можно судить по данным фиг. 2.6. В случае высоколежащих возбужденных состояний должна быть, по-видимому, смесь разных значений квантового числа T , так как состояния с разными значениями изоспина, но с одинаковыми спинами и четностями лежат вблизи друг от друга и могут связываться даже сравнительно слабым взаимодействием. О подобных эффектах говорится в связи с фиг. 1.9. Таким образом, вообще говоря, в реакциях, протекающих с образованием долгоживущего промежуточного состояния, возможно смешивание по изоспину, а в прямых реакциях благодаря малой длительности процесса столкновения чистота квантового числа изоспина оказывается гораздо большей.

Проблема нарушения симметрии — одна из важных проблем как в ядерной физике, так и в физике элементарных частиц. Примером устойчивой симметрии, сохраняющейся даже при наличии сильных возмущений, может служить приближенная изобарическая инвариантность в тяжелых ядрах.

Изобарическая инвариантность и перестановочная симметрия

Выше мы подходили к изобарической симметрии как к инвариантности относительно вращения в изопространстве. Но к этому вопросу можно подойти и иначе, рассматривая преобразования гамильтониана и его собственных состояний при перестановке изоспиновых переменных частиц. При таком подходе оказывается более прямой связь с теми физическими явлениями, которыми мотивируется симметричное описание нуклонов.

При методе изобарического спина гамильтониан автоматически оказывается инвариантным относительно перестановок всех координат (пространственных, спиновых и изоспиновых) двух частиц. Но зарядово-независимый гамильтониан можно записать в такой форме, в которой он не содержит бы изоспиновых переменных и, следовательно, был бы инвариантным относительно перестановок отдельных изобарических переменных, а поэтому также отдельно относительно перестановок пространственно-спиновых переменных. Таким образом, собственные состояния гамильтониана можно классифицировать соответственно

квантовыми числами симметрии, характеризующим преобразование волновой функции при перестановках в изопространстве и спин-орбитальном пространстве. Синий метод такой классификации состояний на основе перестановочной симметрии рассматривается в приложении 3.

Для системы двух частиц волновые функции либо симметричны в изопространстве ($T = 1$) и антисимметричны в спин-орбитальном пространстве, либо, наоборот, антисимметричны в изопространстве ($T = 0$) и симметричны в спин-орбитальном пространстве. При любом числе нуклонов полностью антисимметричные гипотония можно классифицировать на основе перестановочной симметрии, которая в изопространстве определяется квантовым числом разбиения $|I|$, а в спин-орбитальном пространстве квантовым числом $|\tilde{I}|$, относящимся к симметрии (см. приложение 3, п. 2).

Поскольку изоспиновая переменная нуклона может принимать только два значения, квантовые числа разбиения могут быть только вида $[f] = [f_1 f_2]$, причем задание квантовых чисел симметрии f_1 и f_2 эквивалентно заданию числа частин $A = f_1 + f_2$ и полного изоспина $T = 1/2(f_1 - f_2)$ (см. приложение 3, п. 2).

В случае системы частиц, из которых каждая может находиться в g различных состояниях, классификация на основе перестановочной симметрии эквивалентна классификации на основе трансформационных свойств относительно узорных унитарных преобразований U_g , действующих на одиночественные волнистые функции (см. приложение 3, п. 3). При $g = 2$ унитарные преобразования эквивалентны, как мы видели, вращениям \mathcal{H}_3 в трехмерном пространстве. Это соответствует тому, что матрицы Паули, порождающие U_2 -преобразования, удовлетворяют коммутационным соотношениям, характерным для составляющих вектора углового момента.

Наконец, возможность подхода к изобарической инвариантности как к симметрии вращения основана на том обстоятельстве, что мы имеем дело с эквивалентностью двух состояний нуклонов (протона и нейтрона). Можно рассматривать и более широкую симметрию. Например, если ядерные взаимодействия не зависят от спина, а также и от изоспинов нуклонов, то при заданной пространственной конфигурации можно говорить об эквивалентности четырех состояний нуклона ($\sigma_p = \pm 1, \tau_p = \pm 1$). В таком случае состояния можно классифицировать соответственно «супермультиплетам» с присоединенными им квантовыми числами, характеризующими представления группы U_4 [248, 453]. Хотя такая супермультиплетная симметрия и нарушается спин-орбитальными ядерными силами, ее можно пользоваться как определенным приближением при изучении некоторых легких ядер (см. гл. 7).

2. Расширение изобарической симметрии

Поскольку ядерные силы тесно связаны со свойствами всех сильно взаимодействующих частиц, изобарическая симметрия должна быть свойственна всем явлениям, связанным с сильными взаимодействиями. Экспериментальные данные подтверждают это: мезоны и возбужденные состояния нуклонов (барионный спектр) могут быть разбиты на изобарические мультиплеты (фиг. 1.11 и 1.12), а в процессах рассеяния и ядерных реакциях выполняются предполагаемые правила интенсивностей, соответствующие сохранению полного изобарического спина.

При изучении нуклонных взаимодействий в области энергий порядка гигаэлектронвольт был обнаружен целый ряд явлений, связанных с существованием метастабильных состояний, которые представляют собой возбуждения мезонов и нуклонов (т. е. состоя-

ний с барионными числами $A = 0$ и $A = 1$). Было установлено, что такие новые «частицы» и реакции, протекающие с их участием, подчиняются некоторым дополнительным принципам симметрии и законам сохранения, помимо тех, которые были уже рассмотрены для нуклонов. Ниже мы кратко остановимся на этих принципах расширенной симметрии, которые соответствуют общему подходу к вопросу об изобарической симметрии нуклонов. В спектрах адронов также были найдены группы состояний с теми же самыми квантовыми числами, характеризующими расширенную изобарическую симметрию, но с увеличивающимися значениями углового момента (примеры приведены на фиг. 1.13). Данных о динамической связи между состояниями, принадлежащими такой группе или траектории, пока еще очень мало.

Странность

Время жизни некоторых возбужденных состояний мезонов и барионов (фиг. 1.11 и 1.12) на много порядков больше постоянной времени, характерной для сильно взаимодействующих систем (т. е. времени, необходимого для того, чтобы частица прошла расстояние, сравнимое с радиусом действия сил). Существование таких приближенно дискретных состояний можно объяснить правилами отбора, связанными с еще одним квантовым числом, а именно с квантовым числом странности, которое, как установлено, тесно связано с изоспином [187, 340].

На мысль о таком дополнительном квантовом числе могло бы навести наличие непонятной постоянной $\frac{1}{2}$ в соотношении между зарядом Z (в единицах e) с z -составляющей изоспина нуклона

$$Z = -T_z + \frac{1}{2}. \quad (1.61)$$

Действительно, метастабильные возбужденные состояния нуклона характеризуются разными значениями этой постоянной.

Квантовое число странности S определяется соотношением

$$Z = -T_z + \frac{S+A}{2} = -T_z + \frac{Y}{2}, \quad (1.62)$$

где A — барионное число (равное $+1$ для барионов, -1 для антибарионов и 0 для мезонов). Вместо квантового числа S можно ввести гиперзаряд $Y = S + A$.

Резко выраженную стабильность некоторых мезонных и барионных состояний можно объяснить законом сохранения странности (или гиперзаряда). Было установлено также, что во всех реакциях и процессах рассеяния выполняется равенство $\Delta S = 0$, где S — сумма странностей всех частиц.

Поскольку заряд и барионное число, по-видимому, всегда сохраняются, сохранение странности S в силу соотношения (1.62) эквива-

авито возвращению T_z . Сохранение странности S (и T_z) свойственно не только силовым, но и электромагнитным взаимодействиям. Слабые же взаимодействия, ответственные за распад гиперонов и тяжелых мезонов, при котором S и T_z не сохраняются, по-видимому, связаны с теми взаимодействиями, которыми обусловлены фундаментальный принцип (см. гл. 3, приложение 4, п. 1).

Благодаря стабильности частиц со странностью $S \neq 0$ и тому обстоятельству, что силы их взаимодействия с нуклонами сравнимы с силами нуклон-нуклонного взаимодействия, оказывается возможным образование ядер с $S \neq 0$. Ряд таких «гиперъядер», содержащих связанные А-частицы, действительно удалось наблюдать. (Отметим, что А-частица характеризуется квантовыми числами $\lambda = 1$, $Z = 0$, $S = -1$, $T = 0$.) Несмотря на трудности экспериментального изучения таких систем, накоплено довольно много данных, особенно об энергии связи (и в некоторых случаях также о спинах) основных состояний гиперъядер (см. табл. 1.4). Они дают нам сведения о взаимодействии А-гиперона с нуклоном (см. данные табл. 1.4, свидетельствующие о зарядовой независимости этого взаимодействия и о его довольно сильной спиновой зависимости). Пока что данных о гиперъядрах у нас гораздо меньше, чем о ядрах с $S = 0$, но изучение свойств гиперъядер и реакций, протекающих с их участием, составит, по-видимому, очень важную часть физики ядра.

Системы со странностью $S = +1$, получающиеся при добавлении в ядро K^+ -мезона, по-видимому, не образуют связанных состояний вследствие того, что силы взаимодействия K^+ -мезонов с нуклонами представляют собой преимущественно силы взаимного отталкивания (обратите внимание также на отсутствие барионных резонансных состояний с $S = +1$; фиг. 1.11).

Унитарная симметрия

На мысль о существовании более высокой симметрии, охватывающей изоспин и странность, впервые навело то обстоятельство, что барионные и мезонные состояния можно сгруппировать в мультиплеты со сходными свойствами [189, 336]. Так, например, у всех полуустойчивых барионов (n , p , Λ , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^0 , Ξ^-) спин равен $1/2$. Точно так же самые легкие мезоны (π^+ , π^0 , π^- , K^+ , K^- , K^0 , \bar{K}^0 , ρ) образуют мультиплет псевдоскалярных (0—) частиц.

Подобную мультиплетную структуру можно объяснить с точки зрения инвариантности относительно трехмерных унитарных преобразований (SU_3 -инвариантность). Неприводимые представления этой группы симметрии обозначаются двумя квантовыми числами λ и μ , которые связаны с числами разбиения соотношениями $\lambda = f_1 - f_2$, $\mu = f_2 - f_3$ (см. приложение 3, п. 3). В физике элементарных частиц такие неприводимые представления обычно различают просто по размерности $h = 1/2(\lambda + 1)(\mu + 1)(\lambda + \mu + 2)$ [см. формулу (1.294)].

Состояния, принадлежащие данному мультиплету, можно характеризовать значениями изоспина и странности, т. е. тремя квантовыми числами T , M_T и S (см. приложение 3, п. 3). Например, нуклонный изобарический дублет (нейтрон и протон) входит в октет $[(\lambda\mu) = (11)]$, содержащий также гипероны Λ ($T = 0$, $S = -1$), Σ ($T = 1$, $S = -1$) и Ξ ($T = 1/2$, $S = -2$) (другие примеры SU_3 -мультиплетов см. на фиг. 1.11 и 1.12). Связь между состояниями, принадлежащими данному неприводимому представлению группы SU_3 , выражается через правила интенсивностей для процессов рождения и распада, через соотношения между импульсами и т. д. (см., например, то, что говорится о нуклонных электромагнитных моментах и формфакторах в приложении 3, п. 4 и о токе слабого взаимодействия в гл. 3, приложение 4).

В подобных SU_3 -мультиплетах, которые были бы вырожденными, если бы взаимодействия были SU_3 -инвариантными, обнаруживается расщепление по массе порядка нескольких сотен мегаэлектронвольт (см. фиг. 1.11 и 1.12). Причину такого расщепления следует видеть в наличии довольно большой составляющей сильных взаимодействий, которая нарушает SU_3 -симметрию, но сохраняет изоспиновую (или SU_2)-симметрию. Картина расщепления по массе довольно хорошо объясняется, если предположить, что часть взаимодействия, нарушающая симметрию масс, при операции SU_3 преобразуется как член октетного представления (см. то, что говорится по поводу фиг. 1.11).

Симметрия SU_3 также нарушается электромагнитным взаимодействием, которое, как хорошо известно, не обладает изоспиновой инвариантностью. Имеющиеся данные, по-видимому, согласуются с предположением об инвариантности электромагнитного взаимодействия относительно всех SU_3 -преобразований, при которых сохраняется электрический заряд [105]. К этой категории относятся преобразования, которые порождаются самим электрическим зарядом (и выражают закон сохранения заряда), и, кроме того, подгруппа SU_2 , генераторы которой называются спином U [292]. (Такая же инвариантность относительно всех SU_3 -преобразований, при которых сохраняется гиперзаряд, свойственна сильным взаимодействиям и эквивалентна сохранению гиперзаряда и спина T .) О различии электромагнитных масс барионов говорится в «Примерах к § 3» как о примере следствий, вытекающих из предположения о том, что потенциал электромагнитного взаимодействия является скаляром в U -пространстве.

Удивительная особенность классификации, основанной на SU_3 -симметрии,— отсутствие мультиплетов, преобразующихся по фундаментальному трехмерному представлению (тогда как в SU_2 -схеме имеется нуклонный дублет). Поэтому выдвигалась гипотеза, что сильно взаимодействующие частицы представляют собой связанные состояния неких трех прачастиц (кварков), которые образуют триплет [191, 476]. Триплет $[(\lambda\mu) = (10)]$ состоит из спинового дублета с $S = 0$ и изоспинового синглета с $S = -1$. В такой модели барионное число кварка должно быть принято равным $1/3$, откуда следует и дробное значение его заряда [см. формулу (1.62)]. При такой интерпретации SU_3 -симметрия оказывается следствием эквивалентности трех кварковых состояний в том же смысле, в каком изоспиновая симметрия в ядрах вытекает из эквивалентности нейтрона и протона. Таким образом, квантовые числа, которыми различаются неприводимые представления группы SU_3 , можно рассматривать также на основе перестановочной симметрии, относящейся к преобразованию состояний при перестановке кварковых переменных в спин-орбитальном или изобарическом пространстве. (См. приложение 3, п. 3; кварки относятся к фермionам, и поэтому состояния полностью антисимметричны относительно перестановок в обоих пространствах.) Так, например, барионный октет с $(\lambda\mu) = (11)$ и $(\lambda\mu) = (1/2 \pm)$ можно образовать из трех кварков со смешанной перестановочной симметрией $[f] = [21]$. Барионные состояния могут содержать дополнительные кварк-антикварковые пары, которые можно ввести, если в теории элементарных частиц предусмотреть для кварков дираковский фон. Таким образом, барионный октет характеризуется квантовым числом $[f] = [N+2, N+1, N]$, причем $3N$ — число кварков в заполнении дираковском фоне. Мезонный же октет образуется из барион-антибарионных пар и характеризуется квантовым числом $[f] =$

$|N_1 + 1, N_2, N - 1|$. Эти два квантовых числа разбиения связаны с одним и тем же спином-полярным представлением группы SU_3 $[(\lambda\mu) = (f_1 - f_2, f_2 - f_3) = (1)]$, не различаются полным числом кварков $n = f_1 + f_2 + f_3 - 3N$, или, что эквивалентно, барионным числом $A = n/3$.

Причины невозможности существования кварков пока что нет. Современные эксперименты не обеспечивают измеримого сечения образования кварков. Это может означать, что их масса велика.

Можно еще более расширить унитарную симметрию, комбинируя преобразование в изобарическом пространстве (SU_3) с преобразованиями в спиновом пространстве, и тогда мы получим SU_6 -симметрию. При введении кварков предполагается инвариантность взаимодействий относительно шести состояний барионов (два спиновых состояния для каждого кварка). Таким образом, расширение SU_3 -симметрии до SU_6 -симметрии аналогично расширению ядерной спин-инвариантной симметрии SU_2 до спин-изоспиновой (или орбитальной) симметрии SU_4 (см. стр. 45).

Симметрия SU_6 позволяет объединить низшие наблюдающиеся SU_3 -мультиплеты в SU_6 -супермультиплеты и интерпретировать различные экспериментальные соотношения интенсивностей. Интересно также, что в схеме SU_6 -симметрии находит простое объяснение экспериментальное отношение магнитных моментов нейтрона и протона (см. гл. 3, приложение 3, п. 4). Но применимость SU_6 -симметрии ограничивается существованием спин-орбитального взаимодействия, которое в некоторых случаях полностью нарушает эту симметрию. Область применимости SU_6 -симметрии в настоящее время интенсивно исследуется¹⁾.

Добавим, что многие положения, являющиеся следствиями из высших симметрий (SU_3 и SU_6), можно получить на основе модели «независимых кварков», не делая предположений о высших симметриях. Принимают, что барион состоит из трех кварков, а мезон представляет собой связанные состояния системы кварк — антикварк. При этом амплитуды рассеяния и реакций, протекающих с разными частицами, получаются в виде простой суперпозиции амплитуд рассеяния кварков и антикварков (см., например, работу [297]).

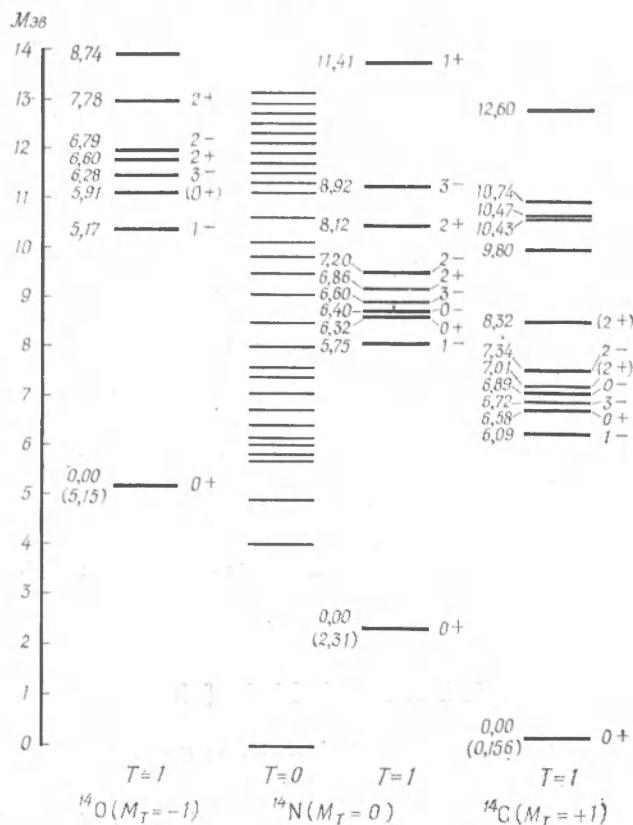
ПРИМЕРЫ К § 3

Изобарические триплеты и синглеты в ядрах с $A = 14$ (фиг. 1.7 и 1.8)

На фиг. 1.7 представлены известные уровни ядер с $A = 14$. Наиболее сильно связанные состояния — это основное состояние ядра ^{14}N с $I\pi = 1+$. Данный уровень не имеет аналога в спектрах ядер ^{14}C и ^{14}O и поэтому представляет собой изобарический синглет ($T = 0$). Основное состояние ядра ^{14}C , уровень с энергией $2,312 \text{ MeV}$ в ядре ^{14}N и основное состояние ядра ^{14}O , для которых $I\pi = 0+$, образуют изобарический триплет с $M_T = +1, 0$ и -1 . С учетом разности масс нейтрона и протона, которая составляет $0,78 \text{ MeV}$, разности энергий связи между членами этого триплета оказываются равными $\mathcal{E}(^{14}\text{O}) - \mathcal{E}(^{14}\text{N}^*) = 3,62 \text{ MeV}$ и $\mathcal{E}(^{14}\text{N}^*) - \mathcal{E}(^{14}\text{C}) = 2,94 \text{ MeV}$. Разность кулоновской

¹⁾ Обзор по вопросу о развитии классификации сильно взаимодействующих частиц на основе SU_3 -симметрии дан в работе Гелл-Мана и Ниммана [193]. Вопросу о классификации на основе унитарной симметрии посвящена книга Линкина [296], в которой он не выходит за рамки элементарной математики. Обзор по вопросу о развитии SU_6 -классификации дается в книге Дайсона [137].

энергии легко приближенно рассчитать по формуле (2.19), которая дает для разностей энергий связи ($^{14}\text{O} - ^{14}\text{N}^*$) и ($^{14}\text{N}^* - ^{14}\text{C}$) значения 3,8 и 3,2 $M_{\text{эв}}$. (Вопрос о согласии оценок размера ядер, основанных на кулоновских энергиях с оценками, основанными на данных по рассеянию электронов, в случае ядер с $4 < A < 16$ рассматривается в работе [458].)



Фиг. 4.7. Схемы уровней ядер с $A = 14$, основанные на данных обзора [2], результатах работы [4] и частном сообщении Болла (G. Ball) и Церни (J. Cerny).

Относительные значения энергии характеризуют массу атомов.

У ядер ^{14}O и ^{14}C нет низколежащих возбужденных состояний. Поэтому всем низшим уровням в ядре ^{14}N , кроме состояния с энергией 2,3 $M_{\text{эв}}$, следует присвоить $T = 0$. Выше 5 $M_{\text{эв}}$ в ядре ^{14}O и выше 6 $M_{\text{эв}}$ в ядре ^{14}C был найден ряд возбужденных уровней, соответствующих таким же ($T = 1, M_T = 0$) уровням в спектре ^{14}N . На фиг. 4.7 показаны энергии возбуждения для состояний с $T = 1$ относительно низшего уровня с $T = 1$ (уровень 0^+) того же ядра. Легко видеть, что у соответствующих уровням (с одинаковыми спином и четностью) приблизительно одинаковая энергия возбуждения. Налицо, однако, значитель-

ней ядерной, параллельной нескольких сотен килозэлектронвольт, которые обусловлены различием изобарической энергии, связанной с различием внутренней структуры ядра.

Самые малыешие сдвиги уровней связанны, по-видимому, в том, что средняя энергия кулоновского взаимодействия не совсем одинакова для ядер с разными квантовыми числами и что кулоновская энергия несколько уменьшается в случае ядер с одинаковыми орбитами и не связанными резонансами состояниями (сдвиг Томаса — Эрмана [140, 430]). Таким образом, уровни с наибольшим сдвигом могут иметь $I_T = 0$ — или 1 — и обнаруживать большое сходство с состоянием ($\ell_F = \ell_S = 1/2$) + протон в s -состоянии. Это подтверждается большой экспериментально наблюдаемой приведенной шириной таких уровней для испускания протонов. Аналогичный эффект наблюдается там, где говорится о слабо связанных однчастичных состояниях ядер с $A = 17$ (фиг. 3.26).

Применение уровням определенных значений квантовых чисел имеет важное значение для различных ядерных процессов. Так, например, интенсивность перехода $E1$ зависит от величины матричного элемента оператора электрического дипольного момента:

$$D = \sum_k e_h z_k = e \sum_k \frac{1}{2} [1 - \tau_z(k)] z_k = \frac{1}{2} e \sum_k z_k - \frac{1}{2} e \sum_k \tau_z(k) z_k. \quad (1.63)$$

Первый член зависит только от положения центра масс всего ядра и поэтому не может вызывать переходов между разными ядерными состояниями. Этот член дает нам томпсоновское рассеяние протонов на ядре. Второй член есть представление вектора в изопространстве; с ним связаны правила отбора

$$|T_i - T_f| \leq 1 \leq T_i + T_f \quad (1.64)$$

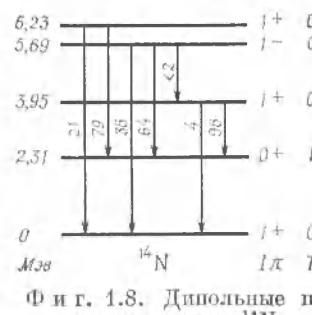
3.18 Изоспиновых квантовых чисел рассматриваемых уровней.

В изоспироженных ядрах ($N = Z$, $M_T = 0$) все переходы между состояниями с $T_f = T_i$ запрещены, так как матричный элемент перехода пропорционально величине $\langle T_i M_{T=0} | T_f M_T \rangle$ [см. формулу (1.226)], которая равна нулю при $T_i = T_f$ и $M_T = 0$. Правила отбора по изоспину для переходов $E1$ были сформулированы в работах [183, 428].

Правила отбора, запрещающие переходы $E1$ между двумя состояниями изоспинами $T = 0$, могут быть проверены по распаду уровня с энергией $5,69 \text{ MeV}$ и $T = 0$ в ядре ^{14}N (фиг. 1.8). Установлено, что переходы на основное состояние и на уровень с энергией $3,95 \text{ MeV}$ и $T = 0$ на порядок слабее разрешенного перехода на уровень с энергией $2,31 \text{ MeV}$ и $T = 1$. [Заметим, что при этом и том же матричном элементе вероятность перехода $E1$ пропорциональна третьей степени энергии перехода, см. формулу (3.147).]

Оператор перехода $M1$ — также преимущественно изовектор, поскольку магнитный момент (в единицах ядерного магнетона) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_k [g_s(k) s_k + g_l(k) l_k] = \sum_k \left\{ \frac{1}{2} [1 - \tau_z(k)] (g_p s_k + l_k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [1 + \tau_z(k)] g_n s_k \right\} = \frac{1}{2} I + 0,38 \sum_k s_k - \sum_k \tau_z(k) \left(4,71 s_k + \frac{1}{2} l_k \right). \quad (1.65) \end{aligned}$$



Фиг. 1.8. Дипольные переходы в ядре ^{14}N .

Числа у стрелок означают относительную интенсивность переходов по данным работы [204].

Здесь в последнюю строку равенства подставлены численные значения гиромагнитных отношений для протона и нейтрона, а именно $g_p = 5,59$ и $g_n = -3,83$.

Первый член в правой части равенства (1.65) пропорционален полному угловому моменту I и не дает вклада в переходы между различными состояниями. Второй член представляет собой скаляр из изопространства, но коэффициент перед ним на порядок меньше коэффициента перед последним членом (изовекторной частью). Таким образом, правила отбора по изоспину, о которых говорилось выше в связи с переходами $E1$, должны приближенно выполняться и в случае переходов $M1$ [330]. Это подтверждается примерами, показанными на фиг. 1.8, где видно, что переходы $M1$ типа $T = 0 \rightarrow T = 1$ значительно интенсивнее переходов типа $T = 0 \rightarrow T = 0$.

В ядерных реакциях закон сохранения изоспина может привести к важным правилам отбора. Так, например, в реакции



для ядра-мишени ^{16}O , а также ядер ^2H и ^4He мы имеем $T = 0$, а поэтому в ядре ^{14}N должны возбуждаться только уровни с $T = 0$. И действительно, было установлено, что состояние с $T = 1$ ($2,31 \text{ MeV}$) возбуждается очень слабо по сравнению с другими низколежащими состояниями ядра ^{14}N . Например, при энергии налетающего дейtron $E_d = 24 \text{ MeV}$ вероятность возбуждения состояния с энергией $2,31 \text{ MeV}$ составляет $(0,7 \pm 0,6)\%$ вероятности возбуждения основного состояния [89]¹⁾.

Окончательного вывода о справедливости закона сохранения изоспина на основании очень малой вероятности возбуждения уровня с энергией $2,31 \text{ MeV}$ нельзя сделать, поскольку к уменьшению этой вероятности могут приводить также некоторые особенности механизма реакции. Действительно, в интенсивных (d, α) реакциях, по-видимому, имеет место процесс двухчастичного подхвата, при котором налетающий дейtron захватывается из ядра пейтрон-протонную пару, находящуюся в относительном s -состоянии со спином $S = 1$. При таком процессе в ядре ^{14}N не может возбуждаться состояние $0+$.

Подобным же образом из закона сохранения изобарического спина следует, что при реакции



в ядре ^{14}N состояние с энергией $2,31 \text{ MeV}$ ($T = 1$) может возбуждаться только в том случае, когда одновременно в ядре ^{12}C возбуждается состояние с $T = 1$ (в спектре ядра ^{12}C таких состояний нет ниже $15,1 \text{ MeV}$). Действительно, при такой реакции наблюдаются все низколежащие уровни ядер ^{12}C и ^{14}N , кроме уровня $2,31 \text{ MeV}$ ядра $^{14}\text{N}^*$. Эксперименты с налетающим пучком ядер ^{14}N (при энергии 27 MeV) дали для отношения вероятностей возбуждения уровня с энергией $2,31 \text{ MeV}$ к вероятности возбуждения уровня с энергией $3,95 \text{ MeV}$ ($T = 0$) в ядре $^{14}\text{N}^*$ величину $\sim 1/15$ [213].

Правила отбора для переходов и реакций, в которых участвуют состояния ядра ^{14}N , можно также рассматривать с точки зрения квантового числа зарядовой симметрии. Состояния этого ядра, у которого $N = Z$, можно классифицировать соответственно собственным значениям $r_\tau = \pm 1$ оператора зарядовой симметрии \mathcal{R}_τ [формула (1.59)]. Поскольку оператор электрического дипольного перехода нечетен относительно операции \mathcal{R}_τ , а оператор магнитного перехода приближенно нечетен, переходы $E1$ и $M1$ между состояниями с одинаковыми значениями r_τ запрещены. Кроме того, при ядерных реакциях выполняется закон сохранения величины r_τ . Таким образом, наблюдающиеся эксперимен-

¹⁾ В настоящее время реакция (d, α) на ядрах ^{12}C и ^{16}O исследована более подробно [503, 504]. Вопрос о возможных кулоновских механизмах смешивания по изоспину рассматривается в работе [505]. — Прим. ред.

элементарного правила отбора можно объяснить, если состояниям с $T = 0$ присвоить значение $r_1 = +1$, а состояниям с $T = 1$ — значение $r_1 = -1$.

Симметрию между состояниями ядер ^{14}C и ^{14}O можно также отнести на счет зарядовой симметрии, но их связь с аналоговыми состояниями ядра ^{14}N должна определяться только полной зарядовой независимостью. Зарядовую независимость, в ее гармоническую симметрию можно проверить, например, в реакциях $^{14}\text{C}(p, p)^{14}\text{N}$ и $^{14}\text{O}(^3\text{He}, n)^{14}\text{O}$. Для этих реакций были экспериментально определены вероятности образования первого возбужденного состояния ядра ^{14}O и его аналогового состояния — основного состояния ядра ^{14}O при энергиях поглощающей частицы от 6,5 до 11 $M_{\text{эв}}$ [180]. Сечения этих реакций при фиксированном угле сильно зависят от энергии, но было установлено, что во всей области изменения энергии отношение сечений этих двух реакций равно примерно 1 : 2, как это и следует из закона сохранения изоспина. Действительно, для системы $^{12}\text{C} + ^3\text{He}$ мы имеем $T = 1/2$ и $M_T = -1/2$, и поэтому отношение сечений этих двух реакций равно

$$\left\langle 1 \ 0 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle^2 \right\rangle : \left\langle 1 - 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle^2 \right\rangle = 1 : 2.$$

Проверка соотношений, вытекающих из зарядовой независимости, проводилась также при изучении реакций $^{16}\text{O}(p, t)$ и $^{16}\text{O}(p, ^3\text{He})$, конечным состоянием первой из которых является основное состояние ядра ^{14}O , а второй — аналоговое состояние в энергией 2,31 $M_{\text{эв}}$ в ядре ^{14}N [188]. Сечения этих реакций при энергии протонов 44 $M_{\text{эв}}$ обнаруживают примерно одинаковое угловое распределение, в измеренное отношение выхода реакций с точностью до нескольких процентов равно 2,1. Из зарядовой же независимости следует, что это отношение должно быть равно двум.

Аналоговые состояния в резонансных реакциях, вызванных протонами (фиг. 1.9 и табл. 1.2)

В областях средних и тяжелых ядер благодаря сильному кулоновскому взаимодействию в наиболее стабильных ядрах с данным массовым числом A имеется большой избыток пейтронов, т. е. $M_T = 1/2(N - Z) \gg 1$. Квантовое число T должно быть равным M_T или превышать эту величину. Было установлено, что все низколежащие энергетические уровни характеризуются минимальным изоспином $T = T_0 = M_T$. В данной особенности спектров отражаются важные закономерности образования ядер, благоприятствующие появлению низких значений полного изоспина T (см. гл. 2, § 1).

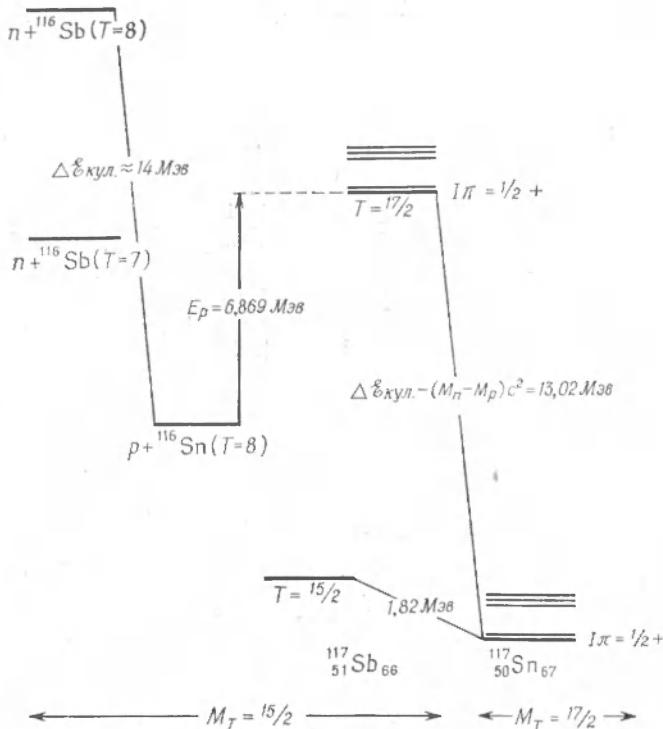
Низшие состояния с $T = T_0 + 1$ появляются при энергиях возбуждения, значительно превышающих порог испускания протона. Как оказалось, они приводят к появлению вполне четких острых резонансов в рассеянии протона [170]. В результате исследования таких резонансов было получено много данных, доказывающих наличие изоспиновой симметрии в тяжелых ядрах.

На фиг. 1.9 представлен спектр ядра ^{117}Sb ($M_T = 15/2$). Состояния с изоспином $T = 17/2$ наблюдались как резонансы в реакциях $^{116}\text{Sn}(p, p)$ и $^{116}\text{Sn}(p, n)$. Если интерпретировать такие резонансы, как уровни с $T = 17/2$, то эти уровни должны быть изобарическими аналогами низколежащих уровней в ядре ^{117}Sb ($M_T = 17/2$). Данные фиг. 1.9, а также табл. 1.2 действительно говорят об удивительном соответствии величин расщепления, спинов и четностей уровней $p, T = 17/2$ в этих двух ядрах. Разница в энергии связи между состояниями с $M_T = 16/2$ и $M_T = 17/2$, принадлежащими мультиплету с $T = 17/2$, составляет 15,8 $M_{\text{эв}}$. Она сравнима с разностью кулоновской энергии [формула (2.19)]

$$\Delta E_{\text{кул}} = E_{\text{кул}}(Z=51, A=117) - E_{\text{кул}}(Z=50, A=117) = 13,8 M_{\text{эв}}.$$

Для разных состояний с $T = 17/2$ кулоновская энергия должна немного изменяться в зависимости от внутренней структуры уровней. Наблюдающиеся

изменения весьма малы ($\lesssim 20$ кэВ). Это можно объяснить тем, что разность кулоновской энергии характеризует среднюю кулоновскую энергию для протонных состояний, возникающих при замене протоном одного из 17 избыточных нейтронов в ядре ^{117}Sn . Поскольку уровни в ядре ^{117}Sn различаются в основном орбитами одного из нескольких нейтронов, энергетический сдвиг должен слабо изменяться при переходе от уровня к уровню.



Фиг. 1.9. Уровни ядра ^{117}Sb с $T = 17/2$ наблюдались как резонансы в реакции упругого рассеяния протонов на ядре ^{116}Sn [364].

Дополнительные данные об энергиях уровней и энергиях связи взяты из работы [283].

Энергия возбуждения низшего уровня с $T = 17/2$ в ядре ^{117}Sb равна 11.2 MeV (фиг. 1.9), тогда как формула (2.18) при $b_{\text{сим}} \approx 50 \text{ MeV}$ [см. формулу (2.15)] дает

$$\mathcal{E} \left(A = 117, T = \frac{17}{2}, M_T = \frac{15}{2} \right) - \mathcal{E} \left(A = 117, T = \frac{15}{2}, M_T = \frac{15}{2} \right) \approx 13.5 \text{ MeV}.$$

Последнюю разность энергии нужно несколько уменьшить, учитывая оболочные структурные эффекты, приводящие к повышению стабильности конфигурации, состоящей из $Z = 50$ протонов для изотопов Sn, а также для состояний их изобарических аналогов в изотопах Sb.

Резонансный характер упругого рассеяния протона можно учесть, если взять амплитуду рассеяния в виде плавно изменяющейся части (амплитуды прямого процесса) и резонансной амплитуды брейт-вигнеровского типа [см. формулы (3.280) и (3.282)]. Поскольку энергия протона на несколько мегаэлектронных единиц выше кулоновского барьера, амплитуда прямого процесса приближенно равна амплитуде кулоновского рассеяния. Ширинны Γ_p упругого рассеяния протона и полные ширинны Γ , полученные путем анализа резонансов, приведены в табл. 1.2. Угловое распределение резонансного рассеяния сильно зависит от привитального момента l_p резонансного протона, но почти не зависит от j_p . Ширинны выбивания протона в какой-то мере зависят от j_p . Указанные значения полных ширин Γ_p получены в предположении, что величина j_p равна наблюдаемому спину аналогового состояния в ядре ^{117}Sn .

Наблюдающиеся значения ширин Γ_p можно сравнить с одночастичными ширинами (Γ_p) одн., которых следовало бы ожидать, если бы резонансы описывались в одночастичном приближении. Тогда состояния в ядре ^{117}Sn соответствовали бы движению одного нейтрона в поле ядра ^{116}Sn , находящегося в своем основном состоянии, а аналоговое состояние в ядре ^{117}Sb представлялось бы функцией [см., например, формулу (3.19в)]

$$|T = T_0 + \frac{1}{2}, M_T = T_0 - \frac{1}{2}\rangle = \\ = \sqrt{\frac{1}{2T_0 + 1}} |p; T_0, M_T = T_0\rangle + \sqrt{\frac{2T_0}{2T_0 + 1}} |n; T_0, M_T = T_0 - 1\rangle. \quad (1.66)$$

Данное состояние представляет собой линейную комбинацию состояний протон + мишень (^{116}Sn) и нейtron + мишень-аналог (низшее состояние в ядре ^{117}Sb в $T = 8$).

Таблица 1.2

СОСТОЯНИЯ С $T = 17/2$ В ЯДРАХ ^{117}Sb И ^{117}Sn

$\frac{E_p}{M_{\text{пр}}},$ $(\frac{J_p}{M_{\text{пр}}})$,	$E - E_0,$ $M_{\text{пр}}$	$^{116}\text{Sn} (p, p) ^{116}\text{Sn}$					$^{116}\text{Sn} (d, p) ^{117}\text{Sn}$			
		l_p	$I\pi$	$\Gamma_p, \text{ кэВ}$	$\Gamma, \text{ кэВ}$	$\frac{\Gamma_p}{(\Gamma_p)_{\text{одн}}}$	$E, M_{\text{пр}}$	l_n	$I\pi$	$\sigma/\sigma_{\text{одн}}$
0,869	0,000	0	$1/2+$	16,5	42	0,38	0,0	0	$1/2+$	0,65
7,022	0,453	2	$(3/2 \ 5/2+)$	8,3	37	0,52	0,16	2	$3/2+$	0,55
7,873	1,004	2	$(3/2 \ 5/2+)$	1,8	42	0,051	1,03	2	$5/2+$	0,061
8,038	1,169	2	$(3/2 \ 5/2+)$	1,4	35	0,035	1,19	2	$5/2+$	0,033

В таблице сравниваются характеристики изобарических аналогов, которые наблюдались при рассеянии протона на ядре ^{116}Sn [364] и при реакции (d, p) на той же мишени [388]. В первом столбце приведена энергия протона в системе центра масс. Во втором столбце приведена энергия возбуждения резонансного состояния относительно энергии E_0 основного состояния с $T = 17/2$ в ядре ^{117}Sb . В восьмом столбце дается энергия возбуждения соответствующих состояний в ядре ^{117}Sn . Одночастичные протонные ширинны (Γ_p одн.), использованные в седьмом столбце, были вычислены Бондорфом и Люткеном (J. P. Bondorff, H. Lütkem, 1967). Результаты вычислений по методу связанных каналов довольно близки к тем результатам, которые получаются, если рассматривать рассеяние протона в ядерном потенциале и умножать ширину [формула (3.336)] на величину $(2T_0 + 1)^{-1}$, равную доле протонного канала в состоянии (1.66).

Кулоновское поле связывает состояние (1.66) с состоянием, в котором та же самая одночастичная конфигурация, но $T = T_0 - 1/2$, т. е.

$$\begin{aligned} |T = T_0 - 1/2, M_T = T_0 - 1/2\rangle = \\ = \sqrt{\frac{2T_0}{2T_0 + 1}} |p; T_0, M_T = T_0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2T_0 + 1}} |n; T_0, M_T = T_0 - 1\rangle. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Удивительным следствием кулоновского взаимодействия является то, что протонный канал оказывается открытым, тогда как нейтронный канал закрыт: [Энергия протона ниже порога реакции (p, n), приводящей к возбуждению аналогового состояния мишени, как явствует из фиг. 1.9.] Такая асимметрия протонного и нейтронного каналов означает, что состояния (1.66) и (1.67) взаимосвязаны в основном тогда, когда нуклон находится вне ядра [366]. Значения одночастичной протонной ширины, приведенные в табл. 1.2, были получены в результате расчетов, при которых учитывалась связь между двумя каналами (1.66) и (1.67), а потенциал был взят в виде

$$V = V_0(r) + \frac{V_1(r)}{A} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_0) + V_{\text{кул}}(r) \left(\frac{1}{2} - t_z \right) + \Delta E_{\text{кул}} \left(\frac{1}{2} + t_z \right). \quad (1.68)$$

В этом выражении первые два члена — изоскалярный и изовекторный ядерные потенциалы [формула (2.29)], а $V_{\text{кул}}(r)$ — кулоновский потенциал.

Отношение экспериментальной ширины Γ_p к одночастичной ширине дает нам величину одночастичного генеалогического коэффициента (см. гл. 3, § 5, п. 2 и приложение 6). Это отношение можно сравнить с соответствующим отношением для реакций, протекающих с передачей нейтрона [$^{116}\text{Sn}(d, p) ^{117}\text{Sn}$], при которых возбуждаются уровни с $M_T = 17/2$ мультиплетов с $T = 17/2$ (см. гл. 3, § 5, п. 1 и приложение 6).

Хорошее согласие (см. табл. 1.2) между отношениями ширин Γ_p к ширинам (Γ_p)_{одн} для реакций с протонами и отношениями σ_{dp} к (σ_{dp})_{одн} для реакций срывы также подтверждает возможность интерпретации этих состояний как членов T -мультиплетов. Единственное исключение — состояние $1/2+$. Расхождение в случае состояния $1/2+$ весьма неожиданно в свете дополнительных данных, подтверждающих интерпретацию этих состояний как аналоговых. Впрочем, данное расхождение вряд ли выходит за рамки неопределенностей расчета сечений реакций.

Полная ширина резонансов, наблюдающихся при рассеянии (p, p) и реакциях (p, n), значительно превышает ширину упругого рассеяния протона (табл. 1.2). Дополнительные небольшие вклады в ширину связаны с неупругим рассеянием протона, но основная часть ширины обусловлена наличием связи между резонансами $T_0 + 1/2$ и соседними уровнями $T_0 - 1/2$.

Расстояние между уровнями с заданными спином I , четностью π и изоспином $T = T_0 - 1/2$ можно вычислить по формуле (2.57). Взяв для параметра $a = (\pi^2/6)g_0$ (где g_0 — плотность одночастичных уровней) значение $17 M_{\text{эв}}^{-1}$, которое получено в результате анализа ядерных реакций (фиг. 2.12), найдем полную плотность уровней с $I\pi = 1/2+$

$$p \left(A = 117, E = 11,2 M_{\text{эв}}, I = \frac{1}{2}, \pi \right) \approx 4 \text{ эв}^{-1}.$$

Плотный спектр уровней с $T = T_0 - 1/2$, по-видимому, очень сложен. Связь, нарушающую изоспин T , можно представить как распад уровней с $T = T_0 + 1/2$, в результате которого образуется составное ядро с $T = T_0 - 1/2$. Из-за наличия кулоновского барьера распад составного ядра протекает преимущественно с испусканием нейтрона, а тем самым объясняются наблюдающиеся резонансные реакции (p, n).

Некоторый вклад в образование составного ядра должна давать связь через изоспином $T = 15/2$ [формула (1.67)]. Можно попытаться учесть дальнейшую связь этого состояния с составным ядром посредством мнимой составной потенциала для канала с $T = 15/2$ [15, 59, 423]. В члене $\Delta\mathcal{E}_{\text{кул}}$ также должна быть мимая часть, связанная с шириной распада аналогового состояния.

Поскольку резонансное состояние распадается преимущественно с образованием составного ядра ($\Gamma_{\text{сост}} > \Gamma_p$), состояние с изоспином $T = 17/2$ оказывается сильно связанным в резонансной области с уровнями, изоспин которых $J = 15/2$, и мы можем описывать процесс обычной силовой функцией (см. гл. 2, § 4 и гл. 3, приложение 6, п. 1). Таким образом, истинными собственными состояниями процесса рассеяния являются состояния с $T = 15/2$, содержащие небольшую примесь состояния с $T = 17/2$. В этом смысле представление об определенных явантовом числе изоспина полностью нарушается.

Ширинам Γ силовых функций с $T = 17/2$, хотя и очень велики по сравнению с расстояниями между уровнями с $T = 15/2$, оказываются малыми по сравнению с расстояниями между уровнями с $T = 17/2$ и с теми же квантовыми числами $J\pi$. Поэтому, несмотря на сильное перемешивание изоспинов для индивидуальных состояний в процессе рассеяния, мы можем по-прежнему описывать свойства отдельных аналоговых уровней интегралами от узких силовых функций. При такой интерпретации для всего сказанного нами выше об энергии, спинах, четности и парциальных ширинах для аналоговых состояний перемешивание изоспинов не очень существенно.

Проверка изобарической симметрии в β -переходах типа $0^- \rightarrow 0^+$ (фиг. 1.10 и табл. 1.3)

Переходы, разрешенные по изоспину. Разрешенные β -переходы фермневского типа позволяют непосредственно проверить изобарическую симметрию, так как оператор перехода с точностью до нормировочного множителя равен составляющей полного изоспина

$$T_{\pm} = T_x \pm iT_y = \sum_k t_x(k) \pm it_y(k). \quad (1.69)$$

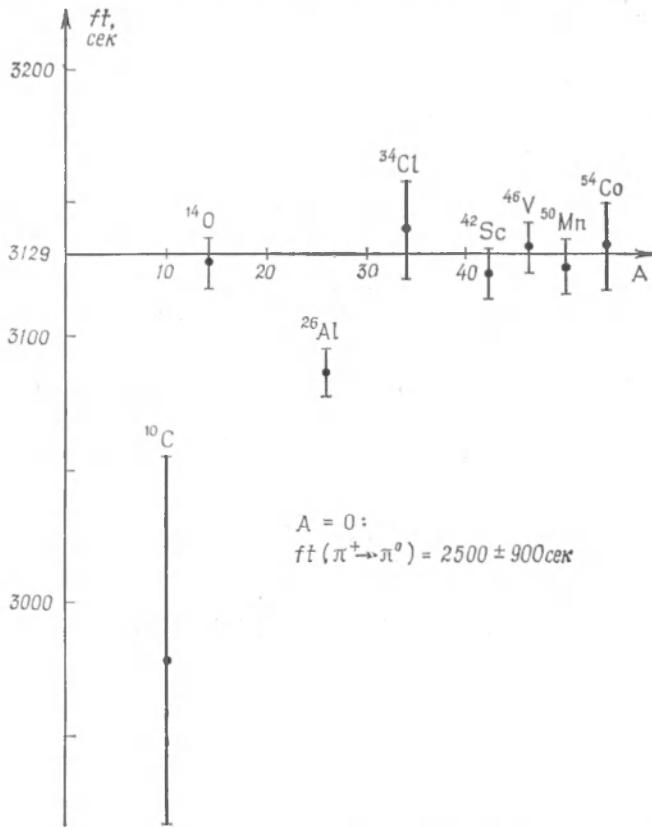
{Такая структура оператора перехода вытекает из предположения о существовании некоторого общего соотношения между вектором β -тока и электромагнитным током (теория «сохраняющегося векторного тока»), а поэтому здесь учитываются и вклады виртуальных мезонов в ядре [см. формулы (3.190) и (3.129)].}

Матричные элементы оператора (1.69) отличны от нуля только для переходов между членами одного и того же изобарического мультиплета, для которых имеет место равенство

$$\langle T, M_T \pm 1 | T_{\pm} | TM_T \rangle = [(T \mp M_T)(T \pm M_T + 1)]^{1/2} \quad (1.70)$$

независимо от других свойств рассматриваемых состояний ядер. Этот результат можно непосредственно проверить на переходах между начальными и конечными состояниями с $J\pi = 0^-$, поскольку это переходы чисто фермневского типа (матричные элементы типа Гамова — Теллера для таких переходов равны нулю). Примером подобного перехода может служить β -распад ядра ^{14}O , при котором начальным состоянием является состояние ядра ^{14}N с энергией 2,31 $M\text{эв}$ (фиг. 1.7). На фиг. 1.10 представлены имеющиеся данные о переходах такого вида. Все эти примеры относятся к состояниям с $T = 1$, а постоянство наблюдаемых значений ft , таким образом, доказывает чистоту изобарического спина соответствующих состояний. Легко видеть, что наиболее точно определенные значения ft постоянны в пределах ошибки измерений (менее 0,5%). Единственное исключение — распад ^{26}Al , для которого отклонение от постоянного значения ft составляет 1,5%.

На фиг. 2.6 представлена теоретическая кривая, характеризующая нарушение чистоты изоспина, обусловленное кулоновским полем. Кривая дает величину $P(T=2)$ — примесь состояний с $T=2$ к состояниям с $T=1$, которая быстро увеличивается с ростом Z и для наиболее тяжелых ядер, представленных на фиг. 1.10, достигает нескольких десятых процента. [Величина



Фиг. 1.10. Экспериментальные значения величин ft взяты из работы [174] и из цитированных в ней статей.

В значения величин ft включены радиационные поправки, поправки на конечные размеры ядра, а также поправки, учитывающие экранировку кулоновского поля ядра электронами атома. Значение величины ft для распада $\pi^+ \rightarrow \pi^0$ взято из работы [483]. Более поздние измерения [125] показали, что $ft(\pi^+ \rightarrow \pi^0) = (3190 \pm 320) \text{ сек.}$

$P(T=2)$ для ядра с $T_0 = 1$ получается умножением величины $P(T=1)$ для ядра с $N = Z$ (которая дается кривой фиг. 2.6) на величину $\langle T_0 M_T | T M_T \rangle^2$. Однако (см. то, что говорится в гл. 2 по поводу фиг. 2.6) такое нарушение чистоты изоспина лишь незначительно влияет на матричный элемент β -перехода, так как это эффект, обусловленный всеми протонами ядра и, следовательно, приблизительно одинаковый для родительского и дочернего ядер. На величину матричного элемента перехода оказывает влияние только связь между эффектом

рудиновского искажения и несколькими нуклонами с единичным изоспином. Сравнение (2.109) показывает, что из-за наличия такой связи величина $f\ell$ уменьшается; при $A < 50$ она на порядок меньше нарушения чистоты изоспинов, соответствующего фиг. 2.6.

Переходы, запрещенные по изоспину. В β -переходах, для которых $\Delta T \neq 0$, наблюдается также запрет по изоспину. В табл. 1.3 приведены известные переходы типа $0+ \rightarrow 0+$ между состояниями с разным изобарическим спином ($\Delta T = 1$). Сравнивая значения величины $f\ell$ с ее значениями, приведенными на фиг. 1.10, мы видим, что переходы, для которых $\Delta T = 1$, задержаны в 10^4 и более раз по сравнению с переходами, для которых $\Delta T = 0$.

Таблица 1.3

ЗАПРЕЩЕННЫЕ ФЕРМИЕВСКИЕ β -ПЕРЕХОДЫ ТИПА $0+ \rightarrow 0+$

	T_i	T_f	$f\ell, \text{ сек}$	c^2
$^{66}\text{Ge} \rightarrow ^{66}\text{Ga}$	1	2	$6 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^{-4}$
$^{66}\text{Ga} \rightarrow ^{66}\text{Zn}$	2	3	$8 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^{-5}$
$^{156}\text{Eu} \rightarrow ^{156}\text{Gd}$	15	14	$5,8 \cdot 10^9$	$3,6 \cdot 10^{-8}$
$^{156}\text{Eu} \rightarrow ^{156}\text{Gd} (1,05)$	15	14	$1,5 \cdot 10^{10}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$
$^{170}\text{Lu} \rightarrow ^{170}\text{Yb}$	14	15	$5,7 \cdot 10^9$	$3,7 \cdot 10^{-8}$
$^{234}\text{Np} \rightarrow ^{234}\text{U}$	24	25	$1,8 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^{-7}$
$^{234}\text{Np} \rightarrow ^{234}\text{U} (0,81)$	24	25	$1,5 \cdot 10^9$	$8 \cdot 10^{-8}$
$^{234}\text{Np} \rightarrow ^{234}\text{U} (1,04)$	24	25	$1,4 \cdot 10^9$	$9 \cdot 10^{-8}$

Для β -распадов с переходом на возбужденные состояния дочерних ядер в скобках дана энергия возбуждения в мегаэлектронвольтах. Распад ^{64}Ga в ^{64}Zn ($\lg f\ell = 6,8$) также может принадлежать к группе фермиевских переходов с $\Delta T = 1$, но спин $0+$ для ядра ^{64}Zn недостаточно хорошо установлен. Экспериментальные данные, приведенные в этой таблице, взяты из следующих работ: ^{66}Ge — [363], ^{66}Ga — [85], ^{156}Eu , ^{170}Lu и ^{234}Np — [220], а также из литературы, цитируемой в указанных работах.

В интенсивность переходов для распада с $\Delta T = 1$ вносят небольшой вклад члены, возникающие за счет поправок более высокого порядка к фермиевскому матричному элементу [например, из-за мультипольного момента $\mathcal{M}(j_V, \chi = 1, \lambda = 0)$ и радиальной зависимости самого фермиевского оператора, см. гл. 3, приложение 4]. Но приближенный расчет таких эффектов показывает, что в рассмотренных случаях они несущественны. Поэтому считается, что переход возникает из-за нарушения чистоты изобарического спина в ядерных состояниях, обусловленного электромагнитным взаимодействием или, возможно, другими членами взаимодействия, которые нарушают зарядовую независимость. (Вопрос о влиянии членов взаимодействия нуклонов, зависящих от заряда, на величину матричных элементов β -распада рассматривается в работе [44].)

Основной эффект можно охарактеризовать небольшой примесью аналогового состояния родительского ядра в дочернем ядре или аналогового состояния дочернего ядра в родительском. (При $T_i = T_f + 1$, где T_i и T_f — изоспины дочерней и родительской ядер, аналоговое состояние с $T = T_i$ и $M_T = T_i - 1$ может быть примешано к состоянию дочернего ядра, тогда как при $T_i = T_f - 1$ аналоговое состояние с $T = T_f$ и $M_T = T_f - 1$ может быть примешано к состоянию родительского ядра.) В последнем столбце табл. 1.3 приведены квадраты амплитуды примеси c , найденные по измеренным значениям $f\ell$. Нормировочный множитель оператора перехода (т. е. фермиевская

константа взаимодействия g_V) получается из данных для переходов с $\Delta T = 0$ (фиг. 1.10). Таким образом, мы имеем

$$2T_{\max}c^2 = \frac{6260}{ft}, \quad (1.71)$$

где ft в секундах, а T_{\max} — наибольшее из T_i и T_f .

В трех случаях из числа представленных в табл. 1.3 [$^{156}\text{Eu} \rightarrow ^{156}\text{Gd}$ (основное состояние), $^{170}\text{Lu} \rightarrow ^{170}\text{Yb}$ и $^{234}\text{Np} \rightarrow ^{234}\text{U}$] можно провести довольно детальный анализ на основе модельных представлений о переходах одной частицы, движущейся в сферическом потенциале. Приближенные оценки влияния кулоновского поля на нарушение чистоты изосинии примерно согласуются с наблюдаемой интенсивностью этих переходов [116].

Фермиевские переходы с $\Delta T = 1$ можно также изучать на основе представления о смешанных переходах типа Ферми и Гамова — Теллера, т. е. разрешенных распадах с $\Delta I = 0$ (причем распады типа $0 \rightarrow 0$ исключаются). Величиной ft определяется суммарная интенсивность переходов типа Ферми и Гамова — Теллера, а отношение между ними можно получить разными способами. Чаще всего пользуются данными измерения круговой поляризации γ -квантов в зависимости от угла между β - и γ -излучениями. Оказалось, что фермиевские матричные элементы для всех переходов с $\Delta T = 1$ очень малы. Данные по фермиевским матричным элементам смешанных переходов собраны в работе [117].

Энергия связи и спины гиперъядер (табл. 1.4)

Масса А-гиперона значительно меньше массы других частиц со странностью $S = -1$ и барионным числом $A = 1$ (фиг. 1.11). Следующее по степени возбуждения состояние с теми же самыми квантовыми числами — это Σ -гиперон, масса которого на $80 M_\odot$ больше массы А-гиперона. Поэтому ядра со странностью $S = -1$ можно рассматривать как системы, состоящие из нуклонов и А-гиперона.

Энергия связи А-гиперона в гиперъядрах (называемая также энергией отделения S_A) равна

$$B_A = M_A + M(A^{-1}Z) - M(^A_Z). \quad (1.72)$$

Ее находят, измеряя кинетическую энергию всех продуктов распада гиперъядра, который протекает в соответствии с одним из двух уравнений

$$\begin{aligned} {}_A^AZ &\rightarrow {}^A_Z + 176,0 M_\odot - B_A, \\ {}_A^AZ &\rightarrow {}^A(Z+1) + \pi^- + 37,7 M_\odot - B_A. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Данные об энергии связи А-гиперона в гиперъядрах представлены в табл. 1.4. Из этих данных явствует, что энергия связи гиперонов сравнима с энергией связи нуклонов в системах с $S = 0$, хотя при малых A она несколько меньше, чем для нуклонов (например, фиг. 2.4). Но энергия связи А-гиперона возрастает при увеличении A , тогда как энергия связи нуклона примерно постоянна. В этом находит отражение то обстоятельство, что связанный А-гиперон не тождествен нуклонам ядра. Низшая орбита А-гиперона в ядре соответствует состоянию $1s_{1/2}$, для которого кинетическая энергия дается равенством

$$E_{\text{кин}} \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{2M_A R^2} = 118 A^{-2/3} M_\odot \quad (1.74)$$

в предположении, что $A \gg 1$, а $R = 1,2 A^{1/3}$ ферми.

Для ^{13}C , самого тяжелого гиперъядра в табл. 1.4 с четными Z и N , величина $E_{\text{кин}} \approx 20 M_\odot$. На основании экспериментального значения величины B_A можно грубо оценить потенциал V , действующий на А-гиперон, а именно

Таблица 1.4

ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗВЕСТНЫХ В НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ ГИПЕРЬЯДЕР

Ядро	T	M_T	$B_A, M\text{эв}$	$I\pi$
$^3_{\Lambda}\text{H}$	0	0	$0,32 \pm 0,17$	$^{1/2}+$
$^4_{\Lambda}\text{H}$	$1/2$	$1/2$	$1,95 \pm 0,14$	$0+$
$^4_{\Lambda}\text{He}$	$1/2$	$-1/2$	$2,07 \pm 0,09$	$0+$
$^5_{\Lambda}\text{He}$	0	0	$3,04 \pm 0,03$	
$^6_{\Lambda}\text{He}$	1	1	$4,4 \pm 0,7$	
$^6_{\Lambda}\text{Li}$	0	0	$5,42 \pm 0,11$	
$^7_{\Lambda}\text{Be}$	1	-1	$5,9 \pm 0,8$	
$^8_{\Lambda}\text{Li}$	$1/2$	$1/2$	$6,60 \pm 0,13$	$1-$
$^8_{\Lambda}\text{Be}$	$1/2$	$-1/2$	$6,57 \pm 0,20$	
$^9_{\Lambda}\text{Li}$	1	1	$8,24 \pm 0,28$	
$^9_{\Lambda}\text{Be}$	0	0	$6,24 \pm 0,25$	
$^{10}_{\Lambda}\text{Be}$	$1/2$	$1/2$	$8,9 \pm 0,5$	
$^{10}_{\Lambda}\text{B}$	$1/2$	$-1/2$	$8,8 \pm 0,5$	
$^{11}_{\Lambda}\text{B}$	0	0	$10,0 \pm 0,3$	
$^{12}_{\Lambda}\text{B}$	$1/2$	$1/2$	$11,09 \pm 0,21$	
$^{13}_{\Lambda}\text{C}$	0	0	$10,6 \pm 0,4$	
$^{14}_{\Lambda}\text{C}$	$1/2$	$1/2$	$13,2 \pm 0,7$	
$^{14}_{\Lambda}\text{N}$	$1/2$	$-1/2$	$11,7 \pm 0,5$	

Экспериментальные данные взяты из работ [293, 315]. В обозначении A_Z для гиперъядер Z — обычный химический символ атома (полный ядерный заряд Z), а A — полное число барионов. Нижний индекс Λ указывает, что квантовое число странности $S = -1$. Принятые здесь значения квантового числа T — минимальные значения, которые согласуются с наблюдающимися величинами $M_T = 1/2 (N - Z)$.

$V = B_A + E_{\text{кин}} \approx 30 M\text{эв}$. Это значение потенциала согласуется с данными по распаду тяжелых гиперъядер, образующихся при захвате K^- -мезонов ядрами $^4_{\Lambda}\text{Ag}$ и $^4_{\Lambda}\text{Br}$, которые входят в состав фотоэмиссии (см., например, [289]). Указанная величина потенциальной энергии Λ -гиперона в ядре ($30 M\text{эв}$) равна приблизительно половине среднего потенциала, действующего на нуклон на поверхности Ферми (см. гл. 2, § 1).

В табл. 1.4 можно найти некоторые данные, свидетельствующие о зарядовой независимости взаимодействия Λ -гиперона с нуклонами. Имеется несколько пар гиперъядер, образующих изобарические дублеты, например ($^4_{\Lambda}\text{H}$, $^4_{\Lambda}\text{He}$) и ($^6_{\Lambda}\text{Li}$, $^7_{\Lambda}\text{Be}$), тогда как ядра $^6_{\Lambda}\text{He}$ и $^7_{\Lambda}\text{Be}$ принадлежат изобарическому триплету. Оказывается, что аналоговые состояния характеризуются приблизительно оди-

наковой энергией связи. (Явно меньшую энергию связи для $\Lambda^0\text{He}$, нежели для изобарического аналога $\Lambda^0\text{Be}$, по-видимому, можно объяснить наличием возбужденных состояний $\Lambda^0\text{He}$ при распаде гиперъядра, при исследовании которого определялись величины B_A [351].)

Значения спинов и четностей, приведенные в этой таблице (Λ -гиперону приписана внутренняя четность, равная +1), взяты на основании измерений угловых корреляций, а также определения отношения интенсивностей для различных путей распада (см., например, обзор [293]). Исходя из известных значений спинов и энергии связи легчайших гиперъядер, можно заключить, что взаимодействие Λ -гиперона с нуклоном характеризуется довольно сильной спиновой зависимостью, причем взаимодействие в синглете состояния (^1S) наиболее сильное. Этим оно отличается от цуклон-нуклонного взаимодействия, для которого притяжение сильнее всего в триплетном состоянии (^3S) (см. гл. 2, § 5). Спиновая зависимость сил, действующих между Λ -гипероном и нуклоном, по-видимому, также приводит к флуктуациям величины B_A относительно средних значений, плавно увеличивающихся с ростом A . Таким образом, сравнительно малая энергия связи в гиперъядрах $\Lambda^0\text{Be}$ и $\Lambda^0\text{C}$, вероятно, обусловлена тем, что нейтроплы и протоны в таких системах образуют состояние со спином $I = 0$, а тем самым исключается возможность спиновой корреляции с Λ -гипероном. (Данные о силах взаимодействия между Λ -гипероном и нуклоном, полученные в результате изучения гиперъядер, рассматриваются в работе [112].)

Были установлены два случая существования гиперъядер с двумя Λ -гиперонами, а именно $\Lambda\Lambda^0\text{He}$ [354] и $\Lambda\Lambda^0\text{Be}$ [118]. В обоих случаях полная энергия связи двух Λ -гиперонов превышает удвоенную энергию связи B_Λ (для $\Lambda^0\text{He}$ и $\Lambda^0\text{Be}$) на величину, равную $4,5 \pm 0,5$ M_\odot , которая, таким образом, представляет собой энергию связи двух Λ -гиперонов.

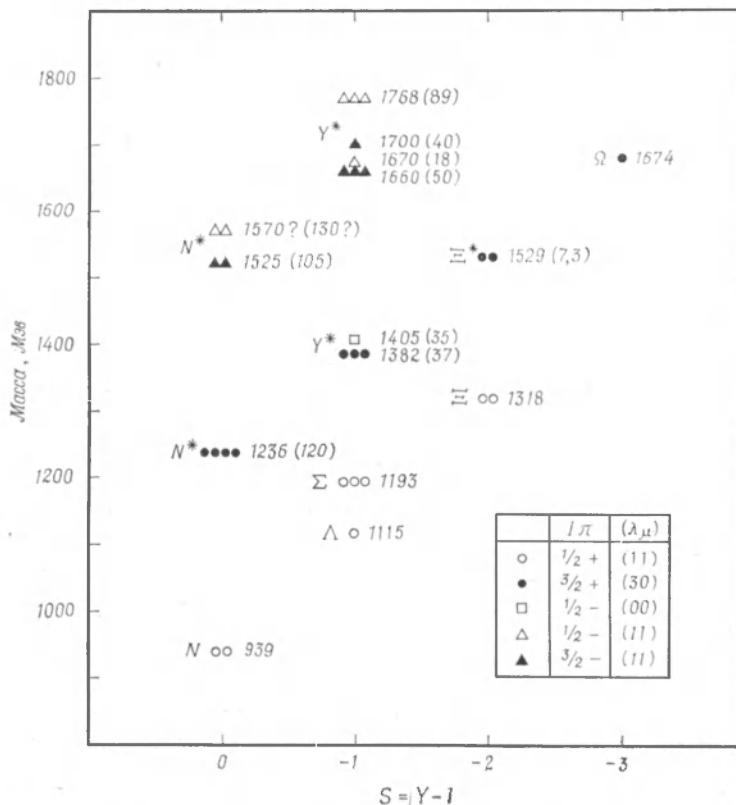
Мультиплеты в барионном спектре (фиг. 1.11 и табл. 1.5)

На фиг. 1.11 показаны некоторые хорошо установленные низкоэнергетические состояния спектра возбуждения нуклона (состояния с барионным числом $A = 1$). Этим состояниям приписывается угловой момент Γ , четность π , странность S и изоспин T . Вместо квантового числа T указана кратность состояний, равная $2T + 1$. Во многих случаях те или иные квантовые числа приписываются возбужденным состояниям нуклона на основании неполных данных и частично — исходя из возможности объединения этих состояний в мультиплеты SU_3 . (Мы вернемся к этому вопросу позднее.) Следует также подчеркнуть, что, кроме состояний, представленных на фиг. 1.11, удалось наблюдать еще многое более возбужденных барионных состояний, но для большинства из них оказалось невозможным однозначно определить их квантовые числа. (Некоторые из этих более высоких состояний указаны на фиг. 1.13, исчерпывающий обзор экспериментальных данных см. в работе [375].)

Барионные уровни, представленные на фиг. 1.11, могут быть сгруппированы в мультиплеты, связанные с классификацией по симметрии SU_3 . Такие мультиплеты определяются квантовыми числами $(\lambda\mu)$, а те значения квантовых чисел S и T , которые содержатся в данном мультиплете, можно найти, пользуясь общими правилами, рассмотренными в приложении 3, п. 2 и 3. При этом удобно считать, что барион состоит из трех夸克ов, каждый из которых может находиться в трех различных состояниях, образующих изобарический дублет со странностью $S = 0$ и изоскаляр со странностью $S = -1$. Таким образом,

мультиплет $(\lambda\mu) = (11)$ соответствует схеме Юнга  , а мультиплет $(\lambda\mu) = (30)$ — схеме  . Наборы квантовых чисел S и T получаются в резуль-

тате приписывания каждой клетке схемы Юнга совокупности квантовых чисел, определяющих состояния кварков (с учетом ограничений, указанных в приложении 3, п. 2). Поступая таким образом, можно непосредственно перечислить



Важное значение классификации на основе симметрии SU_3 , на мысль о которой впервые навела простая схема наблюдающихся барионных уровней, подтверждается общирными данными относительно матричных элементов переходов между этими состояниями [193]. В то же время из фиг. 1.11 следует, что имеются взаимодействия, довольно сильно нарушающие симметрию и приводящие к тому, что различия в массах между отдельными состояниями мультиплетов SU_3 достигают нескольких сотен мегазлектроинвольт. Замечательно, что эти различия в массах подчиняются простому правилу, которое можно вывести, рассматривая в первом порядке теории возмущений взаимодействие, разрушающее симметрию и преобразующееся как член с $T = 0$ и $S = 0$ октетного представления с $A = 0$.

Массовая формула особенно проста для декуплета, так как в произведение представлений (30) \times (11) представление (30) входит только один раз (см. приложение 3, п. 1). Поэтому расщепление по массе пропорционально коэффициентам Клебша — Гордана группы SU_3 , и его можно сразу же вычислить, если учесть, что оператор гиперзаряда Y представляет собой оператор с теми же трансформационными свойствами, что и у предполагаемого взаимодействия, разрушающего симметрию. Следовательно, расщепление по массе пропорционально Y , т. е.

$$\Delta M = aAY. \quad (1.75)$$

[Данное утверждение доказывается так же, как и утверждение о том, что диагональные матричные элементы z -составляющей векторного оператора пропорциональны матричным элементам оператора I_z ($= M$).] Множитель A в формуле (1.75) мы вставили для того, чтобы величина ΔM была одинаковой и для частиц, и для античастиц. Легко видеть, что соотношение (1.75) выполняется с точностью до нескольких мегазлектроинвольт. На основе этого соотношения удалось даже довольно точно предсказать массу Ω -частицы еще до того, как эта частица была обнаружена экспериментально.

В случае более общих представлений ($\lambda\mu$) в массовую формулу могут входить два параметра (приведенные матричные элементы), так как в произведение ($\lambda\mu$) \times (11) представление ($\lambda\mu$) входит, вообще говоря, дважды. Мы можем построить обобщенную массовую формулу, взяв две комбинации генераторов группы SU_3 , которые были бы изоскалярьами, сохраняли странность и преобразовывались бы как члены октета. В качестве первой комбинации можно взять тот же линейный оператор Y , а в качестве второй — квадратичное выражение, которое должно быть линейной комбинацией изоскалярей T^2 , Y^2 и 1. Соответствующую комбинацию, преобразующуюся как член октета, можно найти, если учесть, что в случае декуплета матричные элементы должны быть пропорциональны Y . Поэтому, опустив постоянное слагаемое, массовую формулу можно записать в следующем виде [190, 345]:

$$\Delta M = aAY + b \left[T(T+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]. \quad (1.76)$$

В случае октета с $I_\Lambda = \frac{1}{2}+$ имеются три известные разности масс и мы получаем соотношение

$$\frac{1}{2} (M_N + M_\Xi) = \frac{1}{4} (3M_\Lambda + M_\Sigma). \quad (1.77)$$

Подобное же соотношение позволяет предсказать, что еще не обнаруженным экспериментально членам октетов с $I_\Lambda = \frac{1}{2}-$ и $I_\Lambda = \frac{3}{2}-$, у которых странность $S = -2$, должна соответствовать масса $M \approx 1820$ M_{π} и $M \approx 1855$ M_{π} .

Приведенный выше вывод массовых соотношений основан на предположении, что взаимодействие, нарушающее симметрию SU_3 , имеет тензорный характер, соответствующий представлению ($\lambda\mu$) = (11). Возможные причины такой «октетной доминантности» анализируются, например, в сборнике статей [193].

Можно также попытаться рассматривать расщепление по массе с точки зрения эффективного взаимодействия между кварками в модели, в которой барионы представляются в виде систем, состоящих из трех夸克ов, причем кварки могут находиться в любом из трех состояний с квантовыми числами, указанными выше. Мы будем обозначать через p , n два члена изодублета, а через λ — изосинглет со странностью. (Такая модель для расщепления по массе рассматривалась в связи с симметрией SU_6 в работе [160].)

В рассматриваемой модели расщепление по массе возникает отчасти из-за разницы в массах странных и нестранных夸克ов (эта разница дает член, пропорциональный Y), а отчасти из-за взаимодействий. Двухчастичная связь может быть пяти типов (в предположении инвариантности изобарического спина и сохранения странности), а именно:

$$\begin{aligned} V_s(pp) &= V_s(pn) = V_s(nn), \\ V_s(p\lambda) &= V_s(n\lambda), \\ V_s(\lambda\lambda), \\ V_a(pn), \\ V_a(p\lambda) &= V_a(n\lambda). \end{aligned} \tag{1.78}$$

Связи с индексом s симметричны относительно переменных SU_3 и поэтому, вероятно, антисимметричны относительно спин-орбитальных переменных, тогда как связи с индексом a антисимметричны относительно переменных SU_3 . Если бы взаимодействие было SU_3 -инвариантным, то связи не зависели бы от夸克ов и характеризовались бы двумя параметрами, одним для симметрических и другим для антисимметрических связей. Поэтому мы имеем две независимые комбинации симметрических и одну комбинацию антисимметрических связей, которые могут давать вклад в расщепление масс в пределах SU_3 -мультиплета.

В качестве простейшего примера мы рассмотрим расщепление в пределах докуплета. Данное представление полностью симметрично относительно SU_3 -переменных, а поэтому здесь появляются только симметрические связи и мы имеем

$$\begin{aligned} V(N^*) &= 3V_s(pp), \\ V(Y^*) &= V_s(pp) + 2V_s(p\lambda), \\ V(\Xi^*) &= 2V_s(p\lambda) + V_s(\lambda\lambda), \\ V(\Omega) &= 3V_s(\lambda\lambda). \end{aligned} \tag{1.79}$$

Поскольку имеются три разности масс и только два независимых симметрических взаимодействия, допущение о двухчастичном характере сил немедленно приводит к соотношению между массами

$$M(\Omega) - M(N^*) = 3[M(\Xi^*) - M(V^*)], \tag{1.80}$$

которое, как легко видеть, представляет собой частный случай соотношения (1.75). Полное соотношение (1.75) требует дополнительной симметрии двухчастичного взаимодействия

$$V_s(pp) + V_s(\lambda\lambda) = 2V_s(p\lambda). \tag{1.81}$$

Общее взаимодействие (1.78) для симметрических связей, если его разложить по неприводимым тензорным операторам группы SU_3 , содержит один скаляр, один тензор ранга $(\lambda\mu) = (11)$ и один тензор, принадлежащий к 27-мерному представлению $(\lambda\mu) = (22)$. Соотношение (1.81) означает, что составляющая взаимодействия, принадлежащая представлению (22), равна нулю.

В октет вносят вклад также антисимметричные связи, а полное взаимодействие приобретает вид

$$\begin{aligned} V(N) &= \frac{3}{2} V_s(pp) + \frac{3}{2} V_a(np), \\ V(\Lambda) &= V_a(np) + \frac{3}{2} V_s(p\lambda) + \frac{1}{2} V_a(p\lambda), \\ V(\Sigma) &= V_s(pp) + \frac{1}{2} V_s(p\lambda) + \frac{3}{2} V_a(p\lambda), \\ V(\Xi) &= \frac{1}{2} V_s(p\lambda) + \frac{3}{2} V_a(p\lambda) + V_s(\lambda\lambda). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Поскольку антисимметричные связи относительно группы SU_3 имеют тензорный характер, соответствующий скаляру и октету, соотношений (1.81) вполне достаточно для получения массовой формулы (1.76) и, в частности, для того, чтобы октет с $I\pi = 1/2^+$ удовлетворял соотношению (1.77).

Таблица 1.5

МАССЫ ИЗОВАРИЧЕСКИХ МУЛЬТИПЛЕТОВ
В БАРИОННОМ И МЕЗОННОМ СПЕКТРАХ [375]

Частицы	$M, M\text{эв}$
n	939,550 \pm 0,005
p	938,256 \pm 0,005
Σ^-	1197,4 \pm 0,1
Σ^0	1192,6 \pm 0,1
Σ^+	1189,5 \pm 0,1
Ξ^-	1321,2 \pm 0,2
Ξ^0	1314,7 \pm 1,0
π^\pm	139,58 \pm 0,02
π^0	134,97 \pm 0,02
K^\pm	493,8 \pm 0,1
K^0	497,9 \pm 0,2

Данные о расщеплении по массе в пределах изоспиновых мультиплетов метастабильных барионных состояний (состояний, которые распадаются только под действием слабых и электромагнитных взаимодействий) представлены в табл. 1.5. Это расщепление приписывают электромагнитным взаимодействиям, а его величина должна давать меру нарушения изоспиновой симметрии. Характер электромагнитных вкладов в массы позволяет судить о тензорной структуре электромагнитных взаимодействий относительно группы SU_3 . В частности, было установлено, что значения масс согласуются с предположением об инвариантности электромагнитных взаимодействий относительно группы SU_2 , связанной с U -спином. Последний представляет собой аналог T -спина. Поэтому пуклонный октет можно разложить на мультиплеты по U -спину, внутри которых все частицы имели бы одинаковый заряд. Таким образом, получаются два

U -спиновых дублета (N^+ , Σ^+) и (Σ^- , Ξ^-), синглет [$(1/2 \sqrt{3}) \Sigma^0 - 1/2 \Lambda^0$] и триплет [$(N^0, 1/2 \Sigma^0 + 1/2 \sqrt{3} \Lambda^0, \Xi^0)$, где N^+ — протон, а N^0 — нейтрон. Из предположения об U -инвариантности следует, что электромагнитное смещение массы одинаково для всех компонент мультиплета. Комбинируя эти соотношения, мы получаем следующее условие, накладываемое на расщепление T -мультиплетов в работе:

$$M(N^+) - M(N^0) = M(\Sigma^+) - M(\Sigma^-) + M(\Xi^-) - M(\Xi^0). \quad (1.83)$$

Как видно из табл. 1.5, соотношение (1.83) выполняется с той точностью, с которой измерены массы частиц. Заметим, что справедливость соотношения (1.83) зависит не только от инвариантности электромагнитного взаимодействия относительно U -спина, но и от правильности квантовых чисел U -спина, приписываемых частицам. Данная симметрия нарушается более сильными взаимодействиями, которые разрушают симметрию SU_3 и вызывают большие сдвиги в массах.

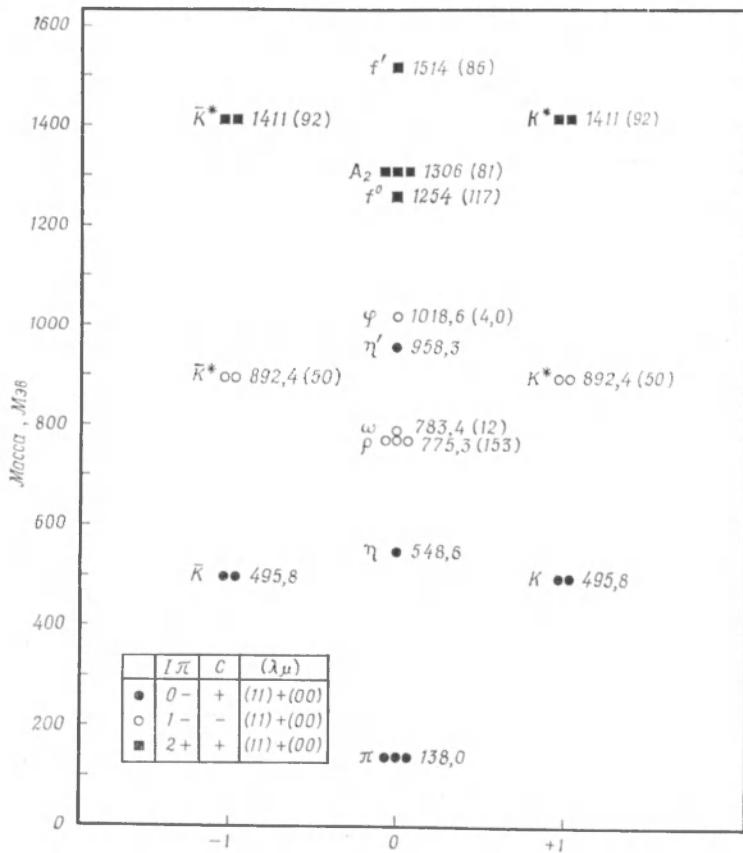
В схеме классификации на основе группы SU_6 октет с $I\pi = 1/2+$ и декуплет с $I\pi = 3/2+$ принадлежат одному и тому же представлению $[f] = [3]$, которое полностью симметрично относительно спиново-изобарических переменных кварков и полностью антисимметрично относительно пространственных переменных. Размерность данного представления в спиново-изобарическом пространстве $h = 56$ [см. формулу (1.294)], что соответствует восьми спиновым дублетам и десяти спиновым квадруплетам. Поэтому наблюдающиеся состояния можно объяснить, если считать, что в орбитальное движение вносит вклад лишь выделенное состояние с $L = 0$. Можно попытаться классифицировать состояния отрицательной четности на основе представления $[f] = [24]$, связанного с орбитальным состоянием сопряженной симметрии, для которого $L = 1$. Размерность этого представления в спиново-изобарическом пространстве $h = 70$, поэтому полное число состояний равно $(2h+1)h = 210$. Эти состояния, если их характеризовать полным угловым моментом (и четностью), составляют следующие SU_3 -мультиплеты: $I\pi = 1/2-$ (синглет, два октета и декуплет), $I\pi = -3/2-$ (синглет, два октета и декуплет) и $I\pi = 5/2-$ (октет). Имеются предварительные данные о наличии, помимо состояний, приведенных на фиг. 1.11, ряда состояний с квантовыми числами, которые соответствуют отсутствующим членам 210-мерного SU_6 -мультиплета. (Обзор экспериментальных данных и их интерпретации на основе модели кварков см. в работе [113].)

Можно попытаться вывести массовую формулу для расщепления в пределах SU_6 -мультиплетов, предполагая, что взаимодействие, нарушающее симметрию, имеет простейшую возможную тензорную структуру, как и при анализе расщепления масс с помощью SU_3 -мультиплетов. В случае группы SU_6 это предположение означает, что массовый оператор преобразуется как член 35-мерного представления $[f] = [21111]$. Такой оператор имеет лишь единственный присущий матричный элемент для состояний, принадлежащих представлению $[f] = [3]$. Поэтому снова получается массовая формула (1.75), которая не объясняет наблюдающейся картины. (Тензорное разложение эмпирических расщеплений масс дано в работе [221].)

В полный спектр фермионов (частиц с полуцелым спином), кроме адронов, входит также семейство лептонов. Для адронных фермионов барионное число $A \neq 0$ (для барионов $A = 1$, для антибарионов $A = -1$, а для ядер и антиядер $|A| = 3, 5, \dots$), тогда как для лептонов $A = 0$. К лептонам относятся электрон (e , $m_e = 0,51 M_{\text{эв}}$), мюон (μ , $m_\mu = 105,7 M_{\text{эв}}$) и два типа нейтрино (ν_e и ν_μ , масса равна нулю). Лептоны играют важную роль в слабых и электромагнитных процессах, но не участвуют в сильных взаимодействиях. Лептонные процессы, по-видимому, подчиняются закону сохранения лептонного числа ($L = 1$ для лептонов $e^-, \mu^-, \nu_e, \nu_\mu$ и $L = -1$ для антилептонов $e^+, \mu^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$; см. табл. 3, приложение 4, п. 1).

Мультиплеты в мезонном спектре (фиг. 1.12)

Некоторые из хорошо известных низкоэнергетических состояний спектра возбуждения мезонов (составной с $A = 0$) представлены на фиг. 1.12. Квантовые числа, обозначающие состояния, те же, что и на фиг. 1.11. Кроме них, мезонным уровням с $S = 0$ и $M_T = 0$ можно присвоить квантовое число зарядового



Фиг. 1.12. Спектр мезонных состояний.

Экспериментальные данные взяты из обзора [375]. По оси абсцисс отложено квантовое число странности S ($= Y$).

сопряжения C . [Всем мезонным состояниям с $S = 0$ можно присвоить G -четность, так чтобы величина G была равна произведению оператора зарядового сопряжения на оператор зарядовой симметрии. Например, при $M_T = 0$ мы имеем $G = C(-1)^T$.] Для долгоживущих состояний расщепление по массе в пределах T -мультиплетов указано в табл. 1.5.

Мезонные уровни, изображенные на фиг. 1.12, могут быть сгруппированы в три октета и три синглета в схеме SU_3 -симметрии. Но, как оказалось, синглеты и октеты с $T = 0$ и $S = 0$, у которых спины I и четности λ одинаковы, вза-

имеют друг с другом так, что наблюдающиеся уровни с $T = 0$ и $S = 0$ представляют собой суперпозицию синглетных и октетных составляющих. Доказательство наличия этой смеси было получено из наблюдающихся соотношений вероятностей в процессах рождения и распада. Предполагая справедливость массовой формулы, эквивалентной выражению (1.77), можно также оценить массы невозмущенных октетных состояний с $T = 0$ и $S = 0$ и таким образом определить отношения для смесей. По-видимому, может быть проведена последовательная интерпретация целого ряда данных, хотя некоторые неопределенности остаются. Например, остается неясным, следует ли писать массовое отношение для масс или же для квадратов масс. (Обзор различных оценок амплитуд смесей дан в работе [199].)

В кварковой модели считается, что мезон состоит из кварка и антикварка. Для данной спин-орбитальной конфигурации имеются девять изобарических состояний, которые в схеме SU_3 образуют октет и синглет.

При классификации по схеме SU_8 уровни с $I\pi = 0-$ и $I\pi = 1-$, изображенные на фиг. 1.12, могут быть сгруппированы в один синглет и одно 35-мерное представление с квантовыми числами $[f] = [0]$ и $[21111]$. Оба мультиплета образованы состояниями с орбитальным моментом $L = 0$ и четностью $\pi = -1$. Эти 36 состояний имеют одинаковые числа симметрий, вытекающие из кварковой модели.

В спектр бозонов (частиц с целым спином), кроме адронов с $A = 0$ (мезонов) и сложных частиц (ядра, атомы и т. д.), входят фотон и гравитон, если последний существует.

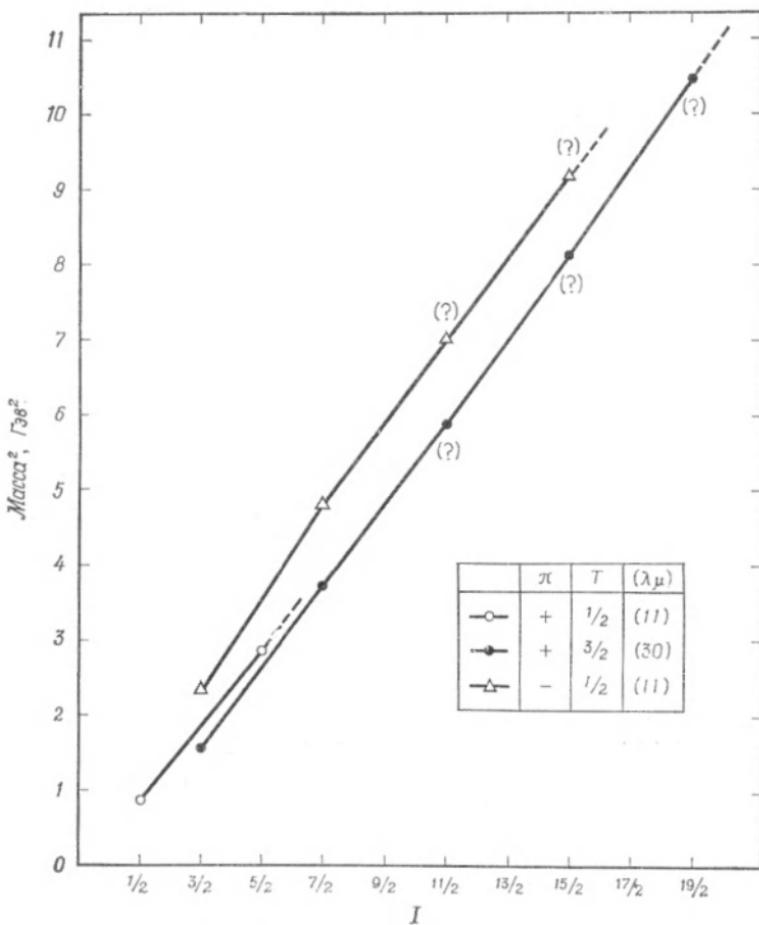
Семейства барионных состояний с одинаковой изобарической симметрией (фиг. 1.13)

Имеются некоторые указания на то, что состояния адронов с одинаковой изобарической симметрией $[T, S, (\lambda\mu)]$, а также A могут быть сгруппированы в семейства, состоящие из ряда состояний, масса которых плавно увеличивается в росте значений I . Примеры таких предполагаемых семейств, или траекторий, в барионном спектре приведены на фиг. 1.13. Члены этих семейств имеют одинаковую четность, а значения I для соседних состояний отличаются на 2 ($I = -1/2, 5/2, 9/2, \dots$ или $I = 3/2, 7/2, 11/2, \dots$). Эти состояния наблюдаются как разлонгипсы в рассеянии π -мезон — нуклон. Но для более высоколежащих резонансов значения спинов и четностей весьма неопределены и устанавливаются главным образом на основе систематики, вытекающей из самих же траекторий.

Наличие семейств состояний, таких, как представленные на фиг. 1.13, может говорить о существовании соотношения, подобного соотношению для членов ротационной полосы, но пока что имеется очень мало данных относительной динамической степени свободы в возбуждениях вдоль траектории.

§ 4. УСЛОВИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ

Законы инвариантности, рассмотренные в предыдущих параграфах настоящей главы, налагают ограничения на структуру ядерных сил. В данном параграфе мы рассмотрим наиболее общую зависимость этих сил от переменных нуклонов. Такой анализ сил впервые был проведен Айзенбудом и Вигнером [143].



Ф и г. 1.13. Траектория барионов.

Экспериментальные данные взяты из обзора [375]. Вопросительным знаком отмечено, что значения спинов и четности для наблюдаемых резонансных состояний не установлены. Квантовое число I — угловой момент. (Такое обозначение, обычное в ядерной физике, отличается от принятого в физике элементарных частиц, где символом I обозначают изоспин, а полный угловой момент — символом J .)

1. Силы, не зависящие от скорости

Поскольку силы, связывающие нуклоны, возникают в результате обмена другими частицами (особенно π-мезонами), энергия покоя которых значительно больше кинетической энергии нуклонов в ядре, их, по-видимому, можно рассматривать приближенно как статические. Поэтому мы начнем со случая, когда силы не зависят от скоростей нуклонов.

Статические силы, действующие между двумя нуклонами, могут зависеть от спиновых и изоспиновых переменных и от координат r_1 и r_2 . Вследствие трансляционной инвариантности эти силы могут зависеть только от относительного расстояния $r = r_1 - r_2$. Обычно различают центральные силы (зависящие только от величины вектора r , а не от его направления) и нецентральные силы (зависящие также от направления вектора r относительно спиновых векторов).

Наиболее общий центральный статический потенциал, который удовлетворяет условиям вращательной инвариантности и изобарической симметрии, можно записать в виде

$$V_{\text{центр}} = V_0(r) + (\sigma_1 \cdot \sigma_2) V_\sigma(r) + (\tau_1 \cdot \tau_2) V_\tau(r) + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)(\tau_1 \cdot \tau_2) V_{\sigma\tau}(r). \quad (1.84)$$

(Здесь $\sigma = 2s$ — спиновый, а $\tau = 2t$ — изоспиновый операторы, которыми обычно пользуются при описании ядерных сил.)

Зависимость взаимодействия от спиновых и изоспиновых переменных можно также представить в другой форме, иногда более удобной. Пользуясь обменными операторами P^r , P^τ [формула (1.57)] и оператором

$$P^\sigma = \frac{1}{2} (1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = \begin{cases} +1 & \text{при } S = 1, \\ -1 & \text{при } S = 0 \end{cases} \quad (1.85)$$

совместно с соотношением (1.55), которым выражается обобщенный принцип Паули, потенциал (1.84) можно записать в виде комбинации трех обменных операторов. Обычно принимают следующие обозначения:

$$V_{\text{центр}} = V_W(r) + V_M(r) P^r + V_B(r) P^\sigma - V_H(r) P^\tau \quad (1.86)$$

и называют отдельные слагаемые силами Вигнера, Майорана, Бартлетта и Гейзенберга. Силы можно также характеризовать проекционными операторами, которые отбирают те или иные состояния двухнуклонной системы:

$$\begin{aligned} V_{\text{центр}} = & {}^{31}V(r) \mathcal{P}(T=1, S=0, L_{\text{четн}}) + {}^{13}V(r) \mathcal{P}(T=0, S=1, L_{\text{четн}}) + \\ & + {}^{11}V(r) \mathcal{P}(T=0, S=0, L_{\text{нечетн}}) + {}^{33}V(r) \mathcal{P}(T=1, S=1, L_{\text{нечетн}}). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Здесь $\mathcal{F}(S=0, T=1, L_{\text{четн}})$ — проекционный оператор, отбирающий изоспиновый триплет, спиновый синглет, четные значения углового момента L и т. д. Потенциалы, записанные в формах (1.84), (1.86) и (1.87), линейно связаны между собой:

$$\begin{aligned} V_W &= V_0 - V_\sigma - V_\tau + V_{\sigma\tau}, \\ V_M &= -4V_{\sigma\tau}, \\ V_B &= 2V_\sigma - 2V_{\sigma\tau}, \\ V_H &= -2V_\tau + 2V_{\sigma\tau}, \\ {}^{31}V &= V_W + V_M - V_B - V_H = V_0 - 3V_\sigma + V_\tau - 3V_{\sigma\tau}, \\ {}^{13}V &= V_W + V_M + V_B + V_H = V_0 + V_\sigma - 3V_\tau - 3V_{\sigma\tau}, \\ {}^{11}V &= V_W - V_M - V_B + V_H = V_0 - 3V_\sigma - 3V_\tau + 9V_{\sigma\tau}, \\ {}^{33}V &= V_W - V_M + V_B - V_H = V_0 + V_\sigma + V_\tau + V_{\sigma\tau}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Нецентральные силы могут содержать дополнительные скаляры $(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)$ и $(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$, но не могут зависеть от них линейно без того, чтобы при этом нарушалась как \mathcal{P} -, так и \mathcal{T} -симметрия [см. формулы (1.22) и (1.29)]¹⁾.

Единственная возможная комбинация — произведение $(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$, которое обычно вводится в виде оператора

$$S_{12} = \frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2. \quad (1.89)$$

Потенциал, пропорциональный оператору (1.89) (тензорные силы), подобен потенциалу взаимодействия двух магнитных диполей. Эти силы действуют только в триплетном состоянии ($S = 1$), и, таким образом, потенциал статических тензорных сил общего вида состоит из двух частей:

$$V_{\text{тенз}} = [V_T^{(\text{четн})}(r)\mathcal{F}(T=0, L_{\text{четн}}) + V_T^{(\text{нечетн})}(r)\mathcal{F}(T=1, L_{\text{нечетн}})]S_{12}, \quad (1.90)$$

относящихся к орбитальному движению с четными и нечетными значениями момента L .

Тензорный оператор (1.89) представляет собой скалярное произведение [см. формулу (1.164)] двух тензоров второго ранга, первый из которых образован из спиновых векторов $\boldsymbol{\sigma}_1$ и $\boldsymbol{\sigma}_2$, а второй — из единичного вектора $\hat{\mathbf{r}}$ в направлении $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$S_{12} = (24\pi)^{1/2}((\sigma_1\sigma_2)_{\lambda=2} Y_{\lambda=2}(\hat{\mathbf{r}})). \quad (1.91)$$

¹⁾ Общий вид потенциала слабого взаимодействия между нуклонами, нарушающего \mathcal{P} -симметрию, был рассмотрен в работах [43, 231].

Здесь мы воспользовались сокращенным обозначением для связывания тензорных операторов (и угловых моментов), которым будем часто пользоваться на протяжении всей книги (см. приложение 1, п. 5).

2. Силы, зависящие от скорости

Хотя эмпирические данные подтверждают, что взаимодействие между нуклонами при не слишком высоких энергиях можно характеризовать потенциалами преимущественно статического типа, некоторые данные говорят о наличии значительных компонент, зависящих от скорости.

Такие силы могут зависеть только от относительного импульса $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ нуклонов (галилеева инвариантность). В первом порядке по импульсу \mathbf{p} мы можем образовать скаляры $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$, $(\sigma \cdot \mathbf{p})$ и $(\mathbf{r} \times \mathbf{p} \cdot \sigma)$, из которых первый нарушает \mathcal{T} -симметрию, а второй — \mathcal{P} -симметрию. Следовательно, единственной возможностью является спин-орбитальная связь $(\mathbf{r} \times \mathbf{p} \cdot \sigma)$, а соответствующее двухчастичное взаимодействие имеет вид

$$V_{LS} = [V_{LS}^{(\text{четн})}(r) \mathcal{P}(T=0) + V_{LS}^{(\text{нечетн})}(r) \mathcal{P}(T=1)] \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \quad (1.92)$$

Здесь спины входят симметрично [$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$]. Такая симметричная форма необходима, поскольку полный потенциал должен быть инвариантным относительно обмена всех координат частиц 1 и 2. Зарядово-независимые взаимодействия симметричны относительно переменных t , а следовательно, и относительно пространственно-спиновых переменных.

Симметрия относительно спиновых переменных σ_1 и σ_2 , характерная для спин-орбитальной связи (1.92) и для тензорных сил (1.90), означает, что эти нецентральные силы коммутируют с оператором квадрата полного спина (\mathbf{S}^2) и поэтому не связывают между собой синглетных и триплетных состояний. Действительно, закон сохранения спинового квантового числа S для двухнуклонного состояния является общим следствием зарядовой независимости и симметрии относительно пространственного отражения, поскольку из условий антисимметрии (1.55) вытекает соотношение

$$\pi(-1)^{S+T} = -1. \quad (1.93)$$

Таким образом, сохранение π и T означает сохранение спина S . (Плоскостная симметрия существенна для сохранения спина S . В атоме водорода, например, спин-орбитальная связь несимметрична относительно спинов электрона и протона и поэтому смешивает триплетные и синглетные состояния.)

Если рассматривать потенциалы, содержащие более высокие степени импульса \mathbf{p} , то оказывается возможным построить многочленов. Некоторыми потенциалами такого типа пользовались

при анализе данных по нуклон-нуклонному рассеянию (см. формулу (2.223)).

Мы рассмотрели взаимодействие в системе, состоящей только из двух нуклонов. Если присутствуют еще и другие частицы, то могут быть члены взаимодействия, зависящие от координат трех и большего числа частиц. Структуру подобных членов можно проанализировать так же, как это было сделано выше. Но вследствие сравнительно слабой связи ядерных систем должны преобладать двухчастичные силы.

В расчетах, основанных на оболочечной модели ядра, используют эффективные двухчастичные силы, действующие между частицами незаполненных оболочек (гл. 7, § 1). Эти эффективные силы содержат вклад от виртуального возбуждения остальных нуклонов (остов ядра) и поэтому обладают более низкой симметрией, чем силы между свободными нуклонами. Действительно, остов ядра не является ни трансляционно-инвариантным, ни галилеево-инвариантным (ни вращательно-инвариантным в случае деформированных ядер). В тяжелых ядрах с большим нейтронным избытком эффективные силы могут также зависеть от ориентации изоспинов нуклонов относительно изоспина остова ядра.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1

ВРАЩАТЕЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

В данном приложении мы кратко осветим некоторые стороны квантовой теории углового момента и преобразований вращения, которые имеют важное практическое значение для нашей книги. Имеется целый ряд книг, в которых вопрос о вращательной инвариантности рассматривается более подробно и с разных точек зрения. Соответствующие ссылки, а также исторический обзор по данному вопросу можно найти в книге Биденхарна и ван-Дама [40].

1. Матрицы углового момента

Составляющие вектора углового момента \mathbf{j} (т. е. орбитального, спинового или полного углового момента частицы или группы частиц или квантов) подчиняются коммутационным соотношениям

$$[j_x, j_y] = i j_z \text{ и циклические перестановки.} \quad (1.94)$$

Эти соотношения можно интерпретировать как геометрические коммутационные правила для вращений, связанных с составляющими углового момента [формула (1.11)], а также как частный случай коммутационных правил для углового момента и произвольной векторной величины [формула (1.150)].

Алгебраические соотношения (1.94) означают, что квадрат вектора коммутирует со всеми своими составляющими. Если предположить, что матрицы, соответствующие вектору \mathbf{j} , имеют конечную размерность, то собственные значения оператора \mathbf{j}^2 могут принимать следующие значения:

$$\mathbf{j}^2 = j(j+1), \quad \text{где } j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots . \quad (1.95)$$

При данном j собственные значения проекции вектора \mathbf{j} на ось z равны

$$j_z = m, \quad \text{где } m = -j, -j+1, \dots, j. \quad (1.96)$$

В представлении, в котором матрица j_z диагональна, отличные от нуля матричные элементы операторов углового момента таковы:

$$\begin{aligned} \langle jm | j_z | jm \rangle &= m, \\ \langle jm \pm 1 | j_x \pm ij_y | jm \rangle &= [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Недиагональные матричные элементы в формуле (1.97) содержат произвольные фазовые множители, связанные с выбором относительных фаз для состояний с разными m . Соглашение о фазе (1.39) предполагает, что матричные элементы оператора j_x вещественные, а матричные элементы оператора j_y чисто мнимые, так как j_x коммутирует с операцией $\mathcal{R}\mathcal{T}$, а j_y антикоммутирует с $\mathcal{R}\mathcal{T}$ [формула (1.42)]. Таким образом, остаются неопределенными действительные фазовые множители (± 1), которые обычно доопределяются так, чтобы матричные элементы оператора $j_x \pm ij_y$ были положительными [106]. [Заметим, что это соглашение о фазе входит в матричные элементы оператора поворота и таким образом учитывается при выводе соотношения (1.40) для обращения времени.]

2. Сложение угловых моментов

Если в системе имеются две подсистемы с угловыми моментами j_1 и j_2 , то при связывании этих подсистем могут возникать состояния с суммарным угловым моментом

$$J = |j_1 - j_2|, \quad |j_1 - j_2| + 1, \dots, \quad j_1 + j_2. \quad (1.98)$$

Состояние с суммарным угловым моментом J и его проекцией M можно записать в виде

$$|j_1 j_2 JM\rangle \equiv |j_1 j_2\rangle_{(j_1 j_2) JM} = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle. \quad (1.99)$$

Коэффициенты данного разложения называются коэффициентами векторного сложения. (В литературе эти коэффициенты называют также коэффициентами Клебша — Гордана или коэффициентами Вигнера.)

Коэффициенты векторного сложения подчиняются соотношениям ортогональности

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J' M'\rangle &= \delta(J, J') \delta(M, M'), \\ \sum_{JM} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | JM\rangle &= \delta(m_1, m'_1) \delta(m_2, m'_2), \end{aligned} \quad (1.400)$$

вытекающим из условия ортонормированности базисных функций $|j_1 m_1\rangle$, $|j_2 m_2\rangle$ и $|j_1 j_2 JM\rangle$. В соотношениях (1.400) мы предполагали, что коэффициенты векторного сложения являются вещественными числами [как подразумевается и в правиле фаз (1.39)]. Действительно, в преобразованиях, связывающих любые две базисные функции, которые удовлетворяли бы условию (1.39), мы имеем вещественные коэффициенты. Знак коэффициентов векторного сложения зависит от выбора знака действительных фаз для состояний $|JM\rangle$ относительно фаз состояний $|j_1 m_1\rangle$ и $|j_2 m_2\rangle$. Мы следуем выбору фаз Кондона и Шортли [106], основанному на соотношениях (1.97) и на условиях

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 = j_1, j_2 m_2 = j_2 | J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 \rangle &= 1, \\ \langle (j_1 j_2) J' M | j_1 z | (j_1 j_2) JM \rangle &\geq 0 \quad (J' \neq J). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Поскольку оператор $J_z = j_{1z} + j_{2z}$ диагонален по J , последнее условие несимметрично относительно j_1 и j_2 . Таким образом, важен порядок складываемых угловых моментов: при изменении порядка моментов j_1 и j_2 получаем

$$|j_2 j_1 JM\rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} |(j_1 j_2) JM\rangle. \quad (1.102)$$

Коэффициенты векторного сложения обладают важными свойствами симметрии по отношению к изменению знака проекций угловых моментов

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - j_3} \langle j_1 - m_1, j_2 - m_2 | j_3 - m_3 \rangle \quad (1.103)$$

и к их перестановке

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle &= (-1)^{j_1 + j_2 - j_3} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | j_3 m_3 \rangle = \\ &= (-1)^{j_1 - m_1} \left(\frac{2j_3 + 1}{2j_2 + 1}\right)^{1/2} \langle j_1 m_1 j_3 - m_3 | j_2 - m_2 \rangle = \\ &= (-1)^{j_2 + m_2} \left(\frac{2j_3 + 1}{2j_1 + 1}\right)^{1/2} \langle j_3 - m_3, j_2 m_2 | j_1 - m_1 \rangle. \end{aligned} \quad (1.104)$$

При связывании в состояние с моментом $j_3 = 0$ мы получим

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | 00 \rangle &= (-1)^{j_1 - m_1} (2j_2 + 1)^{-1/2} \langle j_1 m_1 00 | j_2 - m_2 \rangle = \\ &= (-1)^{j_1 - m_1} (2j_1 + 1)^{-1/2} \delta(j_1, j_2) \delta(m_1, -m_2). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Можно также рассматривать связь $\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_3$ как связь трех векторов в результирующий вектор $\mathbf{J} = 0$:

$$\begin{aligned} |(j_1 j_2) j_3; JM\rangle &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle (-1)^{j_3 + m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} | j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3 \rangle = \\ &= (-1)^{j_1 - j_2 + j_3} \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} | j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3 \rangle, \end{aligned} \quad (1.106)$$

где величина

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle \quad (1.107)$$

называется $3j$ -символом или символом Вигнера.

Соотношения симметрии (1.103) и (1.104) принимают особенно простую форму, если их выразить через $3j$ -символы. Так, например, $3j$ -символ инвариантен по отношению к четным перестановкам столбцов, а при нечетных перестановках или при изменении знака всех проекций $3j$ -символ приобретает фазовый множитель $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$.

Явные выражения и рекуррентные соотношения для коэффициентов векторного сложения можно найти в ряде книг по теории угловых моментов. Составлены также большие таблицы [441] и программы для вычисления этих коэффициентов на ЭВМ. Часто встречаются случаи, когда один из складываемых моментов j мал ($j \leq 2$). В таких случаях коэффициенты векторного сложения принимают простую форму и их можно найти во многих книгах, посвященных приложениям теории угловых моментов.

3. Коэффициенты пересвязки

Сложение трех угловых моментов

Три угловых момента \mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2 и \mathbf{j}_3 можно сложить в результирующий момент \mathbf{J} различными способами. Можно сначала, например, произвести сложение $\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_{12}$, а затем $\mathbf{j}_{12} + \mathbf{j}_3 = \mathbf{J}$. Но можно сначала произвести сложение $\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_{23}$, а затем $\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_{23} = \mathbf{J}$. В преобразование, связывающее эти два способа сложения,

$$\begin{aligned} |\langle j_1 j_2 j_3 \rangle &\equiv \\ |\langle j_1 j_2 \rangle j_{12}, j_3; JM \rangle &= \sum_{m_1 m_2 m_3 M_{12}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J_{12} M_{12} \rangle \langle J_{12} M_{12} j_3 m_3 | JH \rangle | j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3 \rangle = \\ &= \sum_{\substack{j_1, (j_2 j_3) J_{23}; J \\ j_1, (j_2 j_3) J_{23}; J}} \langle j_1, (j_2 j_3) J_{23}; J | (j_1 j_2) J_{12}, j_3; J \rangle | j_1 j_2 j_3 \rangle \end{aligned} \quad (1.108)$$

входят коэффициенты разложения, которые называются коэффициентами пересвязки или коэффициентами Рака. Данное преобразование не зависит от ориентации всей системы в целом и поэтому диагонально по M , а сами коэффициенты не зависят от M .

Преобразование к другим возможным схемам сложения, таким, как $\langle j_1 j_3 \rangle J_{13}, j_2; J$, можно получить из соотношения (1.108), пользуясь коэффициентами пересвязки (1.102) для двух угловых моментов¹⁾.

¹⁾ Пользуясь собственными состояниями оператора $\mathbf{j}_1 \cdot (\mathbf{j}_2 \times \mathbf{j}_3)$, можно получить схему сложения, в которой три угловых момента рассматриваются симметрично [90, 131].

Закон преобразования (1.108) соответствует следующему соотношению для коэффициентов векторного сложения:

$$\begin{aligned} & \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J_{12} m_1 + m_2 \rangle \langle J_{12} m_1 + m_2 j_3 m_3 | JM \rangle = \\ & = \sum_{J_{23}} \langle j_1 m_1 J_{23} m_2 + m_3 | JM \rangle \langle j_2 m_2 j_3 m_3 | J_{23} m_2 + m_3 \rangle \times \\ & \quad \times \langle j_1, (j_2 j_3) J_{23}; J | (j_1 j_2) J_{12}, j_3; J \rangle. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Учитывая соотношения ортогональности (1.100) для этих коэффициентов, можно коэффициенты пересвязки в (1.109) выразить также в виде суммы произведений четырех коэффициентов векторного сложения.

Коэффициенты пересвязки являются вещественными числами и как коэффициенты преобразования между полными совокупностями состояний подчиняются следующим соотношениям ортонормированности и полноты:

$$\sum_{J_{12}} \langle j_1, (j_2 j_3) J_{23}; J | (j_1 j_2) J_{12}, j_3; J \rangle \langle j_1, (j_2 j_3) J'_{23}; J | (j_1 j_2) J_{12}, j_3; J \rangle = \delta(J_{23}, J'_{23}), \quad (1.110)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{J_{23}} \langle (j_1 j_3) J_{13}, j_2; J | j_1, (j_2 j_3) J_{23}; J \rangle \langle j_1, (j_2 j_3) J_{23}; J | (j_1 j_2) J_{12}, j_3; J \rangle = \\ & = \langle (j_1 j_3) J_{13}, j_2; J | (j_1 j_2) J_{12}, j_3; J \rangle. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Коэффициенты пересвязки обладают рядом свойств симметрии, которые удобно выразить посредством $6j$ -символа, определяющегося соотношением

$$\begin{aligned} & \langle j_1, (j_2 j_3) J_{23}; J | (j_1 j_2) J_{12}, j_3; J \rangle = \\ & = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} [(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & J & J_{23} \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Можно дать и другое, эквивалентное первому, определение $6j$ -символа:

$$\begin{aligned} & \langle (j_1 j_3) J_{13}, j_2; J | (j_1 j_2) J_{12}, j_3; J \rangle = \\ & = (-1)^{j_2+j_3+J_{12}-J_{13}} [(2J_{12}+1)(2J_{13}+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_3 & J & J_{13} \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Подобный $6j$ -символ инвариантен при любой перестановке столбцов и при перестановке верхних и нижних элементов любых двух столбцов.

Если один из шести угловых моментов равен нулю, то мы получаем для $6j$ -символа простое выражение

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_2 & j_1 & 0 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} [(2j_1+1)(2j_2+1)]^{-1/2}, \quad (1.114)$$

эквивалентное соотношению

$$\langle j_1, (j_2 j_3) J_{23} = j_1; J=0 | (j_1 j_2) J_{12} = j_3, j_3; J=0 \rangle = 1, \quad (1.115)$$

Сложение четырех угловых моментов

Четыре угловых момента можно сложить разными способами, например, так:

$$\begin{aligned} & j_1 + j_2 = J_{12}, \quad j_3 + j_4 = J_{34}, \quad J_{12} + J_{34} = J, \\ & j_1 + j_3 = J_{13}, \quad j_2 + j_4 = J_{24}, \quad J_{13} + J_{24} = J. \end{aligned} \quad (1.116)$$

В закон преобразования между этими двумя способами сложения

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{c} j_1 j_2 j_3 j_4 \\ (j_1 j_2) J_{12}, (j_3 j_4) J_{34}; JM \end{array} \right\rangle = \\ & = \sum_{J_{13} J_{24}} \langle (j_1 j_3) J_{13}, (j_2 j_4) J_{24}; J | (j_1 j_2) J_{12}, (j_3 j_4) J_{34}; J \rangle \left| \begin{array}{c} j_1 j_2 j_3 j_4 \\ (j_1 j_3) J_{13}, (j_2 j_4) J_{24}; JM \end{array} \right\rangle \quad (1.117) \end{aligned}$$

входят коэффициенты пересвязки, зависящие от девяти угловых моментов. Пользуясь коэффициентами пересвязки для трех угловых моментов, из соотношения (1.117) можно получить другие способы сложения.

Коэффициенты соотношения (1.117) можно представить в виде суммы произведений шести коэффициентов векторного сложения. Они вещественны и подчиняются условиям ортогоизированности и полноты, аналогичным условиям (1.110) и (1.111). Коэффициенты пересвязки в соотношении (1.117) можно также представить в виде суммы произведений трех $6j$ -символов, ибо это преобразование может быть выполнено в три этапа, в каждом из которых пересвязываются только три угловых момента.

Часто бывает удобно выразить коэффициенты, которые появляются при пересвязке четырех угловых моментов, через $9j$ -символ, определяющийся соотношением

$$\begin{aligned} & \langle (j_1 j_2) J_{12}, (j_3 j_4) J_{34}; J | (j_1 j_3) J_{13}, (j_2 j_4) J_{24}; J \rangle = \\ & = [(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)(2J_{13}+1)(2J_{24}+1)]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{array} \right\}. \quad (1.118) \end{aligned}$$

Такой $9j$ -символ обладает простыми свойствами перестановочной симметрии. Так, например, при любой четной перестановке строк или столбцов или при транспозиции (замене строк столбцами) $9j$ -символ не изменяется, тогда как при нечетной перестановке строк или столбцов у него появляется фазовый множитель $(-1)^{\sum j}$, где $\sum j$ — сумма всех девяти угловых моментов.

Если один из угловых моментов j равен нулю, то $9j$ -символ сводится к $6j$ -символу:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_6 & j_5 & 0 \end{array} \right\} = (-1)^{j_2+j_3+j_4+j_6} ((2j_3+1)(2j_6+1))^{-1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{array} \right\}. \quad (1.119)$$

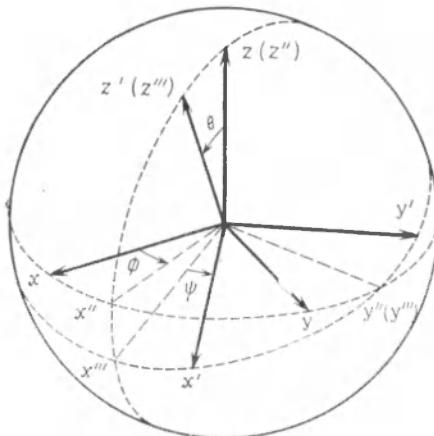
Это соответствует следующей пересвязке угловых моментов [см. формулы (1.115) и (1.113)]:

$$\begin{aligned} & \langle (j_1 j_3) J', (j_2 j_4) J'; 0 | (j_1 j_2) J, (j_3 j_4) J; 0 \rangle = \langle (j_1 j_3) J', j_2; j_4 | (j_1 j_2) J, j_3; j_4 \rangle = \\ & = (-1)^{j_2+j_3+J+J'} ((2J+1)(2J'+1))^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J \\ j_4 & j_3 & J' \end{array} \right\}. \quad (1.120) \end{aligned}$$

В случае систем, содержащих более четырех угловых моментов, коэффициенты пересвязки можно выразить через инварианты с более высокой симметрией ($12j$ - $,$ $15j$ -символы и т. д.). Подобные инварианты обладают такими же свойствами, как и $6j$ - и $9j$ -символы, и их можно представить в виде суммы произведений коэффициентов более низкого порядка. Такие инварианты тоже подчиняются различным рекуррентным соотношениям, которыми можно пользоваться при численных расчетах. (Список таблиц $6j$ - и $9j$ -символов см. в спаршнике [441]. Простейшие коэффициенты, у которых один из моментов j мал, приведены во многих книгах.)

4. Матрицы конечных вращений, \mathcal{D} -функции

В § 2.1 было указано, каким образом оператор углового момента связывается с преобразованием состояний, соответствующим вращению координатной системы. Мы определяем состояние, задавая полный угловой момент I , его проекцию $M (= I_z)$ и дополнительные квантовые числа α , которые описывают свойства состояния, не зависящие от ориентации координатной системы (скаляры).



Фиг. 1.14. Углы Эйлера.

Вращение, переводящее систему $\mathcal{K}(x, y, z)$ в систему $\mathcal{K}'(x', y', z')$, можно осуществить в три этапа: сначала вращением на угол ϕ вокруг оси z переводят исходную систему в систему $\mathcal{K}''(x'', y'', z'')$, затем вращением на угол θ вокруг новой оси y'' переводят систему $\mathcal{K}''(x'', y'', z'')$ в систему $\mathcal{K}'''(x''', y''', z''')$ и, наконец, производят вращение на угол ψ вокруг новой оси z''' . Как нетрудно увидеть, углы Эйлера (ϕ, θ, ψ) определены так, что углы (θ, ϕ) оказываются полярными углами оси z' в системе \mathcal{K}' , а углы $(\theta, \pi - \psi)$ — полярными углами оси z в системе \mathcal{K}' . Совокупность трех углов Эйлера обозначается одной буквой ω .

Систему \mathcal{K} можно преобразовать в систему \mathcal{K}' посредством одного вращения, которому соответствует вектор χ . Направление вектора χ , задаваемое полярными углами $(\vartheta_\chi, \varphi_\chi)$, совпадает с осью вращения, а длина χ вектора равна углу поворота. Параметры $\chi, \vartheta_\chi, \varphi_\chi$ и углы Эйлера ϕ, θ, ψ связаны между собой соотношениями

$$\cos \frac{\chi}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi + \psi}{2},$$

$$\sin \frac{\chi}{2} \sin \vartheta_\chi = \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\varphi_\chi = \frac{\phi - \psi}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Если ввести новую координатную систему \mathcal{K}' , которая получается из исходной системы \mathcal{K} путем поворота вокруг заданной оси (определяющейся вектором поворота χ), то преобразование состояний будет описываться соотношением [см. формулу (4.10)]

$$|\alpha IM'\rangle_{\mathcal{K}'} = \mathcal{R}(\chi) |\alpha IM'\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_M |\alpha IM\rangle_{\mathcal{K}} \langle IM| \exp \{-i\chi \cdot \mathbf{I}\} |IM'\rangle. \quad (4.121)$$

Здесь $|\alpha IM'\rangle_{\mathcal{K}'}$ — состояние с магнитным квантовым числом M' в системе \mathcal{K}' , т. е. с $I_{z'} = M'$. В случае состояний с индексом \mathcal{K} магнитное квантовое число

относится к собственному значению оператора I_z . Мы опустили индекс \mathcal{K} у матричного элемента оператора $\mathcal{R}(\chi)$, поскольку матричный элемент не зависит от координатной системы, в которой он вычисляется, если магнитные квантовые числа M и составляющие вектора \mathbf{I} в операторе $\mathcal{R}(\chi)$ относятся к одной и той же совокупности осей. [При этом составляющие вектора χ следует рассматривать как заданную совокупность чисел, равных составляющим вектора поворота в системе \mathcal{K} или \mathcal{K}' (эти составляющие однаковы в обеих системах).]

Преобразование от системы \mathcal{K} к системе \mathcal{K}' , произвольно ориентированной относительно \mathcal{K} , можно разложить на три вращения типа (1.121), каждое вокруг своей координатной оси. Чтобы определить ориентацию, необходимо задать углы поворота (фиг. 1.14), соответствующие трем углам Эйлера $\omega = (\phi, \theta, \psi)$:

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\phi(z)} \mathcal{K}' \xrightarrow{\theta(y')} \mathcal{K}'' \xrightarrow{\psi(z'')} \mathcal{K}''. \quad (1.122)$$

Каждый из трех этапов можно охарактеризовать своим углом и своей осью вращения. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} |IM'\rangle_{\mathcal{K}'} &= \sum_{M''} |IM''\rangle_{\mathcal{K}''} \langle IM''| \exp\{-i\psi I_z\} |IM'\rangle, \\ |IM''\rangle_{\mathcal{K}''} &= \sum_{M'''} |IM'''\rangle_{\mathcal{K}'''} \langle IM'''| \exp\{-i\theta I_y\} |IM''\rangle, \\ |IM''\rangle_{\mathcal{K}''} &= \sum_M |IM\rangle_{\mathcal{K}} \langle IM| \exp\{-i\phi I_z\} |IM''\rangle, \end{aligned} \quad (1.123)$$

или в объединенном виде

$$|IM'\rangle_{\mathcal{K}'} = \sum_M |IM\rangle_{\mathcal{K}} \langle IM| \mathcal{R} |IM'\rangle. \quad (1.124)$$

Здесь \mathcal{R} — оператор вращения, выражаемый через углы Эйлера,

$$\mathcal{R}(\omega) = \exp\{-i\phi I_z\} \exp\{-i\theta I_y\} \exp\{-i\psi I_z\}. \quad (1.125)$$

Матричными элементами оператора \mathcal{R} в выражении (1.124) определяются так называемые \mathcal{D} -функции¹⁾

$$\mathcal{D}_{MM'}^I(\omega) \equiv \langle IM | \mathcal{R}(\omega) | IM' \rangle^* = \langle IM' | \exp\{i\psi I_z\} \exp\{i\theta I_y\} \exp\{i\phi I_z\} | IM \rangle. \quad (1.126)$$

Поскольку \mathcal{R} — унитарный оператор, соотношение (1.124) можно записать в виде

$$|\alpha IM\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_{M'} \mathcal{D}_{MM'}^I(\omega) |\alpha IM'\rangle_{\mathcal{K}'}. \quad (1.127)$$

¹⁾ Здесь мы придерживаемся того определения \mathcal{D} -функций, которым чаще всего пользуются в ядерной физике, в частности при описании волновых функций состояний ротационного спектра. Функции \mathcal{D} , которыми пользуется Роуз [371], комплексно сопряжены функциям, определяющимся соотношениями (1.126). С такими \mathcal{D} -функциями оперировали, например, Якоб и Вик [253] в теории рассеяния, основанной на представлении собственных функций оператора спиральности, и определение Роуза стало обычным в физике элементарных частиц. В случае вещественных функций $d_{MM'}^I(\theta)$ определение Роуза совпадает с определением, которое было дано здесь. Матрица $d_{MM'}^I$ в определении Эдмондса [139] транспонирована по отношению к нашей матрице, а функции Эдмондса $\mathcal{D}_{MM'}^I$ отличаются от функций, соответствующих определению (1.126), фазовым множителем $(-1)^{M-M'}$.

Далее мы отметим некоторые важные свойства \mathcal{D} -функций.

Матричный элемент в (1.126), определяющий \mathcal{D} -функцию, выражается через матрицы составляющих углового момента, которые были рассмотрены в приложении 1, п. 1. Зависимость от углов ϕ и ψ особенно проста:

$$\mathcal{D}_{MM'}^I(\omega) = e^{iM\phi} d_{MM'}^I(\theta) e^{iM'\psi}, \quad (1.128)$$

а зависимость от угла θ дается выражением

$$d_{MM'}^I(0) \equiv \langle IM' | \exp\{i\theta I_y\} | IM \rangle. \quad (1.129)$$

Функция d вещественна, поскольку матрица оператора I_y чисто мнимая, и обладает следующими свойствами симметрии:

$$d_{MM'}^I(\theta) = (-1)^{M-M'} d_{M'M}^I(0) = (-1)^{M-M'} d_{-M, -M'}^I(\theta) = d_{M'M}^I(-\theta). \quad (1.130)$$

Таким образом, операция комплексного сопряжения \mathcal{D} -функции дает

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{MM'}^{I*}(\phi, \theta, \psi) &= (-1)^{M-M'} \mathcal{D}_{-M, -M'}^I(\phi, \theta, \psi) \\ &= (-1)^{M-M'} \mathcal{D}_{MM'}^I(-\phi, -\theta, -\psi). \end{aligned} \quad (1.131)$$

Выражения для \mathcal{D} -функций, а также явный вид этих функций при малых значениях углового момента I можно найти во многих книгах, в которых рассматривается вопрос инвариантности относительно вращений.

При заданных I и ω функции \mathcal{D} образуют унитарную матрицу

$$\begin{aligned} \sum_M \mathcal{D}_{MM_1}^{I*}(\omega) \mathcal{D}_{MM_2}^I(\omega) &= \delta(M_1, M_2), \\ \sum_{M'} \mathcal{D}_{M_1 M'}^{I*}(\omega) \mathcal{D}_{M_2 M'}^I(\omega) &= \delta(M_1, M_2), \end{aligned} \quad (1.132)$$

а для обратного вращения ω^{-1} , характеризующего ориентацию системы \mathcal{K}' относительно системы \mathcal{K} , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{MM'}^I(\omega^{-1}) &= \mathcal{D}_{M'M}^{I*}(\omega), \\ (\phi, \theta, \psi)^{-1} &= (-\psi, -\theta, -\phi) = (\pi - \psi, \theta, -\pi - \phi). \end{aligned} \quad (1.133)$$

Функции \mathcal{D} образуют полную ортогональную совокупность базисных функций в пространстве углов ϕ, θ, ψ со следующей нормировкой:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\psi \mathcal{D}_{MM'}^{I*}(\omega) \mathcal{D}_{M_1 M_1'}^{I_1}(\omega) = \frac{8\pi^2}{2I+1} \delta(I, I_1) \delta(M, M_1) \delta(M', M_1'). \quad (1.134)$$

[Функции \mathcal{D} с полуцелым значением углового момента I меняют знак при повороте на угол 2π . Поэтому, чтобы получить однозначные функции, необходимо удвоить область изменения углов, например взять интервал изменения угла ϕ от 0 до 4π . Такое расширение области интегрирования в выражении (1.134) необходимо для того, чтобы обеспечить ортогональность функций в том случае, когда один из угловых моментов (I или I_1) полуцелый, а другой целый. См. также замечание двузначности представлений группы вращений в приложении 3, п. 3.]

Функции \mathcal{D} — это обобщенные шаровые функции. (Шаровые функции составляют полную ортонормированную систему функций на сфере, т. е. в пространстве углов θ, ϕ или углов θ, ψ .) Таким образом, при $M' = 0$ (или $M = 0$)

\mathcal{Z} -функции сводятся к шаровым функциям:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{M0}^I(\omega) &= \left(\frac{4\pi}{2I+1}\right)^{1/2} Y_{IM}(\theta, \phi), \\ \mathcal{Z}_{0M}^I(\omega) &= (-1)^M \left(\frac{4\pi}{2I+1}\right)^{1/2} Y_{IM}(\theta, \psi), \\ \mathcal{Z}_{00}^I(\omega) &= P_I(\cos \theta).\end{aligned}\quad (1.135)$$

Рассматривая соотношение (1.127) в применении к системе $(I_1 I_2) IM$, получаем правило сложения \mathcal{Z} -функций

$$\sum_{M_1 M_2} \langle I_1 M_1 I_2 M_2 | IM \rangle \mathcal{Z}_{M_1 M_1'}^{I_1}(\omega) \mathcal{Z}_{M_2 M_2'}^{I_2}(\omega) = \langle I_1 M_1' I_2 M_2' | IM' \rangle \mathcal{Z}_{MM'}^I(\omega), \quad (1.136)$$

которым будем пользоваться далее.

Можно получить подобное соотношение, проводя суммирование по вторым индексам \mathcal{Z} -функций M_1' и M_2' . Учитывая соотношение ортогональности (1.100) для коэффициентов векторного сложения, соотношение (1.136) можно записать также в форме

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{M_1 M_1'}^{I_1}(\omega) \mathcal{Z}_{M_2 M_2'}^{I_2}(\omega) &= \\ &= \sum_{I=M_1-I_2}^{I_1+I_2} \langle I_1 M_1 I_2 M_2 | IM_1 + M_2 \rangle \langle I_1 M_1' I_2 M_2' | IM_1' + M_2' \rangle \mathcal{Z}_{M_1+M_2, M_1'+M_2'}^I(\omega).\end{aligned}\quad (1.137)$$

Если ввести координатную систему \mathcal{K}_1 с ориентацией ω_1 относительно системы \mathcal{K} и ориентацией ω'_1 относительно системы \mathcal{K}' , то [точно так же, как была получена формула (1.124)] для произведения вращений получим

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\omega) &= \mathcal{R}(\omega) \mathcal{R}(\omega'_1), \\ \mathcal{Z}_{MM'}^I(\omega_1) &= \sum_{M_1} \mathcal{Z}_{MM_1}^I(\omega) \mathcal{Z}_{M_1 M'}^I(\omega'_1).\end{aligned}\quad (1.138)$$

При $M'=0$ соотношение (1.138) описывает преобразование шаровых функций при вращениях координатной системы, а при $M=M'=0$ оно дает теорему сложения шаровых функций

$$\begin{aligned}Y_{IM}(\theta, \phi) &= \sum_{M'} \mathcal{Z}_{MM'}^I(\omega) Y_{IM'}(\theta', \phi'), \\ P_I(\cos \theta_{12}) &= \frac{4\pi}{2I+1} \sum_M Y_{IM}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{IM}(\theta_2, \phi_2).\end{aligned}\quad (1.139)$$

Во втором выражении через θ_{12} обозначен угол между направлениями $\theta_2 \phi_2$ и $\theta_1 \phi_1$, которые соответствуют ориентациям ω'_1 и ω_1 в выражении (1.138); см. также соотношение (1.133).

Соотношения (1.138) выражают групповые свойства операторов вращения и \mathcal{Z} -функций. Последние оказываются неприводимыми представлениями группы вращений. [Эти представления неприводимы, так как из совокупности $(2I+1)$ состояний $|IM\rangle$ с заданным I невозможно выделить меньшую совокупность состояний, которые при всех вращениях преобразовывались бы только в самих себя.]

При определении фазы базисных состояний в представлении собственных функций оператора углового момента удобно пользоваться оператором поворота

$\mathcal{R}_y(\pi)$ на угол π вокруг оси y :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_y(\pi) &= \exp\{-i\pi I_y\}, \\ \langle IM' | \mathcal{R}_y(\pi) | IM \rangle &= d_{M'M}^I(\pi) = (-1)^{I-M} \delta(M, -M').\end{aligned}\quad (1.140)$$

Поскольку при операции $\mathcal{R}_y(\pi)$ изменяется на обратное направление оси z , состояние с квантовыми числами I и M переходит в состояние с квантовыми числами I и $-M$, а фазовый множитель можно найти, рассматривая состояние с $M = I$. Такое состояние можно представить себе как систему выстроенных параллельно $2I$ фермионов, для каждого из которых имеем

$$\mathcal{R}_y(\pi) = \exp\{-i\pi \sigma_y\} = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2} \sigma_y\right\} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sigma_y \sin\frac{\pi}{2} = -i\sigma_y,\quad (1.141)$$

где σ_y — матрица Паули. Таким образом, фазовый множитель для каждой частицы и всей системы равен $+1$. Кроме того, поскольку

$$\mathcal{R}_y(\pi) (I_x + iI_y) = -(I_x - iI_y) \mathcal{R}_y(\pi),\quad (1.142)$$

фазовый множитель в формуле (1.140) изменяет знак каждый раз, когда квантовое число M уменьшается на единицу.

5. Неприводимые тензорные операторы и приведенные матричные элементы

Определение неприводимых тензорных операторов

Операторы можно характеризовать величиной углового момента, передаваемого состоянию, на которое они действуют. Неприводимый тензорный оператор ранга λ представляет собой совокупность операторов $T_{\lambda\mu}$ ($\mu = \lambda, \lambda - 1, \dots, -\lambda$), передающих угловой момент λ с различными проекциями μ . Например, если такой оператор действует на состояние с нулевым угловым моментом (остальные характеристики этого состояния определяются дополнительными квантовыми числами α), то мы получаем, что

$$T_{\lambda\mu} |\alpha, I=0\rangle = \mathcal{M} |\gamma, I=\lambda, M=\mu\rangle.\quad (1.143)$$

Здесь \mathcal{M} — нормированная постоянная, зависящая от свойств оператора и состояния α . Различные составляющие неприводимого тензорного оператора, характеризующиеся индексом μ , должны обладать одинаковыми внутренними свойствами. Поэтому состояния в правой стороне равенства (1.143) отличаются только значением квантового числа M , а дополнительные квантовые числа γ и нормировка у них одинаковы.

Если мы обобщим действие оператора $T_{\lambda\mu}$ на состояние с произвольным угловым моментом I_1 , то получим, что

$$T_{\lambda} |\alpha, I_1\rangle \equiv \sum_{\mu M_1} \langle I_1 M_1 \lambda \mu | I_2 M_2 \rangle T_{\lambda\mu} |\alpha, I_1 M_1\rangle = \mathcal{M} |\gamma, I_2 M_2\rangle,\quad (1.144)$$

причем постоянная \mathcal{M} не зависит от M_2 . Здесь мы ввели особые обозначения: операторы и состояния записываются без магнитных квантовых чисел, а схема связи указывается нижним индексом. Такие обозначения позволяют складывать угловые моменты в любом порядке [например, схема связи $(\lambda I_1) I_2 M_2$, а не $(I_1 \lambda) I_2 M_2$ в формуле (1.144); см. также формулу (1.108)].

Тензорные свойства оператора можно характеризовать законом его преобразования при вращении координатной системы. Применяя соотношение (1.127) к обеим частям равенства (1.144) и учитывая правила сложения (1.136),

получаем, что

$$T_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu\mu'}^{\lambda}(\omega) T'_{\lambda\mu'}, \quad (I.145)$$

где T — неприводимый тензорный оператор в повернутой координатной системе. Следовательно, $T'_{\lambda\mu} = T_{\lambda\mu}$ ($x \rightarrow x'$), где x и $x' = x'(x, \omega)$ — динамические переменные частицы, такие, как координаты и спин, в системах \mathcal{K} и \mathcal{K}' . Таким образом, из формул (1.4) и (1.145) следует, что

$$\mathcal{F}_t^{-1}(\omega) T_{\lambda\mu} (\mathcal{R}(\omega)) = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu\mu'}^{\lambda}(\omega) T_{\lambda\mu'}. \quad (I.146)$$

[Когда имеют в виду свойство неприводимых тензорных операторов, выражаемое соотношением (1.146), то обычно говорят, что операторы $T_{\lambda\mu}$ преобразуются во неприводимому представлению группы вращений.]

В случае бесконечно малых (инфinitезимальных) вращений [$\mathcal{R} \approx 1 - i\gamma_\lambda \cdot \mathbf{I}$, см. формулу (1.10)] из соотношений (1.126) и (1.146) получаем, что

$$[\mathbf{I}, T_{\lambda\mu}] = \sum_{\mu'} (\lambda\mu' | \mathbf{I} | \lambda\mu) T_{\lambda\mu'}, \quad (I.147)$$

или, учитывая (1.97),

$$\begin{aligned} [I_x \pm iI_y, T_{\lambda\mu}] &= ((\lambda \mp \mu)(\lambda \pm \mu + 1))^{1/2} T_{\lambda\mu \pm 1}, \\ [I_z, T_{\lambda\mu}] &= \mu T_{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (I.148)$$

Соотношения (1.144), (1.146) и (1.147) или (1.148) эквивалентны друг другу, и любое из них может быть взято за определение неприводимых тензорных операторов.

Неприводимый тензорный оператор ранга $\lambda = 0$ сферически инвариантен (скаляр). Вектор \mathbf{V} , выраженный через сферические составляющие

$$V_\mu = V_{\lambda=0, \mu} = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y) & \text{при } \mu = -1, \\ V_z & \text{при } \mu = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) & \text{при } \mu = +1, \end{cases} \quad (I.149)$$

представляет собой неприводимый тензорный оператор ранга $\lambda = 1$. Таким образом, коммутационные соотношения (1.147) при $\lambda = 1$ можно также записать в виде

$$[I_x, V_y] = iV_z \text{ и циклические перестановки.} \quad (I.150)$$

Соотношения (1.94) — частный случай таких соотношений.

Другим примером неприводимых тензорных операторов могут служить шаровые функции $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$, зависящие от угловых переменных частицы. Так, если волновую функцию частицы в s -состоянии ($l = 0$) умножить на шаровую функцию $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$, то получим волновую функцию состояния с угловым моментом λ и проекцией μ . Тензорные свойства шаровых функций $Y_{\lambda\mu}$ выражаются соотношением (1.139), которое представляет собой частный случай соотношения (1.145). Подобным же образом матричный элемент $\mathcal{D}_{\mu\mu'}^{\lambda}(\omega)$ при фиксированном ν образует неприводимый тензорный оператор ранга λ , который может быть целым или полуцелым; углы ω могут описывать либо ориентацию динамической системы в целом, либо ориентацию отдельной частицы. Тензорные свойства операторов рождения рассматриваются ниже (см. приложение 1, п. 5).

Любой оператор можно разложить в ряд по неприводимым тензорным операторам, соответствующим различным значениям углового момента, которые этот оператор может передать. Например, электрические мультипольные моменты — это неприводимые тензорные операторы, которые получаются при разложении плотности электрического заряда в ряд (см. приложение 1, п. 8).

Приведенные матричные элементы

Если выражение (1.144) умножить слева на волновую функцию произвольного состояния, обладающего угловым моментом I'_2 и проекцией M'_2 , то получим

$$\begin{aligned} \langle \beta I'_2 M'_2 | T_\lambda | \alpha I_1 \rangle &= \sum_{(I_1 \lambda) I_2 M_2} \langle I_1 M_1 \lambda \mu | I_2 M_2 \rangle \langle \beta I'_2 M'_2 | T_{\lambda \mu} | \alpha I_1 M_1 \rangle = \\ &= \mathcal{M}' \langle \beta I'_2 M'_2 | \gamma I_2 M_2 \rangle = \mathcal{M}' \delta(I_2, I'_2) \delta(M_2, M'_2), \end{aligned} \quad (1.151)$$

где величина \mathcal{M}' не зависит от магнитных квантовых чисел. Умножая все части равенства (1.151) на $\langle I_1 M'_1 \lambda \mu' | I_2 M_2 \rangle$, суммируя по I_2, M_2 и учитывая свойства ортогональности коэффициентов векторного сложения, получаем следующее соотношение (в котором все штрихи опущены):

$$\langle \beta I_2 M_2 | T_{\lambda \mu} | \alpha I_1 M_1 \rangle = \mathcal{M}' \langle I_1 M_1 \lambda \mu | I_2 M_2 \rangle. \quad (1.152)$$

Данное соотношение известно под названием теоремы Вигнера — Эккарта. Ее смысл заключается в том, что зависимость матричного элемента от магнитных квантовых чисел μ, M_1 и M_2 определяется коэффициентом векторного сложения. Эта зависимость следует из геометрии задачи.

Постоянную \mathcal{M}' в формуле (1.152) обычно выражают через так называемый приведенный матричный элемент $\langle \beta I_2 || T_\lambda || \alpha I_1 \rangle$, определяющийся соотношением

$$\langle \beta I_2 M_2 | T_{\lambda \mu} | \alpha I_1 M_1 \rangle = (2I_2 + 1)^{-1/2} \langle I_1 M_1 \lambda \mu | I_2 M_2 \rangle \langle \beta I_2 || T_\lambda || \alpha I_1 \rangle, \quad (1.153)$$

или

$$\langle \beta I_2 || T_\lambda || \alpha I_1 \rangle = (2I_2 + 1)^{1/2} \langle \beta I_2 M_2 | T_\lambda | \alpha I_1 \rangle. \quad (1.154)$$

Например, матричные элементы (1.97) вектора углового момента (который представляет собой неприводимый тензорный оператор ранга $\lambda = 1$) можно записать в виде

$$\langle IM' | (I)_{\lambda=1, \mu} | IM \rangle = (I(I+1))^{1/2} \langle IM 1_\mu | IM' \rangle, \quad (1.155)$$

что соответствует приведенному матричному элементу

$$\langle I || (I)_{\lambda=1} || I \rangle = (I(I+1)(2I+1))^{1/2}. \quad (1.156)$$

Таким образом, коммутационные соотношения (1.147) между составляющими вектора углового момента I и составляющими $T_{\lambda \mu}$ произвольного неприводимого тензорного оператора можно также записать в виде

$$[I_\mu, T_{\lambda \mu'}] = (\lambda(\lambda+1))^{1/2} \langle \lambda \mu' 1_\mu | \lambda \mu + \mu' \rangle T_{\lambda \mu + \mu'}. \quad (1.157)$$

Соотношение (1.154) дает нам приведенный матричный элемент в схеме связи $I_1 + \lambda = I_2$, но можно получить соотношение, более симметричное относительно I_1 и I_2 , если рассмотреть такую схему связи, при которой все три угловых момента складываются в результирующий нулевой момент ($I_1 + \lambda - I_2 = 0$). Инверсию направления углового момента I_2 можно осуществить путем обращения времени.

Сначала покажем это на примере скалярного произведения векторов состояния:

$$\begin{aligned} \langle \beta \bar{I}_2 | \alpha I_1 \rangle &= \sum_{(I_1 I_2) 0} \langle I_1 M_1 I_2 M_2 | 00 \rangle \langle \beta I_2 M_2 | \alpha I_1 M_1 \rangle = \\ &= \sum_{M_1 M_2} (-1)^{I_1 - M_1} (2I_1 + 1)^{-1/2} \delta(I_1 I_2) \delta(M_2, -M_1) \times \\ &\quad \times (-1)^{I_2 + M_2} \langle \beta I_2 - M_2 | \alpha I_1 M_1 \rangle = \\ &= (2I_2 + 1)^{1/2} \langle \beta I_2 M_2 | \alpha I_1 M_1 \rangle \delta(I_1, I_2). \end{aligned} \quad (1.158)$$

Здесь мы использовали соотношение (1.105) и через \bar{A} обозначили состояние A , подвергнутое операции обращения времени \mathcal{T} , т. е. $\bar{A} = \mathcal{T}A$. Подобным же образом приведенный матричный элемент можно (если опустить индексы α и β) записать в виде

$$\langle I_2 \| T_\lambda \| I_1 \rangle = (2I_2 + 1)^{1/2} \langle I_2 M_2 | T_\lambda | I_1 \rangle_{(I_1 \lambda) I_2 M_2} = \langle \bar{I}_2 | T_\lambda | I_1 \rangle_{(I_1 \lambda) I_2, I_2 \pm 0}. \quad (1.159)$$

Нормировка для приведенного матричного элемента выбиралась из соображений симметрии схемы связи относительно I_1 и I_2 [см. формулу (1.115)].

Ядерные переходы $I_1 \rightarrow I_2$, связанные с передачей углового момента λ , можно описывать операторами $T_{\lambda \mu}$, такими, чтобы амплитуды вероятностей были пропорциональны матричным элементам (1.153). Полная вероятность перехода, просуммированная по проекциям μ и поляризациям M_2 конечного состояния, не зависит от M_1 и определяется приведенной вероятностью перехода

$$B(T_\lambda; I_1 \rightarrow I_2) = \sum_{\mu M_2} |\langle I_2 M_2 | T_{\lambda \mu} | I_1 M_1 \rangle|^2 = (2I_1 + 1)^{-1} |\langle I_2 \| T_\lambda \| I_1 \rangle|^2. \quad (1.160)$$

Для обратного перехода $I_2 \rightarrow I_1$ имеем

$$B(T_\lambda; I_2 \rightarrow I_1) = \frac{2I_1 + 1}{2I_2 + 1} B(T_\lambda; I_1 \rightarrow I_2), \quad (1.161)$$

поскольку абсолютное значение приведенного матричного элемента не изменяется при переносе мест угловых моментов I_1 и I_2 [см. формулу (1.173)]. В случае процессов, связанных с передачей нуклона или нуклонного заряда, в левой части равенства (1.161) стоит сопряженный тензорный оператор T_λ^H . Соотношение (1.161) можно рассматривать как принцип детального равновесия в применении к скоростям реакции, усредненным по поляризациям.

Преимущество величины B как характеристики полной вероятности перехода над приведенным матричным элементом заключается в том, что она непосредственно измеряется во многих экспериментах, тогда как для определения приведенного матричного элемента требуется знать спин начального состояния.

Приведенные матричные элементы для связанных систем

Если динамическая система состоит из двух подсистем 1 и 2 (две частицы или две группы частиц, спиновый и орбитальный моменты частицы и т. д.), то операторы, действующие на всю систему, можно характеризовать не только полным рангом тензора (связанным с вращением всей системы), но и тензорными связями относительно каждой из подсистем. Так, например, операторы, зависящие от переменных x_1 и x_2 (относящихся к двум частям системы), можно представить в виде

$$T_{\lambda \mu}(x_1, x_2) = (F_{\lambda_1}(x_1) G_{\lambda_2}(x_2)). \quad (1.162)$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \lambda \mu$$

Приведенный матричный элемент такого тензорного оператора для состояний с полными числами $(I_1 I_2) I$ и $(I'_1 I'_2) I'$, где I_1 и I'_1 относятся к первой части, а I_2 и I'_2 — ко второй части системы с полными угловыми моментами I и I' , можно выразить через приведенные матричные элементы операторов F_{λ_1} и G_{λ_2}

путем пересвязывания моментов типа (1.117). Для этого запишем сначала приведенный матричный элемент в форме (1.154). Затем, учитывая выражение (1.151) и соотношения ортогональности (1.100) для коэффициентов векторного сложения, привлекая вновь формулу (1.154), а также выражения для коэффициентов пересвязки через 9j-символы [формула (1.118)], окончательно получаем

$$\begin{aligned}
& \langle (I'_1 I'_2) I' | (F_{\lambda_1}(x_1) G_{\lambda_2}(x_2))_{(\lambda_1 \lambda_2) \lambda} | (I_1 I_2) I \rangle = (2I'+1)^{1/2} \langle (I'_1 I'_2) I' M' | F_{\lambda_1} G_{\lambda_2} | I_1 I_2 \rangle \\
& = \sum_{I'_1 I''_2} \langle (I_1 I_2) I, (\lambda_1 \lambda_2) \lambda; I' | (I_1 \lambda_1) I'_1, (I_2 \lambda_2) I''_2; I' \times \\
& \quad \times (2I'+1)^{1/2} \langle (I'_1 I'_2) I' M' | F_{\lambda_1} G_{\lambda_2} | I_1 I_2 \rangle_{(I_1 \lambda_1) I'_1, (I_2 \lambda_2) I''_2, I' M'} = \\
& = (2I'+1)^{1/2} \sum_{I'_1 I''_2} \langle (I_1 I_2) I, (\lambda_1 \lambda_2) \lambda; I' | (I_1 \lambda_1) I'_1, (I_2 \lambda_2) I''_2; I' \rangle \times \\
& \quad \times \sum_{\substack{M'_1 M'_2 \\ M''_1 M''_2}} \langle I'_1 M'_1 I'_2 M'_2 | I' M' \rangle \langle I''_1 M''_1 I''_2 M''_2 | I' M' \rangle \times \\
& \quad \times \langle I'_1 M'_1 | F_{\lambda_1} | I_1 \rangle_{(I_1 \lambda_1) I''_1 M''_1} \langle I'_2 M'_2 | G_{\lambda_2} | I_2 \rangle_{(I_2 \lambda_2) I''_2 M''_2} = \\
& = (2I'+1)^{1/2} \langle (I_1 I_2) I, (\lambda_1 \lambda_2) \lambda; I' | (I_1 \lambda_1) I'_1, (I_2 \lambda_2) I'_2; I' \rangle \times \\
& \quad \times \langle I'_1 M'_1 | F_{\lambda_1} | I_1 \rangle_{(I_1 \lambda_1) I'_1 M'_1} \langle I'_2 M'_2 | G_{\lambda_2} | I_2 \rangle_{(I_2 \lambda_2) I'_2 M'_2} = \\
& = ((2\lambda+1)(2I+1)(2I'+1))^{1/2} \begin{Bmatrix} I_1 & I_2 & I \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \\ I'_1 & I'_2 & I' \end{Bmatrix} \langle I'_1 | F_{\lambda_1} | I_1 \rangle \langle I'_2 | G_{\lambda_2} | I_2 \rangle. \quad (1.163)
\end{aligned}$$

В частном случае, когда $\lambda=0$, тензорное произведение операторов (1.162) оказывается скаляром:

$$[F_\lambda(x_1) G_\mu(x_2)]_0 = (2\lambda+1)^{-1/2} \sum_{\mu} (-1)^{\lambda-\mu} F_{\lambda\mu}(x_1) G_{\lambda-\mu}(x_2). \quad (1.164)$$

[При обычном определении скалярного произведения двух неприводимых тензорных операторов в выражении (1.164) опускают множитель $(-1)^{\lambda} (2\lambda + 1)^{-1/2}$.] В случае скалярного произведения $9j$ -символ в выражении (1.163) сводится к $6j$ -символу [см. формулу (1.119)] и мы получаем

$$\begin{aligned} & \langle\langle I'_1 I'_2 \rangle I \rangle \langle F_\lambda(x_1) G_\lambda(x_2)_0 \rangle \langle I_1 I_2 \rangle I \rangle = \\ & = (-1)^{\lambda + I + I_1 + I'_2} (2\lambda + 1)^{-1/2} (2I + 1)^{1/2} \left\{ \begin{matrix} I_1 & I_2 & I \\ I'_2 & I'_1 & \lambda \end{matrix} \right\} \times \\ & \quad \times \langle I'_1 \rangle \langle F_\lambda \rangle \langle I_1 \rangle \langle I'_2 \rangle \langle G_\lambda \rangle \langle I_2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.165)$$

В качестве другого примера применения формулы (1.163) рассмотрим матричный элемент мультипольного оператора F_λ , принимая во внимание вклад от обеих частей связанной системы:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha'_1 \alpha'_2 (I'_1 I'_2) I' || F_\lambda(x_1) + F_\lambda(x_2) || \alpha_1 \alpha_2 (I_1 I_2) I \rangle = ((2I+1)(2I'+1))^{1/2} \times \\ & \times \left\{ (-1)^{I'_1 + I'_2 + I + \lambda} \begin{Bmatrix} I_1 & I_2 & I \\ I' & \lambda & I'_1 \end{Bmatrix} \langle \alpha'_1 I'_1 || F_\lambda || \alpha_1 I_1 \rangle \delta(I_2, I'_2) \delta(\alpha_2, \alpha'_2) + \right. \\ & \left. + (-1)^{I_1 + I_2 + I' + \lambda} \begin{Bmatrix} I_1 & I_2 & I \\ \lambda & I' & I'_2 \end{Bmatrix} \langle \alpha'_2 I'_2 || F_\lambda || \alpha_2 I_2 \rangle \delta(I_1, I'_1) \delta(\alpha_1, \alpha'_1) \right\}. \quad [(1.166)] \end{aligned}$$

Вспомогательные α_1 , α_2 и α'_1 , α'_2 — это дополнительные квантовые числа, которыми определяются состояния двух частей системы.

Преобразование при обращении времени и эрмитово сопряжение

Вообще говоря, приведенный матричный элемент есть комплексное число. Его фаза связана с преобразованием оператора $T_{\lambda\mu}$ при обращении времени. Поскольку при \mathcal{T} -преобразовании переворачивается угловой момент, оператор $T_{\lambda\mu}$ преобразуется в оператор $T_{\lambda-\mu}$. Поэтому удобно рассмотреть комбинированное преобразование \mathcal{RT} , где \mathcal{R} есть оператор вращения $\mathcal{R}_y(\pi)$ (см. § 2, п. 3, а также приложение 2). Под действием оператора \mathcal{RT} рассматриваемые тензорные операторы обычно преобразуются в самих себя, приобретая лишь фазовый множитель:

$$\mathcal{RT}_{\lambda\mu}(\mathcal{RT})^{-1} = c_{\mathcal{T}} T_{\lambda\mu}. \quad (1.167)$$

[В более общем случае оператор $T_{\lambda\mu}$ можно разбить на части, обладающие трансформационными свойствами (1.167).] Из формул (1.146) и (1.140) видно, что преобразование (1.167) эквивалентно преобразованию

$$\mathcal{T}T_{\lambda\mu}\mathcal{T}^{-1} = c_{\mathcal{T}}(-1)^{\lambda+\mu} T_{\lambda-\mu}. \quad (1.168)$$

Фазовый множитель $c_{\mathcal{T}}$ не характеризует внутренних свойств оператора T_{λ} , поскольку он зависит от фазы оператора. Поэтому, приписывая оператору T_{λ} соответствующий фазовый множитель, мы всегда можем добиться того, что будет выполняться равенство $c_{\mathcal{T}} = +1$.

Если предположить, что фазы ядерных состояний определяются соотношением (1.39), то из формул (1.42) и (1.167) получим

$$\langle I_2 || T_{\lambda} || I_1 \rangle^* = c_{\mathcal{T}} \langle I_2 || T_{\lambda} || I_1 \rangle. \quad (1.169)$$

Следовательно, при таком выборе фазы, при котором $c_{\mathcal{T}} = +1$, все матричные элементы оказываются действительными. [Например, в случае электромагнитных мультиполей фазовый множитель $c_{\mathcal{T}} = +1$ получается умножением электрических моментов на i^{λ} , а магнитных моментов — на $i^{\lambda-1}$; формула (3.139).]

Симметрия приведенного матричного элемента относительно обмена местами начального и конечного состояний связана с поведением оператора $T_{\lambda\mu}$ при эрмитовом сопряжении. Эрмитово-сопряженный оператор $T_{\lambda\mu}^H$ «отнимает» от состояния, на которое он действует, угловой момент λ с проекцией μ , и оператор

$$T_{\lambda\mu}^H \equiv (-1)^{\lambda+\mu} (T_{\lambda-\mu})^\dagger \quad (1.170)$$

также представляет собой неприводимый тензорный оператор [что можно формально доказать на основании соотношений (1.146) и (1.131)]. Поэтому из формулы (1.153), учитывая свойства (1.103) и (1.104), получаем

$$\langle I_1 || T_{\lambda}^H || I_2 \rangle = (-1)^{I_1 + \lambda - I_2} \langle I_2 || T_{\lambda} || I_1 \rangle^*. \quad (1.171)$$

Если $T_{\lambda\mu}$ — самосопряженный оператор, т. е. если

$$T_{\lambda\mu} = c_H T_{\lambda\mu}^H, \quad (1.172)$$

то соотношение (1.171) можно записать в виде

$$\langle I_1 || T_{\lambda} || I_2 \rangle = c_H (-1)^{I_1 + \lambda - I_2} \langle I_2 || T_{\lambda} || I_1 \rangle^*. \quad (1.173)$$

Комбинируя соотношения (1.173) и (1.169), получаем, что

$$\langle I_1 \parallel T_\lambda \parallel I_2 \rangle = -c (-1)^{I_1 + \lambda - I_2} \langle I_2 \parallel T_\lambda \parallel I_1 \rangle, \quad (1.174)$$

где

$$c = -c_{\mathcal{T}} c_H. \quad (1.175)$$

Хотя $c_{\mathcal{T}}$ и c_H зависят от фазы оператора $T_{\lambda\mu}$ и могут быть комплексными величинами, множитель c не зависит от общей фазы оператора $T_{\lambda\mu}$ и равен либо $+1$, либо -1 . Фазовый множитель c также характеризует переход от частичного состояния к дырочному для оператора $T_{\lambda\mu}$ [см. формулу (3.13)]. Значения множителя c для одночастичных операторов определены формулой (3.15).

Тензорные свойства операторов рождения

Оператор $a^\dagger(jm)$, который рождает частицу в состоянии с квантовыми числами j и m , представляет собой m -ю составляющую неприводимого тензорного оператора ранга j , что следует непосредственно из определения таких операторов. Методы, основанные на применении операторов рождения и уничтожения, излагаются в гл. 2, приложение 1. Закон преобразования оператора $a^\dagger(jm)$ при обращении времени дается соотношением

$$\mathcal{T} a^\dagger(jm) \mathcal{T}^{-1} = a^\dagger(\bar{j}\bar{m}) = (-1)^{j+m} a^\dagger(j-m), \quad (1.176)$$

в чем нетрудно убедиться, если подействовать, например, оператором \mathcal{T} на состояние $|jm\rangle = a^\dagger(jm)|0\rangle$. Таким образом, фазовый множитель равен единице, а поэтому матричные элементы оператора $a^\dagger(jm)$ действительны в представлении, в котором фаза определяется условием (1.39).

Эрмитово-сопряженным оператором $a^\dagger(jm)$ является оператор уничтожения $a(jm)$, из которого можно построить неприводимый тензорный оператор [см. соотношение (1.170)]

$$b^\dagger(jm) \equiv a(\bar{j}\bar{m}) = (-1)^{j+m} a(j-m). \quad (1.177)$$

Оператор $b^\dagger(jm)$ можно также рассматривать как оператор рождения дырочного состояния (см. гл. 3, § 4). Таким образом, из соотношения (1.171) получаем, что

$$\langle I_2 \parallel a(\bar{j}) \parallel I_1 \rangle = \langle I_2 \parallel b^\dagger(j) \parallel I_1 \rangle = (-1)^{I_2 + j - I_1} \langle I_1 \parallel a^\dagger(j) \parallel I_2 \rangle. \quad (1.178)$$

Из произведений операторов a^\dagger и a можно образовать неприводимые тензорные операторы

$$\begin{aligned} E_{\lambda\mu} &= a^\dagger(j_2) a(\bar{j}_1)_{(j_1 j_2) \lambda\mu} = \\ &= a^\dagger(j_2) b^\dagger(j_1)_{(j_1 j_2) \lambda\mu}. \end{aligned} \quad (1.179)$$

Из таких единичных тензорных операторов можно построить произвольные одночастичные операторы. Так, например, из формул (2.254), (1.153) и (1.104) получаем

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu} &= \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} (2j_2 + 1)^{-1/2} \langle j_1 m_1 \lambda\mu | j_2 m_2 \rangle \langle j_2 \parallel T_\lambda \parallel j_1 \rangle a^\dagger(j_2 m_2) a(j_1 m_1) = \\ &= \sum_{j_1 j_2} (-1)^{j_1 + j_2 - \lambda} (2\lambda + 1)^{-1/2} \langle j_2 \parallel T_\lambda \parallel j_1 \rangle a^\dagger(j_2) a(\bar{j}_1)_{\lambda\mu j_1}. \end{aligned} \quad (1.180)$$

Операторы $c^\dagger(\lambda\mu)$, порождающие кванты колебаний, можно выбрать в соответствии с правилом фаз (1.176):

$$\begin{aligned}\mathcal{T}c^\dagger(\lambda\mu)\mathcal{T}^{-1} &= c^\dagger(\overline{\lambda\mu}) = \\ &= (-1)^{\lambda+\mu} c^\dagger(\lambda-\mu).\end{aligned}\quad (1.181)$$

Поэтому для них также $c_{\mathcal{T}} = 1$ и матричные элементы действительны. Матричные элементы сопряженного оператора $c(\lambda\mu)$ определяются соотношением, аналогичным соотношению (1.178).

6. Преобразование к внутренней координатной системе

При описании многочастичных систем, форма которых отклоняется от сферически симметричной (несферические ядра, молекулы и т. д.), удобно пользоваться внутренней («body-fixed») координатной системой. У преобразования операторов от лабораторной системы координат к внутренней системе имеются некоторые особенности, связанные с тем, что углы ориентации внутренней системы $\omega = \phi, \theta, \psi$ приходится рассматривать как динамические переменные. Состояния ориентации можно характеризовать угловыми переменными или соответствующими угловыми моментами.

К внутренней координатной системе переходят также, когда характеризуют поляризацию спина частицы ее спиральностью.

Составляющие углового момента относительно внутренних осей

Обозначим внутренние оси индексом $k = 1, 2, 3$. Тогда для сферических составляющих углового момента I'_v относительно внутренних осей будем иметь

$$I'_{v=\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (I_1 \pm iI_2), \quad I'_{v=0} = I_3. \quad (1.182)$$

Соотношение между составляющими I'_v и составляющими углового момента в лабораторной системе координат можно записать в следующем виде [см. формулы (1.145) и (1.133)]:

$$\begin{aligned}I_\mu &= \sum_v \mathcal{D}_{\mu v}^1(\omega) I'_v = \sum_v I'_v \mathcal{D}_{\mu v}^1(\omega), \\ I'_v &= \sum_\mu \mathcal{D}_{\mu v}^{1\dagger}(\omega) I_\mu = \sum_\mu I_\mu \mathcal{D}_{\mu v}^{1\dagger}(\omega).\end{aligned}\quad (1.183)$$

Операторы I_μ и I'_v не коммутируют с углами, которыми определяется ориентация, но суммы в формулах (1.183) не зависят от последовательности записи \mathcal{D} -функций и составляющих углового момента \mathbf{I} , что явствует из формул (1.148) при $T_{\lambda\mu} = \mathcal{D}_{\mu\nu}^\lambda$.

Если применить соотношения (1.157) к неприводимым тензорным операторам $\mathcal{D}_{\mu v}^\lambda$ и I_μ , то мы получим коммутационные соотношения, содержащие операторы I'_v :

$$\begin{aligned}[I'_v, I_\mu] &= 0, \\ [I'_v, \mathcal{D}_{\mu v'}^\lambda(\omega)] &= (-1)^v (\lambda(\lambda+1))^{1/2} \langle \lambda v' | -v | \lambda, v' - v \rangle \mathcal{D}_{\mu, v'-v}^\lambda(\omega), \\ [I'_v, I'_{v'}] &= \sqrt{2} \langle v' | -v | 1, v + v' \rangle I'_{v+v'}.\end{aligned}\quad (1.184)$$

Для декартовых составляющих I_k последние два соотношения (1.184) можно записать в виде

$$[I_1, I_2] = -iI_3 \text{ и циклические перестановки,}$$

$$[I_1 \pm iI_2, \mathcal{D}_{\mu\nu}^{\lambda}(\omega)] = (\lambda \pm v)(\lambda \mp v + 1)^{1/2} \mathcal{D}_{\mu, v \mp 1}^{\lambda}(\omega), \quad (1.185)$$

$$[I_3, \mathcal{D}_{\mu\nu}^{\lambda}(\omega)] = v \mathcal{D}_{\mu\nu}^{\lambda}(\omega).$$

Коммутация составляющих I'_v с составляющими I_{μ} является простым следствием того обстоятельства, что составляющие I'_v не зависят от ориентации внешней системы и поэтому скаляры относительно вращений, порождаемых операторами I_{μ} . Коммутационные соотношения, связывающие операторы I'_v друг с другом и с $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{\lambda}$, можно также вывести на основании геометрических соображений. Действительно, мы можем рассматривать операторы I'_v как генераторы бесконечно малых вращений вокруг внутренних осей. Операторы I'_v характеризуют изменение вектора состояния, когда лабораторная система координат поворачивается вокруг осей внутренней системы. С этой точки зрения операторы I'_v несимметричны операторам I_{μ} , так как последние ответственны за вращение лабораторной системы вокруг собственных осей. Но можно взглянуть на операторы вращения несколько иначе, и тогда формально будет восстановлена симметрия этих двух совокупностей составляющих углового момента. Так, действие, оказываемое на вектор состояния вращением лабораторной системы координат, эквивалентно действию обратного вращения внутренней системы, т. е. вращению самой рассматриваемой физической системы. Поэтому операторы I'_v можно рассматривать как генераторы обратных вращений внутренней системы вокруг своих собственных осей.

Теперь можно получить коммутационные соотношения для операторов I'_v так же, как были получены коммутационные соотношения для операторов I_{μ} [см. формулу (1.11)]. Именно:

$$[\mathcal{R}_1^{-1}, \mathcal{R}_2^{-1}] = -(\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2)^{-1} - (\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1)^{-1}, \quad (1.186)$$

откуда следует, что коммутаторы для операторов I'_v изменяют знак на обратный тому, который дают соответствующие коммутаторы для операторов I_{μ} , в согласии с соотношениями (1.185).

Точно так же коммутационные соотношения, связывающие составляющие I'_v и элементы матрицы конечных вращений $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{\lambda}(\omega)$, можно рассматривать на основе соотношения (1.157), если применить его к обратным вращениям относительно внутренней системы координат.

Поскольку составляющие вектора углового момента относительно внутренней системы координат коммутируют с составляющими относительно лабораторной системы, можно выбрать такое представление, которое будет диагонально как по I_3 , так и по I_z и I^2 . Собственные значения оператора I_z обычно обозначают буквой K , так что состояния можно характеризовать квантовыми числами IKM (а также совокупностью дополнительных квантовых чисел α , которые соответствуют операторам, коммутирующим и с $I_{x, z}$, и с $I_{x, y, z}$).

Изменение знака коммутационных соотношений для операторов $I_{1, 2, 3}$ на обратный знаку коммутационных соотношений для операторов $I_{x, y, z}$ необходимо учитывать, если мы хотим выразить операторы $I_{1, 2, 3}$ через матрицы, комплексно-сопряженные матрицам, которые относятся к операторам $I_{x, y, z}$. В стандартном представлении (см. приложение 1, п. 1) при комплексном сопряжении просто знак оператора I_2 становится обратным знаку оператора I_y . Следовательно, собственные значения оператора I_3 (как и оператора I_z) равны

$K = -I, -I + 1, \dots, I$, а операторы, повышающие и понижающие значения магнитных квантовых чисел, меняются местами. Отличные от нуля матричные элементы операторов $I_{1,2,3}$ таковы:

$$\begin{aligned} \langle \alpha I K M | I_3 | \alpha I K M \rangle &= K, \\ \langle \alpha I K \mp 1 M | I_1 \pm i I_2 | \alpha I K M \rangle &= (I \pm K) (I \mp K + 1)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.187)$$

Волновые функции, характеризующие ориентацию внутренней системы координат

Ориентация системы отсчета, жестко связанной с внутренними осями координат, полностью определяется тремя квантовыми числами I, K и M , канонически сопряженными трем углам ориентации $\omega = (\phi, \theta, \psi)$. Закон преобразования от базисной совокупности $|\omega\rangle$ с четко определенной ориентацией к базисной совокупности $|IKM\rangle$ можно получить путем перехода (1.127) к координатной системе \mathcal{K}' с ориентацией ω относительно системы \mathcal{K} . Тогда при $\alpha = K$ получаем

$$|IKM\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_{M'} \mathcal{Z}_{MM'}^I(\omega) |IKM'\rangle_{\mathcal{K}'}. \quad (1.188)$$

Ориентации ω состояния $|\omega\rangle$ относительно системы \mathcal{K} соответствует ориентация $\omega = 0$ относительно системы \mathcal{K}' , т. е.

$$|\omega\rangle_{\mathcal{K}} = |\omega = 0\rangle_{\mathcal{K}'}, \quad (1.189)$$

и скалярным произведением векторов состояния (1.188) и (1.189) определяется волновая функция

$$\Phi_{IKM}(\omega) \equiv \langle \omega | I K M \rangle =$$

$$= \sum_{M'} \mathcal{Z}_{MM'}^I(\omega) \langle \omega = 0 | I K M' \rangle = \mathcal{Z}_{MK}^I(\omega) \langle \omega = 0 | I K M = K \rangle. \quad (1.190)$$

Действительно, величина $\langle \omega = 0 | I K M' \rangle$ равна нулю во всех случаях, кроме случая $M' = K$, так как оператор I_3 совпадает с оператором I_z , когда он действует на состояние $|\omega = 0\rangle$ [см. формулу (1.183)]. Из формулы (1.134) следует, что нормированная волновая функция (1.190) при соответствующем выборе фазы может быть записана как

$$\Phi_{IKM}(\omega) = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \mathcal{Z}_{MK}^I(\omega). \quad (1.191)$$

[Заметим, что состояния $|IKM\rangle$ не являются собственными состояниями оператора $\mathcal{H}\mathcal{T}$, ибо I_3 и I_z меняют свой знак при обращении времени. Данный вопрос рассматривается далее в связи с вопросом о волновых функциях деформированных ядер (гл. 4, § 2) и о состояниях с определенной спиральностью (гл. 3, приложение 1, п. 1).]

Таким образом, \mathcal{Z} -функции можно рассматривать как волновые функции, характеризующие ориентацию динамической системы с определенными квантовыми числами I, M и K . При движении в потенциальной яме бесспиновой частицы (или при относительном движении двух бесспиновых частиц) внутренний угловой момент K должен быть равен нулю, а угловые волновые функции сводятся к хорошо известным шаровым функциям [см. выражения (1.135)].

В то время как I^2 и I_z являются интегралами движения для любой системы, обладающей сферической симметрией, коммутатор гамильтонiana с оператором I_3 зависит от внутренней динамики системы и поэтому стационарные состояния в общем случае не имеют определенного значения K . (Условия, при которых I_3 можно приблизенно считать интегралом движения, рассматриваются в гл. 4.)

Внутренние составляющие неприводимых тензорных операторов

Внутренние составляющие $T'_{\lambda\nu}$ произвольного тензорного оператора $T_{\lambda\mu}$ можно определить посредством соотношений [см. формулу (1.145)]

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu} &= \sum_v \mathcal{D}_{\mu v}^{\lambda}(\omega) T'_{\lambda v}, \\ T'_{\lambda\nu} &= \sum_{\mu} \mathcal{D}_{\nu\mu}^{\lambda\dagger}(\omega) T_{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (1.192)$$

Порядок сомножителей в (1.192) существен, если составляющие тензорного оператора T не коммутируют с \mathcal{D} -функциями. В соотношениях (1.192) для определения внутренних составляющих вместо произведений сомножителей можно было бы взять симметризованные выражения.

Внутренние составляющие $T'_{\lambda\nu}$ являются скалярами относительно вращений лабораторной системы и поэтому коммутируют с I_{μ} . [Сумма по μ в формулах (1.192) представляет собой скалярное произведение двух тензоров [см. формулы (1.131) и (1.164)].

Коммутационные соотношения для составляющих тензорного оператора и величин I'_{ν} зависят от тензорных свойств оператора $T_{\lambda\mu}$ относительно внутренних вращений, а эти свойства, вообще говоря, не связаны с его тензорными свойствами относительно внешних вращений. Поясним сказанное двумя примерами.

Для $T_{\lambda\mu} = \mathcal{D}_{\mu v_0}^{\lambda}(\omega)$ внутренние составляющие являются c -числами [$T'_{\lambda\nu} = \delta(v, v_0)$] и поэтому скаляры относительно и внутренних, и внешних вращений, тогда как $T_{\lambda\mu}$ представляет собой μ -ю составляющую неприводимого тензорного оператора ранга λ относительно внутренних и внешних вращений.

Если $T_{\lambda\mu}$ — скаляр относительно внутренних вращений, как и составляющие I_{μ} вектора углового момента, то внутренние составляющие $T'_{\lambda\nu}$ образуют неприводимый тензор ранга λ относительно внутренних вращений.

7. Преобразование полей

Поле $F(\mathbf{r})$ представляет собой оператор, связанный с точкой пространства \mathbf{r} . При заданном радиусе-векторе \mathbf{r} поле зависит от динамических переменных x системы (таких, как координаты, импульсы и спины частиц, входящих в систему), а поэтому оператор поля можно записать как $F(\mathbf{r}, x)$. (Заметим, что составляющие радиуса-вектора \mathbf{r} являются c -числами, а переменные x — q -числами.)

Если координатную систему из положения \mathcal{K} повернуть в положение \mathcal{K}' , то [по аналогии с выражением (1.4)] получим равенство

$$\mathcal{A}F(\mathbf{r})\mathcal{A}^{-1} = F'(\mathbf{r}), \quad (1.193)$$

где $F'(\mathbf{r})$ — та же самая функция динамических переменных x' (отнесенных к системе \mathcal{K}'), что и функция $F(\mathbf{r})$ от переменных x , т. е.

$$F'(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}, x'). \quad (1.194)$$

Скалярное поле $\rho(\mathbf{r})$ инвариантно относительно вращений координатной системы в том смысле, что его собственное значение в определенной точке пространства одно и то же как для наблюдателя в системе \mathcal{K} , так и для наблюдателя в системе \mathcal{K}' :

$$\rho(\mathbf{r}, x) = \rho(\mathbf{r}', x'), \quad (1.195)$$

или

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho'(\mathbf{r}'), \quad (1.196)$$

где \mathbf{r}' и \mathbf{r} — радиусы-векторы одной и той же точки пространства в системах \mathcal{K}' и \mathcal{K} .

Комбинируя формулы (1.193) и (1.196), получаем соотношение

$$\mathcal{R}^{-1}\rho(\mathbf{r})\mathcal{R} = \rho'(\mathbf{r}'), \quad (1.197)$$

в котором находит формальное выражение скалярный характер поля. [Заметим, что соотношение (1.197) содержит преобразование, обратное преобразованию (1.193). Это соответствует тому, что при вращении координат частицы поле ρ изменяется так же, как при вращении радиуса-вектора \mathbf{r} в обратную сторону.]

Примером скалярного поля может служить плотность электрического заряда, которая для системы точечных зарядов может быть записана в виде

$$\rho_{\text{эл}}(\mathbf{r}) = \sum_k e_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (1.198)$$

где \mathbf{r}_k — радиус-вектор, а e_k — заряд k -й частицы.

Векторное поле такое, как плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, при вращениях преобразуется как вектор, т. е. как тензор ранга $\lambda = 1$. Если использовать сферические составляющие вектора, то вместо равенства (1.196) получим [см. формулу (1.145)] следующее выражение:

$$j_\mu(\mathbf{r}) = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu\mu'}^1(\omega) j'_{\mu'}(\mathbf{r}'). \quad (1.199)$$

Отсюда, пользуясь соотношением (1.193), справедливым для каждой μ -й составляющей, получаем

$$\mathcal{R}^{-1}j_\mu(\mathbf{r})\mathcal{R} = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu\mu'}^1(\omega) j'_{\mu'}(\mathbf{r}'). \quad (1.200)$$

Точно так же можно вывести закон преобразования тензорных полей более высокого ранга.

Поле $a^\dagger(\mathbf{r}, m_s)$, описывающее рождение нуклона (спин $1/2$) в точке \mathbf{r} с поляризацией m_s (см. гл. 2, приложение 1, п. 6), представляет собой спинорное поле ранга $\lambda = 1/2$ и преобразуется в соответствии с выражением

$$\mathcal{R}^{-1}a^\dagger(\mathbf{r}, m_s)\mathcal{R} = \sum_{m'_s} \mathcal{D}_{m_s m'_s}^{1/2}(\omega) a^\dagger(\mathbf{r}', m'_s). \quad (1.201)$$

Поля можно также характеризовать законом их преобразования относительно операции четности:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\rho(\mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} &= \pi_\rho \rho(-\mathbf{r}), \\ \mathcal{P}\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} &= \pi_j \mathbf{j}(-\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.202)$$

где

$$\begin{aligned} \pi_\rho &= \begin{cases} +1 & \text{для скалярного поля,} \\ -1 & \text{для псевдоскалярного поля,} \end{cases} \\ \pi_j &= \begin{cases} +1 & \text{для аксиального векторного поля,} \\ -1 & \text{для полярного векторного поля.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.203)$$

В случае спинорного поля

$$\mathcal{P}a^\dagger(\mathbf{r}, m_s)\mathcal{P}^{-1} = a^\dagger(-\mathbf{r}, m_s), \quad (1.204)$$

что соответствует положительной внутренней четности нуклонов.

8. Взаимодействие полей и разложение по мультипольным моментам

Взаимодействие ядра с «внешними» системами, например с электромагнитным или β -полем, или налетающей частицей в прямых ядерных реакциях, можно представить себе как локальное взаимодействие полей. В потенциал такого взаимодействия в каждой точке пространства входит произведение функции плотности (поля), зависящей от ядерных переменных, на функции плотности, содержащей переменные внешней системы. Разлагая такой потенциал взаимодействия в ряд по неприводимым тензорным операторам, можно характеризовать связь между полями ядерными мультипольными моментами.

Скалярное поле

Потенциал взаимодействия скалярных полей имеет вид

$$H' = \int \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\tau, \quad (1.205)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — скалярная плотность ядра, а $\varphi(\mathbf{r})$ — скалярная функция, зависящая от внешних переменных. Тензорный характер величины (1.205) обнаруживается при разложении $\varphi(\mathbf{r})$ по шаровым функциям

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda, \mu} \Phi_{\lambda, \mu}^{\dagger}(r) Y_{\lambda, \mu}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.206)$$

что дает

$$H' = \sum_{\lambda, \mu} \int \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\lambda, \mu}^{\dagger}(r) Y_{\lambda, \mu}(\hat{\mathbf{r}}) d\tau. \quad (1.207)$$

Каждое слагаемое в формуле (1.207) представляет собой μ -ю составляющую неприводимого тензорного оператора ранга λ относительно ядерных переменных. Это явствует из соотношения (1.197) и формул (1.139) и (1.146). Поскольку H' не изменяет углового момента (является скаляром для всей системы в целом), функция $\Phi_{\lambda, \mu}$ должна быть составляющей (с индексами λ и μ) неприводимого тензорного оператора относительно переменных внешней системы.

Пример взаимодействия скалярных полей — кулоновское взаимодействие между ядром и налетающей частицей. В этом случае $\rho(\mathbf{r})$ — плотность электрического заряда ядра, а $\varphi(\mathbf{r})$ — электромагнитный потенциал, создаваемый частицей. Обозначая через \mathbf{r}_p координаты частицы, а через $Z_p e$ ее заряд, получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Z_p e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} = \sum_{\lambda, \mu} \frac{4\pi Z_p e}{2\lambda + 1} Y_{\lambda, \mu}^*(\hat{\mathbf{r}}_p) Y_{\lambda, \mu}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{cases} r_p^{-\lambda-1} r^\lambda & \text{при } r_p > r, \\ r_p^\lambda r^{-\lambda-1} & \text{при } r_p < r. \end{cases} \quad (1.208)$$

Таким образом, функция $\Phi_{\lambda, \mu}$, определяемая разложением (1.206), выражается в следующем виде:

$$\Phi_{\lambda, \mu}(r) = \frac{4\pi Z_p e}{2\lambda + 1} Y_{\lambda, \mu}(\hat{\mathbf{r}}_p) \begin{cases} r_p^{-\lambda-1} r^\lambda & \text{при } r_p > r, \\ r_p^\lambda r^{-\lambda-1} & \text{при } r_p < r. \end{cases} \quad (1.209)$$

Отсюда видно, что функция $\Phi_{\lambda, \mu}$ действительно есть не что иное, как составляющая неприводимого тензорного оператора, симметрия которого относительно вращений внешней частицы определяется индексами λ и μ .

Зависимость потенциала взаимодействия от ядерных переменных особенно проста, если частица не проникает внутрь ядра (кулоновское возбуждение). В этом случае слагаемое с индексами λ и μ в H' пропорционально электриче-

скому мультипольному моменту

$$\mathcal{M}(E\lambda, \mu) = \int \rho(\mathbf{r}) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) d\tau. \quad (1.210)$$

Если же частица проникает в ядро, то в потенциал взаимодействия входят моменты более общего вида

$$\mathcal{M}(\rho, \lambda\mu) = \int \rho(\mathbf{r}) f_\lambda(r) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) d\tau. \quad (1.211)$$

Здесь $f_\lambda(r)$ — радиальный формфактор, который получается путем интегрирования функции $\varphi_{\lambda\mu}(r)$ по переменным частицы. Таким образом, если можно рассматривать возбуждение ядра в первом приближении по теории возмущений, то формфактор $f_\lambda(r)$ пропорционален матричному элементу от функции $\varphi_{\lambda\mu}(r)$, вычисленному между начальным и конечным состояниями частицы (которые, например, могут быть представлены «искаженными волнами»).

Как и в кулоновском случае, взаимодействие вида (1.205) всегда можно выразить через мультипольные моменты (1.211). При малых r поле $\varphi(\mathbf{r})$ можно разложить по степеням r и, как легко видеть, главный член разложения функции $\varphi_{\lambda\mu}(r)$ пропорционален r^λ [см., например, формулу (1.209)]. Таким образом, при достаточно малых r радиальный формфактор $f_\lambda(r)$ в выражении (1.211) изменяется как r^λ и поэтому часто оказывается удобным нормировать функцию $f_\lambda(r)$, разлагая ее в ряд

$$f_\lambda(r) = r^\lambda + c_\lambda r^{\lambda+2} + \dots \quad (1.212)$$

Вблизи $r = 0$. Скорость сходимости ряда (1.212) зависит от величины углового момента, передаваемого при взаимодействии. Так, например, если внешняя система до и после взаимодействия находится в состоянии с определенным импульсом (приближение плоской волны), то зависимость матричного элемента потенциала поля $\varphi(\mathbf{r})$ от радиуса r дается выражением

$$\langle \mathbf{p}_2 | \varphi(\mathbf{r}) | \mathbf{p}_1 \rangle = \exp\{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}\} \langle \mathbf{p}_2 | \varphi(r=0) | \mathbf{p}_1 \rangle, \quad (1.213)$$

$$\mathbf{q} \equiv \frac{1}{\hbar} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2),$$

что вытекает из трансляционной инвариантности, если мы возьмем преобразование $\mathcal{U}(\mathbf{a} = -\mathbf{r})$ [см. формулу (1.6)]. В формуле (1.213) экспоненту можно разложить в ряд по шаровым функциям. Тогда радиальный формфактор будет пропорционален сферической функции Бесселя $j_\lambda(qr)$.

Векторное поле

Векторное взаимодействие можно записать как

$$\mathbf{H}' = - \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\tau, \quad (1.214)$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ — ядерный вектор плотности (например, плотность электрического тока или спиновая плотность), а $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — вектор поля, создаваемого внешней системой.

Векторные поля можно разложить по шаровым векторам:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa\lambda\mu} A_{\kappa, \lambda\mu}^\dagger(r) \Phi_{\kappa, \lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.215)$$

где

$$\Phi_{\kappa, \lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) = (Y_{\kappa}(\hat{\mathbf{r}}) \mathbf{e})_{(\kappa \neq 1) \lambda\mu} \quad (1.216)$$

— шаровой вектор. Шаровой вектор $\Phi_{\kappa, \lambda\mu}$ представляет собой μ -ю составляющую тензора ранга λ , образованного путем связи тензора Y_{κ} с тензором первого ранга e , каждая из составляющих e_{ν} которого является вектором. Составляющие e_{ν} обладают тем свойством, что для производного вектора V выполняется соотношение

$$V \cdot e_{\nu} = V_{\nu}. \quad (1.217)$$

Таким образом, мы имеем

$$e_{\nu= \pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (e_x \pm ie_y), \quad e_{\nu=0} = e_z, \quad (1.218)$$

где e_x , e_y и e_z — единичные векторы в направлении координатных осей.

Шаровые векторы образуют полный набор ортонормированных функций для описания векторных функций на сфере и могут быть также записаны в форме

$$\Phi_{\kappa, \lambda\mu} = \begin{cases} (\lambda(2\lambda+1))^{-1/2} (r\nabla - \lambda\hat{r}) Y_{\lambda\mu} & \text{при } \kappa = \lambda - 1, \\ -i(\lambda(\lambda+1))^{-1/2} (r \times \nabla) Y_{\lambda\mu} & \text{при } \kappa = \lambda, \\ ((\lambda+1)(2\lambda+1))^{1/2} (r\nabla - (\lambda+1)\hat{r}) Y_{\lambda\mu} & \text{при } \kappa = \lambda + 1, \end{cases} \quad (1.219)$$

где \hat{r} — единичный вектор в направлении вектора r .

Если воспользоваться разложением (1.215), то взаимодействие (1.214) можно записать в виде

$$\begin{aligned} H' &= - \sum_{\kappa\lambda\mu} \int A_{\kappa, \lambda\mu}^{\dagger}(r) \Phi_{\kappa, \lambda\mu}(\hat{r}) \cdot j(r) d\tau = \\ &= - \sum_{\kappa\lambda\mu} \int A_{\kappa, \lambda\mu}^{\dagger}(r) (Y_{\kappa}(\hat{r}) i(r)) d\tau. \end{aligned} \quad (1.220)$$

Каждое слагаемое в выражении (1.220) как функция ядерных переменных представляет собой μ -ю составляющую неприводимого тензорного оператора ранга λ (который получается путем связывания тензора κ -го ранга Y_{κ} с тензором первого ранга j), а как функция переменных внешней системы — составляющую неприводимого тензорного оператора с индексами $\lambda\bar{\mu}$. Зависимости от ядерных переменных можно выразить через мультипольные моменты

$$\mathcal{M}(j, \kappa\lambda\bar{\mu}) = \int f_{\kappa\lambda}(r) \Phi_{\kappa, \lambda\mu}(\hat{r}) \cdot j(r) d\tau = \int f_{\kappa\lambda}(r) (Y_{\kappa}(\hat{r}) i(r)) d\tau, \quad (1.221)$$

где радиальные функции $f_{\kappa\lambda}(r)$ равны матричным элементам величины $A_{\kappa, \lambda\mu}$ для внешней системы. Если $A(r)$ разложить по степеням r , то, как нетрудно видеть, основным членом и в $A_{\kappa, \lambda\mu}(r)$ и в $f_{\kappa\lambda}(r)$ будет член, пропорциональный r^{κ} .

Векторное поле можно также характеризовать его составляющими по осям координатной системы, которая задается направлением r (представление спиральности). Обозначив составляющие вектора e в этой системе через e_{η} , мы имеем

$$e_{\nu} = \sum_{\eta} \mathcal{D}_{\nu\eta}^1(\hat{r}) e_{\eta} \quad (1.222)$$

и, таким образом [см. формулы (1.435) и (1.436)],

$$\begin{aligned} \Phi_{\kappa, \lambda\mu}(\hat{r}) &= \left(\frac{2\kappa+1}{4\pi}\right)^{1/2} \sum_{\eta} \langle \kappa 0 | \eta 0 \rangle \mathcal{D}_{\mu\eta}^{\lambda}(\hat{r}) e_{\eta} = \\ &= \sum_{\eta} \langle \lambda - \eta | \eta 0 \rangle \Psi_{\eta, \lambda\mu}(\hat{r}), \end{aligned} \quad (1.223)$$

где

$$\Psi_{\eta, \lambda\mu}(\hat{r}) = (-1)^{1+\eta} \left(\frac{2\lambda+1}{4\pi} \right)^{1/2} Z_{\mu\eta}^{\lambda}(\hat{r}) e_{\eta}. \quad (1.224)$$

В представлении спиральности функции (1.224) образуют другой полный набор ортонормированных функций для разложения векторных полей. Соответствующие мультипольные моменты $\mathcal{M}(j, \eta\lambda\mu)$ получаются из выражения (1.221) путем замены Φ на Ψ .

Спинорные поля

В случае реакций, протекающих с передачей нуклона, потенциал взаимодействия можно представить в виде скалярного произведения спиноров, содержащего оператор поля $a^{\dagger}(\mathbf{r}, m_s)$, который рождает нуклон в точке \mathbf{r} с поляризацией m_s , и соответствующую спинорную величину, связанную с налетающей и вылетающей частицами. Мультипольное разложение оператора $a^{\dagger}(\mathbf{r}, m_s)$ соответствует преобразованию этого оператора к такому виду, который характеризуется одночастичными квантовыми числами $n\lambda jm$, т. е.

$$a^{\dagger}(\mathbf{r}, m_s) = \sum_{n\lambda jm} \langle n\lambda jm | \mathbf{r}, m_s \rangle a^{\dagger}(n\lambda jm), \quad (1.225)$$

где $a^{\dagger}(n\lambda jm)$ — m -я составляющая неприводимого тензорного оператора ранга $\lambda\mu = jm$ (см. приложение 1, п. 5).

9. Тензорные операторы в изопространстве

Зависимость операторов от изоспина можно характеризовать тензорными свойствами в изопространстве. Ранг тензорного оператора обозначим через τ , а его составляющие будем отмечать индексом μ_{τ} . Тогда тензорный оператор $F_{\tau\mu_{\tau}}$ определяется своими тензорными свойствами относительно вращений в изопространстве, или, иначе говоря, тем своим свойством, что он передает состоянию, на которое он действует, изоспин с квантовыми числами τ и μ_{τ} . Например, оператор, не зависящий от изоспиновых переменных, представляет собой изоскаляр ($\tau = 0$), а оператор, пропорциональный изоспину нуклона, — изовектор ($\tau = 1$).

Приведенный матричный элемент в изопространстве можно определить соотношением, аналогичным соотношению (1.153):

$$\langle T' M'_T | F_{\tau\mu_{\tau}} | TM_T \rangle = \langle TM_T \tau\mu_{\tau} | T' M'_T \rangle (2T'+1)^{-1/2} \langle T' || F_{\tau} || T \rangle. \quad (1.226)$$

[для оператора расширенного обращения времени \mathcal{F} , равного произведению оператора \mathcal{T} на оператор вращения в изопространстве на угол $-\pi$ вокруг оси y (см. формулы (1.243) и (1.244)), по аналогии с соотношением (1.167) имеем

$$\mathcal{F} F_{\lambda\mu_{\tau}} \mathcal{F}^{-1} = c_{\mathcal{F}} (-1)^{\lambda+\mu+\tau+\mu_{\tau}} F_{\lambda-\mu, \tau-\mu_{\tau}}. \quad (1.227)$$

Фазовый множитель $c_{\mathcal{F}}$ дает фазу приведенного матричного элемента:

$$\langle IT' ||| F_{\lambda\tau} ||| IT \rangle^* = c_{\mathcal{F}} \langle IT' ||| F_{\lambda\tau} ||| IT \rangle. \quad (1.228)$$

Мы ввели здесь тройные черточки, чтобы подчеркнуть, что это приведенный матричный элемент как в пространстве, так и в изопространстве.

ПРИЛОЖЕНИЕ

2

ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Об общих закономерностях операции обращения времени говорилось в § 2, п. 3. В данном приложении мы приведем некоторые детали, рассмотрим ряд простых примеров и расширим используемый метод так, чтобы охватить состояния, связанные с процессами рассеяния и распада.

1. Одночастичные состояния

Сначала посмотрим, какое действие операция обращения времени оказывает на волновую функцию $\varphi_A(\mathbf{r})$ частицы без спина. Состояние, возникающее в результате такой операции, т. е. состояние $A = \mathcal{T}A$, характеризуется однавковым с состоянием A распределением пространственной плотности, тогда как движения в нем обращены. Поэтому волновая функция такого состояния получается просто путем комплексного сопряжения функции φ_A , т. е.

$$\varphi_{\bar{A}}(\mathbf{r}) = \varphi_A^*(\mathbf{r}). \quad (1.229)$$

Обратимость движения можно выявить, например, разлагая эти функции по состояниям с определенным импульсом \mathbf{p} :

$$\varphi_A(\mathbf{r}) = \int d^3p c_A(\mathbf{p}) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \right\}, \quad \varphi_{\bar{A}}(\mathbf{r}) = \int d^3p c_{\bar{A}}^*(\mathbf{p}) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \right\}. \quad (1.230)$$

Если мы рассмотрим волновые функции, зависящие от времени, то увидим, что в результате операции \mathcal{T} обращается также и развитие во времени. В самом деле, действуя на функции $\varphi_A(\mathbf{r})$ и $\varphi_{\bar{A}}(\mathbf{r})$ оператором смещения во времени [формула (1.8)], получаем

$$\begin{aligned} \varphi_A(\mathbf{r}, t) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} Ht \right\} \varphi_A(\mathbf{r}, t=0), \\ \varphi_{\bar{A}}(\mathbf{r}, t) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} Ht \right\} \varphi_{\bar{A}}(\mathbf{r}, t=0) = \\ &= \left[\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} Ht \right\} \varphi_A(\mathbf{r}, t=0) \right]^* = \varphi_A^*(\mathbf{r}, -t). \end{aligned} \quad (1.231)$$

При этом предполагается, что гамильтониан H инвариантен относительно обращения времени и, следовательно, представляет собой действительный оператор. [При $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{r}, -i\hbar \nabla_r)$, это предположение означает, что $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{r}, -\mathbf{p})$.]

Волновая функция $\varphi_A(\mathbf{r})$ является составляющей вектора $|A\rangle$ в координатном представлении

$$\varphi_A(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | A \rangle. \quad (1.232)$$

Простота операции обращения времени в этом представлении объясняется инвариантностью состояния $|\mathbf{r}\rangle$

$$\mathcal{T}|\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r}\rangle. \quad (1.233)$$

Таким образом, мы получаем [см. формулу (1.33)] равенство

$$\langle \mathbf{r} | A \rangle = \langle \mathcal{T} \mathbf{r} | \mathcal{T} A \rangle^* = \langle \mathbf{r} | \mathcal{T} A \rangle^*, \quad (1.234)$$

т. е. мы формально вывели соотношение (1.229).

Оператор обращения времени можно записать в виде произведений унитарного оператора $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ на оператор комплексного сопряжения K [см. формулы (1.31) и (1.32)]. Из соотношения (1.234) вытекает, что в координатном представлении унитарный оператор $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ является единичным оператором.

В импульсном представлении результат операции \mathcal{T} можно установить, используя равенство (1.233) и преобразование от функций $|r\rangle$ к функциям $|\mathbf{p}\rangle$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}\rangle &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3r \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right\} |r\rangle, \\ \mathcal{T} |\mathbf{p}\rangle &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3r \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right\} |r\rangle. \end{aligned} \quad (1.235)$$

В данном представлении $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ — оператор, который преобразует \mathbf{p} в $-\mathbf{p}$, иначе говоря, оператор $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ эквивалентен оператору четности \mathcal{P} .

В представлении собственных функций углового момента базисные состояния, определяющиеся радиусом r , орбитальным угловым моментом l и его проекцией m , выбираются так, чтобы выполнялось равенство

$$\langle r | rlm \rangle = i^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.236)$$

Фазовый множитель i^l позволяет представить операцию \mathcal{T} как вращение на угол 180° вокруг оси z ($\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$; $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$). Действительно, из соотношения (1.234) явствует, что

$$\mathcal{T} |rlm\rangle = (-1)^{l+m} |rl-m\rangle = \mathcal{K}^{-1} |rlm\rangle. \quad (1.237)$$

Таким образом, в базисе $|rlm\rangle$ унитарный оператор $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ оказывается равным оператору \mathcal{K}^{-1} . [В формуле (1.237) мы вместо оператора \mathcal{K}^{-1} записали оператор \mathcal{K} , ибо при целых значениях углового момента обе операции идентичны.]

В импульсном пространстве базис $|plm\rangle$ определяется соотношением, подобным соотношению (1.236), но без фазового множителя i^l . Оператор обращения времени переводит состояние $|plm\rangle$ в состояние $(-1)^{l+m} |pl-m\rangle$. Появление множителя $(-1)^l$ объясняется тем, что в результате операций \mathcal{T} направление импульса \mathbf{p} меняется на обратное и, таким образом, мы снова получаем, что $\mathcal{U}_{\mathcal{T}} = \mathcal{K}^{-1}$.

Соотношение $\mathcal{U}_{\mathcal{T}} = \mathcal{K}^{-1}$ также применимо к описанию спина. Обычное представление спиновых матриц Паули

$$\sigma_x = 2s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = 2s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = 2s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.238)$$

характеризуется тем, что матрицы σ_x и σ_z вещественны, а матрица σ_y чисто мнимая, т. е.

$$K(s_x, s_y, s_z) K = (s_x, -s_y, s_z). \quad (1.239)$$

Поскольку оператор \mathcal{T} переворачивает все составляющие вектора \mathbf{s} , мы имеем

$$\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(s_x, s_y, s_z) \mathcal{U}_{\mathcal{T}}^{-1} = (-s_x, s_y, -s_z). \quad (1.240)$$

Это соотношение будет выполняться, если положить

$$\mathcal{U}_{\mathcal{T}} = \mathcal{K}^{-1} = \exp\{i\pi s_y\} = i\sigma_y. \quad (1.241)$$

2. Многочастичные состояния (связанные системы)

Для многочастичных систем можно выбрать базисные состояния, зависящие от радиальных переменных, орбитальных угловых моментов и спинов отдельных частиц. В таком базисе унитарный оператор $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$, связанный с обращением времени, равен оператору вращения \mathcal{A}^{-1} , действующему на все частицы:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{T}} = \mathcal{A}^{-1} = \exp(i\pi I_y), \quad (1.242)$$

Таким образом, операция $\mathcal{A}\mathcal{T}$ представляет собой просто операцию комплексного сопряжения K . На это соотношение не оказывает влияния сложение угловых моментов отдельных частиц, так как в стандартном представлении коэффициенты векторного сложения вещественны (приложение 1, п. 2).

Если гамильтониан H инвариантен относительно операции $\mathcal{A}\mathcal{T}$, то можно выбрать совокупность собственных состояний этого гамильтониана, которые были бы также собственными функциями оператора $\mathcal{A}\mathcal{T} = K$. Поскольку собственное значение оператора K зависит от полной фазы собственного состояния, фаза всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $K = \mathcal{A}^T = +1$. Такое состояние характеризуется вещественными волновыми функциями относительно радиальных переменных. Выбор фазы $\mathcal{A}^T = +1$ ведет к соотношению (1.40), и далее в книге при описании связанных состояний (если это специально не оговаривается) мы будем подразумевать именно такой выбор фаз. Состояния, описывающие процессы столкновения, не обладают, как связанные состояния, инвариантностью относительно обращения времени, и мы рассмотрим их в следующем пункте.

В случае операторов, зависящих от изоспинов, иногда полезно ввести оператор расширенного обращения времени

$$\mathcal{F} = \exp\{i\pi T_y\} \mathcal{T}, \quad (1.243)$$

который не только «переворачивает» скорости и спины, но также и меняет направление изоспинов на обратное (обращение «движения» в изопространстве). При обычном выборе фазы действие оператора \mathcal{F} на состояние определяется соотношением

$$\mathcal{F} |IMTM_T\rangle = (-1)^{I+M+T+M_T} |I-MT-M_T\rangle, \quad (1.244)$$

Выше мы связали преобразование \mathcal{T} с вращательной инвариантностью. В случае \mathcal{T} -инвариантных систем, которые не обладают \mathcal{A} -инвариантностью, можно взять в качестве базисных состояния, являющиеся собственными функциями самого оператора \mathcal{T} , при условии, что число частиц n четно. Такой ортогональный базис можно получить, отправляясь от произвольного состояния $|A\rangle$.

Если это состояние является собственным состоянием оператора \mathcal{T} , то его фазу можно выбрать так, чтобы собственное значение оператора \mathcal{T} было равно $+1$ [см. формулу (1.37)]. Если же состояние $|A\rangle$ не является собственным состоянием оператора \mathcal{T} , то мы построим состояние

$$|A'\rangle = c_A (1 + \mathcal{T}) |A\rangle, \quad (1.245)$$

где нормировочный множитель c_A выбран действительным. Поскольку $\mathcal{T}^2 = +1$ при действии на состояние четного числа частиц n [см. формулу (1.41)], мы имеем $\mathcal{T} |A'\rangle = |A'\rangle$. Затем выбираем состояние $|B\rangle$, ортогональное состоянию $|A'\rangle$, и (если состояние $|B\rangle$ не является собственным состоянием оператора \mathcal{T}) строим состояние

$$|B'\rangle = c_B (1 + \mathcal{T}) |B\rangle, \quad (1.246)$$

которое, как легко видеть, ортогонально состоянию $|A'\rangle$ и удовлетворяет соотношению $\mathcal{T} |B'\rangle = |B'\rangle$. Продолжая таким образом дальше, можно полу-

чить полный ортонормированный базис собственных состояний оператора \mathcal{T} с собственным значением, равным $+1$. В этом базисе матричные элементы оператора, инвариантного относительно операции \mathcal{T} , например гамильтониана, действительны, что следует из соотношения (1.34).

Система нечетного числа фермионов не имеет собственных состояний оператора \mathcal{T} [см. текст после формулы (1.41)], но можно построить ортогональный базис, в котором состояния попарно \mathcal{T} -сопряжены. Так, отправляясь от состояния $|A\rangle$, мы образуем состояние $\mathcal{T}|A\rangle$, ортогональное состоянию $|A\rangle$ в силу соотношения $\mathcal{T}^2 = -1$ [см. формулу (1.41)], т. е.

$$\langle \mathcal{T}A | A \rangle = -\langle A | \mathcal{T}A \rangle^* = \langle \mathcal{T}A | A \rangle = 0. \quad (1.247)$$

Затем мы выбираем состояние $|B\rangle$, ортогональное состоянию $|A\rangle$, а также и состоянию $\mathcal{T}|A\rangle$, и образуем состояние $\mathcal{T}|B\rangle$, которое, как легко видеть, будет также ортогонально состояниям $|A\rangle$ и $|\mathcal{T}A\rangle$. Продолжая таким образом дальше, мы можем построить полный базис.

Такой базис удобно обозначать через $|\alpha\rho\rangle$, где ρ принимает значения $+1$ и -1 , так что

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|\alpha\rho=1\rangle &= -|\alpha\rho=-1\rangle, \\ \mathcal{T}|\alpha\rho=-1\rangle &= +|\alpha\rho=1\rangle. \end{aligned} \quad (1.248)$$

Таким образом, полное векторное пространство рассматривается как произведение α -пространства на ρ -пространство. В ρ -пространстве операторы представляются матрицами размерности 2×2 , которые могут быть выражены в виде линейных комбинаций единичной матрицы ρ_0 и трех матриц Паули $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ [см. формулу (1.238)]. Следовательно, оператор общего вида T можно записать как

$$T = T_0 \rho_0 + i \vec{T} \cdot \rho = T_0 \rho_0 + i \sum_{j=1}^3 T_j \rho_j, \quad (1.249)$$

где T_0 , T_1 , T_2 и T_3 — матрицы в α -пространстве.

Для базисных состояний (1.248) операция обращения времени по аналогии с соотношением (1.241) для обращения времени в спиновом пространстве представляется оператором

$$\mathcal{U}_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\rho_2. \quad (1.250)$$

Таким образом, мы имеем

$$\mathcal{T}\rho_0 \mathcal{T}^{-1} = \rho_0, \quad \mathcal{T}\rho \mathcal{T}^{-1} = -\rho, \quad (1.251)$$

$$\mathcal{T}T \mathcal{T}^{-1} = T_0^* \rho_0 + i \vec{T}^* \cdot \rho. \quad (1.252)$$

Поэтому оператор T , инвариантный относительно операции обращения времени, характеризуется тем, что ему соответствуют вещественные матрицы, т. е.

$$T_0^* = T_0, \quad \vec{T}^* = \vec{T}. \quad (1.253)$$

В формулах (1.252) и (1.253) оператор T^* получается комплексным сопряжением декартовых составляющих T_j .

Поскольку матрицы ρ_0 и ρ эрмитовы, для эрмитова оператора T^\dagger получаем следующие соотношения:

$$T_0^\dagger = T_0, \quad \vec{T}^\dagger = -\vec{T}. \quad (1.254)$$

Оператор вида (1.249), удовлетворяющий условиям (1.253) и (1.254), иногда называют вещественным кватернионным оператором (элементы кватерниона

определяются четырьмя базисными матрицами ρ_0 и $-ip$). Преобразования базисных состояний, сохраняющих форму (1.248), образуют симплектическую группу. (Вопрос о кватернионном представлении и симплектических преобразованиях рассматривается, например, в работе [136].)

3. Процессы столкновения

В то время как стационарные связанные состояния гамильтониана, инвариантного относительно обращения времени, инвариантны относительно операции \mathcal{T} , если не считать изменения ориентации [см. формулу (1.242)], состояния, описывающие процесс рассеяния, неинвариантны относительно этой операции, ибо такой процесс имеет определенное направление во времени. Процесс столкновения характеризуется совокупностью падающих частиц (или ядер), которые могут рассеиваться или рождать новые частицы. Обозначим состояние налетающих частиц через $|A \text{ in}\rangle$, причем квантовые числа A будут указывать импульс, поляризацию и внутреннюю структуру таких частиц. При $t \rightarrow -\infty$ состоянию $|A \text{ in}\rangle$ соответствуют свободно движущиеся падающие частицы. Их можно представить в виде волновых пакетов, размеры которых столь велики, что неопределенность в импульсе и энергии пренебрежимо мала. Если мы анализируем состояние столкновения, пользуясь сферическими волнами, описывающими относительное движение сталкивающихся систем и образующими при столкновении продуктов, то состояние $|A \text{ in}\rangle$ можно также характеризовать асимптотическим граничным условием, которое состоит в том, что сходящиеся волны присутствуют лишь во входных каналах, соответствующих квантовым числам A .

При анализе процесса столкновения нужно учитывать и сопряженную совокупность состояний $|B \text{ out}\rangle$, которые при $t \rightarrow \infty$ переходят в широкие волновые пакеты, связанные с вылетающими продуктами столкновения B . Действительно, регистрация продуктов B соответствует определению составляющих $|B \text{ out}\rangle$ в состоянии $|A \text{ in}\rangle$. Поэтому амплитуда перехода для реакции $A \rightarrow B$ равна

$$\langle B | S | A \rangle = \langle B \text{ out} | A \text{ in} \rangle. \quad (1.255)$$

Этот матричный элемент называют элементом S -матрицы.

Если гамильтониан инвариантен относительно операции обращения времени, то оператор \mathcal{T} преобразует состояние «in» в состояние «out»:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} |A \text{ in}\rangle &= |\bar{A} \text{ out}\rangle, \\ \mathcal{T} |A \text{ out}\rangle &= |\bar{A} \text{ in}\rangle. \end{aligned} \quad (1.256)$$

Здесь \bar{A} получается из A путем «переворачивания» импульсов, а также преобразования спинов и угловых моментов в соответствии с соотношениями, которые были рассмотрены выше [$|\overline{pm_s}\rangle = (-1)^{s+m_s} | -p - m_s \rangle$ и т. д.]. Из соотношений (1.256) получаем

$$\begin{aligned} \langle B | S | A \rangle &= \langle B \text{ out} | A \text{ in} \rangle = \langle \bar{B} \text{ in} | \bar{A} \text{ out} \rangle^* = \\ &= \langle \bar{A} \text{ out} | \bar{B} \text{ in} \rangle = \langle \bar{A} | S | \bar{B} \rangle. \end{aligned} \quad (1.257)$$

В данном соотношении находит выражение инвариантность S -матрицы относительно обращения времени, причем предполагается справедливость теоремы взаимности для сечений прямых и обратных реакций (см. все, что говорится по поводу фиг. 1.4). При упругом рассеянии амплитуды $\langle B | S | A \rangle$ и $\langle A | S | B \rangle$ связаны между собой врачающейся инвариантностью, а поэтому соотношением (1.257) может ограничиваться возможная форма углового распределения и поляризации (см. то, что говорится по поводу фиг. 1.6).

Соотношение между элементами S -матрицы и сечениями рассеяния можно получить, подсчитав число переходов в единицу времени и разделив это число

на поток падающих частиц. Мы приведем эти соотношения для реакций, в которых имеются две падающие и две вылетающие частицы (причем все они могут быть сложными системами).

Двухчастичные состояния можно определить заданием полного импульса \mathbf{P} , полной энергии E в системе центра масс, направления импульса \mathbf{p} одной из частиц в системе центра масс и дополнительных квантовых чисел α , определяющих внутреннюю структуру и поляризацию этих двух частиц. Поскольку при столкновении сохраняются \mathbf{P} и E , элемент S -матрицы можно записать в виде

$$\langle \mathbf{P}_B E_B \hat{\mathbf{p}}_B \beta | S | \mathbf{P}_A E_A \hat{\mathbf{p}}_A \alpha \rangle = \langle \mathbf{p}_B \beta | S | \mathbf{p}_A \alpha \rangle \delta(\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B) \delta(E_A - E_B), \quad (1.258)$$

где множитель перед символами δ можно рассматривать как приведенный матричный элемент S -матрицы.

Предполагая, что двухчастичные состояния нормированы на единицу по полному импульсу, полной энергии и телесному углу, приведенный матричный элемент S -матрицы можно записать в виде

$$\langle \mathbf{p}_B \beta | S | \mathbf{p}_A \alpha \rangle = \delta(\hat{\mathbf{p}}_A - \hat{\mathbf{p}}_B) \delta(\alpha, \beta) + \frac{i}{2\pi\hbar} (p_A p_B)^{1/2} f(\mathbf{p}_A \alpha \rightarrow \mathbf{p}_B \beta). \quad (1.259)$$

Здесь первое слагаемое есть значение матричного элемента в отсутствие взаимодействия, а второе — амплитуда перехода. Можно считать, что этим отношением определяется амплитуда рассеяния f .

Число переходов в единицу времени и в единичном телесном угле дается выражением

$$\frac{d^2 N(\mathbf{p}_A \alpha \rightarrow \mathbf{p}_B \beta)}{dt d\Omega} = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle \mathbf{p}_B \beta | S | \mathbf{p}_A \alpha \rangle - \delta(\hat{\mathbf{p}}_A - \hat{\mathbf{p}}_B) \delta(\alpha, \beta)|^2, \quad (1.260)$$

и поскольку поток падающих частиц, который связан с волнами, нормированными на единичную энергию, равен

$$(pv)_A = \frac{p_A^2}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.261)$$

дифференциальное сечение можно записать в виде

$$d\sigma(\mathbf{p}_A \alpha \rightarrow \mathbf{p}_B \beta) = \frac{p_B}{p_A} |f(\mathbf{p}_A \alpha \rightarrow \mathbf{p}_B \beta)|^2 d\Omega. \quad (1.262)$$

В представлении спиральности мы используем волновые функции, нормированные на полный телесный угол, равный $8\pi^2$, согласно условию (3.275). Амплитуда же рассеяния f по-прежнему определяется соотношением (1.259), и поэтому ее нужно поделить на 2π . Поток (1.261) также делится на эту величину, и поэтому выражение (1.262) для сечения содержит дополнительный множитель 2π . Кроме того, элемент телесного угла теперь равен $2\pi \sin \theta d\theta d\phi$.

Амплитуда рассеяния, определяющаяся соотношением (1.259), симметрична относительно импульсов \mathbf{p}_A и \mathbf{p}_B . Поэтому при обращении времени из (1.257) вытекает, что

$$f(\mathbf{p}_A \alpha \rightarrow \mathbf{p}_B \beta) = f(\overline{\mathbf{p}_B \beta} \rightarrow \overline{\mathbf{p}_A \alpha}). \quad (1.263)$$

4. Процессы распада

Распад $A \rightarrow B$ нестабильной частицы или ядерного состояния A на две или на большее число частиц, находящихся в состоянии B , операцией обращения времени связан с обратным процессом $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$, в результате которого из падающих частиц, находящихся в состоянии \bar{B} , образуется система \bar{A} .

Если времена жизни распадающегося состояния велико по сравнению с периодами внутреннего движения, то распад можно представить как возмущение,

вызываемое малой частью H' полного гамильтониана. Например, H' может представлять ту часть взаимодействия, которая нарушает симметрию, ответственную за стабильность состояния A (слабое или электромагнитное взаимодействие и т. д.). В первом порядке по H' распад определяется матричным элементом $\langle B \text{ out} | H' | A \rangle$, где конечное состояние $|B \text{ out}\rangle$ характеризует движение продуктов распада в отсутствие возмущения H' .

Если полный гамильтониан (с учетом H') инвариантен относительно обращения времени, то мы имеем [см. формулы (1.34) и (1.256)]

$$\langle B \text{ out} | H' | A \rangle = \langle A | H' | \bar{B} \text{ in} \rangle. \quad (1.264)$$

Этим соотношением матричный элемент процесса распада связывается с матричным элементом процесса образования.

Пользуясь матрицей рассеяния для каналов B , характеризующих конечные состояния процесса распада, можно получить еще одно соотношение, связывающее матричные элементы процессов образования и распада.

Рассеяние состоит из резонансной части, связанной с образованием промежуточного состояния A , и нерезонансной, т. е. рассеяния в отсутствие взаимодействия H' . Поскольку мы рассматриваем эффекты в первом порядке по H' , резонансной частью рассеяния можно пренебречь. Чтобы вычислить матричный элемент образования, мы возьмем полный набор выходных состояний $|B \text{ out}\rangle$ и воспользуемся выражением (1.255) для амплитуды рассеяния:

$$\begin{aligned} \langle A | H' | B \text{ in} \rangle &= \sum_{B'} \langle A | H' | B' \text{ out} \rangle \langle B' \text{ out} | B \text{ in} \rangle = \\ &= \sum_B \langle B' | S_0 | B \rangle \langle B' \text{ out} | H' | A \rangle^*, \end{aligned} \quad (1.265)$$

где S_0 — матрица рассеяния в отсутствие H' . Таким образом, комбинируя выражения (1.264) и (1.265), получаем ограничение на амплитуду распада как следствие \mathcal{T} -инвариантности.

Эти соотношения принимают особенно простой вид, если взять набор состояний рассеяния B , являющихся собственными состояниями S_0 -матрицы. Тогда мы можем написать

$$\langle B' | S_0 | B \rangle = \delta(B, B') \exp\{2i\delta_B\}, \quad (1.266)$$

где фаза рассеяния δ_B в канале B — вещественное число. [В том, что S_0 -матрицу можно преобразовать к диагональному виду (1.266) с вещественными фазами δ_B , отражается унитарность S_0 -матрицы, т. е. свойство полноты и ортопорядковности каждого из наборов состояний $|B \text{ in}\rangle$ и $|B \text{ out}\rangle$.] Таким образом, из формул (1.264) и (1.266) получаем

$$\langle B \text{ out} | H' | A \rangle = \exp\{2i\delta_B\} \langle \bar{B} \text{ in} | H' | \bar{A} \rangle^*. \quad (1.267)$$

[В каналах B и \bar{B} фаза одна и та же, что является следствием соотношений (1.257).] Фазы рассеяния δ_B в (1.267) можно определить экспериментально по данным о перезонансном рассеянии. Если известен характер взаимодействия в конечном состоянии, то фазы рассеяния можно вычислить теоретически. Например, фазы рассеяния при β -распаде обусловлены действием кулоновского поля на движение испускаемого электрона.

В случае γ -распада (или β -распада легких ядер) конечное состояние B можно приближенно рассматривать как свободное движение частиц ($\delta_B \ll 1$). Тогда $|B \text{ in}\rangle \approx |B \text{ out}\rangle$ и из формулы (1.267) следует, что амплитуда распада для процесса $A \rightarrow B$ (B характеризует направление разлета и поляризацию продуктов распада) есть величина комплексно-сопряженная амплитуде процесса $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$. В частности, скорости обоих распадов равны.

Приведенные выше соотношения можно также рассмотреть на основе анализа резонансного рассеяния (см. гл. 3, приложение 6).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПЕРЕСТАНОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ

То, что все пуклоны одинаковы, означает, что гамильтониан ядра инвариантен относительно перестановок P_{jk} , в результате которых меняются местами все координаты двух частиц j и k . Поэтому операторы такой транспозиции представляют собой интегралы движения, а собственные состояния гамильтониана можно классифицировать, пользуясь квантовыми числами, характеризующими перестановочную симметрию. Статистика Ферми, которой подчиняются пуклоны, допускает только полностью антисимметричные физические состояния, а потому в отсутствие дополнительных вырождений или инвариантностей следствия перестановочной симметрии (хотя и очень далеко идущие) оказываются довольно тривиальными¹⁾.

Во многих задачах ядерной физики гамильтониан не только инвариантен относительно перестановок, затрагивающих всю совокупность координат, но и приближенно инвариантен относительно перестановок лишь части координат пуклонов.

Так, например, зарядовая независимость ядерных сил означает, что (пренебрегая эффектами слабого и электромагнитного взаимодействий) гамильтониан можно записать в таком виде, в котором он не содержал бы явной зависимости от изобарических переменных пуклонов. Очевидно, что такой гамильтониан инвариантен относительно перестановок P_{jk}^T только изобарических переменных пуклонов, а поэтому также инвариантен относительно перестановок пространственно-спиновых переменных, т. е. перестановок $P_{jk}^r P_{jk}^\sigma$. В некоторых случаях представляют интерес гамильтонианы, инвариантные относительно каждой из перестановок P_{jk}^T , P_{jk}^σ и P_{jk}^r в отдельности.

Наличие у гамильтониана таких дополнительных типов симметрии означает, что его собственным состояниям можно присвоить дополнительные квантовые числа, характеризующие симметрию состояний относительно операторов перестановки, которые действуют только на часть координат пуклонов.

Сказанное нами выше относится к частицам, подчиняющимся статистике Ферми, но весьма близкие проблемы возникают и в случае системы бозонов. В теории ядра системы бозонов встречаются, например, при анализе возбуждений на основе представлений о вибрационных квантатах (см., в частности, гл. 6) или при анализе оболочечной структуры гармонического осциллятора на основе представления об осцилляционных квантатах (см. гл. 7, приложение 3). Волновая функция такой системы должна быть полностью симметричной относительно всех координат каждого бозона, но если гамильтониан приближенно инвариантен относительно перестановок лишь части координат бозонов, оказываются существенными квантовые числа дополнительных типов симметрии.

Транспозиции P_{jk} можно перемежать, получая при этом перестановки P общего вида. В случае системы n частиц возможны $n!$ различных перестановок P , а совокупность всех этих перестановок образует группу S_n , называемую симметрической группой степени n . Таким образом, систематическое рассмотрение перестановочной симметрии функций, зависящих от n переменных, сводится к изучению представлений группы S_n . В данном приложении (п. 1) мы введем общие понятия, необходимые для рассмотрения перестановочной симмет-

¹⁾ Анализ антисимметричных многочастичных состояний с применением операторов рождения проводится в гл. 2, приложение 1.

рии, получим результаты для простых случаев $n = 2$ и $n = 3$ и приведем результаты, полученные в случае произвольного числа частиц n . Эти результаты можно получить путем прямого обобщения элементарных методов, пригодных в случаях $n = 2$ и $n = 3$. Но это весьма трудоемкая работа, и здесь очень выгодно воспользоваться мощным математическим аппаратом теории групп¹⁾ для демонстрации общих результатов, относящихся к n -частичной волновой функции.

Во всех рассмотренных выше примерах переменные частицы в одном или более пространствах принимали только конечное число дискретных значений (так, например, изобарическая переменная нуклона может принимать только два значения, для квантов колебаний гармонического осциллятора возможны только три направления и т. д.). В этих случаях волновые функции удобно строить из соответствующим образом симметризованных произведений одиночастичных состояний (см. п. 2).

Связь между различными возможными произведениями одночастичных состояний, принадлежащих данной перестановочной симметрии, можно изучать с точки зрения унитарных преобразований между различными состояниями одночастичного базиса. Следовательно, такие преобразования тесно связаны с перестановочной симметрией, и мы осветим некоторые стороны этой связи в последнем пункте данного приложения.

1. Квантовые числа симметрии (разбиения)

Случай $n=2$

Любую функцию координат двух частиц можно представить в виде суммы симметричной функции $\Phi_s(1,2)$ и антисимметричной функции $\Phi_a(1,2)$. Применим к этим функциям оператор перестановки P_{12} , меняющий местами координаты частицы 1 и частицы 2. Мы получим

$$\begin{aligned} P_{12}\Phi_s(1,2) &= \Phi_s(1,2), \\ P_{12}\Phi_a(1,2) &= -\Phi_a(1,2). \end{aligned} \quad (1.268)$$

Таким образом, под действием оператора P_{12} функции Φ_s и Φ_a переходят в самих себя. Другими словами, эти функции преобразуются по одномерному представлению симметрической группы S_2 .

Чтобы обозначения были более систематическими и пригодными при любом числе частиц n , каждое представление группы S_2 можно связать со схемами Юнга, состоящими из 2 ($=n$) клеток. Двумя клетками, расположенными в одной строке, , обозначают симметричные функции, а двумя клетками, расположеными одна над другой, , обозначают антисимметричные функции.

Схемы Юнга можно также задать, указав число клеток в каждой строке, а именно: $s = \boxed{\square\square} = [2]$, тогда как $a = \boxed{\square\square\square\square} = [11]$. Символы [2] и [11] называются разбиениями числа $n = 2$.

¹⁾ Систематическое изложение этих вопросов с применением методов теории групп можно найти, например, в книгах [24, 217, 298].

Случай $n=3$

Существуют шесть (т. е. 3!) операций перестановок, которые могут быть применимы к трехчастичной волновой функции, а именно: единичный оператор, три транспозиции и две циклические перестановки всех координат, т. е.

$$\begin{array}{ll} e & e\Phi(1, 2, 3) = \Phi(1, 2, 3), \\ P_{12}, \quad P_{13}, \quad P_{23} & P_{12}\Phi(1, 2, 3) = \Phi(2, 1, 3) \text{ и т. д.,} \\ P_{123}, \quad P_{132} & P_{123}\Phi(1, 2, 3) = \Phi(2, 3, 1) \text{ и т. д.} \end{array} \quad (1.269)$$

При произвольном числе n различают четные и нечетные перестановки в зависимости от того, из какого (четного или нечетного) числа транспозиций они могут быть образованы. Так, например, при $n=3$ перестановки e , P_{123} , P_{132} четные, а перестановки P_{12} , P_{23} , P_{13} нечетные. Если через p обозначить число транспозиций в данной перестановке P , то для четных перестановок $(-1)^p = +1$, а для нечетных $(-1)^p = -1$.

Функции, зависящие от координат трех частиц, по действию на них операторов (1.269) делятся на три типа с разной степенью симметрии.

а) Полностью симметрические функции, для которых

$$P_{jk}\Phi_s(1, 2, 3) = \Phi_s(1, 2, 3) \quad (1.270)$$

при любой транспозиции P_{jk} . Такие функции инвариантны также относительно циклических перестановок P_{123} и P_{132} , которые можно записать в виде произведения двух транспозиций. Симметрическое представление группы S_3 обозначается схемой Юнга с тремя клетками, расположенными в одной строке,

 , или разбиением [3]. Проекционный оператор \mathcal{J} , выделяющий симметрическую часть произвольной трехчастичной функции, записывается как

$$\mathcal{J} = \frac{1}{6} \sum_P P, \quad (1.271)$$

где суммирование проводится по всем шести перестановкам группы S_3 . Нормировка оператора (1.271) выбрана так, что $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$.

б) Полностью антисимметрические функции, для которых

$$P_{jk}\Phi_a(1, 2, 3) = -\Phi_a(1, 2, 3) \quad (1.272)$$

при любой транспозиции P_{jk} . Эти функции инвариантны относительно циклических перестановок. Антисимметрическое представление группы S_3 обозначается

 схемой Юнга с тремя клетками, расположенными в одном столбце,  , или

разбиением [111]. Проекционный оператор \mathcal{A} , выделяющий антисимметрическую часть произвольной трехчастичной функции, записывается как

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6} \sum_P (-1)^p P, \quad (1.273)$$

где $(-1)^p$ — четность перестановки, определенная выше.

в) Функции смешанной симметрии. Для этих функций характерно то, что под действием как оператора симметризации \mathcal{J} , так и оператора антисимметризации \mathcal{A} они обращаются в нуль.

Примером функций смешанной симметрии могут служить функции

$$\Phi^{(1)} = x_1 + x_2 - 2x_3, \quad \Phi^{(2)} = x_1 - x_2, \quad (1.274)$$

где x_1 — произвольная переменная, связанная с частицей 1. Заметим, что $\Phi^{(2)} = -\frac{1}{3}(1 + 2P_{13})\Phi^{(1)}$ и поэтому функции $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ переходят друг в друга под действием соответствующих линейных комбинаций операторов перестановок. Кроме того, как нетрудно убедиться, результат действия любого из шести операторов перестановок (1.269) на функции $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ можно снова представить в виде линейной комбинации этих же функций $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$. Следовательно, функции (1.274) преобразуются по двумерному представлению группы S_3 .

Вместо базисных функций (1.274) можно, конечно, взять любую пару независимых линейных комбинаций функций $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$. Выбор функций вида (1.274) обусловлен тем, что они обладают определенной симметрией относительно координат частиц 1 и 2 (т. е. $P_{12}\Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}$ и $P_{12}\Phi^{(2)} = -\Phi^{(2)}$).

Функции (1.274) — это частный случай более общего класса функций, обладающих смешанной симметрией, а именно функций

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_2(x_3) + \varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\varphi_2(x_3) - 2\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_1(x_3)), \\ \Phi^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_2(x_3) - \varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2)\varphi_2(x_3)). \end{aligned} \quad (1.275)$$

При $\varphi_1(x) = x$ и $\varphi_2(x) = \text{const}$ эти функции с точностью до нормировки сводятся к функциям (1.274). Если предположить, что величины $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — ортогональные и нормированные одночастичные функции, то тогда и функции Φ , определяющиеся равенствами (1.275), также будут образовывать ортонормированную совокупность. Операторы перестановок, действующих в этом пространстве, представляются матрицами

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ P_{13} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_{132} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ P_{123} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.276)$$

которые, как легко видеть, унитарны, а также вследствие определенного выбора фаз функций (1.275) вещественны и ортогональны. Эквивалентные унитарные представления получаются путем унитарных преобразований совокупности базисных функций (1.275).

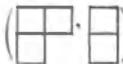
Данное двумерное представление, обладающее смешанной симметрией, неприводимо. Представление называется неприводимым, если полное векторное пространство, натянутое на базисные состояния, нельзя разложить на подпространства, которые были бы инвариантны относительно всех перестановок группы. Если бы такие подпространства существовали, то путем линейного преобразования базисных состояний матрицы, представляющие операторы перестановок, можно было бы привести к квазидиагональному виду, в котором отличные от нуля матричные элементы располагались бы в квадратных блоках

вдоль диагонали, а все матричные элементы вне этих блоков были бы равны нулю. Таким образом, представление такого типа может быть сведено к сумме представлений меньшей размерности (каждое из которых может быть приводимым или неприводимым). В частном случае двумерного представления приводимость означала бы, что все матрицы могут быть одновременно диагонализованы, но ясно, что для матриц (1.276) это невозможно. Заметим, что неприводимость представления группы перестановок можно проверить, рассматривая только транспозиции между частицами с соседними номерами (транспозиции P_{12} и P_{23} для группы S_3). Такие перестановки называются генераторами группы S_3 , ибо все перестановки можно представить в виде произведения транспозиций частиц с соседними номерами.

Представление группы S_3 смешанной симметрии обозначается схемой Юнга, имеющей вид , или разбиением [21]. Данную совокупность базис-

ных состояний (1.275) можно далее характеризовать симметрией этих функций относительно перестановок, производимых с первыми двумя частицами. Так, функция $\Phi^{(1)}$ относится к симметричному, а функция $\Phi^{(2)}$ — к антисимметричному представлению группы S_2 , которая является подгруппой группы S_3 и состоит из перестановок e и P_{12} . Поэтому функцию $\Phi^{(1)}$ можно обозначать

двумя схемами Юнга , а функцию $\Phi^{(2)}$ — схемами Юнга

. Вместо этого функции обозначают таблицами Юнга, т. е.

такими схемами Юнга с числами 1, 2 и 3 в клетках, что при удалении клетки с числом 3 получается схема Юнга, соответствующая представлению группы S_2 , к которому относится данная функция. Так, функция $\Phi^{(1)}$ обозначается

таблицей , а функция $\Phi^{(2)}$ — таблицей .

В случае одномерных представлений это таблица  для Φ_e и таблица  для Φ_a , но функ-

ции полностью определены своими схемами Юнга, ибо полностью симметричные (или антисимметричные) функции обязательно симметричны (или антисимметричны) относительно частиц 1 и 2.

Кроме определения симметрии типа [21], которое было дано выше, можно дать и другие эквивалентные определения. Например, функцию типа [21] можно характеризовать следующими двумя свойствами: а) эта функция обращается в нуль, если на нее подействовать оператором симметризации \mathcal{J} , б) можно найти такие линейные комбинации операторов перестановок, которые при действии на эту функцию дают состояние, симметричное относительно частиц 1 и 2 (пример — функция $\Phi^{(1)}$). Другое определение функции типа [21] таково: эта функция обращается в нуль при действии на нее оператора антисимметризации \mathcal{A} , а при действии на нее определенной линейной комбинации операторов перестановок может дать функцию, антисимметричную относительно частиц 1 и 2 (пример — функция $\Phi^{(2)}$).

Такие альтернативные определения оказываются возможными в силу следующих обстоятельств. Если рассматриваемую функцию нельзя сделать симметричной относительно всех трех координат, то это значит, что данная

функция неявно содержит по крайней мере одну антисимметричную связь. Действуя на функцию соответствующей линейной комбинацией операторов перестановок, ее можно привести к форме, в которой антисимметрия будет явной. Точно так же, если невозможно антисимметризовать функцию относительно всех трех координат, это должно означать, что в волновой функции неявно имеется симметричная связь.

Два проекционных оператора, выделяющие из функции общего вида часть, обладающую симметрией типа [21], имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \frac{1}{6} [2e + 2P_{12} - P_{13} - P_{23} - P_{123} - P_{132}], \\ \mathcal{P}_2 &= \frac{1}{6} [2e - 2P_{12} + P_{13} + P_{23} - P_{123} - P_{132}],\end{aligned}\quad (1.277)$$

где оператор \mathcal{P}_1 выделяет функции типа $\Phi^{(1)}$, а оператор \mathcal{P}_2 — функции типа $\Phi^{(2)}$.

Найденными выше тремя типами симметрии исчерпываются все возможности при $n=3$, в чем нетрудно убедиться, если учесть, что

$$e = \mathcal{A} + \mathcal{S} + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2. \quad (1.278)$$

Таким образом, любую трехчастичную функцию можно разбить на части, каждая из которых будет обладать одним из трех типов симметрии, рассмотренных выше, причем никаких других частей не будет. Основываясь на результатах формальной теории групп, мы могли бы немедленно заключить, что наше перечисление неприводимых представлений группы S_3 полное, исходя из того, что число неприводимых представлений группы равно числу ее классов (3 для группы S_3), или из того, что сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна числу элементов группы (6 для группы S_3). Доказательство этих теорем можно найти, например, в книге Хамермана [217].

Таким образом, мы обнаружили наличие простого соотношения между типами перестановочной симметрии, существующими при $n=2$ и $n=3$.

а) Схемы Юнга, обозначающие неприводимые представления группы S_3 , получаются добавлением одной клетки к схемам Юнга группы S_2 , причем длина новой строки (столбца) не должна превышать длины предыдущих строк (столбцов).

б) Размерность представления группы S_3 равна числу способов, которыми данное представление можно получить из представлений группы S_2 при указанном выше условии. Так, представление [3] можно получить только из представления [2], а представление [111] — только из представления [11]. Поэтому опять одномерные. Представление [21] можно получить из представлений [2] и [11], и, следовательно, оно двумерное.

в) В случае многомерного представления S_3 можно построить такой базис (стандартный базис), чтобы каждый член его преобразовывался неприводимо относительно группы S_2 , состоящей из перестановок, производимых над первыми двумя частицами.

В теории групп показывается, что путем простого обобщения сказанного можно найти соотношение между неприводимыми представлениями группы S_n и S_{n-1} при любом n . Таким образом, типы симметрии функций, зависящих от координат n частиц, можно образовывать путем последовательного добавления частиц начиная с $n=2$ и $n=3$.

Разбиение при любом числе n

В случае функций, зависящих от координат n частиц, «квантовые числа» типа симметрии, обозначающие неприводимые представления группы S_n , записываются в виде $[f_1, f_2, \dots, f_k]$ (иногда просто в виде $[f]$), где f_i — целые числа, такие, что $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_k$ и $f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$. Совокупность чисел

$[f]$ представляет собой разбиение числа n на k частей и может быть также представлена в виде схемы Юнга из n клеток, причем f_1 клеток расположены в первой строке, f_2 клеток — во второй строке и т. д.

Функция, характеризуемая разбиением $[f]$, обладает следующими свойствами симметрии:

а) Если на нее подействовать соответствующей линейной комбинацией операторов перестановок, то получается функция, симметричная относительно координат первых f_1 частиц (т. е. инвариантная относительно любой перестановки этих координат) и в то же время симметричная относительно координат следующих f_2 частиц и т. д.

б) Никакая линейная комбинация операторов перестановок, действуя на данную функцию, не может дать функции, симметричной относительно первых $f_1 + 1$ частиц. Более того, если эта функция была симметризована относительно первых f_1 координат, то ее невозможно одновременно симметризовать относительно следующих $f_2 + 1$ частиц и т. д.

Как и в случае трех частиц, здесь также имеются эквивалентные альтернативные определения свойств симметрии, вытекающие из того, что возможности симметризации, указанные в пункте «а», ограничивают возможную степень антисимметризации. Точно так же ограничения на степень симметризации, указанные в пункте «б», могут вытекать только из наличия антисимметричных связей между некоторыми частицами.

Эти связи можно выявить, если вместе с данным разбиением $[f]$ взять сопряженное разбиение \bar{f} , которое получается заменой в схеме Юнга строк столбцами. Таким образом, числа $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots$ соответствуют длине столбцов исходной схемы Юнга. Теперь мы можем дать альтернативное определение типа симметрии $[f]$, если в первом определении слово «симметричный» заменим словом «антисимметричный», а числа f_1, f_2, \dots заменим числами $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots$. Таким образом, мы характеризуем тип симметрии максимальной величиной антисимметризации, допускаемой данным разбиением $[f]$.

Различные характеристики типов симметрии, т. е. неприводимых представлений группы S_n , соответствуют характеристикам, данным выше при $n = 3$, и могут быть проверены с помощью четырехчастичных функций, которые приводятся в табл. 1.6. В частности, эти определения означают, что функции типа $[n] (= [f_1 = n, f_2 = f_3 = \dots = 0])$ полностью симметричны относительно всех координат. Точно так же условие «б» означает, что функции с симметрией $[111 \dots 1]$ полностью антисимметричны относительно всех n координат. Все другие разбиения соответствуют функциям смешанной симметрии.

Размерность $h[f]$ данного представления $[f]$ группы S_n равна числу способов, которыми данное представление можно получить, если последовательно добавлять частицы начиная с $n = 1$. В то же время это число равно числу различных таблиц Юнга, которые можно составить при условии, что на каждом этапе заполнения схемы Юнга числами (например, после заполнения первых m чисел) получаются таблицы, соответствующие разрешенным схемам Юнга (т. е. $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_k$). Это условие можно также выразить, сказав, что мы учитываем только такие таблицы, в которых числа возрастают слева направо в каждой строке и сверху вниз в каждом столбце (см., например, табл. 1.6). Анализ процедуры такого подсчета таблиц дает общую формулу размерности

$$h[f] \equiv h(S_n; [f_1 f_2 \dots f_k]) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (f_i + k - i)!} \prod_{i < j \leq k} (f_i - f_j + j - i). \quad (1.279)$$

(Размерность $h[f]$ равна следу матрицы, соответствующей единичному элементу группы в представлении $[f]$, и поэтому может быть получена из общей формулы для характеров неприводимых представлений группы перестановок [217].)

В группе S_n всего только два одномерных представления: полностью симметричное ($P = 1$) и полностью антисимметричное ($P = (-1)^n$). Базисные

функции многомерных представлений различаются по индексу r . Всякую конкретную совокупность базисных состояний можно определить ее трансформационными свойствами относительно подгруппы $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_2$ перестановок, производимых над первыми $n - 1, n - 2, \dots, 2$ частицами.

Любая совокупность n -частичных функций, преобразующаяся по неприводимому представлению $[f]$ группы S_n , преобразуется также по представлениям подгруппы $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_2$, хотя, вообще говоря, эти представления производимы. Но путем соответствующих линейных преобразований данных базисных состояний эти представления можно привести относительно подгруппы $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_2$ в таком образе получить базис, каждый член которого будет относиться к неприводимым представлениям полной цепочки подгрупп. Такой базис определяет стандартное представление операторов перестановки. Функции, относящиеся к этому базису, можно обозначить совокупностью разбиений или схем Юнга, характеризующих преобразование этих функций относительно подгруппы $S_n, S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_2$, или же таблицами Юнга, в которых числа от 1 до n записаны в клетках схемы Юнга, соответствующей разбиению $[f]$. Эти числа распределяются по клеткам так, чтобы при удалении клеток, содержащих числа $m + 1, m + 2, \dots, n$, получалась схема Юнга для соответствующего представления группы S_m .

На практике часто оказывается, что нет никакой необходимости выписывать в явном виде все функции указанной симметрии $[f] r$ или матрицы, представляющие операторы перестановок, точно так же как обычно предпочитают не выписывать явно матрицы углового момента или же процедуры сложения векторов. Тем не менее ниже мы дадим операторы перестановок в стандартном представлении [471], так как это позволит читателю лучше уяснить обозначения и физический смысл таких операторов и соответствующих базисных состояний.

Рассмотрим сначала в стандартном представлении матрицы транспозиций частиц с соседними номерами $P_{k-1, k}$. Диагональные матричные элементы транспозиции $P_{k-1, k}$ таковы:

$$\langle [f] r | P_{k-1, k} | [f] r \rangle = [\tau_{k-1, k}(r)]^{-1}. \quad (1.280)$$

Целое число $\tau_{k-1, k}(r)$ называется «аксиальным расстоянием» между числами k и $k - 1$ в таблице r и определяется по формуле

$$\tau_{k-1, k}(r) \equiv \text{col}(k) - \text{col}(k - 1) - [\text{row}(k) - \text{row}(k - 1)],$$

где $\text{col}(k)$ и $\text{row}(k)$ — номера столбца и строки k -й частицы в таблице r . Так, например, $\tau_{k-1, k}(r) = +1$, если k и $k - 1$ находятся в одной строке, и $\tau_{k-1, k}(r) = -1$, если они находятся в одном столбце. Недиагональные матричные элементы транспозиции $P_{k-1, k}$ между состояниями r и s не равны нулю только в том случае, если таблица s получается из таблицы r путем перемены мест чисел k и $k - 1$. Тогда

$$\langle [f] s | P_{k-1, k} | [f] r \rangle = \{1 - [\tau_{k-1, k}(r)]^{-2}\}^{1/2}. \quad (1.281)$$

Любую перестановку P можно записать в виде произведения транспозиций элементов с соседними номерами, а поэтому соответствующая ей матрица может быть выражена через матрицы транспозиций. Но поскольку в стандартном представлении транспозициям $P_{k-1, k}$ соответствуют вещественные ортогональные матрицы, все матрицы перестановок обладают этим же свойством, т. е.

$$P^{-1} = P^\dagger = \tilde{P}, \quad (1.282)$$

где тильдой отмечена транспонированная матрица.

Легко видеть, что функции, характеризуемые таблицами r , в которых $k - 1$ и k — соседние числа (т. е. находятся в одной строке или в одном столбце), представляют собой собственные функции оператора $P_{k-1, k}$ с собственными значениями $+1$ или -1 , иначе говоря, функции, симметричные или антисимметричные относительно этих частиц. Для разбиения $[f] = [21]$ стандартным является представление, которое было получено выше [см. матрицы (1.276)].

Неприводимость представления $[f]$ означает, что матрицы перестановок подчиняются соотношениям ортогональности, аналогичным соответствующим соотношениям для \mathcal{D} -функций группы вращений. Поэтому по аналогии с соотношением (1.134) имеем

$$\frac{h([f^{(1)}])}{n!} \sum_P \langle [f^{(1)}] r_1 | P | [f^{(1)}] s_1 \rangle \langle [f^{(2)}] r_2 | P | [f^{(2)}] s_2 \rangle = \\ = \delta([f^{(1)}], [f^{(2)}]) \delta(r_1, r_2) \delta(s_1, s_2). \quad (1.283)$$

Здесь множитель $n!$ «соответствует» множителю $8\pi^2$ в соотношении (1.134) и равен числу элементов группы [в случае непрерывной группы суммирование по элементам группы заменяется интегрированием по группе, а множитель $8\pi^2$ равен полному «объему», получаемому при интегрировании по всем углам Эйлера (ϕ, θ, ψ)]. Множитель $h([f^{(1)}])$ равен размерности представления $[f^{(1)}]$ и соответствует множителю $(2I+1)$ в соотношении (1.134).

Из выражения (1.283) следует, что на основе матриц перестановки можно построить проекционные операторы, которые из произвольной функции выделяли бы часть, обладающую симметрией типа $[f]r$ относительно операторов перестановки (ср. с аналогичной конструкцией проекционных операторов в группе вращений, которая используется, например, в гл. 5, § 5). Такой проекционный оператор можно записать в виде

$$\mathcal{P}([f]r) = \frac{h([f])}{n!} \sum_P \langle [f]r | P | [f]r \rangle P. \quad (1.284)$$

Действительно, из соотношения (1.283) следует, что если оператором \mathcal{P} подействовать на произвольную функцию

$$|\alpha\rangle = \sum_{[f^{(1)}]r_1} \langle [f^{(1)}]r_1 | \alpha \rangle |[f^{(1)}]r_1\rangle, \quad (1.285)$$

то получим

$$\mathcal{P}([f]r) |\alpha\rangle = \langle [f]r | \alpha \rangle |[f]r\rangle. \quad (1.286)$$

Нетрудно убедиться в том, что операторы, даваемые выражениями (1.277), представляют собой частный случай этого общего проекционного оператора $\mathcal{P}([f]r)$. Проекционные операторы подчиняются условию полноты

$$\sum_{[f]r} \mathcal{P}([f]r) = e. \quad (1.286a)$$

Можно также определить обобщенный проекционный оператор (оператор Юнга)

$$\mathcal{P}([f]r \rightarrow s) = \frac{h([f])}{n!} \sum_P \langle [f]s | P | [f]r \rangle P, \quad (1.287)$$

который из произвольной функции выделяет часть, обладающую симметрией типа $[f]r$, а затем преобразует ее в состояние с симметрией $[f]s$. Таким образом, для произвольной функции $|\alpha\rangle$ мы имеем [формула (1.285)]

$$\mathcal{P}([f]r \rightarrow s) |\alpha\rangle = \langle [f]r | \alpha \rangle |[f]s\rangle. \quad (1.288)$$

Среднее значение оператора транспозиции

Разность числа симметрических пар n_s и числа антисимметрических пар n_a в волновой функции с перестановочной симметрией $[f]$ дается формулой

$$n_s - n_a = \langle [f]r | \sum_{j < h} P_{jh} | [f]r \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^h f_i (f_i - 2i + 1). \quad (1.289)$$

Эта величина пропорциональна следу матриц, представляющих класс транспозиций, и ее можно найти по общей формуле для характеров неприводимых представлений симметрической группы S_n [217].

Формулу (1.289) можно также получить, если приписать симметрические связи всем частицам одной и той же строки и антисимметрические связи частицам одного и того же столбца таблицы Юнга, а пары частиц, находящихся в разных строках и столбцах, считать наполовину симметрическими и наполовину антисимметрическими [и поэтому не вносящими вклада в (1.289)]. Хотя такая интерпретация таблиц Юнга дает правильный результат (1.289) и часто бывает полезна при рассмотрении различных типов симметрии, тем не менее такое описание функции типа $\langle [f] r |$ не совсем правильно, что явствует непосредственно из приведенных выше примеров [см. формулу (1.274) и табл. 1.6]. Действительно, для любых многомерных представлений невозможно построить состояние, которое было бы одновременно симметрическим относительно частиц в одной и той же строке и антисимметрическим относительно частиц в одном и том же столбце.

Сопряженные представления

Симметрия, характеризующаяся сопряженным разбиением $\tilde{[f]}$, соответствует взаимному обмену симметрических и антисимметрических связей в симметрии типа $[f]$. Из предыдущего ясно, что размерность представления $\tilde{[f]}$ равна размерности представления $[f]$ и что с таблицей r , относящейся к разбиению $[f]$, можно связать сопряженную таблицу \tilde{r} , относящуюся к разбиению $\tilde{[f]}$, в которой симметрические и антисимметрические связи меняются местами.

В данном выше выражении для операторов проектирования состояний с определенной перестановочной симметрией, а также матриц перестановок в стандартном представлении выбор фазы недиагональных матричных элементов (1.281) был произвольным. Но для того, чтобы сопряженные схемы точно соответствовали взаимному обмену симметрических и антисимметрических пар, необходимо брать один знак для представления $[f]$ и противоположный при определении состояний сопряженного представления $\tilde{[f]}$. При таком выборе фаз для любой перестановки P немедленно следует, что

$$\langle [f] r | P | [f] s \rangle = (-1)^p \langle \tilde{[f]} \tilde{r} | P | \tilde{[f]} \tilde{s} \rangle, \quad (1.290)$$

где $(-1)^p = +1$ для четных и $(-1)^p = -1$ для нечетных перестановок.

Полностью антисимметрические состояния, образованные с помощью внутреннего произведения

Если пространственную волновую функцию, обладающую симметрией $[f^{(1)}]$, умножить на спин-изospиновую волновую функцию с симметрией $[f^{(2)}]$, то их произведение будет, вообще говоря, содержать много различных симметрий относительно всех координат частиц одновременно. Такое произведение функций, относящихся к различным координатам одних и тех же частиц, называется внутренним произведением (и записывается как $[f^{(1)}] \times [f^{(2)}]$). Таблица умножения для внутренних произведений трехчастичных функций приведена в табл. 1.7. Более полное перечисление типов перестановочной симметрии, возникающих при внутреннем произведении, можно найти, например, в работе [217] (таблицы см. в работе [249]).

В случае групп врашений соответствующие правила для внутреннего произведения представлений позволяют перечислить все возможные значения полного углового момента I , представляющего собой комбинацию орбитального L и спинового S угловых моментов. В этом случае каждое представление $I = (L + S, \dots, |L - S|)$ появляется только один раз, тогда как в произведении $[f^{(1)}] \times [f^{(2)}]$ представление $[f]$ может встречаться несколько раз.

Составляя определенные линейные комбинации внутренних произведений различных состояний, принадлежащих разбиениям $[f^{(1)}]$ и $[f^{(2)}]$, можно получить функции, которые преобразуются по определенному типу симметрии $[f]$, а именно

$$\Psi(x_h \xi_h; [f] r) = \sum_{r_1, r_2} \Phi(x_h; [f^{(1)}] r_1) X(\xi_h; [f^{(2)}] r_2) \langle [f^{(1)}] r_1, [f^{(2)}] r_2 | [f] r \rangle. \quad (1.291)$$

В этом выражении $\Phi(x_h)$ и $X(\xi_h)$ — разные части n -частичной волновой функции (относящиеся первая к пространственным и вторая к спин-изоспиновым переменным, или к пространственно-спиновым и изоспиновым переменным и т. д.), а коэффициенты связи $\langle [f^{(1)}] r_1, [f^{(2)}] r_2 | [f] r \rangle$ играют ту же роль, что и коэффициенты векторного сложения при сложении угловых моментов. (В тех случаях, когда в произведении $[f^{(1)}] \times [f^{(2)}]$ представление $[f]$ встречается несколько раз, состояние Ψ , а также коэффициенты связи следует, помимо $[f]$ и r , характеризовать дополнительными квантовыми числами.)

Особый интерес представляют полностью антисимметричные волновые функции, для которых $[f] = [111 \dots 1]$. В таких функциях связи, симметричные относительно переменных x , должны сочетаться со связями, антисимметричными относительно переменных ξ , а поэтому эти состояния нужно строить в виде произведения сопряженных представлений. Коэффициенты связи имеют простой вид:

$$\langle [f^{(1)}] r_1, [f^{(2)}] r_2 | 1 1 1 1 \dots 1 \rangle = \delta([f^{(2)}], [\tilde{f}^{(1)}]) \delta(r_2, \tilde{r}_1) (h[f'])^{-1/2}, \quad (1.292)$$

где нормировочная постоянная $h[f']$ равна размерности представления $[f^{(1)}]$. [В формуле (1.292) принято, что фаза состояний $[f^{(2)}] r$ соответствует фазе сопряженного представления (1.290), а не стандартного представления.] Простой вид этих коэффициентов связи объясняется тем, что представление $[f] = [111 \dots 1]$ одномерное. Столь же простой вид имеют коэффициенты векторного сложения, когда состояния с L и $S (=L)$ связываются в состояние с полным $J=0$.

В случае частиц, подчиняющихся статистике Бозе, состояния должны быть полностью симметричными $[n]$ относительно всех координат частиц. Чтобы получить такие совершенно симметрические состояния, мы должны связывать состояния с одинаковой симметрией $[f^{(1)}] r_1 = [f^{(2)}] r_2$, и коэффициент связи при этом снова оказывается постоянным, т. е.

$$\langle [f^{(1)}] r_1, [f^{(2)}] r_2 | [n] \rangle = \delta([f^{(1)}], [f^{(2)}]) \delta(r_1, r_2) (h[f'])^{-1/2}, \quad (1.293)$$

Внешнее произведение волновых функций с определенной симметрией

Иногда волновые функции первых n_1 частиц, обладающие перестановочной симметрией $[f^{(1)}]$, требуется умножить на волновые функции следующих n_2 частиц, обладающих симметрией $[f^{(2)}]$. При этом необходимо определить различные виды симметрии $[f]$ построенной таким образом системы $n = n_1 + n_2$ частиц. Подобные произведения, в которые входят функции координат разных частиц, называются внешними произведениями (и записываются как $[f^{(1)}] \otimes [f^{(2)}]$).

Довольно легко определить типы симметрии, которые получаются при добавлении к системе частиц с заданной симметрией $[f^{(1)}]$ одной частицы ($[f^{(1)}] = [1]$). Произведение $[f^{(1)}] \otimes [1]$ содержит такие схемы Юнга, которые можно получить добавлением одной клетки к схеме Юнга, соответствующей симметрии $[f^{(1)}]$, всеми возможными способами. При вычислении размерностей различных представлений мы, не оговаривая специально, уже пользовались этим обстоятельством.

В общем случае при переможении представлений необходимо учитывать, что функции, относящиеся к разбиению $[f^{(2)}]$, обладают определенной перестановочной симметрией относительно n_2 частиц и потому их нельзя добавлять к функциям, относящимся к разбиению $[f^{(1)}]$, любыми возможными способами. Данное ограничение можно сформулировать в виде следующих общих правил [298], позволяющих перечислить все типы симметрии, возможные в произведении $[f^{(1)}] \otimes [f^{(2)}]$:

а) Обозначим клетки первой строки схемы Юнга разбиения $[f^{(2)}]$ через α , второй строки — через β и т. д.

б) Будем добавлять клетки α к схеме Юнга разбиения $[f^{(1)}]$ всеми возможными способами, следя за тем, чтобы все получающиеся при этом схемы Юнга были правильными (т. е. чтобы число клеток во второй строке было не больше числа клеток в первой строке и т. д.) и чтобы какие-нибудь две клетки α не оказались на одной вертикали.

в) Будем добавлять к полученным схемам Юнга всеми возможными способами клетки β , соблюдая условия пункта «б», а также дополнительное условие, заключающееся в том, что при чтении справа налево, начиная с верхнего правого угла, число клеток β на каждом этапе чтения не должно превышать числа клеток α .

г) То же самое проделаем с клетками γ , δ и т. д.

При таком перечислении число появлений той или иной схемы Юнга равно числу появлений соответствующего представления в произведении $[f^{(1)}] \otimes [f^{(2)}]$.

Этими правилами мы воспользуемся ниже при систематизации типов симметрии произведений волновых функций (см. приложение 3, п. 2, и табл. 1.8 и 1.10). В общем говоря, разложением внешнего произведения $[f^{(1)}] \otimes [f^{(2)}]$ определяется ряд Клебша—Гордана для унитарных групп (см. приложение 3, п. 3).

2. Классификация волновых функций по типам симметрии в пространстве чисел заполнения

Произведения одиночастичных состояний

Все сказанное нами выше относительно типов перестановочной симметрии относится и к волновым функциям совершающей общей структуры. Во многих задачах квантовой физики встречаются волновые функции, которые выражаются в виде произведения одиночастичных состояний или в виде линейной комбинации таких произведений. К одиночастичным состояниям относятся, например, орбитальные состояния отдельной частицы в некотором поле, волновые функции в изопространстве, характеризующие ориентацию изоспинов отдельных частиц, или состояния индивидуальных квантов, из которых могут быть построены вибрационные волновые функции. В большинстве случаев одиночастичный спектр вырожден [например, мы имеем $(2l+1)$ -кратное вырождение орбитальных функций, принадлежащих конфигурации l^n , или 2-кратное вырождение состояний изобарического спина при отсутствии кулоновского взаимодействия].

В связи с наличием такого вырождения возникают новые проблемы в классификации волновых функций по типам симметрии. Именно, каким образом, имея все возможные n -частичные волновые функции, образованные путем переможения g -кратно вырожденных n одиночастичных функций, построить такие их линейные комбинации, которые обладали бы определенным типом симметрии $[f]$? Сколько имеется различных состояний данной симметрии и какие дополнительные квантовые числа можно ввести для обозначения этих различных состояний? Как можно дополнительно характеризовать связь между состояниями, обладающими одинаковой перестановочной симметрией?

Перестановочная симметрия произведений одночастичных состояний

Взяв удобный базис для одночастичных состояний, мы припишем этим состояниям квантовые числа m_a , где $a = 1, 2, \dots, g$.

Прежде всего заметим, что волновая функция системы, в которой все частицы занимают одно и то же одночастичное состояние m_a , очевидно, полностью симметрична $[f] = [n]$. Состояния с антисимметричными парами могут быть построены только из конфигураций, содержащих различные одночастичные состояния. Таким образом, как хорошо известно, в случае полностью антисимметричной волновой функции $[f] = [11 \dots 1]$ необходимо n различных значений квантового числа m . Для каждой такой конфигурации имеется одно полностью антисимметричное состояние, а именно определитель Слэтера (см. гл. 2, приложение 1). В более общем случае возможность антисимметризации относительно частиц одного и того же столбца схемы Юнга означает, что мы можем построить волновые функции с симметрией $[f_1 \dots f_k]$ только из конфигураций, в которых имеется по крайней мере k разных значений квантового числа m .

Например, изоспиновая волновая функция строится из одночастичных функций со степенью вырождения $g = 2 (m_t = \pm 1/2)$. Это значит, что в схеме Юнга для такого состояния могут быть самое большое две строки $[f] = [f_1 f_2]$, а поскольку пространственно-спиновая функция должна обладать сопряженной симметрией, на ее квантовые числа разбиения $f'_i (= \bar{f}_i)$ накладывается условие $f'_i \leq 2$. Точно так же у одночастичных спин-изоспиновых функций имеются четыре квантовых состояния и поэтому перестановочная симметрия этой части волновой функции ограничена разбиениями типа $[f_1 f_2 f_3 f_4]$, так что на числа разбиения для пространственной волновой функции накладывается условие $f'_i (= \bar{f}_i) \leq 4$.

Полный перечень типов перестановочной симметрии, свойственных конфигурации $\mathcal{C}(m) \equiv (m_1)^{n_1} (m_2)^{n_2} \dots (m_g)^{n_g}$, можно получить, если заметить, что такое состояние строится в виде внешнего произведения состояний типа $(m_a)^{n_a}$, полностью симметричных относительно n_a частиц. Таким образом, полностью перечислить все типы симметрии можно, анализируя типы симметрии, содержащиеся в прямом произведении

$$[n_1] \otimes [n_2] \otimes \dots \otimes [n_g].$$

Из данных выше правил построения таких внешних произведений можно видеть, что число появлений симметрии $[f]$ в данном произведении равно числу различных таблиц Юнга, которые можно построить, записывая значения квантовых чисел m в клетках схемы Юнга, соответствующей симметрии $[f]$. Заданной симметрией групп $[n_a]$ на возможные таблицы Юнга накладываются следующие ограничения:

а) Ни в одном столбце не должны появляться дважды одинаковые значения квантовых чисел m .

б) Значения квантовых чисел m должны идти в порядке увеличения (сначала все m_1 , затем m_2 и т. д.), если их читать слева направо в любой строке и сверху вниз в любом столбце.

Иллюстрации этих правил даны в табл. 1.8 для конфигурации типа p^3 , а также в табл. 1.10 для внешних произведений одночастичных функций в спин-изоспиновом пространстве.

Таблицы, которые получаются при заполнении схемы Юнга квантовыми числами m , согласно приведенным выше правилам, можно использовать для обозначения различных состояний, обладающих одинаковой перестановочной симметрией. Такие таблицы мы будем обозначать индексом ρ_m , чтобы подчеркнуть отличие этих таблиц от таблиц r , содержащих числа частиц $k = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, полной совокупностью квантовых чисел, которые опре-

деляют состояния, образованные из произведений одночастичных волновых функций, будет совокупность $[f] r p_m$ (см. примеры в табл. 1.8).

Те состояния, которые соответствуют таблице ρ_m , содержащей во всех клетках первой строки значения m_1 , во всех клетках второй строки значения m_2 и т. д., называются состояниями максимального веса $\rho_m^{\text{макс}}$. Такие состояния можно также рассматривать как состояния, полностью выстроенные в m -пространстве, так как они содержат максимальное число частиц в состоянии m_1 , максимальное число частиц, которые могут быть размещены в состоянии m_2 , и т. д.

Индекс p_m эквивалентен совокупности $1/2g(g-1)$ квантовых чисел, которые можно выбрать, например, в виде совокупности разбиений $[f'_1, \dots, f'_{g-1}]$, $[f''_1, \dots, f''_{g-2}]$, \dots , полученных путем последовательного удаления клеток с числами m_g, m_{g-1}, \dots из таблицы ρ_m . Полное число состояний p_m (с фиксированными $[f] r$) можно вычислить по формуле [217]

$$h(U_g; [f]) = \prod_{1 \leq i < j \leq g} \frac{f_i - i - f_j + j}{j - i}. \quad (1.294)$$

Здесь U_g указывает на то, что совокупность состояний p_m преобразуется по неприводимому представлению группы унитарных преобразований размерности g (см. п. 3 ниже). Таким образом, выражение (1.294) дает размерность представления $[f]$ группы U_g . Упомянутая выше совокупность $1/2g(g-1)$ квантовых чисел характеризует отдельные состояния ρ_m , принадлежащие представлению $[f]$ группы U_g , в зависимости от их трансформационных свойств по отношению к цепочке подгрупп U_{g-1}, U_{g-2} и т. д.

Чтобы построить состояние $[f] r p_m$, связанное с конфигурацией $\mathcal{C}(m)$, возьмем волновую функцию Φ_0 , равную произведению одночастичных волновых функций:

$$\Phi_0 = \prod_{k=1}^n \varphi_{m(k)}(x_k), \quad (1.295)$$

где $m(k)$ принимает значение m_1 при n_1 различных значениях индекса k и т. д. Можно, например, выбрать следующую совокупность значений $m(k)$:

$$m(k) = \begin{cases} m_1 & \text{при } k=1, 2, \dots, n_1, \\ m_2 & \text{при } k=n_1+1, \dots, n_1+n_2, \\ \vdots & \vdots \\ m_g & \text{при } k=n-n_g+1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.296)$$

Состояние (1.295) формально можно рассматривать как функцию переменных x_k и $m(k)$. При такой интерпретации функция Φ_0 будет полностью инвариантной относительно перестановок индексов k одновременно у переменных x и переменных m , т. е.

$$P^m P^x \Phi_0 = P^x P^m \Phi_0 = \Phi_0. \quad (1.297)$$

Искомое состояние строится из линейных комбинаций функций $P^x \Phi_0 = (P^m)^{-1} \Phi_0$ и характеризуется симметрией $[f] r_x$ относительно перестановки только переменных x и симметрией $[f] r_m$ относительно перестановки только переменных m . Таблицы с числами r_m , соответствующие заданной таблице квантовых чисел ρ_m , получаются заменой квантовых чисел m числами k , согласно

принятому условию (1.296). Например,

$$\rho_m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline m_1 & m_2 & m_3 \\ \hline m_2 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{cases} r_m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \\ r'_m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \end{cases}$$

В общем случае, как и в рассмотренном примере, одной и той же таблице r_m соответствуют несколько разных таблиц ρ_m . Но при разном выборе условий (1.296) мы получаем одно и то же состояние, так как функция Φ_0 инвариантна относительно перестановок P^m , затрагивающих только те значения k , которые принадлежат одинаковым m_α .

Функцию Φ_0 можно записать в виде суммы членов с определенной симметрией $[f] r$ относительно перестановок P^x . Поскольку функция Φ_0 полностью симметрична, если ее рассматривать как функцию переменных x_k и $m(k)$, отдельные члены будут обладать той же симметрией $[f] r$ и относительно перестановок P^m [см. формулу (1.293)]. Таким образом, состояние с симметрией $[f] r_x r_m$ можно получить, действуя на Φ_0 оператором проектирования в x_k -пространстве вида (1.287), который из состояния $[f] r_m$ выделяет состояние $[f] r_x$, или же оператором проектирования в $m(k)$ -пространстве, который выделяет из состояния $[f] r_x$ состояние $[f] r_m$, т. е.

$$\Phi(x_k; [f] r_x \rho_m) = \begin{cases} \text{const} \sum_P \langle r_x | P | r_m \rangle P^x \Phi_0, \\ \text{const} \sum_P \langle r_m | P | r_x \rangle P^m \Phi_0. \end{cases} \quad (1.298)$$

(Поскольку таблицей r определяется исходная схема Юнга $[f]$, мы в матричных элементах операторов P для краткости опустим индекс $[f]$.) Эквивалентность двух форм равенства (1.298) следует из формулы (1.297) и из соотношения

$$\langle r_x | P | r_m \rangle = \langle r_m | P^{-1} | r_x \rangle, \quad (1.299)$$

которым выражается то обстоятельство, что матрица перестановок P унитарна и действительна [см. формулу (1.282)].

Можно продолжить построение волновых функций, полностью антисимметричных (или симметричных) относительно переменных x и ξ отдельных частиц, комбинируя [как в формулах (1.291) и (1.292)] выражение (1.298) с соответствующими функциями

$$X(\xi_h; [\tilde{f}] \tilde{r}_\xi \tilde{\rho}_\mu) = \text{const} \sum_P \langle \tilde{r}_\xi | P | \tilde{r}_\mu \rangle P^\xi \prod_{k=1}^n \chi_{\mu(k)}(\xi_h), \quad (1.300)$$

которые в ξ -пространстве обладают сопряженной симметрией. Тогда на основании равенства (1.292) получаем, что

$$\begin{aligned} \Psi(x_h \xi_h; [f] \rho_m \theta_\mu)_{\text{антисим}} &= (h[f])^{-1/2} \sum_{r_x} \Phi(x_k; [f] r_x \rho_m) X(\xi_h; [\tilde{f}] \tilde{r}_\xi \tilde{\rho}_\mu) = \\ &= \text{const} \sum_P \langle r_m | P | r_\mu \rangle P^m \sum_{P_2} (-1)^{p_2} P_2^x P_2^\xi \prod_{k=1}^n \varphi_{m(k)}(x_h) \gamma_{\mu(k)}(\xi_h). \end{aligned} \quad (1.301)$$

Здесь мы воспользовались соотношением [см. формулы (1.290) и (1.299)]

$$\begin{aligned} \sum_{r_x} \langle r_x | P_1 | r_m \rangle \langle \tilde{r}_x | P_2 | \tilde{\rho}_\mu \rangle &= (-1)^{p_2} \langle r_\mu | P_2^{-1} P_1 | r_m \rangle = \\ &= (-1)^{p_2} \langle r_m | P_1^{-1} P_2 | r_\mu \rangle \end{aligned} \quad (1.302)$$

и заменили суммирование по P_1 и P_2 эквивалентным суммированием по $P \equiv P_1^{-1}P_2$ и P_2 . Кроме того, P_1^x мы представили в виде $P_2^x (P^{-1})^x = P_2^x P^m = P^m P_2^x$.

Легко видеть, что в равенстве (1.301) сумма по P_2 представляет собой определитель Слэтера относительно одночастичных функций с квантовыми числами $m(k)$ и $\mu(k)$. Поэтому равенство (1.301) можно записать через операторы рождения фермионов для этих одночастичных состояний (см. гл. 2, приложение 1):

$$\begin{aligned} |\{f\} \rho_m \rho_\mu\rangle_{\text{антисим}} &= \text{const} \sum_P \langle r_m | P | r_\mu \rangle P^m \prod_{k=1}^n a^\dagger(m(k), \mu(k)) | 0 \rangle = \\ &= \text{const} \sum_P \langle \tilde{r}_\mu | P | \tilde{r}_m \rangle P^\mu \prod_{k=1}^n a^\dagger(m(k), \mu(k)) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (1.303)$$

где $|0\rangle$ — вакуумное состояние. Вторая форма выражения (1.303) следует из формулы (1.290) и из того, что при действии на полностью антисимметрическое состояние оператор $P^m P^\mu$ оказывается равным $(-1)^{\mu}$.

Угловые моменты состояний с определенной симметрией $[f]$

Вообще говоря, в g -кратном вырождении одночастичных состояний отражается какая-то симметрия одночастичного гамильтониана. Поэтому состояниям, описываемым произведениями n одночастичных волновых функций или их линейными комбинациями, можно присвоить квантовые числа, равные собственным значениям соответствующих операторов дополнительной симметрии. Например, если одночастичный гамильтониан сферически-симметричен, то многочастичные состояния можно характеризовать полным угловым моментом. Весьма полезно уметь перечислить возможные значения угловых моментов для состояний с любой заданной симметрией $[f]$. У такой задачи нет простого и общего решения, но при любой заданной конфигурации всегда можно получить ответ путем элементарного расчета в m -представлении (m — магнитное квантовое число).

В качестве простейшего примера рассмотрим вопрос о возможных значениях полного изоспина T для волновых функций с определенной перестановочной симметрией. В этом случае $g = 2$ ($m_1 = +1/2$ и $m_2 = -1/2$), а перестановочная симметрия характеризуется разбиением, состоящим самое большое из двух чисел $[f_1 f_2]$. Рассмотрим сначала полностью симметрические состояния $[n]$. При заданном значении M , равном сумме квантовых чисел m отдельных частиц, имеется только одна конфигурация $(+1/2)^{n/2+M} (-1/2)^{n/2-M}$ и каждому значению M при изменении от $M = n/2$ до $M = -n/2$ соответствует единственная таблица m в согласии с приведенными выше правилами. Таким образом, в случае симметричного представления $[n]$ имеется единственное значение изоспина $T = n/2$. В случае же разбиений с двумя строками $[f_1 f_2]$ мы должны иметь значения $m_1 = +1/2$ в первых f_2 клетках первой строки и $m_2 = -1/2$ во всех клетках второй строки, чтобы выполнялись требования «а» и «б» для внешнего произведения двух симметрических схем Юнга. Следовательно, эти первые два столбца не вносят вклад в полное число M . Оставшиеся $f_1 - f_2$ клеток первой строки можно заполнить точно так же, как и в случае симметричного представления $[n = f_1 - f_2]$. Таким образом, перестановочная симметрия $[f_1 f_2]$ приводит к единственному значению полного изоспина $T = (f_1 - f_2)/2$.

Единственность значения полного изоспина при заданной перестановочной симметрии означает, что квантовые числа n , T эквивалентны квантовым числам $[f_1 f_2]$. Эта эквивалентность значения углового момента и перестановочной симметрии специфична для систем с $g = 2$ (см. приложение 3, п. 3).

Пары клеток одного и того же столбца в рассмотренном выше примере образуют единственное антисимметричное состояние ($T = M = 0$), возможное для двух частиц в оболочке с $g = 2$ (конфигурация заполненной оболочки). Представление $[f_2 f_2]$ образуется полностью из таких заполненных оболочек, так что полный изоспин $T = 0$.

В самом общем случае столбец схемы Юнга с максимальным числом клеток g соответствует заполненной оболочке и не дает вклада в полный угловой момент. Можно также (и иногда это удобнее) анализировать данную симметрию с точки зрения «дырок» в заполненной оболочке. Так, например, симметрии $[f_1 \dots f_g]$ соответствуют те же самые угловые моменты, что и симметрии $[f_1 - f_g, \dots, f_1 - f_2, 0]$.

Дополнительной иллюстрацией к составлению перечня значений углового момента для произведений волновых функций с определенной перестановочной симметрией могут служить табл. 1.9 и 1.10. Первая из них относится к конфигурации p^n , а во второй даются результаты для спин-изоспиновых волновых функций.

3. Унитарная симметрия

Операторы сдвига

Систематическое изучение связи между состояниями с разными квантовыми числами ρ_m (т. е. с заданной перестановочной симметрией $[f]_r$ координат частиц) может быть основано на алгебре совокупности операторов $E(m_b, m_a)$, которые переводят частицу из одночастичного состояния m_a в состояние m_b . Такие «операторы сдвига» действуют симметрично на все частицы и поэтому задаются выражением

$$E(m_b, m_a) = \sum_{k=1}^n E_{m_b, m_a}(x_k), \quad (1.304)$$

где одночастичный оператор $E_{m_b, m_a}(x)$ определяется своими матричными элементами:

$$\langle m_d | E_{m_b, m_a} | m_c \rangle = \delta(m_a, m_c) \delta(m_b, m_d). \quad (1.305)$$

При $m_b = m_a$ имеем

$$E(m_a, m_a) = n_a, \quad (1.306)$$

где n_a — число частиц в квантовом состоянии m_a . Суммируя по a , получаем

$$\sum_a E(m_a, m_a) = n. \quad (1.307)$$

Поэтому такая комбинация операторов сдвига есть константа для рассматриваемых состояний.

Совокупность g^2 операторов сдвига можно рассматривать как совокупность элементов, из которых можно построить все операторы, действующие симметрично на частицы (и не меняющие числа частиц). Так, произвольный одночастичный оператор можно записать в виде

$$F = \sum_{k=1}^n F(x_k) = \sum_{m_a, m_b} \langle m_b | F | m_a \rangle E(m_b, m_a). \quad (1.308)$$

Двухчастичные операторы выражаются в виде билинейных комбинаций операторов сдвига и т. д.

Если мы рассматриваем систему фермионов, для которых состояние полностью антисимметрично относительно переменных x и одновременно относи-

тельно дополнительных переменных ξ [см. формулу (1.291)], то операторы сдвига можно представить в виде

$$E(m_b, m_a) = \sum_{\alpha} a^{\dagger}(m_b, \mu_{\alpha}) a(m_a, \mu_{\alpha}), \quad (1.309)$$

где $a^{\dagger}(m, \mu)$ — оператор рождения одиночичного состояния с квантовыми числами m (относящимися к x -пространству) и квантовыми числами μ (относящимися к ξ -пространству). По аналогии с (1.309) можно также определить операторы сдвига $E(\mu_b, \mu_a)$, действующие в ξ -пространстве.

Поскольку операторы сдвига действуют симметрично на все частицы, они не изменяют перестановочной симметрии и, следовательно, диагональны по квантовым числам $[f]$ и r . Поэтому матричные элементы операторов сдвига можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \langle [f'] r' \rho'_m | E(m_b, m_a) | [f] r \rho_m \rangle = \\ & = \delta([f], [f']) \delta(r, r') \langle [f] \rho'_m | E(m_b, m_a) | [f] \rho_m \rangle. \end{aligned} \quad (1.310)$$

Эти матричные элементы отличны от нуля только в том случае, если таблицы ρ_m и ρ'_m связаны с конфигурациями $\mathcal{C}(m)$ и $\mathcal{C}'(m)$, для которых $n'_a = n_a - 1$, $n'_b = n_b + 1$, а $n'_c = n_c$ при $c \neq a, b$. [Если мы рассматриваем полностью антисимметрические состояния, определяемые квантовыми числами $[f] \rho_m \rho_{\mu}$, то матричные элементы оператора $E(m_b, m_a)$ диагональны по $[f]$ и ρ_{μ} и не зависят от ρ_{μ} .]

Операторы сдвига $E(m_b, m_a)$ — основное средство для исследования связи между состояниями $[f] \rho_m$ (с фиксированными r или ρ_{μ}), так как, действуя соответствующим образом выбранный линейной комбинацией произведения операторов сдвига на любое заданное состояние $[f] \rho_m$, можно получить любое другое состояние $[f] \rho'_m$. Такая «полнота» операторов сдвига соответствует тому, что любой оператор, действующий симметрично на n -частичную волновую функцию, может быть построен из подобных операторов. В этом нетрудно убедиться, взяв точное выражение для симметризованных состояний (1.298).

Алгебра операторов сдвига, группа унитарных преобразований

Операторы сдвига подчиняются простым коммутационным соотношениям

$$[E(m_b, m_a), E(m_d, m_c)] = \delta(a, d) E(m_b, m_c) - \delta(b, c) E(m_d, m_a), \quad (1.311)$$

что следует из формул (1.304) и (1.305) [или из формулы (1.309)]. Поскольку коммутатор двух операторов сдвига выражается в виде линейной комбинации таких же операторов, говорят, что g^2 операторов сдвига замкнуты относительно коммутации. Такую совокупность операторов называют также алгеброй Ли, структура которой определяется соотношением (1.311).

Операторы сдвига — это генераторы бесконечно малых унитарных преобразований \mathcal{U} , действующих одновременно на волновые функции n частиц. Под действием унитарного преобразования одиночичные состояния преобразуются следующим образом:

$$\Psi_{m_a}(x) \rightarrow \sum_{m_b} \mathcal{U}_{m_a, m_b} \Psi_{m_b}(x), \quad (1.312)$$

где \mathcal{U}_{m_a, m_b} — унитарная матрица размерности g . Для бесконечно малых преобразований

$$\mathcal{U}_{m_a, m_b} = \delta_{m_a, m_b} + i \epsilon_{m_a, m_b}, \quad (1.313)$$

где ε — эрмитова матрица (с бесконечно малыми матричными элементами). Тогда оператор \mathcal{U} , действующий на n -частичное состояние, можно выразить в следующем виде:

$$\mathcal{U} = 1 + i \sum_{m_a, m_b} \varepsilon_{m_a, m_b} E(m_b, m_a), \quad (1.314)$$

где 1 — единичный оператор.

Путем суперпозиции бесконечно малых преобразований можно получить полную группу унитарных преобразований, которая обозначается через U_g . Она представляет собой группу Ли, структура которой определяется алгеброй генераторов группы, подчиняющихся коммутационным соотношениям (1.311).

Таким образом, состояния $|f\rangle \rho_m$, образованные из произведений n одиноческих волновых функций, можно рассматривать как базисные состояния представлений группы U_g , а свойство «полноты» операторов сдвига, о котором говорилось в предыдущем пункте, означает, что эти представления неприводимы. Поэтому квантовые числа разбиения характеризуют неприводимые представления группы U_g , а также и неприводимые представления группы S_n . (Представления группы U_g содержат разбиения, соответствующие всем n , но с числом строк k не большие размерности g , т. е. $k \leq g$.)

Определитель унитарной матрицы \mathcal{U} по абсолютной величине равен единице, т. е. $e^{i\theta}$. (Определитель равен произведению собственных значений, каждое из которых в силу соотношения $\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = 1$ по абсолютной величине равно единице.) Специальные унитарные преобразования, связанные с матрицами ε_{m_a, m_b} , определитель которых равен единице ($\varphi = 0$, такие матрицы называются унимодулярными), образуют подгруппу группы U_g , называемую специальной унитарной группой размерности g (SU_g). След матрицы ε_{m_a, m_b} бесконечно малых унимодулярных унитарных преобразований равен нулю и поэтому генераторами группы SU_g являются те операторы сдвига, которые линейно независимы от оператора полного числа частиц n , определяющегося выражением (1.307). [Например, можно взять $E(m_b, m_a)$ с $m_b \neq m_a$ и $(g-1)$ линейно-независимых комбинаций типа $E(m_a, m_a) - E(m_b, m_b)$.] Легко видеть, что такая совокупность операторов замкнута относительно коммутаций и поэтому образует алгебру Ли.]

Неприводимые представления группы SU_g те же, что и группы U_g , но, как представления группы SU_g , представления $|f\rangle$, отличающиеся лишь числом заполненных столбцов, идентичны, а поэтому представления группы SU_g можно определить совокупностью $(g-1)$ чисел $f_1 - f_g, f_2 - f_g, \dots, f_{g-1} - f_g$. Как представления группы U_g , представления, отличающиеся числом заполненных столбцов, различаются квантовым числом $n = \sum_i f_i$.

Можно построить такие комбинации операторов сдвига, которые коммутируют со всеми операторами сдвига и представляют собой инварианты группы U_g . Такие инвариантные называются операторами Казимира. Собственные значения этих инвариантов есть функции квантовых чисел разбиения, характеризующих представления группы U_g . Линейным инвариантом оказывается оператор числа частиц, определяющийся равенством (1.307). Квадратичный инвариант — величина

$$G_2(U_g) = \sum_{m_b, m_a} E(m_a, m_b) E(m_b, m_a), \quad (1.315)$$

матричные элементы которой равны

$$\langle [f'] \rho'_m | G_2(U_g) | [f] \rho_m \rangle = \delta([f], [f']) \delta(\rho_m, \rho'_m) \sum_{i=1}^g f_i (f_i - 2i + 1 + g). \quad (1.316)$$

В этом можно убедиться, если подействовать оператором (1.314) на состояние с максимальным весом. Соответствующий оператор Казимира для группы SU_g

имеет вид

$$G_2(SU_g) = G_2(U_g) - \frac{1}{g} \left[\sum_{m_a} E(m_a, m_a) \right]^2 = G_2(U_g) - \frac{1}{g} n^2. \quad (1.317)$$

Точно так же можно построить инварианты более высокого порядка, конструируя выражения, полностью симметричные относительно квантовых чисел m_a . Так, например, инвариант третьего порядка будет иметь вид

$$G_3(U_g) = \sum_{m_a, m_b, m_c} E(m_a, m_c) E(m_c, m_b) E(m_b, m_a). \quad (1.318)$$

Собственными значениями этих инвариантов можно пользоваться для различения представлений группы U_g вместо квантовых чисел разбиения.

При $g = 2$ алгебра операторов сдвига принимает знакомый вид, если ввести следующие линейные комбинации:

$$\begin{aligned} n &= E(m_1, m_1) + E(m_2, m_2), \\ \lambda_0 &= \frac{1}{2} (E(m_1, m_1) - E(m_2, m_2)), \\ \lambda_+ &= E(m_1, m_2), \\ \lambda_- &= E(m_2, m_1). \end{aligned} \quad (1.319)$$

На основании коммутационных соотношений (1.311) для величин $\lambda_0, \lambda_+, \lambda_-$ (генераторов группы SU_2) получаем следующие коммутаторы:

$$\begin{aligned} [\lambda_0, \lambda_\pm] &= \pm \lambda_\pm, \\ [\lambda_+, \lambda_-] &= 2\lambda_0, \end{aligned} \quad (1.320)$$

которые соответствуют составляющим вектора углового момента $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ при $\lambda_0 = \lambda_3$ и $\lambda_\pm = \lambda_1 \pm i\lambda_2$.

Поэтому группу SU_2 можно рассматривать как группу вращений R_3 в трехмерном пространстве, порождаемую оператором углового момента λ , ее представлениям можно приписать квантовое число λ , принимающее значения $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$. Оператор Казимира для группы SU_2 , определяющийся формулами (1.315) и (1.316), имеет вид

$$G(SU_2) = 2 |\lambda|^2 = 2\lambda(\lambda+1).$$

То, что совокупности квантовых чисел $p\lambda$ и $[f_1, f_2]$ эквивалентны, уже было показано выше, когда рассматривался пример, в котором состояние частицы определялось проекцией изоспина ($m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$). В этом случае вектору полного изоспина T соответствует вектор λ .

Группы SU_2 и R_3 гомоморфны, а не изоморфны, ибо каждому элементу группы R_3 соответствуют два элемента группы SU_2 . (Изоморфизм — это взаимно однозначное соответствие между элементами двух групп.) Так, например, если обозначить элемент группы R_3 углами Эйлера $\omega = (\phi, \theta, \psi)$ (фиг. 1.14), то соответствующими элементами группы SU_2 будут двумерные унимодулярные unitарные матрицы $\pm \mathcal{D}_{m_1 m_2}^{1/2}(\omega)$, где $\mathcal{D}_{m_1 m_2}^{1/2}$ — функция \mathcal{D} для углового момента $j = \frac{1}{2}$ (см. приложение 1, п. 3). Наличие в группе SU_2 двух элементов, соответствующих заданным углам ω , связано с тем, что при повороте на 360° углы ω не меняются, а изменяется знак матрицы $\mathcal{D}^{1/2}$. Таким образом, представления с полуцелыми значениями угловых моментов двузначны относительно группы R_3 , но однозначны относительно группы SU_2 .

При $g > 2$ можно несколькими совершенно разными способами ввести линейные комбинации генераторов, по своим свойствам подобные оператору углового момента.

Один из возможных вариантов можно пояснить на примере состояний, при надлежащих конфигурации j^m , для которой $g = 2j + 1$. (Сюда можно включить

и конфигурацию l^m , если считать, что j принимает не только полуцелые, но и целые значения.) Полный угловой момент J определяется своими сферическими составляющими $J_{\mu=\pm 1} = \mp 2^{-1/2} J_{\pm}$ по формуле [см. соотношение (1.155)]

$$J_{\mu} = [j(j+1)]^{1/2} \sum_{m, m'} \langle jm | jm' \rangle E(m', m). \quad (1.321)$$

Нетрудно убедиться, что в силу соотношения (1.311) операторы (1.321) удовлетворяют коммутационным соотношениям для операторов углового момента.

Независимо от физического смысла g одночастичных состояний их можно формально рассматривать как магнитные подсостояния с угловым моментом $j = 1/2 (g - 1)$. Тогда по формуле (1.321) можно определить оператор, подобный оператору углового момента (оператор «квазиспина»). Таким образом, состояниям, принадлежащим представлению группы U_g , всегда можно приписать квантовое число J (и соответствующие значения M_J).

Помимо тензорного оператора первого ранга J_{μ} , определяющегося формулой (1.321), можно ввести неприводимые тензорные операторы более высокого ранга. Действительно, g^2 генераторов могут быть представлены скаляром (равным n) и тензорными операторами рангов $\lambda = 1, 2, \dots, 2j = g - 1$. Например, генераторы группы U_3 , помимо скаляра n и вектора углового момента, содержат еще тензорный оператор второго ранга (см. примеры в гл. 7, приложение 2).

Другой возможный путь определения операторов, подобных операторам углового момента,— выбрать две величины m (например, m_1 и m_2) и ввести векторный оператор λ согласно соотношениям (1.319). Например, при классификации спектра адронов по схеме U_3 таким способом вводится вектор изотопического спина T . Поэтому оператор $n_3 = E(m_3, m_2)$ коммутирует с вектором T , а состояния, принадлежащие данному представлению $[J]$ группы U_3 , можно характеризовать, помимо величин T и M_T , собственными значениями оператора числа частиц $n_3 (= 0, 1, 2, \dots)$. Такое дополнительное квантовое число в схеме SU_3 классификации обычно определяется как

$$Y = \frac{1}{3} n - n_3 \quad (1.322)$$

и представляет собой гиперзаряд [см. формулу (1.62)]. Другой выбор подпространства U_2 дает вместо изоспина T и гиперзаряда Y квазиспин U и заряд Z .

Различные способы образования операторов, подобных оператору углового момента, из генераторов унитарных групп соответствуют различным способам выбора подгруппы R_3 (или SU_2) группы U_g . Такая задача входит в качестве составной части в более общую проблему классификации состояний, принадлежащих данному представлению $[J]$ группы U_g , на основе представлений подгруппы группы U_g . Различные разложения группы U_g соответствуют различным выборам базисных состояний, т. е. различным схемам связи n -частичной системы¹⁾.

Всегда можно получить полную цепочку подгрупп в виде совокупности унитарных групп $U_{g-1}, U_{g-2}, \dots, U_2, U_1$, образованных путем последовательного удаления одночастичных состояний из базиса m_a ($a = 1, 2, \dots, g$). «Схема m -связи», представленная состояниями с определенной таблицей ρ_m (см. приложение 3, п. 2), соответствует такому приведению представления группы U_g на основе цепочки унитарных подгрупп. В случае группы U_2 такая операция приводит к тому, что квантовые числа разбиения (или квантовые числа λ) дополняются магнитным квантовым числом, связанным с угловым момен-

¹⁾ Теоретико-групповой метод классификации многочастичных состояний на основе неприводимых представлений группы U_g и ее подгрупп разработан в работах Рака [356]. Вопрос о приведении представлений группы U_g рассматривается также в работах [51, 334].

том λ . В случае же группы U_3 в результате приведения такого состояния приписываются квантовые числа Y , T и M_T ¹⁾. Такое приведение представлений группы U_g к произведению представлений группы U_{g1} и U_{g2} с $g = g_1 + g_2$ можно получить из правил разложения внешних произведений схем Юнга. Другое приведение к произведению представлений группы U_{g1} и U_{g2} мы имеем тогда, когда одиноччастичные состояния представляют собой произведения функций размерностями g_1 и g_2 с $g = g_1 g_2$ (см. спин-изоспиновые состояния в табл. 1.10). Это разложение связано с рядом Клебса—Гордана для внутренних произведений группы S_n^2 .

Если желательно использовать собственные состояния оператора углового момента (1.321), то приходится рассматривать задачу нахождения дополнительных подгруппы группы U_g , которые содержали бы группу R_3 в качестве своей подгруппы. При нечетных значениях g (и $g \geq 5$) такой дополнительной подгруппой оказывается группа R_g ортогональных (действительных и унитарных) преобразований размерности g . Подобные преобразования обладают тем свойством, что оставляют инвариантным двухчастичное состояние l^2 ; $L = 0$, причем $2l + 1 = g$. При четных значениях g соответствующей подгруппой оказывается группа Sp_g симплектических преобразований, которые оставляют инвариантным двухчастичное состояние j^2 ; $J = 0$, причем $2j + 1 = g$.

Неприводимые представления группы R_g и Sp_g характеризуются совокупностью квантовых чисел, в которую входит квантовое число сенсорита (старшинства). (Вопрос о представлениях группы R_g и Sp_g рассматривается в книгах [127, 217]. Дополнительные подгруппы с требуемыми свойствами существуют лишь в некоторых случаях, и поэтому в общем случае таким путем невозможно дать полную классификацию n -частичных состояний. (Для полной классификации подобного рода нужна совокупность $\frac{1}{2}g(g-1)$ квантовых чисел, кроме g чисел, входящих в разбиение $[f_1, \dots, f_g]$.) Примером, показывающим, как трудно выяснить физический смысл этих дополнительных квантовых чисел, может служить проблема выяснения смысла третьего квантового числа $\bar{\Lambda}$ в схеме классификации по группе U_3 (см. стр. 135). Хотя все представления группы U_g очень просто построить на основе состояний с определенной перестановочной симметрией, описывающих системы эквивалентных частиц, каждая из которых занимает одно из g подсостояний, следует подчеркнуть, что можно также рассматривать унитарную симметрию непосредственно на основе алгебры генераторов без какой-либо ссылки на перестановочную симметрию.)

Так, например, систему, состоящую из нуклонов и пионов, можно характеризовать исходя из SU_2 -симметрии (изоспина), а систему, которая, кроме того, содержит странные частицы, — исходя из SU_3 -симметрии и не учитывая при этом в явном виде перестановочной симметрии. Но можно также подходить к подобным системам как к системам, состоящим из элементов, преобразующихся по фундаментальному g -мерному представлению группы SU_g (нуклонов в случае группы SU_2 , кварков и в случае группы SU_3). Тогда столь же законной отправной точкой для классификации по симметрии снова будет симметрическая группа.

ПРИМЕРЫ К ПРИЛОЖЕНИЮ 3

Четырехчастичные волновые функции с определенной симметрией (табл. 1.6)

В табл. 1.6 для примера приведены функции, иллюстрирующие различные типы перестановочной симметрии четырехчастичных волновых функций.

Размерности различных представлений вычисляются путем подсчета числа

1) Таблицы умножения для внешних и внутренних произведений представлений группы S_n , дающие [разложения представлений группы U_g , приведены в работе [249].

Таблица 1.6

возможные типы перестановочной симметрии для четырехчастичных волновых функций

$[f]$	Схемы Юнга	Таблицы Юнга r	Иллюстративные функции	ρ_m
[4]			$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$	
[31]			$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4$	
			$x_1 + x_2 - 2x_3$	
			$x_1 - x_2$	
[22]			$2x_1x_2 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + 2x_3x_4$	
			$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$	
[211]			$(x_1 + x_2 - 2x_3)y_4 - (y_1 + y_2 - 2y_3)x_4$	
			$(x_1 - x_2)y_4 - (y_1 - y_2)x_4$	
			$x_1 \quad y_1 \quad 1$ $x_2 \quad y_2 \quad 1$ $x_3 \quad y_3 \quad 1$	
[1111]			$x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad 1$ $x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad 1$ $x_3 \quad y_3 \quad z_3 \quad 1$ $x_4 \quad y_4 \quad z_4 \quad 1$	

различных способов, которыми может быть образована данная функция при добавлении четвертой частицы к трехчастичному состоянию с определенной симметрией. Так, например, полностью симметричную функцию [4] можно образовать только путем добавления четвертой частицы к полностью симметричному трехчастичному состоянию [3] и поэтому представление [4] одномерно. Симметрию [31] можно образовать, добавляя четвертую частицу к состоянию типа [3] или к двум состояниям, принадлежащим представлению [21]. Таким образом,

представление [31] трехмерно. Представление [22] можно образовать только из трехчастичных состояний типа [21], и поэтому оно двумерно. Представление [211] можно построить из представлений [21] и [111], и поэтому его размерность $2 + 1 = 3$. Наконец, полностью антисимметричное представление [1111] можно построить только из представления [111], и поэтому оно одномерно.

Как уже указывалось, вычисление размерностей неприводимых представлений можно производить с помощью таблиц Юнга. Такой метод вычисления размерностей дан в третьем столбце табл. 1.6, где приводится полная совокупность таблиц Юнга для каждого типа симметрии.

Функции, иллюстрирующие симметрии [4] и [31], соответствуют конфигурации типа ($s^3 p$). Предположим, что волновая функция s -состояния постоянна, а p -состояния пропорциональны x . Тогда эти функции оказываются линейными относительно координат x_1, x_2, x_3, x_4 . Представление [4] содержит единственную линейную функцию, симметричную относительно всех четырех координат, тогда как представление [31] содержит три функции, которые ортогональны симметричной функции. Таблицы Юнга приписаны базисным функциям на основании правил, изложенных на стр. 112. Так, например, таблице

1	2	3
4		

соответствует функция, симметричная относительно координат 1, 2 и 3, а таблице

1	2	4	1	2
3			3	

для конфигурации $s^3 p$ невозможно построить состояния с более низкой симметрией, так как для этой конфигурации состояние трех s -частиц должно быть симметричным. Поэтому для иллюстрации симметрий [22] и [211] мы взяли конфигурацию типа ($s^2 p^2$). В случае симметрии [22] обе p орбиты были взяты в направлении x , а в случае симметрии [211] из-за антисимметрии относительно трех частиц приходится использовать две разные орбиты (которые взяты пропорциональными одна x , а другая y). Для симметрии [1111] выбрана конфигурация $s p^3$ с тремя разными p -орбитами как самая простая из возможных.

В последнем столбце табл. 1.6 приведены таблицы квантовых чисел r_m , которыми можно пользоваться для обозначения различных состояний с симметрией $[f] r$, принадлежащих заданной конфигурации. Такая классификация рассматривалась в приложении 3, п. 2. Выбранные конфигурации содержат только по одному состоянию с определенной симметрией $[f] r$, и поэтому для каждой конфигурации и симметрии $[f] r$ имеется по одной таблице r_m .

Таблица умножения для внутренних произведений неприводимых представлений группы S_3 (табл. 1.7)

Представления, содержащиеся во внутреннем произведении $[f^{(1)}] \times [f^{(2)}]$ различных неприводимых представлений группы S_3 , приведены в табл. 1.7. Для внутреннего произведения порядок сомножителей не существует, и поэтому таблица симметрична относительно главной диагонали. Такую таблицу можно построить, если точно выписать произведения функций заданной симметрии, как в примере (1.27), а затем спроектировать из полученного произведения функции с определенной симметрией при помощи операторов \mathcal{A} , \mathcal{S} , \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 (см. выше).

Результаты, приведенные в таблице, можно также получить исходя из простых свойств внутреннего произведения. Так, например, $[n] \times [f] = [f]$, поскольку при умножении на полностью симметричную функцию $[n]$ симметрия функции $[f]$ не может измениться. Точно так же $[111 \dots 1] \times [f] = [\bar{f}]$, либо при умножении на полностью антисимметричную функцию меняются местами симметричные и антисимметричные пары, а это как раз характерно для связи симметрии $[f]$ с сопряженной симметрией $[\bar{f}]$. Справедливы и «обрат-

Таблица 1.7

ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ S_3

$[f^{(1)}]$	[3]	[21]	[111]
$[f^{(2)}]$			
[3]	[3]	[21]	[111]
[21]		[3] + [21] + [111]	[21]
[111]			[3]

ные» результаты, т. е. в произведение $[f] \times [f]$ представление $[n]$ входит всегда только один раз, а в произведение $\tilde{[f]} \times [f]$ только один раз входит представление $[111 \dots 1]$.

Учет размерностей приводит к дополнительным результатам. Например, поскольку представление $[21]$ двумерно, произведение $[24] \times [21]$ должно давать представления, общая размерность которых равна четырем. Поэтому если мы из приведенных выше правил знаем, что каждое из одномерных представлений $[3]$ и $[111]$ входит в это произведение по одному разу, то можно заключить, что представление $[24]$ также появляется в этом произведении один раз.

Систематический анализ внутренних произведений проводится с помощью характеров групп (см., например, работу [247]), таблицы внутренних произведений при $n \leq 8$ можно найти в работе [249].

Связь между неуприводимыми представлениями симметрических групп S_n и унитарных групп U_g означает, что разложение внутренних произведений представлений группы S_n соответствует приведению представлений группы $U_{g1}g_2$ к произведению представлений группы U_{g1} и U_{g2} (см. то, что говорится по поводу табл. 1.8).

Квантовые числа и волновые функции состояний конфигурации p^3 (табл. 1.8)

В табл. 1.8 перечислены состояния с определенной перестановочной симметрией, которые можно построить из произведений трех одночастичных состояний, т. е. из состояний типа p^3 . Конфигурации определяются значениями маг-

Таблица 1.8

КВАНТОВЫЕ ЧИСЛА И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ
ДЛЯ КОНФИГУРАЦИИ p^3

M	Конфигурация	[3]	[21]	[111]
3	1^3	1		
2	$1^2 0$	1	1	
1	$1^2 -1$	1	1	
	$1 0^2$	1	1	
0	$1 0 -1$	1	2	1
	0^3	1		

нитных квантовых чисел m ($= 1, 0$ и -1) и располагаются в порядке убывания величины полного магнитного квантового числа M ($= m_1 + m_2 + m_3$).

Число появлений каждой симметрии при заданной конфигурации можно найти, выписывая в m -пространстве таблицы Юнга ρ_m . Мы примем порядок $m = 1, 0, -1$ при записывании чисел m в эти таблицы.

При $M = 3$ мы имеем единственную конфигурацию ($m = 1$)³, которая должна быть симметричной функцией

$$\Phi(\rho_m = \boxed{1 \ 1 \ 1}) = (1\ 1\ 1).$$

Здесь мы ввели обозначение

$$(m_1 m_2 m_3) \equiv \varphi_{m_1}(1) \varphi_{m_2}(2) \varphi_{m_3}(3)$$

для произведения трех одиноческих функций.

При $M = 2$ конфигурация $[(m=1)^2, m=0]$ дает единственное симметричное состояние

$$\Phi(\rho_m = \boxed{1 \ 1 \ 0}) = \frac{1}{\sqrt{3}} [(110) + (101) + (011)].$$

Эта же самая конфигурация дает симметрию типа [21], что соответствует в m -пространстве таблице $\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & \end{matrix}}$. Данное представление двумерно относительно перестановок координат. Следовательно, имеются два состояния с такой симметрией, отличающиеся различными таблицами r в пространстве числа частиц:

$$\Phi(r = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix}} \rho_m = \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & \end{matrix}}) = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(110) - (101) - (011)],$$

$$\Phi(r = \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}} \rho_m = \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & \end{matrix}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-(101) + (011)].$$

Каждая из двух различных конфигураций при $M = 1$ подобна конфигурации с $M = 2$ (все они типа $m_1^2 m_2$) и поэтому дает по одному разу представления [3] и [21].

При $M = 0$ конфигурация ($m = 0$)³ должна обладать симметрией [3], что соответствует волновой функции (000). Волновые функции для конфигурации ($m = 1, m = 0, m = -1$) таковы:

$$\Phi(\rho_m = \boxed{1 \ 0 \ -1}) = \frac{1}{\sqrt{6}} [(10-1) + (01-1) + (-101) + (1-10) + (0-11) + (-110)],$$

$$\Phi(r = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix}} \rho_m = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & \end{matrix}}) = \frac{1}{\sqrt{12}} [2(10-1) + 2(01-1) - (-101) - (1-10) - (0-11) - (-110)],$$

$$\Phi(r = \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}} \rho_m = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & \end{matrix}}) = \frac{1}{\sqrt{4}} [-(101) + (1-10) + (0-11) - (-110)],$$

$$\Phi(r = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix}} \rho_m = \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & \end{matrix}}) = \frac{1}{\sqrt{4}} [-(101) + (1-10) - (0-11) + (-110)],$$

$$\begin{aligned} \Phi \left(r = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rho_m = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 0 & \\ \hline \end{array} \right) &= \frac{i}{\sqrt{12}} [2(10-1) - 2(01-1) + (-101) + (1-10) - \\ &\quad - (0-11) - (-110)], \\ \Phi \left(\rho_m = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \right) &= \frac{i}{\sqrt{6}} [(10-1) - (01-1) - (-101) - (1-10) + (0-11) + \\ &\quad + (-110)]. \end{aligned}$$

Присыпывая таблицы ρ_m определенным базисным функциям, мы следуем тому же принципу, что и в случае таблиц r . Так, если мы отбрасываем последнюю орбиту (при принятом нами порядке орбиты с $m = -1$), то оставшаяся функция обладает определенной симметрией обмена двух оставшихся орбит ($m = 1$ и $m = 0$). Эта симметрия соответствует схеме Юнга, которая получается при

удалении клетки $\boxed{-1}$ из таблицы в m -пространстве. [Общий путь построения состояний с определенными r и ρ_m дается формулой (1.298).]

Исходя из знаний полного магнитного числа M , соответствующих каждому виду симметрии, можно заключить, что для конфигурации p^3 мы получаем симметричные состояния [3] с $L = 3$ и $\bar{L} = 1$, состояния смешанной симметрии [21] с $\bar{L} = 2$ и $L = 1$ и единственное антисимметрическое состояние [111] с $L = 0$. Состояние [111] можно рассматривать как единственный определитель Слэтера, который можно построить для конфигурации p^3 (конфигурация заполненной оболочки). Волновые функции с определенным значением L можно получить из волновых функций с $M = L$, выражения для которых приведены выше, действуя на них оператором $L_x - iL_y$, понижающим значение магнитного квантового числа M , который также можно записать через операторы сдвига E ($m' = m - 1$, m) [см. формулу (1.321)]:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (L_x - iL_y) = E(0, 1) + E(-1, 0).$$

Генераторы (1.304) унитарной группы U_3 изменяют конфигурации (т. е. изменяют значения величин m_i) и таблицы ρ_m , но оставляют неизменной перестановочную симметрию $[f]$ r . Так, в рассмотренном примере состояния с симметрией [3] принадлежат десятимерному представлению группы U_3 , а каждое такое состояние преобразуется по одномерному представлению группы перестановок S_3 . Точно так же состояния типа [21] принадлежат восьмимерному представлению группы U_3 , тогда как функция [111] преобразуется по одномерному представлению и группы U_3 , и группы S_3 .

Классификация состояний конфигурации p^n (табл. 1.9)

Состояния, принадлежащие конфигурации p^n , можно классифицировать на основе орбитальной (перестановочной) симметрии $[f]$ и полного углового момента L . (Для полной характеристики состояний в общем случае, кроме величин $[f]$, L , M , нужно задать еще одно квантовое число, такое, например, как величина Λ , о которой речь будет идти ниже.) Поскольку p -состояние содержит три подсостояния, разбиение $[f]$ может содержать не более трех чисел $[f_1 f_2 f_3]$ (волновая функция может быть антисимметричной самое большое относительно трех частиц).

Классификация состояний, основанная на квантовых числах $[f]$ и L при $n \leq 6$, представлена в табл. 1.9. При построении таблицы проще всего начинать с малых значений n , а затем добавлять все новые частицы.

При $n = 2$ мы, исходя из свойств симметрии коэффициентов векторного сложения, сразу же получаем результат, приведенный в таблице.

Таблица 1.9

КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ КОНФИГУРАЦИИ p^n

n	$[f]$	Значения момента L	n	$[f]$	Значения момента L
1	[1]	1	5	[5]	135
2	[2]	02		[41]	1234
	[11]	1		[32]	123
3	[3]	13		[311]	02
	[21]	12	6	[221]	1
	[111]	0		[6]	0246
4	[4]	024		[51]	12345
	[31]	123		[42]	02234
	[22]	02		[33]	13
	[211]	1		[411]	13
				[321]	12
				[222]	0

При $n = 3$ мы получаем L -структуру, подсчитывая число состояний с данной симметрией $[f]$ в m -представлении (см. табл. 1.8). Можно дать и другой, тоже весьма наглядный вывод L -структур при $n = 3$. Сначала заметим, что состояние с симметрией [111] должно представлять собой определитель Слэттера, образованный из трех p -подсостояний. Это единственное полностью антисимметричное состояние, которое можно образовать для конфигурации p^3 , и оно должно иметь структуру заполненной оболочки. Из единственности такого состояния, преобразующегося по одномерному представлению группы U_3 , немедленно вытекает, что $L = 0$. Теперь мы можем получить L -структуру состояний с симметрией [21], если заметим, что $[11] \otimes [1] = [21] + [111]$ (см. правила перемножения схем Юнга). Затем, комбинируя этот результат с правилом сложения угловых моментов, получаем

$$[21] = [11] \otimes [1] - [111] \rightarrow (L=1) \otimes (L=1) - (L=0) = (L=0, 1, 2) - (L=0),$$

т. е. симметрия [21] содержит $L=1$ и $L=2$. Точно так же получаем

$$[3] = [2] \otimes [1] - [21] \rightarrow (L=0, 2) \otimes (L=1) - (L=1, 2) = (L=1, 3),$$

т. е. симметрия [3] содержит $L=1$ и $L=3$. Эти результаты можно проверить, пользуясь формулой для размерности неприводимого представления (1.294), из которой следует, что при $g = 3$ мы имеем $\hbar [21] = 8$, а $\hbar [3] = 10$.

При $\hbar = 4$ можно снова либо непосредственно подсчитывать значения полного магнитного числа M для каждого разбиения, либо начинать с наиболее антисимметричного состояния [211], в котором мы имеем одну частицу сверх заполненной оболочки [111]. Это единственное состояние в произведении $[111] \times [1]$,

ибо состояние $[111]$ невозможно в случае конфигурации p^4 . Таким образом, симметрии $[211]$ соответствует единственное значение $L = 1$. Затем можно получить L -структуру других симметрий, пользуясь одновременно правилами перемножения схем Юнга и сложения угловых моментов.

Рассмотрев эти примеры, мы можем теперь сформулировать общее правило определения L -структуры конфигурации p^n . Лучше всего начать с полностью симметричных состояний $[n]$. Их L -структура совпадает с набором значений орбитального углового момента частицы, движущейся в потенциале гармонического осциллятора и находящейся в состоянии с главным квантовым числом $N = n$. Как известно, для такой частицы

$$L = n, n-2, \dots, 1 \text{ или } 0 \quad [n]. \quad (1.323)$$

Исходя из этого, так же как в случае конфигурации p^3 , легко получить L -структуру состояний с симметрией $[n1]$:

$$\begin{aligned} [n1] = [n] \otimes [1] - [n+1] \rightarrow & (L = n, n-2, \dots, 1 \text{ или } 0) \otimes (L = 1) - \\ & -(L = n+1, n-1, \dots, 0 \text{ или } 1). \end{aligned}$$

Таким образом, симметрия $[n1]$ содержит значения

$$L = n, n-1, n-2, \dots, 1 \quad [n1]. \quad (1.324)$$

Продолжая таким путем и далее, можно вывести общее правило, позволяющее определить L -структуру симметрий типа $[f_1 f_2 f_3]$. Поскольку заполненная оболочка $[f f f]$ обладает нулевым угловым моментом, из схемы Юнга можно удалять заполненные столбцы, не меняя при этом L -структурь состояния. Таким образом, L -структура зависит только от двух чисел: $f_1 - f_3$ и $f_2 - f_3$. Чтобы использовать симметрию между частицами и дырками в заполненных оболочках, вместо этих двух чисел удобно ввести другие два числа

$$\begin{aligned} \lambda &= f_1 - f_2, \\ \mu &= f_2 - f_3, \end{aligned} \quad (1.325)$$

которые кратко записываются как $(\lambda\mu)$. Взаимный обмен чисел λ и μ эквивалентен замене конфигурации частиц дырочной конфигурацией. Поэтому состояния с $(\lambda\mu)$ и $(\mu\lambda)$ характеризуются одинаковым набором значений углового момента L . Наконец, L -структуру состояний с заданным $(\lambda\mu)$ можно выразить, введя величину $\tilde{\Lambda}$, которая принимает значения

$$\tilde{\Lambda} = \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2, \dots, 0 \text{ или } 1, \quad (1.326)$$

Тогда каждому значению $\tilde{\Lambda}$ соответствуют следующие значения углового момента L :

$$L = \begin{cases} \tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda} + 1, \dots, \tilde{\Lambda} + \max(\lambda, \mu) & \text{при } \tilde{\Lambda} \neq 0, \\ \max(\lambda, \mu), \max(\lambda, \mu) - 2, \dots, 0 \text{ или } 1 & \text{при } \tilde{\Lambda} = 0. \end{cases} \quad (1.327)$$

В ядерной p -оболочке возможны лишь такие конфигурации, для которых разбиения содержат $f_i \leq 4$ ($\lambda + \mu \leq 4$), ибо для того, чтобы образовать полностью антисимметричные функции, мы должны комбинировать их со спин-изоспиновыми волновыми функциями. Но заметим, что общим методом классификации состояний на основе неприводимых представлений группы U_3 пользуются, когда необходимо характеризовать состояния в потенциале гармонического осциллятора (см. гл. 7, приложение 3).

**Классификация спин-изоспиновых волновых функций
(табл. 1.10)**

В табл. 1.10 приведено разложение состояний с определенной перестановочной симметрией $[f]$ в спин-изоспиновом пространстве (и с сопряженной симметрией $[\bar{f}]$ в орбитальном пространстве) на составляющие (T, S) с полным изоспином T и полным спином S при $n \leq 6$. Таблица была построена примерно так же, как и табл. 1.9.

При $n = 2$ мы перечислим таблицы ρ_m в m -пространстве, соответствующие различным значениям квантовых чисел M_T и M_S . Вместо $m = +\frac{1}{2}$ мы будем

Таблица 1.10
КЛАССИФИКАЦИЯ СПИН-ИЗОСПИНОВЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

n	$[U]$	(T, S)
1	[1]	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
2	[2]	$(1, 1)(0, 0)$
	[11]	$(1, 0)(0, 1)$
3	[3]	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	[21]	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	[111]	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
4	[4]	$(2, 2)(1, 1)(0, 0)$
	[31]	$(2, 1)(1, 2)(1, 1)(1, 0)(0, 1)$
	[22]	$(2, 0)(0, 2)(1, 1)(0, 0)$
	[211]	$(1, 1)(1, 0)(0, 1)$
	[1111]	$(0, 0)$
5	[5]	$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	[41]	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	[32]	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	[311]	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	[221]	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	[2111]	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
6	[6]	$(3, 3)(2, 2)(1, 1)(0, 0)$
	[51]	$(3, 2)(2, 3)(2, 2)(2, 1)(1, 2)(1, 1)(1, 0)(0, 1)$
	[42]	$(3, 1)(1, 3)(2, 2)(2, 1)(1, 2)(1, 1)^2(2, 0)(0, 2)(0, 0)$
	[411]	$(2, 2)(2, 1)(1, 2)(1, 1)(1, 0)(0, 1)$
	[33]	$(3, 0)(0, 3)(2, 1)(1, 2)(1, 0)(0, 1)$
	[321]	$(2, 1)(1, 2)(2, 0)(0, 2)(1, 1)^2(1, 0)(0, 1)$
	[3111]	$(1, 1)(0, 0)$
	[222]	$(1, 1)(0, 0)$
	[2214]	$(1, 0)(0, 1)$

писать знак « \rightarrow » и вместо $m = -\frac{1}{2}$ знак « \leftarrow », а для заполнения таблиц примем стандартный порядок $++$, $+-$, $-+$, $--$. При этом первым всегда будет квантовое число m_l , а вторым m_s . Итак, у нас будут следующие таблицы:

$M_T = l$,	$M_S = 1$	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr></table>	+	+	+	+	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td></tr></table>	+	+		
+	+	+	+								
+	+										
$M_T = l$,	$M_S = 0$	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	+	+	+	-	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>-</td><td>-</td></tr></table>	+	+	-	-
+	+	+	-								
+	+										
-	-										
$M_T = 0$,	$M_S = 1$	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	+	+	-	+	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>-</td><td>+</td></tr></table>	+	+	-	+
+	+	-	+								
+	+										
-	+										
$M_T = 0$,	$M_S = 0$	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	+	+	-	-	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>-</td><td>-</td></tr></table>	+	+	-	-
+	+	-	-								
+	+										
-	-										
		<table border="1"><tr><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	+	-	-	+	<table border="1"><tr><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>-</td><td>+</td></tr></table>	+	-	-	+
+	-	-	+								
+	-										
-	+										

Тем самым получен хорошо известный результат: для симметричных спин-изоспиновых функций [2] мы имеем $(T, S) = (1, 1)$ и $(0, 0)$, а для антисимметричных функций [11] мы имеем $(T, S) = (0, 1)$ и $(1, 0)$. Выписывая в m -пространстве таблицы, возможные при $n = 3$, получаем

$M_T = \frac{3}{2}$,	$M_S = \frac{3}{2}$	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr></table>	+	+	+	+	+	+	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr></table>	+	+	+	+				
+	+	+	+	+	+												
+	+	+	+														
$M_T = \frac{3}{2}$,	$M_S = \frac{1}{2}$	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	+	+	+	+	+	-	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	+	+	+	+	-	-	-	-
+	+	+	+	+	-												
+	+	+	+														
-	-	-	-														
$M_T = \frac{1}{2}$,	$M_S = \frac{3}{2}$	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	+	+	+	+	-	+	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	+	+	+	+	-	-	-	-
+	+	+	+	-	+												
+	+	+	+														
-	-	-	-														
$M_T = \frac{1}{2}$,	$M_S = \frac{1}{2}$	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	+	+	+	-	+	-	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	+	+	+	-	-	-	-	-
+	+	+	-	+	-												
+	+	+	-														
-	-	-	-														
		<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	+	+	+	-	-	-	<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	+	+	-	-	-	-	-	-
+	+	+	-	-	-												
+	+	-	-														
-	-	-	-														
			<table border="1"><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr></table>	+	+	+	+										
+	+	+	+														
			<table border="1"><tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	-	-	-	-										
-	-	-	-														

что соответствует (T, S) -структуре, представленной в табл. 1.10.

При $n = 3$ возможен и другой вывод (T, S) структуры. Заметим, что в симметрии [111] не хватает одной частицы для того, чтобы образовать симметрию [1111], которая содержит единственное состояние — состояние заполненной оболочки. Следовательно, состояние с симметрией [111] можно рассматривать как дырку в заполненной оболочке с теми же самыми квантовыми числами, что и у одной частицы, т. е. $(T, S) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Теперь, составляя произведения

двухчастичных состояний с состоянием третьей частицы, можно построить другие симметрии:

$$[21] = [11] \otimes [1] - [111] \rightarrow [(1, 0) + (0, 1)] \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$[3] = [2] \otimes [1] - [21] \rightarrow [(1, 1) + (0, 0)] \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) -$$

$$- \left[\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right] = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Остальную часть табл. 1.10 можно построить так, как говорилось выше.

Поскольку в спин-изospиновом пространстве нуклон обладает четырьмя базисными состояниями, состояния нуклонов, классифицированные на основе представлений группы U_4 , называются супермультиплетами. Присваивание квантовых чисел T и S соответствует приведению представлений группы U_4 к произведению представлений двух групп U_2 .

Табл. 1.10 можно также рассматривать как таблицу внутренних произведений представлений группы S_n . Например, при $n = 3$ представление группы U_2 с $T = 1/2$ или $S = 1/2$ относится к разбиению $[21]$, а появление квантовых чисел $(T, S) = (1/2, 1/2)$ для всех симметрий $[3]$, $[21]$ и $[111]$ соответствует тому, что произведение $[21] \otimes [21]$ содержит каждую из этих симметрий (см. табл. 1.7).

2.

МОДЕЛЬ НЕЗАВИСИМЫХ ЧАСТИЦ

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЯДЕР

1. Размеры ядер

Еще на ранней стадии изучения структуры ядра данные о времени жизни относительно α -распада и о сечениях рассеяния α -частиц на легких ядрах дали основание предполагать, что плотность ядра приблизительно постоянна внутри объема, который, грубо говоря, пропорционален атомному весу A [381]. Это предположение было очень тщательно проверено в опытах по рассеянию электронов большой энергии (фиг. 2.1), и было получено значение плотности в центре ядра

$$\rho(0) = 0,17 \text{ нуклон/ферми}^3. \quad (2.1)$$

Плотность убывает от этого значения до нуля на расстоянии порядка 2—3 ферми, и, следовательно, во всех ядрах, кроме самых легких, толщина поверхностного слоя значительно меньше радиальных размеров ядра. Поэтому можно ввести понятие радиуса ядра R , который меняется приблизительно по закону

$$R = r_0 A^{1/3}. \quad (2.2)$$

Если под R понимать расстояние, на котором плотность ядерного вещества уменьшается вдвое по сравнению со значением (2.1) в цент-

ре ядра, то из данных по электронному рассеянию (фиг. 2.1) следует, что $r_0 = 1,1$ ферми. Это значение радиуса согласуется также с данными о распределении заряда внутри ядра, полученными в результате исследования мезоатомов. Вопросу определения размеров ядер посвящены работы [410, 148, 240]. Поскольку граница ядра не резкая (фиг. 2.1), определение радиуса ядра зависит от того, какое явление мы изучаем (см. примеры к § 1, где рассматривается вопрос о различных мультипольных моментах распределения заряда ядра, определяемых по данным о рассеянии электронов).

Имеющиеся данные о распределении плотности нуклонов в ядрах относятся главным образом к плотности протонов. Но в тяжелых ядрах из-за кулоновских сил и связанного с ними избытка нейтронов распределения плотностей нейтронов и протонов могут несколько различаться. На это указывают, по-видимому, данные об изотопическом сдвиге и о смешивании изотопического спина, обусловленном кулоновским полем (фиг. 2.2 и 2.6), а также данные по рассеянию быстрых π^+ - и π^- -мезонов [148] и новые результаты, полученные при изучении захвата K^- -мезонов [119, 79].

То обстоятельство, что плотность ядерной материи почти постоянна, связано с конечным радиусом действия ядерных сил. Этот радиус порядка r_0 и, следовательно, мал по сравнению с размерами ядра. Такое «насыщение» ядерной материи проявляется и в том, что полная энергия связи ядра, грубо говоря, пропорциональна A . Подобные свойства ядер несколько искажаются поверхностными эффектами и дальнодействующими кулоновскими силами взаимодействия протонов (см. ниже).

2. Средняя длина свободного пробега нуклонов

Важнейшей характеристикой любой системы многих тел является средняя длина свободного пробега между столкновениями составляющих ее частиц. Многочисленные данные свидетельствуют о том, что средняя длина свободного пробега нуклонов в ядре велика по сравнению с расстоянием между ними и в силу ряда причин больше размеров ядра. Проще всего такую «полупрозрачность» обнаружить в экспериментах по рассеянию протонов и нейтронов. На фиг. 2.3 представлены типичные примеры энергетической зависимости полного сечения взаимодействия нейтронов с ядрами. В случае систем, в которых средняя длина свободного пробега мала по сравнению с радиусом, полное сечение должно монотонно уменьшаться с ростом энергии, медленно стремясь к предельному значению $2\pi R^2$ [42]. Колебания же экспериментально наблюдаемых сечений объясняются интерференцией падающей и выходящей волн и как раз доказывают то, что средняя длина свободного пробега по крайней мере сравнима с радиусом ядра. В дальнейшем (§ 4, п. 3) мы проведем

количественный анализ таких экспериментов (см. также то, что говорится по поводу фиг. 2.3).

Сравнительно большая средняя длина свободного пробега нуклонов свидетельствует о том, что взаимодействие между ними в основном приводит к возникновению плавно меняющегося среднего потенциала, в котором частицы движутся независимо друг от друга. В качестве первого приближения в тяжелых ядрах мы можем пре-небречь поверхностными эффектами и в результате получим модель ферми-газа, из которой можно исходить при изучении многих основных свойств ядер.

3. Импульсное распределение (модель ферми-газа)

Рассмотрим область объемом Ω , в пределах которой потенциал постоянен. В этом случае одночастичные состояния описываются плоскими волнами

$$\varphi_v = \Omega^{-1/2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \chi_{m_s} \xi_{m_t}, \quad (2.3)$$

где χ и ξ — спиновые и изоспиновые функции, зависящие от квантовых чисел, которыми характеризуют проекцию спина нуклона $m_s = \pm 1/2$ и проекцию его изотопического спина (для нейтрона $m_t = + 1/2$, а для протона $m_t = - 1/2$).

Поскольку мы пренебрегаем поверхностными эффектами, допустимые значения \mathbf{k} определяются периодическими граничными условиями

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x + L, y, z) = \varphi(x, y + L, z) = \varphi(x, y, z + L), \quad (2.4)$$

где L — длина элемента объема, в который заключены частицы ($\Omega = L^3$). Граничные условия (2.4) дают нам собственные значения

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi}{L} n_x, & k_y &= \frac{2\pi}{L} n_y, & k_z &= \frac{2\pi}{L} n_z, \\ \left. \begin{array}{c} n_x \\ n_y \\ n_z \end{array} \right\} &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, средняя плотность одночастичных уровней в k -пространстве дается выражением

$$\underbrace{dn}_{\text{—}} = 4 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \Omega d^3 k, \quad (2.6)$$

где множитель 4 введен, чтобы учесть то обстоятельство, что при каждом значении \mathbf{k} возможны четыре разных спиновых и изоспиновых состояния. Волновая функция основного состояния ферми-газа представляет собой произведение волновых функций (2.3) состояний с наименьшей энергией (эффекты, связанные с антисимме-

тризацией, рассматриваются ниже, см. п. 8). Граница, разделяющая заполненные и незаполненные состояния, называется поверхностью Ферми. Соответствующие ей волновые числа обозначаются символами $k_F^{(p)}$ для протонов и $k_F^{(n)}$ для нейтронов. Величина k_F находится из условия равенства числа занятых состояний числу частиц (Z для протонов и N для нейтронов), так что из выражения (2.6) мы получаем

$$k_F^{(p)} = \left(3\pi^2 \frac{Z}{\Omega} \right)^{1/3}, \quad k_F^{(n)} = \left(3\pi^2 \frac{N}{\Omega} \right)^{1/3}. \quad (2.7)$$

Отсюда, взяв экспериментальное значение плотности частиц (2.1), получим среднее для протонов и нейтронов ($Z = N = A/2$) значение

$$k_F \approx 1,36 \text{ ферми}^{-1}. \quad (2.8)$$

Самым прямым способом проверки модели ферми-газа было бы измерение распределения нуклонов в ядре по импульсам. С этой целью проводились различные эксперименты с бомбардирующими частицами высоких энергий. Но результаты, полученные до сих пор, относятся главным образом к легким ядрам, и их интерпретация осложняется трудностями, с которыми связано описание механизма реакции {см., например, данные о реакции ($p, 2p$) при высокой энергии (фиг. 2.27), а также критический обзор данных о распределении импульсов в ядре [206]}.

Энергия Ферми, соответствующая формулам (2.7), — это максимальная кинетическая энергия частиц ферми-газа. Она равна

$$\epsilon_F = \frac{(\hbar k_F)^2}{2M} \approx 37 \text{ Мэв}. \quad (2.9)$$

Полную кинетическую энергию ферми-газа получим путем суммирования поенным состояниям:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{3}{5} (N\epsilon_F^{(n)} + Z\epsilon_F^{(p)}) \approx \frac{3}{5} A\epsilon_F. \quad (2.10)$$

Если судить по величине энергии Ферми, то в обычных экспериментальных условиях ядро представляет собой сильно вырожденный ферми-газ. Лишь при энергиях $\epsilon_F A \sim 10^3$ Мэв будет возбуждаться заметная часть всех нуклонов.

4. Энергия связи ядер

Полная энергия связи ядра \mathcal{B} равна разности между экспериментально наблюдаемой массой \mathcal{M} (которая эквивалентна полной энергии ядра \mathcal{E}) в основном состоянии и суммой масс отдельных нуклонов:

$$\mathcal{M}(N, Z) = \frac{1}{c^2} \mathcal{E}(N, Z) = NM_n + ZM_p - \frac{1}{c^2} \mathcal{B}(N, Z). \quad (2.11)$$

Основной ход изменения \mathcal{B} явствует из данных фиг. 2.4. Его можно объяснить, исходя из простой полуэмпирической формулы, отдель-

ные слагаемые которой можно увязать с общими свойствами ядер, о которых говорилось выше [449, 38]

$$\mathcal{B} = b_{06}A - b_{\text{пов}}A^{2/3} - \frac{1}{2}b_{\text{симм}} \frac{(N-Z)^2}{A} - \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_c}, \quad (2.12)$$

То, что главное слагаемое в выражении для энергии связи ядра должно быть линейным по A , прямо следует из того факта, что плотность ядерной материи почти не зависит от A . Таким образом, первый член в выражении (2.12) есть объемная энергия, представляющая собой энергию связи в пределе больших A , при $N = Z$ и в отсутствие кулоновских сил.

Второй член — поверхностная энергия. Это характеристика, общая для всех конечных систем и отражающая то обстоятельство, что у частиц, находящихся на поверхности, меньше соседей, чем у внутренних частиц. Правда, в противоположность тому, что мы имеем в случае классических жидкостей и кристаллов, структура поверхности ядра и энергия, связанная с наличием такой поверхности, в значительной мере зависят от кинетической энергии. Член поверхностной энергии ответствен за то, что энергия связи, приходящаяся на одну частицу, растет с увеличением A , о чем свидетельствуют данные фиг. 2.4 для легких ядер.

Вообще говоря, член, пропорциональный $A^{2/3}$, — это главная поправка к линейному члену, описывающему энергию насыщенной системы. Поэтому в принципе экспериментально определенный коэффициент $b_{\text{пов}}$ мог бы содержать вклады от разных эффектов (зависимость плотности от A или от корреляций и т. д.), которые не обязательно пропорциональны площади поверхности ядра. Но данные о высоте потенциального барьера для процесса деления показывают, что этот член действительно представляет собой поверхностную энергию. Высота барьера очень сильно зависит от отношения поверхностной и кулоновской энергии (см. то, что говорится о процессе деления в гл. 6). Параметр поверхностной энергии, определенный на основании экспериментальных значений порогов деления, $b_{\text{пов}} = 17 \text{ Мэв}$, прекрасно согласуется со значением (2.14), найденным из систематики масс ядер [80, 333].

Третий член в выражении (2.12) — энергия симметрии ядра, которая отражает тенденцию к стабильности ядер с $N = Z$. Энергию симметрии можно разделить на кинетическую и потенциальную части. При заданном A кинетическая энергия ядерного ферми-газа имеет минимум при $N = Z$. Вклад кинетической энергии в $b_{\text{симм}}$ можно найти, разложив величину (2.10) в ряд по степеням $(N - Z)$. Мы получим

$$(b_{\text{симм}})_{\text{кин}} = \frac{2}{3} (e_F)_{N=Z} \approx 25 \text{ Мэв}. \quad (2.13)$$

Вклад потенциальной энергии в $b_{\text{симм}}$ связан с той особенностью ядерных сил, что взаимодействие нейтрона с протоном в среднем сильнее, чем взаимодействие между одинаковыми частицами (см. § 5, п. 2). Исходя из эмпирического значения $b_{\text{симм}} \approx 50 \text{ Мэв}$ [см. равенства

(2.14)] и оценки (2.13), мы видим, что потенциальная часть $b_{\text{симм}}$ равна приблизительно 25 Мэв.

Последний член полуэмпирической массовой формулы (2.12) есть кулоновская энергия равномерно заряженной сферы радиусом R_c . Кулоновское отталкивание приводит к постепенному уменьшению энергии связи, приходящейся на одну частицу, при перемещении в сторону тяжелых ядер, как это видно из фиг. 2.4.

Экспериментальные значения энергии связи ядер довольно хорошо воспроизводятся полуэмпирической массовой формулой, если выбрать следующие значения параметров (фиг. 2.4):

$$\begin{aligned} b_{\text{об}} &\approx 16 \text{ Мэв}, \\ b_{\text{пов}} &\approx 17 \text{ Мэв}, \\ b_{\text{симм}} &\approx 50 \text{ Мэв}, \\ R_c &\approx 1,24A^{1/3} \text{ ферми}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Эти значения параметров согласуются также с величиной нейтронного избытка β -стабильных ядер (фиг. 2.18). Точнее полуэмпирическая массовая формула проверяется при попытках предсказания масс ядер, далеких от дорожки β -стабильности (что особенно важно в связи с теориями происхождения элементов, см. § 3, п. 2), и ядер, гораздо более тяжелых, чем изучавшиеся до сих пор. Для этих целей, вероятно, могут понадобиться дополнительные члены в массовой формуле, учитывающие, например, зависимость поверхностной энергии ядра и средней ядерной плотности от параметра зарядовой симметрии $N - Z$.

При более детальном изучении энергии связи ядер выявляются систематические отклонения от плавно меняющейся функции переменных N и Z , которые могут достигать 10 Мэв (фиг. 2.4). Для расчета таких квантовых эффектов необходимы более полные данные о структуре ядра, в том числе нужно точно знать конфигурацию, иметь возможность оценить эффекты корреляции и т. д. Самые существенные квантовые эффекты связаны с оболочечной структурой и деформацией ядер (см. гл. 9, § 1). Попытки обобщить формулу для энергии связи так, чтобы она учитывала эти эффекты посредством ряда средних параметров, предпринимались в работах [475, 333]. В следующем пункте мы рассмотрим квантовые эффекты особенно простой структуры — парную энергию.

5. Парная энергия

Энергия связи ядер систематически меняется в зависимости от того, четны или нечетны Z и N :

$$\delta\mathcal{B} = \begin{cases} \Delta & \text{при } Z \text{ четном, } N \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } A \text{ нечетном,} \\ -\Delta & \text{при } Z \text{ нечетном, } N \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Существование такой нечетно-четной разности (парной энергии) вытекает из модели ферми-газа, поскольку в каждом состоянии, характеризуемом волновым числом \mathbf{k} , может быть не более двух протонов и двух нейтронов. Нечетно-четный параметр Δ по порядку величины должен быть равным расстоянию между одночастичными уровнями в окрестности поверхности Ферми:

$$(\Delta)_{\text{кин}} \approx \frac{2}{3} \frac{v_F}{A} \approx \frac{25}{A} M\text{эв}. \quad (2.16)$$

Экспериментальные значения парных энергий Δ представлены на фиг. 2.5. Легко видеть, что они почти на порядок больше.

Это можно объяснить, если предположить наличие парных корреляций между тождественными частицами, которые приводят к появлению дополнительной энергии связи 2Δ на одну пару (для нуклонов вблизи границы распределения Ферми). В пользу такого предположения говорит отсутствие уровней в четно-четных ядрах при энергиях возбуждения, меньших, чем требуется для разрыва пары (экспериментальные доказательства существования такой энергетической щели приводятся в гл. 8). Корреляция частиц в паре связана со смешиванием одночастичных состояний внутри энергетического интервала порядка Δ . Таким образом, переход от занятых состояний к свободным, который в ферми-газе без взаимодействия происходит резко на границе Ферми, размазывается по энергетическому интервалу порядка Δ .

Эффект спаривания играет очень важную роль в ядерных явлениях при малых энергиях. Теоретически его можно учесть путем простого обобщения одночастичного описания, что и будет сделано в гл. 8 после того, как в гл. 7 мы проведем анализ корреляций между двумя частицами, которые находятся на орбитах, расположенных над поверхностью Ферми. Корреляционный эффект есть следствие того, что ядерные силы — это преимущественно силы притяжения. Поэтому в атомах, где мы имеем дело с кулоновским взаимодействием отталкиванием электронов, он не наблюдается (фиг. 2.13).

6. Изоспиновое квантовое число

Зависимость энергии связи от изоспина

Выражение (2.12) дает энергию связи основного состояния ядра с заданными Z и N , т. е. с определенными $A = Z + N$ и $M_T = -1/2(N-Z)$. Основное состояние ферми-газа получается путем последовательного заполнения нейтронных и протонных уровней вплоть до соответствующих энергий Ферми. Полученное таким путем состояние характеризуется полным изоспином $T = M_T$. В самом деле, нейtron и протон, находящиеся на одной орбите, образуют систему с нулевым изоспином, поскольку их волновая функция симметрична

в спиново-координатном пространстве. Таким образом, в основном состоянии изоспин ферми-газа определяется исключительно избыточными нейтронами, т. е. мы получаем полностью «выстроенный» изоспин, $T = M_T$.

Пользуясь зарядовой независимостью ядерных сил, можно из выражения (2.12) найти энергию связи для самого нижнего состояния с любым более высоким значением T . Такое состояние представляет собой изобарический аналог основного состояния ядра с M_T , равным рассматриваемому значению T .

Выразим энергию связи через T и M_T . Очевидно, что единственный член, зависящий от M_T , — это кулоновская энергия, которая представляет собой функцию переменной $Z = 1/2 A - M_T$. Остальная часть энергии связи может зависеть только от T и A . Таким образом, член, пропорциональный $(N - Z)^2$, можно считать главным членом в разложении по степеням изоспина:

$$\mathcal{E}(A, T, M_T) = \mathcal{E}_0(A) + 2b_{\text{симм}} \frac{T^2}{A} + \frac{3}{5} \left(\frac{A}{2} - M_T \right)^2 \frac{e^2}{R_c}. \quad (2.17)$$

Энергия симметрии может также содержать и член, пропорциональный T ; последний связан с нейтрон-протонным обменным взаимодействием и характеризует более тонкие особенности структуры ядра. Так, потенциал (2.29) дает вклад, пропорциональный $T(T+1)$, а исходя из предположения о полной супермультиплетной симметрии, мы получим энергию взаимодействия, пропорциональную $T(T+4)$ [42]. Экспериментальные данные относительно масс ядер с малыми T говорят о существовании линейного члена [333]. Но из соображений простоты мы оставим только квадратичный член, поскольку он дает главный вклад в случае тяжелых ядер.

Разность энергий связи для состояний одного и того же ядра, характеризующихся разными значениями T при одинаковых M_T и A , определяется энергией симметрии. Так, энергия возбуждения, соответствующая самому нижнему состоянию с $T = M_T + 1$, равна примерно

$$\mathcal{E}(A, T+1, M_T=T) - \mathcal{E}(A, T, M_T=T) \approx 4b_{\text{симм}} \frac{T+1/2}{A}. \quad (2.18)$$

Данную оценку следует рассматривать как усредненную, полученную без учета эффектов оболочечной структуры и спаривания.

Разность энергий связи изобарических аналоговых состояний (т. е. состояний с одинаковыми A и T , но разными M_T) равна кулоновской энергии. Выражение для кулоновской энергии в формуле (2.12) получено на основе весьма упрощенного усредненного распределения заряда в ядре. Но взаимодействие каждого заряда с самим собой учитывается в массе покоя протона, и поэтому в ядерной кулоновской энергии нужно учитывать только взаимодействие с $Z - 1$ другими зарядами. Таким образом, можно добиться некоторого улучшения формулы, заменив Z^2 на $Z(Z-1)$.

При квантовомеханическом расчете кулоновской энергии следует принять во внимание корреляцию протонов, обусловленную антисимметризацией волновой функции. Этот эффект рассматривается ниже [формула (2.45)]. С учетом такой корреляции для тяжелых ядер имеем

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{кул}}}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_c} \left[1 - 5 \left(\frac{3}{16\pi Z} \right)^{2/3} \right] \approx 0,70 \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 0,76 Z^{-2/3}) M_{\beta\theta} \quad (2.19)$$

$(R_c = 1,25 A^{1/3} \text{ ферми}, \quad A \geq 40),$

Поскольку корреляция, обусловленная антисимметризацией волновой функции, существенна на расстояниях, меньших $k_F^{-1} \sim r_0$ (см. ниже), второй член в квантовомеханической формуле (2.19) в $A^{1/3}$ раз больше классической поправки, получаемой заменой Z^2 на $Z(Z-1)$. Параметр R_c в формуле (2.19) был определен по разностям энергий между изобарическими аналогами состояниями (см., например, работы [11, 22]). Полученное таким путем значение R_c значительно больше значения R_c в формуле (2.66), характеризующего плотность всего заряда, которое было найдено по данным о рассеянии электронов. Такое расхождение вполне понятно, поскольку энергия изобарического смещения представляет собой кулоновскую энергию избыточного заряда. Плотность радиального распределения последнего соответствует плотности избыточных нейтронов, а радиусы этих пейтропов несколько больше радиуса протонного распределения.

В случае легких ядер ($A \leq 20$) кулоновскую энергию невозможно представить в таком простом виде, как (2.19). Действительно, в этой области ядер диффузность распределения заряда того же порядка, что и радиус ядра, и поэтому R_c уже не меняется по закону $A^{1/3}$. Кроме того, обменный член становится все более существенным и начинает зависеть от деталей ядерной конфигурации [вопрос о кулоновских энергиях в легких ядрах рассматривается в работах [87, 404, 222]].

Нарушение чистоты изоспина кулоновским потенциалом

Основной эффект кулоновских сил сводится к добавлению к гамильтониану ядра члена, зависящего только от M_T (и A). Этот член приводит к значительному расщеплению компонент T -мультиплета, но является диагональным по T (сохраняет изоспин).

Но кулоновским взаимодействием обусловлены и эффекты, приводящие к несохранению T . Так, кулоновское взаимное отталкивание протонов приводит к тому, что отношение протонной плотности к нейтронной несколько увеличивается в направлении от центра ядра к его поверхности. Величина примеси по изоспину приведена на фиг. 2.6. Нетрудно видеть, что даже в тяжелых ядрах среднее кулоновское поле примешивает к основному состоянию компоненты с $T > M_T$ с вероятностью порядка долей процента.

В более высокой части энергетического спектра имеет место приблизительное вырождение состояний с разным изоспином. В такой ситуации даже очень небольшое взаимодействие, нарушающее изоспин, может привести к появлению больших примесей близколежащих состояний с различными изоспинами.

7. Ядерный потенциал

Средний потенциал для частиц на поверхности Ферми

По известным энергиям связи можно приближенно оценить потенциальную энергию нуклона в ядре. Если предположить, что энергия межнуклонного взаимодействия сводится к сумме потенциальных энергий отдельных частиц, то энергия, необходимая для удаления нейтрона из ядра (энергия отделения нейтрона), будет иметь вид

$$S_n(N, Z) \equiv \mathcal{B}(N, Z) - \mathcal{B}(N-1, Z) \approx -(V_n + e_F). \quad (2.20)$$

Аналогичное выражение можно написать и для протонов. Поскольку S порядка 10 Мэв , а $e_F \sim 40 \text{ Мэв}$ [см. формулу (2.9)], потенциал V оказывается порядка -50 Мэв . Далее мы увидим, что такая величина потенциала совместима со значением, полученным из экспериментов по нуклонному рассеянию (см. § 4, п. 3). Отметим, что энергия отделения представляет собой сравнительно небольшую разность больших значений кинетической и потенциальной энергий нуклона.

Зависимость потенциала от скорости

Приведенная нами оценка величины потенциальной энергии относится к частицам на границе распределения Ферми. Вследствие того, что межнуклонное взаимодействие зависит от скорости и корреляций, эффективный потенциал V должен зависеть от импульса.

В самом деле, нетрудно показать, что насыщенная система с одиночественной структурой, подобная ядру, должна описываться потенциалом, зависящим от скорости [448]. Поэтому энергия связи, приходящаяся на одну частицу, имеет вид

$$\frac{\mathcal{B}}{A} = -\left(\frac{1}{2}\langle V \rangle + \langle e_{\text{кин}} \rangle\right). \quad (2.21)$$

Множитель $1/2$ появляется в связи с тем, что взаимодействие предполагается двухчастичным и его следует учитывать один раз на каждую пару (если бы были существенны n -частичные силы, то множитель был бы равен $1/n$). Средние значения потенциальной и кинетической энергии, фигурирующие в формуле (2.21), можно вычислить на основании распределения Ферми. Зависимость потенциала V от скорости можно получить, комбинируя формулы (2.20) и (2.21) с соотношением $S = \mathcal{B}/A$, применимым к бесконечной насыщенной системе, где энергия отделения не зависит от A (сравнивая фиг. 2.4 с фиг. 2.15 и фиг. 2.16, мы видим, что данное соотношение приблизительно выполняется для тяжелых ядер, расположенных вдоль дорожки β -стабильности). Взяв выражение (2.10) для среднего значения кинетической энергии ферми-газа, получим

$$\langle V \rangle \approx V(e_F) - \frac{1}{5}e_F - \frac{\mathcal{B}}{A}, \quad (2.22)$$

где $V(\varepsilon_F)$ — поле, действующее на наиболее слабо связанные нуклоны и совпадающее с потенциалом V в формуле (2.20). Таким образом, учитывая, что V — отрицательная величина, мы видим, что средний потенциал должен быть глубже, чем $V(\varepsilon_F)$.

Эффективная масса

Зависимость среднего потенциала от состояния можно приближенно учесть, введя эффективную массу. Для этого разложим V в ряд по степеням $\varepsilon_{\text{кин}}$ и сохраним только два первых члена разложения (что, вероятно, будет очень грубым приближением при $\varepsilon_{\text{кин}} \sim \varepsilon_F$):

$$V = V(\varepsilon_{\text{кин}} = 0) + a\varepsilon_{\text{кин}}. \quad (2.23)$$

Если комбинировать уравнение (2.23) с обычным выражением для кинетической энергии, то получим гамильтониан, описывающий движение в постоянном статическом потенциале. При этом зависимость потенциала от скорости включена в модифицированный член кинетической энергии, в котором масса нуклона M заменяется эффективной массой M^* в соответствии с соотношением

$$\frac{M}{M^*} = 1 + a. \quad (2.24)$$

Из соотношений (2.23) и (2.22) получаем, что

$$a \approx \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\mathcal{B}}{A} \right) \frac{1}{\varepsilon_F}, \quad (2.25)$$

откуда видно, что $M^* \approx M/2$. Такая энергетическая зависимость потенциала наблюдается в экспериментах по рассеянию (фиг. 2.3 и 2.29), а также следует из анализа связанных состояний (фиг. 3.5).

Подчеркнем, что представление об эффективной массе — это просто способ выражения зависимости среднего поля эффективного одночастичного гамильтониана от состояния. Следствия такой зависимости от состояния и ее влияние на другие свойства ядра, вообще говоря, нельзя получить заменой массы нуклона M на M^* в соответствующих формулах, выведенных в случае постоянного потенциала (см. замечания о магнитных моментах в гл. 3, приложение 3, п. 6 и о моментах инерции в гл. 9, § 2).

Потенциал симметрии

В тяжелых ядрах существование нейтронного избытка приводит к тому, что средние потенциалы, действующие на нейтроны и протоны, оказываются неодинаковыми. Этот эффект приводит к появлению потенциальной части энергии симметрии. Средний потенциал, дей-

ствующий на нуклон, можно записать в виде

$$V = V_0 + \frac{1}{2} t_z \frac{N-Z}{A} V_1, \quad t_z = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{для нейтронов,} \\ -\frac{1}{2} & \text{для протонов.} \end{cases} \quad (2.26)$$

В приближении независимых частиц полная потенциальная энергия в случае двухчастичных сил равна полу сумме потенциальных энергий отдельных нуклонов, и поэтому

$$(\mathcal{E}_{\text{симм}})_{\text{пот}} \approx \frac{1}{8} \frac{(N-Z)^2}{A} V_1. \quad (2.27)$$

Пользуясь приведенными выше оценками (2.13) и (2.14), получаем

$$V_1 \approx 4(b_{\text{симм}})_{\text{пот}} = 4[b_{\text{симм}} - (b_{\text{симм}})_{\text{кин}}] \approx 100 \text{ } M\text{эв}. \quad (2.28)$$

Таким образом, в случае тяжелых ядер ($A \sim 200$, $Z \sim 80$) второй член потенциала (2.26) равен примерно $5 \text{ } M\text{эв}$. В случае протонов полный потенциал получим, прибавив к (2.26) кулоновский потенциал, который для тяжелых ядер ($A \sim 200$) составляет примерно $20 \text{ } M\text{эв}$ в центре ядра и уменьшается приблизительно до $13 \text{ } M\text{эв}$ на поверхности.

Зарядово-обменный потенциал

Изобарическая инвариантность сил, ответственных за член симметрии в ядерном потенциале, предполагает существование соответствующего нейтрон-протонного обменного потенциала [275]. В выражении (2.26) содержится произведение z -компонент изоспинов нуклона и ядра, а полный потенциал должен иметь вид, обеспечивающий инвариантность относительно вращения в изопространстве:

$$V = V_0 + \frac{V_1}{A} \mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_{A-1}, \quad (2.29)$$

где \mathbf{t} — изоспин нуклона, а \mathbf{T}_{A-1} — изоспин оставшейся части ядра.

Обменные члены в выражении (2.29), т. е. члены, содержащие $t_{\pm} = t_x \pm it_y$, не влияют на низколежащие конфигурации ядра, которые полностью выстроены в изопространстве. Но эти члены существенны при рассмотрении высоколежащих конфигураций, так как они обеспечивают сохранение полного изоспина ядра [см., например, фиг. 3.1 и формулу (3.19)].

Обменный потенциал можно непосредственно исследовать в опытах по рассеянию нуклонов с перезарядкой [реакции (p, n) на ядрах с избытком нейтронов]. О результатах таких опытов говорится в § 4, п. 3.

8. Антисимметричные волновые функции ферми-газа

При последовательном квантовомеханическом описании ферми-газа вносятся определенные уточнения в полуклассическую картину. Антисимметризованной волновой функцией системы независимых пуклонов является определитель Слэтера, построенный из волновых функций отдельных частиц [403]. Матричные элементы для таких волновых функций ищутся методом операторов рождения и уничтожения. Основное содержание такого метода излагается в приложении 1.

Структуру антисимметризованного состояния $|v_1 v_2 \dots v_A\rangle_a$, построенного из одночастичных состояний (2.3), можно выяснить, если вычислить средние значения различных операторов. Рассмотрим одночастичный пространственный оператор плотности

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (2.30)$$

Математическое ожидание этого оператора в основном состоянии ферми-газа можно непосредственно вычислить, используя определитель Слэтера, построенный на функциях (2.3). Мы получим общий результат [см. формулу (2.256)], согласно которому среднее значение от любого одночастичного оператора равно сумме средних значений для отдельных частиц на занятых состояниях. Поэтому процедура антисимметризации не оказывается на вычислении среднего значения одночастичного оператора и мы получаем

$$\langle v_1 v_2 \dots v_A | \rho(\mathbf{r}) | v_1 v_2 \dots v_A \rangle_a = \sum_{i=1}^A |\varphi_{v_i}(\mathbf{r})|^2 = \frac{A}{\Omega} = \rho_0. \quad (2.31)$$

Пользуясь формулой (2.7), среднее значение плотности можно представить в виде

$$\rho_0 = 4 \frac{k_F^3}{6\pi^2}. \quad (2.32)$$

Поскольку в качестве базисных функций мы взяли плоские волны [см. формулу (2.3)] и пренебрегли поверхностными эффектами, у нас получается, что плотность постоянна.

Эффекты антисимметризации проявляются, когда мы рассматриваем двухчастичные операторы, например оператор

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{j < k} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)]. \quad (2.33)$$

Среднее значение такого оператора (корреляционная функция) дает вероятность того, что одна частица имеет координату \mathbf{r} , а другая \mathbf{r}' . Здесь, как и выше, мы можем вычислить среднее, пользуясь либо определителем Слэтера, либо общими соотношениями, полученными в приложении 1. Из формулы (2.262) следует, что среднее значение

оператора $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ равно

$$\langle v_1 v_2 \dots v_A | \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | v_1 v_2 \dots v_A \rangle_a = \sum_{v_i \leq v_k \leq v_F} \langle v_i v_k | \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | v_i v_k \rangle_a. \quad (2.34)$$

Подставив сюда одночастичные волновые функции (2.3), мы получим антисимметризованные двухчастичные матричные элементы, входящие в формулу (2.34):

$$\begin{aligned} \langle v_1 v_2 | \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | v_1 v_2 \rangle_a &= \langle v_1 v_2 | \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | v_1 v_2 \rangle - \langle v_2 v_1 | \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | v_1 v_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \{1 - \delta(m_s(1), m_s(2)) \delta(m_t(1), m_t(2)) \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Заменив в формуле (2.34) суммы интегралами, с учетом соотношений (2.6) и (2.32) получим

$$\langle \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle_{\text{осн. сост}} = \rho_0^2 \left[1 - \frac{1}{4} C^2(k_F |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right], \quad (2.36)$$

где

$$C(x) = \frac{3}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right). \quad (2.37)$$

Второй член в правой части равенства (2.36) описывает корреляцию нуклонов, связанную с антисимметрией. Множитель 1/4 появляется потому, что пространственная корреляция существует только для нуклонов с одинаковой ориентацией спина и изоспина [см. формулу (2.35)], а такие пары составляют 1/4 всех имеющихся (для простоты мы предполагаем, что $N = Z = A/2$). Корреляция эта означает, что по соседству с каждым нуклоном оказывается на одну частицу меньше, чем должно быть в однородной системе без корреляции,

$$\frac{1}{\rho_0} \int d^3 r' (\langle \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle_{\text{осн. сост}} - \rho_0^2) = -\frac{1}{4} \rho_0 \int C^2(k_F r) d^3 r = -1. \quad (2.38)$$

Этот корреляционный эффект называют иногда эффектом «обменной дырки». Функция $1 - C^2(k_F r)$ представлена графически на фиг. 2.7.

Можно составить и другие корреляционные функции, которые, кроме координат \mathbf{r} и \mathbf{r}' , характеризовались бы дополнительными квантовыми числами. Например, возьмем оператор, описывающий корреляцию пар с пространственно-симметричными волновыми функциями:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \pi = +1) &= \\ &= \sum_{j < k} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)] \cdot \frac{1}{2} (1 + P_{jk}^r). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Матричные элементы этого оператора можно вычислить в полной аналогии с выводом уравнений (2.34) и (2.35):

$$\begin{aligned} \langle v_1 v_2 | \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \pi = +1) | v_1 v_2 \rangle_a &= \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \frac{1}{2} [1 - \delta(m_s(1), m_s(2)) \delta(m_t(1), m_t(2))] [1 + \cos(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Произведя суммирование по занятым состояниям ферми-газа, получаем корреляционную функцию

$$\langle \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \pi = +1) \rangle_{\text{осн. сост.}} = \frac{3}{8} \rho_0^2 [1 + C^2(k_F |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)]. \quad (2.41)$$

Точно так же можно найти среднее значение двухчастичного оператора, описывающего корреляцию нуклонов с пространственно-антисимметричными волновыми функциями:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \pi = -1) \rangle_{\text{осн. сост.}} = \frac{5}{8} \rho_0^2 [1 - C^2(k_F |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)]. \quad (2.42)$$

Мы могли бы характеризовать пары их полным спином S и изоспином T . Пары с $\pi = +1$ могут быть в состояниях ($S = 0, T = 0$) и ($S = 1, T = 1$) с относительными вероятностями, пропорциональными $(2S+1)(2T+1)$, т. е. $1 : 9$. Если $\pi = -1$, то пары с равными вероятностями находятся в состояниях ($S = 1, T = 0$) и ($S = 0, T = 1$). Поэтому коэффициенты $3/8$ и $5/8$ в выражениях (2.41) и (2.42) представляют собой относительные статистические веса пространственно-симметричных и пространственно-антисимметричных двухчастичных состояний.

Парную корреляционную функцию можно в принципе определить из различных процессов рассеяния и реакций, но в настоящее время еще слишком мало экспериментальных данных, чтобы делать какие-либо выводы. Корреляции, связанные с антисимметризацией, весьма существенны при оценке величин матричных элементов двухчастичных операторов, таких, например, как операторы межнуклонного взаимодействия (учет обмена).

В качестве примера рассмотрим влияние эффекта обменной дырки на полную кулоновскую энергию ядра. Для этой цели нам нужно знать двухчастичную корреляционную функцию для протонов

$$\rho_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \rho_p(\mathbf{r}_1) \rho_p(\mathbf{r}_2) \left[1 - \frac{1}{2} C^2(k_F^{(p)} r_{12}) \right]. \quad (2.43)$$

Корреляция имеет место для протонов с одинаковой ориентацией спина. Поскольку к таким парам относится половина общего числа всех возможных пар, перед функцией C^2 стоит множитель $1/2$. Кулоновская энергия записывается в виде

$$\mathcal{E}_{\text{кул.}} = \frac{1}{2} e^2 \int \int \frac{\rho_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (2.44)$$

Очевидно, что первый член в правой части (2.43) дает в точности классическое выражение для кулоновской энергии. Второй член дает обменный вклад, который просто вычисляется в случае систем с постоянной плотностью [38]:

$$(\mathcal{E}_{\text{кул.}})_{\text{обм.}} \approx -\frac{3}{16\pi} \frac{Z^2 e^2}{R^3} \int \frac{1}{r} C^2(k_F^{(p)} r) d^3 r = -\frac{27}{16} \frac{Z^2 e^2}{(k_F^{(p)})^2 R^3}. \quad (2.45)$$

Взяв равенство (2.7) для $k_F^{(p)}$, мы получим выражение (2.49) для кулоновской энергии с учетом обменных эффектов.

9. Статистические характеристики спектра возбуждения

Изложенные выше соображения об общих свойствах ядер позволяют сделать некоторые важные качественные выводы, но основным источником сведений о структуре ядра является обширная информация о ядерных спектрах и свойствах отдельных уровней. Как мы увидим в последующих главах, свойства нижних состояний энергетического спектра определяются корреляционными эффектами (приводящими к парным корреляциям, вращениям, колебаниям и т. д.), которые накладываются на одночастичное движение в ядре. Но число коллективных мод (типов движения) мало по сравнению с общим числом степеней свободы частиц, составляющих ядро. Поэтому при достаточно больших энергиях возбуждения преобладающими должны быть именно одночастичные степени свободы, так что модель ферми-газа может оказаться пригодной в качестве основы для анализа усредненных свойств спектра.

Плотность уровней ферми-газа

Вычисление плотности состояний для ферми-газа сводится к подсчету числа различных возможных вариантов распределения энергии возбуждения

$$E = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{осн. сост}} \quad (2.46)$$

по одночастичным состояниям (2.3). Это хорошо известная задача комбинаторики, с которой приходится встречаться и при анализе равновесного состояния большой системы методами статистической механики. Математический аппарат, который привлекается для решения такой задачи, изложен в приложении 2. В отличие от обычных макроскопических систем, рассматриваемых в статистической механике, ядро состоит из сравнительно небольшого числа частиц. Это заставляет более тщательно учитывать при оценке термодинамических функций некоторые члены, которыми в статистической механике часто пренебрегают.

Вычисления показывают, что полная плотность уровней ферми-газа [см. формулу (2.315)] имеет вид

$$\rho(N, Z, E) = \frac{6^{1/4}}{12} \frac{g_0}{(g_0 E)^{5/4}} \exp \left\{ 2 \left(\frac{\pi^2}{6} g_0 E \right)^{1/2} \right\}, \quad N \approx Z, \quad (2.47)$$

где E — энергия возбуждения, а g_0 — суммарная плотность одночастичных протонных и нейтронных уровней на поверхности Ферми:

$$g_0 \equiv g(\epsilon_F) \approx \frac{3}{2} \frac{A}{\epsilon_F}. \quad (2.48)$$

В формуле (2.47) мы предположили, что $N = Z = A/2$. Поправки, возникающие из-за существования нейтронного избытка, можно

вычислить теми же методами, но они оказываются пренебрежимо малыми.

При выводе выражения (2.47) приходится также предположить, что

$$E \ll \varepsilon_F A^{1/3}. \quad (2.49)$$

Это связано с тем, что плотность одночастичных уровней (2.48) зависит от энергии частицы [$g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1/2}$]. Такую зависимость плотности одночастичных уровней от ε можно учесть методами, изложенными в приложении 2, но тогда плотность уровней становится более сложной функцией энергии возбуждения (случай невырожденного ферми-газа). В дополнение к сказанному отметим, что при выводе уравнения (2.47) принимается условие $E \gg \varepsilon_F A^{-1}$. Данное условие означает, что энергия возбуждения должна быть большой по сравнению с энергией первого возбужденного состояния, ибо только тогда можно говорить об определенной плотности уровней. Но модель ферми-газа не применима в гораздо более широком участке спектра при низких энергиях, поскольку она игнорирует существование различных систематических корреляционных эффектов, связанных с коллективными типами возбуждения.

Наиболее характерная особенность выражения (2.47) для плотности уровней — очень резкое увеличение числа уровней с ростом энергии возбуждения. Это следствие того, что увеличивается число степеней свободы, которые могут возбуждаться при больших энергиях. Поэтому часто оказывается полезным понятие температуры ядра T^1), которая равна обратной величине логарифмической производной от ρ . В случае ферми-газа имеем

$$T^{-1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial E} = -\frac{5}{4} E^{-1} + \left(\frac{\pi^2}{6} \frac{g_0}{E} \right)^{1/2}. \quad (2.50)$$

Из условия $g_0 E \gg 1$, о котором говорилось выше, следует, что первый член в формуле (2.50) меньше второго, но во многих случаях он может давать существенный вклад.

Важное значение понятия температуры можно усмотреть и с несколько иной точки зрения. Так, вероятность $f(v)$ заполнения данного одночастичного состояния ферми-газа, как функция энергии возбуждения E , имеет вид (см. приложение 2, п. 3)

$$f(v) \approx \frac{1}{1 + \exp \{ [e(v) - \varepsilon_F]/T \}}. \quad (2.51)$$

Таким образом, температурой определяются размеры области вблизи энергии Ферми, в которой вероятность заполнения уровней существенно отлична от вероятности заполнения для основного состояния системы. Среднее число частиц, возбужденных относительно основ-

¹⁾ Термодинамические концепции спектров возбуждения ядер были введены в работах [501, 56, 447, 488, 35].

ного состояния, дается выражением

$$n_{\text{возб}} = \sum_{v < v_F} [1 - f(v)] + \sum_{v > v_F} f(v) = g_0 T \ln 4 \approx \left(\frac{6}{\pi^2} g_0 E \right)^{1/2} \ln 4. \quad (2.52)$$

Легко видеть, что из формулы (2.51) вытекают основные свойства плотности уровней (2.47). Так, частицы, которые занимают возбужденные относительно основного состояния ферми-газа уровни, сосредоточиваются в энергетической области шириной $\sim T$ в окрестности энергии Ферми ϵ_F . Отсюда следует, что средняя энергия, приходящаяся на один возбужденный нуклон, равна

$$\frac{E}{n_{\text{возб}}} \sim T. \quad (2.53)$$

Числом уровней в интервале $\sim T$ определяется число возбужденных нуклонов

$$n_{\text{возб}} \sim T g_0 \quad (2.54)$$

в согласии с формулой (2.52). Из оценок (2.53) и (2.54) следует, что

$$E \sim g_0 T^2. \quad (2.55)$$

Такую же оценку мы получим и из выражения (2.50), если оставим в нем лишь основной член. Полное число уровней по порядку величины равно числу возможных вариантов распределения $n_{\text{возб}}$ частиц по $2n_{\text{возб}}$ уровням, так что главный член в выражении для плотности уровней таков:

$$\rho \sim \frac{(2n_{\text{возб}})!}{[(n_{\text{возб}})!]^2} \sim \exp \{n_{\text{возб}}\} \sim \exp \left\{ \frac{E}{T} \right\} \sim \exp \{aE\}^{1/2}, \quad (2.56)$$

где a — параметр порядка g_0 .

Можно вычислить также плотность состояний с определенными значениями углового момента I и четности π . Такой расчет для ферми-газа с $N = Z = A/2$ проделан в приложении 2 [см. формулу (2.335)]:

$$\begin{aligned} \rho(A, E, I\pi) &= \frac{2I+1}{24} \left(\frac{\pi^2}{6} g_0 \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar^2}{2J_{\text{TB}}} \right)^{3/2} \left[E - \frac{\hbar^2}{2J_{\text{TB}}} I(I+1) \right]^{-2} \times \\ &\times \exp \left\{ 2 \left[\frac{\pi^2}{6} g_0 \left(E - \frac{\hbar^2}{2J_{\text{TB}}} I(I+1) \right) \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Коэффициент в члене, пропорциональном $I(I+1)$, зависит от момента инерции твердого тела

$$J_{\text{TB}} = \frac{2}{3} \int \rho(r) r^2 d^3r. \quad (2.58)$$

Приближения, сделанные при выводе выражения (2.57), таковы, что область его применимости совпадает с областью применимости выражения (2.47).

При классификации уровней на основе модели ферми-газа каждому уровню приписывается конфигурация, определяющаяся состояниями отдельных частиц. При постановке любого эксперимента по измерению полной плотности уровней ядра очень важно знать, представляют ли собой реальные уровни чистые конфигурации или же это смеси конфигураций. Во втором случае правила отбора, связанные с чистыми конфигурациями, теряют свою силу. Поэтому ниже мы рассмотрим вопрос о смешивании конфигураций в высоковозбужденных состояниях.

Смешивание конфигураций и составное ядро

Первые сведения о плотности ядерных уровней при больших энергиях возбуждения появились тогда, когда были обнаружены часто расположенные острые резонансы при реакции захвата медленных нейтронов [35]. В ядрах с $A \sim 100$ плотность таких уровней примерно в 10^6 раз больше, чем должно было бы быть в случае одиночастичного движения (см., например, уровни ^{233}Th на фиг. 2.8). Это говорит о том, что, попав в ядро, нейтрон может передать свою энергию огромному числу степеней свободы мишени, в результате чего образуется очень сложное состояние — составное (компаунд-) ядро [55]. С точки зрения модели ферми-газа составное ядро соответствует чрезвычайно сильному смешиванию конфигураций в стационарных состояниях и резонансах. Такое смешивание конфигураций означает, что компонента, соответствующая движению частицы относительно ядра, распределяется по волновым функциям огромного числа различных резонансных состояний. Все эти резонансы могут возбуждаться при рассеянии нейтронов, причем нейтронная ширина каждого из них, измеренная в одночастичных единицах, будет мала. (Анализ процесса резонансного рассеяния и оценка величины одночастичной резонансной ширины проведены в гл. 3, приложение 6.)

Смешивание конфигураций, приводящее к образованию составного ядра, можно объяснить, если учесть, что с ростом энергии возбуждения системы становятся все более существенными малые возмущения, действующие на независимые частицы. Одна из причин этого — увеличение числа возбужденных частиц и, следовательно, числа возможных взаимодействий. Другая причина — увеличение энергии возбуждения на одну частицу и, следовательно, увеличение плотности конечных состояний, соответствующей процессам парных столкновений. Поэтому при достаточно большой энергии возбуждения каждая конфигурация будет сильно связана с другой, сходной конфигурацией. Эта вторая конфигурация в свою очередь связана с третьей и т. д., так что свойства любой данной конфигурации распределяются по квантовым состояниям, лежащим в пределах некоторой характеристической энергетической области.

Более детальную картину составного ядра можно получить путем статистического анализа распределения и ширин уровней. Рассмотрим в качестве предельного случая спектр, получающийся при диагонализации больших матриц со случайным распределением матричных элементов. Такая модель соответствует предельному случаю полного смешивания всех имеющихся степеней свободы в соответствующем интервале энергий. Некоторые свойства таких систем рассмотрены в приложении 3.

На основе подобной более детальной модели можно анализировать вопрос о распределении вероятностей и корреляциях между различными свойствами ядерных уровней. Например, вероятность $P(s)$ того, что соседние уровни с одинаковыми I_π разделены энергетическим интервалом s , в хорошем приближении дается распределением Вигнера

$$P(s) = \frac{\pi s}{2D^2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4D^2}\right), \quad (2.59)$$

где D — среднее расстояние между уровнями.

Распределение (2.59) можно сравнить с распределением Пуассона

$$P(s) = \frac{1}{D} \exp\left(-\frac{s}{D}\right), \quad (2.60)$$

которое получается, если предположить, что собственные числа E_i распределены по случайному закону (такое предположение приближенно выполняется в модели ферми-газа без смешивания конфигураций). В значительном уменьшении флуктуаций, даваемых распределением (2.59), по сравнению с распределением Пуассона (2.60) отражается то обстоятельство, что эффекты смешивания конфигураций, учитываемые моделью случайных матриц, приводят к взаимному отталкиванию соседних уровней.

Распределение вероятностей $P(s)$ для резонансных уровней, наблюдающихся в реакции захвата медленных нейтронов, согласуется с выражением (2.59), полученным на основе модели случайных матриц, и не совпадает с распределением (2.60) (фиг. 2.9). Из анализа распределения нейтронных ширин таких резонансных уровней вытекают дополнительные данные в пользу предположения о предельно сильном смешивании конфигураций, которое реализуется в модели случайных матриц (фиг. 2.10).

Таким образом, существующие данные совместимы с представлением о полном смешивании достаточно близких по энергии конфигураций. Наличие подобного смешивания означает, что при исследовании резонансов на медленных нейтронах можно наблюдать все уровни, разрешенные правилами отбора по угловому моменту и четности (о таких правилах говорится в связи с фиг. 2.8). Это дает возможность оценить величину полной плотности уровней $\rho(E, I_\pi)$ при энергии возбуждения E , соответствующей энергии отделения нейтрона.

Если использовать концепцию составного ядра для интерпретации выходов ядерных реакций (испарительных спектров), то можно получить данные о плотности ядерных уровней в гораздо более широком интервале энергий. Из примера, представленного на фиг. 2.11, видно очень сильное экспоненциальное увеличение плотности уровней, обнаруженное во всех таких экспериментах. В выражениях (2.47) и (2.57) для плотностей уровней ферми-газа содержится эта важная качественная особенность, причем эмпирический коэффициент в показателе экспоненты по порядку величины совпадает с оценкой (2.48) (фиг. 2.11 и 2.12). Но, как явствует из фиг. 2.12, этот коэффициент сильно меняется с изменением числа нуклонов A . Такие изменения можно связать с оболочечной структурой ядра, наличием которой обусловлено тем, что энергетический спектр является быть однородным. Последнее обстоятельство приводит к изменению выражения для плотности уровней (см. приложение 2, п. 2). В настоящее время подробный ход изменения плотностей уровней ядра в зависимости от энергии и углового момента объяснен еще недостаточно хорошо. Иногда экспериментальные данные очень хорошо аппроксимируются выражением (2.57) для плотности уровней ферми-газа (см. например, фиг. 2.12). В то же время в других ядрах температура меняется медленней ($T \approx \text{const}$) или же эффективный момент инерции оказывается значительно меньше, чем $\mathcal{J}_{\text{тв}}$.

Отметим, что имеющиеся данные о плотностях ядерных уровней носят качественный характер и, следовательно, важный вопрос о влиянии корреляционных эффектов на ядерный спектр в области больших энергий остается открытым. Поскольку такие корреляции могут быть самыми разными путями связаны со свойствами ядер, данный вопрос имеет важное значение.

ПРИМЕРЫ К § 1

Данные о распределении заряда ядра из опытов по рассеянию электронов (фиг. 2.1)

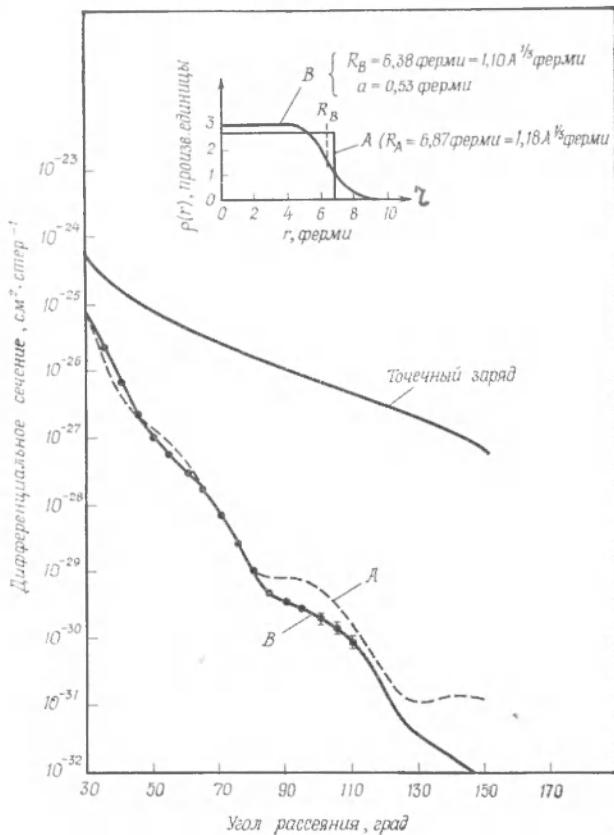
Основным источником сведений о распределении заряда ядра явилось исследование рассеяния электронов на ядрах. Электроны малой энергии рассеиваются главным образом кулоновским полем вне ядра. Такое рассеяние можно приближенно рассматривать как рассеяние на точечном заряде (моттовское рассеяние). При более высоких энергиях, когда длина волны электрона

$$\lambda_e = \frac{\hbar c}{E_e} \approx \frac{200}{E_e (\text{МэВ})} \text{ ферми} \quad (2.61)$$

сравнима с размерами ядра или меньше их, рассеяние начинает зависеть от пространственного распределения заряда внутри ядра.

На фиг. 2.1 представлены данные о дифференциальном сечении рассеяния электронов с энергией 153 МэВ на ядрах золота. Мы видим, что при тех значе-

ниях углов, при которых производились измерения, вероятность рассеяния по крайней мере на порядок меньше, чем для точечного заряда с $Z = 79$. В угловом распределении заметны небольшие осцилляции, характерные для рассеяния на системе с достаточно четко определенным радиусом. Нетрудно оценить величину этого радиуса, если заметить, что в такой дифракционной картине соседние минимумы или максимумы разделены угловым интервалом,



Фиг. 2.1. Рассеяние электронов с энергией 153 МэВ на ядрах Au [212, 232, 472].

который определяется из условия $\Delta(qR) \approx \pi$. Здесь $\hbar q$ — переданный импульс, связанный с углом рассеяния соотношением $q \approx 2\pi^{-1} \sin(\theta/2)$. Из существования минимумов при углах $0 \approx 45^\circ$ и $0 \approx 85^\circ$ следует, что $R \approx 7$ ферми.

Можно провести более подробный анализ, если задать некоторое распределение заряда, вычислить соответствующий ему потенциал, а затем решить уравнение Дирака с таким потенциалом [240]. Как правило, подобные вычисления проводят с помощью электронно-вычислительных машин, так как существенный вклад в рассеяние могут вносить более ста парциальных волн. На фиг. 2.1 показаны наилучшие варианты подгонки к экспериментальным точкам. Вариант A соответствует равномерному распределению заряда, а вариант B — рас-

пределению вида

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \exp \left\{ \frac{r-R}{a} \right\} \right]^{-1}. \quad (2.62)$$

Оба эти распределения, а также значения полученных параметров представлены в верхней части фигуры. Мы видим, что результаты эксперимента свидетельствуют о размытости границы ядра. Удовлетворительного согласия можно достичь, если взять и другие распределения, отличные от варианта *B*, например распределения с небольшим увеличением или уменьшением плотности заряда в центре ядра. Таким образом, опыты по рассеянию электронов дают нам в основном два параметра: средний радиус и толщину поверхностной области ядра. Толщину поверхностной области можно определить как такое расстояние *t*, на котором плотность падает от 90 до 10% своего значения в центре ядра ρ_0 . В случае распределения (2.62) имеем

$$t = (4 \ln 3) a \approx 4,40a. \quad (2.63)$$

Если пользоваться электронами еще больших энергий, то можно определить более тонкие детали распределения заряда ядра.

Распределение вида (2.62) очень часто встречается, и поэтому для удобства мы приведем некоторые его моменты. Плотность в центре ядра определяется нормировочным интегралом

$$\int \rho d\tau = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \left[1 + \pi^2 \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right]. \quad (2.64)$$

В этом выражении мы пренебрегли членами порядка $\exp \{-R/a\}$. Радиальные моменты для такого распределения удобно записывать в виде разложения по степеням a/R :

$$\langle r^n \rangle = \frac{\int \rho(r) r^n d\tau}{\int \rho(r) d\tau} \approx \frac{3}{n+3} R^n \left[1 + \frac{n(n+5)}{6} \pi^2 \left(\frac{a}{R} \right)^2 + \dots \right]. \quad (2.65)$$

В последнем равенстве мы пренебрегли членами разложения порядка $(a/R)^4$. Кулоновскую энергию, соответствующую распределению ρ , можно выразить через эффективный кулоновский радиус R_c :

$$\frac{1}{R_c} = \frac{5}{6} \frac{\int \frac{\rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\tau_1 d\tau_2}{\left(\int \rho(r) dr \right)^2} = \frac{1}{R} \left[1 - \frac{7}{6} \pi^2 \left(\frac{a}{R} \right)^2 + \dots \right]. \quad (2.66)$$

При выводе этих выражений приходится вычислять те же интегралы, что и в формулах (2.283) (см., например, работу [148]). Поскольку разложение в ряд по степеням $(a/R)^2$ быстро сходится (во всех случаях, кроме случая самых легких ядер), выражение (2.62) часто заменяют разложением

$$\rho(r) = \rho_0 \left[S(r-R) - \frac{\pi^2}{6} a^2 \delta'(r-R) + \dots \right], \quad (2.67)$$

где S — ступенчатая функция:

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

и δ' — производная от δ -функции. Коэффициент при δ' можно найти, например, из соотношения (2.64), а отсюда немедленно следуют результаты (2.65) и (2.66).

Как уже говорилось выше, экспериментальные данные по рассеянию и μ -мезоатомам при всех $A > 16$ удовлетворительно описываются при значе-

ниях параметров

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 0,17 \text{ нуклон} \cdot \text{ферми}^{-3}, \\ a &= 0,54 \text{ ферми}.\end{aligned}\quad (2.69)$$

Из соотношений (2.69) и (2.64) мы получаем для радиуса R в распределении (2.62) выражение

$$R \approx (1,12A^{1/3} - 0,86A^{-1/3} + \dots) \text{ ферми}, \quad (2.70)$$

Тогда из (2.69) и (2.65) следует, что

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} (1,12A^{1/3})^2 (1 + 3,84A^{-2/3} + \dots) \text{ ферми}^2 \approx \frac{3}{5} (1,2A^{1/3})^2 \text{ ферми}^2, \quad (2.71)$$

и точно так же из (2.66) получаем

$$R_c \approx 1,2A^{1/3} \text{ ферми} \quad (2.72)$$

для ядер среднего атомного веса ($A \approx 100$).

Данные о распределении заряда в ядрах, полученные в результате исследования изотопического сдвига в атомных спектрах (фиг. 2.2)

Измерение изотопических сдвигов в атомных спектрах — очень чувствительный метод определения изменения зарядового распределения ядра при добавлении к нему нейтронов. Поскольку в пространстве, занимаемом ядром, электронную волновую функцию можно считать постоянной, эффект конечных размеров ядра определяется главным образом средним квадратом радиуса распределения заряда ядра $\langle r^2 \rangle$, так что

$$\Delta E = E - E_{\text{точечный заряд}} \approx \frac{2\pi}{3} Ze^2 \langle r^2 \rangle \rho_e(0), \quad (2.73)$$

где $\rho_e(0)$ — плотность электронов в области ядра. Выражение (2.73) легко получить, если сравнить энергию связи атома в двух случаях: когда заряд сосредоточен в центре ядра и когда он размазан по сферической поверхности радиусом r . Плотность электронов $\rho_e(0)$ можно вычислить, если известно кулоновское поле, в котором движутся электроны, причем в тяжелых ядрах следует учитывать увеличение $\rho_e(0)$ из-за релятивистских эффектов [62, 272].

Экспериментальные данные, о которых мы говорили в связи с фиг. 2.1, позволяют думать, что в среднем распределение заряда следующим образом зависит от атомного номера:

$$\langle r^2 \rangle \approx \frac{3}{5} (r_0 A^{1/3})^2, \quad (2.74)$$

где

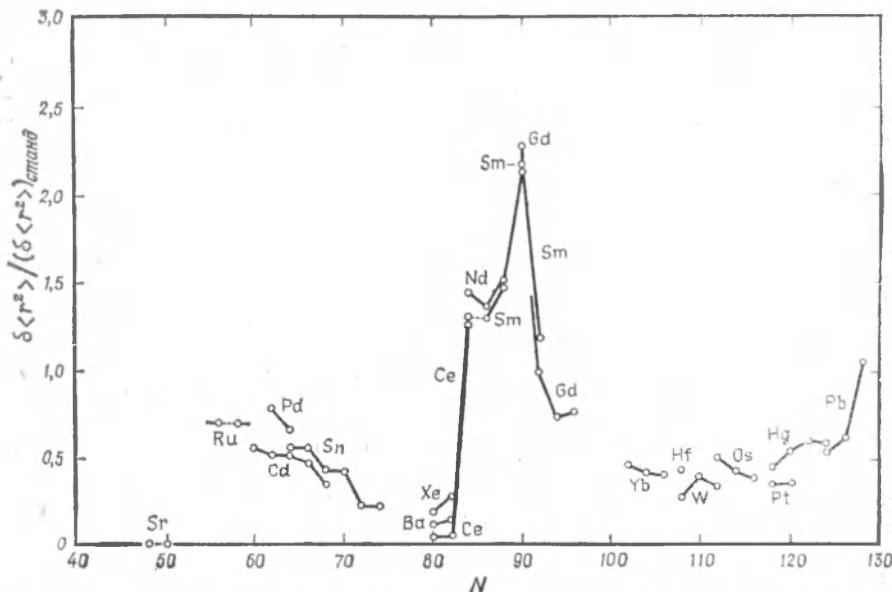
$$r_0 \approx 1,2 \text{ ферми}. \quad (2.75)$$

Зависимость (2.74) отражает общую тенденцию, усредненную по всем стабильным ядрам, т. е. она справедлива при таких изменениях A , когда к ядру прибавляется примерно одинаковое число протонов и нейтронов. При изучении же изотопического сдвига дело обстоит совсем иначе, ибо к системе добавляются только нейтроны. Наблюдающиеся сдвиги удобно выражать в стандартных единицах, получающихся из вариации (2.74):

$$(\delta \langle r^2 \rangle)_{\text{станд}} \equiv \frac{2}{3} \frac{\delta A}{A} \langle r^2 \rangle. \quad (2.76)$$

На фиг. 2.2 представлены в стандартных единицах наблюдаемые изотопические сдвиги для четно-четных ядер. В большинстве случаев они составляют примерно половину стандартной единицы, но наблюдаются также и очень сильные отклонения.

То, что радиус распределения заряда при добавлении к ядру нейтронов меняется медленней, чем по закону $A^{1/3}$, можно объяснить, если исходить из факта зависимости протонного потенциала от величины нейтронного избытка [349,



Фиг. 2.2. Изотопические сдвиги в четно-четных ядрах с числами нейтронов $N = 2$ и N .

Рассчитано при $r_0 = 1,2$ ферми.

[49, 432]. Действительно, при добавлении к ядру нейтронов увеличивается протонный потенциал [см. формулу (2.26)], а это приводит к дополнительному сжатию протонов в ядре. В качестве очень грубой оценки изменения радиуса протонного распределения δR_p с увеличением глубины протонного потенциала на δV_p мы можем принять величину

$$\delta R_p \approx \frac{\delta V_p}{(dV/dr)_R} \quad (2.77)$$

Значение радиальной производной одночастичного потенциала берется на поверхности ядра. Подставляя сюда

$$\frac{dV}{dr} \approx -\frac{V_0}{t}, \quad (2.78)$$

где t — толщина поверхностного слоя ядра [оценки по формулам (2.63) и (2.69) дают $t \approx 2,5$ ферми], а также

$$\delta V_p \approx -\frac{1}{4} \frac{\delta N}{A} V_t, \quad (2.79)$$

где V_4 — изовекторная часть одночастичного потенциала [см. формулу (2.28)], мы получаем

$$\delta R_p \approx \frac{1}{4} \frac{\delta N}{A} \frac{V_4}{V_0} t \approx -\frac{\delta N}{A} \text{ ферми.} \quad (2.80)$$

В тяжелых ядрах $R \approx 6$ ферми, и поэтому изменение радиуса, связанное со сжатием протонов, составляет примерно половину стандартного, равного [см. формулу (2.76)]

$$\delta R_{\text{станд}} \approx \frac{1}{3} \frac{\delta A}{A} R, \quad (2.81)$$

и обратно ему по знаку. Как мы видим, эффект симметрии оказывается на изотопическом сдвиге в том, что в ядрах с $N > Z$ средний радиус протонов оказывается несколько меньшим, чем нейтронов. Кулоновские силы дают обратный эффект.

Резкий максимум величин изотопического сдвига, обнаруживающийся при $N = 90$, объясняется отклонением формы ядра от сферической симметрии [68]. Можно довольно просто оценить влияние деформации ядра на величину изотопического сдвига, если сделать следующие предположения (см. гл. 9, § 4): а) при деформации ядра объем, заключенный внутри поверхности постоянной плотности, остается постоянным;

- б) поверхности постоянной плотности имеют одинаковый эксцентриситет;
- в) деформации носят в основном квадрупольный характер.

Распределение плотности заряда в деформированном ядре в системе координат, связанный с ним, с точностью до членов порядка β^2 имеет вид

$$\rho(r) = \rho \left[r \left(1 - \frac{1}{4\pi} \beta^2 + \beta Y_{20} \right)^{-1} \right]. \quad (2.82)$$

Поэтому средний квадрат радиуса зарядового распределения дается выражением

$$\int \rho(r) r^2 dr = \int \rho(r) r^4 dr \int \left[1 - \frac{1}{4\pi} \beta^2 + \beta Y_{20} \right]^5 d\Omega = \left(1 + \frac{5}{4\pi} \beta^2 \right) \langle r^2 \rangle_0, \quad (2.83)$$

где $\langle r^2 \rangle_0$ — средний квадрат радиуса для сферического ядра ($\beta = 0$). Выше мы предположили, что деформация аксиально симметрична; другие компоненты квадрупольной деформации учитываются тем, что β считается параметром полной деформации. Поскольку изменение среднего квадрата радиуса пропорционально β^2 , в него вносят вклад не только статическая деформация (которая определяет квадрупольные моменты и вероятности $E2$ -переходов между вращательными состояниями), но и динамическая, т. е. флуктуации формы ядра (то определяют ся вероятности $E2$ -переходов между колебательными состояниями). Например, ядро $^{65}_{\text{Sn}} 88$, по-видимому, сферическое, с динамическим параметром $\langle \beta^2 \rangle = 0,032$, определенным по вероятности $E2$ -перехода на первое возбужденное колебательное состояние $2+$ (фиг. 4.1 и гл. 6). В то же время изотоп $^{152}_{\text{Sm}} 90$ обладает вращательным спектром, характерным для статически деформированного ядра с $Q_0 = 5,9 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, что в силу соотношения $Q_0 = 3 (5\pi)^{-1/2} Z R^2 \beta$, справедливого для равномерно заряженного ядра (см. гл. 4), соответствует значению $\beta^2 = 0,094$. Взяв приведенные для этих изотопов значения β^2 , мы получим

$$\frac{\delta \langle r^2 \rangle}{\delta \langle r^2 \rangle_{\text{станд}}} = \frac{15A}{16\pi} \delta \beta^2 \approx 2,8. \quad (2.84)$$

В изотопах Nd, Eu и Gd изменения значений β^2 при переходе от изотопов с $N = 88$ к изотопам с $N = 90$ очень похожи на те, которые имеют место в случае изотопов Sm. Поэтому для всех этих ядер наблюдаются чрезвычайно большие изотопические сдвиги.

В наблюдаемых изотопических сдвигах заметны значительные нечетно-четные скачки (не указанные на фиг. 2.2), величину которых можно характеризовать параметром

$$\gamma = \frac{\langle r^2 \rangle_{A+1} - \langle r^2 \rangle_A}{1/2 (\langle r^2 \rangle_{A+2} - \langle r^2 \rangle_A)}, \quad (2.85)$$

где $\langle r^2 \rangle_A$ — средний квадрат радиуса для четно-четного изотопа A . Если бы с увеличением числа нейтронов радиус возрастал плавно, как в формуле (2.76), то параметр γ был бы равен единице. Экспериментальные значения γ обычно несколько меньше единицы, а иногда даже отрицательны (см., например, работу [274]). Причина появления этих скачков не очень ясна, но высказывалось предположение, что этот эффект объясняется деформацией ядер и отражает то обстоятельство, что у ядер с нечетным A значение $\langle \beta^2 \rangle$ систематически меньше, чем у четно-четных изотопов [405].

Недавно изотопический сдвиг был обнаружен в рентгеновских переходах (см. работу [94] и цитируемые в ней статьи) и в спектрах μ -мезоатомов [466]. Новые данные подтвердили упомянутые выше основные качественные характеристики. Но при сравнении отношений величин изотопических сдвигов в одном и том же элементе обнаружилась неожиданно большая специфическая зависимость электронных спектров атомов от A , которая приводит к существенным поправкам для некоторых из значений, указанных на фиг. 2.2 [467]. Дополнительные данные об изменении зарядового распределения ядер были получены при изучении рассеяния электронов на разделенных изотопах [434].

Определение средней длины свободного пробега нуклонов в ядре из полных сечений взаимодействия нейтронов с ядрами (фиг. 2.3)

Сведения о средней длине свободного пробега нуклонов в ядре можно получить, изучая энергетическую зависимость сечений. На фиг. 2.3 представлены полные экспериментальные сечения взаимодействия нейтронов с ядрами Си, Cd и Рb. Пунктиром изображены сечения, вычисленные в случае «черного ядра», т. е. при таких граничных условиях, при которых предполагается, что нейтроны могут проникать внутрь ядра, но поток выходящих волн на поверхности ядра (при $r = R$) равен нулю [42].

Значительные осцилляции измеренных сечений являются следствием того, что рассеивающее ядро не является совсем черным и поэтому происходит интерференция рассеянной и падающей волн. Аналогичный эффект наблюдается и при рассеянии электронов на атомах (эффект Рамзауэра — Таунсенда, см., например, [310]). Межатомное взаимодействие (молекулярные силы) при достаточно низких энергиях также можно представить в виде вещественного потенциала конечного радиуса действия, и поэтому в сечениях наблюдаются аналогичные осцилляции [347].

Качественную теорию данного эффекта очень просто разработать в рамках квазиклассического приближения, справедливого при больших энергиях падающих нейтронов. Нейтрону, движущемуся внутри ядра, можно присвоить значение внутренней скорости $v_{\text{вн}}$ и средней длины свободного пробега λ . Этими параметрами определяется комплексное волновое число K или, что то же самое, вещественная и мнимая части потенциала $V + iW$:

$$K = \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E - V - iW) \right]^{1/2} = \frac{Mv_{\text{вн}}}{\hbar} + \frac{i}{2\lambda}. \quad (2.86)$$

Поскольку мы считаем, что кинетическая энергия налетающей частицы намного больше ее потенциальной энергии, а длина волны намного меньше радиуса ядра, амплитуду прошедшей волны можно вычислить, предположив, что траектория частицы внутри ядра представляет собой прямую линию. Луч,

прошедший на расстоянии b от центра ядра, выходит из него с относительной амплитудой (по отношению к падающей волне с волновым числом k), равной

$$\exp \{2i(K-k)(R^2-b^2)^{1/2}\}, \quad (2.87)$$

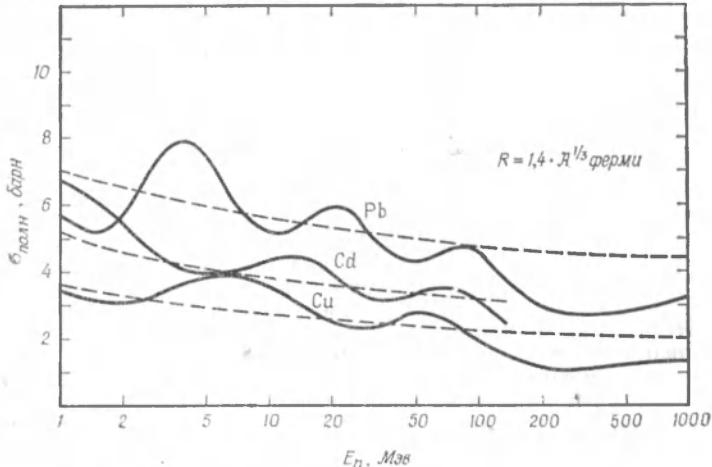
где

$$k = \left(\frac{2ME}{\hbar^2} \right)^{1/2} = \frac{Mv_{\text{вых}}}{\hbar}. \quad (2.88)$$

Интегрируя по различным значениям параметра соударения, получаем, что амплитуда рассеяния вперед равна

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^R [1 - \exp \{2i(K-k)(R^2-b^2)^{1/2}\} 2\pi b db] = \\ &= \frac{ikR^2}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{x^2} [1 - e^{ix}(1-ix)] \right\}, \quad x \equiv 2(K-k)R. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Выражение для $f(0)$ можно получить также из разложения по парциальным волнам (см. гл. 3, приложение 6), заменяя переменную l на kb .



Фиг. 2.3. Измеренные нейтронные полные сечения (сплошные кривые) и полное сечение в случае «черного ядра» (пунктир). Экспериментальные данные при $E_n < 100$ МэВ взяты из обзора [350] и из работы [337]. При $E_n > 100$ МэВ данные взяты из работ [335, 107].

Полное сечение можно определить, зная амплитуду рассеяния вперед, так как ослабление падающего пучка (пропорциональное полному сечению) представляет собой результат интерференции падающей волны и волны, рассеянной вперед. Такое соотношение обычно называют оптической теоремой:

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0). \quad (2.90)$$

Когда фазовый сдвиг (2.87) прошедшей волны относительно падающей волны равен 180° , сечение достигает максимума, а когда фазы рассеянной и падающей волн совпадают, оно минимально. Поскольку параметр x , которым определяет-

ся фазовый сдвиг в формуле (2.89), является убывающей функцией энергии и возрастающей функцией радиуса R , с ростом R соответствующие максимумы и минимумы сдвигаются в сторону более высоких энергий (в противоположность зависимости от E и R для одночастичных резонансов в потенциальной яме; см. гл. 3, приложение 6, п. 2). Вопрос о связи рассматриваемых интерференционных явлений с одночастичными резонансами рассматривается в работе [317].

Анализ выражений (2.89) и (2.90) показывает, что последний максимум в сечении должен быть тогда, когда вещественная часть x равна примерно 4,1. Для изотопов Pb этот максимум наблюдается при энергии бомбардирующих нейтронов, равной примерно 90 MeV . Если принять, что $R = 1,4 A^{1/3} = 8,3 \text{ ферми}$, то мы получим, что V равно примерно -22 MeV . Приведенное нами значение радиуса представляется наиболее подходящим для настоящей оценки, поскольку потенциал простирается несколько дальше области зарядового распределения. (Максимумы и минимумы сечения, полученного на основании формул (2.89) и (2.90), табулированы в работе [171], там же рассматривается и вопрос о законности такого простого приближения.) Увеличение $\sigma_{\text{пол}}$ при $E_n \geq 400 \text{ MeV}$ связано с процессами рождения мезонов.

По величине осцилляций сечения можно определить также и среднюю длину свободного пробега λ и, следовательно, величину минимой части потенциала W . Если бы потенциал был чисто вещественным ($\lambda = \infty$), то, как следует из выражений (2.89) и (2.90), сечения в последнем максимуме и минимуме различались бы примерно в 2 раза. В случае же изотопов Pb наблюдающаяся разница составляет только 15%. Это значит, что рассеянная волна ослабляется примерно в 5 раз. Отсюда можно заключить, что $R/\lambda \approx 1,6$ и $W \approx -10 \text{ MeV}$, что и подтверждается при более подробном сравнении экспериментальных данных с выражениями (2.89) и (2.90).

Дальнейшее сравнение с данными эксперимента указывает на то, что вещественная и минимая части потенциала изменяются с энергией E налетающих частиц. Так, минимум перед последним ником в сечении должен быть тогда, когда вещественная часть x равна примерно 7,7. Поскольку же для Pb этот минимум наблюдается при энергии E порядка 50 MeV , можно утверждать, что потенциал увеличился примерно до 34 MeV . И действительно, установлено, что потенциал монотонно возрастает с уменьшением энергии, достигая примерно 45 MeV при нулевой энергии бомбардирующих частиц.

Если бы минимая часть потенциала не зависела от энергии, то при переходе к более низким энергиям осцилляции уменьшались бы, поскольку осциллирующий член в амплитуде (2.89) убывает с ростом x . На самом же деле с уменьшением энергии осцилляции растут, что говорит об уменьшении минимой части потенциала. При малых энергиях бомбардирующих частиц она уменьшается примерно в 5 раз по сравнению со своим значением при высоких энергиях.

В § 4, п. 3 мы вычислим точнее сечение взаимодействия нуклонов с ядрами и приведем потенциалы, получающиеся в результате такого анализа.

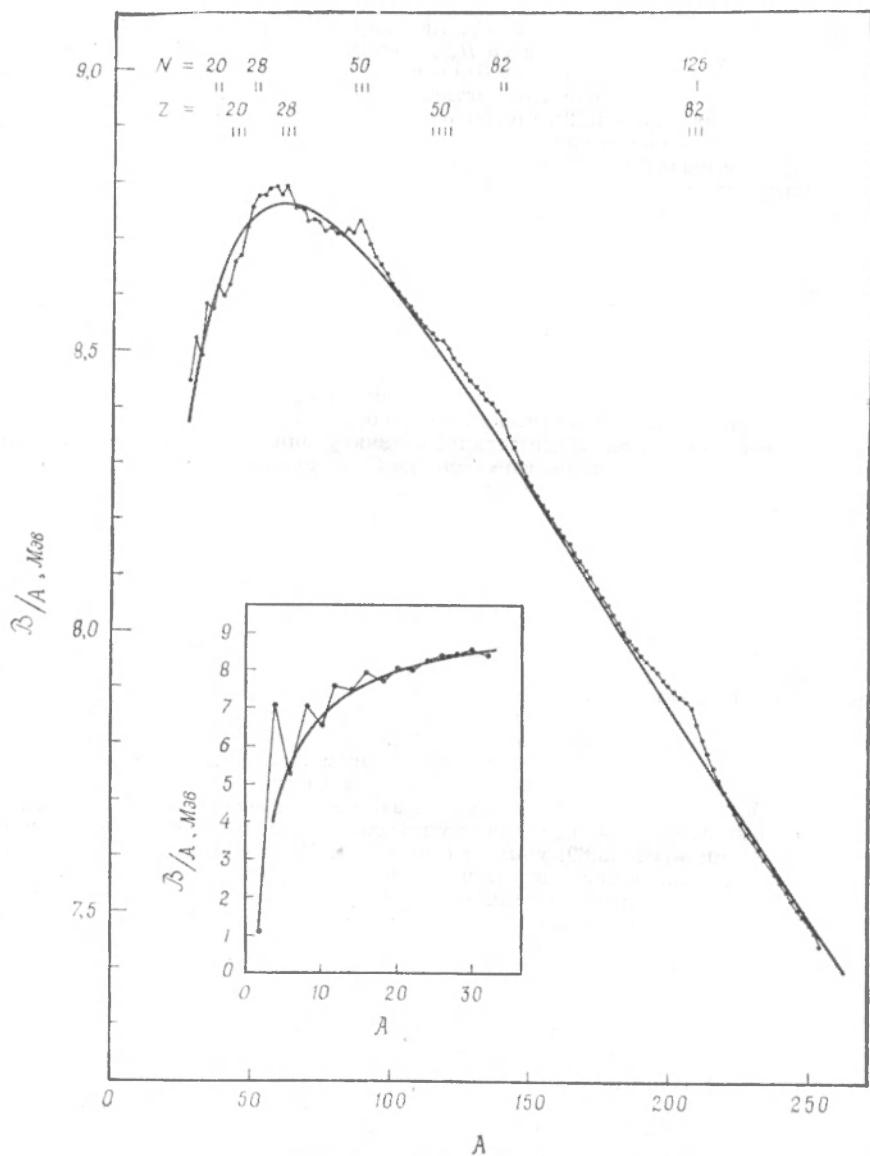
Зависимость энергии связи, приходящейся на один нуклон, от A (фиг. 2.4)

Найденная на опыте энергия связи на нуклон (\mathcal{B}/A) для наиболее стабильных изобаров представлена на фиг. 2.4 при всех четных значениях A .

Ограничивающая лишь четными A , мы исключаем систематическую нечетную поправку, которая указана на фиг. 2.5.

Плавная кривая на фиг. 2.4 — результат вычисления по массовой формуле (2.12) при значениях параметров

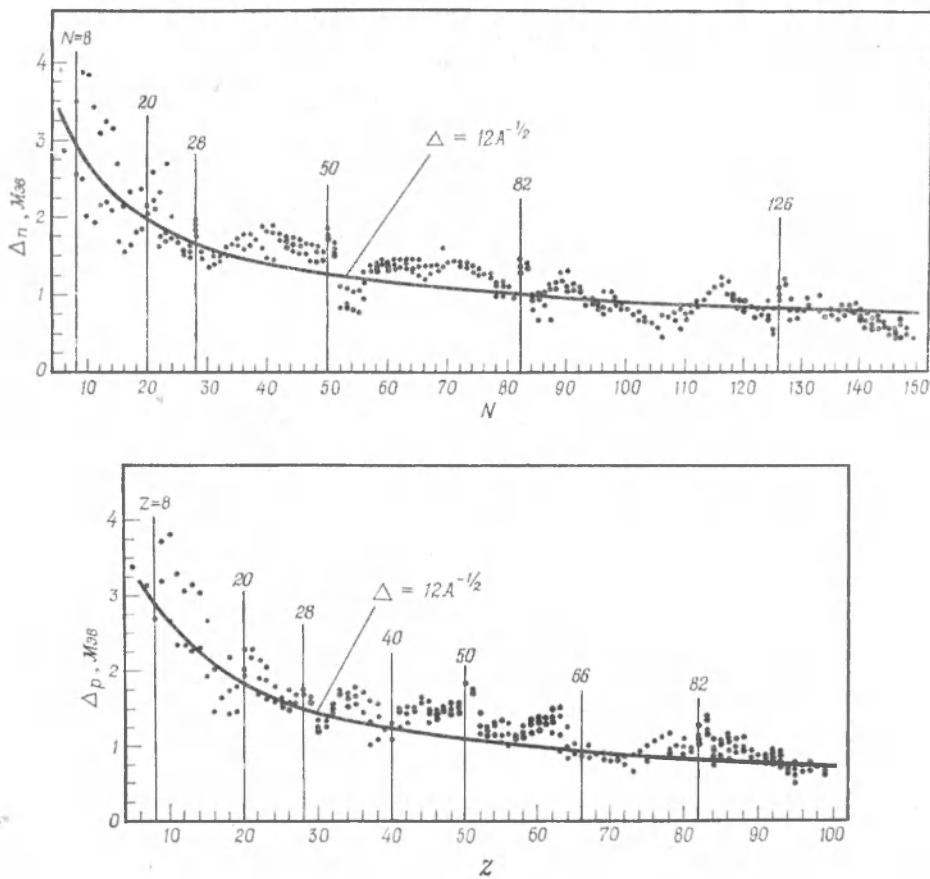
$$\begin{aligned} b_{\text{об}} &= 15,56 \text{ MeV}, \\ b_{\text{пов}} &= 17,23 \text{ MeV}, \\ b_{\text{симм}} &= 46,57 \text{ MeV}, \\ R_c &= 1,24 A^{1/3} \text{ ферми}. \end{aligned} \quad (2.91)$$



Ф и г. 2.4. Зависимость \mathcal{B}/A от A .

Экспериментальные значения энергий связи взяты из работы [311]. Плавная кривая — результат вычислений по полумемпирической массовой формуле (2.12) со значениями констант, взятыми из работы [207].

Очевидно, что правильно передавая общую тенденцию, массовая формула не объясняет некоторых значительных локальных вариаций энергии связи. Так, опыт показывает, что в легких ядрах энергия связи для ядер с массовыми числами $A = 4n$ систематически больше, чем для ядер с $A = 4n + 2$ (n — целое). Существование таких «коротких периодов» связано, как будет показано



Ф и г. 2.5. Зависимость Δ_n от N и Δ_p от Z .

Нечетно-четные разности масс для нейтронов и протонов основаны на анализе, проведенном в работе [475].

в гл. 7, с тем обстоятельством, что ядерные взаимодействия благоприятствуют появлению пространственно-симметричных состояний. В области более тяжелых ядер также имеются локальные максимумы, связанные с заполнением главных оболочек.

Парные энергии (фиг. 2.5)

Нечетно-четный массовый параметр [см. формулу (2.15)] можно определить по экспериментальным значениям масс последовательностей изотопов или изотонов. Предполагая, что, если не считать парного эффекта, массы ядер хорошо описываются плавной функцией от Z и N , мы можем определить локальное среднее значение масс ядер с нечетными A . Сравнивая его с наблюдающимися значениями масс четно-четных ядер, получаем величину Δ . Так, в случае когда N четно, мы можем определить Δ_n по формуле

$$\begin{aligned}\Delta_n = \frac{1}{4} [\mathcal{B}(N-2, Z) - 3\mathcal{B}(N-1, Z) + 3\mathcal{B}(N, Z) - \mathcal{B}(N+1, Z)] = \\ = -\frac{1}{4} [S_n(N-1, Z) - 2S_n(N, Z) + S_n(N+1, Z)], \\ S_n(N, Z) \equiv \mathcal{B}(N, Z) - \mathcal{B}(N-1, Z).\end{aligned}\quad (2.92)$$

Если N нечетно, то нейтронная парная энергия дается выражением (2.92), взятым с обратным знаком. Точно так же при четных Z протонная парная энергия равна

$$\begin{aligned}\Delta_p = \frac{1}{4} [\mathcal{B}(N, Z-2) - 3\mathcal{B}(N, Z-1) + 3\mathcal{B}(N, Z) - \mathcal{B}(N, Z+1)] = \\ = -\frac{1}{4} [S_p(N, Z-1) - 2S_p(N, Z) + S_p(N, Z+1)], \\ S_p(N, Z) \equiv \mathcal{B}(N, Z) - \mathcal{B}(N, Z-1).\end{aligned}\quad (2.93)$$

При нечетных Z мы снова должны взять выражение (2.93) со знаком минус. На фиг. 2.5 представлены значения нейтронных и протонных парных энергий, вычисленных по формулам (2.92) и (2.93) как функции числа нейтронов или протонов в ядре. Очевидно, что общий ход зависимости наблюдающихся парных энергий от A описывается простым выражением

$$\Delta \approx \frac{12}{A^{1/2}} M_{\theta n}, \quad (2.94)$$

хотя налицо и довольно большие отклонения от этой формулы, связанные, по-видимому, с оболочечной структурой. Обычно Δ_p немного больше Δ_n . Это приводит к тому, что среди β -стабильных ядер имеется больше нечетно-нейтронных, чем нечетно-протонных (53 нечетно-протонных и 68 нечетно-нейтронных среди ядер с $A < 238$). В гл. 8 мы выясним происхождение парной энергии и подробнее рассмотрим этот вопрос.

Из простого выражения для парной энергии (2.15) следует, что добавочная энергия нечетно-нечетного ядра по сравнению с четно-четным равна

$$\mathcal{E}_{\text{неч-неч}} - \mathcal{E}_{\text{четн-четн}} \approx \Delta_p + \Delta_n \approx 2\Delta. \quad (2.95)$$

Сравнение с опытом показывает, что данное соотношение приближенно выполняется, но при этом массы нечетно-нечетных ядер оказываются систематически несколько меньше оценки, вытекающей из (2.95). Дополнительная энергия связи для нечетно-нечетных ядер в среднем равна $20 A^{-1} M_{\text{эв}}$ [475], и, по-видимому, она обусловлена остаточным взаимным притяжением неспаренных протонов и нейтрона.

Выражение (2.92) дает среднее значение парной энергии нейтрона, усредненное по числам нейтронов N и $N-1$. Можно обойти эту трудность и попытаться определить Δ не из трех разностей, как это было сделано при выводе

(2.92), а из вторых. Тогда при четных N можно определить Δ_n следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_n &= -\frac{1}{2} [\mathcal{B}(N-1, Z) - 2\mathcal{B}(N, Z) + \mathcal{B}(N+1, Z)] = \\ &= +\frac{1}{2} [S_n(N, Z) - S_n(N+1, Z)].\end{aligned}\quad (2.96)$$

Но вследствие того, что выражение (2.12) для средней энергии содержит значительные по величине члены, нелинейные по N , линейная интерполяция (2.96) систематически дает слишком малую величину Δ . Величину поправки можно установить, вычислив вторую производную от выражения (2.12) по N при фиксированном Z . Она оказывается равной примерно $1 M_{\text{эв}}$ при $A = 40$ и $0,1 M_{\text{эв}}$ при $A = 200$. Величины парных энергий, вычисленные по формуле (2.96) с учетом этой поправки, с хорошей точностью совпадают со значениями, даваемыми формулой (2.92) [494].

При нашей оценке величины Δ существенным было то обстоятельство, что, если исключить нечетно-четный парный эффект, массы ядер меняются плавно. Это условие сильно нарушается при переходе от одной главной оболочки к другой (фиг. 2.14). В таких случаях величина Δ , найденная по формулам (2.92), (2.93) и (2.96), не имеет какого-либо простого смысла.

Смешивание по изоспину, вызываемое кулоновским потенциалом (фиг. 2.6)

Смешивание изоспина в основном состоянии ядра, вызываемое кулоновским взаимодействием, можно характеризовать степенью поляризации, связанной с тем, что кулоновский потенциал стремится сдвинуть протоны в сторону поверхности ядра.

Сначала рассмотрим ядра с $N = Z$ и определим поляризацию как локальную изовекторную плотность

$$\rho_I(\mathbf{r}) \equiv \rho_n(\mathbf{r}) - \rho_p(\mathbf{r}). \quad (2.97)$$

Изменениями изоскалярной плотности $\rho_n(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r})$ мы будем пренебречь, поскольку они не влияют на изоспин. Кулоновская энергия ядра дается выражением

$$\mathcal{E}_{\text{кул}} = \frac{1}{2} \int \rho_p(\mathbf{r}) V_{\text{кул}}(\mathbf{r}) d\tau. \quad (2.98)$$

Тенденции к поляризации, вызываемой кулоновским потенциалом, противодействуют те же самые эффекты, которые приводят к появлению члена симметрии в энергии связи ядра [см. формулу (2.12)]. Поэтому мы выразим энергию симметрии через ее локальную плотность:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{симм}} &= \frac{1}{2} \frac{b_{\text{симм}}}{\rho_0} \int (\rho_I(\mathbf{r}))^2 d\tau, \\ \rho_0 &= \frac{3A}{4\pi R^3},\end{aligned}\quad (2.99)$$

где ρ_0 — средняя плотность частиц. Минимизируя сумму энергий (2.98) и (2.99) по отношению к вариациям $\delta\rho_I(\mathbf{r}) = -2\delta\rho_p(\mathbf{r})$, находим поляризацию, обусловленную кулоновским потенциалом:

$$\rho_I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{b_{\text{симм}}} [V_{\text{кул}}(\mathbf{r}) - \langle V_{\text{кул}} \rangle]. \quad (2.100)$$

Мы вычли из кулоновского потенциала его среднее значение $\langle V_{\text{кул}} \rangle$, чтобы интеграл от $\rho_1(\mathbf{r})$ по объему ядра был равен нулю.

Чтобы определить величину смешивания по изоспину, вызванного поляризацией (2.100), нужно выразить эффект поляризации через квантованные возбуждения. Для этого мы воспользуемся коллективной моделью, в которой возбуждения, связанные с поляризацией ядра, рассматриваются как нормальные колебания, подобные тем, какие происходят в жидкой капле, состоящей из двух типов жидкостей. Свойства таких нормальных колебаний рассматриваются в гл. 6, приложение 1.

Если отвлечься от сравнительно небольших квадрупольных эффектов, имеющих место в деформированных ядрах, то поляризация ядра в основном носит монопольный характер. Поэтому разложение $\rho_1(\mathbf{r})$ по нормальным колебаниям имеет вид (см. гл. 6, приложение 1).

$$\rho_1(\mathbf{r}) = \rho_0 (4\pi)^{-1/2} \sum_n \alpha_n j_0(k_n r). \quad (2.101)$$

Значения k_n определяются из граничного условия для монопольных колебаний на поверхности ядра:

$$k_n R = \begin{cases} 4,49 & \text{при } n=1, \\ 7,72 & \text{при } n=2, \\ 10,8 & \text{при } n=3. \end{cases} \quad (2.102)$$

На основании выражений (2.100) и (2.101) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_n &= - \frac{\int_0^R \rho_1(\mathbf{r}) j_0(k_n r) (4\pi)^{1/2} r^2 dr}{\int_0^R [j_0(k_n r)]^2 r^2 dr} = \\ &= - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{Ze^2}{R b_{\text{симв}}} \frac{\int_0^R j_0(k_n r) r^4 dr}{R^2 \int_0^R j_0^2(k_n r) r^2 dr}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

При выводе последнего соотношения мы воспользовались выражением для кулоновского потенциала равномерно заряженной сферы

$$V_{\text{кул}}(r) = \frac{Ze^2}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (2.104)$$

Амплитуда α_n [см. формулу (2.103)] представляет собой среднее значение n -й моды в поляризованном состоянии. Поскольку α_n мало по сравнению с амплитудой нулевых колебаний (α_0), поляризованное состояние представляет собой основное состояние осциллятора, на которое с амплитудой $c_n = 1/2\alpha_n (\alpha_0)^{-1}$ накладывается состояние с одним квантом возбуждения. Амплитуду нулевых

колебаний можно выразить через собственную частоту ω_n и параметр жесткости c_n^2 для n -й колебательной моды (см. гл. 6, приложение 1). Поэтому вероятность возбуждения n -й моды дается выражением

$$P_n = \frac{C_n}{2\hbar\omega_n} \alpha_n^2 = \frac{\pi}{8\hbar} \rho_0 R^2 Z^2 e^4 M^{1/2} (b_{\text{симм}})^{-3/2} \varepsilon_n = 7,2 \cdot 10^{-5} Z^2 A^{2/3} \varepsilon_n, \quad (2.105)$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{1}{k_n R} \frac{\left(\int_0^R j_0(k_n r) r^4 dr \right)^2}{R^7 \int_0^R [j_0(k_n r)]^2 r^2 dr} = \begin{cases} 4,36 \cdot 10^{-3} & \text{при } n=1, \\ 2,98 \cdot 10^{-4} & \text{при } n=2. \end{cases} \quad (2.106)$$

Каждое колебание несет изоспин, равный единице ($\tau=1$), так что поляризованное состояние ядра содержит примеси компоненты $T=1$ с полной вероятностью

$$P(T=1) = P(\tau=1) = \sum_n P_n = 3,50 \cdot 10^{-7} Z^2 A^{2/3} \quad (2.107)$$

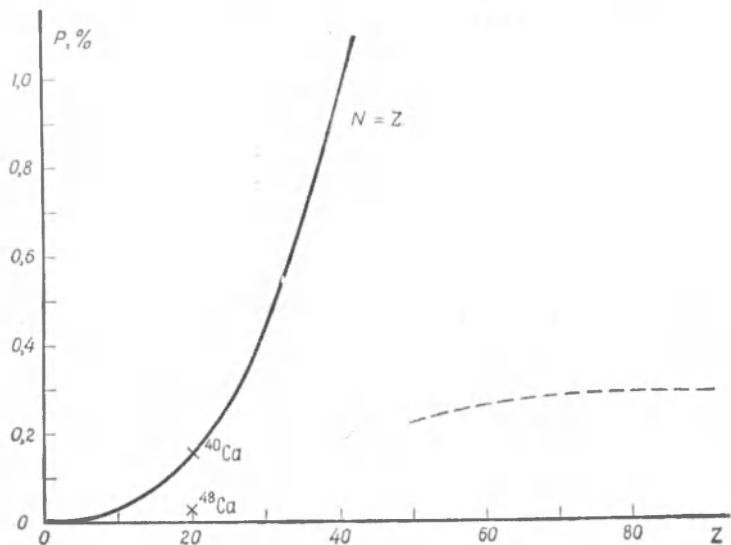
(фиг. 2.6).

Изоспин основного состояния ядра с нейтронным избытком при отсутствии кулоновского взаимодействия равен $T = T_0 = M_T = 1/2(N - Z)$. Эффект поляризации приводит к примешиванию к основному состоянию малых компонент с $T = T_0 + 1$. Величину этой примеси $P(T_0 + 1)$ можно просто получить из результатов, изложенных выше, если предположить, что из-за существования нейтронного избытка свойства коллективных мод меняются мало. В таком случае выражение (2.107) по-прежнему дает полную вероятность $P(\tau=1)$ возбуждения поляризационных мод. В результате комбинации изоспина нейтронного избытка T_0 и изоспина возбуждения ($\tau=1$) могут получиться как состояния с $T = T_0$, так и с $T = T_0 + 1$, а поэтому

$$P(T_0 + 1) = (T_0 T_0 10 | T_0 + 1, T_0)^2 P(\tau=1) = (T_0 + 1)^{-1} P(\tau=1). \quad (2.108)$$

Результаты расчета по этой формуле указаны на фиг. 2.6 пунктиром. Отметим, однако, что оценка величины примеси оказывается завышенной, ибо мы пренебрегли взаимодействием между нейтронным избытком и поляризационными модами. Данное взаимодействие приводит к расщеплению состояний с $T = T_0$ и $T = T_0 + 1$ [энергию расщепления можно оценить по изовекторному члену в формуле (2.29)], так что энергия состояния с $T = T_0 + 1$ увеличивается, а примесь его к основному состоянию ядра уменьшается. Благодаря наличию нейтронного избытка состояние с $T = T_0 + 1$ подавляется и в силу более специфических квантовых эффектов. Это можно увидеть, если рассматривать поляризационные моды как результат возбуждения отдельных протонов. Возбуждение, при котором протоны переходят на орбиты, занятые нейтронами, не могут изменить полного изоспина, так как система остается полностью выстроенной в изопространстве. К увеличению изотопического спина может привести только возбуждение протонов на высоколежащие орбиты. Основной вклад в монопольное возбуждение вносят те протонные переходы, при которых радиальное квантовое число увеличивается на единицу. Поэтому в силу принципа Паули достаточно рассматривать только те протоны, которые расположены на двух последних главных оболочках. В тяжелых ядрах нейтроны заполняют на одну главную оболочку состояний больше, чем протоны. Следовательно, число эффективных протонных переходов, приводящих к увеличению изоспина, уменьшается примерно

в 2 раза. (Количественный анализ состояний с $T = T_0 + 1$ с учетом эффектов межнуклонных взаимодействий, приводящих к корреляции одночастичных возбуждений, можно провести методами, изложенными в гл. 9, § 3.)



Фиг. 2.6. Примесь по изоспину для основных состояний ядер (вычислено на основе гидродинамической модели [54]).

Пунктирной кривой указан предел для стабильных ядер.

Величину смешивания изоспина рассчитывали также на основе одночастичной теории [301, 496]. Была получена величина примеси, примерно на порядок большая, чем на фиг. 2.6. Уменьшение примеси, полученное в нашем случае, можно приписать действию сил между нуклонами, которые препятствуют разделению протонов и нейтронов. Так, например, частота самой низкой колективной монопольной поляризационной моды, получаемая в рамках «гидродинамической» модели, равна $170 A^{-1/3} \hbar^{-1} M_{\text{эв}}$ (см. гл. 6, приложение 1), тогда как одночастичные возбуждения, изменяющие радиальное квантовое число на единицу, имеют частоту порядка $2\omega_0 \approx 80 A^{-1/3} \hbar^{-1} M_{\text{эв}}$ [см. формулу (2.131)].

К сказанному можно добавить, что дипольная поляризационная мода рассматривалась и в связи с ядерным фотоэффектом (см. гл. 6). Для нее коллективная «гидродинамическая» собственная частота тоже примерно в 2 раза превышает среднюю частоту, которую дает одночастичная модель, и довольно хорошо соглашается с наблюдающейся частотой дипольного резонанса.

Особенно чувствительный способ, позволяющий обнаружить смешивание изоспина, — это сравнение величин $f\ell$ для β -переходов между изобарическими аналоговыми состояниями с $I = 0$. Оператор перехода для таких β -распадов пропорционален компоненте $T_{\pm} = T_x \pm i T_y$ полного изоспина, и поэтому матричный элемент не зависит от внутренних свойств ядра. Точные измерения величин $f\ell$ проведены для ряда переходов $0+ \rightarrow 0+$ между компонентами изобарических триплетов, имеющих два нуклона сверх остова с $N = Z$ и $T = 0$ (фиг. 1.10).

Из приведенных выше оценок следует, что доля компонент с $T = 0$ и $T = 2$ в состоянии, в котором преобладает $T = 1$, равна

$$P(T) = \langle 1M_T | TM_T \rangle^2 P(\tau=1),$$

где $P(\tau=1)$ — величина, которая дается выражением (2.107) и представлена на фиг. 2.6.

Но только часть этих малых примесей вносит вклад в матричные элементы перехода. В самом деле, в принятом нами приближении, когда мы пренебрегаем взаимодействием между избыточными нуклонами и возбуждениями остова, можно представить состояние ядра как комбинацию двух независимых компонент: остова и избыточных нуклонов с $T = 1$ и M_T . Состояние остова является преимущественно изоскалярным с примесями малых изовекторных компонент, вызванных кулоновским полем, но доля этих примесей не зависит от значения M_T избыточных нуклонов. Следовательно, операторы T_{\pm} , осуществляющие переходы между компонентами триплета, действуют только на избыточные нуклоны с изоспином, равным единице, а матричный элемент сохраняет свое невозмущенное значение.

Изменение величины ft можно оценить, если учесть расщепление между состояниями с $T = 0, 1, 2$, обусловленное связью между возбужденным состоянием остова с $\tau = 1$ и состоянием избыточных нейтронов с $T_0 = 1$. Если предположить, что вероятность виртуального возбуждения компонент с разными T обратно пропорциональна квадрату энергии возбуждения (соответствующей матричному элементу без взаимодействия), и взять формулу (2.29) для энергии связи между τ и T_0 , то для ft мы получим

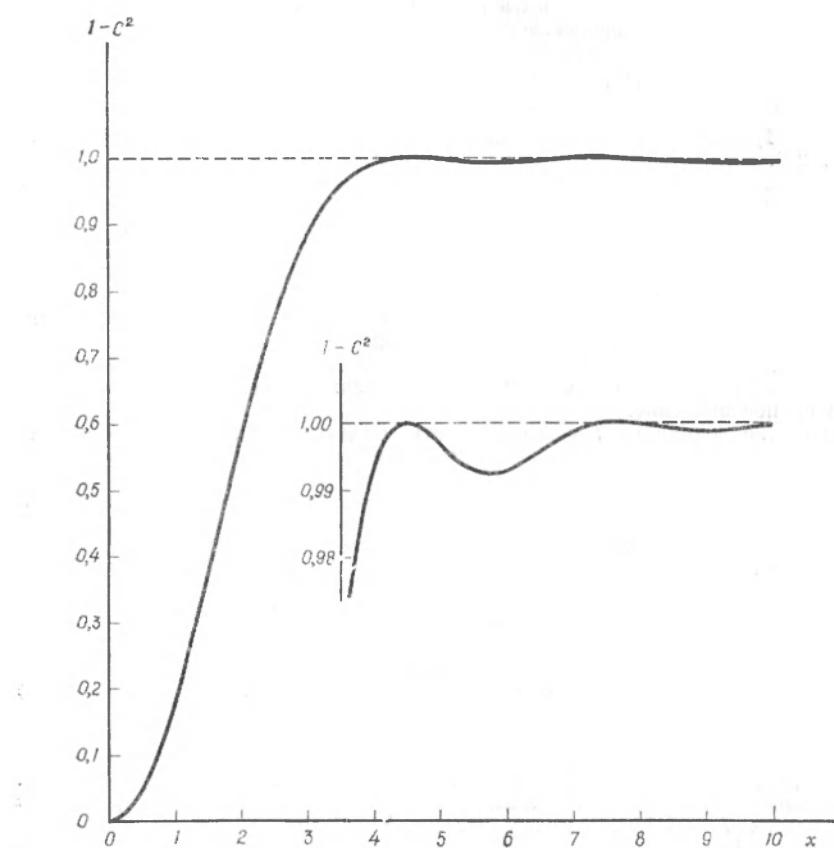
$$\begin{aligned} \frac{(ft)_0}{ft} &\approx \left[1 - P(\tau=1) + \sqrt{3} P(\tau=1) \langle 1010 | 20 \rangle \langle 1110 | 21 \rangle \left(\frac{\hbar \omega_{n=1}}{\hbar \omega_{n=1} + V_1 A^{-1}} \right)^2 \right]^2 \approx \\ &\approx \left[1 - \frac{2V_1}{A\hbar \omega_{n=1}} P(\tau=1) \right]^2, \quad V_1 \approx 100 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

где $(ft)_0$ — невозмущенное значение ft . Возбуждения с $T = 0$ и $T = 1$ не вносят вклада в β -распад, так как компонента с $T = 1$ отсутствует в ядре с $M_T = 0$. Для компонент же с $T = 2$ вероятность перехода в 3 раза больше, чем для компонент с $T = 1$ [см. формулу (1.70)]. Для ядра с $A \approx 50$ множитель $2V_1(A\hbar \omega_{n=1})^{-1}$ порядка 10%. Следует подчеркнуть, что дополнительные эффекты взаимодействия между остовом и двумя внешними нуклонами могут изменить фермневский матричный элемент на величину, сравнимую с той, которую дает поправочный член в формуле (2.109).

Двухчастичная корреляционная функция ферми-газа (фиг. 2.7)

Автосимметрией волновых функций ферми-газа обусловлена корреляция в движении частиц. Двухчастичная корреляционная функция для нуклонов в автосимметричных пространственных состояниях [см. формулы (2.42) и (2.37)] пропорциональна величине $1 - C^2(k_F r_{12})$, которая представлена графически на фиг. 2.7. Другие корреляционные функции ферми-газа также просто выражаются через эту величину [см. формулы (2.36) и (2.41)].

Осцилляции и дальнодействующий характер корреляционной функции $[C^2(x) \sim x^{-4} \cos^2 x$ при больших $|x|$] являются следствием предположения о резкой границе Ферми для состояний с определенным импульсом. Вопрос о том, сохраняется ли такая резкая граница при наличии двухчастичных взаимодействий, очень интересен, но пока еще не решен [268].

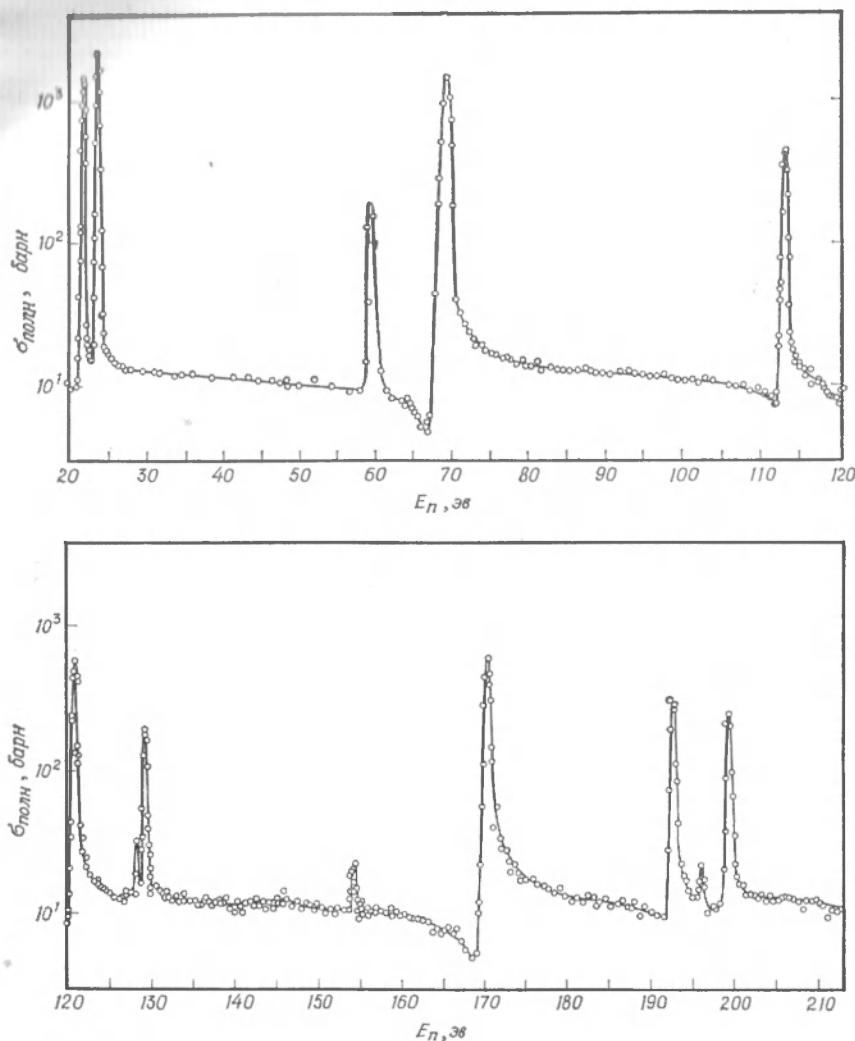


Фиг. 2.7. Функции $C(x)$, от которых зависят двухчастичные корреляционные функции ферми-газа.

Среднее расстояние между уровнями и ширины резонансов при взаимодействии нейтронов низких энергий с ядрами (фиг. 2.8)

Главным источником информации о природе состояний ядра при больших энергиях возбуждения явилось изучение резонансов, наблюдающихся при взаимодействии нейтронов малой энергии с ядрами (E_n меньше нескольких килоэлектронвольт). Для примера на фиг. 2.8 представлены кривые полного сечения реакции $n + {}^{232}\text{Th}$ в области энергии $E_n \sim 100$ эв.

При малых энергиях из-за существования центробежного барьера резонансы с $l = 0$ проявляются гораздо сильнее, чем резонансы с $l > 0$. Так, на основании выражения (3.322) и данных табл. 3.10 можно сказать, что в среднем нейтронная ширина резонансов с $l = 1$ в ядре Th при $E_n = 100$ эв должна быть в 10^4 раз меньше, чем нейтронная ширина резонансов с $l = 0$ (при этом пред-



Фиг. 2.8. Полное сечение реакции $n + {}^{232}\text{Th}$ как функция энергии нейтронов E_n [337].

полагается, что одночастичные генеалогические коэффициенты в обоих случаях примерно одинаковы). Наличие заметной интерференции между резонансным и потенциальным рассеянием, отчетливо видной на фиг. 2.8, также свидетельствует о том, что всем наиболее заметным резонансам следует приписать $l = 0$. Повышение разрешающей способности экспериментальной аппаратуры позволило обнаружить очень слабые дополнительные резонансы, не выявленные на фиг. 2.8, которым, по-видимому, соответствует $l = 1$ [58].

Из условия $l = 0$ следует, что величина углового момента I_r и четность π_r резонансных состояний подчиняются правилам отбора

$$I_r = I_0 \pm \frac{1}{2}, \quad (2.110)$$

$$\pi_r = \pi_0,$$

где I_0 и π_0 — угловой момент и четность основного состояния ядра-мишени. В случае бомбардировки нейtronами четно-четной мишени, например ^{232}Th , мы имеем $I_0\pi_0 = 0+$ и, таким образом, резонансы характеризуются квантовыми числами $I_r\pi_r = 1/2+$.

Как нетрудно видеть, среднее расстояние между резонансами составляет примерно 16 эв, что приблизительно в 10^6 раз меньше расстояния между одночастичными уровнями [в случае потенциала прямоугольной формы $P_{\text{одн}} \approx 2\pi V_0 (K_0 R)^{-1} \approx 10^2 A^{-1/3} M\text{эв}$ для уровней с одинаковыми спинами и четностями]. Столь большая плотность резонансов может служить прямым доказательством того, что в рассматриваемой области спектра состояния ядра характеризуются возбуждением многих степеней свободы.

В качестве первой очень грубой попытки объяснить наблюдающиеся величины расстояний между резонансными уровнями можно провести сравнение с выражением (2.57), описывающим спектр уровней ферми-газа. Плотность уровней ферми-газа сильно зависит от плотности одночастичных уровней g_0 . Поэтому можно определить значение g_0 , соответствующее экспериментальной плотности уровней. Для ядра ^{233}Th при энергии возбуждения $E = S_n = 5,1 M\text{эв}$ обратная величина плотности уровней $[\rho(I\pi = 1/2 +)^{-1}] = 16$ эв, откуда следует, что $g_0 = 16 M\text{эв}^{-1}$. Полученное значение — это же порядка величины, что и оценка $g_0 = 3A/2e\bar{v} \approx 10 M\text{эв}^{-1}$, вытекающая из модели ферми-газа. Значения g_0 , полученные из этой и других оценок, приведены на фиг. 2.12.

Наблюдающиеся нейтронные ширины резонансов сильно меняются от уровня к уровню (фиг. 2.10), но их среднее значение примерно равно

$$\bar{\Gamma}_n \approx 1,2 \cdot 10^{-3} [E_n (\text{эв})]^{1/2} \text{ эв}, \quad (2.111)$$

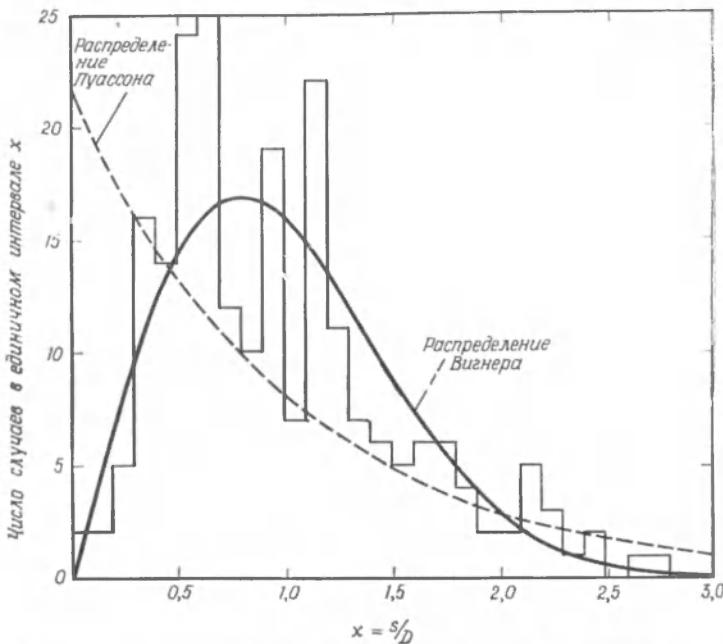
где ширина и энергия резонансов выражены в электронвольтах. Это значение примерно в 10^6 раз меньше одночастичной оценки (3.322). Малая ширина резонансов непосредственно связана с высокой плотностью резонансных состояний и является дополнительным свидетельством в пользу предположения об их многочастичной структуре. Среднее значение нейтронной ширины, деленное на расстояние между уровнями, определяет величину одночастичной силовой функции (см. то, что говорится по поводу фиг. 2.26).

Наряду с испусканием нейтронов резонансные состояния могут распадаться, испуская γ -квант, с последующим переходом на любые нижние уровни ^{233}Th . Полная ширина относительно испускания γ -квантов Γ_γ приблизительно одинакова для всех резонансов, измеренных в ^{233}Th , и равна $\Gamma_\gamma = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ эв}$. При этом обычно считается, что наиболее существенны переходы типа $E1$, хотя имеющиеся экспериментальные данные и нельзя считать достаточно убедительными (см., например, [21]). Для подробной интерпретации ширины Γ_γ необходимо проанализировать спектр испускаемых γ -квантов и оценить величину силовой функции перехода $E1$ с энергией в несколько мегаэлектронвольт.

Энергетическое распределение уровней, наблюдающихся в нейтронных резонансах (фиг. 2.9)

Из статистических распределений энергий и ширин резонансов можно получить сведения о структуре резонансных состояний. На фиг. 2.9 в качестве примера приведено наблюдающееся экспериментально энергетическое распределение расстояний между соседними резонансами в системе $n + ^{232}\text{Th}$. Следует

отметить, что при построении этого распределения приходится сталкиваться с некоторой неопределенностью. Дело в том, что на опыте наблюдается ряд очень слабых резонансов, о которых мы говорили выше и которые мы рассматривали как резонансы с $l = 1$. Поскольку нас интересует распределение уровней с одинаковыми спинами и четностями, эти слабые уровни не учитывались. Но до тех пор пока спины и четности их не будут определены непосредственно, заключения, следующие из настоящего анализа, следует рассматривать как



Фиг. 2.9. Распределение расстояний между соседними резонансными уровнями, наблюдающимися в реакции $n + {}^{232}\text{Th}$, до энергии $E_n = 3,9$ кэВ (всего 223 резонанса).

Здесь D — среднее расстояние между уровнями ($D = 17,6$ эв). Данные взяты из работы [184].

ориентировочные. На фиг. 2.9 представлены также распределения Вигнера (2.59) и Пуассона (2.60). Как легко видеть, малые расстояния между уровнями наблюдаются с очень малой вероятностью, что характерно для ситуации с сильным смешиванием конфигураций. Экспериментальные данные не согласуются с распределением Пуассона, которое применимо в том случае, когда резонансные состояния, помимо значений $I\pi$, характеризуются множеством дополнительных квантовых чисел.

При анализе смешивания конфигураций, проводимом на основе модели случайных матриц, предполагается также наличие дальнего порядка в последовательности резонансных энергий [134]. Так, если $N(E)$ — функция, которая дает полное число уровней вплоть до энергии E , то можно ввести величину

$$\Delta = \min_{A, B} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L [N(E) - AE - B]^2 dE \right]. \quad (2.442)$$

которая будет мерой среднеквадратичного отклонения функции N от линейной функции по E , наилучшим образом описывающей $N(E)$. Здесь предполагается, что экспериментальные данные по резонансным энергиям охватывают интервал $(-L, L)$. Из модели случайных матриц следует [138], что в предельном случае, когда число рассматриваемых резонансов n очень велико,

$$\Delta = \frac{1}{\pi^2} \left[\ln(2\pi n) + \gamma - \frac{\pi^2}{8} - \frac{5}{4} \right] = \frac{1}{\pi^2} [\ln n - 0,0687]. \quad (2.113)$$

Дальний порядок в распределении уровней проявляется в логарифмической зависимости Δ от n (ср. со случайным распределением уровней, которое дает $\Delta = n/15$). Величина Δ была вычислена для первых 154 резонансов в ядре ^{233}Th и оказалась равной $\Delta = 3,12$ [138], тогда как формула (2.113) дает $\Delta = 0,50$. Большая разница в этих значениях может свидетельствовать о значительном отклонении от модели с полным смешиванием конфигураций (т. е. от модели случайных матриц). Но не следует спешить с таким заключением, ибо Δ может сильно изменяться, если мы неправильно отождествили резонансы (т. е. включили резонансы с $l = 1$ или смешанные) или же пропустили слабые резонансы с $l = 0$. Для того чтобы получить согласие с моделью случайных матриц, нужно, чтобы такое неправильное отождествление было в 25% всех случаев.

Анализ резонансов ^{233}Th особенно прост потому, что спин ядра-мишени $I_0 = 0$, так что все резонансы в случае $l = 0$ имеют спин $I_r = 1/2$. Для ядер с нечетными A мы имеем $I_0 \neq 0$ и спин резонансных состояний может принимать значения $I_r = I_0 \pm 1/2$. До тех пор пока спины каждого резонанса не определены экспериментально, статистические свойства резонансных состояний необходимо анализировать как суперпозицию двух последовательностей резонансов, не коррелирующих друг с другом. Данные о распределении резонансов, наблюдающихся в реакции $n + (A - \text{нечетное ядро})$, по-видимому, согласуются с такой интерпретацией, если предположить, что для каждой последовательности в отдельности осуществляется распределение Вигнера [128].

Распределение нейтронных ширин (фиг. 2.10)

Дополнительные сведения о структуре нейтронных резонансных уровней можно получить путем анализа распределения нейтронных ширин. Для примера на фиг. 2.10 представлена кривая вероятности распределения приведенных ширин $\Gamma_n^{(0)}$, наблюдающихся в резонансах $n + ^{232}\text{Th}$. Из того, что говорится в гл. 3, приложение 6, следует, что по нейтронной ширине можно определить одночастичный генеалогический коэффициент $P(r)$ резонансного состояния r

$$P(r) = \frac{\Gamma_n(r)}{\Gamma_{\text{одн}}} = \text{const } E_n^{-1/2}(r) \Gamma_n(r), \quad (2.114)$$

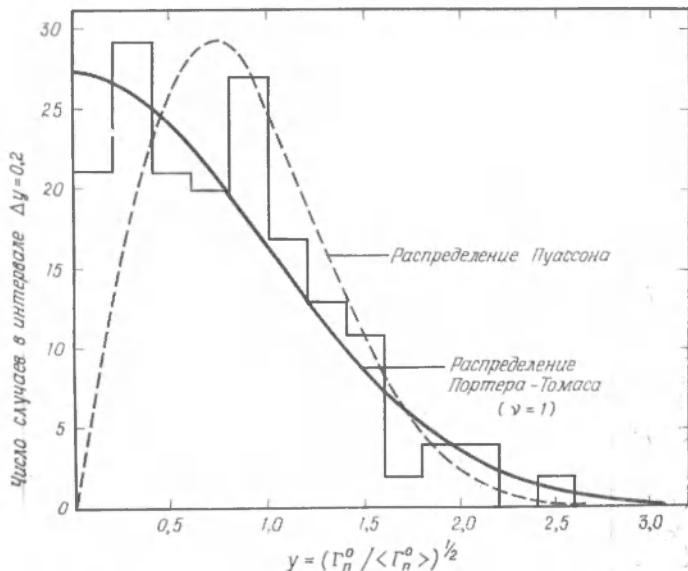
где $E_n(r)$ — энергия нейтрона в резонансе. Таким образом, мы видим, что внутренние свойства резонанса определяются приведенной шириной $\Gamma_n^0 = E_n^{-1/2}(r) \Gamma_n(r)$.

Теоретическое распределение в случае предельного смешивания конфигураций [352] есть распределение χ^2 с $v = 1$. Поскольку при малых значениях Γ_n^0 оно соответствует зависимости типа $(\Gamma_n^{(0)})^{-1/2}$ [см. формулу (2.363)]

$$P(\Gamma_n^{(0)}) = (2\pi \Gamma_n^{(0)} \langle \Gamma_n^{(0)} \rangle)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{\Gamma_n^{(0)}}{2 \langle \Gamma_n^{(0)} \rangle} \right\}, \quad (2.115)$$

графически удобно изображать распределение величины $(\Gamma_n^{(0)})^{1/2}$. Как яствует из данных фиг. 2.10, наблюдающееся распределение нейтронных ширин довольно хорошо описывается формулой (2.115), но не согласуется с распределением Пуассона [т. е. с распределением χ^2 при $v = 2$; см. формулу (2.364)].

Хорошее согласие с выражением (2.115) — еще один довод в пользу исключения упоминавшихся в связи с фиг. 2.8 очень узких уровней при анализе экспериментальных данных, представленном на фиг. 2.9 и 2.10. Для всех этих уровней характерны значения $\Gamma_n^{(0)}$ порядка 10^{-3} ($\langle \Gamma_n^{(0)} \rangle$) или меньше, так что можно



Фиг. 2.10. Распределение приведенных нейтронных ширин, наблюдающихся в реакции $n + {}^{232}\text{Th}$.

$\Gamma_n^{(0)}(E_r) = \Gamma_n(E_r) E_r^{-1/2} \text{ эв}$, $E_{\max} = 3 \text{ кэв}$, число ширин равно 171, величина $\langle \Gamma_n^{(0)} \rangle = 1,22 \times 10^{-3} \text{ эв}$. Данные взяты из работы [184].

сделать вывод, что им соответствует $l = 1$, или же они характеризуются другим квантовым числом, которое эффективно исключает связь с каналом, соответствующим испусканию нейтрона.

Определение функции плотности ядерных уровней по испарительным спектрам нейтронов (фиг. 2.11)

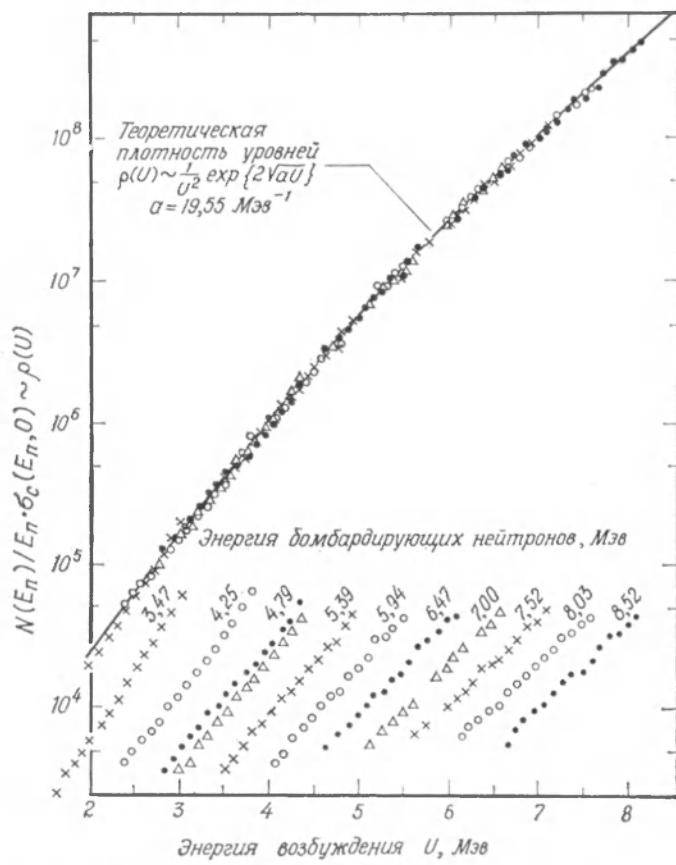
Исследования нейтронных резонансов дают сведения о спектре ядра в очень узком энергетическом интервале выше энергии отделения нейтрона. Сведения же о плотности уровней ядра в гораздо более широком интервале энергий можно получить путем анализа распределения продуктов ядерных реакций по энергиям. На фиг. 2.11 представлена графическая функция плотности уровней, полученная из реакции неупругого рассеяния нейтронов на Ag.

Плотность уровней $\rho(U)$ при энергии возбуждения U определяется по величине выхода нейтронов $N(E_n)$ с энергией E_n , если иметь в виду статистическое соотношение

$$N(E_n) = \text{const } \rho(U) E_n \sigma_c(E_n, U), \quad (2.116)$$

где $\sigma_c(E_n, U)$ — сечение образования составного ядра, когда конечное ядро при энергии возбуждения U бомбардируется нейtronами с энергией E_n [физическое обоснование формулы (2.116) будет приведено ниже].

Сечение $\sigma_c (E_n, U)$ нельзя непосредственно измерить, но можно предположить, что оно примерно равно $\sigma_c (E_n 0)$. При анализе последняя величина вычислялась на основе оптической модели. Благодаря тому, что ρ изменяется с энергией экспоненциально, основные результаты не очень чувствительны к значениям σ_c .



Фиг. 2.11. Плотность уровней $\rho(U)$, найденная по энергетическому распределению нейтронов, неупругого рассеянных на ядрах Ag [429].

Поскольку величина выхода, которую дает формула (2.116), уменьшается в ростом E_n примерно как $\exp(-E_n/T)$, где T — температура ядра, часто оказывается, что при $E_n \gg T$ существенный вклад дают реакции, не проходящие через стадию составного ядра (прямые реакции). Поэтому здесь мы находили плотность уровней из серии опытов, в каждом из которых для определения изменения ρ использовалась только низкоэнергетическая часть спектра нейтронов ($E_n \leq 1.9$ МэВ). Проводя исследования при разной энергии бомбардирующих частиц, мы изучили область энергий возбуждения 2 МэВ $< U < 8$ МэВ. Отдельные результаты для каждого значения энергии бомбардирующих частиц пока-

записанной в нижней части фигуры. Вверху представлен общий результат, полученный путем нормировки результатов отдельных опытов в области взаимного перекрытия.

Найденная плотность представляет собой среднее взвешенное по всем $\rho(U, I)$, соответствующее угловым моментам I конечных состояний, которые варьируются в опыте. Как будет показано ниже, в том случае, когда $\rho(U, I)$ приблизительно пропорционально $\rho(U, I=0)$ [см. формулу (2.122)], результат должен иметь простой вид (2.116). Поэтому на фиг. 2.11 проведена плавная кривая, представляющая собой распределение для уровней ферми-газа с $I=0$ [см. формулу (2.57)]

$$\rho(U, I=0)_{\text{Ф-г}} = \text{const} \frac{1}{U^2} \exp \{2(aU)^{1/2}\}, \quad (2.117)$$

где коэффициент a подобран так, чтобы наилучшим образом удовлетворить опытным данным.

Функция плотности уровней, полученная на основании представленных данных, довольно хорошо описывается формулой (2.117), но в других случаях обнаружены существенные отклонения [429]. При более подробном анализе можно попытаться объяснить эти эффекты оболочечной структурой (см. приложение 2, п. 2) и парной корреляцией (см. гл. 8). Возможно, что при более тщательном исследовании плотности ядерных уровней в области больших энергий обнаружатся и другие корреляционные эффекты.

В основе соотношения (2.116) лежит предположение о том, что реакцию можно рассматривать как двухступенчатый процесс, в котором на первом этапе образуется определенное состояние, составное ядро, которое затем распадается так, что тип распада не зависит от способа его образования [55, 447]. Поэтому сечение перехода из канала α в канал β можно записать в виде

$$\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = \sigma_c(\alpha) \frac{\Gamma_\beta}{\Gamma}, \quad (2.118)$$

где $\sigma_c(\alpha)$ — полное сечение образования составного ядра в канале α . Вероятность распада по каналу β за единицу времени обозначается через Γ_β , а полная вероятность распада составного ядра — через Γ . Сечение обратной реакции можно записать аналогичным образом:

$$\sigma(\beta \rightarrow \alpha) = \sigma_c(\beta) \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma}. \quad (2.119)$$

Поэтому в силу теоремы взаимности [см. формулу (1.43)]

$$\sigma(\alpha \rightarrow \beta) \frac{k_\beta^2}{k_\alpha^2} \sigma(\beta \rightarrow \alpha) \quad (2.120)$$

мы получаем энергетический спектр испускаемых частиц в канале β :

$$dN(\beta) = \sigma(\alpha \rightarrow \beta) \rho(\beta) dE_\beta = f(\alpha) k_\beta^2 \sigma_c(\beta) \rho(\beta) dE_\beta. \quad (2.121)$$

Здесь $f(\alpha)$ зависит только от свойств канала α , а $\rho(\beta)$ — плотность состояний остаточного ядра в канале β . На практике при использовании формулой (2.121) приходится делать дополнительное предположение, о котором уже говорилось выше, а именно считать, что $\sigma_c(\beta)$ приблизительно одинаково для всех каналов β при данной энергии. Прямым указанием на это является тот факт, что полные сечения реакций плавно меняются в зависимости от Z и N ядра-мишени и не зависят от подробностей конфигурации мишени.

Предположение о единственном составном состоянии, зависящем только от энергии и числа нуклонов, находится в противоречии с законами сохранения углового момента и четности. Поэтому приведенные выше соотношения следует рас-

сматривать в отдельности для каждого канала, который характеризуется соответствующими угловыми моментами и четностью (например, величиной I_β для частицы, величиной I_α для состояния ядра и полным угловым моментом системы). Тогда полное число частиц, испускаемых за единицу времени, представляется в виде суммы членов типа (2.121), каждый из которых описывает вклад канала с определенными угловыми моментами. Чтобы оценить величину этой суммы и получить выражение, пропорциональное полному сечению составного ядра, как в соотношении (2.116), необходимо сделать дополнительные предположения [202] о том, что сечение составного ядра при конкретных значениях I_β падающих частиц и IM минимум не зависит от угла между моментами j и I и что зависимость плотности уровней конечного ядра от углового момента в первом приближении можно выразить простой формулой [см. выражение (2.57)]

$$\rho(E_\beta, I_\beta) = (2I_\beta + 1) \rho(E_\beta, I_\beta = 0). \quad (2.122)$$

Из этих дополнительных предположений следует, что частицы, испущенные в канале β , обладают изотропным угловым распределением.

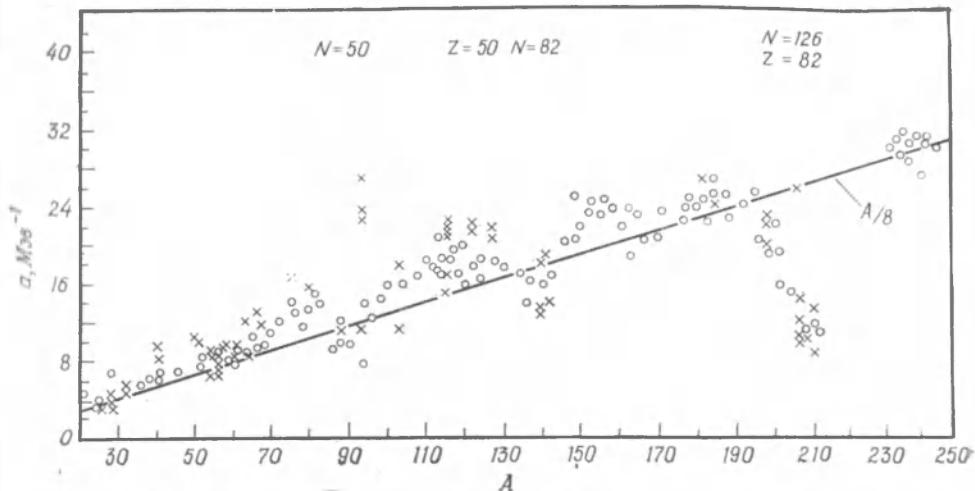
Статистический анализ основывается на предположении о том, что сечение может быть факторизовано, как в выражении (2.118). Такая факторизация происходит автоматически, если реакция проходит через изолированные (неперекрывающиеся) резонансные состояния. На независимость процессов образования и распада в этом случае указывает тесная связь таких резонансных состояний со связанными состояниями системы многих тел (см. гл. 3, приложение 6, п. 1). Правда, в области применимости выражения (2.116) с таким положением мы встречаемся редко. Из-за существования множества каналов распада с испусканием частиц ширины резонансов оказываются больше расстояний между уровнями с одинаковыми моментами и четностями. В таких случаях при образовании составной системы реализуются определенные фазовые соотношения между многими перекрывающимися резонансами, которые возбуждаются в реакции. Вообще говоря, эти фазовые соотношения могут влиять на тип распада системы. Соотношение (2.116) выполняется при этом только в том случае, если предположить, что при взаимодействии падающей частицы с ядром образуется полностью хаотическое (статистическое) состояние. Можно думать, что в этом случае в процессе эволюции составной системы информация о ее начальном состоянии быстро забывается. Выяснение точного смысла понятия уровней ядра в этой области спектра связано со многими интересными и еще не исследованными вопросами.

Экспериментальное подтверждение справедливости рассмотренных выше статистических предположений можно извлечь из сравнения плотностей уровней, полученных на основании формулы (2.116), со значениями плотностей, полученных путем прямого подсчета числа уровней ядер (см. ниже), из сравнения выходов продуктов ядерной реакции с одной и той же составной системой, распадающейся по различным каналам [205, 424], и из сравнения выходов реакции, при которой конечное ядро остается в определенных разрешаемых экспериментально квантовых состояниях [20]. Такие данные свидетельствуют, по-видимому, о том, что в большинстве случаев ядерные реакции в основном проходят через составные состояния, обладающие статистическими свойствами. Но для некоторой доли продуктов реакций (обычно порядка 10%) энергии и угловые распределения свидетельствуют о совершенно ином механизме реакции (см., например, гл. 3, приложение 5 и гл. 5, приложение 1, где рассматриваются некоторые особенности таких процессов прямого взаимодействия). Из сказанного следует, что при анализе статистических реакций необходимо проверять, не содержит ли измеренный выход значительную примесь продуктов прямых реакций. В экспериментах, о которых говорилось выше, возможность появления такой примеси была уменьшена тем, что измерялись только преобладающие продукты реакции. В других исследованиях (см. работу [464] и цитируемые в ней статьи) было установлено, что статистический механизм сильно паруэтится.

Систематика плотности ядерных уровней (фиг. 2.12)

Основные источники сведений о функции плотности уровней ядра таковы:

- резонансные спектры медленных нейтронов (см., например, фиг. 2.8 и 2.9);
- прямой подсчет уровней, заселяемых при ядерных реакциях с заряженными частицами, таких, как (pp') , (αp) и т. д. Подобные исследования дали возможность установить первые 100—200 уровней в ряде ядер вплоть до $A \approx 60$ [151];



Фиг. 2.12. Параметр a , фигурирующий в формуле для плотности уровней ферми-газа, определенный путем сравнения со средними расстояниями между резонансами на медленных нейтронах (кружки) и по испарительным спектрам (крестики).

Данные основаны на анализе, проведенном в работе [149]. Такой анализ подтверждает также, что результаты расчетов, основанных на испарительной модели, согласуются с результатами прямого подсчета уровней.

в) анализ испарительных спектров (см., например, фиг. 2.11).

Данные о плотности ядерных уровней, полученные из источников «а» и «в», сведены на фиг. 2.12. Предполагалось, что плотность уровней дается выражением (2.57) для ферми-газа, и по результатам измерений определялся параметр

$$a = \frac{\pi^2}{6} g_0, \quad (2.123)$$

который входит в показатель экспоненты выражения для ферми-газа.

При анализе учитывались в самом грубом виде поправки, обусловленные эффектом спаривания. Так, в формуле (2.117) для плотности уровней энергия возбуждения U заменялась на эффективную энергию

$$U^* = \begin{cases} U - 2\Delta & \text{для четно-четных ядер,} \\ U - \Delta & \text{для } A\text{-нечетных ядер,} \\ U & \text{для нечетно-нечетных ядер.} \end{cases} \quad (2.124)$$

Здесь Δ — нечетно-четный массовый параметр (фиг. 2.5). Такая поправка приводит к 20—40%-ному увеличению параметра a для четно-четных ядер. В окон-

чательных же данных не наблюдается каких-либо систематических нечеточных вариаций. Более последовательно влияние эффекта парных корреляций на плотность уровней рассматривается в гл. 8.

Нетрудно видеть, что разные методы оценки a дают удовлетворительно согласующиеся результаты. Отметим, однако, что, как уже говорилось, мы не вправе были бы ожидать количественного согласия с выражением для плотности уровней ферми-газа. В некоторых случаях экспериментальные данные указывают, по-видимому, на наличие отклонений от него. Поэтому фиг. 2.12 следует рассматривать как очень грубое резюме предварительных данных о плотности ядерных уровней.

Самая удивительная особенность данных фиг. 2.12 — это заметное уменьшение a для конфигураций, близких к заполненным оболочкам. Такой эффект можно качественно объяснить, если учесть, что для возбуждения частиц из одной оболочки в другую требуется довольно большая энергия. Но, поскольку нам известно, детальные расчеты данного эффекта на основе экспериментального распределения уровней не проводились. Отклонения от простого выражения (2.117) для зависимости плотности уровней от энергии могут также быть обусловлены зависимостью эффективного значения a от оболочечной структуры.

В случае однородного ферми-газа для параметра a мы имеем выражение

$$a = \frac{\pi^2}{6} g(e_F) = \frac{\pi^2}{4} \frac{A}{e_F} \approx \frac{A}{15} M_{\text{эв}}^{-1}. \quad (2.125)$$

Нетрудно видеть, что экспериментальные значения a систематически больше даваемых формулой (2.125). Отметим, однако, что эта формула сильно занижает плотность одночастичных уровней $g(e_F)$, поскольку в ней предполагается, что плотность частиц равна плотности в центре ядра, и не учитывается эффект плавного спадания потенциала на краю ядра (т. е. увеличение эффективного объема для частиц с энергией, равной энергии Ферми). Расчет этого эффекта в случае потенциала гармонического осциллятора дает

$$a = \frac{\pi^2}{6} \frac{2(N_{\text{макс}} + 3/2)^2}{\hbar \omega_0} \approx \frac{A}{10} M_{\text{эв}}^{-1}, \quad (2.125a)$$

где $N_{\text{макс}}$ — главное осцилляторное квантовое число последней заполненной оболочки, а ω_0 — осцилляторная частота [значения величины $\hbar \omega_0$ и кратности вырождения осцилляторных оболочек приведены в формулах (2.131), (2.151) и (2.158)]. Хотя такое простое выражение для плотности уровней довольно хорошо согласуется с экспериментальными данными, не ясно, учитываются ли в нем должным образом основные физические эффекты. В этой связи следует обратить внимание на следующие моменты:

- а) эффекты оболочечной структуры;
- б) зависимость одночастичного потенциала от скорости;
- в) более корректный учет явлений парных корреляций (см. гл. 8, § 6);
- г) вклад коллективных возбуждений.

Поскольку эффекты «б» и «в», по-видимому, систематически снижают плотность уровней по сравнению с приведенными выше оценками, корректный анализ на основе модели независимых квазичастиц должен давать заниженные значения плотности уровней.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОБОЛОЧЕЧНОЙ СТРУКТУРЫ ЯДРА

Достаточным условием приближенной справедливости модели ферми-газа является требование, чтобы средняя длина свободного пробега была больше среднего расстояния между нуклонами. Если же, как это подтверждается экспериментами по рассеянию нейтронов на

ядрах (фиг. 2.3), средняя длина свободного пробега больше размеров ядра, то появляются новые закономерности, связанные с квантованием орбит отдельных нуклонов. При этом особенно поразительные эффекты наблюдаются тогда, когда система имеет сферически симметричную форму. В этом случае каждое одночастичное состояние можно характеризовать полным угловым моментом нуклона j . Вследствие сферической симметрии такие орбиты $(2j + 1)$ -кратно вырождены. Вырождение одночастичных орбит приводит, как и в атомах, к отчетливо выраженной скачкообразности многих свойств ядер, т. е. к эффектам оболочечной структуры.

В данном параграфе мы рассмотрим ряд прямых проявлений оболочечной структуры ядер (более полно эти вопросы рассмотрены в книге [314]). Анализ спектров ядер, проводимый в последующих главах, почти на каждом этапе будет давать нам дополнительные доказательства существования оболочечной структуры.

Следует отметить, что отклонение одночастичного спектра от эквидистантного сильно оказывается на энергии связи только нескольких нуклонов и поэтому несущественно для рассмотрения «глобальных» свойств ядер. В разложении (2.12) для полной энергии связи ядра эффекты оболочечной структуры представляют собой малую поправку по сравнению с поверхностной энергией, так что наблюдающиеся флуктуации функции энергии связи составляют величину порядка процента (фиг. 2.4). Несмотря на малость величины этих эффектов по сравнению с полной энергией ядра, они оказывают решающее влияние на структуру низколежащих уровней, которая особенно сильно зависит от конфигураций нескольких наиболее слабо связанных нуклонов. Поэтому до тех пор, пока информация о ядрах ограничивалась значениями их энергии связи, обнаружить оболочечную структуру их было довольно трудно. По мере же систематического измерения моментов ядер и спектров их возбужденных состояний доказательства существования такой структуры стали поступать в огромном количестве.

1. Энергия связи

Энергии отделения нуклонов в ядрах обнаруживают такие же закономерности, как и потенциалы ионизации атомов (фиг. 2.13—2.16). Самые большие скачки энергии связи ядер наблюдаются при числах нуклонов, равных 2, 8, 20, 28, 50, 82 и 126. С точки зрения структуры ядра эти числа аналогичны порядковым номерам инертных газов ($Z = 2, 10, 18, 36, 54$ и 86). Как и в случае атомов, они соответствуют заполнению оболочек, особенно далеко отстоящих по шкале энергий от следующей, более высокой оболочки (т. е. заполнению главных оболочек). Такие же, но более слабые эффекты иногда наблюдаются при заполнении подоболочек. Это происходит в атомах с порядковыми номерами 4, 12, 30, 48 и 80 и в ядрах с чис-

лами нуклонов 6, 16, 40 и 58. То обстоятельство, что заполнение протонных и нейтронных оболочек происходит при одних и тех же числах нуклонов, говорит о том, что форма среднего поля для протонов и нейtronов примерно одинакова.

Из фиг. 2.13, 2.15 и 2.16 явствует, что относительная величина скачков энергий связи ядер в 2—3 раза меньше, чем относительная величина скачков потенциалов ионизации атомов. Это можно объяснить разной радиальной зависимостью среднего поля в этих двух системах.

2. Энергия возбуждения четно-четных ядер

Очень чувствительной мерой стабильности ядра может служить энергия, необходимая для возбуждения его из основного состояния. Благодаря эффекту спаривания четно-четные ядра (т. е. ядра с четными Z и N) систематизируются чрезвычайно просто. Все эти ядра в основном состоянии характеризуются нулевым полным угловым моментом и положительной четностью ($I_\pi = 0+$), а для их первых возбужденных состояний, за очень малыми исключениями, $I_\pi = 2+$. Далее мы увидим, что эти правила — просто следствия свойств межнуклонного взаимодействия. Известные значения энергий возбуждения первых ($2+$) уровней четно-четных ядер представлены на фиг. 2.17. Мы видим, что энергия возбуждения проходит через большие максимумы, соответствующие заполнению оболочек, причем постепенно уменьшается с возрастанием A вследствие увеличения размеров ядра.

Систематически встречающиеся состояния типа $2+$ представляют собой наиболее легко возбуждаемые степени свободы ядер. Для ядер с дважды заполненными оболочками возбуждения связаны с переходами нуклонов из заполненных оболочек в более высокое расположенные. Для ядер, в которых оболочки не заполнены, состояния $2+$ образуются в результате перераспределения частин в пределах заполняющейся оболочки.

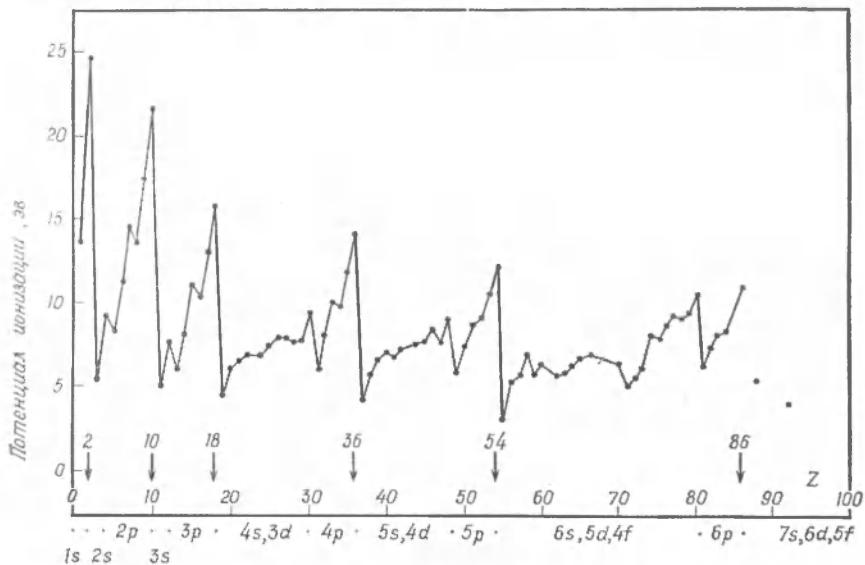
3. Плотность уровней

Большинство доказательств оболочечной структуры ядер основывается на особенностях спектра в области малых энергий возбуждения. Но и в области энергий возбуждения порядка 5—10 $M\text{эв}$ оболочечная структура оказывает сильное влияние на полную плотность состояний (фиг. 2.12). В частности, у ядер с почти замкнутыми оболочками плотность уровней при одних и тех же энергиях возбуждения на несколько порядков меньше, чем у других ядер. Это можно объяснить, если учесть, что для перехода частицы из одной оболочки в другую требуется значительная энергия, в связи с чем в таких ядрах как бы уменьшается число степеней свободы при данной энергии возбуждения.

ПРИМЕРЫ К § 2

Потенциалы ионизации нейтральных атомов (фиг. 2.13)

На фиг. 2.13 представлена зависимость энергии отделения последнего электрона (потенциала ионизации) нейтральных атомов от порядкового номера Z . Оболочечная структура особенно отчетливо проявляется в том, что энергия отделения уменьшается после заполнения каждой главной оболочки. Заметна



Фиг. 2.13. Потенциалы ионизации атомов [328].

Точками ниже оси абсцисс отмечены заполненные оболочки.

также и подоболочечная структура [максимумы при $Z = 4$ и $Z = 12$, связанные с заполнением орбит $2s$ и $3s$, а также максимумы при $Z = 30$ и $Z = 48$, связанные с заполнением $(4s+3d)$ - и $(5s+4d)$ -подоболочек]. Небольшие максимумы при $Z = 7, 15$ и 33 , соответствующие середине заполнения p -оболочек, обусловлены тем, что в таких конфигурациях можно достичь максимального числа антисимметричных связей между p -электронами и, следовательно, минимального кулоновского отталкивания (более подробный анализ таких конфигураций проводится в гл. 7). Аналогичный эффект, проявляющийся в увеличении энергии связи, имеет место и в легких ядрах с $A = 4n$ (фиг. 2.4).

Правильность оболочечного описания для атомов можно грубо оценить, сравнив разность энергий между оболочками (величины скачков на фиг. 2.13) с энергией взаимодействия двух электронов в данной конфигурации. Последняя величина — порядка нескольких электронвольт (см. гл. 7), т. е. в 3—10 раз меньше разности энергий главных оболочек.

Энергии отделения нейтронов и протонов (фиг. 2.14—2.16)

Вариации энергии отделения нейтронов и протонов свидетельствуют об оболочечной структуре ядра, так же как вариации потенциалов ионизации отражают

соответствующую оболочечную структуру атомов. Аналог графика энергий ионизации атомов для случая ядер представлен на фиг. 2.14; линиями соединены ядра с одинаковым нейтронным избытком. Фиг. 2.14 сильно отличается от фиг. 2.13 из-за резких скачков, связанных с эффектами парной энергии в ядрах. Последние того же порядка, что и вариации, связанные с заполнением оболочек. Поэтому выделить оболочечные эффекты на фиг. 2.14 затруднительно.

Чтобы устранить резкие осцилляции, которые мы видим на фиг. 2.14, можно построить график энергии отделения нейтронов в ядрах с нечетными N и четными Z (фиг. 2.15; ядра с нечетными Z пропущены для упрощения графика). Как и ранее, линиями соединены ядра с одинаковым нейтронным избытком. Оболочечная структура для нейтронов проявляется так же, как и на соответствующем графике для атомов (фиг. 2.13), в наличии максимумов энергий отделения, соответствующих заполненным оболочкам.

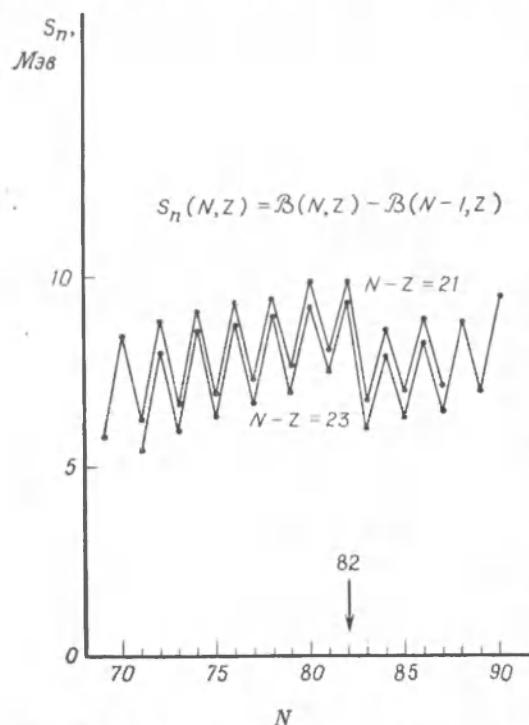
При оценке разности энергий главных заполненных оболочек следует иметь в виду то обстоятельство, что за счет парной корреляции энергия заполненной оболочки снижается гораздо меньше, чем энергия других конфигураций с четным числом нуклонов (см. гл. 8). Поэтому непосредственно из фиг. 2.15 мы получим заниженное значение разности энергии δE между оболочками. В случае, когда $\delta E \gg \Delta$, оценка δE будет точнее, если к величине наблюдаемого скачка масс прибавить величину 2Δ . Таким путем мы получим, что значение δE для соседних оболочек с $N = 50, 82$ и 126 составляет примерно $3-4 M_eV$.

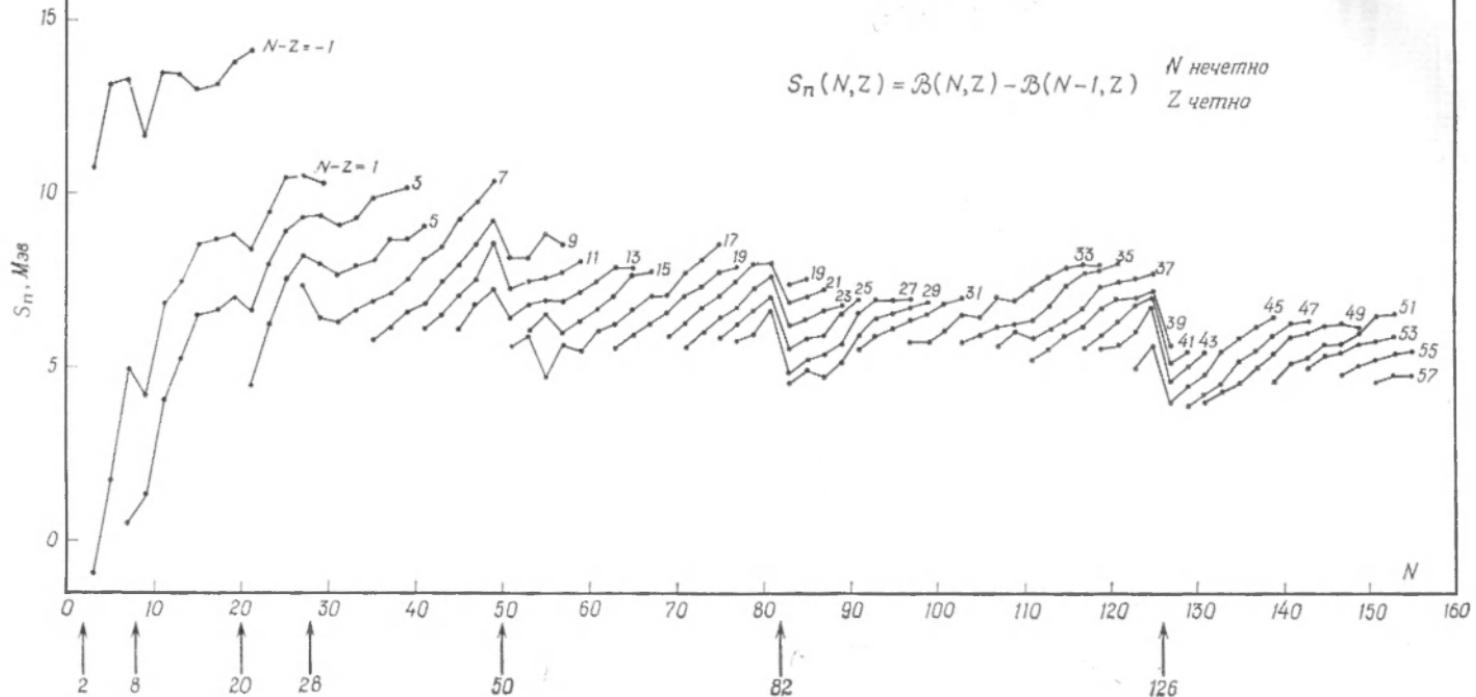
На фиг. 2.16 представлена зависимость энергии отделения

Фиг. 2.14. Энергии отделения нейтронов S_n [311].

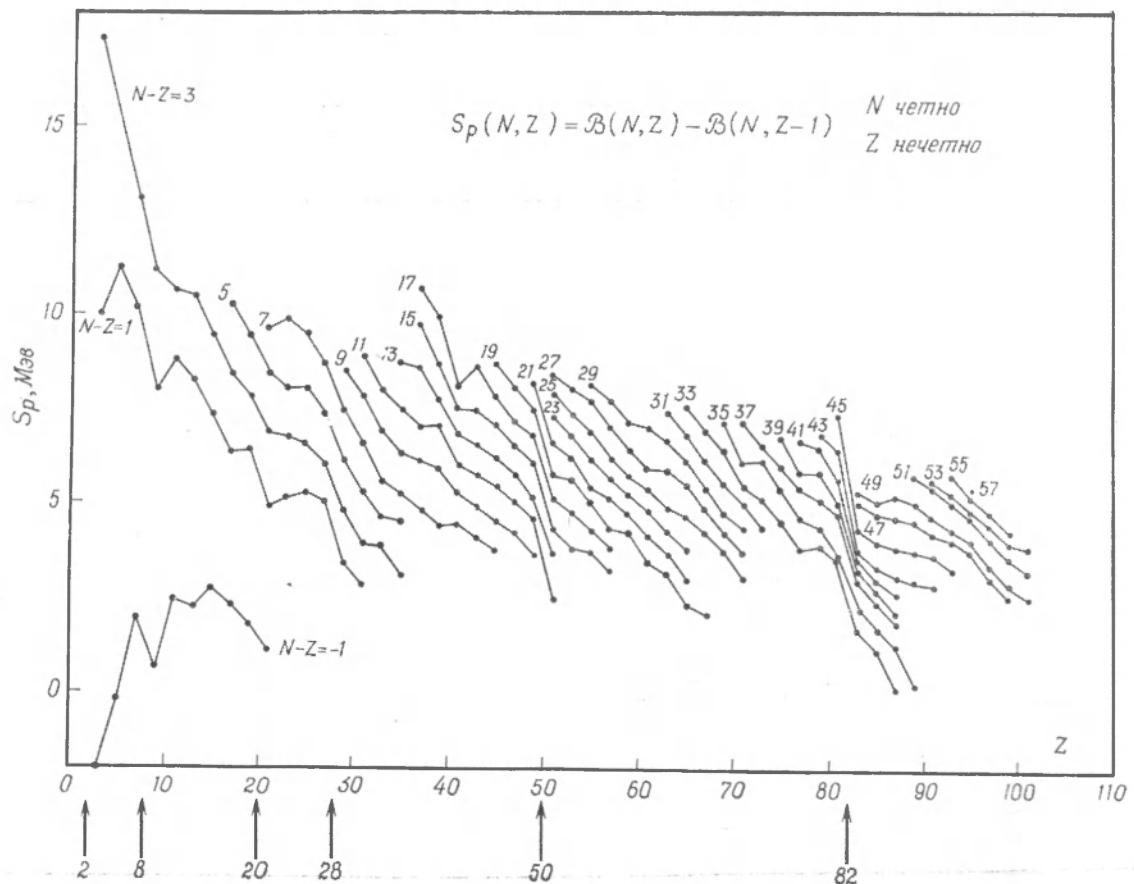
протонов в ядрах с нечетными Z и четными N от числа протонов Z . Как и ранее, линиями соединены ядра с одинаковым нейтронным избытком. Протонная оболочечная структура проявляется в резком уменьшении величины энергии отделения в начале каждой новой оболочки. Как нетрудно видеть, заполнение протонных оболочек происходит при тех же значениях чисел нуклонов, что и заполнение нейтронных оболочек, а энергетические скачки — примерно той же величины.

При добавлении одинакового числа протонов и нейтронов вследствие увеличения кулоновской энергии величина S_p стремится к нулю, а поэтому на фиг. 2.16 кривые S_p систематически спадают с ростом Z . Таким образом, замкнутые протонные оболочки проявляются не в виде максимумов, как на соответствующем графике для нейтронов, а в виде резких изломов кривых энергий связи протонов.





Ф и г. 2.15. Энергии отделения нейтронов S_n [311].



Ф и г. 2.16. Энергии отделения протонов S_p [311].

Систематика энергий возбуждения состояний $2+$ (фиг. 2.17а и 2.17б)

На фиг. 2.17а и 2.17б представлена зависимость энергии возбуждения первого уровня $2+$ в четно-четных ядрах от числа нейтронов и протонов N и Z . Систематика этих уровней не только служит убедительным доказательством оболочечной структуры, но и дает ключ к пониманию многих свойств структуры ядер. К этому вопросу мы будем неоднократно возвращаться в дальнейшем. Особенно важно то, что вероятности квадрупольных переходов, связывающих состояния $2+$ с основными состояниями, оказываются заметно выше одночастичной оценки (см. фиг. 4.1). Это обстоятельство свидетельствует о коллективной природе перехода и служит исходной точкой при построении вращательных и колебательных моделей.

Состояния $2+$ представляют собой первые возбужденные состояния почти всех четно-четных ядер. К исключениям относятся ядра ${}^4\text{He}$ ($0+$), ${}^{14}\text{C}$ ($1-$), ${}^{16}\text{O}$ ($0+$), ${}^{40}\text{Ca}$ ($0+$), ${}^{72}\text{Ge}$ ($0+$), ${}^{90}\text{Zr}$ ($0+$), ${}^{208}\text{Pb}$ ($3-$).

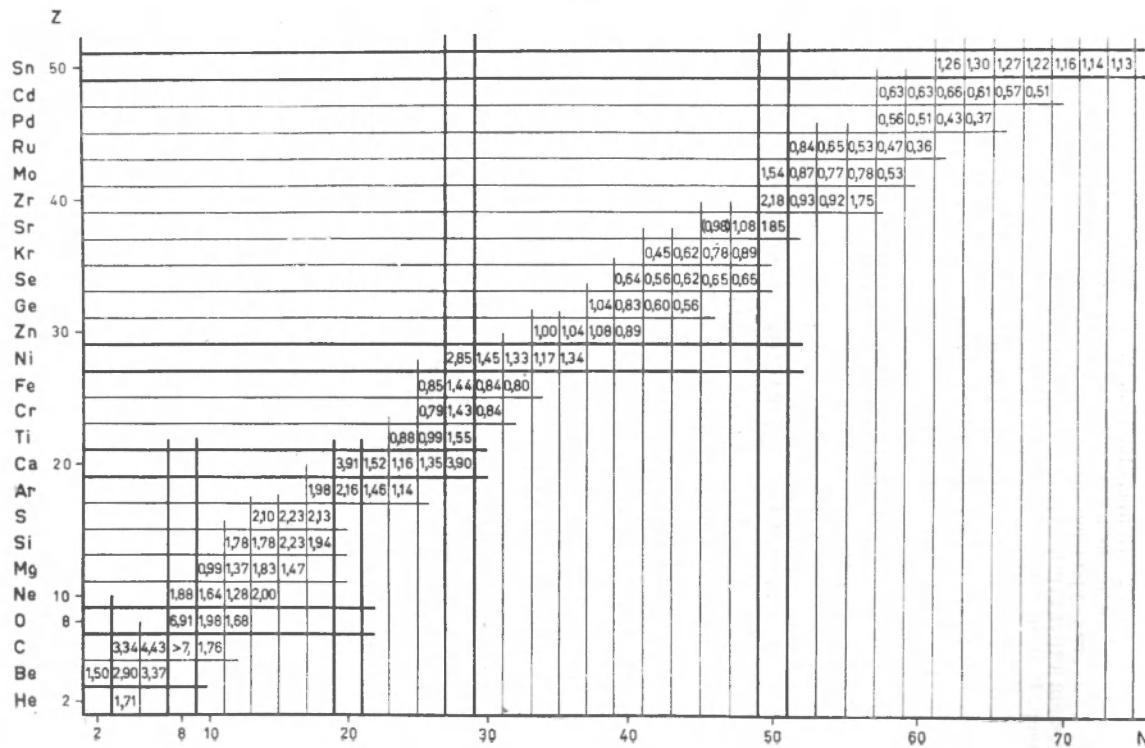
§ 3. ЯДРА И ИХ РАСПРОСТРАНЕННОСТЬ В ПРИРОДЕ

На основе систематики энергий ядер, следующей из модели ферми-газа, и необходимых уточнений, связанных с оболочечной структурой и эффектами спаривания, можно довольно полно объяснить стабильность ядер и их относительную распространенность в природе.

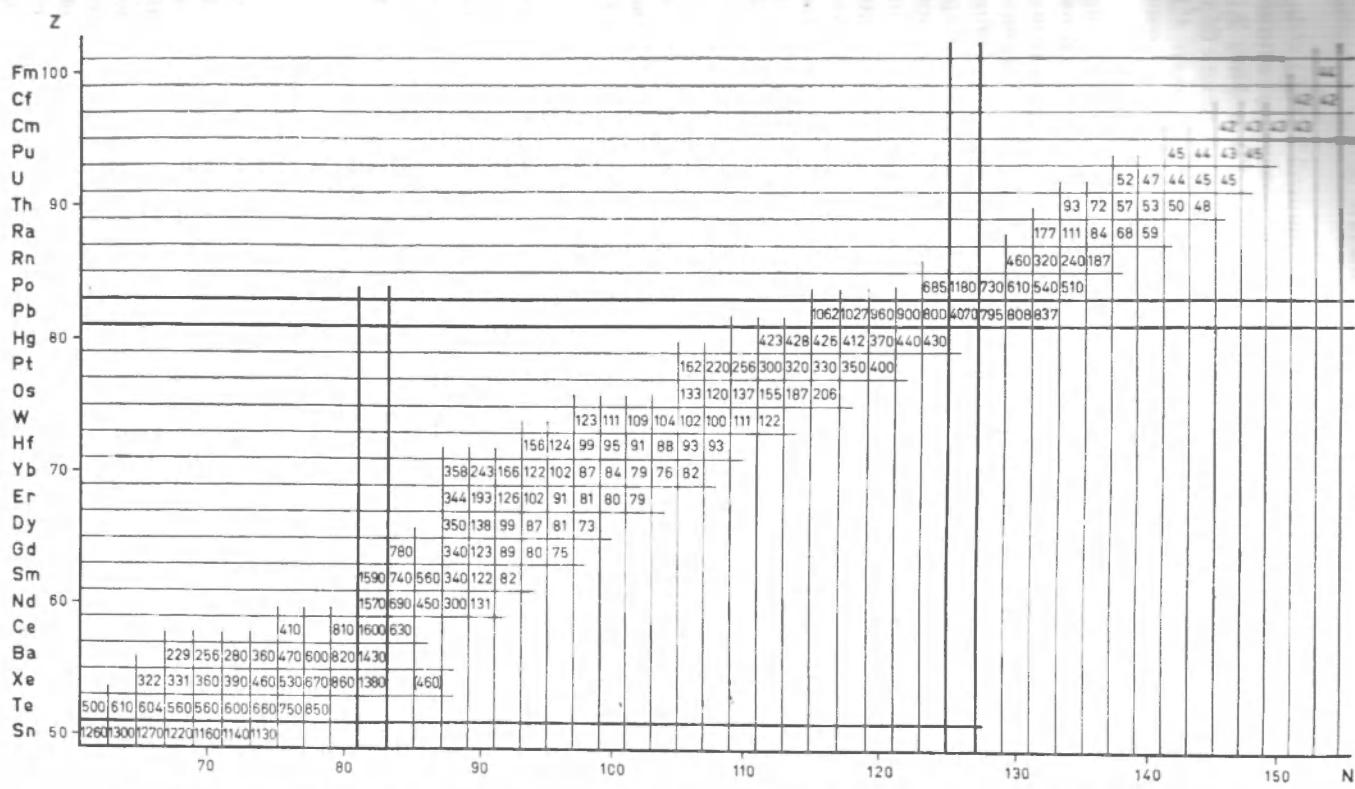
1. Стабильность ядер

На фиг. 2.18 представлены все известные β -стабильные ядра. Общий ход дорожки β -стабильности определяется конкуренцией между энергией симметрии и кулоновской энергией. На эту плавную тенденцию накладываются эффекты оболочечной структуры, проявляющейся в том, что область наибольшей стабильности располагается вдоль линий, соответствующих заполненным протонным или нейтронным оболочкам. Другое проявление этой структуры — увеличение числа стабильных изотопов или изотонов в том месте, где дорожка стабильности пересекается с линией, соответствующей заполненной оболочке, вне области дважды заполненных оболочек (см. в особенности случаи с $Z = 50$ и $N = 82$).

Несмотря на то, что парная энергия мала по сравнению с энергиями связи, она оказывает существенное влияние на естественную распространенность различных ядер. У ядер с нечетными A имеется только по одному β -стабильному изобару, хотя в ряде случаев энергии β -распада других изобар настолько малы или же разности спинов настолько велики, что их времена жизни относительно β -переходов становятся сравнимыми с возрастом элементов (${}^{87}\text{Rb}$, ${}^{113}\text{Cd}$, ${}^{115}\text{In}$, ${}^{187}\text{Re}$). В случае четных A из-за эффекта спаривания энергии четно-четных ядер систематически меньше энергий нечетно-нечетных ядер на величину 2Δ . Если исключить случаи самых легких



6



Фиг. 2.17. Энергия первых возбужденных состояний 2^+ четно-четных ядер как функция от N и Z .

a — при $Z \leq 50$, энергия дана в $M\text{эв}$; *b* — при $Z \geq 50$, энергия дана в кэв . Данные взяты из работ [343] и [283]. Наличие столь удивительной систематики было отмечено уже в самом начале развития ядерной спектроскопии [407, 374, 14, 386, 387].

ядер, эта величина несколько больше разности энергий 2 ($b_{\text{симм}} / A + 3e^2 / 5R_c$), связанной с изменением Z на единицу при уходе от энергетического минимума по $(N - Z)$ [см. формулу (2.12) и фиг. 2.5]. Поэтому не существует β -стабильных нечетно-нечетных ядер, более тяжелых, чем ^{11}N . Наличие в естественных условиях ядер ^{40}K , ^{50}V , ^{138}La , ^{176}Lu и ^{180}Ta связано с имеющимися у этих ядер очень большими спинами, в результате чего их времена жизни относительно β -распада оказываются сравнимыми с возрастом стабильных элементов. Поскольку времена жизни относительно двойного β -распада очень велики (см. гл. 3, приложение 4), все четно-четные изобары, массы которых меньше масс их нечетно-нечетных соседей, оказываются β -стабильными. Поэтому в области тяжелых ядер обычно имеются по 2—3 естественно встречающихся четно-четных изобара.

На фиг. 2.18 указаны также предполагаемые границы области стабильности относительно испускания протонов или нейтронов, вне которой экспериментальные возможности изучения свойств ядер коренным образом меняются. Хотя в принципе вся область квазистабильных ядер пригодна для спектроскопических исследований, к настоящему времени имеются сведения только о β -стабильных и находящихся непосредственно рядом с ними изотопах (см., например, фиг. 2.17). При определении верхних по N и Z границ области квазистабильности следует также учитывать возможность спонтанного деления ядер с большими Z . С увеличением кулоновской энергии времена жизни относительно спонтанного деления резко уменьшаются. При достаточно больших A спонтанное деление, по-видимому, происходит практически мгновенно даже для ядер, расположенных около линии, соответствующей испусканию нейтрона, и, таким образом, ограничивает область квазистабильных ядер. На основе экстраполяции имеющихся данных были предприняты попытки определить границы области квазистабильности (см. работу [451] и работы, цитируемые в подписи к фиг. 2.18). Было высказано предположение, что в связи с увеличением стабильности ядер при заполнении новых оболочек появится возможность изучать ядра в области $A \approx 300$ [333].

2. Относительная распространенность ядер и происхождение элементов

Относительная распространенность, с которой различные ядра встречаются в нашей части Вселенной, обнаруживает много удивительных особенностей, которые можно связать с конкретными свойствами ядер и которые позволяют разгадывать процессы, приведшие к образованию элементов. Подробный анализ различных данных указывает на то, что элементы образовались, по-видимому, в результате множества различных ядерных процессов, протекающих в звездах на различных стадиях их эволюции. Не вдаваясь в подробное описание таких процессов, мы отметим вкратце ряд выводов, которые

может следить непосредственно из данных ядерной физики. Подробно эти интереснейшие вопросы ядерной астрофизики рассматриваются в работе [77], а также в более поздних обзорах [78, 414].

У эмпирической кривой относительной распространённости при $A > 50$ (фиг. 2.19) обнаруживаются две удивительные особенности. Во-первых, это резкий максимум вблизи Fe и, во-вторых, постепенное спадение в сторону тяжёлых элементов, на которое накладывается ряд небольших максимумов. Наличие максимума в районе Fe объясняется тем, что ядро ^{56}Fe и соседние с ним ядра относятся к наиболее стабильным и поэтому в ядерных процессах при тепловом равновесии должны появляться в наибольшем количестве. В настоящее время считают, что тепловое равновесие достигается следующим образом. Сначала первичная материя, образующаяся на ранней стадии развития Вселенной, собирается в звезды. В звезде происходит «сгорание» водорода и образование ^4He при температурах порядка 10^7 °К ($kT \sim 1$ кэВ). По мере истощения запасов водорода в центральных областях звезда сжимается, а температура ее повышается, в результате чего появляется возможность слияния α -частиц и образования ядер ^{12}C и ^{16}O (при $kT \sim 10$ кэВ). По мере дальнейшего увеличения температуры эти ядра в свою очередь вступают в реакции и в конечном итоге образуются наиболее стабильные ядра с $A \sim 60$. Детальная структура максимума в районе Fe на кривой распространённости сильно зависит от температуры, плотности и продолжительности экстремальных условий, в которых установилось равновесие. Длительность поддержания таких условий важна, поскольку вначале у вещества сохраняется равенство $N = Z$, характерное для легких элементов, из которых оно образовалось. Со временем в результате процессов β^+ -распада и особенно электронного захвата образуется нейтронный избыток, характерный для наиболее стабильных ядер в районе $A \sim 60$. Действительно, энергия связи максимальна в ^{60}Ni (фиг. 2.4), но среди ядер с $N = Z$ наиболее стабильно, вероятно, ядро ^{56}Ni , которое является дважды магическим с $N = Z = 28$. Из подробного анализа наблюдающихся относительных распространённостей следует, что элементы в районе Fe образовались в условиях с $kT \sim 300$ кэВ, $\rho \approx 3 \cdot 10^6$ г/см³ и что эти условия существовали в течение времени $3 \cdot 10^4$ сек [169]. Наличие таких элементов на Земле и Солнце свидетельствует о том, что какой-то бурный взрыв прервал процесс приближения к равновесию и рассеял некоторое количество звездной материи, находящейся на высокой стадии эволюции, в межзвездном пространстве, где впоследствии из него образовалась солнечная система.

Ядра же, более яжелые, чем железо, образуются, по-видимому, в основном в результате захвата нейтронов и последующего β -распада. Этот вывод частично подтверждается существованием заметных максимумов на кривой распространённости при числах нейтронов 50, 82, 126, соответствующих заполненным оболочкам (фиг. 2.19).

В качестве еще одного довода можно сослаться на асимметрию наблюдающихся распространенностей относительно линии наибольшей стабильности. Так, со стороны от этой линии, соответствующей недостатку нейтронов, имеется много стабильных ядер, которые не могли образоваться путем нейтронного захвата. Как видно из фиг. 2.20, распространность этих ядер неизменно более чем на порядок меньше распространности других соседних с ними стабильных изотопов. Распространность же изотопов, которые не могли образоваться в результате захвата протонов и которые расположены в области нейтронного избытка, сравнима с распространностью изотопов, расположенных на дорожке стабильности.

Конкретный набор изотопов, получающихся в цепочке нейтронного захвата, зависит от соотношения скоростей процессов β -распада и захвата нейтронов. Для процесса β -распада в области дорожки стабильности характерны времена порядка часов или дней, уменьшающиеся до долей секунды вблизи границы стабильности по отношению к испусканию нейтронов (см. фиг. 2.18). Если поток нейтронов мал, то стабильность по отношению к β -распаду устанавливается на каждой стадии, перед каждым последующим захватом нейтрона, и процессу соответствует дорожка, изображенная на фиг. 2.20. Заселенности вдоль этой дорожки обратно пропорциональны сечениям нейтронного захвата, которыми определяется скорость образования новых элементов. Поскольку для ядер с заполненными нейтронными оболочками эти сечения аномально малы, характерной чертой процесса захвата нейтронов в медленном процессе (s -процессе) оказывается появление максимумов на кривых распространности при числах нейтронов N , равных 50, 82, 126.

Малость сечений захвата для ядер с заполненными оболочками можно объяснить, если учесть, что в соответствующем энергетическом интервале ($E_n \sim kT = 10-100$ кэВ) захват нейтрона связан с большим числом хорошо разделенных резонансов с $\Gamma_n > \Gamma_\gamma$. В таких условиях вклад каждого резонанса просто пропорционален Γ_γ , а среднее сечение захвата для любого ядра пропорционально Γ_γ/D , где D — среднее расстояние между резонансами. Полная радиационная ширина Γ_γ не слишком сильно меняется от ядра к ядру, так как она представляет собой сумму многих вкладов от различных возможных переходов в позиционные состояния. Поэтому наиболее важным фактором, определяющим величину сечения захвата, оказывается среднее расстояние между уровнями D при энергиях возбуждения, приблизительно равных энергии отделения нейтрона. В ядрах с замкнутой оболочкой расстояние D исключительно велико, отчасти из-за пониженной энергии связи добавочного нейтрона, а отчасти из-за того, что для возбуждения частицы и ее перехода из заполненных оболочек в следующие пустые оболочки требуется большая энергия (см. § 2, п. 3 и данные, представленные на фиг. 2.12).

Систематические измерения сечений захвата позволили установить наличие сильной корреляции между сечениями и распространностью ядер, которые получаются в s -процессах (см. обзоры величин сечений [305, 306] и работу [391]).

Корреляция же в свою очередь дала информацию об астрофизических условиях (температуре, плотности нейтронов, длительности экспозиции и др.), в которых синтезировались эти элементы.

Если захват нейтронов происходит быстрее, чем соответствующий β -распад, то в результате сначала образуются изотопы с той стороны от линии стабильности, которая соответствует избытку нейтронов. В результате может быть получено много нуклидов, которые не возникают при медленном процессе. Заметная распространенность таких богатых нейтронами изотопов указывает на то, что подобные быстрые процессы захвата (r -процессы) также играли важную роль в эволюции материи, обнаруженной в солнечной системе.

Когда потоки нейтронов достаточно велики, нейтронный захват продолжается при данном Z до тех пор, пока не будет достигнута линия нестабильности относительно эмиссии нейтрона. При таком процессе относительная распространенность зависит от времени жизни относительно β -распада таких чрезвычайно богатых нейтронами ядер, ибо этими временами жизни определяются времена ожидания до добавления нейтрона. На фиг. 2.20 представлена ориентировочная дорожка захвата, соответствующая таким быстрым процессам. Оболочечная структура, предполагающая исключительно слабую связь 83-го нейтрона, проявляется в вертикальном изломе дорожки захвата, вследствие чего дорожка подходит довольно близко к линии стабильности в районе $A \sim 130$. Из-за относительно малых энергий β -распада в этой области времена ожидания довольно велики, что ведет к большой распространенности соответствующих ядер. Таким образом, наблюдающиеся максимумы распространенности при $A \sim 80, 130$ и 194 были связаны с заполнением нейтронных оболочек с $N = 50, 82$ и 126 .

Таким образом, результаты анализа распространенностей элементов тяжелее железа говорят о действии двух существенно различных процессов синтеза — реакций с медленным и быстрым захватом нейтронов. Множество более тонких деталей распространенностей и более точные теоретические расчеты подтверждают такой вывод. Для получения же небольших количеств ядер со значительным дефицитом нейтронов требуется другой механизм; высказывались предположения, что, помимо указанных, существенны процессы (p, γ) и (γ, n) .

Большие успехи достигнуты в установлении корреляции предполагаемых ядерных процессов, ведущих к синтезу элементов, с астрономическими данными о физических условиях и эволюции звезд. Так, предполагается, что медленный захват нейтронов происходит на стадии Красных Гигантов. В таких звездах, находящихся на довольно высокой стадии эволюции, запасы водорода в центральных областях истощены и основным источником энергии оказывается сгорание α -частиц. Нейтроны, необходимые для s -процесса, могут получаться при экзотермических (α, n) -реакциях — таких, как $^{18}\text{C} (\alpha, n) ^{16}\text{O}$, $^{21}\text{Ne} (\alpha, n) ^{24}\text{Mg}$, при слабо эндотермической реакции $^{22}\text{Ne} (\alpha, n) ^{25}\text{Mg}$, а также в результате реакции с тяжелыми ионами

^{12}C (^{12}C , n) ^{23}Mg и ^{16}O (^{16}O , n) ^{31}S . Малая длительность и критические условия процесса, в результате которого образуются элементы группы железа, наводят на мысль о том, что этот процесс можно ассоциировать со сверхновыми звездами [169]. Гораздо меньше определенности в вопросе о том, где происходят γ -процессы, но возможно, что необходимые условия существуют в квазарах [241, 391].

Следует подчеркнуть, что многие выводы, упомянутые выше, носят несколько спекулятивный характер и основаны на значительной экстраполяции экспериментальных данных. Большое разнообразие ядерных явлений открывает, однако, широкие перспективы для разъяснения событий космологической эволюции.

В связи с такими космологическими теориями следует иметь в виду, что исследование ядерных столкновений при очень больших энергиях ($>10^9$ эв) привело к открытию антинуклонов, существование которых было предсказано на основе релятивистской теории Дирака для частиц со спином $1/2$. Из симметрии между частицами и античастицами, являющейся, по-видимому, одним из основных законов природы, следует, что силы взаимодействия между антинуклонами такие же, как и между нуклонами. Поэтому можно допустить существование антиматерии, построенной из античастиц и обладающей свойствами, аналогичными свойствам обычной материи. Эти два вида материи, однако, аннигилируют друг с другом и поэтому не могут сосуществовать в одной области пространства. Асимметрия между распространностью материи и антиматерии в непосредственной близости от Земли, возможно, связана с конкретной историей данной области Вселенной (см. работу [6] и цитируемые в ней статьи¹⁾).

ПРИМЕРЫ К § 3

Бета-стабильные ядра (фиг. 2.18)

Некоторые качественные тенденции стабильности ядер можно проследить на фиг. 2.18. Здесь известные β -стабильные ядра изображены прямоугольниками (темными и светлыми), напечатанными на диаграмму в функции числа нейтронов N и числа протонов Z . Общий ход этой «долины β -стабильности» можно выразить путем минимизации полной массы \mathcal{M} при фиксированном числе нуклонов A :

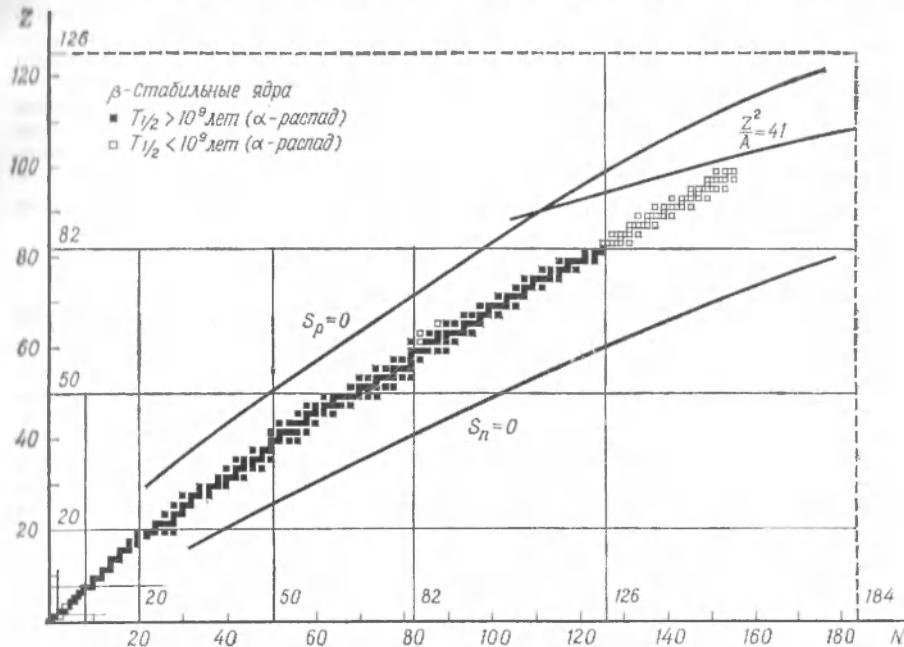
$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial N} \Big|_{A=\text{const}} = 0. \quad (2.126)$$

¹⁾ В этой связи следует отметить работы советских авторов [506, 511, 512]; а также работу [507]. — Прим. ред.

Из формул (2.12) для энергии связи $\mathcal{B}(N, Z)$, получим

$$(N-Z)_{\beta\text{-стабильн}} = \frac{\frac{3}{5} \frac{e^2}{R_c} A - (M_n - M_p)}{\frac{2b_{\text{СИММ}}}{A} + \frac{3}{5} \frac{e^2}{R_c}} \approx 6 \cdot 10^{-3} A^{5/3}. \quad (2.127)$$

На общий ход плавного изменения, соответствующего формуле (2.127), наложены ряд локальных искажений. Такие искажения обусловлены в основ-



Фиг. 2.18. Бета-стабильные ядра [416].

Темные квадратики — период полураспада (α -распад) больше 10^9 лет; светлые квадратики — период полураспада (α -распад) меньше 10^9 лет.

ном повышенной стабильностью заполненных оболочек (см., например, разрывы кривой при $Z = 20$ и $Z = 50$, а также при $N = 82$).

Другой важный предел области стабильности, существенный как для ядерной физики, так и для астрофизики, — это величина нейтронного избытка, при котором энергия отделения нейтрона становится равной нулю ($S_n = 0$). Этот предел можно получить из формулы (2.12) при условии

$$\left. \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial N} \right|_{Z=\text{const}} = 0. \quad (2.128)$$

Соответствующая кривая изображена на фиг. 2.18. Предел $S_p = 0$ находится аналогичным образом. Полученные оценки являются средними, поскольку они не учитывают оболочечных эффектов. На их основе нельзя описать и структуру переходной области (где $S_n \approx 0$ или $S_p \approx 0$), на которую влияют

печетно-четные эффекты. Более подробные оценки такого рода можно найти в работах [333, 451, 480, 486], однако все они основаны на предельной экстраполяции имеющейся систематики масс. Поэтому особую ценность в этих областях имеют прямые экспериментальные измерения.

Говоря о границах области стабильности относительно испускания частиц, нужно помнить, что выражения типа (2.12) представляют собой разложения, справедливые только в окрестности долины β -стабильности. Такие разложения непригодны для решения вопроса о возможности существования ядерных систем совершенно иного состава и строения, стабильных относительно испускания частиц, например системы, состоящей исключительно из нейтронов. Имеющиеся оценки (см., например, работу [291]) показывают, что связанный система, состоящая только из нейтронов, не может существовать, но вопрос этот весьма сложен, поскольку, может быть, это такая система, структура которой сильно отличается от структуры обычных ядер.

В этой связи напомним, что с увеличением числа нуклонов в электрически нейтральной системе будут доминировать очень слабые, но дальнодействующие гравитационные силы. Критическое число нуклонов, при котором гравитационная потенциальная энергия, приходящаяся на один нуклон ($\sim G A M^2 R^{-1} \sim \sim G A^{2/3} M^2 r_0^{-1}$), оказывается той же величины, что и ядерная энергия [$\sim h^2 (M r_0^2)^{-1}$], есть

$$A_{\text{крит}} \sim \left(\frac{\hbar^2}{G M^3 r_0} \right)^{3/2} \sim 10^{56}. \quad (2.129)$$

где G — гравитационная постоянная ($\approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$). Числу нуклонов $A_{\text{крит}}$ соответствует полная масса $A_{\text{крит}} M \approx 2 \cdot 10^{32} \text{ г} \sim 10^{-1} M_\odot$, где M_\odot — масса Солнца. Такие нейтронные звезды могут появляться на определенных стадиях эволюции звездных систем, и проблема обнаружения и идентификации подобных объектов относится к самым интересным проблемам теоретической и экспериментальной астрономии. Поскольку гравитационное взаимодействие не обнаруживает насыщения, при анализе проблемы стабильности систем с массовыми числами, значительно превышающими $A_{\text{крит}}$, возникают вопросы, ответить на которые в рамках существующего понимания гравитационных и ядерных сил невозможно (см. работу [452], а также подробный обзор [223]).

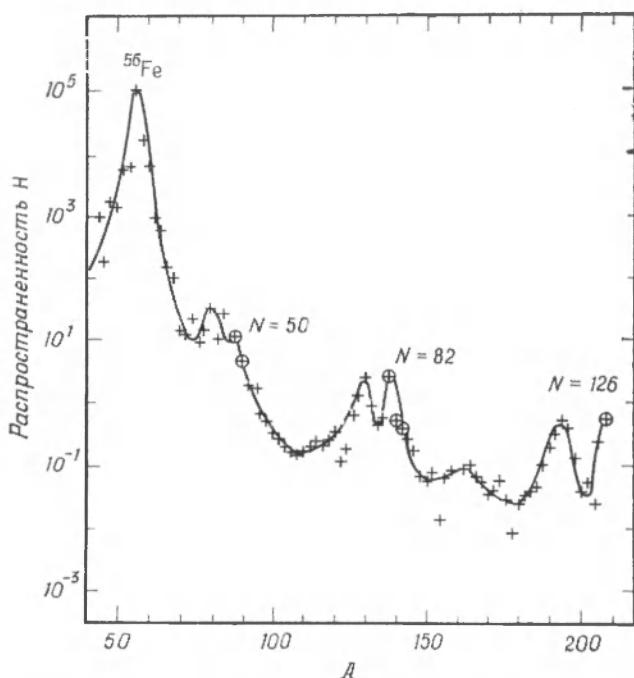
Нестабильность относительно испускания α -частиц и спонтанного деления выдвигает дополнительные ограничения на возможность существования различных ядер. Все ядра тяжелее $A \approx 100$ нестабильны относительно деления, но время жизни, обусловленное этим процессом, настолько велико, что он существует только в случае самых тяжелых ядер. Как мы увидим в гл. 6, анализ процесса деления на основе модели жидкой капли показывает, что способность делиться зависит от отношения кулоновской энергии ($\sim Z^2 A^{-1/3}$) к поверхностной энергии ($\sim A^{2/3}$). Таким образом, время жизни для спонтанного деления зависит от параметра Z^2/A . Значению $Z^2/A = 41$ (фиг. 2.18) соответствуют времена жизни порядка секунды {так, $T_{1/2}^{\text{дел}} ({}^{260}\text{Pb}) \approx 0,3 \text{ сек}$ [500]}. Следует, однако, подчеркнуть, что ряд особенностей времен жизни относительно спонтанного деления еще не позади объяснения. В частности, величины делительных барьеров, по-видимому, сильно зависят от оболочечной структуры, и, следовательно, все предсказания о стабильности самых тяжелых ядер должны основываться на более подробном анализе потенциальной энергии деформации [211, 499]. Можно также отметить, что способность к делению тяжелых элементов довольно сильно зависит от возможного члена симметрии в поверхностной энергии, а это может привести к более серьезному ограничению на стабильность тяжелых элементов относительно деления.

Многие ядра во всей периодической таблице нестабильны по отношению к испусканию α -частиц. Но из всех элементов легче ${}^{208}\text{Pb}$ только у ${}^5\text{He}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^{146}\text{Sm}$, 148 , ${}^{150}\text{Gd}$ и ${}^{154}\text{Dy}$ времена жизни настолько малы, что этот канал распада оказывает влияние на их распространенность в природе или на их использование.

в экспериментах по ядерной физике. Бета-стабильные ядра, периоды полураспада которых для испускания α -частицы меньше 10^9 лет, изображены на фиг. 2.18 цветными прямоугольниками. Понижение стабильности ядер с небольшим числом частиц сверх заполненных оболочек проявляется в резком уменьшении периодов полураспада для испускания α -частицы после заполненных оболочек в $N = 82$ и особенно после $N = 126$, $Z = 82$.

Распространенность четно-четных ядер с $A > 50$ (фиг. 2.19)

Относительная распространенность различных ядер устанавливается путем всестороннего анализа имеющегося материала о распространенности элементов



Фиг. 2.19. Относительная распространенность H различных четно-четных ядер с $A > 50$.

Выбраны такие единицы, в которых распространенность H (Si) = 10^6 . Данные взяты из работы [417]. Существуют также более поздние обзоры [7, 433, 84].

на Земле, в атмосферах планет, о составе метеоритов и данных солнечной спектроскопии. При этом особую роль играют данные анализа результатов исследования состава земных пород и метеоритов. Плавная кривая на фиг. 2.19 проведена так, что она приблизительно следует экспериментальным данным, точность которых зачастую невелика.

Что касается элементов, более легких, чем изображенные на фиг. 2.19, то здесь самая заметная особенность — значительное преобладание ядер ^3H

и ${}^4\text{He}$. В использованных на фиг. 2.19 единицах $H({}^1\text{H}) \approx 4 \cdot 10^{10}$ и $H({}^4\text{He}) \approx 3 \cdot 10^9$.

В рассматриваемой области элементов распространенность A -нечетных ядер систематически несколько меньше, чем соседних A -четных ядер. Это можно объяснить, если учесть, что в среднем сечение захвата нейтронов для нечетных ядер больше, чем для четных (см. то, что говорится о реакциях синтеза в § 3, п. 2). Чтобы не усложнять график, мы привели на нем только данные по ядрам с четными A .

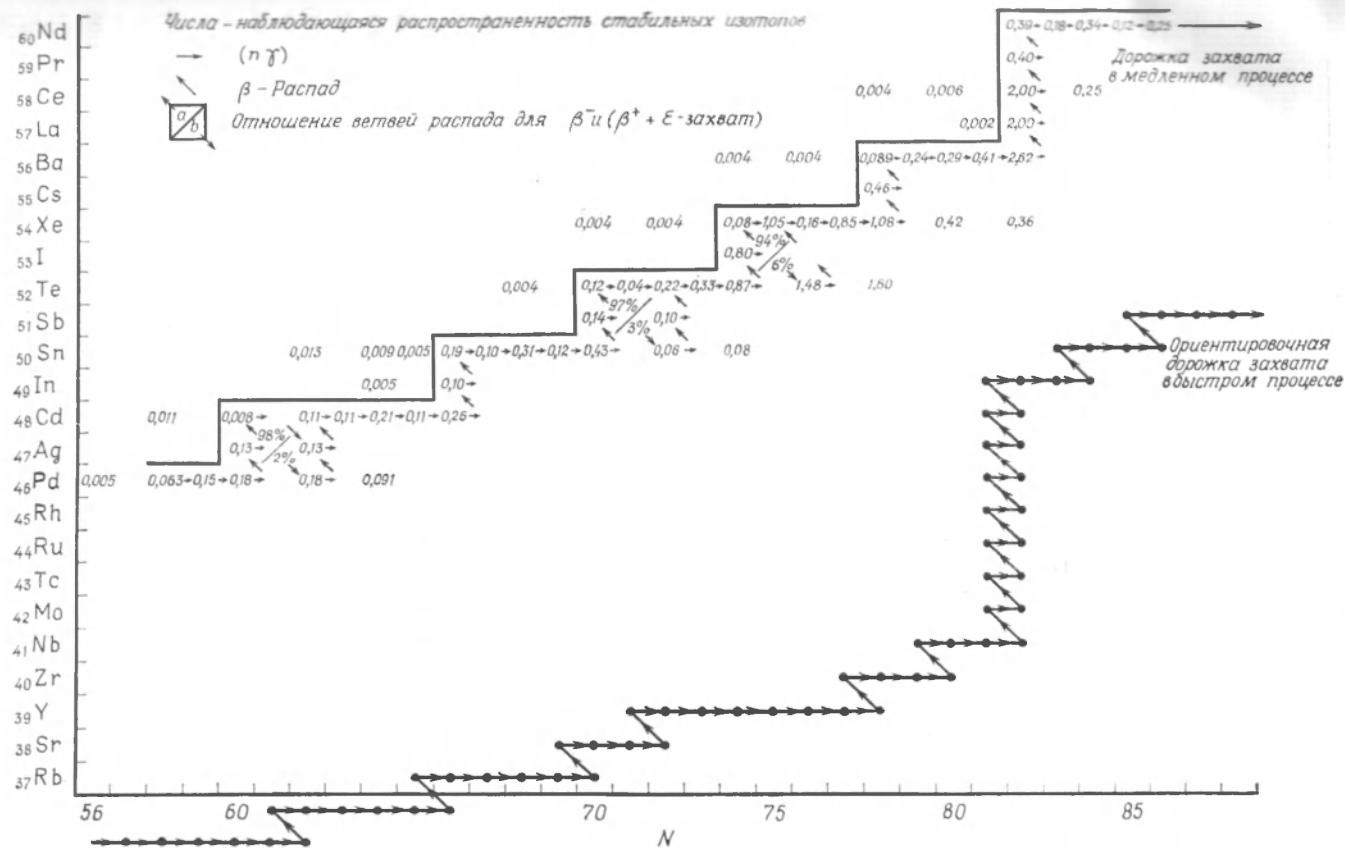
Указанные цифры относятся к солнечной системе. Данные по другим звездам или галактикам обычно дают качественно такую же картину, но в некоторых случаях наблюдаются поразительные расхождения. Были предприняты попытки связать эти расхождения со спецификой предыстории подобных систем [78].

Детальный ход приовой распространенности и структура дорожек захвата для ядер с $105 < A < 145$ (фиг. 2.20)

На фиг. 2.20 представлены процессы последовательного захвата нейтронов и соответствующие распространенности тяжелых элементов. Сплошной ступенчатой линией обозначены пределы нейтронодефицитности для тех изотопов, которые могут быть получены в процессе нейтронного захвата. Эти пределы можно достигнуть в «медленном» процессе, при котором равновесие по отношению к β -распаду устанавливается на каждом этапе.

Линией, лежащей в области сильного нейтронного избытка, изображен тот предполагаемый путь, по которому протекает синтез элементов в «быстром» процессе [77]. При ее построении предполагалось, что захват нейтронов происходит до тех пор, пока энергия связи нейтрона не уменьшится до 2 MeV , что, по приближенным оценкам, соответствует равновесию между процессами (p, γ) и (γ, n) . Оценка энергий связи нейтронов была проведена путем экстраполяции эмпирических данных о массах ядер с учетом эффектов, связанных с заполнением оболочек. Отметим, что из-за недостатка данных положение дорожки захвата в «быстром» процессе определено не очень точно.

Существенно то, что имеются такие изотопы, которые могут образоваться только в результате «медленного» процесса (они «экранированы» от продуктов «быстрого» процесса β -стабильным изобаром, заряд которого на единицу меньше). Примером могут служить изотопы ${}^{108}\text{S}$, ${}^{110}\text{Cd}$, ${}^{116}\text{Sn}$, ${}^{122}\text{Te}$, ${}^{128}\text{Te}$, ${}^{130}\text{Xe}$, ${}^{134}\text{Ba}$, ${}^{138}\text{Ba}$, ${}^{142}\text{Nd}$ и т. д. Имеются и такие ядра, которые могут образоваться только в результате «быстрого» процесса (например, ${}^{110}\text{Pd}$, ${}^{116}\text{Cd}$, ${}^{124}\text{Sn}$, ${}^{130}\text{Te}$, ${}^{130}\text{Xe}$, ${}^{142}\text{Ce}$ и т. д.). Распространенности соседних изотопов на дорожке «медленного» процесса примерно одинаковы и, как правило, отличаются друг от друга не более чем в 2 раза. Это объясняется тем, что сечение захвата нейтронов с $E_n \approx 10-100 \text{ eV}$ не сильно меняется от изотопа к изотопу (см. также § 3, п. 2). Исключение составляет ${}^{108}\text{Cd}$, распространенность которого очень мала вследствие очень большого периода полураспада ядра ${}^{107}\text{Pd}$ [$T_{1/2}({}^{107}\text{Pd}) \approx 7 \cdot 10^6 \text{ лет}$]. Если среднее время для захвата нейтрона мало по сравнению с этим периодом, то дорожка захвата будет иметь вид ${}^{106}\text{Pd}(n) {}^{107}\text{Pd}(n) {}^{108}\text{Pd}(n) {}^{109}\text{Pd}(\beta^-) {}^{109}\text{Ag}(n) {}^{110}\text{Ag}(\beta^-) {}^{110}\text{Cd}$ и, таким образом, ${}^{108}\text{Cd}$ не образуется. Предположение о том, что среднее время для захвата нейтрона в районе $A = 108$ значительно меньше 10^6 лет, согласуется с другими данными о процессе «медленного» захвата. Так, анализ аналогичной вилки в ядре ${}^{151}\text{Sm}$ (на фиг. 2.20 этот случай отсутствует) показывает, что указанное время в этом районе порядка 10^2 лет. Действительно, время жизни ядра ${}^{151}\text{Sm}$ относительно β -распада соответствует $T_{1/2} = 80$ лет. Если до захвата нейтрона ядро ${}^{151}\text{Sm}$ распадается, то ядро ${}^{152}\text{Gd}$ будет образовываться в s -процессе, а если время для захвата нейтрона меньше $T_{1/2}$, то ядро ${}^{152}\text{Gd}$ образовываться не будет. Наблюдающаяся распространенность ядра ${}^{152}\text{Gd}$ такова, что время для захвата нейтрона и время жизни относительно β -распада должны быть одного порядка [77].



Фиг. 2.20. Дорожки захвата нейтрона [77]. Отношения ветвей β^+/β^- взяты из работы [416].
 Распространенности изображены в тех же единицах, что и на фиг. 2.19. На графике не указана распространенность ядра ^{116}Cd , равная 0,07.

§ 4. СРЕДНИЙ ЯДЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

1. Последовательность одночастичных уровней, спин-орбитальная связь

Ниже мы рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из оболочечной структуры ядер. Сначала мы найдем собственные функции и энергии, соответствующие движению нуклона в среднем ядерном потенциале. Малый радиус действия межнуклонных сил говорит о том, что форма потенциала должна быть сходной с формой распре-

N	ℓ	Кратность вырождения	Полное число частиц
5	—	1, 3, 5	42
4	—	0, 2, 4	30
3	—	1, 3	20
2	—	0, 2	12
1	—	1	6
0	—	0	2

Фиг. 2.21. Спектр гармонического осциллятора.

деления плотности, и поэтому в качестве первого грубого приближения можно взять потенциал прямоугольной формы. Еще более простым и качественно близким оказывается потенциал гармонического осциллятора, которым очень широко пользуются в ядерной физике, где он играет ту же роль, что и кулоновский потенциал в атомной физике. На фиг. 2.21 представлены некоторые основные характеристики связанных состояний гармонического осциллятора. Частота осциллятора ω_0 подбирается обычно так, чтобы воспроизвился экспериментально наблюдаемый среднеквадратичный радиус ядра. Из этого требования следует, что

$$\sum_{k=1}^A \langle r_k^2 \rangle = \frac{\hbar}{M\omega_0} \sum_{k=1}^A \left(N_k + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{5} AR^2, \quad (2.430)$$

откуда можно получить [см. более подробный вывод ниже на основе формул (2.157) и (2.158)], что

$$\hbar\omega_0 \approx \frac{5}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{Mr_0^2} A^{-1/3} \approx 40A^{-1/3} \text{ Мэв}. \quad (2.431)$$

Здесь мы пренебрегли членами более высокого порядка, имеющими относительную величину $A^{-1/3}$, равно как и нейтронным избытком, в такие величины значение эффективного радиуса $r_0 = 1,2$ ферми [формула (2.71)].

На фиг. 2.24 видно, что если бы ядерный потенциал был по форме очень близок к потенциальному осциллятора, то главные оболочки заполнились бы при числах нуклонов, равных 2, 8, 20, 40, 70 и 112. Только три первых члена этой последовательности отражают экспериментально наблюдающуюся картину.

При выборе более правдоподобной радиальной зависимости потенциала несколько изменяется последовательность уровней (см. также фиг. 2.22). Главным эффектом оказывается снятие вырождения, свойственного гармоническому осциллятору, так что уровни с большими l опускаются по отношению к уровням с малыми l . Этот эффект схематически иллюстрируется на фиг. 2.23, и видно, что им нельзя объяснить наблюдающуюся последовательность заполнения главных оболочек.

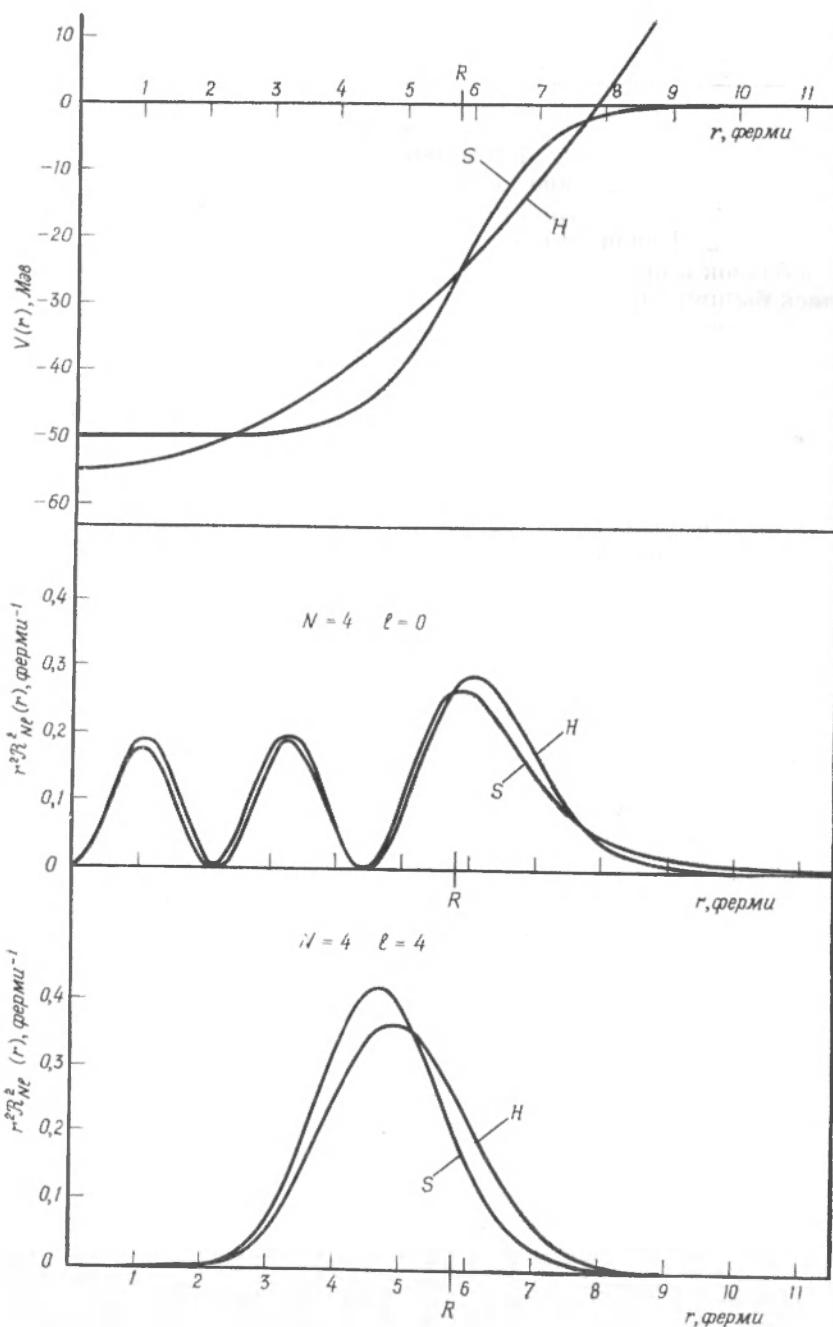
Решающим шагом в развитии оболочечной модели ядра явилось установление того обстоятельства, что предположение о сравнительно сильном спин-орбитальном взаимодействии при движении нуклонов в среднем поле ядра приводит к естественному объяснению заполнения главных оболочек [224, 312]. Спин-орбитальная связь расщепляет уровни с $j = l \pm 1/2$, которые в случае потенциала, не зависящего от спина, остаются вырожденными. Если при этом знак спин-орбитального взаимодействия таков, что уровни с $j = l + 1/2$ оказываются ниже, то мы получим такое же заполнение главных оболочек, как и на опыте (фиг. 2.23).

Последовательность одночастичных уровней, получающаяся при добавлении к центральному потенциальному спин-орбитальному члену, подтверждается большим количеством фактов. Интерпретация уровней ядер особенно проста в случае конфигураций с малыми энергиями возбуждения, состоящих из заполненных протонных или нейтронных оболочек плюс одна частица (или дырка). Спектры таких ядер подробно рассматриваются в гл. 3 (особое внимание следует уделить сравнению экспериментальных и расчетных одночастичных спектров, приведенных на фиг. 3.3 и 3.5).

Наблюдающееся расщепление компонент спин-орбитального дублета можно приближенно описать энергетическим членом вида

$$\Delta E_{ls} \approx -20(1-s) A^{-2/3} M\text{эв}, \quad (2.132)$$

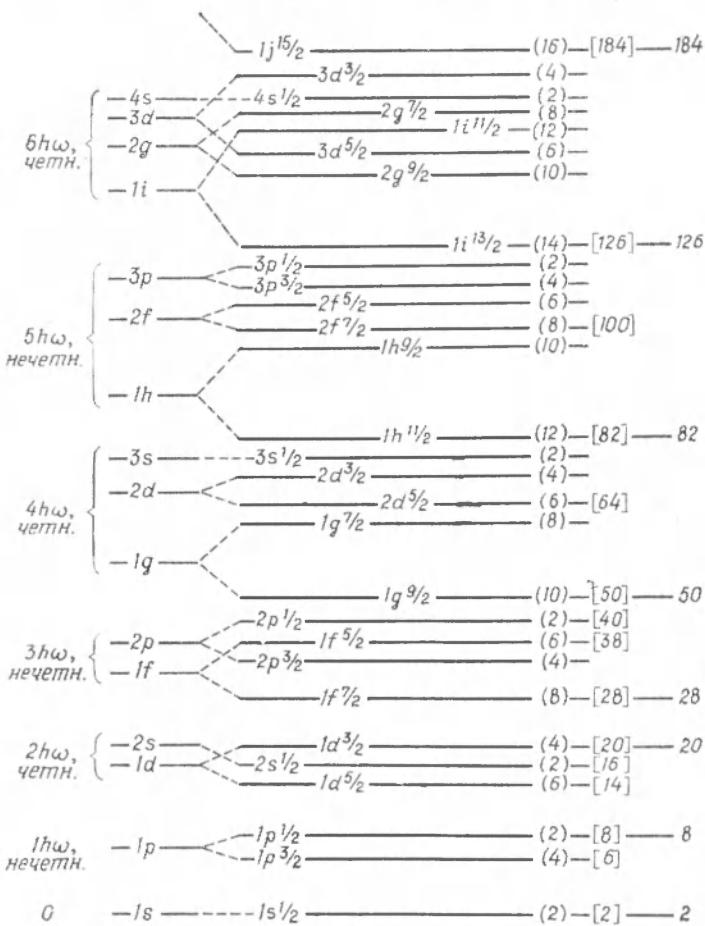
хотя имеются индивидуальные вариации (особенно в легких ядрах), которые не описываются таким усредненным членом. Для уровней последней оболочки максимальное значение l — порядка $A^{1/3}$. Таким образом, спин-орбитальное расщепление составляет по своей величине заметную долю от расщепления уровней гармонического осциллятора $\hbar\omega_0$, и с его помощью можно получить последовательность



Ф и г. 2.22. Квадрат волновой функции, умноженный на r^2 , в случае потенциала гармонического осциллятора (H) $V(r) = 1/2M\omega^2r^2 + \text{const}$; $\hbar\omega = 8,6 \text{ Мэв}$; $\text{const} = -55 \text{ Мэв}$ и потенциала Вудса — Саксона (S) $V(r) = V_0/[1 + \exp(r - R/a)]$; $V_0 = -50 \text{ Мэв}$; $R = 5,8 \text{ ферми}$; $a = 0,65 \text{ ферми}$.

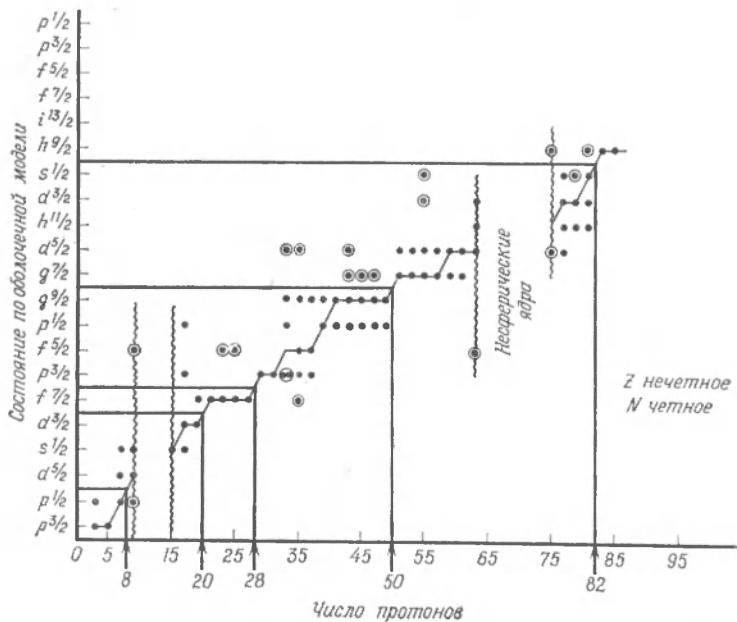
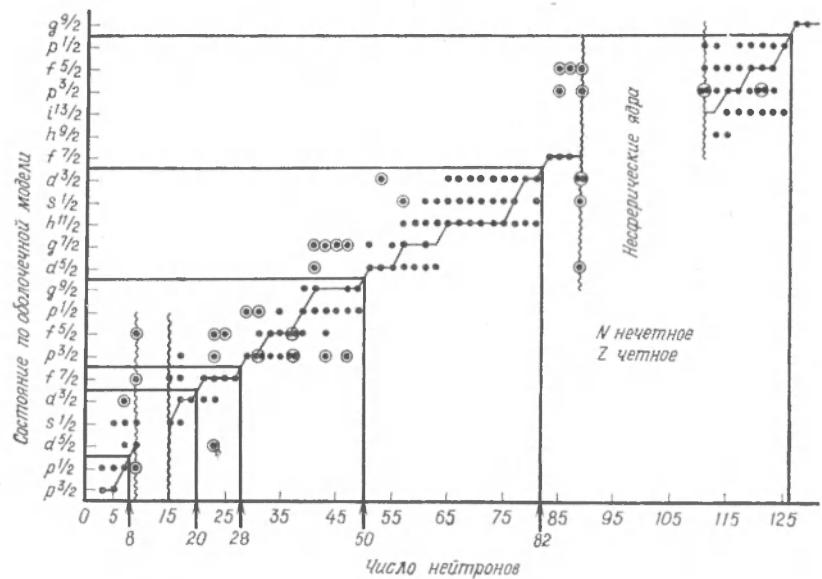
уровней, необходимую для объяснения наблюдающихся на опыте оболочечных эффектов (фиг. 2.23).

Другое прямое следствие спин-орбитального взаимодействия — существование явлений поляризации при столкновениях нуклонов



Ф и г. 2.23. Последовательность одночастичных уровней [314].

с ядрами. Потенциал, действующий на нуклон, зависит от ориентации его спина по отношению к плоскости рассеяния. В результате такого взаимодействия неполяризованный пучок в процессе рассеяния становится частично поляризованным; если же падающий пучок поляризован, то интенсивность рассеянного пучка может проявлять азимутальную асимметрию. Такие эффекты наблюдались, и было установлено, что им соответствует спин-орбитальная связь того же



Ф и г. 2.24. Одночастичная интерпретация низколежащих уровней в ядрах с нечетными A .

Все данные взяты из работы [343]. Волнистыми линиями отмечены исключенные области стабильной эллипсоидальной деформации.

анана и примерно той же величины, что и оценка (2.132) (см., например, фиг. 2.28, справа).

Для ядер с несколькими частицами сверх замкнутых оболочек картина уровней должна быть довольно сложной из-за большого числа возможностей связи угловых моментов этих частиц. Но вследствие эффекта спаривания самые низкие состояния ядер с нечетными A можно описывать как одночастичные, соответствующие нечетной неспаренной частице. В таком приближении можно пренебречь степенями свободы остальных нуклонов и считать, что они инертны и образуют спаренное основное состояние четно-четного острова в $J\pi = 0+$. Как видно из фиг. 2.24, многие свойства низколежащих уровней получают немедленную интерпретацию в рамках этой простой одночастичной модели. Появление других уровней в спектре в области малых энергий (на фиг. 2.24 они обведены кружками) указывает на ограниченность такого простого описания.

Подчеркнем, что для одночастичных спектров, о которых шла речь, существенно предположение о сферичности ядерного потенциала. Такое предположение оправдано в случае многих ядер, в особенности тех, которым соответствуют конфигурации, близкие к заполненным оболочкам. Но имеется также большая группа ядер, обладающих несферической равновесной формой. Хотя анизотропная часть потенциала и мала по сравнению со сферической частью (экцентризитет $\leq 0,3$), она дает сдвиги уровней, сравнимые с расстоянием между оболочками. Низколежащие состояния в A -нечетных деформированных ядрах невозможно просто связать с одночастичным спектром в сферическом потенциале, а поэтому соответствующие области на фиг. 2.24 опущены. Классификация одночастичных уровней в таких деформированных потенциалах рассматривается в гл. 5.

2. Одночастичная силовая функция

С увеличением энергии возбуждения увеличивается число нуклонов, принимающих участие в возбуждении, что приводит к возрастанию плотности уровней. В тяжелых ядрах при энергиях возбуждения в несколько мегаэлектронвольт плотность уровней порядка нескольких сотен на 1 Мэв. В таких условиях для получения сильного смешивания близколежащих конфигураций достаточно даже очень слабой связи между движением отдельного нуклона и модами возбуждения остальной части ядра. Как уже говорилось выше в связи с концепцией составного ядра (см. § 1, п. 9), стационарные состояния всего ядра в таком случае обладают сложной структурой и любое конкретное состояние содержит в себе только малую амплитуду волновой функции, описывающей одночастичное движение по отношению к остатку ядра, находящемуся в любой заданной конфигурации (например, в основном состоянии).

Такое положение можно анализировать и в рамках теории, зависящей от времени. Состояние одиночастичного движения представляют в виде волнового пакета, построенного из всех стационарных состояний, которые имеют заметную амплитуду одиночастичной компоненты. Поскольку такие стационарные состояния распределены в некотором энергетическом интервале, волновой пакет будет со временем распадаться, так как разные его компоненты сдвигаются относительно друг друга по фазе. Если энергетический интервал, соответствующий такому пакету, обозначить через Γ ¹⁾, то время распада одиночастичного движения будет порядка \hbar/Γ . Если время жизни одиночастичного состояния намного больше характерного времени пролета через ядро, то $\Gamma \ll D_{\text{одн}} \approx \pi \hbar v / R$, где $D_{\text{одн}}$ — расстояние между соседними одиночастичными состояниями с одинаковыми значениями (I_l). Таким образом, устойчивость одиночастичного движения проявляется в «гросс-структуре» спектра; амплитуда одиночастичного движения концентрируется главным образом на стационарных состояниях, лежащих в пределах энергетического интервала Γ в окрестности энергии, соответствующей невозмущенному одиночастичному состоянию. Амплитуда вероятности того, что в состоянии f представлено одиночастичное состояние с квантовыми числами $(nl) jm$ и родительское состояние $|0\rangle$, равна $\langle f | a^\dagger(jm) | 0 \rangle$, где $a^\dagger(jm)$ — оператор рождения нуклона (см. приложение 1). Если угловой момент родительского состояния $I_0 = 0$, то «одиночастичная сила» состояния f с угловым моментом $I_f = j$ определяется как вероятность

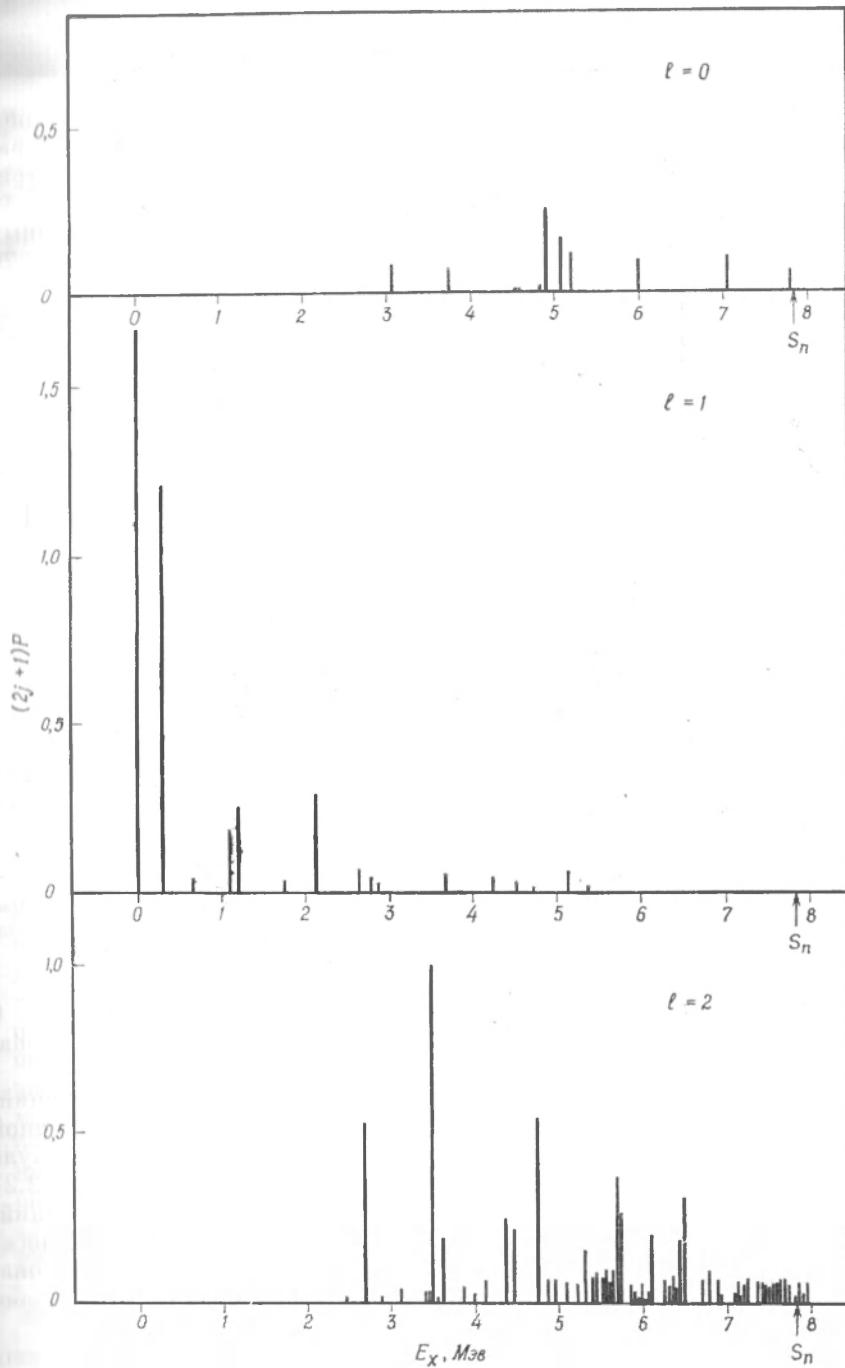
$$P_j(f) = \langle I_f = j, M_f = m | a^\dagger(jm) | I_0 = 0 \rangle^2. \quad (2.133)$$

{В случае произвольных спинов родительского и конечного состояний одиночастичную силу состояния можно определить через приведенный матричный элемент $P_j(f) = (2j+1)^{-1} \langle I_f || a^\dagger(j) || I_i \rangle^2$ (см. гл. 3, приложение 5).} Если в родительском состоянии одиночастичный уровень j не занят, то сумма всех одиночастичных сил равна единице:

$$\sum_f P_j(f) = 1. \quad (2.134)$$

В той области энергий, где плотность уровней велика, гросс-структуру можно описать силовой функцией, определенной как одиночастичная сила состояний на единичный интервал энергии, $D_j^{-1} \langle P_j(f) \rangle$. Здесь D_j — среднее расстояние между уровнями с $I_f = j$, а среднее от $P_j(f)$ берется по уровням, лежащим в малом энергетическом интервале. Задача теоретического определения формы линии и ши-

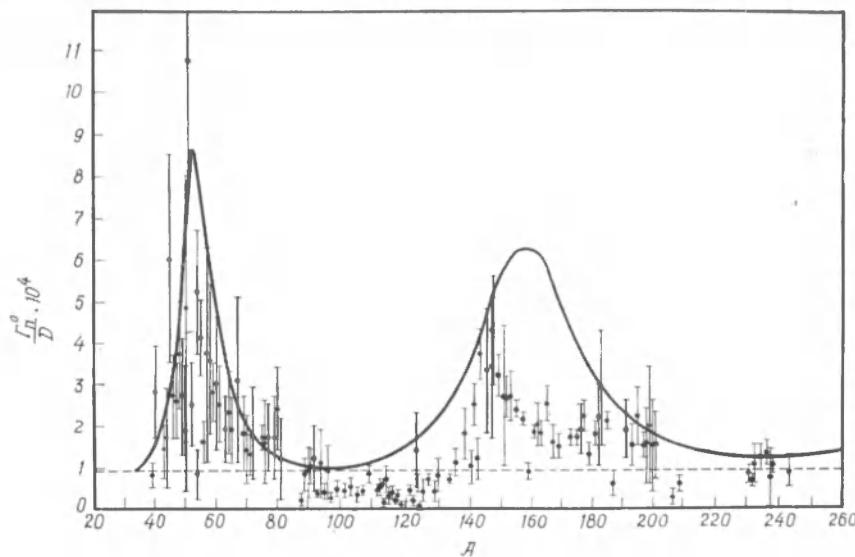
¹⁾ Из того что ширина обозначается индексом Γ , не следует делать вывод, что силовая функция имеет брейт-вигнеровскую форму. На самом деле форма линии в общем случае является более сложной, и в каждом отдельном случае нужно давать точное определение Γ .



Ф и г. 2.25. Генеалогические множители, определенные по реакции срыва $^{60}\text{Ni} (dp)^{61}\text{Ni}$ [182].

рины таких силовых функций требует анализа связи между одночастичным движением и степенями свободы родительского ядра. В приложении 4 рассматривается схематическая модель, иллюстрирующая некоторые стороны этой проблемы.

На фиг. 2.25 приведены примеры силовых функций, определенных по передаче нейтрона в реакции дейтронного срыва. На фиг. 2.26



Фиг. 2.26. Силовые функции [300].

Сплошная кривая — результат расчетов на основе оптической модели [86] при $V = 52 \text{ Мэв}$, $W = 3,1 \text{ Мэв}$, $R = (1,15A^{1/3} + 0,4) \text{ ферми}$, $a = 0,52 \text{ ферми}$; пунктирная кривая — результат расчетов на основе модели «черного ядра» при $k = 1,58 \text{ ферми}^{-1}$.

представлены значения нейтронных силовых функций при $l = 0$ и при энергии возбуждения, равной энергии отделения нейтрона, измеренные при исследовании нейтронных резонансов.

Можно определить силовые функции и для дырочных состояний, возникающих при удалении частицы с какой-либо одночастичной орбиты в ядре. В этом случае оператор рождения $a^\dagger(jm)$ в формуле (2.133) заменяется оператором уничтожения $a(jm)$. На фиг. 2.27 приведены примеры силовых функций для дырочных состояний, измеренных в реакции $(p, 2p)$. О дополнительных данных относительно силовых функций говорится в гл. 3 в связи с вопросом о локализации одночастичных возбуждений в ядрах с замкнутыми оболочками (см. фиг. 3.2 и табл. 3.7 и 3.8).

При увеличении энергии быстро возрастает число степеней свободы, которые могут связываться с одночастичным движением, что приводит к уменьшению времени жизни одночастичного состояния

и к соответствующему увеличению ширины силовой функции Γ [в качестве примера можно указать на очень большую ширину высоковозбужденной дырочной конфигурации $1s$, которую исследовали в реакции $(p, 2p)$, см. фиг. 2.27].

Когда одночастичные уровни лежат в сплошной части спектра, они приобретают дополнительную ширину, связанную с возможностью вылета частицы из ядра (процесс эмиссии). Такое уширение следует добавить к уширению, связанному с эффектом гроус-структуры. При энергиях возбуждения, сравнимых с величиной потенциала, время жизни по отношению к процессу испускания частиц становится сравнимым с временем пролета через ядро и поэтому представление об уровнях нуклона оказывается уже не удобным. В этом случае однопартическое движение проявляется в интерференционных явлениях, подобных тем, о которых говорилось в связи с фиг. 2.3.

3. Оптический потенциал

К настоящему времени накоплен обширный экспериментальный материал о рассеянии нуклонов ядрами всех элементов. Сюда относятся данные о полных сечениях, дифференциальных сечениях упругого рассеяния и поляризации, причем исследования проводились при энергии от электронволт до самых высоких энергий, достижимых в настоящее время ($\sim 10^{10}$ эВ). Анализ этих данных дает довольно подробную информацию об основных свойствах ядерного потенциала.

В первом приближении рассеяние нуклона на ядре можно рассматривать как рассеяние на сферической частице, создающей потенциал с соответствующим спин-орбитальным членом. (На эффектах искажения формы ядра, существенных для определенного класса ядер, мы специально остановимся в гл. 5.) При более строгом подходе следует учитывать также связь нуклона с внутренними степенями свободы ядра-мишени. Во многих случаях эту связь в хорошем приближении можно учесть посредством мнимой добавки к одночастичному потенциальному. Физически это означает, что обмен энергией между нуклоном и мишенью приводит в конце концов к образованию очень сложных конфигураций, детальные особенности которых нет надобности рассматривать. В таких условиях связь нуклона с мишенью приобретает необратимый характер и ее можно учесть как эффективное затухание одночастичного движения (см. приложение 4).

Связь затухания с мнимой частью потенциала легко усмотреть из зависящего от времени уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2M} + V(\mathbf{r}) + iW(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.135)$$

Умножив обе его части слева на ψ^* и взяв только мнимые части, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{\hbar} W(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.136)$$

где $\rho(\mathbf{r}, t)$ — плотность, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ — ток, определенные обычным образом:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \psi^* \psi, \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hbar}{2iM} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Как мы видим из уравнения (2.136), скорость поглощения частиц равна $-(2/\hbar) W(\mathbf{r})$, что соответствует среднему свободному пробегу λ , который дается соотношением

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{2}{\hbar v} W(\mathbf{r}). \quad (2.138)$$

В экспериментах по ядерному рассеянию нуклоны, конечно, не поглощаются, так как это противоречило бы закону сохранения числа барионов и закону сохранения полной вероятности для процесса рассеяния в целом. Но поскольку волновая функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ описывает движение выделенного нуклона в среднем потенциале мишени, все взаимодействия, которые приводят к более сложным состояниям движения, будут уменьшать вероятность состояния ψ . Именно такой распад одночастичного состояния приближенно описывается мнимым потенциалом.

Рассматривая процесс рассеяния нуклонов на ядрах с применением комплексного потенциала, говорят, что пользуются оптической моделью (поскольку при изучении распространения электромагнитных волн в веществе тоже вводят комплексный показатель преломления).

Связь нуклона с ядром, характеризуемая мнимым потенциалом, такая же, как связь, приводящая к эффектам гросс-структуре, о которых говорилось выше в п. 2. Если ее рассматривать как простой процесс поглощения, то мы получаем, что одночастичное движение затухает со временем по экспоненциальному закону. В этом случае силовая функция, которой определяется вероятность того, что в волновой функции стационарных состояний, лежащих в окрестности энергии E , представлено данное одночастичное состояние j , приобретает брейт-вигнеровскую форму

$$\frac{\langle P_j(f) \rangle}{D_j} \approx (2\pi)^{-1} \frac{\Gamma}{(E - E_{\text{одн}}(j))^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (2.139)$$

где Γ — среднее значение величины $-2W(\mathbf{r})$ для одночастичного резонансного состояния.

Иногда простой мнимый потенциал не позволяет правильно описать связь между движением частицы и внутренними степенями свободы ядра. В таком случае форма линий сложнее, чем брейт-вигнеровская (2.139). (См., например, связь с вращательным движением, гл. 5.)

Параметры оптического потенциала

Для расчета одночастичного движения в ядре необходимо знать потенциал, который характеризуется рядом параметров. К таким параметрам относятся глубина и радиальная зависимость действительной и мнимой частей потенциала и его спин-орбитальной компоненты. В случае протонов следует добавить кулоновский потенциал соответствующего зарядового распределения. При анализе экспериментальных данных на основе оптической модели обычно решают уравнение Шредингера для парциальных волн. Параметры потенциала подбирают таким образом, чтобы добиться наилучшего соглашения с экспериментально измеренным сечением. Поскольку при решении уравнения приходится выполнять трудоемкие численные расчеты, такой анализ обычно проводят при помощи быстродействующих электронно-вычислительных машин.

Некоторые примеры такой подгонки приведены на фиг. 2.26, 2.28 и в табл. 2.1. Как нетрудно видеть, в отдельных случаях теоретические кривые удивительно хорошо воспроизводят многие детали экспериментальных сечений, так что можно довольно точно определить основные параметры оптической модели. Было установлено, что эти параметры плавно меняются с изменением A и E . Так и должно быть, ибо в противном случае найденные потенциалы вряд ли имели бы какой-либо прямой физический смысл. О параметрах ядерного потенциала, определенных в результате такого анализа, речь будет идти ниже.

Вещественная часть потенциала $V(r)$ должна приблизительно следовать за распределением плотности. Удобной радиальной зависимостью, которая удовлетворительно описывает и ядерный потенциал, и распределение плотности, может служить зависимость вида Вудса — Саксона, представленная графически на фиг. 2.22. Такой потенциал характеризуется тремя параметрами: V_0 , R и a (значение потенциала в центре, его радиус и диффузность).

Диффузность потенциала a приблизительно такая же, как и диффузность распределения заряда ($a = 0,6$ ферми), но радиус потенциала R примерно на 1 ферми больше зарядового радиуса, определенного по данным о рассеянии электронов (фиг. 2.1). Это объясняют конечным радиусом нуклон-нуклонного взаимодействия [261].

Труднее предсказать радиальную зависимость мнимой части потенциала. Для нее был предложен ряд разных форм. Очень часто просто принимают, что $W(r)$ пропорционально $V(r)$. Широко исследовались также потенциалы поглощения, более сильные в поверхностной области. Вычисленные сечения слабо зависят от локализации поглощающего потенциала (при условии, что остальные параметры выбраны хорошо), и поэтому установить радиальную зависимость $W(r)$ трудно [238]. Самые последние исследования говорят

о том, что в области энергий падающих нуклонов меньше $40-50 \text{ MeV}$ преобладающим, по-видимому, является поглощение на поверхности (см., например, фиг. 2.26 и 2.28).

В пользу мнения о более сильном поглощении в поверхностной области ядра было приведено много разных доводов. В этой связи следует иметь в виду, что в вопросе о поверхности ядра имеются две стороны. Во-первых, возможны различные коллективные возбуждения ядра, обусловленные изменением плотности в его поверхностных областях (см. гл. 4 и 6, где рассматриваются колебания поверхности и коллективные вращения). Поэтому связь падающего нуклона с такими модами движения должна быть локализована приблизительно в области поверхности. Хотя эта связь часто существенно сказывается на затухании одночастичного движения, замена ее на поглощающий потенциал во многих случаях может оказаться слишком грубым приближением (связь с вращательным и колебательным движением рассматривается в гл. 5 и 6).

Во-вторых, неоднократно указывалось, что в рассматриваемой области плотность ядерной материи значительно меньше, чем в центральных областях. Поскольку принцип Паули играет важную роль, препятствуя столкновениям между бомбардирующими частицей малой энергии и нуклонами ядра (см. § 5, п. 2), уменьшение импульса Ферми с уменьшением плотности приводит к ослаблению данного ограничения и к более сильному поглощению. В дополнение к этому отметим, что с уменьшением импульса Ферми относительные скорости падающего нуклона и нуклонов ядра уменьшаются, а сечения столкновений соответственно возрастают. Но, поскольку в поверхностной области плотность существенно меняется на расстояниях порядка фермиевской длины волны, рассматривать эту область как локальный ферми-газ пониженией плотности не представляется корректным. Таким образом, для правильной оценки вклада этой области в поглощающий потенциал необходим более детальный анализ. Здесь можно также отметить, что параметр диффузности как характеристика вещественного потенциала в поверхностной области может оказаться слишком сильным упрощением, если принять во внимание эффекты недолокальности, которые могут появиться вследствие конечного радиуса действия межнуклонных сил и их зависимости от скорости (см. § 5, п. 2).

Экспериментально определенные величины различных компонент ядерного потенциала приведены на фиг. 2.29. Легко видеть, что действительная часть центрального потенциала $V(r)$ уменьшается с увеличением энергии падающего нуклона. Косвенные доказательства такой зависимости потенциала от скорости уже приводились, когда мы анализировали энергию связи ядер (см. § 1, п. 7). Как будет видно далее (см. § 5, п. 2), этот эффект частично связан с короткодействующей отталкивателевой сердцевиной в межнуклонном взаимодействии, которая проявляется в двухнуклонном рассеянии при больших энергиях ($E > 100 \text{ MeV}$).

Поглощающая часть потенциала W также обнаруживает заметную энергетическую зависимость. При малых энергиях падающих частиц могут возбуждаться только несколько степеней свободы ядра-мишени, и поэтому смешивание конфигураций, приводящее к затуханию одночастичного движения, затруднено по сравнению со случаем более высоких энергий, когда в игру вступает гораздо более богатая часть спектра возбуждений мишени. Данный эффект часто рассчитывают на основе модели ферми-газа, в которой поглощение можно наглядно представить себе как результат столкнове-

ний падающего нуклона с нуклонами ферми-заполнения. Принцип Паули требует, чтобы в результате столкновения как рассеянная частица, так и нуклон отдачи в мишени оказались вне заполненного распределения Ферми. Если энергия E падающих нуклонов лишь немногим больше энергии Ферми ε_F , то фазовое пространство для таких столкновений составляет примерно часть порядка $(E - \varepsilon_F)^2 \varepsilon_F^{-2}$ от фазового пространства для свободных столкновений [см. формулу (2.221)], откуда следует, что при $E \rightarrow \varepsilon_F$ затухание одночастичного движения за счет такого механизма исчезает. Но отсюда нельзя делать вывод о том, что для одночастичных состояний неподалеку от поверхности Ферми силовая функция вырождается в кри-
вую с одним резким максимумом. При энергиях, меньших, чем расстояния между одночастичными уровнями, необходимо учитывать конечный размер системы. Так, структура силовой функции в ядре существенно зависит от связи нуклона с несколькими низколежащими коллективными модами, связанными с деформацией поверхности ядра (см. гл. 5 и 6). Наблюдающиеся силовые функции одночастичных состояний, расположенных в пределах нескольких мегаэлектронвольт от ферми-поверхности, часто имеют ширины больше 1 Мэв (фиг. 2.25).

Зависимость компонент оптического потенциала от энергии можно учесть носредством не зависящего явно от энергии, но нелокального взаимодействия, если в волновом уравнении произвести замену

$$V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d^3r'. \quad (2.140)$$

Легко видеть, что нелокальность потенциала $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ эквивалентна зависимости его от импульса. Так, если разложить волновую функцию по собственным функциям оператора импульса, мы получим

$$\int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d^3r' = \int U(\mathbf{r}, \mathbf{p})\varphi(\mathbf{p})\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right\}d^3p, \quad (2.141)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= (2\pi)^{-3/2} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right\}\varphi(\mathbf{p})d^3p, \\ U(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= (2\pi)^{-3/2} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right\}V(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{x})d^3x. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Из выражения (2.141) видна зависимость взаимодействия от импульса. Например, если потенциал V ограничен областью x , малой по сравнению с длиной волны, характерной для $\varphi(\mathbf{r})$, то можно разложить $U(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ в ряд по \mathbf{p} и уравнение (2.141) преобразуется в уравнение для локального потенциала, зависящего от степени импульса.

Экспериментально наблюдаемая энергетическая зависимость потенциала — довольно слабая в том смысле, что она соответствует нелокальности с характерными размерами, несколько меньшими k_F^{-1} . Следовательно, в первом приближении данный эффект можно учесть, просто предполагая потенциал зависящим от энергии налетающей частицы. (Анализ нелокальных потенциалов и сравнение их с локальными потенциалами, зависящими от энергии, проводились в работах [470, 348, 459].)

Спин-орбитальный член потенциала обязательно должен быть поверхностным, поскольку в той области, где плотность постоянна, единственным выделенным направлением является направление импульса и поэтому невозможно образовать псевдовектор, который, будучи связан со спином, образовал бы скаляр. В поверхностной же области градиентом плотности определяется радиальное направление, и поэтому там можно образовать локальный потенциал вида

$$V_{ls}(r) \sim \nabla \rho(r) \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \hbar^{-1} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(r)}{\partial r}. \quad (2.143)$$

Из сказанного выше следует, что потенциал V_{ls} пропорционален $\nabla \rho(r)$, если только радиус межнуклонного взаимодействия мал по сравнению с характерным расстоянием, на котором плотность ядра существенно меняется. Но поскольку на поверхности плотность изменяется очень резко, радиальная зависимость потенциала V_{ls} может быть несколько иной. Тем не менее в силу того, что влияние спин-орбитального члена все равно локализовано в поверхностной области, можно взять спин-орбитальные потенциалы простого вида

$$V_{ls}(r) = V_{ls} r_0^2 (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f(r), \quad (2.144)$$

где $f(r)$ — радиальная функция типа той, которая описывает вещественный потенциал (потенциал Будса — Саксона с $R = r_0 A^{1/3}$), а величина спин-орбитального потенциала определяется константой V_{ls} .

Спин-орбитальный потенциал можно сопоставить с оценкой (2.132) для спин-орбитального расщепления связанных состояний. Предположим, что $V_{ls}(r)$ представляет собой δ -образную функцию на поверхности ядра (т. е. что $f(r)$ — ступенчатая функция). Из выражения (2.144) в таком случае следует равенство

$$\langle V_{ls}(r) \rangle \approx V_{ls} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) r_0^2 R \mathcal{R}^2(R), \quad (2.145)$$

где $\mathcal{R}(r)$ — радиальная волновая функция нуклона. Величина $R^3 \mathcal{R}^2(R)$ слабо зависит от квантовых чисел состояния. Для нуклонов с энергией связи 5—10 МэВ она равна в среднем 1,4 с флуктуациями в 10—20% (см. волновые функции на фиг. 3.4). В таком простом приближении спин-орбитальный потенциал приводит к энергетическим сдвигам связанных состояний

$$\Delta E_{ls} \approx 1,4 V_{ls} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) A^{-2/3}. \quad (2.146)$$

Если взять величину V_{ls} из анализа экспериментов по рассеянию [см. формулу (2.179)], то полученная таким образом оценка довольно хорошо согласуется с оценкой (2.132). Спин-орбитальный член может содержать также и мнимую часть, но имеющиеся экспериментальные данные едва ли достаточно подробны, чтобы делать какие-либо заключения на этот счет.

Изменение параметров оптического потенциала от ядра к ядру определяется в основном изменением их радиуса R . Большинство данных по оптической модели говорит о том, что он пропорционален $A^{1/3}$. В дополнение к сказанному отметим, что из-за избытка нейтронов в ядрах оптические потенциалы для нейтронов и протонов несколько различаются. Наиболее существен эффект энергии симметрии, который приводит к тому, что центральный вещественный потенциал $V(r)$ для протонов становится больше, чем для нейтронов (§ 1, п. 7). Значения члена симметрии в ядерном потенциале, полученные, с одной стороны, на основе данных по рассеянию, а с другой — на основе данных по энергиям связи [см. формулы (2.26) и (2.28)], хорошо согласуются. Что касается возможной зависимости спин-орбитального и поглощающего членов ядерного потенциала от симметрии, то имеющиеся данные не позволяют сделать определенного вывода.

Оптический потенциал для других частиц

Пока что мы рассматривали потенциалы, описывающие взаимодействие с ядрами только нуклонов (и электронов). Но исследовались также процессы рассеяния на ядрах и реакции с ядрами других частиц: d , t , ${}^3\text{He}$, α , тяжелых ионов, μ , π^\pm , K^\pm . Результаты также интерпретировались с помощью оптических потенциалов с параметрами, зависящими от типа частиц. Мнимые части оптических потенциалов, используемых для описания рассеяния сложных частиц, оказываются очень большими. Это объясняется тем, что такие частицы не могут проходить как целое в ядре на сколько-нибудь существенное расстояние. Например, при энергии налетающих дейtronов 10 MeV упругое рассеяние удовлетворительно описывается, если мнимая часть потенциала равна примерно 10 MeV . Это соответствует средней длине свободного пробега $\sim 3 \text{ ферми}$, что меньше среднего расстояния между частицами в дейтроне. Следовательно, в отличие от случая «элементарных» частиц в случае сложных частиц оптические потенциалы гораздо менее обоснованы.

Здесь мы кратко упомянем о специфическом эффекте, который наблюдается при рассеянии π -мезонов на ядрах и указывает на сильно ограниченную применимость оптического потенциала в том виде, в каком он был представлен выше. Рассчитывать упругое рассеяние частиц на такой сложной системе, как ядро, пользуясь потенциалом, приблизительно пропорциональным локальной плотности ядерного вещества, можно в том случае, если рассеяние при элементарных актах взаимодействия (т. е. при столкновениях с отдельными частицами системы) происходит на малые углы, как подразумевается при введении показателя предломления среды. Если же при элементарных актах соударений допустимы большие углы рассеяния (например, при рассеянии назад при больших энергиях), то в оптической модели предполагают, что рассеяние при таких актах примерно изотропно (см. § 5, п. 2). При рассеянии π -мезонов на нуклонах очень существенна p -компоненты волн, и было установлено, что при больших углах рассеяния рассеяние π -мезонов на ядрах нельзя описывать оптическим

потенциалом обычного вида. Можно учесть p -компоненту волны в π -нуклонном рассеянии, добавив к оптическому потенциалу член, пропорциональный градиенту плотности и направлению импульса π -мезона [264]. Взяв оптический потенциал такого вида, можно добиться хорошего согласия с экспериментальными данными по рассеянию π -мезонов на ядрах и по сдвигам уровней π -мезонов атомов [150].

Спин-орбитальная связь в рассеянии нуклонов на ядрах — эффект такого же рода. Но пока еще нет убедительных доказательств того, что зависящие от скорости поверхности взаимодействия вносят вклад в не зависящую от спина часть взаимодействия нуклонов с ядром.

Последнее, возможно, связано с тем, что p -волна дает сравнительно малый вклад в пуклон-нуклонное рассеяние (см. § 5).

Связь потенциала рассеяния с энергиями связанных состояний

Подробные сведения о радиальной зависимости ядерного потенциала, полученные на основе данных о рассеянии, могут служить отправной точкой для более количественного расчета энергии связанных состояний нуклонных орбит. Результаты такого расчета представлены на фиг. 2.30. Пользуясь значениями параметров потенциала, полученными из опытов по рассеянию, можно добиться довольно хорошо согласия с экспериментальными значениями энергии связи (см. анализ энергии связи для одночастичных и однодырочных конфигураций, представленный на фиг. 3.3 и 3.5). Радиальные волновые функции, соответствующие такому потенциалу, — большой шаг вперед по сравнению с часто используемыми волновыми функциями, вычисленными на основе модели гармонического осциллятора или прямоугольной ямы.

ПРИМЕРЫ К § 4

Некоторые свойства потенциала гармонического осциллятора (фиг. 2.21)

На фиг. 2.21 представлен спектр трехмерного гармонического осциллятора. Отметим некоторые важные свойства такого спектра.
Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2M} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} M\omega_0^2 \mathbf{r}^2. \quad (2.147)$$

Квантовые числа:

в прямоугольных координатах

$$n_x, n_y, n_z, m_s, \quad N = n_x + n_y + n_z; \quad (2.148)$$

в полярных координатах

$$n_r, l, m, m_s, \quad N = 2(n_r - 1) + l. \quad (2.149)$$

Спектр

$$E = \left(N + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega_0, \quad l = N, N-2, \dots, 0 \text{ или } 1; j = l \pm \frac{1}{2}. \quad (2.150)$$

Вырождение

$$\sum_l 2(2l+1) = (N+1)(N+2) \underset{N \gg 1}{\approx} \left(N + \frac{3}{2} \right)^2. \quad (2.151)$$

Общее число состояний

$$\sum_{N'=0}^N (N'+1)(N'+2) = \frac{1}{3}(N+1)(N+2)(N+3) \underset{N \gg 1}{\approx} (N+2)^3. \quad (2.152)$$

Размеры орбит

$$\langle r^2 \rangle_{NL} = \frac{\hbar}{M\omega_0} \left(N + \frac{3}{2} \right). \quad (2.153)$$

Матричные элементы

$$\begin{aligned} \langle n_x + 1 | x | n_x \rangle &= (iM\omega_0)^{-1} \langle n_x + 1 | p_x | n_x \rangle = \left[(n_x + 1) \frac{\hbar}{2M\omega_0} \right]^{1/2}, \\ N+1, l \pm 1 | r | N, l &= (iM\omega_0)^{-1} \langle N+1, l \pm 1 | p_r | N, l \rangle = \\ &= \left\{ \left[N + \frac{5}{2} \pm \left(l + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{\hbar}{2M\omega_0} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Число узлов радиальной волновой функции равно $n_r - 1$. Фазы выбраны так, что все радиальные волновые функции при радиусах r , превышающих расстояние от начала координат до самой далекой узловой точки, положительны. Одномерные осцилляторные функции в прямоугольной системе координат определяются так, что они положительны при больших положительных значениях x .

Если мы хотим представить себе форму радиальной волновой функции, то полезно знать расположение классических точек поворота, соответствующих большой и малой осям классической эллиптической орбиты. Соответствующие радиальные точки поворота таковы:

$$(r_{\max})^2 \approx \frac{\hbar}{M\omega_0} [N + (N^2 - l^2)^{1/2}], \quad (2.155)$$

$$(r_{\min})^2 \approx \frac{\hbar}{M\omega_0} [N - (N^2 - l^2)^{1/2}]. \quad (2.156)$$

Производя в выражении (2.153) суммирование по состояниям заполненных орбит, мы получаем формулу (2.131) для осцилляторной частоты ω_0 :

$$\begin{aligned} A \langle r^2 \rangle &= \frac{\hbar}{M\omega_0} 2 \sum_{N=0}^{N_{\max}} \left(N + \frac{3}{2} \right) (N+1)(N+2) \approx \\ &\approx \frac{\hbar}{2M\omega_0} (N_{\max} + 2)^4 = \frac{3}{5} A^{5/3} r_0^2. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Здесь множитель 2 появляется в силу того, что среди A частиц имеются и протоны, и нейтроны. Точно так же можно воспользоваться выражением (2.152), чтобы связать величину A с максимальным значением главного квантового числа N :

$$A = \frac{2}{3} (N_{\max} + 2)^3. \quad (2.158)$$

Комбинируя формулы (2.157) и (2.158), мы сразу получаем соотношение (2.131).

Радиальная зависимость ядерного потенциала (фиг. 2.22)

На фиг. 2.22 потенциал гармонического осциллятора сравнивается с потенциалом более реальной формы, который часто называют потенциалом Вудса — Саксона. Параметры соответствуют ядру с $A = 100$. Легко видеть, что поправки к потенциалу осциллятора соответствуют дополнительному отталкиванию на больших и малых расстояниях и притяжению — в промежуточной области. Таким образом, эти поправки опускают состояния с большими l (круговые орбиты) по сравнению с состояниями с малыми l (вытянутые орбиты). В нижней части фигуры даны примеры распределения плотности по радиусу.

Схематическая диаграмма последовательности одночастичных уровней (фиг. 2.23)

На фиг. 2.23 схематически изображена последовательность одночастичных уровней, соответствующих сферическому потенциалу с сильной спин-орбитальной связью. В крайнем левом столбце представлены уровни гармонического осциллятора и указаны значения их главного квантового числа N и четности $\pi = (-1)^N$. В следующем столбце показано расщепление вырожденных уровней гармонического осциллятора, которое получается при использовании более реального сферического потенциала (фиг. 2.22). У каждой орбиты напечатаны индексы квантовых чисел (n_r, l) . Еще правее изображена последовательность уровней с учетом спин-орбитальной связи, там же указаны квантовые числа (n_r, l, j) . Число в круглых скобках — кратность вырождения $(2j + 1)$ для каждой орбиты. В квадратных скобках указано полное число нуклонов, равное сумме чисел вырождения всех нижних орбит с учетом рассматриваемой. В крайнем справа столбце даны установленные на опыте числа нуклонов, соответствующие заполнению главных оболочек.

Конечно, диаграмма слишком схематична. Кроме того, известно, что порядок нейтронных и протонных уровней неодинаков. Последовательность уровней может также меняться в зависимости от размеров ядра (см. теоретические спектры на фиг. 2.30; экспериментальные данные о последовательности одночастичных уровней собраны на фиг. 3.3 и 3.5).

Сравнение спектров ядер с нечетными A с предсказаниями одночастичной модели (фиг. 2.24)

На фиг. 2.24 приведены данные о спинах и четностях низколежащих состояний ядер с нечетными A . Там же проводится сравнение с предсказаниями простой одночастичной модели, рассмотренной выше.

Поскольку одночастичная модель предполагает, что четно-четный остов находится в основном состоянии с конфигурацией $J_\pi = 0+$, состояния, не

анализуемой этой моделью, должны иметь энергию порядка энергии возбуждения $E(2+)$ первых уровней с $I_\pi = 2+$ четно-четных ядер [экспериментальные значения $E(2+)$ приведены на фиг. 2.17]. Поэтому на фиг. 2.24 изображены только состояния с энергиями возбуждения, меньшими $\frac{1}{2} E(2+)$, в том случае, если их четность совпадает с четностью основного состояния, и с энергиями, меньшими $E^{(-)} - \frac{1}{2} E(2+)$, если их четность и четность основного состояния противоположны. Здесь $E^{(-)}$ — энергия возбуждения самого нижнего уровня с четностью, противоположной четности основного состояния.

На фиг. 2.24 точками отмечены состояния с определенными значениями спина и четности, наблюдающиеся во всех изотопах (или изотонах) с заданными значениями Z (или N), так что представленные данные являются суммарными для каждого нечетного значения A . Если в пределах указанного выше энергетического интервала в одном и том же ядре встречаются два состояния с одинаковыми значениями I_π , то в соответствующем месте на графике поставлены две точки.

На оси ординат на фиг. 2.24 изображена теоретическая последовательность одиночастичных уровней (ср. с фиг. 2.23), а ломаная линия, идущая по диагонали, проведена в соответствии с теми конфигурациями основных состояний, которые получались бы, если бы орбиты заполнялись точно в этой последовательности. Нетрудно видеть, что спины и четности большинства наблюдающихся пиколежащих состояний действительно согласуются с предсказаниями одиночастичной модели.

Данные о магнитных моментах и сечениях реакций однонуклонной передачи также позволяют провести проверку правильности одиночастичной картины. В большинстве случаев они качественно подтверждают ее. Те уровни, для которых упомянутые характеристики качественно расходятся с выводами из одиночастичной модели, или уровни со спинами и четностями, которые нельзя наблюдать на основе одиночастичного спектра, обведены на фиг. 2.24 кружками. Кружки соответствуют также и тем случаям, когда в низкоэнергетической области спектра находятся два уровня с одинаковыми спином и четностью, так как в этом случае по меньшей мере один из них относится к более сложной конфигурации. Отметим, что, поскольку свойства многих уровней изучены недостаточно полно, при дальнейшем их исследовании может несколько увеличиться число случаев сильного расхождения с одиночастичной моделью.

Замечательно, что, несмотря на чрезвычайно упрощенную картину, даваемую одиночастичной моделью, она позволяет качественно интерпретировать большее число пиколежащих состояний. Данное обстоятельство сыграло очень важную роль на ранних этапах развития оболочечной модели, ибо благодаря ему следствия из одиночастичной схемы оказываются значительно более заметными, нежели было бы в том случае, когда преобладали бы многочастичные конфигурации. В частности, на основе одиночастичной модели были впервые интерпретированы спины и магнитные моменты основных состояний ядер [225, 313], было объяснено появление изомерии в определенных областях ядер [200], а также были теоретически объяснены данные о вероятностях и правилах отбора при β -распаде [341].

Поскольку приведенный выше одиночастичный спектр соответствует сферическому потенциалу, на фиг. 2.24 мы не нанесли ядра, относительно которых надежно установлено, что у них несферическая форма (доказательства их несферичности приведены в гл. 4). Для таких ядер следует пользоваться одиночастичным спектром, приведенным в гл. 5. Отметим, что многие ядра, по-видимому, обладают свойствами, свидетельствующими о наличии у них переходной формы между сферической и несферической. Большинство отклонений от простой одиночастичной модели, отмеченных на фиг. 2.24, по всей вероятности, связано с этим обстоятельством. (Методы анализа такой промежуточной схемы связи рассматриваются в гл. 6, но ряд важных моментов этой проблемы еще не выяснен до конца.)

Силовые функции, найденные по данным о реакции (dp) (фиг. 2.25)

Сечение реакции (dp) зависит от того, в какой мере конечное состояние можно представить как основное состояние ядра-мишени плюс частица на уровне с определенными значениями квантовых чисел l_j (см. гл. 3, приложение 5). Поэтому по экспериментальным значениям выхода реакции можно найти одиночественную вероятность (2.133) для каждого уровня. Угловое распределение протонов при такой реакции зависит от орбитального углового момента l переданного нейтрона; но во многих случаях по нему невозможно определить значение $j = l \pm 1/2$. Сечением реакции определяется произведение $(2j+1) P_{lj}(j)$ (фиг. 2.25).

В ядрах, оболочки которых близки к заполненным, и при малых энергиях возбуждения вся сила (dp) перехода с данными значениями (lj) может сосредоточиться на единственном уровне j , и тогда этот уровень можно отождествить с соответствующей одиночестиной конфигурацией (см., например, табл. 3.7). Но в ядрах с несколькими нуклонами сверх заполненных оболочек и, вообще говоря, при более высоких энергиях возбуждения может быть много уровней с одинаковыми значениями (lj) и сравнимыми выходами реакции (dp). Силовой функцией для таких значений (l, j) называют распределение вероятностей $P_{lj}(E_x)$ как функцию энергии возбуждения E_x .

На фиг. 2.25 представлены силовые функции для значений $l=0, 1$ и $l=2$, полученные на основе реакции $^{60}\text{Ni}_{32}(dp)^{58}\text{Ni}_{33}$. В области выше энергии связи нейтрона [$S_n(^{61}\text{Ni}) = 7,82 \text{ MeV}$] путем анализа нейтронных резонансов можно получить дополнительную информацию о нейтронной силовой функции s -волны (фиг. 2.26). Поскольку спин ядра-мишени равен нулю, величина j переданного нуклона равна полному угловому моменту J конечного состояния.

Мы видим, что силовая функция с $l=0$ проходит через максимум в области, соответствующей энергии $E_x \approx 5 \text{ MeV}$, с полной шириной Γ также порядка 5 MeV . Такое расположение уровня $3s_{1/2}$ качественно согласуется с выводами из одиночестиной модели (фиг. 2.30). Ширина уровня Γ возникает вследствие связи одиночестиного движения с другими степенями свободы ядра, характеризующими малой энергией возбуждения.

При $l=1$ силовая функция на фиг. 2.25 сконцентрирована на сравнительно небольшом числе уровней при малой энергии возбуждения ядра ^{61}Ni . Из схемы заполнения одиночестинных уровней следует, что нейtronам сверх $N=20$ в основном состоянии ядра соответствует нейтронная конфигурация $(f_{7/2})^8 (p_{3/2})^4$. Поэтому все сильные переходы в состояния с $l=1$ в ядре ^{61}Ni должны были бы соответствовать уровню $p_{1/2}$ и заселять состояния с $J=1/2$. Но основное состояние ядра ^{61}Ni имеет спин $J=3/2$ и образуется в реакции (dp) с большой вероятностью. Поэтому мы вынуждены предположить, что в основное состояние ядра ^{60}Ni с заметной долей входит конфигурация $(f_{7/2})^8 (p_{3/2})^2 (f_{5/2})^2$, а в основное состояние ядра ^{61}Ni — конфигурация $(f_{7/2})^8 (p_{3/2})^3 (f_{5/2})^2$. Причину такого рода смешивания конфигураций следует искать в явлении парной корреляции (см. гл. 8). Поскольку уровень $p_{1/2}$ в ядре ^{61}Ni лежит примерно на 2 MeV выше уровня $p_{3/2}$ [см. формулу (2.132)], большинство остальных сильных переходов с $l=1$ ориентировано можно присвоить именно этому уровню. Таким образом, ширина Γ силовой функции $p_{1/2}$ составляет примерно 2 MeV .

Сила перехода с $l=2$ распределена по энергетическому интервалу, начинающемуся при $E_x \approx 3 \text{ MeV}$ и простирающемуся по меньшей мере до $E_x \approx 8 \text{ MeV}$ (возможно, что часть силы перехода с $l=2$ будет обнаружена и при $E_x > 8 \text{ MeV}$, но эта область еще не исследована). Поскольку теоретическое спин-орбитальное расщепление уровня с $l=2$ составляет примерно 3 MeV , т. е. меньшие ширины силовой функции, при отсутствии прямых экспериментальных указаний трудно сделать выбор между компонентами $d_{5/2}$ и $d_{3/2}$.

Силовая функция s -волны (фиг. 2.26)

Изучение резонансов при взаимодействии медленных нейтронов с ядрами позволяет получить систематические данные о нейтронных ширинах этих резонансных уровней (см. примеры на фиг. 2.8). Приведенная нейтронная ширина $\Gamma_n^{(0)}(r)$ резонансного уровня r [см. формулу (2.114)] пропорциональна его одночастичному генеалогическому коэффициенту (гл. 3, приложение 6). Таким образом, среднее значение ширины $\Gamma_n^{(0)}$, деленное на среднее расстояние между уровнями D , является мерой одночастичной компоненты на энергетический интервал спектра, т. е. силовой функцией. Экспериментальные значения величины $\Gamma_n^{(0)}/D$ как функции и массового числа A представлены на фиг. 2.26.

Силовую функцию можно оценить по формулам для взаимодействия нейтрана с ядром, которые дают нам среднее значение сечения образования составного ядра (среднее значение полного сечения для всех процессов, идущих через резонансные состояния). В области низких энергий резонансы хорошо разделены ($\Gamma \ll D$), так что можно проинтегрировать по независимым вкладам от каждого резонанса. В результате получим [см. формулу (3.283)]

$$\langle 0 \rangle = \sum_{I_r=I_0 \pm 1/2} \frac{2I_r+1}{2(2I_0+1)} \frac{\pi \lambda^2}{D} \int \frac{\Gamma_n \Gamma}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} dE = \pi \lambda^2 \left(2\pi \frac{\Gamma_n}{D} \right). \quad (2.159)$$

Здесь I_r и I_0 — спины резонансного уровня и ядра-мишени.

Оценку величины Γ_n/D в приближении «черного ядра» получают, предположив, что нейтронная волновая функция на поверхности ядра содержит только падающую волну, а поток выходящей волны равен нулю [42]. Можно также исходить из того, что в приближении «черного ядра» одночастичная сила равномерно распределена по всему спектру и, следовательно, величина Γ_n/D равна величине $\Gamma_{\text{одн}}/D_{\text{одн}}$ для одночастичного движения. В случае потенциала прямоугольной формы при $l = 0$ мы имеем [см. формулы (3.322) и (3.324)]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{одн}} &= \frac{\hbar^2}{MR^2} 2kR, \\ D_{\text{одн}} &= \frac{\hbar^2}{MR^2} \pi K R, \end{aligned} \quad (2.160)$$

и, таким образом,

$$\left(\frac{\Gamma_n}{D} \right)_{\text{черное ядро}} = \frac{\Gamma_{\text{одн}}}{D_{\text{одн}}} = \frac{2}{\pi} \frac{k}{K}. \quad (2.161)$$

Подставив сюда значения $K = 1,58 \text{ ферми}^{-1}$ (что соответствует глубине потенциала $\sim 52 \text{ MeV}$) и $k = 2,19 \cdot 10^{-4} \text{ ферми}^{-1}$ (что соответствует энергии нейтрона 1 эВ), мы получим оценку величины силовой функции, указанную на фиг. 2.26 пунктирной линией.

Сплошная кривая на фиг. 2.26 соответствует оценке Γ_n/D , полученной путем вычисления сечения поглощения на основе потенциала оптической модели. При этом предполагалось, что и вещественная и мнимая части потенциала имеют форму потенциала Вудса — Саксона; существующие значения параметров приведены на графике. То, что площадь сплошной кривой значительно превышает площадь пунктирной кривой, соответствующей модели «черного ядра», объясняется тем, что в последнем случае мы взяли потенциал с резкой границей (влияние диффузности оценивается в гл. 3, приложение 5, п. 2).

Максимумы силовой функции при $A \approx 50$ и $A \approx 160$ соответствуют ядрам, в которых уровни $3s$ и $4s$ лежат при энергии возбуждения, примерно равной энергии связи нейтрана (см. также фиг. 2.30). Значительное завышение величины Γ_n/D в области $150 < A < 190$ можно связать с сильным влиянием статической деформации, характерной для ядер этой области (гл. 5).

Завышенное теоретическое значение Γ_n/D в области $A \approx 110$ может быть отчасти обусловлено радиальной зависимостью мнимого потенциала. В этой области, которая лежит примерно посередине между одночастичными резонансами $3s$ и $4s$, у нейтронной волновой функции имеется узел вблизи поверхности ядра. Поэтому, если поглощение происходит главным образом в области вблизи поверхности, сечение образования составного ядра уменьшается.

Отметим, что в некоторых случаях силовая функция s -волны, по-видимому, претерпевает существенные изменения при переходе от ядра к ядру. Если бы это подтвердилось, то это указывало бы на дополнительную структуру формы силовой функции, выходящую за рамки простого механизма затухания, характеризующегося мнимым потенциалом. Вопрос о возможном существовании такой промежуточной структуры [так называемых входных (doorway) состояний] в процессе образования составного ядра в настоящее время широко обсуждается (см., например, работу [162]).

Недавно появились данные о резонансах p -волны при взаимодействии нейтронов малых энергий с ядрами. Хотя эти данные пока еще гораздо менее полны, чем данные о силовой функции s -волны, они, по-видимому, указывают на наличие максимума при $A \approx 90$, если судить по положению одночастичного уровня $3p$ (см. фиг. 2.30, а также обзор [339] экспериментальных данных о силовой функции p -волны).

Дырочные состояния, наблюдающиеся в реакции $(p, 2p)$ (фиг. 2.27)

Выше мы видели, что, изучая реакции срыва, можно определить силовые функции одночастичных состояний, лежащих выше поверхности Ферми, т. е. частичных состояний. Исследуя же процессы выбивания [такие, как $(p, 2p)$] и реакции подхвата, получают аналогичные сведения о дырочных состояниях, расположенных ниже поверхности Ферми.

На фиг. 2.27 представлены результаты такого исследования дырочных состояний в ядре ^{16}O на основе реакции $(p, 2p)$. Энергия налетающих протонов E_0 была равна 460 MeV , а два вылетающих протона регистрировались при симметричной геометрии: их импульсы лежали в одной плоскости с направлением налетающего пучка и были направлены под одинаковыми углами ϑ к нему. В дополнение к этому спектрометр выделял только те протоны, энергия которых была одинакова. При такой геометрии для импульса ядра отдачи имеем

$$\text{Ротдача} = p_0 - 2p_i \cos \vartheta, \quad (2.162)$$

где p_0 — импульс налетающего протона, а p_i — импульс, соответствующий энергии E_1 , выделенной для каждого из двух конечных протонов. Энергия связи B испущенного протона определяется из энергетического баланса

$$B = E_0 - 2E_1 - E_{\text{отдачи}}, \quad (2.163)$$

где

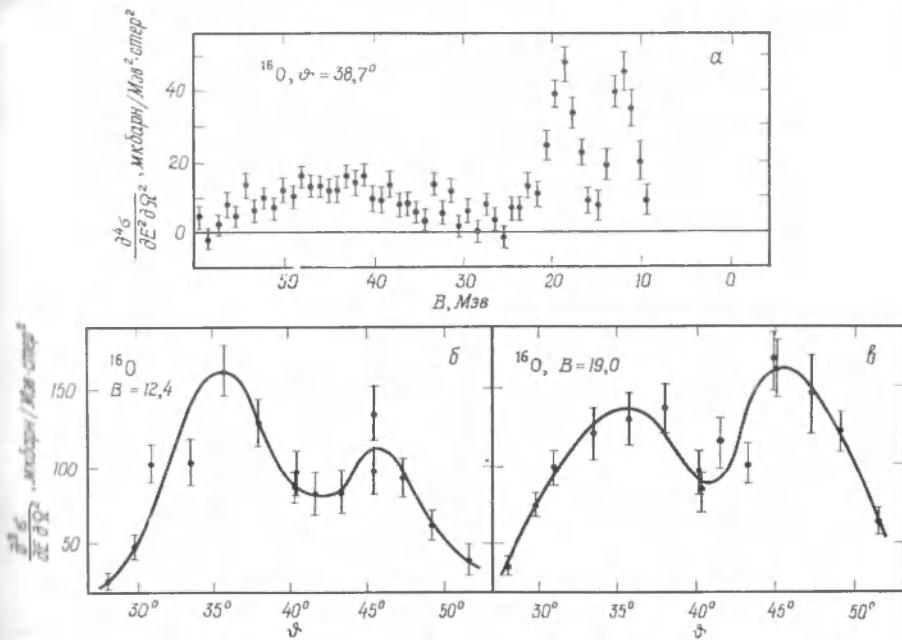
$$E_{\text{отдачи}} = \frac{1}{2M_r} (p_{\text{отдачи}})^2, \quad (2.164)$$

а M_r — масса ядра отдачи. На фиг. 2.27, а изображена кривая выхода протонов, находящихся в совпадении друг с другом, как функции энергии связи, вычисленной по формуле (2.163). Максимумами кривой определяются значения одночастичных энергий связи протонов в ядре-мишени ^{16}O .

Ядро ^{16}O может испускать протоны с уровнями $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$ и $1s_{1/2}$. Два максимума при наибольших энергиях протонов на фиг. 2.27 соответствуют заселению основного состояния ($1/2^-$) и состояния с энергией возбуждения, равной $6,3 \text{ MeV}$ ($3/2^-$), в ядре ^{15}N . (Некоторый вклад в максимум с меньшей энергией могут давать другие состояния с энергией, близкой $6,3 \text{ MeV}$, но из величины наблюдающейся интенсивности и из углового распределения следует, что

основная часть выхода соответствует состоянию $3/2^-$. Данные по реакции подхват ^{16}O (d , ^3He) ^{15}N тоже подтверждают такой вывод [234].) Таким образом, для обоих переходов $p_{1/2}$ и $p_{3/2}$ сила перехода приходится, по-видимому, главным образом на один (однодырочный) уровень.

Широкий максимум кривой протонного выхода на фиг. 2.27, *a*, соответствующий энергии связи около 45 MeV , можно, по-видимому, отождествить

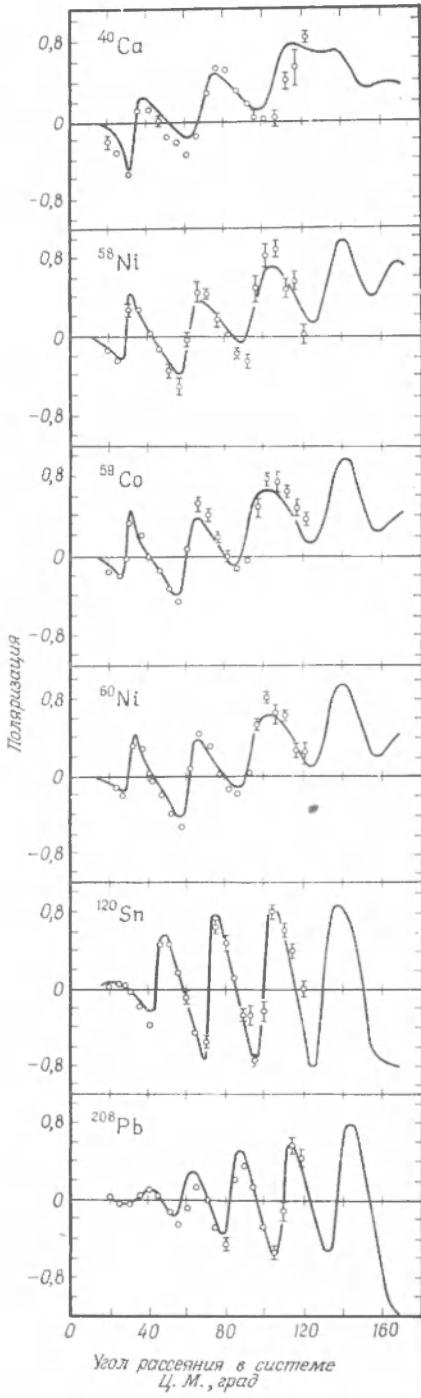
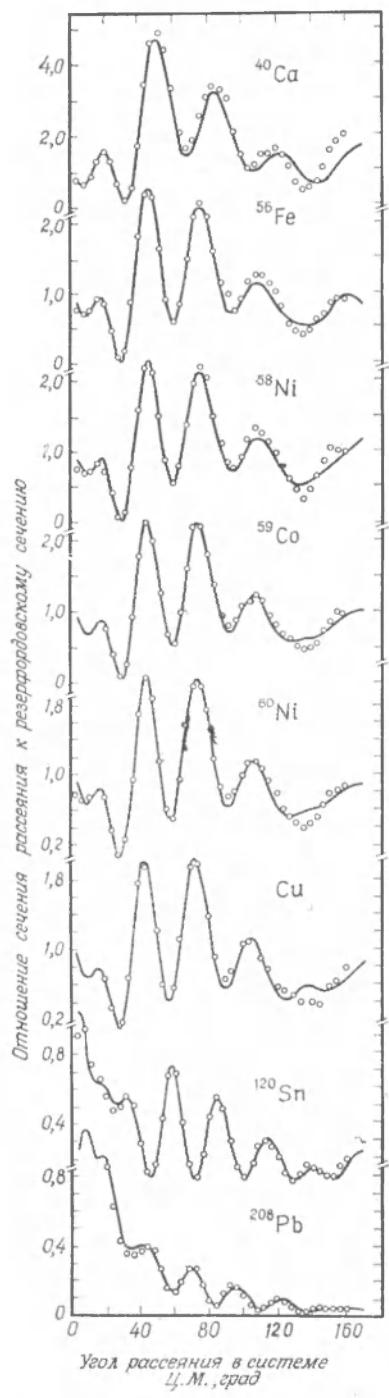


Фиг. 2.27. Данные о реакции (p , $2p$) [431].

См. также обзор реакции (p , $2p$) [252].

с силовой функцией $1s$. Ширина его ($\Gamma \approx 15 \text{ MeV}$) значительно превышает экспериментальное разрешение и является мерой связи степени свободы, соответствующей возбуждению дырочного уровня $1s$, с другими степенями свободы. Такая связь в конечном счете приводит к затуханию простого одночастичного движение дырки.

На фиг. 2.27 *б* и *в* приведено угловое распределение протонов, соответствующих двум максимумам в области больших энергий (уровни $p_{1/2}$ и $p_{3/2}$). Это распределение можно объяснить, исходя из распределения по импульсам протонов, находящихся на соответствующем одночастичном уровне. Из симметрии геометрии регистрирующей аппаратуры следует, что импульс отдачи должен быть направлен вдоль направления пучка (ось z) и поэтому для выбитого протона должно выполняться равенство $p_x = p_y = 0$. Минимум выхода, наблюдающийся при $\theta = 40^\circ$, соответствует углу, при котором $p_{\text{отдача}} = 0$ (то, что этот угол не равен 45° , обусловлено релятивистским увеличением массы полетающего протона и конечной энергией связи выбитого протона). Наличие минимума кривой выхода при $p_{\text{отдача}} = 0$ объясняется тем, что связанный протон находится в состоянии с $l = 1$ и, следовательно, вероятность нахождения его в состоянии с нулевым импульсом равна нулю. Максимум углового



Фиг. 2.28. Экспериментальные данные о рассеянии протонов с энергией 30 МэВ и кривые, полученные на основе оптической модели [109, 209, 365, 430].

распределения соответствует максимуму распределения вероятности p_z . Поскольку импульс падающих протонов $p_0 = 1040 \text{ Мэв/с}$, смещение пика на $\Delta\theta = 6^\circ$ соответствует $(p_z)_{\max} = p_0 \Delta\theta \approx 110 \text{ Мэв/с}$. Взяв для простоты волновые функции гармонического осциллятора в p -пространстве $\varphi(p_z) \sim -p_z \exp\{-p_z^2(2\hbar M\omega_0)^{-1}\}$, мы получим, что $(p_z)_{\max} = (\hbar M\omega_0)^{1/2}$, и, таким образом, по наблюдаемому положению максимума находим, что $\hbar\omega_0 \approx 13 \text{ Мэв}$. Эта величина близка к значению $\hbar\omega_0$, найденному на основании измеренного распределения заряда в работе [239], что является важным доводом в пользу одночастичного описания основного состояния ядра ^{16}O .

Выше мы полностью пренебрегли рассеянием и поглощением падающих и вылетающих протонов, вызванным их взаимодействием с другими нуклонами ядра-мишени. Искажения, вносимые такими эффектами, существенны при более точном анализе экспериментов (особенно при рассмотрении абсолютного выхода), но не меняют основных выводов, сделанных выше [32].

Анализ рассеяния протонов с энергией 30 Мэв на основе оптической модели (фиг. 2.28; табл. 2.1 и 2.2)

Пример анализа рассеяния протонов на основе оптической модели приведен на фиг. 2.28. У нас имеются данные о дифференциальных сечениях (фиг. 2.28, слева), поляризации (фиг. 2.28, справа) и полных сечениях реакции (табл. 2.1) для протонов с энергией 30 Мэв на многих элементах от Ca до Pb.

Таблица 2.1

СЕЧЕНИЯ РЕАКЦИИ ДЛЯ ПРОТОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ 30 Мэв

	^{40}Ca	^{56}Fe	^{58}Ni	^{59}Co
σ_R (эксп.)	915 ± 38	1140 ± 43	1038 ± 32	1169 ± 39
σ_R (вычисл.)	941	1137	1117	1162
	^{60}Ni	Cu	^{120}Sn	^{208}Pb
σ_R (эксп.)	1053 ± 51	1124 ± 40	1638 ± 68	1865 ± 98
σ_R (вычисл.)	1174	1215	1604	1838

Вычисленные сечения соответствуют полному сечению образования составного ядра, полученному с потенциалами, указанными в табл. 2.2, поскольку при энергии налетающих частиц 30 Мэв составное ядро должно распадаться преимущественно по многим неупругим каналам, так что доля упругого рассеяния через составное ядро мала. Сечения даны в миллибарах (10^{-27} см^2). Результаты заимствованы из работ, указанных в подписи к фиг. 2.28.

Кривые, представленные на графике, дают сечения, вычисленные на основе оптического потенциала, содержащего следующие компоненты:

а) центральный вещественный потенциал

$$Vf(r, R_V, a_V); \quad (2.165)$$

б) центральный мнимый потенциал, состоящий из объемного (W_v) и поверхностного (W_s) членов,

$$i \left[W_v f(r, R_W, a_W) - 4a_W W_s \frac{d}{dr} f(r, R_W, a_W) \right]; \quad (2.166)$$

в) спин-орбитальный потенциал

$$V_{ls}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) r_{ls}^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r, R_{ls}, a_{ls}); \quad (2.167)$$

г) кулоновский потенциал, соответствующий равномерно заряженной сфере радиуса R_c ,

$$\begin{aligned} \frac{Ze^2}{R_c} \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{r}{R_c} \right)^2 \right] & \text{ при } r \leq R_c, \\ \frac{Ze^2}{r} & \text{ при } r \geq R_c. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Радиальная зависимость потенциала выбрана типа Вудса—Саксона:

$$f(r, R, a) = \left(1 + \exp \frac{r-R}{a} \right)^{-1}. \quad (2.169)$$

Результаты расчетов слабо зависят от кулоновского радиуса R_c , а поэтому его принимали равным радиусу вещественной части потенциала,

$$R_C = R_V. \quad (2.170)$$

При подгонке параметров для упрощения предполагали, что параметры диффузности a одинаковы для всех ядер и зависимость радиальных параметров R от массового числа следует простому закону $A^{1/3}$, т. е.

$$R_V = r_V A^{1/3} \text{ и т. д.} \quad (2.171)$$

Наилучшее согласие достигается при следующих значениях геометрических параметров:

$$\begin{aligned} r_V &= 1,2 \text{ ферми,} & a_V &= 0,7 \text{ ферми,} \\ r_W &= 1,25 \text{ ферми,} & a_W &= 0,7 \text{ ферми,} \\ r_{ls} &= 1,10 \text{ ферми,} & a_{ls} &= 0,7 \text{ ферми.} \end{aligned} \quad (2.172)$$

При таких значениях геометрических параметров параметры глубины потенциалов подбирались для каждого ядра так, чтобы добиться оптимального согласия с экспериментальными сечениями (последние приведены на фиг. 2.28 и в табл. 2.1). Полученные таким путем параметры глубины различных компонент потенциала представлены в табл. 2.2. Несколько лучшего согласия с экспериментальными данными можно добиться, если для каждого конкретного ядра варьировать значения геометрических параметров. Если предположить, что поглощение происходит только на поверхности ($\dot{W}_v = 0$), то согласие с экспери-

Таблица 2.2

ПАРАМЕТРЫ ОПТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ПРОТОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ 30 МэВ

	⁴⁰ Ca	⁵⁶ Fe	⁵⁸ Ni	⁵⁹ Co	⁶⁰ Ni	Cu	¹²⁰ Sn	²⁰⁸ Pb
$-V, M\text{эв}$	46,1	46,4	47,0	47,5	47,6	47,7	51,1	53,4
$-\dot{W}_v, M\text{эв}$	0,4	2,7	3,4	2,8	2,8	1,8	1,2	4,0
$-\dot{W}_s, M\text{эв}$	5,96	5,2	4,4	5,7	5,5	6,1	8,7	7,6
$-V_{ls}, M\text{эв}$	20,1	19,5	14,8	19,5	18,2	19,5	20,2	17,2

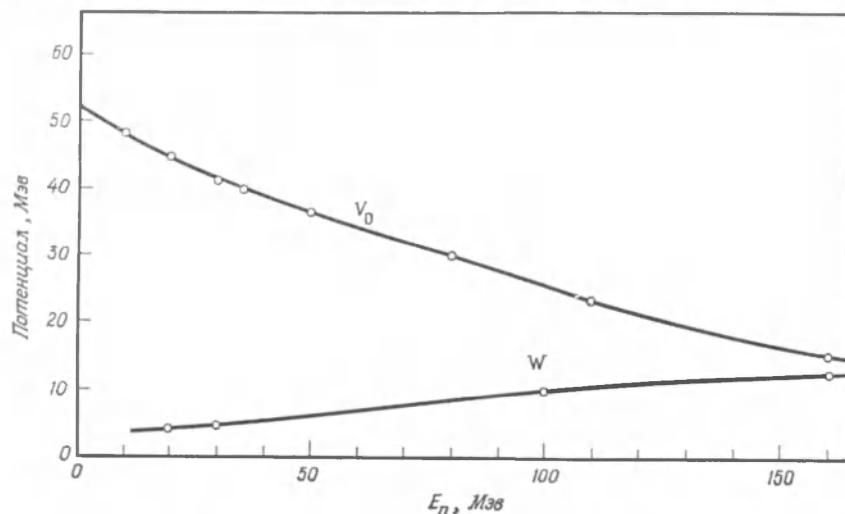
В таблице представлены глубины потенциалов, соответствующие сечениям, приведенным на фиг. 2.28 и в табл. 2.1. Значения геометрических параметров даются равенствами (2.172). Приведенные результаты заимствованы из работы [209] (см. фиг. 2.28).

ментальными значениями сечений останется примерно таким же, как и ранее. Предположение о чисто объемном характере поглощения ($W_s = 0$) приводит к некоторому ухудшению согласия с экспериментальными данными.

Систематика данных об оптическом потенциале (фиг. 2.29)

Оптические потенциалы были определены путем анализа большого количества данных о взаимодействии нейтронов и протонов с разными ядрами при разных энергиях (см., например, фиг. 2.3, 2.26 и 2.28).

На фиг. 2.29 представлены сводные данные о некоторых характеристиках оптического потенциала, полученные в результате такого анализа. Чтобы мож-



Фиг. 2.29. Действительный потенциал V_0 и потенциал объемного поглощения W .

Кривые получены в результате расчетов, основанных на оптической модели, проведенных в работе [373] (вещественный потенциал при $E_p < 22 \text{ МэВ}$), в работе [209] ($E_p = 30 \text{ МэВ}$), в работе [60] ($15 \text{ МэВ} < E_p < 120 \text{ МэВ}$), в работе [389] ($E_p = 160 \text{ МэВ}$) и в работе [461] ($E_p < 30 \text{ МэВ}$). По оси абсцисс отложена энергия бомбардирующих нейтронов E_p ; в случае протонов соответствующая энергия E_p больше на величину кулоновской энергии, поскольку средний потенциал определяется кинетической энергией частицы внутри ядра.

но было сравнить параметры, соответствующие разным энергиям E бомбардирующих частиц, на графике приведены результаты анализа, при котором форма потенциала бралась в наиболее простом стандартном виде. Так, вещественная часть потенциала бралась в виде потенциала Вудса — Саксона

$$V(r) = -Vf(r), \quad (2.173)$$

где

$$f(r) = \left(1 + \exp \frac{r-R}{a}\right)^{-1}. \quad (2.174)$$

Параметры радиуса и диффузности таковы:

$$\begin{aligned} R &= r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1,25 \text{ ферми}, \\ a &= 0,65 \text{ ферми}. \end{aligned} \quad (2.175)$$

Значения потенциала V на графике соответствуют изоскалярной части взаимодействия V_0 и, следовательно, представляют собой среднее по нейтронным и протонным потенциалам там, где имеются такие данные. Там же, где таких экспериментальных данных нет, значения потенциала были экстраполированы в область малых значений A и Z , где поправки на энергию симметрии и кулоновскую энергию пренебрежимо мальы.

Как мы видим, потенциал V_0 плавно спадает с увеличением энергии. Вплоть до энергии $E \approx 80$ $M_{\text{эв}}$ спадание приближенно соответствует закону

$$V_0 \approx 52 - 0,3E. \quad (2.176)$$

Изовекторная часть вещественного потенциала была определена по зависимости нейтронного и протонного потенциалов (в ядрах с $N \neq Z$), по зависимости протонных и нейтронных потенциалов от Z и A и по сечениям прямой реакции (pn) с образованием аналоговых состояний ядер-мишеней с $M_T = T_0 - 1$. Все эти данные согласуются с потенциалом вида

$$V_1(r) = \frac{t \cdot T_0}{A} V_1^f(r). \quad (2.177)$$

Здесь геометрические параметры те же, что и в (2.175), а величина V_1 лежит в пределах от 70 до 110 $M_{\text{эв}}$ [238, 209]. Энергетическую зависимость параметра V_1 нельзя определить, поскольку имеющиеся данные недостаточно точны и недостаточно хорошо согласуются между собой.

Экспериментальные данные лучше всего аппроксимируются, если предположить, что при низких энергиях падающих частиц поглощение сосредоточено главным образом в поверхностной области, а при высоких энергиях оно носит объемный характер [причем в этом случае мнимая часть потенциала пропорциональна $f(r)$]. Для протонов с энергией 30 $M_{\text{эв}}$ основную роль еще играет поглощение на поверхности (см. табл. 2.2). Чтобы проследить изменение поглощающего потенциала с энергией, мы несколько упростили картину. Именно мы предположили, что поглощение носит чисто объемный характер. На фиг. 2.29 приведено величина объемного поглощающего потенциала — $iWf(r)$, наилучшим образом описывающего сечение при каждой энергии. Мы видим, что величина W монотонно растет с энергией от нескольких мегазэлектронвольт при самых низких энергиях до величины порядка 10 $M_{\text{эв}}$ при $E \approx 100$ $M_{\text{эв}}$.

Спин-орбитальный потенциал был приближенно определен при энергии нуклонов до 30 $M_{\text{эв}}$ [373, 209]. В этом интервале энергий экспериментальные данные согласуются с потенциалом вида

$$V_{ls}(r) = V_{ls}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) r_0^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r), \quad (2.178)$$

где

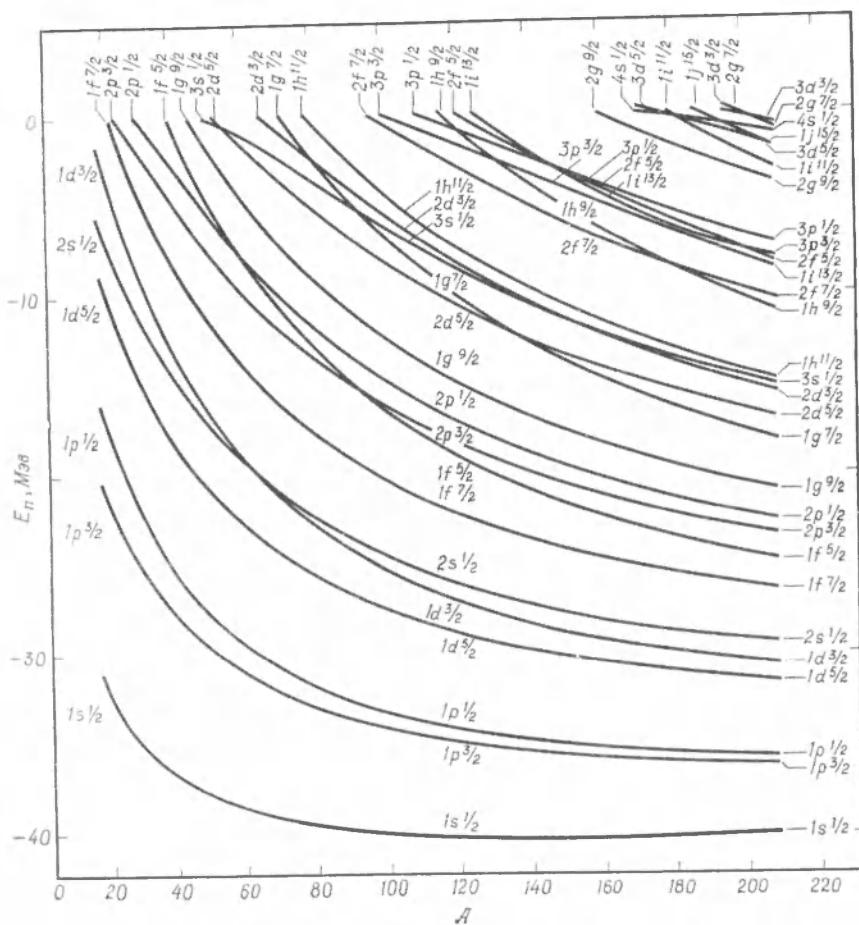
$$V_{ls} \approx 17 M_{\text{эв}}, \quad (2.179)$$

Меньший радиус спин-орбитального потенциала [см. формулу (2.172)] объясняют [210] очень малым радиусом исходного двухчастичного спин-орбитального взаимодействия (фиг. 2.35).

Энергия связи одиночественных состояний в статическом ядерном потенциале (фиг. 2.30)

На фиг. 2.30 представлены спектры, полученные путем решения уравнения Шредингера для частицы в случае сферического потенциала. Одиночественные состояния обозначаются квантовыми числами $n_r l_f$ (число узлов радиальной волновой функции равно $n_r - 1$). Потенциал имел вид

$$U = Vf(r) + V_{ls}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) r_0^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r), \quad (2.180)$$



Фиг. 2.30. Теоретические нейтронные уровни (C. J. Veje, частное сообщение).

где $f(r)$ дается формулой (2.174). Предполагалось, что зависимость радиуса потенциала от A следует закону $A^{1/3}$, а параметр диффузности a не зависит от A :

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1,27 \text{ ферми}, \quad (2.181)$$

$$a = 0,67 \text{ ферми}.$$

Глубины потенциалов содержат член, зависящий от величины нейтронного избытка:

$$V = \left(-51 + 33 \frac{N-Z}{A} \right) M_{\text{эв}}, \quad (2.182)$$

$$V_{ls} = -0,44V = \left(22 - 14 \frac{N-Z}{A} \right) M_{\text{эв}}.$$

При каждом значении A выбиралась такая величина нейтронного избытка, что она соответствовала минимуму долины β -стабильности. (При $Z = 82$ и $A = 208$ параметры те же, что и в работе [48].)

Выбранные значения параметров обеспечивают хорошее согласие теории со спектрами связанных состояний с малыми энергиями возбуждения (см., например, фиг. 3.3 и 3.5) и согласуются со средними потенциалами, найденными путем анализа в рамках оптической модели (фиг. 2.29). При этом никто не пытался добиться наилучшего согласия, так что небольшая подгонка потенциала для конкретных ядер может улучшить согласие с опытом. Пренебрежение зависимостью потенциала от скорости приводит к ошибкам порядка 30% в энергии для состояний, далеких от поверхности Ферми (см., например, фиг. 2.29 и 3.5). Вопрос об анализе одночастичных связанных состояний с учетом зависимости потенциала от скорости рассматривается в работах [380, 470, 321].

Величина потенциала симметрии оказывается несколько большей, чем должно быть, если исходить из энергии связи [см. формулу (2.28)], что, возможно, объясняется зависимостью потенциала симметрии от скорости.

Общая тенденция, которую обнаруживают данные фиг. 2.30, такова: по мере роста A увеличиваются размеры области действия потенциала и возрастает энергия связи для каждого состояния. Нуклоны, находящиеся на орбитах с малым угловым моментом и малой энергией связи, значительную долю времени проводят вне ядра, и поэтому увеличение размеров области действия потенциала сказывается на них слабее, чем на нуклонах, находящихся в состояниях с малой энергией связи и большими l .

§ 5. МЕЖНУКЛОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ЯДЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Выше в данной главе мы видели, что одночастичный подход вполне удовлетворителен при анализе многих свойств ядер. Мы также видели, как по экспериментальным данным о последовательности нуклонных связанных состояний и о рассеянии можно определить параметры среднего ядерного потенциала. В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о связи этих параметров с характеристиками межнуклонного взаимодействия, которые определяются в результате анализа двухнуклонных систем. Установление такой связи — сложная проблема, затрагивающая многие стороны структуры ядра. В данной главе мы сосредоточим свое внимание главным образом на физической стороне этой проблемы и на установлении простых качественных характеристик.

1. Основные свойства межнуклонного взаимодействия

В последние годы удалось добиться больших успехов в определении свойств межнуклонного взаимодействия. Мы не будем подробно и последовательно излагать соответствующие методы анализа различных экспериментальных данных, а ограничимся обзором основных результатов такого анализа. Эти результаты служат исходной точкой для установления связи между свойствами ядер и свойствами двухчастичного взаимодействия [460, 329, 8].

Низкие энергии ($E < 5$ МэВ)

Непосредственно из опытов по pr - и pp -рассеянию при низких энергиях и из данных об основном состоянии дейтранона можно сделать вывод о том, что взаимодействие между нуклоном — это сильное взаимное притяжение на малых расстояниях. Из-за наличия центробежного барьера опыты при низких энергиях дают нам главным образом информацию о взаимодействии в S -состоянии. Хорошо известно, что эксперименты при низких энергиях можно анализировать в приближении эффективного радиуса, которое позволяет воспроизвести фазы рассеяния для каждого канала с помощью двух параметров: длины рассеяния a и эффективного радиуса r_e (см., например, работы [42, 251]). В случае pr -рассеяния мы имеем

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 \quad (2.183)$$

Из данных по рассеянию (и из величины энергии связи дейтранона) следует, что значения параметров взаимодействия в S -состоянии таковы:

$$\begin{aligned} \text{Синглетное состояние } (S=0, T=1) & \left\{ \begin{array}{l} a = -23,7 \text{ ферми}, \\ r_e = 2,7 \text{ ферми}. \end{array} \right. \\ \text{Триплетное состояние } (S=1, T=0) & \left\{ \begin{array}{l} a = 5,39 \text{ ферми}, \\ r_e = 1,703 \text{ ферми}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.184)$$

Наличие кулоновского взаимодействия в pp -рассеянии вносит некоторые модификации в протон-протонное разложение по эффективному радиусу, но и в этом случае эффект ядерного взаимодействия характеризуется двумя параметрами: a и r_e . Поскольку фазовые сдвиги описываются двумя параметрами, по данным о рассеянии при низких энергиях можно определить только два параметра потенциала, например глубину и радиус.

Сравнение 1S -рассеяния в системе pr с протон-протонным рассеянием при малых энергиях дало первые доказательства зарядовой независимости ядерных сил [64]. Вследствие большой длины рассеяния оказывается возможным очень точное сравнение взаимодействия в этих двух системах. Установлено, что pr -взаимодействие примерно на 1,5% сильнее pp -взаимодействия, причем их соотношение немного зависит от формы потенциала [390]. Позднее в результате анализа реакций с двумя нейтронами в кольчном состоянии [23] были получены следения о длине pn -рассеяния в 1S -состоянии. Ориентировочные выводы, следующие из этих экспериментов, согласуются с предположением о зарядовой симметрии: $V_{nn} = V_{pp}$. Были также сделаны попытки объяснить небольшую разницу между V_{pn} и V_{pp} различием масс заряженных и нейтральных я-мезонов [229]. Но при попытках толкования зарядовой независимости с такой степенью точности мы наталкиваемся на трудности, обусловленные смешиванием эффектов электромагнитного и сильного взаимодействий.

То обстоятельство, что при 1S -рассеянии величина a отрицательна и почти на порядок больше r_e , говорит о том, что в данном канале взаимодействие носит характер притяжения и по величине несколько

меньше того, которое требуется для образования связанного состояния с нулевой энергией. Для грубых оценок часто удобным оказывается потенциал прямоугольной формы с глубиной V_0 и радиусом b , которые определяют так, чтобы они воспроизводили экспериментальное значение эффективного радиуса и давали связанное состояние при нулевой энергии:

$$\begin{aligned} b &= r_e = 2,7 \text{ ферми}, \\ V_0 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{Mb^2} = 14 \text{ Мэв}. \end{aligned} \quad (2.185)$$

Наличие у дейтрона квадрупольного момента свидетельствует о том, что в триплетном состоянии при малых энергиях каналы 3S_1 и 3D_1 связаны. Это указывает на то, что у потенциала имеется компонента тензорных сил. Поэтому разложением (2.183) определяется «собственная фаза» в связанном канале.

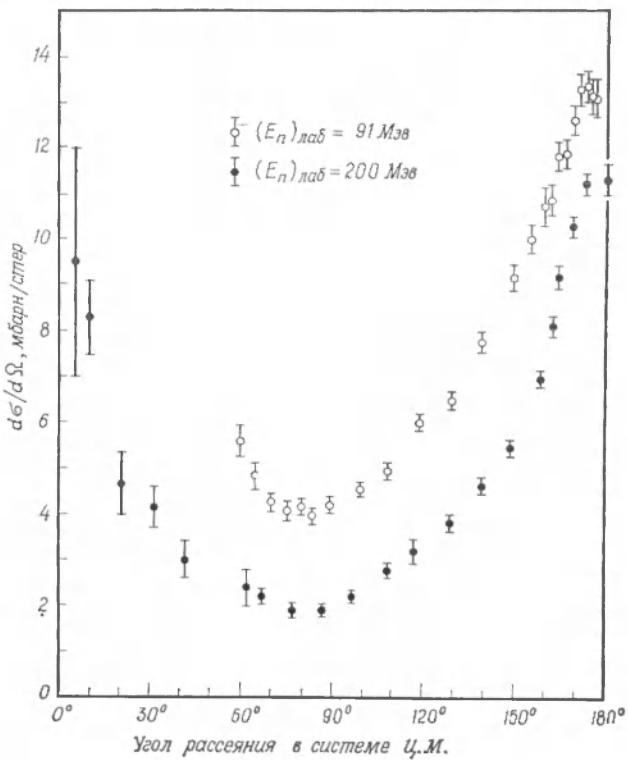
Если при определении «эффективного» потенциала прямоугольной формы для взаимодействия в состоянии 3S взять значения параметров (2.184), то мы найдем, что $b \approx 1,9$ ферми и $V_0 \approx 35$ Мэв. Отметим, однако, что пользоваться таким эффективным потенциалом для оценки взаимодействий в ядре весьма рискованно, поскольку центральные и тензорные компоненты сил по-разному вносят вклад в средний ядерный потенциал и в энергию связи дейтрона. В самом деле, в первом приближении тензорные силы в среднем равны нулю и не дают вклада в ядерный потенциал. Поэтому при оценках величины ядерного потенциала очень важно знать относительный вклад тензорных и центральных сил в наблюдающееся притяжение при низких энергиях, а извлечь такую информацию только из данных, полученных при низких энергиях, невозможно.

Более высокие энергии, обменный потенциал

Исследования, проводимые при малых энергиях, позволяют определить только сравнительно небольшую часть межнуклонного взаимодействия, и, в частности, они совершенно не позволяют судить о природе его отталкивателей части, которая оказывает очень существенное влияние на равновесную плотность и эффективное взаимодействие нуклонов в ядре (см. п. 2). Поэтому для достаточно полного определения характеристик межнуклонного взаимодействия, исходя из которых можно судить о свойствах ядер, необходимо провести анализ экспериментов по рассеянию в области высоких энергий.

В экспериментах по рассеянию нейтронов на протонах, проведенных в области энергии нейтронов E_n от 50 до 700 Мэв, было обнаружено сильное рассеяние назад, что подтверждает мысль о важном значении обменного взаимодействия, высказанную впервые Гейзенбергом [227] и Майораной [308] (фиг. 2.31). Действительно, по-

скольку длина волны налетающей частицы меньше радиуса взаимодействия, силы обычного типа привели бы преимущественно к рассеянию вперед. Наблюдающееся же рассеяние назад может произойти в результате того, что налетающий нейтрон испустит π -мезон, превратясь в протон, который будет продолжать двигаться вперед,



Фиг. 2.31. Экспериментальные данные о дифференциальных сечениях (np)-рассеяния, взятые из работы [408] (энергия 91 MeV) и работы [485] (200 MeV). Представлена лишь небольшая часть имеющихся экспериментальных данных [329].

тогда как протон-мишень поглотит π -мезон, превратясь в нейтрон и двигаясь назад (в системе центра масс). Такое «обменное» рассеяние можно характеризовать потенциалом вида $V(r) P^r$, где P^r — оператор, меняющий местами пространственные координаты r_1 и r_2 двух сталкивающихся частиц, т. е. $P^r f(r_1, r_2) = f(r_2, r_1)$.

Чисто обменный потенциал вида $V(r) P^r$ привел бы к угловому распределению с сильным максимумом при 180° , тогда как потенциал обычного вида $V(r)$ приводил бы к максимуму при 0° . Приблизительно одинаковые максимумы при 0 и 180° , заметные на фиг. 2.31,

можно объяснить, если предположить, что потенциал пропорционален величине $(1 + P^z)$. Такой потенциал называют потенциалом Сербера. Знак плюс необходим для того, чтобы получить сильное взаимодействие, наблюдающееся в S -состояниях. Потенциал Сербера действует только на состояния с четным угловым моментом и равен нулю в состояниях с нечетным угловым моментом. Более подробный анализ показал, что такая картина верна лишь частично, поскольку имеются существенные взаимодействия и в нечетных состояниях (см. ниже). Но они почти полностью исчезают, если их усреднить по разным относительным направлениям спина и орбиты. Поэтому для грубой оценки зависимости центрального взаимодействия между нуклонами от симметрии часто оказывается пригодным потенциал Сербера.

Силы Сербера не содержат какого-либо элемента отталкивания, а потому этот первый результат исследований при высоких энергиях не мог подтвердить распространенную в течение долгого времени гипотезу о том, что насыщение ядерных сил следует объяснять их зависимостью от симметрии.

Систематическое изучение процесса нуклон-нуклонного рассеяния при больших энергиях потребовало более десяти лет работы. Взаимодействие оказалось настолько сложным, что никому не удалось найти подходящую упрощенную теоретическую модель. В таких условиях оставалось лишь медленно накапливать очень подробные экспериментальные данные о полных сечениях, угловых распределениях, а также о поляризациях и спиновых корреляциях рассеянных нуклонов. Даже после того как было получено огромное количество данных, анализ их приводил к разным противоречиям. Противоречия были окончательно устранены только после того, как удалось привлечь к анализу рассеяния мезонную теорию (см. ниже). Кроме того, в предположении о плавности изменения фаз удалось объединить данные, полученные при различных энергиях.

В результате всей этой работы к настоящему времени найдены методы довольно однозначного фазового анализа, которые позволяют рассчитывать рассеяние до энергий бомбардирующих частиц порядка нескольких сотен мегаэлектронвольт (фиг. 2.34). Можно также подобрать и потенциалы, которые приблизительно воспроизводят сечения рассеяния (фиг. 2.35), но они содержат очень большое число параметров, и вопрос об их однозначности недостаточно хорошо изучен. В частности, все еще не ясно, содержит ли межнуклонный потенциал нелокальные члены или же в какой степени он явно зависит от скорости. Возможность существования таких членов в потенциале рассматривается в работе [195].

Несмотря на неоднозначность существующих потенциалов, по фазам рассеяния можно определить почти непосредственно ряд качественных характеристик взаимодействия, которые имеют большое значение в вопросах структуры ядра.

Твердая сердцевина

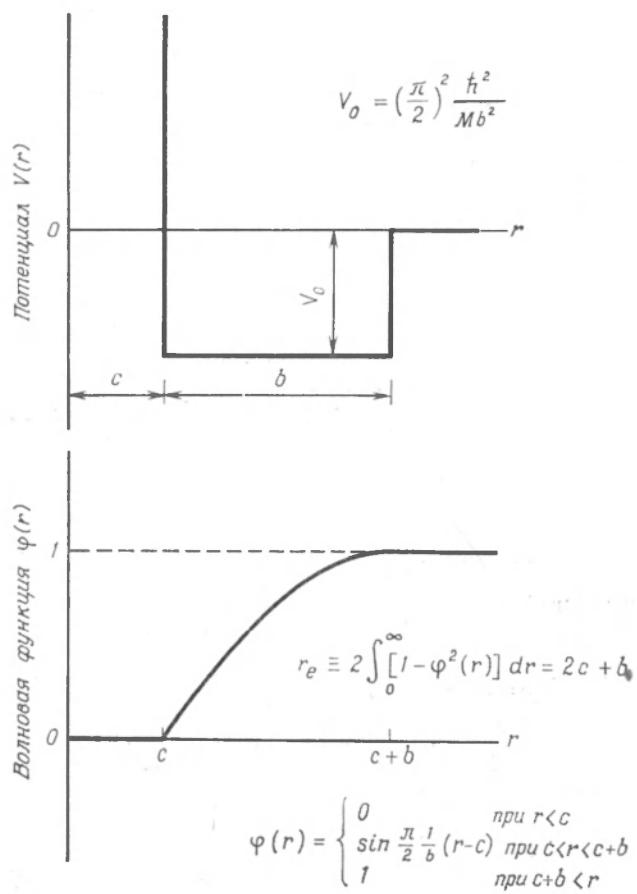
То обстоятельство, что при энергии, равной примерно 200 $M_{\text{эв}}$, фаза 1S -волны становится отрицательной, говорит о том, что взаимодействие в этом канале, которое при низких энергиях носит характер сильного притяжения, при более высоких энергиях принимает характер отталкивания. Таким образом, мы впервые видим здесь прямое экспериментальное доказательство существования отталкивателей компоненты в межнуклонном взаимодействии, которое может быть ответственно за насыщение ядерных сил. Один из путей введения такого отталкивания, незначительного при низких энергиях, но преобладающего при высоких энергиях, — предположить наличие «твёрдой сердцевины», т. е. очень сильного взаимного отталкивания с очень малым радиусом действия¹⁾. Из фиг. 2.34 видно, что при высоких энергиях S -фазы уменьшаются с ростом энергии, причем $d\delta/dk \approx -0,6$ ферми, и поэтому радиус твёрдой сердцевины c должен быть такого порядка величины [точная подгонка параметров потенциала дает, по-видимому, значения c в интервале от 0,4 до 0,5 ферми (фиг. 2.35)].

Наличие твёрдой сердцевины несколько изменяет интерпретацию параметра эффективного радиуса при низких энергиях. Так, для потенциала прямогоугольной формы, который приводит к появлению связанныго состояния при нулевой энергии (что приблизительно справедливо в 1S -канале), мы по-прежнему имеем $V_0 = (\pi/2)^2 h^2/M b^2$, где b — радиус области притяжения, простирающейся за сердцевиной. Эффективный же радиус теперь значительно больше b (фиг. 2.32), так что если мы положим $c = 0,5$ ферми, то из данных (2.184) по S -рассеянию получим $b = 1,7$ ферми и $V_0 = 34 M_{\text{эв}}$.

Подчеркнем, что экспериментально наблюдаемое изменение знака фаз S -волны можно получить не только введением бесконечно большого отталкивания малого радиуса действия. Того же самого можно добиться, если взять отталкивателей потенциал конечной величины (мягкая сердцевина) или ввести во взаимодействие в явном виде зависимость от относительной скорости [367, 208, 422].

Другим способом параметризации эффекта сильных взаимодействий на малых расстояниях является замена внутренней области подходящими граничными условиями на некотором конечном значении радиуса [299]. Поскольку взаимодействия, ответственные за эти граничные условия, соответствуют энергиям, намного превышающим энергию налетающих частиц, эти граничные условия должны быть почти независимыми от энергии.

¹⁾ Хотя мысль об отталкивании очень малого радиуса действия как причине ядерного насыщения высказывалась уже во время первых дискуссий о межнуклонном взаимодействии, ей уделялось довольно мало внимания, поскольку она противоречила представлению о простой структуре нуклонов. Идея была возрождена Ястребовым в 1950 г., как возможное объяснение довольно малых сечений pp -рассеяния при высоких энергиях. Первое четкое подтверждение существования такого отталкивания было получено в результате подробного фазового анализа результатов многочисленных измерений процессов рассеяния и поляризации, проведенных в случае pp -системы при энергии 310 $M_{\text{эв}}$ [91, 411, 110].



Фиг. 2.32. Потенциал типа прямоугольной ямы с отталкивательной сердцевиной.
Параметр V_0 подобран так, что связанным состоянию соответствует нулевая энергия.

3P -фазы, спиновая зависимость взаимодействия

Среднее значение фаз 3P

$$\langle \delta({}^3P) \rangle \equiv \frac{1}{9} [5\delta({}^3P_2) + 3\delta({}^3P_1) + \delta({}^3P_0)] \quad (2.186)$$

остается малым при всех энергиях. Это говорит об относительно малой величине центрального взаимодействия в 3P -состояниях, как для сил Сербера. Относительная величина фаз 3P дает важную информацию о природе сил, зависящих от спина. В самом деле, по данным

анализа этих фаз можно сразу сделать вывод о том, что в межнуклонное взаимодействие необходимо включить спин-орбитальные и тензорные члены (см. ниже).

При анализе в двухнуклонной системе роли сил, зависящих от спина, удобно пользоваться оператором спиральности

$$H = \frac{1}{r} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (2.187)$$

которым определяется компонента полного спина в направлении \mathbf{r} . Собственные значения H оператора спиральности равны 0, ± 1 . В состояниях с определенной четностью противоположные значения спиральности ($H = \pm 1$) должны быть представлены с равной вероятностью, поскольку H меняет знак при пространственной инверсии. (В дальнейшем мы будем широко использовать представление спиральности при описании однонуклонного движения в ядерном потенциале, см. гл. 3, приложение 1, п. 1).

Триплетные состояния с заданными значениями полного углового момента J и четности π можно характеризовать величиной орбитального углового момента L или спиральности $|H|$.

Мы имеем следующие возможные каналы:

$$\begin{aligned} J = 0, \quad \pi = -1, \quad & L = 1, \quad H = 0, \quad ({}^3P_0); \\ J \neq 0, \quad \pi = (-1)^{J+1}, \quad & L = J \mp 1, \quad \begin{cases} H = 0, & \left(\sqrt{\frac{1}{3}} {}^3S_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} {}^3D_1, \dots \right), \\ |H| = 1, & \left(\sqrt{\frac{2}{3}} {}^3S_1 - \sqrt{\frac{1}{3}} {}^3D_1, \dots \right), \end{cases} \\ J \neq 0, \quad \pi = (-1)^J, \quad & L = J, \quad |H| = 1, \quad ({}^3P_1, {}^3D_2, \dots). \end{aligned} \quad (2.188)$$

Преобразование от представления LJ к представлению HJ дается формулой (3.64) и содержит коэффициент векторного сложения ($LOSH |JH\rangle$), характеризующий связь спиральности с орбитальным моментом. Поэтому при $L = J$ имеем $|H| = 1$, а в случае $L = 1, J = 0$ значение спиральности $H = 0$. Для состояний с $\pi = (-1)^{J+1}$ и $J \neq 0$ при заданных значениях π и J существуют два возможных канала, каждый из которых можно характеризовать либо величиной L , либо величиной $|H|$. Оператор кинетической энергии коммутирует с L , но не с H . Следовательно, в случае взаимодействий, не зависящих от спина, собственные состояния характеризуются определенными значениями L . Оператор спин-орбитального взаимодействия также коммутирует с L и не коммутирует с H . Оператор же тензорного взаимодействия S_{12} [см. формулу (1.89)] коммутирует с H и не коммутирует с L . Следовательно, тензорное взаимодействие создает состояния с определенными $|H|$.

Легко видеть, что собственные значения S_{12} таковы:

$$S_{12} \equiv \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{6}{r^2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 - 2 (\mathbf{S})^2 =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } S = 0, \\ -4 & \text{при } S = 1, H = 0, \\ +2 & \text{при } S = 1, H = \pm 1. \end{cases} \quad (2.189)$$

Для состояний 3P_0 и 3P_1 мы имеем $|H| = 0$ и $|H| = 1$ [см. формулу (2.188)] и, следовательно, для них собственные значения S_{12} равны -4 и $+2$. Поскольку благодаря тензорному взаимодействию к состоянию 3P_2 примешивается состояние 3F_2 , диагональный эффект тензорных сил в этом канале должен быть промежуточным между его крайними значениями, характеризующими каналы 3P_0 и 3P_1 . Но относительная величина фаз, наблюдающихся при высоких энергиях (фиг. 2.34), лежит в интервале $\delta({}^3P_2) > \delta({}^3P_0) > \delta({}^3P_1)$, а это не согласуется с предположением о том, что взаимодействие содержит только центральные и тензорные силы.

Среднее значение спин-орбитального взаимодействия пропорционально $2 \langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \rangle = J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)$. Если бы это взаимодействие было единственным, зависящим от спина, то величина фазы 3P_1 была бы промежуточной между фазами 3P_0 и 3P_2 . Следовательно, для интерпретации экспериментальных значений фаз 3P требуется вводить как тензорные, так и спин-орбитальные силы.

Нетрудно видеть, что знак спин-орбитального взаимодействия должен соответствовать притяжению в состоянии с параллельными направлениями спина и орбитального момента (состояние 3P_2). Спин-орбитальное взаимодействие между нуклонами дает существенный вклад в спин-орбитальную компоненту среднего ядерного потенциала (см. § 5, п. 2). Чтобы получились правильные значения фаз 3P , знак тензорного взаимодействия должен соответствовать отталкиванию в состоянии 3P_1 ($|H| = 1$) и притяжению в состоянии 3P_0 ($H = 0$). Из того что квадрупольный момент дейтрана положителен, следует, что его преимущественное значение спиральности $|H| = 1$. Следовательно, в четных состояниях при $|H| = 1$ тензорное взаимодействие носит характер притяжения, а при $H = 0$ — характер отталкивания. Таким образом, общий знак тензорного взаимодействия противоположен для четных и нечетных состояний [как и в одномезонном обменном потенциале (2.190)].

Однопаронный обменный потенциал

Структура межнуклонных сил тесно связана со свойствами всего семейства сильно взаимодействующих частиц. Пока что не удалось определить ни силы, действующие между этими частицами, ни их

массы, исходя из простых предположений об исходной структуре сильных взаимодействий. Но можно установить определенные соотношения между характером взаимодействий и массами для разных сильно взаимодействующих частиц. Особую важность имеет установление такой связи между межнуклонными силами на больших расстояниях и пцион-пуклонным взаимодействием.

Взаимодействие на больших расстояниях (периферическое взаимодействие) можно рассматривать как обмен мезонами, точно так же как электромагнитное взаимодействие можно представлять себе как обмен фотонами. Особая роль π -мезона в таком обмене обусловлена его малой массой (по сравнению с массами других сильно взаимодействующих частиц). Нетрудно сообразить, что у взаимодействия, связанного с обменом частицей массы m , радиус действия должен быть порядка комптоновской длины волны $\lambda_c = \hbar/mc$. В самом деле, энергия промежуточных состояний, связанных с таким обменом, равна по крайней мере mc^2 , так что длительность их существования порядка \hbar/mc^2 . За это время испущенная частица не может пройти расстояние, большее \hbar/mc , так что взаимодействие должно сильно спадать на расстояниях, больших λ_c . Если взять случай одновременного обмена n частицами, то соответствующие энергии промежуточных состояний будут равны nmc^2 , а радиус соответствующего взаимодействия будет равен λ_c/n . Таким образом, на самых больших расстояниях взаимодействие должно соответствовать обмену единичными π -мезонами.

Асимптотический вид потенциала, обусловленного однопионным обменом, однозначно определяется массой и свойствами симметрии π -мезона ($I_\pi = 0 -$, $T = 1$):

$$V = \frac{1}{3} \frac{f^2}{\hbar c} m_\pi c^2 (\tau_1 \cdot \tau_2) \left[(\sigma_1 \cdot \sigma_2) + \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{(\mu r)^2} \right) S_{12} \right] \frac{\exp \{-\mu r\}}{\mu r}, \quad (2.190)$$

$$\mu = \frac{m_\pi c}{\hbar} = 0,70 \text{ ферми}^{-1}, \quad \frac{f^2}{\hbar c} = 0,081 \pm 0,002.$$

Величина потенциала определяется константой связи для процесса $N \rightarrow N + \pi$. Приведенное выше значение f было получено путем анализа рассеяния π -мезонов на нуклонах (табл. 1.1).

Константа связи π -мезона с нуклоном представляет собой приведенную ширину процесса $N \rightarrow N + \pi$ и, следовательно, служит мерой силового воздействия мезонного поля, окружающего нуклон. Это псевдоскалярное поле, так как $I_\pi = 0 -$, и изовекторное, так как $T = 1$. Оно удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 - \mu^2) \Phi(r) = -4\pi\rho(r), \quad (2.191)$$

где поле Φ и плотность нуклонного источника ρ — изобарические векторы. Предполагается, что нуклон, который создает поле, неподвижен и находится в начале координат (мы пользуемся здесь тем, что масса m_π мала по сравнению с массой нуклона).

Вне области источника поле имеет вид

$$\Phi(r) = \frac{f}{\mu} \cdot \tau (\sigma \cdot \nabla) \frac{1}{r} \exp \{-\mu r\}. \quad (2.192)$$

В самом деле, единственный изовектор, который можно построить из переменных нуклона,— это его изосиния τ , а единственный псевдоскаляр — произведение спина ядра σ на радиус-вектор r . Радиальная зависимость в уравнении (2.192) определяется тем требованием, что потенциал Φ должен удовлетворять свободному уравнению поля (и убывать на больших расстояниях). Константу связи f на основании уравнения (2.192) можно интерпретировать как массу силы нуклона-источника. В уравнение (2.192) введен также множитель $1/\mu$, чтобы величина f имела размерность электрического заряда.

Если не считать изосиневой зависимости и множителя $\exp\{-\mu r\}$, то в остальном уравнение (2.192) имеет тот же вид, что и магнитный потенциал, окружающий диполь. Поэтому взаимодействие двух нуклонов, находящихся на столь большом расстоянии друг от друга, что перекрытием плотностей их источников можно пренебречь, подобно взаимодействию двух точечных диполей:

$$V = -\frac{f^2}{\mu^2} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_2) \frac{1}{r_{12}} \exp\{-\mu r_{12}\}. \quad (2.193)$$

Здесь ∇_1 и ∇_2 — операторы дифференцирования по координатам \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Знак потенциала (2.193) противоположен знаку магнитного потенциала взаимодействия между диполями. Это — следствие (псевдо)скалярного характера мезонного поля, в отличие от векторного характера электромагнитного поля.

Если в выражении (2.193) выполнить операции дифференцирования, то мы получим потенциал (2.190). [Отметим, что выражение (2.193) содержит еще и контактный член, пропорциональный $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, но последним можно пренебречь, поскольку мы рассматриваем вид взаимодействия только на больших расстояниях.]

Поскольку уравнение (2.190) годится только для описания периферического взаимодействия, любая его проверка зависит от возможности отделения малых эффектов далеких столкновений от более сильного рассеяния, обусловленного потенциалом на близких расстояниях. Для такого разделения обычно пользуются тем, что относительное движение двух нуклонов с угловым моментом L соответствует классическому столкновению при прицельном расстоянии

$$b = \frac{L}{k} \approx 9,2L \left(\frac{E_{\text{даб}}}{M_{\text{эв}}} \right)^{-1/2} \text{ ферми.} \quad (2.194)$$

Поэтому если при данном E взять L достаточно большим, то можно быть уверенным, что бомбардирующая частица прошла на достаточно большом расстоянии от нуклона-мишени, так что происходило только периферическое взаимодействие частиц.

Эту идею пытались осуществить разными способами {обзор попыток проверки уравнения (2.190) в различных явлениях при малых энергиях дается в работе [421]}. Пожалуй, самый прямой способ проверки пионного обменного потенциала — фазовый анализ, при котором фазы с большими L вычисляются из уравнения (2.190), тогда как более низкие фазы считаются феноменологическими параметрами, как и при обычном фазовом описании [110]. Установлено, что таким путем можно правильно объяснить экспериментальные данные с меньшим числом параметров. Зная те пределы L , в которых еще можно пользоваться потенциалом (2.190), можно [см. формулу (2.194)] сделать вывод, что взаимодействие (2.190) доминирует

при $r \gtrsim 3$ ферми (см. также фиг. 2.35, где однопионный обменный потенциал сравнивается с феноменологическими потенциалами). При таком модифицированном фазовом анализе можно также варьировать мезон-нуклонную константу связи f , с тем чтобы найти такое ее значение, которое наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными о рассеянии. Такой анализ (фиг. 2.34) дает $f^2/\hbar c = 0,074 \pm 0,010$, что хорошо согласуется с более точными значениями (2.190), полученными из пион-нуклонного рассеяния.

Поскольку пион-нуклонная константа связи сравнительно мала, взаимодействие (2.190) довольно слабое и в большинстве ядерных явлений оно маскируется другими эффектами взаимодействия, связанными с обменом двумя или несколькими π-мезонами, а также с виртуальным рождением других мезонных и барионных состояний. Установлено, что во многих таких процессах константы связи велики. Анализ подобных эффектов оказывается сложной задачей как вследствие того, что взаимодействие велико на малых расстояниях, так и вследствие того, что приходится рассматривать много степеней свободы (см., например, фиг. 2.35, а также обзорную работу [174]).

Учитывая то обстоятельство, что в межнуклонном взаимодействии важную роль играют процессы более высокого порядка, а также то, что длина волны λ_c сравнима со средним расстоянием между частицами в ядре, нужно быть осторожным при использовании потенциалов типа изображенных на фиг. 2.35 для описания взаимодействий в ядрах. Возможно, что трехчастичные силы и другие эффекты более высоких порядков вносят вклад, которым нельзя пренебречь. Пока что эти эффекты не были однозначно установлены, но этот вопрос требует дальнейших исследований.

2. Связь ядерного потенциала со свойствами межнуклонного взаимодействия

Насыщение ядерных сил и равновесная плотность

Важнейшая особенность всех ядер — приблизительно постоянная плотность ядерной материи в их внутренних областях. Равновесная плотность определяется равновесием между силами притяжения, которые удерживают систему, и внутренним давлением, которое препятствует дальнейшему уменьшению объема. Один из источников внутреннего давления — кинетическая энергия. В силу принципа Паули кинетическая энергия, приходящаяся на одну частицу, пропорциональна $r^{2/3}$ [см. формулу (2.7)]. Но такая зависимость кинетической энергии от плотности не может скомпенсировать эффекта сжатия, обусловленного чистым взаимным притяжением нуклонов, поскольку в этом случае потенциальная энергия,

приходящаяся на одну частицу, линейно возрастает с r . Таким образом, в случае чистого притяжения система коллапсировала бы в состояние с размерами порядка радиуса взаимодействия.

Мы видим, что насыщение ядерной материи следует объяснить наличием в межнуклонном взаимодействии значительного взаимного отталкивания. Поискам этого отталкивания уделялось много внимания со времени первых дискуссий о структуре ядра. Одно время насыщение пытались объяснить обменным характером сил¹⁾. В самом деле, в среднем силы, действующие в состояниях с отрицательной четностью, существенно слабее сил в состояниях с положительной четностью. Если усреднить взаимодействие с учетом статистического веса различных состояний, то получим, что среднее значение потенциала в нечетных состояниях

$$\langle V_{\text{неч}} \rangle = \frac{1}{10} (V_{\text{неч}} + 9^3 V_{\text{неч}}), \quad (2.195)$$

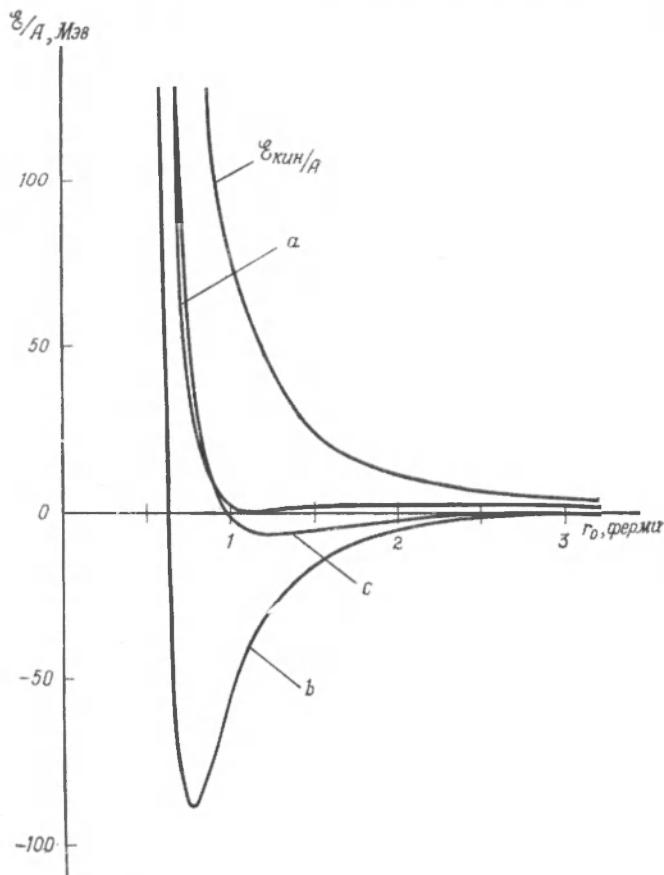
оказывается приблизительно равным нулю (фиг. 2.35). Но для предотвращения коллапса ядерные силы должны содержать элемент сильного отталкивания, и в настоящее время представляется, что им является «твёрдая сердцевина», обнаруженная по сдвигам фаз S -волны при большой энергии (см. выше).

Некоторые свойства системы, насыщающейся благодаря наличию отталкивания на малых расстояниях, можно увидеть из анализа упрощенной схематической модели [203]. Рассмотрим сначала ферми-газ твердых шаров, т. е. систему, взаимодействие между частицами которой сводится к бесконечно большому отталкиванию, препятствующему сближению частиц на расстояние, меньшее c . Свойства такой системы зависят от соотношения между c и параметром плотности r_0 [$R = r_0 A^{1/3}$; из соотношения (2.7) мы получаем $r_0 = 1,52 k_F^{-1}$]. При $c \ll r_0$ система по своим свойствам приближается к газу невзаимодействующих частиц, тогда как при $c \approx 2r_0$ структура системы соответствует плотной упаковке твердых шаров [плотной упаковке с постоянной решеткой c соответствует значение $c = (32\pi^2/9)^{1/3} r_0 \approx 1,81 r_0$]. Для реального взаимодействия мы имеем $c \approx 0,5$ ферми и $r_0 \approx 1,1$ ферми. Поэтому ядерная материя по своей структуре гораздо ближе к идеальному газу, чем к кристаллическому состоянию из плотно упакованных шаров. Энергию разреженного газа, состоящего из твердых шаров, можно разложить в ряд по степеням c/r_0 . Были проведены оценки первых нескольких членов этого ряда, и на фиг. 2.33 представлен соответствующий график этой энергии. (Подробнее см. мелкий шрифт ниже.)

Притяжение в межнуклонном взаимодействии имеет больший радиус действия и значительно слабее отталкивания. Поэтому качественную энергию связи можно оценить в рамках первого прибли-

¹⁾ Обзор ранних работ по проблеме насыщения можно найти в книгах [376, 42].

жения теории возмущений, взяв в качестве базиса невозмущенные волновые функции частиц. Если мы сначала пренебрежем эффектом



Фиг. 2.33. Энергия ферми-газа.

Кривая $\mathcal{E}_{\text{кин}}$ — энергия газа твердых шаров, вычисленная по формуле (2.198); кривая a — полная энергия ядра с учетом вклада (2.199) от притяжения, выбранного так, что минимум соответствует нулевой энергии связи (при этом $V_0 = 15$ МэВ, $c = 0,5$ ферми, $b = 1,7$ ферми); кривая b — то же, что и кривая a , но при $V_0 = 25$ МэВ. При построении кривой с притяжением учитывалось по формуле (2.200), а параметры потенциала типа прямоугольной ямы были такими: $V_0 = 34$ МэВ, $c = 0,5$ ферми, $b = 1,7$ ферми.

обменных сил и двухчастичными корреляциями, обусловленными антисимметризацией, то энергия связи, приходящаяся на одну частицу, оказывается просто пропорциональной плотности и поэтому меняется как r_0^{-3} . Добавив к потенциальной энергии кинетическую, вычисленную с учетом эффектов твердой сердцевины, мы

получим полную энергию, которая также представлена на фиг. 2.33. Из графика яствует, что для образования связанной системы потенциал притяжения должен превышать некоторую минимальную величину. Соответственно у равновесного значения r_0 имеется верхняя граница $(r_0)_{\max}$. Из соображений размерности следует, что величина $(r_0)_{\max}$ составляет несколько единиц c .

Величину $(r_0)_{\max}$ можно определить, взяв для кинетической энергии $\mathcal{E}_{\text{кин}}$ ферми-газа твердых шаров (см. мелкий шрифт ниже) приближенное выражение

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{A} \approx \frac{3}{5} \varepsilon_F \left(1 - 0,8 \frac{c}{r_0}\right)^{-2}. \quad (2.196)$$

Величина $(r_0)_{\max}$ определяется из соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{кин}} + \mathcal{E}_{\text{пот}} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r_0} (\mathcal{E}_{\text{кин}} + \mathcal{E}_{\text{пот}}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Поскольку величина $\mathcal{E}_{\text{пот}}$ пропорциональна r_0^{-3} , мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} \frac{\partial}{\partial r_0} \mathcal{E}_{\text{кин}} &= -3, \\ (r_0)_{\max} &\approx 2,4 \text{ } c. \end{aligned} \quad (2.198)$$

Радиус твердой сердцевины $c = 0,5$ ферми [см. формулу (2.225)], откуда следует, что $(r_0)_{\max} = 1,2$ ферми и $\mathcal{E}_{\text{кин}}$ примерно в 2 раза превышает кинетическую энергию газа невзаимодействующих ферми-частиц.

Потенциальную энергию $\mathcal{E}_{\text{пот}}$ можно связать с параметрами притяжения в межатомном взаимодействии. Для иллюстрации этой связи возьмем простой центральный потенциал прямоугольной формы (типа изображенного на фиг. 2.32) и предположим, что взаимодействие в состояниях с $T = 0$ и $T = 1$ одинаково. Тогда в рассматриваемом приближении для потенциальной энергии, приходящейся на одну частицу, будем иметь

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{пот}}}{A} = -\frac{1}{2} V_0 \frac{(b+c)^3 - c^3}{r_0^3}. \quad (2.199)$$

Если принять $c = 0,5$ ферми и $b = 1,7$ ферми, что соответствует экспериментальному значению эффективного радиуса для синглетного рассеяния при малых энергиях, то минимальное значение V_0 , необходимое для получения связанного состояния, таково: $(V_0)_{\min} \approx \approx 15 \text{ } M\text{эв}$. Полная энергия в этом случае изображается кривой a на фиг. 2.33.

Из данных о рассеянии при малых энергиях следует, что потенциал притяжения $V_0 = 34 \text{ } M\text{эв}$. Энергетическая функция, соответствующая потенциальной энергии (2.199) со значением $V_0 =$

$-^{3/4} \cdot 34$ Мэв, представлена на фиг. 2.33 кривой *b*. Множитель $^{3/4}$ учитывает уменьшение плотности на очень малых относительных расстояниях между частицами, обусловленное антисимметрией волновой функции [см. формулу (2.36)]. Увеличение V_0 на 70% по сравнению со случаем *a* приводит к увеличению плотности примерно в 2 раза и к очень большой энергии связи. Но при построении кривой *b* мы завысили потенциал притяжения, поскольку предполагали, что притяжение одинаково велико в нечетных и четных состояниях. Результат расчета, основанного на предположении, что притяжение носит серберовский обменный характер и поэтому проявляется только в пространственно-четных состояниях, дается кривой *c*. Учитывая корреляции, обусловленные антисимметрией волновой функции, мы в этом случае получим [см. формулу (2.41)]

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{пот}}}{A} = \frac{3}{16} \left\{ -V_0 \frac{(b+c)^3 - c^3}{r_0^3} + \rho \int V(r) C^2(r) d^3r \right\}, \quad (2.200)$$

где ρ — средняя плотность ($\rho \Omega = A$), а $C(r)$ — функция, даваемая выражением (2.37). Как видно из хода кривой *c*, равновесная плотность в таком приближении ($r_0 = 1,2$ ферми, $\rho = 0,14$ ферми $^{-3}$) немного меньше экспериментального значения $\rho = 0,17$ ферми $^{-3}$, приведенного в формуле (2.1), а энергия связи, равная 7 Мэв/нуклон, составляет примерно только половину экспериментального значения b_{00} [см. формулу (2.14)]. Поскольку энергия связи представляет собой малую разность значительно больших кинетической энергии (2.196) и вклада, обусловленного притяжением (2.200), это расхождение соответствует занижению вклада притяжения в полную энергию только на 15%.

Говоря о равновесной ядерной плотности и о проблеме насыщения, мы не учитывали наличия довольно сильных тензорных сил в межнуклонном взаимодействии (фиг. 2.35). Для некорректированного ферми-газа среднее значение тензорного взаимодействия из-за «спинового насыщения» системы ($S = 0$) равно нулю. Во втором порядке теории возмущений тензорные силы дают отличный от нуля вклад в притяжение. Но роль этого вклада уменьшается с ростом плотности, поскольку из принципа Паули следует, что энергии промежуточных состояний, фигурирующие при вычислениях во втором порядке теории возмущений, должны возрастать с увеличением k_F . Равновесная плотность ядер определяется совместным действием твердой отталкивателей сердцевины и тензорных сил [36].

Поскольку полная энергия связи ядер мала по сравнению с $\varepsilon_F A$, плотность должна быть намного меньше критической, соответствующей плотной упаковке нуклонов. Присыпая каждому нуклону радиус твердой сердцевины, равный $c/2$, мы тем самым гарантируем, что ни одна пара нуклонов не может сблизиться на расстояние, меньшее c . Поэтому доля полного объема ядра, занимаемая твердыми

сердцевинами, равна

$$\frac{\Omega_{\text{сердц}}}{\Omega_{\text{поли}}} = \left(\frac{c}{2r_0} \right)^3 \approx 10^{-2}, \quad (2.201)$$

В таких условиях акты очень сильного взаимодействия, вызываемого сингулярной силой, оказываются очень редкими и в первом приближении систему можно описывать в рамках модели независимых частиц. Столкновения твердых сердцевин вносят важный вклад в полную энергию системы и, таким образом, ответственны за насыщение. Но эта энергия обусловлена действием небольшого числа частиц [$\sim (c/r_0)^3$] с энергией порядка нескольких сотен мегаэлектронвольт ($\sim \hbar^2/Mc^2$).

Если бы притяжение в ядрах было сильнее наблюдающегося на самом деле, то плотность увеличилась бы и при известных обстоятельствах мы приблизились бы к пределу плотной упаковки. Характеристический параметр притяжения — его величина, измеренная в единицах \hbar^2/Mc^2 (мы предполагаем, что радиус притяжения сравним с c). Примерами систем, где данный параметр велик, могут служить совокупности атомов, образующих кристаллическую или твердую молекулярную структуру (фиг. 2.36). Сущность перехода от движения независимых частиц к кристаллическому состоянию и соответствующее значение характеристического параметра — это очень важные, но еще не решенные проблемы. Пример жидкого ^{3}He говорит о том, что модель независимых частиц может оказаться пригодной даже при значениях c/r_0 , существенно превышающих значение, с которым мы сталкиваемся при изучении ядер [450].

Все сказанное выше основывалось на крайне схематическом представлении о силах. В частности, мы совершенно не учитывали очень большие силы притяжения, действующие на расстояниях, несколько превышающих радиус твердой сердцевины (фиг. 2.35). Но качественно насыщение и применимость модели независимых частиц можно объяснить и в случае более сложного взаимодействия, коль скоро его можно разделить на две части: очень сильное на расстояниях $r \ll 1$ ферми и гораздо более слабое и плавно меняющееся на больших расстояниях. Для взаимодействия на малых расстояниях можно взять разложение, аналогичное тому, которым мы пользовались для газа твердых шаров. Параметром малости в таком разложении служит отношение радиуса взаимодействия к характерному расстоянию между нуклонами. Дальнодействующие компоненты взаимодействия малы по сравнению с энергией Ферми (фиг. 2.35), а поэтому их тоже можно рассчитывать методами теории возмущений.

Детали схематической модели

Газ из твердых шаров. Если радиус твердой сердцевины достаточно мал, то эффекты, связанные с ней, можно исследовать на основе подходящего разложения теории возмущений, взяв в качестве отправной точки ферми-газ без взаимо-

действия. Очень просто получить первый член этого разложения, если ввести псевдопотенциал

$$V_{\text{сердц}}^{(1)} = 4\pi c \frac{\hbar^2}{M} \delta(\mathbf{r}), \quad (2.202)$$

который в борновском приближении в первом порядке по c дает ту же амплитуду рассеяния, что и взаимодействие, соответствующее твердой сердцевине (см., например, [42]). Среднее значение взаимодействия (2.202) между двумя нуклонами в ферми-газе имеет вид

$$\langle V_{\text{сердц}}^{(1)} \rangle = \frac{1}{\Omega} 4\pi c \frac{\hbar^2}{M} [1 - \delta(m_s(1), m_s(2)) \delta(m_t(1), m_t(2))], \quad (2.203)$$

где Ω — объем ядра. Последний член в выражении (2.203) появляется в силу принципа Паули, который запрещает двум нуклонам с одинаковыми проекциями спинов и изоспинов приближаться вплотную друг к другу. Усредняя (2.203) по всему ферми-газу, содержащему одинаковое число протонов и нейтронов, получаем

$$E_{\text{сердц}}^{(1)} = \frac{3}{4} 4\pi c \frac{\hbar^2}{M} \frac{A(A-1)}{2\Omega} = \frac{2}{\pi} A e_F c k_F. \quad (2.204)$$

Для вычисления членов более высокого порядка в разложении по степеням $k_F c$ требуется уточнить простой псевдопотенциал (2.202), соответствующий первому порядку, и вычислить эффекты более высокого порядка, обусловленные изменением волновой функции. В работах [242, 122] были вычислены несколько следующих членов¹⁾:

$$E_{\text{сердц}} = A e_F \left[\frac{2}{\pi} c k_F + \frac{12}{35\pi^2} (11 - 2 \ln 2) (c k_F)^2 + 0,78 (c k_F)^3 + \dots \right]. \quad (2.205)$$

Можно написать простое приближенное выражение, представляющее собой сумму невозмущенной кинетической энергии (2.10) и вклада, даваемого выражением (2.205):

$$\frac{E_{\text{кин}}}{A} \approx \frac{3}{5} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2M(r_0 - 0,8c)^2}. \quad (2.206)$$

Здесь r_0 — параметр радиуса в выражении для объема ядра. В интервале $k_F c < 0,8$ выражение (2.206) воспроизводит разложение (2.205) с точностью до нескольких процентов. Функция (2.206) представлена на фиг. 2.33.

Сжимаемость. Исходя из простой модели, в которой полная энергия ядра представляется в виде суммы энергии газа твердых шаров (2.206) и энергии (2.200) взаимного притяжения, можно также приближенно рассчитать сжимаемость ядер. Коэффициент сжимаемости определяется соотношением

$$b_{\text{сж}} = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{E}{A} \right) = \frac{1}{9} r_0^2 \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} \left(\frac{E}{A} \right) = \frac{1}{9} K, \quad (2.207)$$

где K — параметр, также часто встречающийся в литературе. Из фиг. 2.33 следует, что $b_{\text{сж}} = 13 \text{ Мэв}$. В настоящее время имеется очень мало прямых экспериментальных данных о сжимаемости ядер, но более точные теоретические расчеты дают примерно такие же значения этой величины (в работе [36] дается $b_{\text{сж}} \approx 15 \text{ Мэв}$)

¹⁾ Выписанные в (2.205) члены представляют собой вклад в энергию от парных столкновений, доминирующих в газе низкой плотности. Парные столкновения определяют и следующую поправку, которая имеет вид $A e_F = (32/9\pi^3) (4\pi - 3/\sqrt{3}) (c k_F)^4 \ln c k_F$ [508]. Для вычисления же членов порядка $(c k_F)^4$ (которое до сих пор не проведено) нужно учитывать тройные столкновения твердых шаров. — Прим. ред.

До сих пор мы пренебрегали эффектом кулоновского отталкивания, которое несколько увеличивает r_0 . Величину этого эффекта можно оценить по схеме:

$$\frac{\delta r_0}{r_0} \approx -\frac{r_0}{KA} \frac{\partial}{\partial r_0} \mathcal{E}_{\text{кул}}, \quad (2.208)$$

откуда, если предположить, что $b_{cjk} \approx 15 M_{\text{эв}}$, следует, что в тяжелых ядрах он порядка нескольких процентов. Противоположный и несколько больший эффект обусловлен наличием поверхностной энергии и связанного с нею давления, стремящегося сжать ядро.

Зависимость одночастичного потенциала от скорости. Выше мы говорили о связи характеристик межнуклонного взаимодействия с полной энергией связи и плотностью ядер. В рамках простой модели можно проиллюстрировать связь параметров взаимодействия и со свойствами среднего потенциала ядра. Рассмотрим его зависимость от скорости. Для состояний с k вблизи k_F это удобно сделать, вводя понятие эффективной массы M^* в соответствии с соотношением (см. § 1, п. 7)

$$\left(\frac{d\varepsilon(k)}{dk} \right)_{k=k_F} = \frac{\hbar^2}{M^*} k_F. \quad (2.209)$$

Как и ранее, когда мы вычисляли полную энергию ядер, сначала вычислим вклад в эффективную массу только от твердых сердцевин в виде разложения в ряд по степеням их радиуса c . Поскольку линейный член (2.203) не зависит от относительного импульса двух состояний, основной вклад в M^* будет порядка c^2 . Соответствующее разложение, полученное в работе [76], имеет вид

$$\left(\frac{M}{M^*} \right)_{\text{кин}} = 1 - 0,63 (k_F c)^2 + 0,16 (k_F c)^3 + \dots \approx 0,75 \quad \text{при } k_F c = 0,69. \quad (2.210)$$

То обстоятельство, что, согласно выражению (2.210), эффективная масса M^* больше M , говорит о том, что взаимодействие отталкивателей сердцевин вносит в энергию вклад, убывающий с увеличением скорости частиц. Это объясняется тем, что для частиц, находящихся в глубине сферы Ферми, корреляции, которые возникают, когда эти частицы проходят мимо твердых сердцевин других нуклонов, сопровождаются возбуждением более высоких импульсных компонент, чем для частиц вблизи поверхности Ферми.

Вклад в эффективную массу от притяжения серберовского вида можно оценить по формуле, аналогичной формуле (2.200). При значениях потенциала притяжения, соответствующих кривой c на фиг. 2.33, мы получим положительный вклад

$$\delta \left(\frac{M}{M^*} \right)_{\text{пот}} \approx 0,41. \quad (2.211)$$

Учитывая выражение (2.210), видим, что полная эффективная масса на поверхности Ферми на 15% меньше массы свободного нуклона.

Спиновая и изоспиновая зависимость среднего ядерного потенциала

Некоторые более тонкие особенности среднего ядерного потенциала можно непосредственно связать со спиновой и изоспиновой зависимостями межнуклонного взаимодействия.

Важный вклад в потенциал ядерной симметрии обусловлен обменным характером ядерных сил. Так, если предположить, что централь-

* ная часть взаимодействий носит серберовский обменный характер, то можно написать

$$V(1, 2) = \frac{1}{2}(1 + P^r) V(r_{12}) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{4} (1 + \tau_1 \tau_2) (1 + \sigma_1 \sigma_2) \right] V(r_{12}). \quad (2.212)$$

Усредняя по координатам частицы 2 и пренебрегая корреляциями между частицами, мы получим средний одночастичный потенциал

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \left[1 - \frac{4}{3A} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}) \right] V(\mathbf{r}), \\ V(\mathbf{r}_1) &= \frac{3}{8} \int \rho(\mathbf{r}_2) V(r_{12}) d\tau_2. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Здесь $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\tau$ — изоспиновый оператор частицы, а \mathbf{T} — полный изоспин остальных нуклонов.

Потенциал (2.213) того же вида, что и потенциал (2.29), а отношение его изоскалярной компоненты к изовекторной, равное $-4/3$, того же порядка, что и экспериментальное значение, равное примерно -2 , хотя и меньше его [см. формулы (2.28) и фиг. 2.29].

В формулах (2.213) отражается то обстоятельство, что межнуклонный потенциал, действующий только в четных состояниях относительного движения, в изоскалярных состояниях в 3 раза эффективнее, чем в изовекторных. Множитель 3 равен отношению статистических весов $2S+1$ в обоих случаях, ибо для состояния с $T=0$ и четными L мы имеем $S=1$, а для состояний с $T=1$ спин $S=0$. Кроме того, нужно учесть, что для частиц разного сорта (которым соответствует смесь состояний с $T=0$ и $T=1$ с одинаковыми амплитудами) такой потенциал в 2 раза сильнее, чем для частиц одного сорта, которым соответствует $T=1$. Потенциал (2.213), действующий на протоны, пропорционален $N + \frac{1}{2}Z$, тогда как потенциал, действующий на нейтроны, пропорционален $Z + \frac{1}{2}N$.

Преобладание взаимодействия в четных состояниях, характерное для серберовских сил, также свойственно короткодействующим потенциалам, поскольку они существуют главным образом в относительных S -состояниях. Так, например, расчеты основного вклада от потенциала с твердой сердцевиной [который находят как математическое ожидание δ -образного псевдопотенциала, см. формулу (2.202)] дают то же самое соотношение между изовекторной и изоскалярной компонентами, что и формулы (2.213). При таком взаимодействии, не содержащем обменных членов, изоспиновая зависимость среднего потенциала возникает исключительно благодаря корреляциям, связанным с принципом Паули. Эти корреляции уменьшают вероятность нахождения одинаковых частиц поблизости друг от друга (вдвое при $r_{12} \rightarrow 0$).

Существование довольно сильных спин-орбитальных сил в межнуклонном взаимодействии приводит к появлению в среднем одно-

частичном потенциале спин-орбитального члена. Исходя из выражения для двухчастичного спин-орбитального взаимодействия

$$V_{LS}(1, 2) = \frac{1}{\hbar} V_{LS}(r_{12}) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2), \quad (2.214)$$

нетрудно оценить средний потенциал, действующий на частицу 1, если усреднить по координатам частицы 2 и пренебречь корреляционными эффектами:

$$V_{ls}(1) = \frac{1}{\hbar} \int V_{LS}(r_{12}) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{s}_1 \rho(\mathbf{r}_2) d\tau_2. \quad (2.215)$$

Разложив функцию плотности в ряд вблизи точки ($\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$):

$$\rho(\mathbf{r}_2) = \rho(\mathbf{r}_1) + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\nabla \rho)_{\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1} + \dots \quad (2.216)$$

и предположив, что радиус взаимодействия мал по сравнению с толщиной поверхностного слоя, мы получим из выражения (2.215)

$$V_{ls}(1) = \kappa (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) \frac{1}{r_1} \frac{\partial \rho(r_1)}{\partial r_1}, \quad (2.217)$$

где

$$\kappa = -\frac{1}{3} \int V_{LS}(r) r^2 d^3r. \quad (2.218)$$

Поскольку радиус действия спин-орбитальных сил довольно мал, взаимодействие происходит главным образом в P -состоянии относительного движения. Поэтому потенциал V_{LS} в выражении (2.218) есть потенциал спин-орбитального взаимодействия в нечетном состоянии V_{LS} (нечетн.). Взяв потенциал, представленный на фиг. 2.35, мы из выражений (2.217) и (2.218) получим спин-орбитальное взаимодействие типа (2.144), причем коэффициент $V_{ls} \approx \approx 30 \text{ Мэв}$. Такое же по знаку и по порядку величины (но несколько меньшее) значение коэффициента следует и из опытов по рассеянию нуклонов на ядрах (см., например, табл. 2.2).

Оценка (2.217), конечно, очень грубая. При количественных вычислениях следует учесть эффекты антисимметрии. Они увеличивают взаимодействие в состоянии 3P для одинаковых частиц примерно в 2 раза, что в тяжелых ядрах приводит к увеличению среднего пейтронного спин-орбитального потенциала по сравнению с протонным. Следует учесть также, что сильные взаимодействия на малых расстояниях приводят к значительному изменению волновых функций на этих расстояниях, т. е. как раз там, где существенно спин-орбитальное взаимодействие [147]. В заключение отметим, что во втором и более высоких порядках в эффективный одночастичный спин-орбитальный потенциал вносят вклад также и тензорные силы (см. работу [425] и цитируемую в ней литературу).

Определение оптического потенциала при высоких энергиях по двухчастичной амплитуде рассеяния

Связь среднего потенциала и двухчастичного взаимодействия оказывается особенно простой в том случае, когда энергия налетающих частиц велика по сравнению с энергиями частиц в связанной системе. Если к тому же взаимодействие достаточно слабо и волновое число частицы, движущейся в среде, лишь немногого отличается от волнового числа падающей волны, то оптический потенциал можно рассчитать в импульсном приближении. Он определяется как аддитивный эффект столкновений налетающей частицы со всеми частицами среды, причем считается, что столкновения эти такие же, как между свободными частицами.

Распространение волны через однородную среду можно представить следующим образом. Рассмотрим рассеянную вперед волну $\rho f_L(0) dt$, бегущую от каждого элемента объема dt . Здесь ρ — плотность среды, а $f_L(0)$ — амплитуда рассеяния вперед для столкновений между свободными частицами в лабораторной системе координат. Амплитуда рассеяния вперед, обусловленная действием потенциала V , в объеме dt равна $-(2\pi\hbar^2)^{-1} MV dt$, а поэтому рассеяние, обусловленное средой, можно характеризовать потенциалом

$$V = -\frac{2\pi\hbar^2}{M} f_L(0) \rho. \quad (2.219)$$

Нетрудно видеть, что из последнего выражения следует хорошо известная формула для показателя преломления газа

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi\rho f_L(0)}{k^2}. \quad (2.220)$$

Здесь n — отношение волнового числа частицы в среде к волновому числу k падающей волны.

Появление мнимой части в потенциале (2.219) объясняется наличием определенного соотношения между величиной полного сечения двухчастичного рассеяния и средней длиной свободного пробега в среде. Оптическая теорема [см. формулу (2.90)] гласит, что существует связь между полным сечением и мнимой частью амплитуды рассеяния вперед. Поэтому для средней длины свободного пробега $\lambda = (\rho\sigma)^{-1}$ получаем выражение (2.138).

Простое соотношение (2.219) должно, по-видимому, приближенно выполняться в том случае, когда энергия нуклонов, взаимодействующих с ядрами, велика по сравнению с e_F . На фиг. 2.37 представлены кривые различных членов оптического потенциала, полученные на основании этого соотношения из экспериментальных значений фаз нуклон-нуклонного рассеяния.

Даже при энергиях налетающих нуклонов порядка 100 МэВ значительны поправки, связанные с тем, что скорость частиц, составляющих ядро, отлична от нуля. В частности, важную роль

играет принцип Паули, запрещающий столкновения с малыми передаваемыми импульсами, что ведет к уменьшению мнимой части потенциала. Поправку, учитывающую этот эффект, можно получить, рассматривая ядро-мишень на основе модели ферми-газа. Так, полное сечение, которым определяются λ и W , можно представить в виде интеграла по угловому распределению рассеяния налетающей частицы на каждом нуклоне ядра-мишени, входящем в распределение Ферми. Искомая поправка получается, если исключить из этого интеграла все вклады, соответствующие ситуации, при которой либо налетающая частица, либо нуклон отдачи после столкновения имеют волновые числа $k < k_F$. Чтобы грубо оценить величину данного эффекта, мы приведем выражение для эффективного сечения $\langle\sigma\rangle$, которое было получено в предположении о независимости элементарного двухнуклонного сечения от энергии и угла рассеяния [102]:

$$\langle\sigma\rangle = \begin{cases} \sigma_0 \left[1 - \frac{7}{5} \frac{\varepsilon_F}{E} + \frac{2}{5} \frac{\varepsilon_F}{E} \left(2 - \frac{E}{\varepsilon_F} \right)^{5/2} \right] & \text{при } E < 2\varepsilon_F, \\ \sigma_0 \left(1 - \frac{7}{5} \frac{\varepsilon_F}{E} \right) & \text{при } E > 2\varepsilon_F. \end{cases} \quad (2.221)$$

Подробно эта поправка рассматривается в работе [395].

Пределный случай оптического потенциала, соответствующий высоким энергиям налетающих частиц, позволяет проиллюстрировать некоторые предположения, на основе которых вводится простой локальный потенциал. Так, соотношение (2.219) применимо в том случае, когда плотность постоянна. Вариации плотности приводят к упругому рассеянию с конечным значением передаваемого импульса. При $\rho = \rho(r)$ потенциал (2.219) позволяет правильно рассчитывать рассеяние на большие углы только в том случае, если двухчастичная амплитуда рассеяния не зависит от угла. Зависимость амплитуды от передаваемого импульса $\hbar q$ можно учесть, заменив $f_L(0)$ в соотношении (2.219) на $f_L(q)$, если считать, что оно дает нам связь между фурье-компонентами плотности и потенциала. Нелокальная связь между $\rho(r)$ и $V(r)$ обусловлена конечным радиусом действия двухчастичных сил в тех областях, где плотность не постоянна. Отметим также, что, поскольку амплитуда рассеяния зависит от импульса налетающих частиц k , величина f_L в формуле (2.219) становится оператором, зависящим от импульса и действующим на волновую функцию, которая соответствует нелокальному, зависящему от скорости потенциальному [см. формулу (2.141)]. Такие обобщенные оптические потенциалы применялись при анализе взаимодействия π-мезонов с ядрами (см. § 4, п. 3).

3. Теория ядерной материи

Модель ферми-газа была развита далее так, чтобы в ней учитывались эффекты корреляций, обусловленных межнуклонными взаимодействиями, и это привело к созданию хорошо разработанной теории

ядерной материи. Благодаря простой геометрии такой бесконечной системы эта теория явилась важным пробным камнем и источником идей при разработке новых методов изучения количественных взаимосвязей между двухчастичными силами и свойствами ядер.

В наиболее ранних исследованиях такого рода [156] использовались пессингилярные потенциалы, а насыщение обеспечивалось выбором соответствующих обменных сил. Для таких потенциалов можно применить обычное разложение теории возмущений в ряд по степеням взаимодействия. При вычислении энергии основного состояния выяснилось, что такой ряд сходится довольно быстро. Обзор ранних исследований по теории ядерной материи можно найти в работах [71, 376].

Все возрастающее число данных, свидетельствующих о применимости к ядру модели независимых частиц, равно как и дальнейшие исследования двухнуклонного взаимодействия, привело к необходимости пересмотра теории. Главной проблемой стало развитие таких методов теории возмущений, которые были бы применимы к системам с взаимодействием, содержащим в себе сингулярную часть («твердую сердцевину»). Качественное физическое обоснование существования одночастичного движения при наличии такого взаимодействия было дано выше (п. 2). Для количественного же рассмотрения этого вопроса потребовался довольно сложный математический аппарат (см., например, работы [71, 72]). С аналогичными проблемами приходится сталкиваться при изучении других многочастичных систем, таких, как электронный газ, системы со сверхтекучестью и взаимодействующие квантовые поля. Поэтому происходил плодотворный взаимный обмен достижениями в этих разных областях. Изложение методов многочастичной теории можно найти в работах [427, 342].

Пока что основным приложением теории ядерной материи был расчет энергии связи и равновесной плотности ядер. Но до сих пор остается значительная неопределенность, связанная, с одной стороны, с неточностью определения указанных величин по экспериментальным данным о тяжелых ядрах и, с другой стороны, с неточностью данных о двухнуклонном взаимодействии, получаемых из опытов по рассеянию и необходимых для теоретических расчетов энергии связи и плотности [37]. Поэтому до сих пор не ясно, в какой мере остающиеся расхождения связаны с используемыми приближенными методами, с неопределенностью взаимодействия (с учетом роли трех- и четырехчастичных сил) и с экстраполяцией экспериментальных данных о ядрах на бесконечную ядерную материю.

В настоящее время прикладываются большие усилия как в направлении решения этих вопросов, так и в направлении дальнейшего развития теоретических методов с целью учета непостоянства плотности и конечных размеров ядра. Успехи в этом направлении будут, по-видимому, способствовать выяснению многих свойств ядер, таких.

как определение различных компонент ядерного оптического потенциала, эффективных взаимодействий в ядрах и структуры их поверхности. Но, поскольку развитие в данном направлении находится на начальной стадии, мы не будем последовательно излагать соответствующую теорию в нашей книге.

ПРИМЕРЫ К § 5

Фазовый анализ нуклон-нуклонного рассеяния (фиг. 2.34)

Амплитуда рассеяния двух частиц со спином $1/2$ зависит от энергии E и углов рассеяния θ, ϕ и дается матрицей размерности 4×4 из спиновых переменных. Поскольку при нуклон-нуклонном взаимодействии сохраняются полный спин системы S , четность λ и полный угловой момент J (см. гл. 1, § 4, п. 2), матрицу рассеяния удобно записать в представлении, характеризуемом этими квантовыми числами. Каналы с $S = 0$ [$J = L, \pi = (-1)^L$] и $S = 1$ [$J = L, \pi = (-1)^L$] не связаны между собой, и поэтому матрица рассеяния определяется единственным вещественным параметром, сдвигом фазы δ . Из-за существования центробежного барьера при малых энергиях ($ka \ll L^{1/2}$, где a — радиус взаимодействия) фазовые сдвиги $\delta(L)$ пропорциональны k^{2L+1} . В дальнейшем мы будем пренебречь неупругими реакциями, которые происходят при энергиях, превышающих порог мезонообразования ($E_{\text{пор}} \geq 280 \text{ MeV}$). В действительности сечения образования мезонов вблизи порога весьма малы, так что можно считать, что амплитуды упругого рассеяния остаются унитарными вплоть до энергий порядка 400 MeV в лабораторной системе координат (см., например, работы [215, 477]).

Каналы с $S = 1, L = J - 1$ и $S = 1, L = J + 1$ связываются между собой тензорным взаимодействием, и поэтому амплитуда рассеяния в этих каналах дается матрицей размерности 2×2 . Унитарная матрица размерности 2×2 зависит от трех независимых параметров. В анализе, результаты которого приведены на фиг. 2.34, это две вещественные фазы δ ($L = J - 1, J$), $\delta(L = J + 1, J)$ и вещественный параметр смешивания ε_J . Матрица рассеяния S выражается через эти параметры следующим образом:

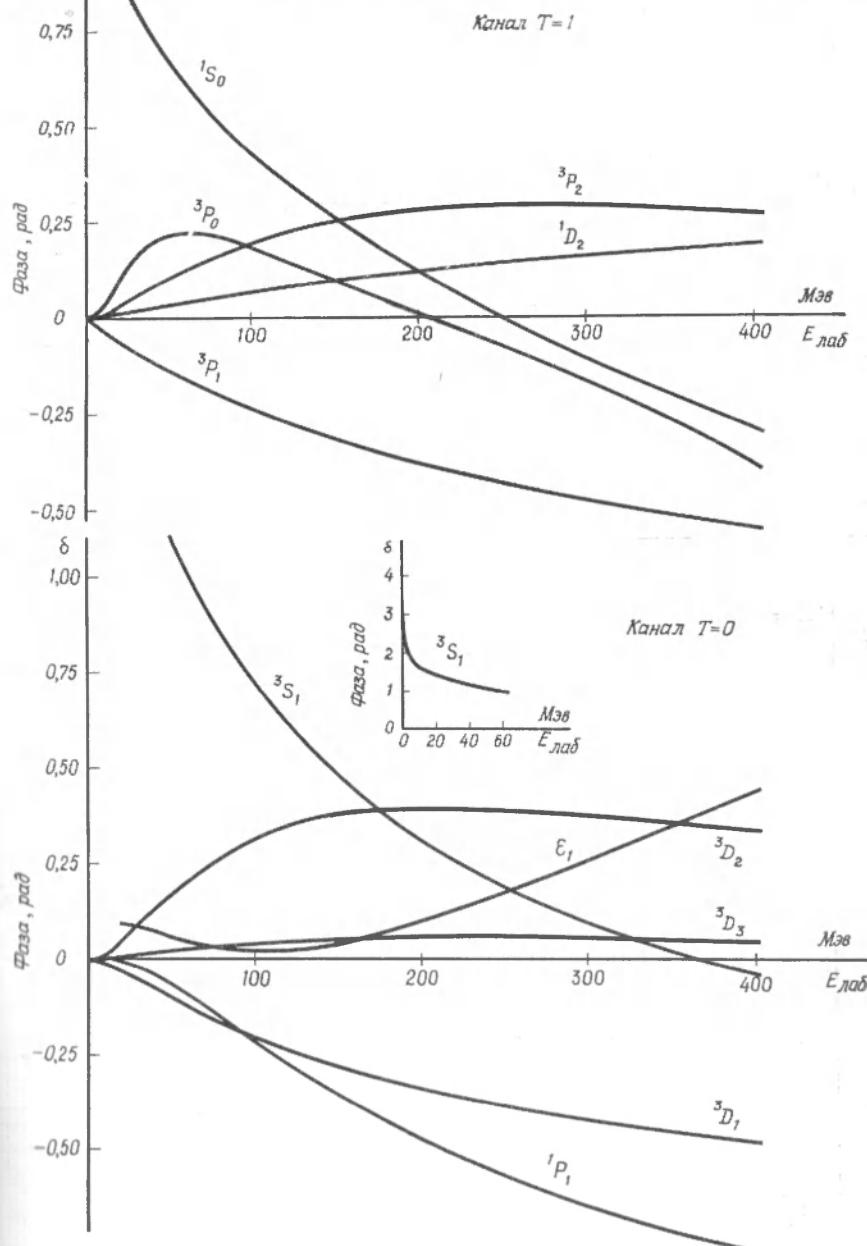
$$S^{(J)} = \begin{pmatrix} \exp \{i\delta(L = J - 1, J)\} & 0 \\ 0 & \exp \{i\delta(L = J + 1, J)\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\varepsilon_J & i \sin 2\varepsilon_J \\ i \sin 2\varepsilon_J & \cos 2\varepsilon_J \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \exp \{i\delta(L = J - 1, J)\} & 0 \\ 0 & \exp \{i\delta(L = J + 1, J)\} \end{pmatrix}. \quad (2.222)$$

Подобная параметризация была введена в работе [411]. При малых энергиях $\varepsilon_J \approx \text{const } k^{2J}$ и $\delta(L, J) \approx \text{const } k^{2L+1}$. В общем случае каждая из фаз δ ($L = J - 1, J$) и $\delta(L = J + 1, J)$ описывает рассеяние, при котором существенны оба значения $L = J \pm 1$, и только в пределе при $E \rightarrow 0$, когда $\varepsilon_J \rightarrow 0$, квантовое число L имеет простой смысл и характеризует волновую функцию рассеянной частицы.

Фазовые параметры, представленные на фиг. 2.34, получены в результате анализа большого количества различных экспериментальных данных при разных энергиях. Фазы разложены в ряд по функциям, обладающим предполагаемой энергетической зависимостью, которые выбираются так, чтобы при достаточно малых энергиях преобладал вклад одиопионного обменного потенциала (2.190) (за исключением каналов S и P). Затем коэффициенты зависящих от энергий

Фиг. 2.34. Фазы нуклон-нуклонного рассеяния в каналах с $L \leq 2$.

Поведение фаз при низких энергиях определяется параметрами приближения эффективного радиуса [формула (2.183)]. Данные при $E > 24$ МэВ взяты из работы [13]; аналогичный анализ проведен в работах [65, 245, 304]. Фазы определяются через матрицу рассеяния по формуле (2.222).



функций варьируют так, чтобы получить согласие с экспериментальными данными. При анализе было взято 58 подгоночных параметров, выбранных на основе 704 различных экспериментальных результатов. Фазы удовлетворяют экспериментальным данным с суммарной квадратичной ошибкой $\chi^2 = 646$.

Представленные на фиг. 2.34 фазы описывают рассеяние под действием ядерных сил. Чтобы получить экспериментально наблюдаемую амплитуду рассеяния, к ним в случае pp -рассеяния следует добавить кулоновские фазы.

**Феноменологический нуклон-нуклонный потенциал
(фиг. 2.35, табл. 2.3 и 2.4)**

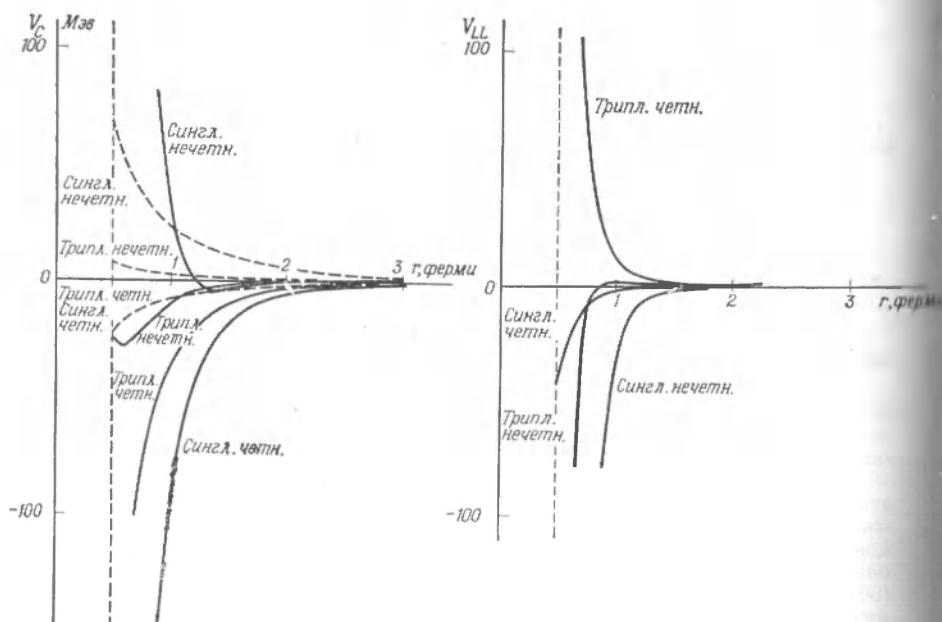
Нуклон-нуклонный потенциал можно параметризовать с помощью следующих функций (фиг. 2.35):

$$V = V_C(r) + V_T(r) S_{12} + V_{LS}(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + V_{LL}(r) L_{12},$$

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\sigma_1 \cdot \mathbf{r}) (\sigma_2 \cdot \mathbf{r}) - \sigma_1 \cdot \sigma_2, \quad (2.223)$$

$$L_{12} = (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \mathbf{L}^2 - \frac{1}{2} [(\sigma_1 \cdot \mathbf{L}) (\sigma_2 \cdot \mathbf{L}) + (\sigma_2 \cdot \mathbf{L}) (\sigma_1 \cdot \mathbf{L})] = (\delta_{LJ} + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \mathbf{L}^2 - (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})^2.$$

Таким образом, потенциал содержит центральные (V_C), тензорные (V_T) и спин-орбитальные (V_{LS}) компоненты, а также компоненты спин-орбитального взаимодействия во втором порядке (V_{LL}). Вид радиальной зависимости ограничен тем условием, что на больших расстояниях центральный и тензорный потенциалы должны описываться выражением (2.190), полученным в одномезонном



приближении. Радиальная зависимость различных компонент потенциала такова:

$$\begin{aligned} V_C &= v_0 (\tau_1 \cdot \tau_2) (\sigma_1 \cdot \sigma_2) Y(x) [1 + a_C Y(x) + b_C Y^2(x)], \\ V_T &= v_0 (\tau_1 \cdot \tau_2) (\sigma_1 \cdot \sigma_2) Z(x) [1 + a_T Y(x) + b_T Y^2(x)], \\ V_{LS} &= g_{LS} v_0 Y^2(x) [1 + b_{LS} Y(x)], \\ V_{LL} &= g_{LL} v_0 \frac{Z(x)}{x^2} [1 + a_{LL} Y(x) + b_{LL} Y^2(x)], \\ v_0 &= \frac{1}{3} \frac{f^2}{\hbar c} m_\pi c^2 = 3,65 \text{ } M_{\partial\partial}, \quad x = \frac{m_\pi c}{\hbar} r = \frac{r}{1,43 \text{ } \text{феми}}, \\ Y(x) &= \frac{1}{x} \exp \{-x\}, \quad Z(x) = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) Y(x). \end{aligned} \quad (2.224)$$

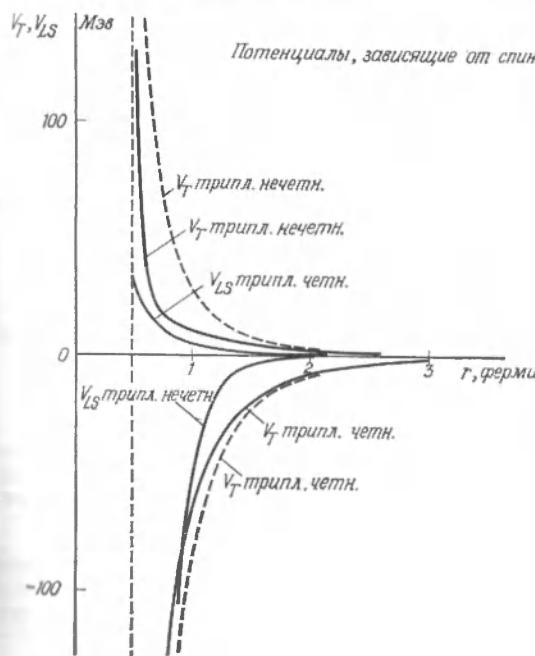
Предполагалось также, что на расстояниях, меньших

$$c = 0,49 \text{ } \text{феми} \quad (x_c = 0,343), \quad (2.225)$$

потенциал становится потенциалом сил отталкивания и возрастает до бесконечности.

В табл. 2.3 представлены результаты оптимальной подгонки 29 параметров в приведенных выше функциях. Получающиеся при этом потенциалы даны на фиг. 2.35. Величины различных компонент потенциала при радиусе, равном радиусу твердой сердцевины c , приведены в табл. 2.4.

Подчеркнем, что потенциал, представленный на фиг. 2.35, дает значительно худшее согласие с экспериментом, чем значения фаз, приведенные на



Фиг. 2.35. Феноменологические нуклон-нуклонные потенциалы [216].

Аналогичные потенциалы были получены в работе [279]. Пунктиром изображены однопарные обменные потенциалы (2.190) (потенциалы *OPEP*). Пример потенциалов с мягкой сердцевиной см. в работе [360]; нелокальные потенциалы см. в работе [420].

Таблица 2.3

ПАРАМЕТРЫ ПОТЕНЦИАЛА ХАМАДЫ — ДЖОНСОНА (ФИГ. 2.35)

Состояние	Синглетное четное	Триплетное	Синглетное нечетное	Триплетное
a_C	8,7	6,0	-8,0	-9,07
b_C	10,6	-1,0	12,0	3,48
a_T	-	-0,5	-	-1,29
b_T	-	0,2	-	0,55
g_{LS}	-	2,77	-	7,36
b_{LS}	-	-0,1	-	-7,1
g_{LL}	-0,033	0,10	-0,10	-0,033
a_{LL}	0,2	1,8	2,0	-7,3
b_{LL}	-0,2	-0,4	6,0	6,9

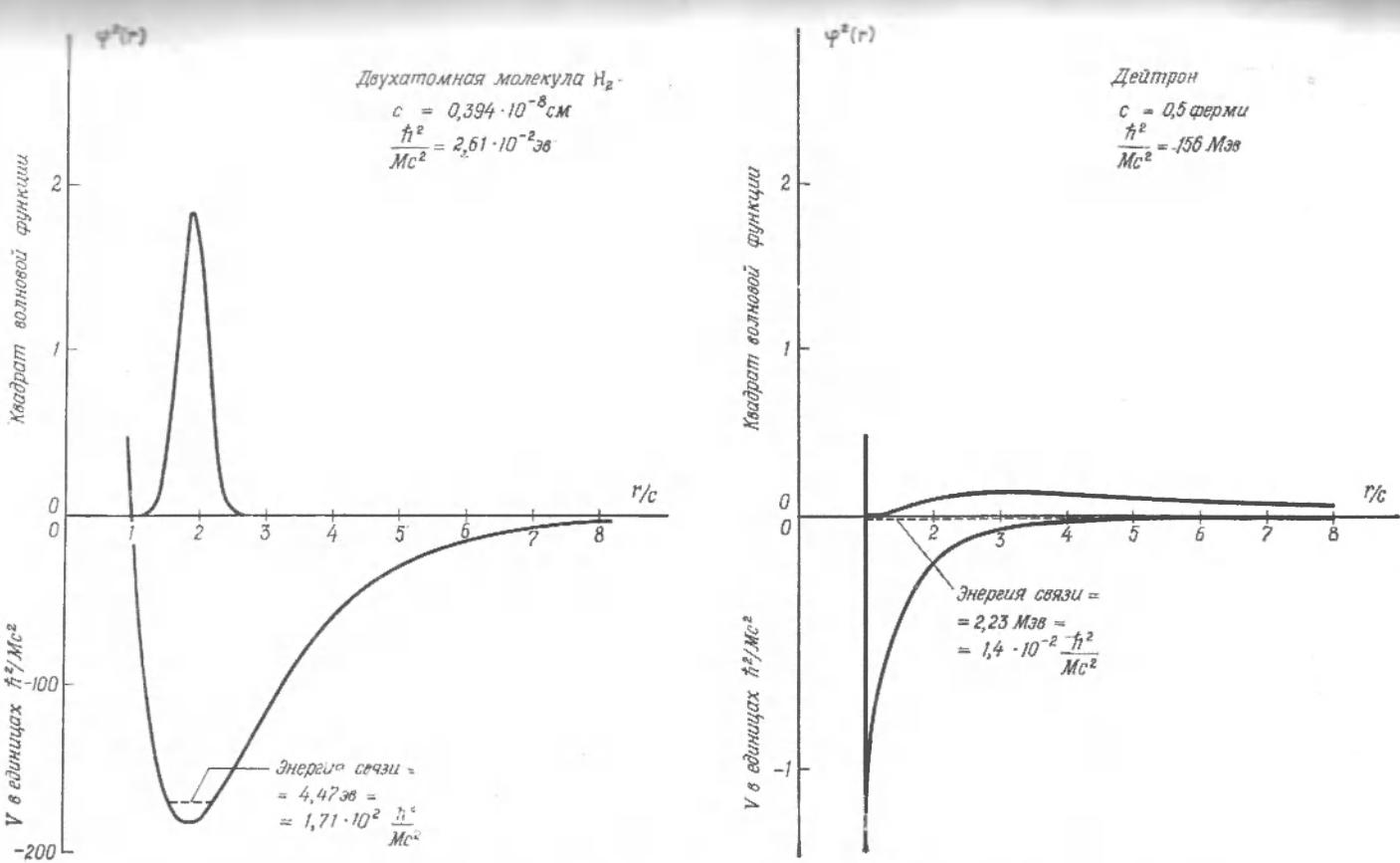
ЗНАЧЕНИЯ КОМПОНЕНТ ПОТЕНЦИАЛА ХАМАДЫ — ДЖОНСОНА
ПРИ $r = e = 0,49$ ферми (табл. 2.3)

Состояние	Компоненты потенциала, M_e^2			
	V_C	V_T	V_{LS}	V_{LL}
Синглетное четное	-1460	-	-	-42
Триплетное четное	-207	-612	-34	668
Синглетное нечетное	2371	-	-	-6683
Триплетное нечетное	-23	173	-1570	-1087

Фиг. 2.34. Поэтому остается некоторая неопределенность в выборе правильного вида межкучинного взаимодействия. Вопрос о том, в какой мере разные модели потенциала согласуются с опытом, рассматривается в работе [8]^{1).}На фиг. 2.35 представлена также компонента однопарного обменного потенциала (2.190). Мы видим, что на расстояниях $r \gtrsim 3$ ферми они составляют основную часть межкучинного взаимодействия.*Сравнение атомных и ядерных сил связи (фиг. 2.36)*

Двухчастичные ядерные силы интересно сравнить с силами, действующими в двухатомной молекуле H_2 (фиг. 2.36). При этом за единицу энергии удобно взять величину \hbar^2/Mc^2 , где c — протяженность части потенциала, соответствующей отталкиванию.

¹⁾ В последнее время полученный потенциал получают на основе полевой теории как результат обмена радиальными связями и легкими мезонами. Такой метод дает качественное описание природы ядерных сил и, кроме того, позволяет значительно уменьшить число вводимых параметров [509, 510]. — Прим. ред.



Фиг. 2.36. Атомные и ядерные силы связи.

Молекулярное взаимодействие соответствует «потенциалу Морза» $V(r) = D\{1 - \exp(-\gamma(r - re))^2 - 1\}$ с параметрами, выбранными по данным для конфигурации основного состояния ${}^1\Sigma_g^+$ молекулы H_2 ($re = 0,74 \cdot 10^{-8}$ см, $\gamma = 2,0 \cdot 10^8$ см $^{-1}$, $D = 4,74$ эв) [233]. Считается, что ядерное взаимодействие есть взаимодействие в триплетных четных состояниях, изображенное на фиг. 2.35; распределение плотности относится к S-компоненте волновой функции дейтрана и взято в простом виде, предложенном в работе [246].

Для молекул величина c порядка атомного радиуса $a \sim l^2/e^2 m$, где m — масса электрона; точнее же мы можем выбрать в качестве c то расстояние, на котором потенциал обращается в нуль. На фиг. 2.3б изображено также распределение плотности по радиусу, $\varphi^2 = [r_{\text{нк}}(r)]^2$, для нижних связанных состояний молекулы.

Химические силы, действующие между атомами, определяются электронной структурой, и межатомный потенциал по порядку величины равен

$$V_{\text{мол}} \sim \frac{e^2}{a} \sim \frac{\hbar^2}{ma^2}, \quad (2.226)$$

т. е. он порядка M/m по нашей шкале энергии. Вследствие того что связывающий потенциал так велик, волновая функция основного состояния имеет сильный максимум в области, соответствующей минимуму потенциала, а полная энергия связи велика по сравнению с кинетической энергией нулевых колебаний и система обладает вращательно-вibрационным спектром. При добавлении большего числа частиц мы получим плотно упакованную систему с плотностью порядка c^{-3} . При низких температурах такие системы обычно кристаллизуются. (Исключение — случай Не, где межатомные силы и плотность относительно малы. Свойства конденсированных систем как функции безразмерного параметра взаимодействия $M V c^2 \hbar^{-2}$ рассматриваются в работе [121].)

Ядерные силы — это сравнительно слабые силы. Потенциал притяжения вблизи сердцевины порядка единицы по нашей шкале энергии и недостаточен для образования связанного состояния. Связанное же состояние дейтрона обязано своим существованием действию «хвоста» потенциала. Взаимодействие здесь очень слабое (порядка 10^{-2} по нашей шкале). Такого слабого притяжения едва хватает для образования связанных систем из многих частиц, и их плотность оказывается порядка $10^{-2} c^{-3}$. Подобные системы хорошо описываются моделью независимых частиц.

Оценка оптического потенциала в импульсном приближении (фиг. 2.37)

При достаточно больших энергиях падающих частиц параметры оптического потенциала можно прямо связать с амплитудой нуклон-нуклонного рассеяния (см. выше). Учитывая спин и изоспин нуклонов, напишем выражение (2.219) для центрального потенциала в виде

$$V = -\frac{2\pi\hbar^2}{M} p(r) \left\{ \frac{1}{4} (J_1 + J_0) + \frac{1}{A} \mathbf{t} \cdot \mathbf{T} (J_1 - J_0) \right\}, \quad (2.227)$$

предположив, что отношение нейтронной плотности к протонной постоянно по всему объему ядра. Здесь $p(r)$ — полная нуклонная плотность, t и T — изоспины налетающего нуклона и ядра-мишени. Величины J_1 и J_0 — это амплитуды без переворота спина при нуклон-нуклонном рассеянии вперед в каналах с $T = 1$ и $T = 0$ (амплитуда без переворота спина получается вычислением следа от матрицы рассеяния по квантовым числам, которыми определяется поляризация спина). Эти амплитуды можно выразить через параметры (2.222) (фиг. 2.34):

$$f_T = \frac{1}{2ik} \sum_{L, J} (2J+1) \alpha(LJT), \quad (2.228)$$

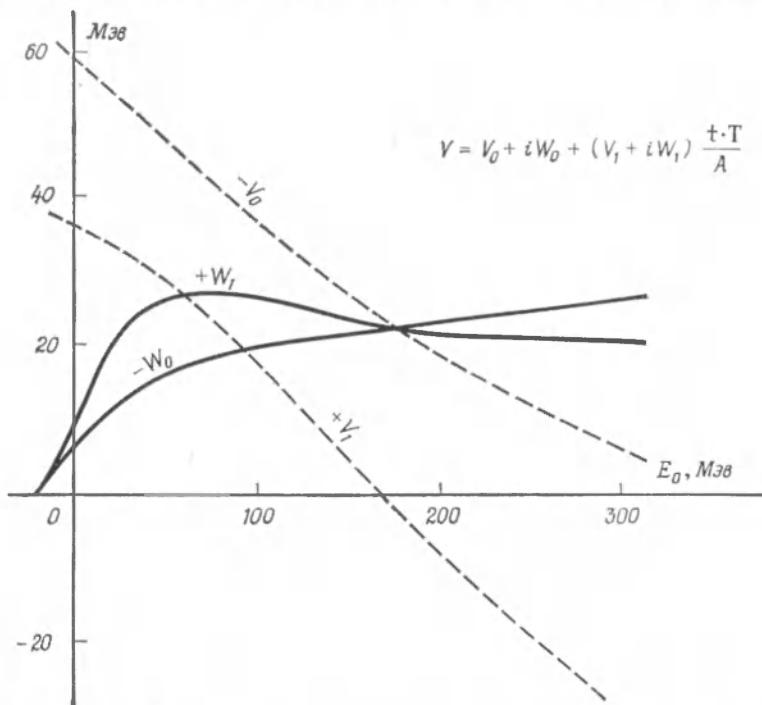
где для синглетных каналов

$$\alpha(LT) = \exp \{2i\delta(LT)\} - 1. \quad (2.229)$$

Такое же выражение справедливо и для параметра $\alpha(LLT)$, описывающего триплетные каналы с $L=J$. Для других триплетных каналов

$$\alpha(LJT) = \exp \{2i\delta(LJT)\} \cos 2\varepsilon_J - 1, \quad L=J \pm 1, \quad (2.230)$$

где ε_J — параметр, характеризующий связь двух каналов с одинаковыми значениями J [см. формулу (2.222)]. Следует отметить, что величина (2.228) представляет собой двухчастичную амплитуду рассеяния в лабораторной системе координат и поэтому в 2 раза больше величины, относящейся к системе центра масс [см., например, выражение (3.304)]. Величину (2.227) вычисляли, пользуясь экспериментально определенными значениями фаз, рассматриваемых



Фиг. 2.37. Компоненты ядерного потенциала, полученные в импульсном приближении [111].

Фазы, использованные авторами работы [111], взяты из работ [65, 245]. Они лишь незначительно отличаются от фаз, приведенных на фиг. 2.34.

как функции кинетической энергии нуклона T , когда он находится внутри ядра. Полученные в результате таких расчетов компоненты потенциала представлены на фиг. 2.37 как функции энергии падающих частиц $E_0 = T + V(T)$. Потенциалы, приведенные на фиг. 2.37, соответствуют плотности $\rho = 0,18$ нуклон/ферми³ (что соответствует $k_F = 1,38$ ферми⁻¹). Чтобы приближенно учесть эффекты, возникающие из-за принципа Паули и уменьшающие поглощение в ядре, мнимые части потенциала были взяты с множителем, приведенным в формуле (2.221).

Импульсное приближение должно быть применимым, по-видимому, только тогда, когда энергия падающих частиц велика по сравнению с энергией Ферми нуклонов ядра-мишени. Поэтому согласие между потенциалами, представленными на данном графике и полученными в результате феноменологического анализа (фиг. 2.29), можно считать очень хорошим. В работах [196, 261] проведен критический обзор сделанных приближений и приводятся оценки поправок более высокого порядка.

Можно расширить анализ с тем, чтобы включить в потенциал члены, связанные с конечными размерами ядра, если рассмотреть двухчастичную амплитуду рассеяния на углы, несколько отличные от нуля. Таким путем приближенно оценили величину спин-орбитального потенциала и разницу между радиальными размерами оптического потенциала и распределения плотности [261].

ПРИЛОЖЕНИЕ

1

АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ; ОПЕРАТОРЫ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ

1. Антисимметричные волновые функции

В случае таких систем, как ядро или электронный газ, к которым в первом приближении применима модель независимых частиц, волновую функцию можно представить в виде линейной комбинации функций вида

$$\Phi_{v_1 v_2 \dots v_A} (x_1 x_2 \dots x_A) = \varphi_{v_1}(x_1) \varphi_{v_2}(x_2) \dots \varphi_{v_A}(x_A). \quad (2.231)$$

Пользуясь обозначениями векторов состояний, можно записать то же самое в виде

$$\langle x_1 x_2 \dots x_A | v_1 v_2 \dots v_A \rangle = \langle x_1 | v_1 \rangle \langle x_2 | v_2 \rangle \dots \langle x_A | v_A \rangle. \quad (2.232)$$

Здесь квантовые числа v — полный набор индексов, характеризующих одночастичные уровни, например $v \equiv nljm\mu$. Координаты частиц, в том числе спиновые и изоспиновые переменные, обозначены индексом x .

Поскольку нуклоны относятся к фермионам, волновая функция должна быть антисимметричной относительно координат любой пары частиц. Отсюда следует, что компонента волновой функции (2.231) всегда встречается в определенной комбинации с другими компонентами, которые получаются при распределении A разных частиц по A одночастичным состояниям $v_1 v_2 \dots v_A$. Всего для каждой конфигурации $v_1 v_2 \dots v_A$ имеется $A!$ таких компонент, и их антисимметризованную комбинацию можно представить в виде определителя Слэтера:

$$\begin{aligned} \Phi_{v_1 v_2 \dots v_A} (x_1 x_2 \dots x_A)_a &= \langle x_1 x_2 \dots x_A | v_1 v_2 \dots v_A \rangle_a = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_{v_1}(x_1) & \varphi_{v_2}(x_1) & \dots & \varphi_{v_A}(x_1) \\ \varphi_{v_1}(x_2) & \varphi_{v_2}(x_2) & \dots & \varphi_{v_A}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{v_1}(x_A) & \varphi_{v_2}(x_A) & \dots & \varphi_{v_A}(x_A) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.233)$$

Из сказанного следует, что такие определители должны быть основными элементами в любой теории многочастичной системы фермионов, основанной на предположении о независимом движении частиц.

Антисимметричная волновая функция (2.233) полностью определяется только перечислением заполненных состояний $v_1 v_2 \dots v_A$ независимо от того, как частицы по ним распределены. Поэтому набор антисимметризованных состояний $|v_1 v_2 \dots v_A\rangle_a$ можно назвать представлением чисел заполнения. Из антисимметрии относительно координат частиц следует, что каждое подобное

состояние антисимметрично также относительно любых двух занятых одночастичных состояний. Их перестановка приводит к транспозиции столбцов в определителе, и поэтому волновая функция состояния умножается на -1 . Например, выполняется соотношение

$$|v_1 v_2 v_3 \dots v_A\rangle_a = - |v_2 v_1 v_3 \dots v_A\rangle_a. \quad (2.234)$$

2. Свойства операторов рождения фермионов

При работе с антисимметричными функциями можно воспользоваться простыми свойствами представления чисел заполнения, если ввести операторы $a^\dagger(v)$, которые рождают частицу в одночастичном состоянии v . Так мы определим

$$a^\dagger(v) |0\rangle = |v\rangle, \quad (2.235)$$

где $|0\rangle$ — состояние вакуума, т. е. состояние, в котором нет частиц. В более общем случае оператор $a^\dagger(v)$, действуя на антисимметричное состояние из A частиц, создает состояние из $(A + 1)$ частицы, в котором одночастичный уровень v оказывается занятым:

$$a^\dagger(v) |v_1 v_2 \dots v_A\rangle_a = \begin{cases} |v_1 v_2 \dots v_A v\rangle_a & \text{при } v \neq v_1, v_2, \dots, v_A, \\ 0 & \text{при } v = v_1, v_2, \dots, \text{или } v_A. \end{cases} \quad (2.236)$$

Соотношениями (2.236) определяются оператор $a^\dagger(v)$ и его алгебраические свойства, которые мы выведем ниже.

Можно образовать из вакуума состояние из A частиц, добавляя частицы на занятые орбиты:

$$|v_1 v_2 \dots v_A\rangle_a = a^\dagger(v_A) \dots a^\dagger(v_2) a^\dagger(v_1) |0\rangle. \quad (2.237)$$

Из антисимметрии этого состояния следует [см. формулу (2.234)], что

$$a^\dagger(v_i) a^\dagger(v_k) = -a^\dagger(v_k) a^\dagger(v_i). \quad (2.238)$$

Оператор, эрмитово-сопряженный с $a^\dagger(v)$, обозначается через $a(v)$. Поэтому состояние, сопряженное состоянию (2.237), есть

$$a(v_1 v_2 \dots v_A) = \langle 0 | a(v_1) a(v_2) \dots a(v_A). \quad (2.239)$$

Из формулы (2.238) мы сразу получаем равенство

$$a(v_i) a(v_k) = -a(v_k) a(v_i). \quad (2.240)$$

Поскольку оператор a^\dagger рождает частицу, сопряженный ему оператор a (действуя на выражение, находящееся справа) уничтожает частицу. Поэтому из сказанного выше следует, что

$$a(v) |0\rangle = 0. \quad (2.241)$$

[В правильности соотношения (2.241) можно убедиться следующим образом. Вычислим матричные элементы от (2.241) со всеми возможными состояниями, расположеными слева. Полагая, что оператор $a(v)$ действует на выражение, стоящее слева от него, мы получим слева состояния, в которых уровень v занят. Но все такие состояния ортогональны вакууму.] В общем случае справедливо соотношение

$$a(v) |v_1 v_2 \dots v_A\rangle_a = \begin{cases} 0 & \text{при } v \neq v_1, v_2, \dots, v_A, \\ |v_1 v_2 \dots v_{A-1}\rangle_a & \text{при } v = v_A \end{cases} \quad (2.242)$$

и другие, вытекающие из него, которые можно получить, переставляя занятые состояния до тех пор, пока мы не придем к виду (2.242).

Оператор $a^\dagger(v_i)a(v_h)$ ($v_i \neq v_h$) дает отличный от нуля результат только в том случае, если он действует на состояние, в котором уровень v_h занят, а уровень v_i свободен. В этом случае мы получим, например, соотношение

$$\begin{aligned} a^\dagger(v_A)a(v_{A-1})|v_1v_2\ldots v_{A-2}v_{A-1}\rangle_a &= a^\dagger(v_A)|v_1v_2\ldots v_{A-2}\rangle_a = \\ &= |v_1v_2\ldots v_{A-2}v_A\rangle_a. \end{aligned} \quad (2.243)$$

При действии на то же состояние транспонированной комбинации этих операторов мы получим равенство

$$\begin{aligned} a(v_{A-1})a^\dagger(v_A)|v_1v_2\ldots v_{A-2}v_{A-1}\rangle_a &= a(v_{A-1})|v_1v_2\ldots v_{A-2}v_{A-1}v_A\rangle_a = \\ &= -a(v_{A-1})|v_1v_2\ldots v_{A-2}v_Av_{A-1}\rangle_a = -|v_1v_2\ldots v_{A-2}v_A\rangle_a. \end{aligned} \quad (2.244)$$

Как нетрудно убедиться, изменение знака при переходе от равенства (2.243) к равенству (2.244) не зависит от порядка, в котором мы пишем занятые состояния, и, следовательно, справедливо операторное соотношение

$$a^\dagger(v_i)a(v_h) = -a(v_h)a^\dagger(v_i), \quad v_i \neq v_h. \quad (2.245)$$

В случае $v_i = v_h$ мы получим

$$a^\dagger(v)a(v)|v_1v_2\ldots v_A\rangle_a = \begin{cases} 0 & \text{при } v \neq v_1, v_2, \dots \text{ и } v_A, \\ |v_1v_2\ldots v_A\rangle_a & \text{при } v = v_1, v_2, \dots \text{ или } v_A \end{cases} \quad (2.246)$$

и

$$a(v)a^\dagger(v)|v_1v_2\ldots v_A\rangle_a = \begin{cases} 0 & \text{при } v = v_1, v_2, \dots \text{ или } v_A, \\ |v_1v_2\ldots v_A\rangle_a & \text{при } v \neq v_1, v_2, \dots \text{ и } v_A. \end{cases} \quad (2.247)$$

Из соотношений (2.246) и (2.247) следует, что

$$a^\dagger(v)a(v) + a(v)a^\dagger(v) = 1. \quad (2.248)$$

Полученные выше правила перестановки операторов a и a^\dagger удобно записать с помощью соотношений антисимметрии. Определяя антисиммутатор двух произвольных операторов A и B как

$$\{A, B\} = AB - BA, \quad (2.249)$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \{a^\dagger(v_i), a^\dagger(v_h)\} &= \{a(v_i), a(v_h)\} = 0, \\ \{a^\dagger(v_i), a(v_h)\} &= \delta(v_i, v_h). \end{aligned} \quad (2.250)$$

Соотношениями (2.250) полностью определяются алгебраические свойства операторов $a(v)$ и $a^\dagger(v)$, и вместе с определением (2.235) их можно взять за основу метода. Математическая структура такого метода, называемого алгеброй Грассманна, была хорошо изучена математиками второй половины прошлого века. Метод операторов рождения называют иногда вторичным квантованием, но алгебра таких операторов непосредственно следует из антисимметрии многочастичных состояний и не требует новых физических гипотез.

Как известно из формулы (2.246), вероятность того, что одиночественное состояние v занято, определяется математическим ожиданием оператора $a^\dagger(v)a(v)$. Поэтому оператор

$$n(v) = a^\dagger(v)a(v) \quad (2.251)$$

называют оператором заполнения состояния v , а оператор

$$n = \sum_v n(v) \quad (2.252)$$

— оператором числа частиц. Его собственное значение — полное число частиц в системе.

Операторы a и a^\dagger могут играть двоякую роль в данном методе. Выше мы в основном рассматривали их как операторы рождения, которые дают нам полный набор волновых функций системы A частиц. В дальнейшем мы воспользуемся тем, что a и a^\dagger образуют полный набор переменных, по которым можно разложить любой оператор. Одно из основных преимуществ метода операторов рождения и уничтожения в том, что операторы, соответствующие большинству физических измеряемых величин, действуют одновременно только на небольшое число частиц и поэтому могут быть представлены в виде довольно простых комбинаций операторов a и a^\dagger .

Метод операторов рождения и уничтожения оказывается особенно удобным для выражения связи между частицами и дырками. Поскольку дырочное состояние получается в результате удаления частицы из замкнутой оболочки, оператор рождения дырки эквивалентен оператору уничтожения частицы и наоборот (см. гл. 3, приложение 2).

3. Одночастичные операторы

Одночастичным называется оператор, действующий на отдельно взятые частицы. Для системы тождественных частиц такой оператор имеет вид

$$F = \sum_{k=1}^A F(x_k). \quad (2.253)$$

Поскольку оператор F может изменить квантовое состояние лишь одной частицы и не изменяет полного числа частиц, его можно представить как сумму членов вида $a^\dagger(v_2)a(v_1)$:

$$F = \sum_{v_1 v_2} \langle v_2 | F | v_1 \rangle a^\dagger(v_2) a(v_1). \quad (2.254)$$

[Одночастичный оператор, сохраняющий число частиц, может содержать члены, пропорциональные $a(v_2)a^\dagger(v_1)$. Но в силу соотношения (2.250) последние отличаются от членов выражения (2.254) лишь на постоянную (c -число). Поскольку среднее по вакууму от большинства операторов, соответствующих физических измеряемым величинам, равно нулю, c -число обычно равно нулю.]

Коэффициенты $\langle v_2 | F | v_1 \rangle$ разложения (2.254) можно найти, вычислив матричные элементы от F по одночастичным состояниям:

$$\langle v_2 | F | v_1 \rangle = \int \psi_{v_2}^\dagger(x) F(x) \psi_{v_1}(x) dx, \quad (2.255)$$

причем, интегрируя по x , нужно также произвести суммирование по дискретным переменным m_s и m_l .

Пользуясь соотношениями (2.243) и (2.246), можно вычислить матричные элементы одночастичного оператора (2.254) в представлении чисел заполнения. Отличные от нуля матричные элементы таковы:

$$\langle v_1 v_2 \dots v_A | F | v_1 v_2 \dots v_A \rangle_a = \sum_{i=1}^A \langle v_i | F | v_i \rangle, \quad (2.256)$$

$$\langle v'_1 v_2 \dots v_A | F | v_1 v_2 \dots v_A \rangle_a = \langle v'_1 | F | v_1 \rangle \quad (v'_1 \neq v_1).$$

Другие недиагональные матричные элементы оператора F получим, производя перестановку квантовых чисел v_h до тех пор, пока матричный элемент не приведется к виду (2.256). Выражения (2.256) можно проверить, вычислив непосред-

ственное матричный элемент оператора (2.253) по состояниям (2.233). Представленные нами результаты почти очевидны и по существу выражают то обстоятельство, что эффекты антисимметризации не сказываются на матричных элементах от одночастичного оператора.

4. Двухчастичные операторы

Двухчастичный оператор, действующий на систему тождественных частиц, может изменять состояния двух частиц и имеет вид

$$G = \sum_{j < k} G(x_j, x_k), \quad (2.257)$$

Поскольку G сохраняет полное число частиц, его разложение по операторам a^\dagger и a можно записать в виде

$$G = \sum_{\substack{v_1 < v_2 \\ v_3 < v_4}} \langle v_3 v_4 | G | v_1 v_2 \rangle_a a^\dagger(v_4) a^\dagger(v_3) a(v_1) a(v_2). \quad (2.258)$$

Мы предполагаем, что все состояния v_i перенумерованы в некотором (произвольном) порядке, и поэтому можно потребовать, чтобы каждая пара состояний $v_1 v_2$ (и $v_3 v_4$) в сумме встречалась только 1 раз. Мы видим, что коэффициенты в выражении (2.258) представляют собой матричные элементы оператора G по антисимметризованным двухчастичным состояниям и, следовательно, их можно записать в виде

$$\langle v_3 v_4 | G | v_1 v_2 \rangle_a = \langle v_3 v_4 | G | v_1 v_2 \rangle - \langle v_4 v_3 | G | v_1 v_2 \rangle, \quad (2.259)$$

где

$$\langle v_3 v_4 | G | v_1 v_2 \rangle = \int \Psi_{v_3}^\dagger(x_1) \Psi_{v_4}^\dagger(x_2) G(x_1, x_2) \Psi_{v_1}(x_1) \Psi_{v_2}(x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.260)$$

Наличие двух членов в матричном элементе (2.259) — следствие антисимметризации, и иногда это называют обменным эффектом.

Выражение (2.258) можно записать и в других эквивалентных формах, где на индексы суммирования не накладывается никаких ограничений:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{4} \sum_{v_1 v_2 v_3 v_4} \langle v_3 v_4 | G | v_1 v_2 \rangle_a a^\dagger(v_4) a^\dagger(v_3) a(v_1) a(v_2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v_1 v_2 v_3 v_4} \langle v_3 v_4 | G | v_1 v_2 \rangle_a a^\dagger(v_4) a^\dagger(v_3) a(v_1) a(v_2). \end{aligned} \quad (2.261)$$

Здесь $\langle v_3 v_4 | G | v_1 v_2 \rangle_a$ меняет знак при перестановке v_1 и v_2 или v_3 и v_4 .

На основании выражения (2.258) нетрудно определить матричные элементы двухчастичного оператора в представлении чисел заполнения. Среднее значение такого оператора равно

$$\langle v_1 v_2 \dots v_A | G | v_1 v_2 \dots v_A \rangle_a = \sum_{v_i < v_j \leq v_A} \langle v_i v_j | G | v_i v_j \rangle_a. \quad (2.262)$$

Этот результат отличается от того, что мы получаем в случае, когда волновые функции не антисимметризованы. Различие в том, что матричный элемент (2.259)

содержит обмений член. Недиагональные матричные элементы связывают состояния, отличающиеся квантовыми числами не более чем двух частиц:

$$\langle v'_1 v_2 \dots v_A | G | v_1 v_2 \dots v_A \rangle_a = \sum_{v_i=v_2}^{v_A} \langle v'_1 v_i | G | v_1 v_i \rangle_a, \quad (2.263)$$

$$\langle v'_1 v'_2 v_3 \dots v_A | G | v_1 v_2 v_3 \dots v_A \rangle_a = \langle v'_1 v'_2 | G | v_1 v_2 \rangle_a.$$

Другие отличные от нуля недиагональные матричные элементы получаются из приведенных выше перестановкой квантовых чисел.

5. Операторы передачи частиц

Рассмотренные выше одно- и двухчастичные операторы не меняют числа частиц. Но в случае реакций с передачей частицы приходится иметь дело с операторами, связывающими состояния ядра, в которых имеется разное число частиц. В этом случае метод операторов рождения и уничтожения оказывается особенно удобным. Например, матричный элемент

$$\langle \alpha_{A+1} | a^\dagger(v) | \alpha_A \rangle_a,$$

который обычно называют генеалогическим коэффициентом, непосредственно дает амплитуду вероятности образования состояния α_{A+1} системы из $A+1$ частиц путем добавления частицы в состоянии v к ядру-мишени в состоянии α_A (гл. 3, приложение 5).

6. x -Представление

Свойства антисимметризованных состояний можно также характеризовать операторами $a^\dagger(x)$, рождающими частицу в точке $x = r$, m_s , m_t . Переход из v -представления в x -представление осуществляется путем изменения базиса одночастичных состояний:

$$a^\dagger(x) = \sum_v \langle v | x \rangle a^\dagger(v) = \sum_v \varphi_v^\dagger(x) a^\dagger(v) \quad (2.264)$$

Чтобы проверить это равенство, нужно подействовать обеими частями выражения (2.264) на состояние вакуума.

Антисимметричное состояние (2.237) можно построить с помощью операторов $a^\dagger(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |v_1 v_2 \dots v_A\rangle_a &= \int dx_1 dx_2 \dots dx_A \varphi_{v_1}(x_1) \varphi_{v_2}(x_2) \dots \\ &\dots \varphi_{v_A}(x_A) a^\dagger(x_A) \dots a^\dagger(x_2) a^\dagger(x_1) |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.265)$$

Здесь интегрирование по x означает суммирование по спиновым и изоспиновым переменным и интегрирование по пространственной переменной r . В таком представлении одночастичный оператор принимает вид

$$F = \int \int dx_1 dx_2 \langle x_2 | F | x_1 \rangle a^\dagger(x_2) a(x_1). \quad (2.266)$$

Точно так же можно выразить в x -представлении и другие операторы.

7. Матрицы плотности

Оператор заполнения (2.254) и соответствующее ему выражение в x -представлении можно рассматривать как диагональные элементы матричного оператора

$$\begin{aligned}\langle v_1 | \rho | v_2 \rangle &\equiv a^\dagger(v_2) a(v_1), \\ \langle x_1 | \rho | x_2 \rangle &\equiv a^\dagger(x_2) a(x_1),\end{aligned}\quad (2.267)$$

который называется одиночастичной матрицей плотности. [Здесь мы считаем элементы матрицы плотности операторами; матрицы плотности часто определяют как средние значения оператора (2.267) по определенным состояниям системы A частиц.]

Одиночастичная матрица плотности позволяет определить все аддитивные величины для многочастичной системы. Так, одиночастичный оператор (2.254) или (2.266) можно записать в виде

$$\begin{aligned}F &= \sum_{v_1 v_2} \langle v_2 | F | v_1 \rangle \langle v_1 | \rho | v_2 \rangle = \\ &= \int dx_1 dx_2 \langle x_2 | F | x_1 \rangle \langle x_1 | \rho | x_2 \rangle = \text{Sp}(F\rho),\end{aligned}\quad (2.268)$$

где символом Sp обозначен след произведения двух матриц F и ρ . Точно так же можно выразить двухчастичные операторы через двухчастичные матрицы плотности:

$$\begin{aligned}\langle v_1 v_2 | \rho | v_3 v_4 \rangle &\equiv a^\dagger(v_4) a^\dagger(v_3) a(v_1) a(v_2), \\ \langle x_1 x_2 | \rho | x_3 x_4 \rangle &\equiv a^\dagger(x_4) a^\dagger(x_3) a(x_1) a(x_2).\end{aligned}\quad (2.269)$$

Локальные плотности частиц даются матричными элементами операторов плотности, диагональными по пространственным переменным. Так, локальную одиночастичную плотность можно выразить через оператор $\rho(\mathbf{r}, s, t)$, который представляет собой матрицу размерности 4×4 из спин-изоспиновых переменных:

$$\langle m_s m_t | \rho(\mathbf{r}, s, t) | m'_s m'_t \rangle \equiv \langle \mathbf{r} m_s m_t | \rho | \mathbf{r} m'_s m'_t \rangle = a^\dagger(\mathbf{r} m'_s m'_t) a(\mathbf{r} m_s m_t). \quad (2.270)$$

Матрицы в пространствах спина и изоспина можно выразить через матрицы Паули, действующие в этих пространствах:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, s, t) &= \frac{1}{4} \rho_{00}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i=x, y, z} \sigma_i \rho_{10, i}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{j=x, y, z} \tau_j \rho_{01, j}(\mathbf{r}) + \\ &+ \sum_{ij} \sigma_i \tau_j \rho_{11, ij}(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (2.271)$$

Здесь $\rho_{00}(\mathbf{r})$ — скаляр в пространствах спина и изоспина, ρ_{10} — вектор в пространстве спина и скаляр в изоспиновом пространстве и т. д.

Шестнадцатью различными компонентами ρ , входящими в формулу (2.271), определяется вероятность существования в точке \mathbf{r} частиц с различными ориентациями спина и изоспина:

$$\begin{aligned}\sum_h \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h) \text{Sp} \rho(\mathbf{r}, s, t) &\equiv \sum_{m_s m_t} \langle m_s m_t | \rho(\mathbf{r}, s, t) | m_s m_t \rangle = \rho_{00}(\mathbf{r}), \\ \sum_k \sigma_i(k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \text{Sp} (\sigma_i \rho) &= \rho_{10, i}(\mathbf{r}), \\ \sum_k \tau_j(k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \text{Sp} (\tau_j \rho) &= \rho_{01, j}(\mathbf{r}), \\ \sum_k \sigma_i(k) \tau_j(k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \text{Sp} (\sigma_i \tau_j \rho) &= \rho_{11, ij}(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (2.272)$$

8. Операторы рождения бозонов

Выше мы изложили метод операторов рождения и уничтожения для систем, построенных из фермионов. Такой же метод можно применить и в случае систем, состоящих из бозе-частиц. Поскольку в одном и том же одиночастичном состоянии ψ_v может находиться несколько бозе-частиц, базисные состояния в представлении чисел заполнения характеризуются числом n_i частиц в квантовом состоянии v_i , числом n_2 в состоянии v_2 и т. д. Такое состояние можно записать как $|n_1 n_2 \dots\rangle$. Нормировочная постоянная, которая для фермионов равнялась $(A!)^{-1/2}$ [см. формулу (2.233)], в случае системы бозонов зависит от конкретных значений чисел заполнения $n_1 n_2 \dots$. Поэтому величины не равных нулю матричных элементов операторов рождения $c^\dagger(v)$ зависят от значения чисел заполнения в состояниях v . Формула (2.236) заменяется теперь формулой

$$c^\dagger(v_i) |n_1 n_2 \dots n_i \dots\rangle = (n_i + 1)^{1/2} |n_1 n_2 \dots n_i - 1 \dots\rangle. \quad (2.273)$$

Исходя из определения (2.273) и рассуждая так же, как и в случае фермионов, можно выразить все свойства бозе-систем посредством операторов рождения и уничтожения. Из условий симметрии волновой функции и из нормировки (2.273) следует, что для бозоновых операторов соотношения антикоммутации (2.250) заменяются соотношениями коммутации.

Систему бозонов можно также рассматривать как систему квантованных гармонических осцилляторов, причем каждому одиночастичному состоянию v сопоставляется свой осциллятор. При таком подходе оператору рождения $c^\dagger(v)$ соответствует линейная комбинация координаты и импульса v -го осциллятора, а величина $(n + 1)^{1/2}$ в формуле (2.273) представляет собой известный множитель, характеризующий увеличение амплитуды колебаний осциллятора с увеличением его энергии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

2

СТАТИСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОТНОСТИ ЯДЕРНЫХ УРОВНЕЙ

1. Функция плотности уровней, преобразование Лапласа

В данном приложении мы рассмотрим методы, которые позволяют вычислить среднюю плотность ядерных уровней в системе, рассматриваемой с точки зрения модели независимых частиц¹⁾. Плотность уровней как функцию энергии E и числа частиц A системы можно записать в виде

$$\rho(A, E) = \sum_{n,i} \delta(A - n) \delta[E - E_i(n)], \quad (2.274)$$

¹⁾ Здесь излагается метод Дарвина — Фаулера, которым пользовались авторы работ [153, 498]. Несколько иной подход дается в работах [47, 278].

где $\mathcal{E}_i(n)$ — энергия i -го квантового состояния системы из n частиц. В приближении независимых частиц имеем

$$\begin{aligned} n &= \sum_v [n(v)]_i, \\ \mathcal{E}_i &= \sum_v [n(v)]_i \varepsilon(v). \end{aligned} \quad (2.275)$$

Здесь $[n(v)]_i$ — число заполнения одночастичного состояния v в квантовом состоянии i системы из n частиц (в силу принципа Паули число $[n(v)]_i$ для ферми-частиц равно 0 или 1).

Функция (2.274) имеет сингулярности, когда значения ее аргументов совпадают с собственными значениями (2.275). Но нас будет интересовать среднее значение этой функции, проинтегрированной в некотором интервале значений A и \mathcal{E} . Учитывая аддитивный характер соотношений (2.275), которыми определяются собственные значения, удобно работать с преобразованием Лапласа от функции ρ :

$$Z(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(A, \mathcal{E}) \exp\{\alpha A - \beta \mathcal{E}\} dA d\mathcal{E} = \sum_{i, n} \exp\{\alpha n - \beta \mathcal{E}_i(n)\}. \quad (2.276)$$

С учетом равенств (2.275) полученное выражение можно записать в виде произведения

$$Z(\alpha, \beta) = \prod_v (1 + \exp\{\alpha - \beta \varepsilon(v)\}). \quad (2.277)$$

В каждом сомножителе единица соответствует значению $n(v) = 0$, а экспоненциальный член — значению $n(v) = 1$. Логарифмируя равенство (2.277), получаем

$$\begin{aligned} \ln Z(\alpha, \beta) &= \sum_v \ln(1 + \exp\{\alpha - \beta \varepsilon(v)\}) = \\ &= \int_0^\infty g(\varepsilon) \ln(1 + \exp\{\alpha - \beta \varepsilon\}) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.278)$$

Функция $g(\varepsilon)$ дает нам плотность одночастичных состояний:

$$g(\varepsilon) = \sum_v \delta[\varepsilon - \varepsilon(v)], \quad (2.279)$$

причем начало отсчета энергии мы выбрали так, что $\varepsilon(v) \geq 0$ при всех v . В интеграле (2.278) логарифмический множитель стремится к нулю при $\varepsilon > \alpha/\beta$ и к величине $(\alpha - \beta \varepsilon)$ при $\varepsilon < \alpha/\beta$. Поэтому мы запишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} \ln Z(\alpha, \beta) &= \int_0^{\alpha/\beta} g(\varepsilon) (\alpha - \beta \varepsilon) d\varepsilon + \int_0^{\alpha/\beta} g(\varepsilon) [\ln(1 + \exp\{\alpha - \beta \varepsilon\}) - (\alpha - \beta \varepsilon)] d\varepsilon + \\ &+ \int_{\alpha/\beta}^\infty g(\varepsilon) \ln(1 + \exp\{\alpha - \beta \varepsilon\}) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.280)$$

Производя замену переменной, два последних интеграла можно привести к виду

$$\int_0^{\alpha/\beta} g(\varepsilon) \ln(1 + \exp\{-\alpha + \beta\varepsilon\}) d\varepsilon + \int_{\alpha/\beta}^{\infty} g(\varepsilon) \ln(1 + \exp\{\alpha - \beta\varepsilon\}) d\varepsilon = \\ = \int_0^{\infty} \left[g\left(\frac{\alpha}{\beta} + x\right) + g\left(\frac{\alpha}{\beta} - x\right) \right] \ln(1 + \exp\{-\beta x\}) dx. \quad (2.281)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $g(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon < 0$. Величина логарифма в подынтегральном выражении практически равна нулю вне интервала порядка $1/\beta$ в окрестности $x = 0$. Если этот интервал велик по сравнению с расстоянием между одноточечными уровнями $\varepsilon(v)$, то функции плотности уровней g в формуле (2.281) можно считать гладкими и равными среднему от выражения (2.279). Если в то же время интервал $1/\beta$ мал по сравнению с характерным расстоянием, на котором меняется g , то можно разложить функцию g в ряд по x и провести почлененное интегрирование. В результате мы получим

$$\ln Z(\alpha, \beta) = \int_0^{\alpha/\beta} g(\varepsilon) (\alpha - \beta\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6\beta} g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{7\pi^4}{360\beta^3} g''\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \dots, \quad (2.282)$$

где g'' — вторая производная от функции g .

В разложении (2.282) нужно взять интегралы вида

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n \ln(1 + \exp\{-x\}) dx, \quad (2.283a)$$

где n — целое четное число. Разлагая логарифм в ряд, получаем

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \exp\{-mx\} \right) dx = \\ = n! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^{n+2}} = n! \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n+2}} = \\ = n! \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \zeta(n+2), \quad (2.283b)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана. При целых четных значениях n эту функцию можно выразить через числа Бернулли. Окончательно получаем

$$I_n = \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)(n+2)} \pi^{n+2} |B_{n+2}|, \quad (2.284)$$

где

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}.$$

2. Обращение преобразования Лапласа

Получив приближенное выражение для Z , мы можем, выполнив обратное преобразование Лапласа, вычислить плотность уровней

$$\rho(A, \mathcal{E}) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int Z(\alpha, \beta) \exp\{-\alpha A + \beta \mathcal{E}\} d\alpha d\beta. \quad (2.285)$$

Поскольку подынтегральное выражение представляет собой резко меняющуюся функцию переменных α и β , для вычисления написанного интеграла мы воспользуемся методом перевала. Главный вклад в интеграл дает небольшая область интегрирования вблизи точки $(\alpha_0 \beta_0)$, где подынтегральное выражение стационарно. Положение этой точки определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln Z}{\partial \alpha} - A &= 0, \\ \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \mathcal{E} &= 0. \end{aligned} \quad (2.286)$$

Разлагая экспоненту в подынтегральном выражении в ряд с точностью до членов второго порядка в окрестности точки $(\alpha_0 \beta_0)$ получаем гауссов интеграл. Результат вычисления оказывается таким:

$$\rho(A, \mathcal{E}) = \frac{Z(\alpha_0 \beta_0) \exp\{-\alpha_0 A + \beta_0 \mathcal{E}\}}{2\pi |D|^{1/2}}, \quad (2.287)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \end{vmatrix}_{\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0}. \quad (2.288)$$

Дифференцируя функцию (2.282), чтобы определить положение стационарной точки из уравнений (2.286), мы будем пренебрегать членами, содержащими производные от g [например, последним членом в формуле (2.282)]. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{(\alpha/\beta)_0} g(\varepsilon) d\varepsilon, \\ \mathcal{E} &= \int_0^{(\alpha/\beta)_0} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6\beta_0^2} g\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right). \end{aligned} \quad (2.289)$$

Из соотношений (2.275) следует, что для основного состояния мы имеем выражения

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon &= A, \\ \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon &= \mathcal{E}_0, \end{aligned} \quad (2.290)$$

где ε_F — энергия Ферми. Поэтому выражения (2.289) можно записать в виде

$$\alpha_0 = \beta_0 \varepsilon_F, \quad E = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \frac{\pi^2}{6\beta_0^2} g(\varepsilon_F). \quad (2.291)$$

Подставляя найденные отсюда значения α_0 и β_0 в выражение (2.287) и вычисляя определитель (2.288), получаем плотность уровней как функцию числа частиц A

и энергии возбуждения E :

$$\rho(A, E) = \frac{1}{\sqrt{48}} \frac{1}{E} \exp \left\{ 2 \left(\frac{\pi^2}{6} \beta_0^{-1} g(e_F) E \right)^{1/2} \right\}. \quad (2.292)$$

При выводе этой формулы были сделаны следующие приближения.

1. Замена $g(\varepsilon)$ гладкой функцией при вычислении интеграла (2.281). Это справедливо при условии

$$\beta_0^{-1} g(e_F) \gg 1, \quad (2.293)$$

которое в силу соотношения (2.291) эквивалентно условию

$$g(e_F) E \gg 1. \quad (2.294)$$

В данном условии просто выражается то обстоятельство, что понятие средней плотности уровней можно ввести лишь тогда, когда энергия возбуждения велика по сравнению с энергией g^{-1} первого возбужденного состояния.

2. Пренебрежение членами, зависящими от производных функции g . Типичным таким членом является последнее слагаемое в правой части (2.282). Из соотношения (2.291) следует, что этим членом можно пренебречь при условии, что

$$\frac{[g''(e_F)]^2 E^3}{[g(e_F)]^3} \ll 1. \quad (2.295)$$

Для ферми-газа $g \sim A e^{1/2} e_F^{-3/2}$, а поэтому условие (2.295) эквивалентно неравенству

$$E \ll e_F A^{1/3}. \quad (2.296)$$

Пренебрежение членами более высокого порядка по β^{-1} эквивалентно рассмотрению «вырожденного» ферми-газа. Поэтому можно было бы думать, что менее жесткое условие $E < e_F A$ окажется достаточным для того, чтобы записать показатель экспоненты в выражении для плотности уровней с точностью, до множителя 2. Но для того чтобы записать выражение для ρ с такой точностью, необходимо оценить показатели экспоненты с точностью до единицы, а в этом случае справедливость формулы (2.292) определяется более жестким условием (2.296).

Для систем с хорошо выраженной оболочечной структурой плотность одиночстичных уровней может изменяться быстрее и менее регулярно, чем для ферми-газа. Поэтому может оказаться необходимым усилить приближение 2.

3. Использование метода перевала при вычислении обратного преобразования Лапласа (2.285). Точность этого приближения можно установить, оценивая величину отброшенных членов в разложении подынтегрального выражения. Этими членами можно пренебречь, если выполняется условие (2.293).

3. Среднее значение чисел заполнения одиночстичных состояний

Пользуясь полученными выше результатами, можно вычислить средние числа заполнения $f(v)$ одиночстичных уровней v и тем самым характеризовать структуру возбужденных состояний. Мы имеем

$$f(v) = \langle n(v) \rangle, \quad (2.297)$$

где среднее вычисляется по возбужденным состояниям i в пределах небольшого энергетического интервала. Поскольку полная плотность уровней пропор-

циональна $Z (\alpha_0, \beta_0)$, а Z равно произведению парциальных вкладов от каждого одиночественного состояния, плотность уровней всех конфигураций, в которых состояние v не занято, получим по формуле (2.277), опустив множитель, соответствующий состоянию v :

$$\rho (A, \mathcal{E}, n(v) = 0) = \rho (A, \mathcal{E}) [1 + \exp \{\alpha_0 - \beta_0 \varepsilon(v)\}]^{-1}. \quad (2.298)$$

Полная плотность уровней равна сумме плотностей, соответствующих $n(v) = 0$ и $n(v) = 1$. Поэтому мы имеем [см. также соотношение (2.291)]

$$f(v) = \frac{\rho (A, \mathcal{E}, n(v) = 1)}{\rho (A, \mathcal{E})} = [1 + \exp \{\beta_0 (\varepsilon(v) - \varepsilon_F)\}]^{-1}. \quad (2.299)$$

При энергии возбуждения $E \rightarrow 0$ [т. е. при $\beta_0 \rightarrow \infty$, см. формулу (2.291)] это распределение переходит в распределение для основного состояния, т. е. $n(v) = 1$ при $\varepsilon(v) < \varepsilon_F$ и $n(v) = 0$ при $\varepsilon(v) > \varepsilon_F$. При выводе соотношений (2.298) и (2.299) мы предполагали, что заполнение состояния v не изменяет стационарных значений α_0 и β_0 , определяющихся уравнениями (2.286). Такое приближение справедливо, если возбуждено большое число частиц, откуда в свою очередь вытекает условие (2.293).

4. Описание спектра возбужденных состояний с помощью квазичастичных возбуждений

При анализе структуры возбужденных состояний часто оказывается удобным говорить об изменении чисел заполнения по сравнению с теми, которые должны быть в основном состоянии. Так, можно характеризовать состояние квантовыми числами дырок (которым соответствуют незаполненные уровни с $\varepsilon(v) < \varepsilon_F$) и частиц (заполненные уровни с $\varepsilon(v) > \varepsilon_F$). Мы будем рассматривать частицы и дырки как квазичастицы. Среднее число заполнения \hat{f} квазичастичного состояния есть

$$\hat{f}(v) = \begin{cases} f(v) & \text{при } \varepsilon(v) > \varepsilon_F, \\ 1 - f(v) & \text{при } \varepsilon(v) < \varepsilon_F. \end{cases} \quad (2.300)$$

Пользуясь формулой (2.299), получаем

$$\hat{f}(v) = [1 + \exp \{\beta_0 \hat{\varepsilon}(v)\}]^{-1}, \quad (2.301)$$

где $\hat{\varepsilon}(v)$ — энергия квазичастицы:

$$\hat{\varepsilon}(v) = |\varepsilon(v) - \varepsilon_F|. \quad (2.302)$$

Можно также рассчитывать плотности уровней, основываясь на представлении о возбуждении квазичастиц. Рассмотрим функцию плотности уровней

$$\hat{\rho}(E) = \sum_i \delta(E - E_i), \quad (2.303)$$

где

$$E_i = \sum_v [n_q(v)]_i \hat{\varepsilon}(v). \quad (2.304)$$

Здесь $[n_q(v)]_i$ — числа заполнения квазичастиц в состоянии системы i . Как и ранее, можно произвести преобразование Лапласа $\hat{Z}(\beta)$ от функции плот-

ности уровней (2.303) и представить его в виде произведения по квазичастичным состояниям:

$$\hat{Z}(\beta) = \prod_v (1 + \exp \{-\beta \hat{\epsilon}(v)\}),$$

$$\ln \hat{Z}(\beta) = \sum_v \ln (1 + \exp \{-\beta \hat{\epsilon}(v)\}) = \frac{\pi^2}{6} g_0 \beta^{-1} + \dots, \quad (2.305)$$

$$g_0 \equiv g(\epsilon_F).$$

Обратив преобразование Лапласа, мы найдем, что плотность уровней ρ имеет правильную экспоненциальную зависимость, но больше величины (2.292) в $(24 g_0 E)^{1/4}$ раз. Такой избыток уровней в квазичастичном спектре объясняется тем, что мы не ограничились теми возбуждениями, при которых число частиц равно числу дырок. Иначе говоря, в квазичастичном спектре присутствуют «духовые» состояния, соответствующие возбуждениям, при которых изменяется полное число частиц.

Мы рассмотрим два способа устранения подобной ошибки. Во-первых, вычислим флуктуацию числа частиц, связанную с числами заполнения (2.301). Если обозначить число частиц через $n(p)$, а число дырок через $n(h)$, то можно написать

$$\langle n(p) - n(h) \rangle = \sum_{\epsilon > \epsilon_F} [1 + \exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\}]^{-1} - \sum_{\epsilon < \epsilon_F} [1 + \exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\}]^{-1} = 0. \quad (2.306)$$

$$\begin{aligned} \langle (n(p) - n(h))^2 \rangle &= \sum_v (\langle n_q^2(v) \rangle - \langle n_q(v) \rangle^2) = \sum_v \frac{\exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\}}{(1 + \exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\})^2} \approx \\ &\approx 2 \int_0^\infty g_0 d\hat{\epsilon} \frac{\exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}\}}{(1 + \exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}\})^2} = g_0 \beta_0^{-1}. \end{aligned}$$

Распределение величины $\Delta = n(p) - n(h)$ в ансамбле (2.301) должно быть гауссовым, поскольку величина Δ в любом состоянии равна алгебраической сумме большого числа независимых вкладов от различных одночастичных состояний. Поэтому функция распределения для Δ имеет вид

$$P(\Delta) = (2\pi g_0 \beta_0^{-1})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{\Delta^2}{2g_0 \beta_0^{-1}} \right\} \quad (2.307)$$

и [см. формулу (2.291)]

$$P(0) = (24g_0 E)^{-1/4}. \quad (2.308)$$

Другой способ таков: вернемся к тому месту, где мы усредняли по различным числам частиц в ядре и перепишем соответствующие выражения с точки зрения представления о квазичастичах. Тогда выражение (2.277) можно будет записать в виде

$$Z(\alpha, \beta) = \exp \{\alpha N - \beta \mathcal{E}_0\} \prod_v (1 + \exp \{-\beta \hat{\epsilon}(v)\}) = \exp \{\alpha N - \beta \mathcal{E}_0\} \hat{Z}, \quad (2.309)$$

где N и \mathcal{E}_0 — функции переменных α и β , определяющиеся соотношениями

$$\begin{aligned} N \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) &= \int_0^{\alpha/\beta} g(e) de, \\ \mathcal{E}_0 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) &= \int_0^{\alpha/\beta} g(e) e de. \end{aligned} \quad (2.310)$$

Величина N представляет собой число состояний с энергией, меньшей энергии Ферми α/β , а \mathcal{E}_0 — энергия основного состояния системы с числом нуклонов N (α/β). Функция Z зависит от β явно в силу того, что β входит как множитель перед квазичастичными энергиями [см. формулу (2.305)], и неявно в силу того, что энергия квазичастиц зависит от энергии Ферми [см. формулу (2.302)]. В том приближении, в котором мы преобразуем производными от функции g , этой неявной зависимостью также можно пренебречь. В таком случае \hat{Z} дается уравнением (2.305). Таким образом, выражения (2.309) и (2.305) эквивалентны выражению (2.282) и приводят к формуле (2.292) для плотности уровней.

5. Термодинамическая интерпретация расчетов плотности уровней

Выше мы не вводили никаких термодинамических понятий. Мы хотели подчеркнуть, что не требуется никаких дополнительных предположений или приближений, кроме изложенных выше. Следует, однако, признать, что весь метод вычисления был заимствован нами из статистической механики и что функция $Z(\alpha, \beta)$ получает простую интерпретацию на основе представления о большом квантовом ансамбле. В таком ансамбле вероятность того, что ядро, состоящее из n частиц, находится в состоянии с собственным значением энергии $\mathcal{E}_i(n)$, пропорциональна $\exp\{\alpha n - \beta \mathcal{E}_i(n)\}$. Числа α и β появляются как подгоночные параметры, которые позволяют нам определить среднее значение числа частиц и энергии. Поэтому соотношения (2.286) следует понимать как уравнения, которыми определяются такие значения α_0 и β_0 , что $\langle n \rangle = A$ и $\langle H \rangle = \mathcal{E}$, где угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Функция Z [см. формулу (2.276)] называется статистической суммой, а Z^{-1} — нормировочным множителем в выражении для вероятностей.

Распределение по энергиям и числу частиц в ансамбле характеризуется наибольшим максимумом в окрестности их средних значений. Можно считать, что в этой области оно имеет гауссову форму. Ширина гауссовой кривой определяется значениями производных, фигурирующих в формуле (2.288). Поскольку вероятность, приходящаяся на единицу площади (\mathcal{E}, A) -плоскости, равна вероятности, приходящейся на одно состояние, умноженной на плотность состояний, плотность уровней равна обратной величине вероятности для одного состояния ($= Z \exp\{-\alpha_0 A + \beta_0 \mathcal{E}\}$), деленной на эффективную площадь в (\mathcal{E}, A) -плоскости, содержащую в себе большинство состояний ансамбля. Выполнив такой расчет, мы получим выражение (2.287).

Величина (α/β_0) называется химическим потенциалом (в случае ферми-газа она обозначается через ε_F), а β_0^{-1} — температурой. Показатель степени в формуле (2.287) для плотности уровней, равный логарифму статистического веса, есть энтропия S . Действительно,

$$dS = \beta_0 d\mathcal{E}. \quad (2.310a)$$

Исходя из формулы (2.286), можем написать

$$d \ln Z(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\partial \ln Z}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 + \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_0} d\beta_0 = A d\alpha_0 - \mathcal{E} d\beta_0. \quad (2.310b)$$

Интегрируя обе части равенства (2.310a) от нулевой температуры при фиксированном A , получаем

$$S = -\alpha_0 A + \beta_0 \mathcal{E} + \ln Z(\alpha_0, \beta_0). \quad (2.310b)$$

Температура β_0^{-1} несколько отличается от температуры T , приведенной в § 1, п. 9, где величина T^{-1} определялась как логарифмическая производная от плотности уровней по энергии возбуждения. Эти два определения неодинаковы вследствие того, что знаменатель в выражении (2.287) для плотности

уровней зависит от энергии. Но в тех областях, где условие (2.293) хорошо выполняется, оба определения практически совпадают. Определение, данное нами в § 1, п. 9, обладает тем преимуществом, что оно относится непосредственно к физическому свойству системы, которое определяется из эксперимента.

6. Вычисление плотностей уровней, характеризующихся дополнительными квантовыми числами

Обобщив изложенное выше, можно вычислить плотность уровней, характеризующихся дополнительными квантовыми числами, если они аддитивны. Под аддитивными мы подразумеваем квантовые числа, получающиеся при аддитивном суммировании вкладов от всех одночастичных состояний.

Рассмотрим в качестве простейшего примера следствия из того обстоятельства, что ядро состоит из частиц двух сортов — протонов и нейтронов. Статистическая сумма зависит теперь от трех параметров, поскольку мы должны задавать средние значения энергии \bar{E} , числа нейтронов N и числа протонов Z .

$$Z(\alpha_n, \alpha_p, \beta) = \sum_{N, Z, i} \exp \{ \alpha_n N + \alpha_p Z - \beta \bar{E}_i(N, Z) \}. \quad (2.311)$$

Проделывая такие же преобразования, как и в формулах (2.277) — (2.282), получаем

$$\ln Z = \int_0^{\alpha_n/\beta} g_n(e) (\alpha_n - \beta e) de + \int_0^{\alpha_p/\beta} g_p(e) (\alpha_p - \beta e) de + \\ + \frac{\pi^2}{6\beta} \left[g_n \left(\frac{\alpha_n}{\beta} \right) + g_p \left(\frac{\alpha_p}{\beta} \right) \right], \quad (2.312)$$

где g_n и g_p — плотности одночастичных уровней для нейтронов и протонов. Из выражения (2.312) легко получить обобщенные формулы (2.289) — (2.291):

$$(\alpha_n)_0 = \varepsilon_F^{(n)} \beta_0, \\ (\alpha_p)_0 = \varepsilon_F^{(p)} \beta_0, \\ E = \frac{\pi^2}{6\beta_0} g_0, \quad (2.313)$$

где

$$g_0 = g_p(\varepsilon_F^{(p)}) + g_n(\varepsilon_F^{(n)}). \quad (2.314)$$

Поскольку при обратном преобразовании Лапласа интегрирование производится теперь по трем переменным, определитель от Z'' имеет размерность 3×3 , и в результате получается следующее выражение для плотности уровней:

$$\rho(N, Z, E) = \frac{6^{1/4}}{12} g_0 \left(\frac{\beta_0^2}{4g_n(\varepsilon_F^{(n)}) g_p(\varepsilon_F^{(p)})} \right)^{1/2} (\varepsilon_0 E)^{-5/4} \times \\ \times \exp \left\{ 2 \left(\frac{\pi^2}{6} g_0 E \right)^{1/2} \right\}. \quad (2.315)$$

В выражении (2.315) мы имеем ту же экспоненциальную зависимость от E , что и в выражении (2.292), с той лишь разницей, что $g(\varepsilon_F)$ заменяется полной плотностью уровней g_0 , но предэкспоненциальный множитель из-за наличия двух различных типов частиц несколько изменился.

Путем несколько более сложных вычислений можно найти плотность уровней как функцию полного углового момента состояний. Сначала рассмотрим распределение плотности уровней в функции проекции M полного момента которая равна сумме проекций m отдельных частиц. Будем предполагать, что одночастичный потенциал инвариантен относительно вращения вокруг оси квантования, и для простоты будем считать, что ферми-газ состоит из частиц одного сорта. Функция Z будет снова зависеть от трех параметров:

$$Z(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i, n, M} \exp \{ \alpha n - \beta \mathcal{E}_i(n, M) - \gamma M \}. \quad (2.316)$$

Можно сразу же написать обобщенные выражения (2.277) — (2.282):

$$\begin{aligned} \ln Z(\alpha, \beta, \gamma) = & \int \int_{\alpha - \beta e - \gamma m > 0} g(e, m) (\alpha - \beta e - \gamma m) de dm + \\ & + \frac{\pi^2}{6} \int \int g(e, m) \delta(\alpha - \beta e - \gamma m) de dm + \dots \end{aligned} \quad (2.317)$$

Теперь плотность одночастичных уровней оказывается функцией как e , так и m . Далее мы увидим, что, если исключить случаи очень больших M , величина γ будет довольно мала, так что с хорошей точностью можно разложить выражение (2.317) в ряд по степеням γ . Сохраняя в таком разложении линейные и квадратичные члены по γ и пренебрегая, как и ранее, всеми членами, содержащими производные плотности одночастичных уровней, получаем

$$\ln Z(\alpha, \beta, \gamma) \approx \int_0^{\alpha/\beta} g(e) (\alpha - \beta e) de + \frac{\gamma^2}{2\beta} g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \langle m^2 \rangle + \frac{\pi^2}{6\beta} g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \quad (2.318)$$

где

$$g(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(e, m) dm \quad (2.319)$$

и

$$g\left(e = \frac{\alpha}{\beta}\right) \langle m^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{\alpha}{\beta}, m\right) m^2 dm. \quad (2.320)$$

Из последнего равенства мы видим, что величина $\langle m^2 \rangle$ представляет собой среднее значение величины m^2 для одночастичных уровней на поверхности Ферми. Мы предположили, что $\langle m \rangle = 0$, но это следует, например, из симметрии относительно обращения времени или из инвариантности одночастичного потенциала относительно вращения на 180° вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии.

Стационарная точка подынтегрального выражения в обратном преобразовании Лапласа определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln Z}{\partial \alpha} - A &= 0, \\ \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \mathcal{E} &= 0, \\ \frac{\partial \ln Z}{\partial \gamma} + M &= 0, \end{aligned} \quad (2.321)$$

откуда, учитывая соотношение (2.318) и пренебрегая производными от g , нетрудно показать, что

$$A = \int_0^{(\alpha/\beta)_0} g(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$\mathcal{E} = \int_0^{(\alpha/\beta)_0} g(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{\pi^2}{6\beta_0^2} g\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_0}{\beta_0}\right)^2 \langle m^2 \rangle g\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right), \quad (2.322)$$

$$M = -\frac{\gamma_0}{\beta_0} g\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right) \langle m^2 \rangle.$$

Исходя из определения энергии Ферми, получаем

$$\alpha_0 = \varepsilon_F \beta_0, \quad \frac{\pi^2}{6\beta_0^2} g(\varepsilon_F) = E - \frac{M^2}{2g(\varepsilon_F) \langle m^2 \rangle}, \quad \frac{\gamma_0}{\beta_0} g(\varepsilon_F) \langle m^2 \rangle = -M. \quad (2.323)$$

Подставим эти выражения в обобщенное на рассматриваемый случай уравнение (2.287):

$$p(A, E, M) = \frac{6^{1/4}}{24} \left(\frac{g_0^2}{\langle m^2 \rangle} \right)^{1/2} \left[g_0 E - \frac{M^2}{2 \langle m^2 \rangle} \right]^{-5/4} \times$$

$$\times \exp \left\{ 2 \left[\frac{\pi^2}{6} \left(g_0 E - \frac{M^2}{2 \langle m^2 \rangle} \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (2.324)$$

$$g_0 \equiv g(\varepsilon_F).$$

При выводе этой формулы мы сделали единственное новое приближение, а именно разложили выражение (2.317) в ряд по степеням γ . Отброшенные в $\ln Z$ члены имеют порядок величины

$$\left(\frac{\gamma m}{\beta} \right)^4 \beta \frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}.$$

Если воспользоваться соотношениями (2.323), то нетрудно показать, что наш результат справедлив при условии

$$\frac{M^4}{g_0^4 \langle m^2 \rangle^2} \beta \frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2} < 1. \quad (2.325)$$

Для ферми-газа мы имеем $g(\varepsilon) \sim A e^{1/2} \varepsilon_F^{-3/2}$ и $g_0 \langle m^2 \rangle = \mathcal{J}_{\text{TB}} \hbar^{-2}$ (см. ниже), так что условие (2.325) выполняется, если справедливо неравенство

$$\left(\frac{\hbar^2 M^2}{2 \mathcal{J}_{\text{TB}}} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_F^2} \left(\frac{\varepsilon_F}{AE} \right)^{1/2} < 1. \quad (2.326)$$

Последнее всегда справедливо, если выполняется неравенство (2.296) и условие $\hbar^2 M^2 / 2 \mathcal{J}_{\text{TB}} \ll E$.

На проведенные выше вычисления можно взглянуть несколько иначе, если исходить из распределения вероятностей для квазичастичных состояний. Так, статистическая сумма (2.316) описывает ансамбль, в котором вероятности пропорциональны $\exp\{-\alpha n - \beta \mathcal{E} - \gamma M\}$, а это по аналогии с (2.301) означает, что вероятности заполнения квазичастичных состояний даются формулой

$$\hat{f}(v) = (1 + \exp\{\beta_0 \hat{e}(v) + \gamma_0 m(v)\})^{-1}. \quad (2.327)$$

Разлагая f в ряд по степеням γ_0 , получаем

$$\begin{aligned} \hat{f}(v) = & (1 + \exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\})^{-1} - \gamma_0 m(v) \frac{\exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\}}{(1 + \exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\})^2} + \\ & + \frac{1}{2} (\gamma_0 m)^2 \frac{\exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\} (\exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\} - 1)}{(1 + \exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\})^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.328)$$

Для среднего значения M , сохранив только член, дающий главный вклад, получим

$$\langle M \rangle = -\gamma_0 \sum_v m^2(v) \frac{\exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\}}{(1 + \exp \{\beta_0 \hat{\epsilon}(v)\})^2} = -\gamma_0 \langle m^2 \rangle g(\epsilon_F) \beta_0^{-1} \quad (2.329)$$

в полном согласии с последним из равенств (2.323). Точно так же найдем среднее значение энергии возбуждения ансамбля:

$$\langle E \rangle = \sum_v f(v) \hat{\epsilon}(v) = g_0 \frac{\pi^2}{6 \beta_0^2} + \frac{1}{2} \gamma_0^2 \langle m^2 \rangle g_0 \beta_0^{-2} + \dots, \quad (2.330)$$

что согласуется со вторым равенством (2.323). При таком выводе ясно видно, что посредством параметра γ на ансамбль накладывается ограничение, позволяющее приписать ему определенное среднее значение M . При этом средняя энергия при одних и тех же значениях β_0 оказывается больше на величину $M^2 (2g_0 \langle m^2 \rangle)^{-1}$, которую можно отождествить со средней врачающейся энергией системы.

Чтобы найти распределение M для ферми-газа, нам осталось вычислить величину $\langle m^2 \rangle$, которая определяется формулой (2.320). Для этого введем функцию $g(p, r)$, определяющую плотность одночастичных состояний в фазовом пространстве:

$$g(p, r) = 2 \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^3. \quad (2.331)$$

Среднее $\langle m^2 \rangle$ означает усреднение по одночастичным состояниям с энергией, равной примерно энергии Ферми ϵ_F ,

$$\begin{aligned} g_0 \langle m^2 \rangle &= \int g(p, r) \delta \left(\frac{p^2}{2M_n} - \frac{(p_F(r))^2}{2M_n} \right) \frac{1}{\hbar^2} (xp_y - yp_x)^2 d^3 p d^3 r, \\ p_F(r) &= \hbar (3\pi^2 \rho(r))^{1/3}, \\ g_0 = g(\epsilon_F) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon_F, m) dm, \end{aligned} \quad (2.332)$$

где M_n — масса нуклона. Поскольку импульсы в каждой точке пространства распределены изотропно, перекрестный член, содержащий $p_x p_y$, не внесет никакого вклада и интеграл (2.332) равен

$$g_0 \langle m^2 \rangle = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \frac{M_n}{3\hbar^2} \int [p_F(r)]^3 (x^2 + y^2) d^3 r. \quad (2.333)$$

Подставив в последнюю формулу значение импульса Ферми [см. формулу (2.332)], получим

$$g_0 \langle m^2 \rangle = \frac{M_n}{\hbar^2} \int \rho(r) (x^2 + y^2) d^3 r = \frac{\mathcal{J}_{TB}}{\hbar^2}, \quad (2.334)$$

где \mathcal{J}_{TB} — момент инерции твердого тела с тем же распределением плотности, что и в ядре. Физическая интерпретация этого обстоятельства, что момент инерции в модели ферми-газа совпадает с моментом инерции твердого тела, дается в гл. 9, § 2.

Плотность состояний с заданным полным угловым моментом I можно получить, дифференцируя функцию $\rho(E, M)$:

$$\begin{aligned} \rho(E, I) &= \rho(E, M=I) - \rho(E, M=I+1) \approx - \left(\frac{\partial \rho(E, M)}{\partial M} \right)_{M=I+1/2} \approx \\ &\approx \frac{\pi}{48} 6^{-1/4} (2I+1) g_0 \left(\frac{g_0 \hbar^2}{\mathcal{J}_{\text{TB}}} \right)^{3/2} \left[g_0 \left(E - \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}_{\text{TB}}} \right) \right]^{-7/4} \times \\ &\times \exp \left\{ 2 \left[\frac{\pi^2}{6} g_0 \left(E - \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}_{\text{TB}}} \right) \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.335)$$

При вычислении производной мы пренебрели сравнительно слабой зависимостью предэкспоненциального множителя от M .

Чтобы несколько упростить вычисления, мы рассмотрели распределение значений M для ферми-газа, состоящего только из частиц одного сорта. Но точно так же можно проанализировать двухкомпонентную систему из протонов и нейтронов; результаты приведены в тексте [см. формулу (2.57)].

ПРИЛОЖЕНИЕ

3

ФЛУКТУАЦИИ И ИХ РАСЧЕТ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

В данном приложении мы рассмотрим некоторые свойства спектра, следующие из предположения о случайности распределения матричных элементов гамильтоновской матрицы.

1. Случайное распределение элементов двумерной матрицы

Рассмотрим сначала матрицу размерности 2×2

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.336)$$

Будем предполагать, что гамильтониан эрмитов и обладает вращательной симметрией и симметрией относительно обращения времени. Поэтому матрица (2.336) связывает состояния с одинаковыми значениями I, M (и другими сохраняющимися квантовыми числами, как, например, четность, изоспин и т. д.). Из инвариантности относительно обращения времени следует, что элементы матрицы H , вычисленные в стандартном базисе [см. формулу (1.42)], вещественные, а учитывая эрмитовость гамильтониана, имеем $H_{12} = H_{21}$.

Рассмотрим ансамбль матриц вида (2.336), в котором вероятность для данной матрицы дается некоторой функцией $P(H)$. Функция $P(H)$ определяется так, что она отражает некоторую модель хаотичности для матричных элементов. Мы исследуем статистические свойства собственных значений и собственных векторов такого ансамбля.

Относительно распределения $P(H)$, рассматриваемого ниже, мы сделаем два следующих предположения¹⁾.

1. Мы будем считать, что три матричных элемента H_{11} , H_{12} и H_{22} не коррелированы и, следовательно,

$$P(H) = P_{11}(H_{11}) P_{12}(H_{12}) P_{22}(H_{22}). \quad (2.337)$$

2. Поскольку базисные состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ были выбраны произвольно, мы предположим также, что распределение (2.337) инвариантно относительно произвольного унитарного преобразования базисных состояний.

Поскольку мы ограничиваемся только такими преобразованиями, при которых матричные элементы остаются вещественными, унитарное преобразование становится ортогональным преобразованием в двумерном векторном пространстве. Можно рассматривать только бесконечно малые преобразования, поскольку конечное вращение базиса всегда можно представить в виде ряда таких последовательных преобразований:

$$\begin{aligned} |1'\rangle &= |1\rangle + \varepsilon |2\rangle, \\ |2'\rangle &= -\varepsilon |1\rangle + |2\rangle. \end{aligned} \quad (2.338)$$

В новом базисе матричные элементы с точностью до членов порядка ε записываются в виде

$$\begin{aligned} H_{1'1'} &= H_{11} + 2\varepsilon H_{12}, \\ H_{1'2'} &= H_{12} + \varepsilon (H_{22} - H_{11}), \\ H_{2'2'} &= H_{22} - 2\varepsilon H_{12}. \end{aligned} \quad (2.339)$$

Инвариантность по отношению к изменению базиса означает, что

$$P(H) = P(H') = P(H) \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{2H_{12}}{P_{11}} \frac{dP_{11}}{dH_{11}} + \frac{H_{22} - H_{11}}{P_{12}} \frac{dP_{12}}{dH_{12}} - \frac{2H_{12}}{P_{22}} \frac{dP_{22}}{dH_{22}} \right] \right\}. \quad (2.340)$$

Коэффициент при ε должен обращаться в нуль и, следовательно,

$$\frac{1}{H_{12}P_{12}} \frac{dP_{12}}{dH_{12}} = -\frac{2}{H_{22} - H_{11}} \left(\frac{1}{P_{11}} \frac{dP_{11}}{dH_{11}} - \frac{1}{P_{22}} \frac{dP_{22}}{dH_{22}} \right) = -C, \quad (2.341)$$

где C — постоянная величина, поскольку функция в левой части уравнения (2.341) зависит только от H_{12} , а функция в средней части зависит только от H_{11} и H_{22} . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dP_{12}}{P_{12}} &= -CH_{12} dH_{12}, \\ P_{12} &= \left(\frac{C}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{C}{2} H_{12}^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.342)$$

¹⁾ Рассматривались также и другие распределения $P(H)$ — либо из-за математической простоты, либо из-за нескольких других предположений о хаотичности (см. работу [377] и цитируемые в ней статьи). В предельном случае больших матриц H (если предположить, что они вещественны и эрмитовы) эти ансамбли приводят к тому же распределению расстояний между ближайшими уровнями, что и рассматриваемый нами гауссов ансамбль. Впервые гауссовые ансамбли были рассмотрены в работе [455]. Вывод уравнений для них на основе двух используемых ниже предположений проделан в работе [353].

(коэффициент перед гауссовой функцией определен из условия нормировки). Точно так же получаем

$$\frac{2}{P_{11}} \frac{dP_{11}}{dH_{11}} + CH_{11} = \frac{2}{P_{22}} \frac{dP_{22}}{dH_{22}} + CH_{22} = A, \quad (2.343)$$

где A — постоянная. При изменении величины A меняется всего лишь начало отсчета энергии. Поэтому можно положить $A=0$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} P_{11} &= \left(\frac{C}{4\pi} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{C}{4} H_{11}^2 \right\}, \\ P_{22} &= \left(\frac{C}{4\pi} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{C}{4} H_{22}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.344)$$

Постоянной C определяется среднее значение матричных элементов и, следовательно, среднее расстояние между уровнями.

2. Распределение собственных значений и собственных векторов

Матрица (2.336) характеризуется собственными значениями

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{1}{2} (H_{11} + H_{22}) + \frac{1}{2} [(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2]^{1/2}, \\ E_\beta &= \frac{1}{2} (H_{11} + H_{22}) - \frac{1}{2} [(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.345)$$

и собственными функциями

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \cos \theta |1\rangle + \sin \theta |2\rangle, \\ |\beta\rangle &= -\sin \theta |1\rangle + \cos \theta |2\rangle, \end{aligned} \quad (2.346)$$

где

$$\operatorname{ctg} \theta = -\frac{1}{2H_{12}} (H_{22} - H_{11} - [(H_{22} - H_{11})^2 + 4H_{12}^2]^{1/2}), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}. \quad (2.347)$$

Преобразуем функцию распределения от переменных H_{11} , H_{12} и H_{22} к переменным E_α , E_β и θ . Поскольку

$$H_{11}^2 + 2H_{12}^2 + H_{22}^2 = E_\alpha^2 + E_\beta^2, \quad (2.348)$$

преобразование показателя экспоненты гауссовой функции производится очень легко. Чтобы в новых переменных получить элемент объема, необходимо вычислить якобиан

$$\frac{\partial (H_{11}, H_{12}, H_{22})}{\partial (E_\alpha, E_\beta, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_{11}}{\partial E_\alpha} & \frac{\partial H_{12}}{\partial E_\alpha} & \frac{\partial H_{22}}{\partial E_\alpha} \\ \frac{\partial H_{11}}{\partial E_\beta} & \frac{\partial H_{12}}{\partial E_\beta} & \frac{\partial H_{22}}{\partial E_\beta} \\ \frac{\partial H_{11}}{\partial \theta} & \frac{\partial H_{12}}{\partial \theta} & \frac{\partial H_{22}}{\partial \theta} \end{vmatrix}, \quad (2.349)$$

что нетрудно сделать, если выразить H_{11} , H_{12} и H_{22} через E_α , E_β и θ :

$$\begin{aligned} H_{11} &= E_\alpha \cos^2 \theta + E_\beta \sin^2 \theta, \\ H_{12} &= (E_\alpha - E_\beta) \sin \theta \cos \theta, \\ H_{22} &= E_\alpha \sin^2 \theta + E_\beta \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.350)$$

Вычислив якобиан (2.349), найдем, что общее распределение вероятностей в новых переменных имеет вид

$$P(E_\alpha, E_\beta, 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{C}{2\pi} \right)^{3/2} (E_\alpha - E_\beta) \exp \left\{ -\frac{C}{4} (E_\alpha^2 + E_\beta^2) \right\}. \quad (2.351)$$

[Согласно формулам (2.345), мы обозначили собственные векторы так, что $E_\alpha > E_\beta$.] Вероятность того, что расстояние между двумя собственными значениями равно ε ,дается формулой

$$\begin{aligned} P(\varepsilon) &= \int P(E_\alpha, E_\beta, 0) \delta(\varepsilon - E_\alpha + E_\beta) dE_\alpha dE_\beta d\theta = \\ &= \frac{C}{4} \varepsilon \exp \left\{ -\frac{C\varepsilon^2}{8} \right\} \quad (0 < \varepsilon < \infty). \end{aligned} \quad (2.352)$$

Постоянную C можно связать со средним расстоянием D между уровнями:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon &= D = \left(\frac{2\pi}{C} \right)^{1/2}, \\ C &= \frac{2\pi}{D^2}, \end{aligned} \quad (2.353)$$

и поэтому нормированное распределение можно записать в виде

$$P(\varepsilon) = \frac{\pi}{2D^2} \varepsilon \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \frac{\varepsilon^2}{D^2} \right\}. \quad (2.354)$$

Распределение (2.354) называют распределением Вигнера. При $\varepsilon \rightarrow 0$ оно дает вероятность, равную нулю. Это и понятно, ибо для того, чтобы собственные значения матрицы (2.336) были вырождены, необходимо, чтобы одновременно выполнялись условия $H_{11} = H_{22}$ и $H_{12} = 0$. Вероятность осуществления такого двойного события исчезающе мала.

Из формулы (2.351) явствует, что распределение вероятностей не зависит от θ и поэтому никак не коррелировано с собственными векторами. Часто представляет интерес распределение вероятностей для амплитуды какого-либо базисного состояния. Его можно получить, проинтегрировав обе части равенства (2.351). Например, амплитуда состояния $|1\rangle$ в собственной функции α есть $C_1 = \cos \theta$, а распределение вероятностей для этой амплитуды таково:

$$P(C_1) = P(\theta) \left(\frac{dC_1}{d\theta} \right)^{-1} = \frac{1}{\pi} (1 - C_1^2)^{-1/2}. \quad (2.355)$$

Результат (2.355) можно получить и иначе, если учесть, что исходный ансамбль был инвариантен относительно вращения базисных векторов. Отсюда следует, что общая функция распределения для амплитуд имеет вид

$$P(C_1, C_2) = \frac{1}{\pi} \delta(1 - C_1^2 - C_2^2). \quad (2.356)$$

Интегрируя (2.356) по C_2 , получаем формулу (2.355).

Линейная зависимость $P(\varepsilon)$ от ε при малых ε является следствием соотношений симметрии, которые мы наложили на гамильтоновскую матрицу (2.336). Если ослабить эти ограничения, то результаты окажутся несколько иными [134, 136].

Так, если не делать предположения об инвариантности гамильтониана относительно обращения времени, то из эрмитовости следует, что матричные

элементы H_{11} и H_{22} вещественны, а H_{12} имеет вещественную и мнимую части, каждой из которых соответствует свое независимое гауссово распределение. Тогда случай вырождения собственных значений соответствует одновременному выполнению трех условий, а именно $H_{11} = H_{22}$, $H_{12} = H_{21}^* = 0$. Поэтому в данном случае при малых ε мы имеем $P \sim \varepsilon^2$.

Если гамильтониан инвариантен относительно обращения времени, но не обладает вращательной симметрией, то следует отдельно рассматривать случаи A -четных и A -нечетных ядер (см. гл. 1, приложение 2, п. 2). Для систем с четным значением A базисные функции можно выбрать так, что они будут собственными функциями оператора \mathcal{T} . В таком базисе матрица гамильтониана вещественна, и мы получаем распределение (2.354). Собственные функции систем с нечетными A двукратно вырождены и соответствующие базисные функции есть $|\alpha\rangle$, где символом $r = \pm 1$ обозначены вырожденные состояния, сопряженные относительно операции обращения времени. В этом базисе H есть матрица в пространстве α , обладающая свойствами симметрии (1.253) и (1.254). Связь между двумя парами сопряженных состояний описывается четырьмя вещественными параметрами, связанными с матрицами H_0 , H_1 , H_2 и H_3 . Поэтому если нет других условий симметрии, то при малых ε мы имеем $P(\varepsilon) \sim \varepsilon^4$. Если такие условия существуют, то результат будет другой. Так, из аксиальной симметрии следует, что вырожденные уровни характеризуются проекциями момента $\pm M$ и что матрица H диагональна в пространстве ρ ($H_1 = H_2 = 0$). Связь характеризуется двумя вещественными параметрами, и $P(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$. Если гамильтониан инвариантен относительно вращения \mathcal{R} на угол α вокруг некоторой оси, то можно выбрать такой стандартный базис, что $\mathcal{R}\mathcal{T} = +1$. Тогда из инвариантности H относительно преобразования \mathcal{R} ($= -i\rho_2$; см. формулу (1.250)) следует, что $H_1 = H_3 = 0$, и мы снова имеем два вещественных параметра. Если же мы имеем дело с аксиальной симметрией, и с симметрией относительно преобразования \mathcal{R} , то ситуация точно такая же, как и в случае полной вращательной симметрии.

Ансамбли, соответствующие гамильтонианам с частично нарушенными различными симметриями, рассматривались в работе [135]. Возможность обнаружения небольших отклонений от инвариантности относительно обращения времени путем изучения статистических свойств уровней с большими энергиями возбуждения рассматривалась в работах [159, 379].

3. Матрицы больших размерностей

Простой пример матрицы 2×2 , рассмотренный выше, позволяет проиллюстрировать характер физических рассуждений и результаты, которые можно получить путем анализа случайных матриц. Но при исследовании распределения уровней на расстояниях, не малых по сравнению со средними расстояниями между уровнями, а также при решении многих других задач, как, например, при исследовании корреляций между удаленными уровнями, приходится иметь дело с матрицами, размерность N которых велика.

Два условия (см. приложение 3, п. 1), которыми мы пользовались выше, можно легко обобщить так, что они будут характеризовать вероятность распределения матричных элементов произвольной случайной матрицы $N \times N$. Производя вращения (2.338) последовательно в каждом из $N(N-1)/2$ двумерных подпространств, мы обнаружим, что вероятность всех недиагональных матричных элементов подчиняется распределению (2.342), а вероятность всех диагональных элементов — распределению (2.344). Таким образом, полную функцию $P(H)$ можно записать в виде

$$P(H) = 2^{-N/2} \left(\frac{C}{2\pi} \right)^{N(N+1)/4} \exp \left\{ -\frac{C}{4} \operatorname{Sp} H^2 \right\}. \quad (2.357)$$

Если диагонализовать матрицу $N \times N$, то можно преобразовать распределение (2.357) от переменных H_{ij} к новым переменным, к которым относятся собственные значения E_α (с α от 1 до N) и $N(N-1)/2$ других параметров, характеризующих структуру собственных функций. Показатель экспоненты в формуле (2.357) выражен в форме, не зависящей от представления, а поэтому

$$\operatorname{Sp} H^2 = \sum_{\alpha=1}^N E_\alpha^2 \quad (2.357a)$$

Как и в случае матриц 2×2 , самое трудное — вычислить элементы объема (якобиан преобразования). Но можно установить зависимость якобиана от E_α из соображений размерности. Прежде всего заметим, что в случае выраженных собственных значений собственные функции неопределены; следовательно, обратное преобразование также неопределено и якобиан должен равняться нулю. Далее, функции H_{ij} представляют собой линейные функции от E_α , и поэтому якобиан должен быть симметричным полиномом порядка $N(N-1)/2$ по E_α . Этих условий достаточно для определения общей функции распределения:

$$P(E_1 \dots E_N, \theta_1 \dots \theta_v) = \\ -\mu(\theta_1 \dots \theta_v) \prod_{\alpha < \beta} |E_\alpha - E_\beta| \exp \left\{ -\frac{C}{4} \sum_\alpha E_\alpha^2 \right\}, \quad (2.358)$$

где $\theta_1, \dots, \theta_v$ — параметры, описывающие структуру собственных функций [их число равно $N(N-1)/2$]. Функция μ будет, конечно, зависеть от того, как выбраны эти дополнительные параметры.

Конечно, работать с распределением (2.358) отнюдь не легко, и первая полезная информация о распределении последовательных собственных значений для ансамбля (2.357) была получена лишь при помощи электронной вычислительной машины, которая использовалась для диагонализации большого числа матриц. Элементы матриц генерировались случайным процессом, подчиняющимся закону распределения вероятностей (2.357) [378]. В дальнейшем удалось получить замкнутые выражения для распределения и корреляционных функций, характеризующих собственные спектры этих матриц [134, 138, 186, 318, 320]. Обзор результатов по данному вопросу приведен в книге [319].

Мы не будем останавливаться на оструумных математических приемах, которыми пользуются при решении этой проблемы, а отметим только некоторые наиболее существенные результаты, полученные к настоящему времени. Распределение расстояний между ближайшими соседними уровнями удивительно близко к распределению (2.354), полученному для ансамбля матриц 2×2 ; абсолютная ошибка в величине $P(e)$ не превышает $0,01D^{-1}$ во всем интервале изменения e , хотя при больших e относительная ошибка в распределении, даваемом выражением (2.354), возрастает [186, 134].

Удивительная особенность, которая обнаружилась при изучении случайных матриц большой размерности, — это тенденция к существованию дальних порядков в распределении собственных значений (см. работу [138], а также все, что говорится по поводу фиг. 2.9).

Распределение амплитуд в собственных векторах можно получить непосредственно из предположения, что гамильтоновский ансамбль инвариантен относительно ортогонального преобразования базиса. Так, общая функция распределения для N амплитуд имеет вид

$$P(C_1 \dots C_N) = \frac{2}{\Omega_N} \delta \left(1 - \sum_{i=1}^N C_i^2 \right). \quad (2.359)$$

Нормировочная постоянная Ω_N равна полному элементу объема телесного угла на N -мерной сфере:

$$\Omega_N = \frac{N\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2 + 1)}, \quad (2.360)$$

где Γ — гамма-функция. Переходя к полярным координатам $C_2 \dots C_N$ в $(N-1)$ -мерном пространстве, можно без труда проинтегрировать распределение (2.359) по координатам $C_2 \dots C_N$, и в результате получим распределение для амплитуды C_1 :

$$P(C_1) = \frac{\Omega_{N-1}}{\Omega_N} (1 - C_1^2)^{(N-3)/2}. \quad (2.361)$$

При очень больших N можно воспользоваться формулой Стирлинга для Г-функции, а также тем, что почти всегда $C_1^2 \ll 1$. Отсюда следует, что

$$P(C_1) \approx \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{N}{2} C_1^2 \right\} \quad \text{при } N \gg 1. \quad (2.362)$$

Результат (2.362) существен при анализе вопроса о распределении приведенных ширин при испускании γ -квантов или нейтронов в определенное конечное состояние. Такая приведенная ширина $\Gamma^{(0)}$ пропорциональна вероятности $(C_1)^2$ присутствия отдельной компоненты $|1\rangle$ в составном состоянии. Исходя из выражения (2.362), получаем

$$\begin{aligned} P(\Gamma^{(0)}) d\Gamma^{(0)} &= P(C_1) \left| \frac{2d\Gamma^{(0)}}{d\Gamma^{(0)}/dC_1} \right| = \\ &= (2\pi\Gamma^{(0)} \langle \Gamma^{(0)} \rangle)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{\Gamma^{(0)}}{2\langle \Gamma^{(0)} \rangle} \right\} d\Gamma^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.363)$$

где $\langle \Gamma^{(0)} \rangle$ — среднее значение величины $\Gamma^{(0)}$. Множитель 2 в формуле (2.363) появляется потому, что в одну и ту же величину $\Gamma^{(0)}$ дают вклад и положительные, и отрицательные значения C_1 . Распределение (2.363) обычно называют распределением Портера — Томаса. Нетрудно видеть, что оно дает сильные флуктуации парциальных ширин отдельных резонансов.

Столь сильные флуктуации оказываются следствием того, что, по нашему предположению, в приведенную ширину вносят вклад только один канал. Если же в процессе участвуют два или несколько каналов (случай, когда мы рассматриваем полную ширину относительно испускания γ -квантов или распад состояний значительно выше порога), то искомое распределение можно получить, суммируя вклады всех каналов. Если вклады всех v каналов независимы и в среднем одинаковы, то мы получим распределение χ^2 с v степенями свободы:

$$P_v(\Gamma) d\Gamma = \left(\frac{v\Gamma}{2\langle \Gamma \rangle} \right)^{v/2} \left(\left(\frac{v}{2} - 1 \right) ! \right)^{-1} \exp \left\{ -\frac{v\Gamma}{2\langle \Gamma \rangle} \right\} \frac{d\Gamma}{\Gamma}. \quad (2.364)$$

Флуктуации такого распределения даются выражением

$$\langle (\Gamma - \langle \Gamma \rangle)^2 \rangle = \frac{2}{v} \langle (\Gamma)^2 \rangle \quad (2.365)$$

и уменьшаются с увеличением v .

ПРИЛОЖЕНИЕ

4

СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ (МОДЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ)

В этом приложении мы рассмотрим¹⁾ простую задачу квантовой механики, которая даст нам возможность показать некоторые особенности явлений, требующих применения метода силовой функции. Именно мы рассмотрим вопрос о том, как амплитуда в определенном канале a может распределяться по многим стационарным состояниям сложной системы.

Состоянию a может, например, соответствовать конфигурация с одним нуклоном на определенной орбите, тогда как все остальные нуклоны образуют систему из $A-1$ частиц в основном состоянии. В качестве состояния a можно рассматривать электрон, движущийся в металле, коллективное колебательное состояние ядра или электронного газа и т. п.

1. Выбор представления

Обозначим через α набор дополнительных конфигураций, выбранных так, чтобы они были собственными состояниями гамильтониана, если пренебречь их связью с выделенным состоянием a . Тогда гамильтониан можно записать в виде

$$H = H_0 + V, \quad (2.366)$$

причем состояния a и α будут собственными векторами H_0 :

$$\begin{aligned} H_0 | a \rangle &= E_a | a \rangle, \\ H_0 | \alpha \rangle &= E_\alpha | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.367)$$

и отличны от нуля только матричные элементы, связывающие состояния a и α :

$$\begin{aligned} V_{a\alpha} &\equiv \langle a | V | \alpha \rangle = \langle \alpha | V | a \rangle, \\ \langle a | V | a \rangle &= \langle \alpha | V | \alpha \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.368)$$

[Мы предполагаем наличие \mathcal{T} -инвариантности и такой выбор фаз, что матричные элементы, осуществляющие связь состояний a и α , вещественны; см. формулу (1.42).]

2. Диагонализация

Гамильтониан вида (2.366) легко диагонализовать. Его собственные значения E_i определяются из уравнения

$$E_a - E_i = \sum_{\alpha} \frac{V_{a\alpha}^2}{E_{\alpha} - E_i}, \quad (2.369)$$

¹⁾ Модель, рассматриваемая в настоящем приложении, очень похожа на ту, которая рассматривалась в работе [53], где в качестве состояния a брался одиночественный резонанс, возникающий при рассеянии в области непрерывного спектра. Этот же вопрос рассматривался в работе [277]. Аналогичные проблемы возникают в связи с фотовозбуждением и резонансным электронным рассеянием, сопровождающимся автоионизацией атомов [158].

корни которого лежат по одному между каждыми двумя соседними собственными значениями E_α . Собственные функции подобного гамильтониана таковы:

$$|i\rangle = c_a(i) |a\rangle + \sum_{\alpha} c_{\alpha}(i) |\alpha\rangle, \quad (2.370)$$

где

$$\begin{aligned} c_{\alpha}(i) &= -\frac{V_{a\alpha}}{E_{\alpha}-E_i} c_a(i), \\ c_a(i) &= \left(1 + \sum_{\alpha} \frac{V_{a\alpha}^2}{(E_{\alpha}-E_i)^2}\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.371)$$

Амплитуды $c_a(i)$ характеризуют распределение свойств состояния a по спектру i . Этот спектр часто оказывается настолько плотным, что можно ввести непрерывную силовую функцию $P_a(E)$ как среднее значение $(c_a(i))^2$ в единичном интервале энергии, определенное по состояниям i , лежащим в пределах малого энергетического интервала вблизи E .

Выше мы выбрали представление состояний в соответствии с разделением полного гамильтониана в виде (2.366) специально для того, чтобы исследовать действие связи на состояние a . Но для вычисления величины (2.371) нужно знать матричные элементы, а для этого нам нужна дополнительная информация относительно свойств состояний α .

3. Силовая функция в случае постоянных матричных элементов

Проще всего тот случай, когда матричные элементы $V_{a\alpha}$, осуществляющие связь, в среднем не зависят от энергии состояния α . По величине они могут сильно колебаться от состояния к состоянию, но их среднее значение предполагается постоянным во всем интервале усреднения ΔE . Такое предположение допустимо, если ширина силовой функции мала по сравнению с характерными энергиями, связанными с изменением матричных элементов $V_{a\alpha}$ (см. ниже).

Если нас не интересуют отклонения от среднего значения, то предположение о постоянстве связи удобнее всего ввести, считая, что спектр E_α однороден и расстояние между уровнями равно D :

$$E_\alpha = \alpha D, \quad \alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.372)$$

и все матричные элементы V одинаковы:

$$V_{a\alpha} = v \quad (2.373)$$

(фазы состояний α можно выбрать так, что элементы $V_{a\alpha}$ будут положительными при любых α). При сделанных предположениях суммы в формулах (2.369) и (2.371) вычисляются просто. В результате имеем

$$\begin{aligned} E_a - E_i &= -\frac{\pi v^2}{D} \operatorname{ctg} \frac{\pi E_i}{D}, \\ c_a(i) &= \left[1 + \left(\frac{\pi v}{D}\right)^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi E_i}{D}\right]^{-1/2} = \left[1 + \left(\frac{\pi v}{D}\right)^2 + \frac{(E_a - E_i)^2}{v^2}\right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.374)$$

Отсюда следует, что силовая функция, которая дает вероятность состояния a на единичный энергетический интервал спектра, имеет простую брейт-вигнеровскую форму:

$$P_a(E) = \frac{1}{D} c_a^2(E_i \approx E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E_a - E)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (2.375)$$

где ширина Γ равна

$$\Gamma = 2\pi \frac{v^2}{D}. \quad (2.376)$$

При переходе от формул (2.374) к выражению (2.375) мы предположили, что $v > D$, и на этом основании пренебрегли первым членом в квадратных скобках. Условие $v > D$ необходимо для того, чтобы можно было найти состояние a с заметной вероятностью более чем в одном из состояний i и, следовательно, для того, чтобы вообще можно было ввести силовую функцию.

Мы видим, что брейт-вигнеровская форма силовой функции оказывается прямым следствием предположения о постоянстве связи с другими степенями свободы системы. Аналогичная картина наблюдается при распаде нестабильной частицы в набор состояний непрерывного спектра, если матричные элементы взаимодействия не сильно изменяются в энергетическом интервале порядка ширины линии. В самом деле, ширина Γ , даваемая формулой (2.376), имеет тот же вид, что и ширина для процесса распада.

4. Нестационарная теория взаимодействия

Связь состояния a с другими степенями свободы можно рассматривать и в рамках нестационарной теории. В этом случае предположение о постоянстве матричных элементов связи эквивалентно предположению о простом экспоненциальном убывании во времени. Так, если предположить, что в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии a , то амплитуда вероятности $A_a(t)$ того, что система будет находиться в том же состоянии в более поздний момент времени t , будет иметь вид

$$A_a(t) = \left\langle a \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H t \right\} \right| a \right\rangle = \sum_i c_a^2(i) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_i t \right\}. \quad (2.377)$$

Здесь мы воспользовались разложением состояния a по набору стационарных состояний i . Если слова предположить, что энергетический спектр эквидистантен и матричные элементы постоянны [см. формулы (2.372)–(2.374)], то сумма по i в формуле (2.377) легко вычисляется и в результате мы получаем

$$A_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{D} \frac{\exp \{-iEt/\hbar\}}{(\pi v/D)^2 + [(E - E_a)/v]^2} = \exp \left\{ -\frac{\Gamma}{2} |t| - \frac{i}{\hbar} E_a t \right\}, \quad (2.378)$$

где вероятность распада Γ дается выражением (2.376).

5. Второй момент силовой функции

В общем случае вне зависимости от предположений о состояниях α можно представить второй момент силовой функции W_2 в виде суммы квадратов матричных элементов:

$$\begin{aligned} W_2 &\equiv \sum_i (E_i - E_a)^2 |c_a(i)|^2 = \sum_i \langle a | i \rangle \langle i | (H - E_a)^2 | i \rangle \langle i | a \rangle = \langle a | (H - E_a)^2 | a \rangle = \\ &= \sum_{\alpha} \langle a | H - E_a | \alpha \rangle \langle \alpha | H - E_a | a \rangle = \sum_{\alpha} (V_{\alpha a})^2. \end{aligned} \quad (2.379)$$

Если в среднем матричные элементы связи не зависят от энергии, то сумма (2.379) обращается в бесконечность. Действительно, второй момент распределения с брейт-вигнеровской формой линии бесконечен. Поэтому, вообще говоря, второй момент характеризует не ширину силовой функции, а другие свойства распределения.

6. Связь через промежуточные состояния

Можно более детально проанализировать связь простого начального состояния a с чрезвычайно сложными составными состояниями α , рассмотрев промежуточные стадии процесса связи. Если, например, состояние a представляет собой одночастичную конфигурацию, то сначала оно связывается с некоторыми довольно простоими конфигурациями [с так называемыми «входными» (doorway) состояниями]. Последние представляют собой частицу плюс колебательное (или вращательное) возбуждение или конфигурацию с двумя частицами и дыркой. Матричные элементы $V_{a\alpha}$ можно выразить через матричные элементы V_{ab} и амплитуды $c_\alpha(b)$ состояний b в спектре α :

$$V_{a\alpha} = \sum_b V_{ab} c_\alpha(b). \quad (2.380)$$

В предельном случае постоянного среднего значения $V_{a\alpha}$ состояния b распределены по спектру приблизительно однородно и каждое состояние α содержит несколько компонент b , что ведет к усреднению матричных элементов V_{ab} . В таком случае полностью исчезает специфическая структура взаимодействия $V_{a\beta}$, приводящего к образованию состояний b , и связь эквивалентна простому затуханию канала a .

Но при анализе явлений, связанных с силовой функцией ядра, часто приходится сталкиваться с таким положением, когда требуется точно рассматривать поведение системы на промежуточных стадиях процесса взаимодействия (на стадии b , последующей стадии c и т. д.). К таким случаям, в которых требуется подробное рассмотрение и силовая функция не имеет простой брэйтвигнеровской формы, относятся случаи связи частицы с вращательным движением (см. гл. 5) и связи между колебательными модами (см. гл. 6).

7. Вычисление силовой функции в случае, когда матричные элементы не постоянны

Пользуясь формулами (2.371), можно выразить силовую функцию через величины $V_{a\alpha}$ и E_α также и в тех случаях, когда матричные элементы и расстояния между уровнями не постоянны.

Определим силовую функцию как среднее взвешенное:

$$P_a(E) = \sum_i \rho(E_i - E) |c_\alpha(i)|^2, \quad (2.381)$$

где $\rho(x)$ — некоторая функция, достигающая максимума при $x=0$ и обращающаяся в нуль при больших $|x|$. Для удобства выберем ρ в виде

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta}{x^2 + (\Delta/2)^2}. \quad (2.382)$$

Здесь Δ — энергетический интервал в окрестности E , в пределах которого производится усреднение. Бесовая функция ρ нормирована так, что

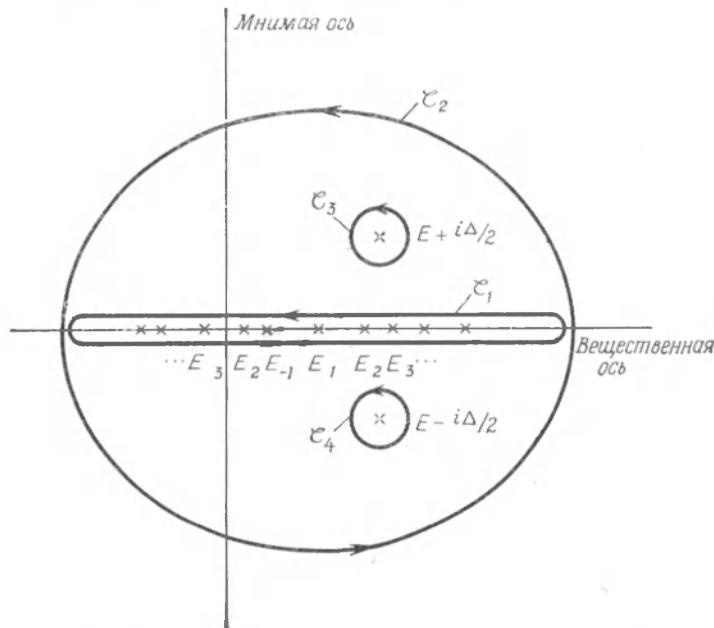
$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (2.383)$$

Пользуясь соотношениями (2.371) и (2.382), можно записать выражение (2.381) в виде контурного интеграла:

$$P_a(E) = \frac{i\Delta}{4\pi^2} \oint_{C_1} \frac{d\lambda}{(E - \lambda)^2 + (\Delta/2)^2} \left[E_a - \lambda - \sum_\alpha \frac{V_{a\alpha}^2}{E_\alpha - \lambda} \right]^{-1}. \quad (2.384)$$

Контур интегрирования представлен на фиг. 2.38. Тот же интеграл по контуру \mathcal{C}_2 равен нулю, поскольку при больших λ подынтегральное выражение пропорционально λ^{-3} . Следовательно,

$$\begin{aligned} P_a(E) &= -\oint_{\mathcal{C}_3} -\oint_{\mathcal{C}_4} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[E_a - E - \frac{i\Delta}{2} - \sum_{\alpha} \frac{V_{a\alpha}^2}{E_{\alpha} - E - i\Delta/2} \right]^{-1} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma + \Delta}{(E_a + \Delta E_a - E)^2 + 1/4(\Gamma + \Delta)^2}. \end{aligned} \quad (2.385)$$



Фиг. 2.38. Комплексная плоскость λ для интегралов (2.384) и (2.385).

Подынтегральное выражение имеет полюсы вдоль вещественной оси в точках $\lambda = E_i$, а также при $\lambda = E \pm i\Delta/2$.

Величина Γ здесь представляет собой естественное обобщение выражения (2.376):

$$\Gamma = \Delta \sum_{\alpha} \frac{V_{a\alpha}^2}{(E - E_{\alpha})^2 + (\Delta/2)^2}, \quad (2.386)$$

а энергетический сдвиг ΔE_a определяется как

$$\Delta E_a = \sum_{\alpha} \frac{V_{a\alpha}^2 (E - E_{\alpha})}{(E - E_{\alpha})^2 + (\Delta/2)^2}. \quad (2.387)$$

Если матричные элементы взаимодействия $V_{a\alpha}$ в среднем одинаковы для всех состояний α , тогда величина Γ становится не зависящей от E , а величина ΔE_a —

малой по сравнению с Γ , поскольку сумма (2.387) содержит примерно одинаковые положительные и отрицательные вклады. Таким образом, мы видим, что, если не считать добавочной ширины Δ , возникающей при усреднении, мы снова получаем результат (2.375).

Выражением (2.385) для силовой функции можно пользоваться и в тех случаях, когда средние значения матричных элементов взаимодействия изменяются с энергией. В этом случае величины Γ и ΔE_a также становятся зависящими от энергии. (Функцией энергии в этом случае может быть и среднее расстояние D между уровнями.) Следует, однако, подчеркнуть, что при выводе выражения (2.385) для силовой функции мы предполагали, что матричные элементы $V_{a\alpha}$ и значения энергий E_α — известные величины. Если усредненные свойства состояний α изменяются с энергией, то для определения такой структуры обычно приходится анализировать промежуточные ступени процесса взаимодействия.

3.

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Спектры ядер, содержащих одну частицу или одну дырку сверх заполненных оболочек, дают нам особенно детальные и точные доказательства независимости движения частиц в ядре.

В заполненной оболочке находится $(2j + 1)$ частиц, угловой момент каждой из которых равен j . Такой конфигурации соответствует единственное антисимметричное состояние (определитель Слэтера), полный угловой момент которого J равен нулю, так как любое состояние с полным угловым моментом J должно быть $(2J + 1)$ -кратно вырождено. Кроме того, четность заполненного уровня положительна.

Таким образом, в случае ядерных конфигураций, соответствующих одной частице сверх заполненных оболочек, спины и четности низколежащих состояний должны определяться квантовыми числами одночастичных орбит. Ряд других характеристик, таких, как моменты, связанные с электромагнитными и β -переходами, или же матричные элементы для различных ядерных реакций, дают нам дополнительные сведения относительно правомерности одночастичного описания таких состояний. Свойства же конфигураций, которые получаются при удалении одной частицы из заполненных оболочек (однодырочных конфигураций), должны быть простым образом связаны со свойствами одночастичных конфигураций.

§ 1. КВАНТОВЫЕ ЧИСЛА И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ; ЧАСТИЧНО-ДЫРОЧНАЯ СИММЕТРИЯ

1. Одночастичные состояния

Заполненные оболочки благодаря сферически симметричному распределению плотности в них создают изотропный ядерный потенциал. При таком потенциале движение частицы можно характеризовать квантовыми числами n, l, j , и m (см. гл. 2, § 4) и четностью

$$\pi = (-1)^l. \quad (3.1)$$

Движение частицы разделяется на радиальную составляющую и составляющую, зависящую от угловых и спиновых переменных, которые связаны между собой спин-орбитальными силами [см. формулу (2.132)]. Таким образом, волновая функция

$$\Psi_{nljm}(\mathbf{r}, m_s(h)) = \mathcal{R}_{nlj}(r) \zeta_{ljm}(\vartheta, \varphi, m_s(h)) \quad (3.2)$$

представляет собой произведение радиальной функции \mathcal{R} на спин-угловую функцию ζ . Обозначение $m_s(h)$ для спиновой переменной указывает на два возможных способа выражения зависимости функции (3.2) от спина.

В m_s -представлении ориентация спина характеризуется составляющей s_z вдоль фиксированной оси z , а движение разлагается на орбитальную и спиновую составляющие, которым соответствуют магнитные квантовые числа $m_l = l_z$ и $m_s = s_z$. Следовательно, часть вектора состояния, зависящая от угловой и спиновой степеней свободы, имеет вид

$$|lm\rangle = \left| \left(ls = \frac{1}{2} \right) jm \right\rangle = \sum_{m_l m_s} \left| lm_l \frac{1}{2} m_s \right\rangle \langle lm_l \frac{1}{2} m_s | jm \rangle, \quad (3.3)$$

где $\langle lm_l \frac{1}{2} m_s | jm \rangle$ — коэффициент векторного сложения (см. гл. 4, приложение 1, п. 2). Угловая волновая функция, описывающая орбитальное состояние с квантовыми числами l и m_l , представляет собой шаровую функцию Y_{lm_l} .

Ориентацию спина можно также определить, задавая его составляющую h (спиральность) по направлению радиуса-вектора частицы, т. е.

$$h = \frac{1}{r} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Мы обозначаем одной и той же буквой h как оператор, так и его собственное значение. В задачах о рассеянии часто вводят спиральность, которая определяется как проекция спина s на вектор импульса \mathbf{r} (см. приложение 6). Два значения спиральности представляют собой различные характеристики ориентации спина.

Спиральность инвариантна относительно вращений и, следовательно, коммутирует с полным угловым моментом j . Таким образом, часть одночастичной волновой функции, зависящую от угловых

и спиновых переменных, можно разложить на составляющие, которые определяются квантовыми числами h , j и m , т. е.

$$|ljm\rangle = \sum_{h=\pm 1/2} |hjm\rangle \langle hjm|ljm\rangle. \quad (3.5)$$

При пространственном отражении спиральность изменяет знак [$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}$, см. формулу (1.22)], а поэтому при действии оператора \mathcal{P} на состояние $|hjm\rangle$ возникает состояние $|-hjm\rangle$ с фазовым множителем, зависящим от выбора относительной фазы состояний с определенной спиральностью. Так, состояния с определенной четностью $|ljm\rangle$ содержат составляющие с $h = +1/2$ и $h = -1/2$ с одинаковой интенсивностью, а волновые функции, зависящие от угловых и спиновых переменных, для состояний с $l = j \pm 1/2$ отличаются только относительной фазой двух компонент с разной спиральностью. Угловая волновая функция для состояния с определенной спиральностью $|hjm\rangle$ содержит функцию D_{mh}^j , являющуюся элементом матрицы вращения. Детальная форма волновой функции (3.1) в m - и h -представлениях и правило фаз рассматриваются в приложении 1, п. 1.

Часто оказывается удобным выразить полное состояние, соответствующее наличию одной частицы сверх заполненных оболочек, в виде

$$|J=j, M=m\rangle = a^\dagger(jm)|\hat{0}\rangle, \quad (3.6)$$

где $a^\dagger(jm)$ — оператор рождения частицы в состоянии с квантовыми числами n , l , j и m (свойства операторов рождения и уничтожения рассматривались в гл. 2, приложение 1). Состояние, соответствующее заполненным оболочкам и обозначаемое через $|\hat{0}\rangle$, играет роль обобщенного вакуума.

2. Дырочные состояния, частично-дырочное сопряжение

Состояния, которые образуются при удалении из заполненных оболочек частицы с угловым моментом j , можно описывать как состояния конфигурации $(j)^{2j}$, содержащей $2j$ частиц, угловой момент каждой из которых равен j . В силу принципа Паули существует взаимнооднозначное соответствие между состояниями такой конфигурации (дырочные состояния) и состояниями одной частицы с угловым моментом j . Кроме того, матричные элементы между дырочными состояниями преобразованием симметрии связаны с матричными элементами между соответствующими частичными состояниями. Ниже мы рассмотрим некоторые простые свойства частично-дырочной симметрии. Более подробно данный вопрос рассматривается в приложении 2. (Частично-дырочное сопряжение для ядерных конфигураций аналогично соответствующему сопряжению в оболочечной модели атома [106, 355].)

Для выражения симметрии между частицами и дырками особенно удобен метод операторов рождения и уничтожения [30]. Рождение дырочного состояния с квантовыми числами n, l, j, m эквивалентно уничтожению частицы в состоянии с квантовыми числами $n, l, j, -m$ (сопряженное состояние). Фазы дырочных состояний удобно выбрать так, чтобы сопряженные состояния были связаны между собой операцией обращения времени. Тогда для оператора $b^\dagger(jm)$, рождающего дырку, будем иметь

$$b^\dagger(jm) \equiv a(\bar{jm}) = (-1)^{j+m} a(j-m), \quad (3.7)$$

где состояние $|\bar{jm}\rangle$ получается из состояния $|jm\rangle$ при обращении времени [см. формулу (1.40)], т. е.

$$|\bar{jm}\rangle \equiv \mathcal{T}|jm\rangle = (-1)^{j+m}|j-m\rangle. \quad (3.8)$$

Наличие в формуле (3.7) фазового множителя $(-1)^m$ означает, что операторы $b^\dagger(jm)$ с разными магнитными квантовыми числами m являются составляющими неприводимого тензорного оператора ранга j (см. гл. 1, приложение 1, п. 5). Таким образом, фазы дырочных состояний удовлетворяют обычным соотношениям, которые применяются для состояний с заданным угловым моментом:

$$|j^{-1}m\rangle = b^\dagger(jm)|\hat{0}\rangle = a(\bar{jm})|\hat{0}\rangle. \quad (3.9)$$

Матричные элементы для дырочных состояний связаны с матричными элементами для частичных состояний соотношением

$$\begin{aligned} \langle j_2^{-1}m_2 | F | j_1^{-1}m_1 \rangle &= \\ &= -\langle \bar{j_1}m_1 | F | \bar{j_2}m_2 \rangle + \langle \hat{0} | F | \hat{0} \rangle \delta((n_1l_1)j_1m_1, (n_2l_2)j_2m_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь F — произвольный одночастичный оператор. Среднее значение $\langle \hat{0} | F | \hat{0} \rangle$ для заполненных оболочек равно нулю, если оператор F не инвариантен относительно вращений (или не содержит скалярных составляющих). Соотношение (3.10) можно получить прямым вычислением, если для описания дырочных состояний взять определители Слэттера. Его можно непосредственно вывести, если оператор F выразить через операторы рождения и уничтожения и ввести определение (3.7) (см. приложение 2, п. 2).

В выражении (3.10) первый член можно преобразовать следующим образом [см. формулу (1.34)]:

$$\begin{aligned} -\langle \bar{j_1}m_1 | F | \bar{j_2}m_2 \rangle &= -\langle j_1m_1 | \mathcal{T}^{-1}F\mathcal{T} | j_2m_2 \rangle^* = \\ &= -\langle j_2m_2 | (\mathcal{T}^{-1}F\mathcal{T})^\dagger | j_1m_1 \rangle = \langle j_2m_2 | F_c | j_1m_1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где сопряженный оператор F_c определяется как

$$F_c = -(\mathcal{T}^{-1}F\mathcal{T})^\dagger. \quad (3.12)$$

Поэтому, если пренебречь средним значением по заполненным оболочкам, матричные элементы оператора F для дырочных состояний равны матричным элементам оператора F_c для соответствующих частичных состояний.

Оператор, удовлетворяющий соотношению

$$F_c = cF, \quad \text{где } c = \pm 1, \quad (3.13)$$

называется четным (если $c = +1$) или нечетным (если $c = -1$) относительно частично-дырочного сопряжения. (Любую функцию одночастичных переменных можно разделить на четную и нечетную части.) Для примера приведем следующие нечетные и четные операторы:

$$\left. \begin{array}{l} F(r) \\ (1 \cdot s) F(r) \end{array} \right\} \quad c = -1, \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{array}{l} sF(r) \\ p \\ l \end{array} \right\} \quad c = +1.$$

Частично-дырочное сопряжение можно также выразить посредством унитарного оператора \mathcal{U}_h , который для одночастичных состояний, содержащихся в заполненных оболочках, преобразует оператор $a^\dagger(jm)$ в $b^\dagger(jm)$ (см. приложение 2).

3. Изоспин частичных и дырочных состояний

Если ядро содержит нейтроны и протоны, заполняющие одни и те же уровни, то результирующий изоспин заполненных уровней $T_0 = 0$, а для состояния, которое образуется при добавлении одной частицы, изоспин $T = t = 1/2$, т. е.

$$\left| jm, \quad T = t = \frac{1}{2}, \quad M_T = m_t \right\rangle = a^\dagger(jm, m_t) | \hat{0} \rangle, \quad (3.15)$$

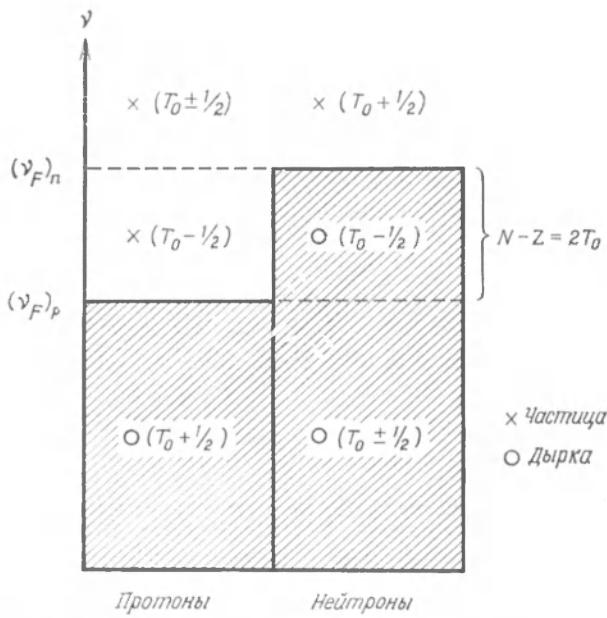
причем $m_t = +1/2$ для нейтрона и $m_t = -1/2$ для протона.

Изоспин дырочного состояния также равен $1/2$, но для протонной дырки $M_T = 1/2$, а для нейтронной $M_T = -1/2$. Но соотношение между фазами для изоспинового дублета, содержащего состояния, которые образуются при действии оператора протонной дырки $b^\dagger(j_p m) = a(\bar{j}_p m) = a(jm, m_t = -1/2)$ и соответствующего оператора нейтронной дырки, отличается от обычного соотношения. Для состояния с заданным угловым моментом соответствующий выбор фазы дырочных состояний обеспечивался фазовым множителем $(-1)^{j+m}$ в определении (3.7). Подобным же образом можно образовать дырочные состояния с обычными трансформационными свой-

ствами в изопространстве, а именно

$$\begin{aligned} |j^{-1}m, m_t\rangle &= b^\dagger(jm, m_t) |\hat{0}\rangle = \\ &= \begin{cases} -b^\dagger(j_p m) |\hat{0}\rangle = -|j_p^{-1}m\rangle & \text{при } m_t = +\frac{1}{2}, \\ +b^\dagger(j_n m) |\hat{0}\rangle = +|j_n^{-1}m\rangle & \text{при } m_t = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.16) \end{aligned}$$

В некоторых случаях для дырочных состояний удобнее обозначения j_p^{-1} и j_n^{-1} . Но когда рассматриваются сложение изоспинов и их трансформационные свойства, выгоднее обозначать дырочные состояния квантовым числом m_t .



Ф и г. 3.1. Полный изоспин конфигураций, в которых сверх заполненных оболочек с $\bar{T} = T_0$ имеется одна частица или одна дырка.

Операторы рождения дырки $b^\dagger(jm, m_t)$ связаны с операторами уничтожения частицы $a(jm, m_t)$ соотношениями

$$\begin{aligned} b^\dagger(jm, m_t) &= a(jm, m_t) = \underbrace{(-1)^{j+m+1/2+m} a(j-m, -m_t)}, \\ |jm, m_t\rangle &\equiv \mathcal{F} |jm, m_t\rangle, \quad (3.17) \end{aligned}$$

где преобразование \mathcal{F} , кроме обращения времени, содержит операцию зарядовой симметрии \mathcal{R}_τ , определяющуюся выражением (4.59), т. е.

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}_\tau^{-1} \mathcal{F} = \exp \{i\pi T_y\} \mathcal{F}. \quad (3.18)$$

Преобразование операторов под действием частично-дырочного сопряжения \mathcal{F} рассматривается в приложении 2.

Если заполненных нейтронных уровней в ядре больше, чем протонных, то полный изоспин заполненных уровней $T_0 = (M_T)_0 = 1/2(N - Z)$. Тогда одночастичные и дырочные конфигурации могут содержать состояния с $T = T_0 \pm 1/2$. Значения полного изоспина T различных возможных конфигураций указаны на фиг. 3.1, а соответствующие векторы состояний приводятся в пояснениях к фиг. 3.1. Легко видеть, что конфигурации, соответствующие низшим энергиям возбуждения, содержат единственное значение полного изоспина T ($T = T_0 + 1/2$ для p или p^{-1} и $T = T_0 - 1/2$ для r или n^{-1}). Конфигурации типа p и n^{-1} , соответствующие более высоким энергиям возбуждения, приводят к дублету по T ($T = T_0 \pm 1/2$), а векторы состояний содержат составляющие, в которых заполненные оболочки «повернуты» в изопространстве и имеют $M_T = T_0 - 1$.

ПРИМЕРЫ К § 1

Полный изоспин ядра для одночастичных и дырочных конфигураций (фиг. 3.1)

На фиг. 3.1 представлена конфигурация основного состояния ядра с $N > Z$. Заштрихованная площадь относится к занятым орбитам, содержащим N низших нейтронных и Z низших протонных уровней. Орбиты обозначаются совокупностью квантовых чисел v (например, $v = nljm$) и расположены в порядке возрастания по энергии. Последняя занятая орбита (уровень Ферми) для нейтронов обозначена символом $(v_F)_n$, а для протонов — символом $(v_F)_p$.

Для любой конфигурации, такой, как конфигурация основного состояния, в которой все орбиты, занятые протонами, заняты также и нейtronами, полный изоспин T равен изоспину нейтронного избытка, т. е. $T = T_0 = M_T = 1/2(N - Z)$. Действительно, такое состояние обращается в нуль, если на него подействовать составляющей полного изоспина $T_+ = \sum_h (t_x + it_y)_h$, которая увели-

чивает проекцию M_T на единицу. Поэтому такое состояние оказывается полностью выстроенным в изопространстве, т. е. $M_T = T$. Мы здесь пренебрегаем небольшой разницей между протонными и нейтронными орбитами, вызванной кулоновским потенциалом. О возникающей смеси различных значений изоспинов говорилось в связи с фиг. 2.6.

Изоспиновые квантовые числа, связанные с одночастичными и дырочными конфигурациями, показаны на фиг. 3.1. Соответствующие векторы состояний

имеют следующий вид:

а. n при $v > (v_F)_n$ или p^{-1} при $v \leq (v_F)_p$

$$T = M_T = T_0 + \frac{1}{2},$$

$$\left| v; T = T_0 + \frac{1}{2}, M_T = T_0 + \frac{1}{2} \right\rangle = a^\dagger \left(v, m_t = \frac{1}{2} \right) | T = T_0, M_T = T_0 \rangle, \quad (3.19a)$$

$$\left| v^{-1}; T_0 + \frac{1}{2}, T_0 + \frac{1}{2} \right\rangle = b^\dagger \left(v, m_t = -\frac{1}{2} \right) | T_0, T_0 \rangle.$$

б. n^{-1} или p при $(v_F)_p < v \leq (v_F)_n$

$$T = M_T = T_0 - \frac{1}{2},$$

$$\left| v; T = T_0 - \frac{1}{2}, M_T = T_0 - \frac{1}{2} \right\rangle = a^\dagger \left(v, m_t = -\frac{1}{2} \right) | T = T_0, M_T = T_0 \rangle, \quad (3.19b)$$

$$\left| v^{-1}; T_0 - \frac{1}{2}, T_0 - \frac{1}{2} \right\rangle = b^\dagger \left(v, m_t = -\frac{1}{2} \right) | T_0, T_0 \rangle.$$

в. p при $v > (v_F)_n$ или n^{-1} при $v \leq (v_F)_p$

$$T = T_0 \pm \frac{1}{2}, \quad M_T = T_0 - \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} & \left| v; T = T_0 - \frac{1}{2}, M_T = T_0 - \frac{1}{2} \right\rangle = \\ & = \left(\frac{2T_0}{2T_0 + 1} \right)^{1/2} a^\dagger \left(v, m_t = -\frac{1}{2} \right) | T_0, T_0 \rangle - \\ & - \left(\frac{1}{2T_0 + 1} \right)^{1/2} a^\dagger \left(v, m_t = \frac{1}{2} \right) | T_0, T_0 - 1 \rangle, \quad (3.19b) \\ & \left| v; T_0 + \frac{1}{2}, T_0 - \frac{1}{2} \right\rangle = \\ & = \left(\frac{1}{2T_0 + 1} \right)^{1/2} a^\dagger \left(v, m_t = -\frac{1}{2} \right) | T_0, T_0 \rangle + \\ & + \left(\frac{2T_0}{2T_0 + 1} \right)^{1/2} a^\dagger \left(v, m_t = \frac{1}{2} \right) | T_0, T_0 - 1 \rangle. \end{aligned}$$

Состояния $| v^{-1}; T_0 \pm \frac{1}{2}, T_0 - \frac{1}{2} \rangle$ такие же, как и состояния $| v; T = T_0 \pm \frac{1}{2}, T_0 - \frac{1}{2} \rangle$ при $a^\dagger(v, m_t) \rightarrow b^\dagger(v, m_t)$.

Векторы состояний выражены через операторы рождения частиц и дырок, определенные выражениями (3.15) и (3.16). Состояния (3.19b) содержат составляющие, которые являются изобарическими аналогами заполненных оболочек:

$$\begin{aligned} | T_0, T_0 - 1 \rangle &= (2T_0)^{-1/2} (T_x - iT_y) | T_0, T_0 \rangle = \\ &= \sum_{(v_F)_p < v \leq (v_F)_n} (2T_0)^{-1/2} a^\dagger(v_p) a(v_n) | T_0, T_0 \rangle. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Состояние (3.20) представляет собой когерентную суперпозицию составляющих, которые получаются при превращении каждого из $2T_0$ нейтронов нейтронного избытка в протон.

Другие состояния, принадлежащие конфигурациям с одной частицей или одной дыркой, можно получить путем образования изобарических аналогов состояний, рассмотренных выше. Но такие состояния нельзя получить добавлением или удалением частицы из ядра, полностью выстроенного в изопространстве ($M_T = T_0$).

§ 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ

Экспериментальные данные относительно энергии уровней ядер, у которых сверх заполненных оболочек имеется одна частица или одна дырка, представлены на фиг. 3.2а — 3.2е. Мы видим, что низшие уровни всех достаточно хорошо изученных ядер как раз соответствуют уровням теоретических одночастичных спектров (фиг. 2.23 и 2.30). Тем самым неопровергнуто подтверждается правильность представления об оболочечной структуре ядер.

На фиг. 3.3 и 3.5 экспериментальные значения энергий связи сравниваются с расчетными значениями, вычисленными в случае статического потенциала с включением спин-орбитальной связи. Глубина и радиус действия потенциала согласуются со значениями, которые получаются из экспериментов по рассеянию. В таких расчетах довольно хорошо воспроизводятся уровни, лежащие вблизи поверхности Ферми, а экспериментально установленные глубокие дырочные уровни указывают на наличие зависимости потенциала от скорости, примерно такой же, как и в случае оптического потенциала.

В то время как основные особенности экспериментальных одночастичных спектров можно хорошо объяснить, если взять потенциал, параметры которого медленно изменяются с ростом A и Z , в положении уровней наблюдаются небольшие отклонения. Некоторые из этих отклонений могут быть обусловлены характером радиальной зависимости среднего потенциала, отражая тем самым оболочечную структуру ядра, или же более специфической зависимостью состояний в среднем потенциале. Кроме того, было установлено, что энергетическое расстояние между частицами и дырками несколько больше, чем вычисленное с потенциалом, особенно для легких ядер. Такой эффект может возникать из-за зависимости энергии связи ядра от изоспина, благодаря чему энергия связи для заполненных оболочек ($T = 0$) оказывается меньше, чем для тех конфигураций, содержащих одну частицу или одну дырку, для которых $T = 1/2$. (Этот и другие эффекты, которые могут вносить вклад в энергетическое расстояние между одночастичным и дырочным состояниями, рассматриваются ниже.)

Для заполненных оболочек с $T_0 \neq 0$ высоколежащие конфигурации протона и нейтронной дырки приводят к изоспиновому дублету

с $T = T_0 \pm 1/2$ (см. фиг. 3.1). Энергетическое расстояние между членами этого дублета в первом приближении выражается через радиальный матричный элемент изовекторного потенциала $V_1(r)$, входящего в формулу (2.29), а именно:

$$\Delta E = E\left(T = T_0 + \frac{1}{2}\right) - E\left(T = T_0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{T_0 + 1/2}{A} \langle l_j | V_1(r) | l_j \rangle, \quad (3.21)$$

С изовекторной частью спин-орбитального члена ядерного потенциала может быть связан дополнительный эффект. Экспериментальные данные, свидетельствующие об энергетическом расщеплении изоспинового дублета, приведены в табл. 3.1. Расчет энергии этого расщепления дает величину изовекторного потенциала в согласии со значениями, полученными из других данных.

Одночастичная и дырочная теория спектров ядер, полученных путем прибавления или удаления частицы из заполненных оболочек, применима только к самым нижним уровням. При энергиях же, сравнимых с энергиями первых возбужденных состояний ядер с заполненными оболочками, вследствие возбуждения степеней свободы заполненного остова должны появляться дополнительные уровни. Такое усложнение спектра действительно наблюдается. Например, в некоторых легких ядрах (таких, как ядра с $A = 17, 41, 47$ и 49) спектр, связанный с возбуждением остова, появляется при значительно меньших энергиях, чем в ядрах, содержащих только заполненные оболочки. Это показывает, что стабильность заполненных оболочек существенно нарушается взаимодействием остова с внешней частицей (или дыркой).

Оказалось, что в области энергий выше начала возбуждений остова плотность уровней быстро увеличивается (см. хорошо изученные спектры ядер ^{17}O и ^{41}Ca). Одночастичные состояния, появляющиеся в этой области спектра, могут взаимодействовать с соседними уровнями, у которых те же значения спина и четности, и «расторвяться» в этих уровнях. Влияние такого «расторжения» уровней обнаруживается, например, в спектрах ядер ^{41}Ca и ^{49}Sc , приведенных на фиг. 3.2в и 3.2г, в результатах анализа резонансного рассеяния протонов на ядре ^{16}O (табл. 3.8) и в дырочных состояниях ядра ^{16}O , возбуждаемых при реакции ($p, 2p$) (фиг. 2.27).

Важным направлением в современных исследованиях является установление связи между одночастичным потенциалом и взаимодействием нуклонов. В случае несингулярных взаимодействий такую связь можно установить, проводя расчеты самосогласованного поля по методу Хартри — Фока, как это делают в атомной физике. (Уравнения, определяющие самосогласованный потенциал, приведены в приложении 2, п. 3). Предварительные исследования, которые были проведены до сих пор для ядерных систем, помогли, в частности, объяснить зависимость одночастичного потенциала от состояния частицы. (Обзор этих исследований см. в работе [18].)

ПРИМЕРЫ К § 2

Спектры ядер с одной частицей или одной дыркой сверх заполненных оболочек (фиг. 3.2а—3.2е)

На фиг. 3.2а — 3.2е приведены имеющиеся данные относительно спектров ядер, у которых сверх заполненных нейтронных и протонных оболочек имеется ± 1 нуклон. Были выбраны только конфигурации с главными заполненными оболочками (N или Z равно одному из магических чисел 2, 8, 20, 28, 50, 82 и 126).

Для наблюдаемых энергетических уровней приведены энергии возбуждения в мегазлектронвольтах, а также имеющиеся данные относительно спинов I и четностей π . Сомнительные значения квантовых чисел I и π заключены в скобки. Кроме того, на схемах приведены абсолютные значения энергии связи \mathcal{B} для ядер, содержащих только заполненные оболочки, а также разности $\Delta\mathcal{B}$ энергий связи ядра с дважды заполненными оболочками и соответствующего соседнего ядра. Эти разности энергий связи представляют собой энергию отделения протонов и нейтронов в ядрах с заполненными оболочками и в ядрах с одной дополнительной частицей.

Для ядер, у которых сверх магического остова с $T_0 = 0$ ($N = Z$) имеется одна частица или одна дырка, изоспин T низколежащих состояний равен $1/2$. Поэтому мы перечисляем только квантовые числа T для тех высоколежащих уровней, изоспин которых по имеющимся данным равен $3/2$. Для заполненных оболочек с $T_0 \neq 0$ добавление или удаление частицы может привести к состояниям с $T = T_0 \pm 1/2$ (фиг. 3.4). Спектры с различными значениями T на некоторых схемах показаны раздельно. Спектры с одинаковыми значениями A и T , отличающиеся только квантовым числом M_T , обнаруживают сходство, которое следует из изобарической инвариантности.

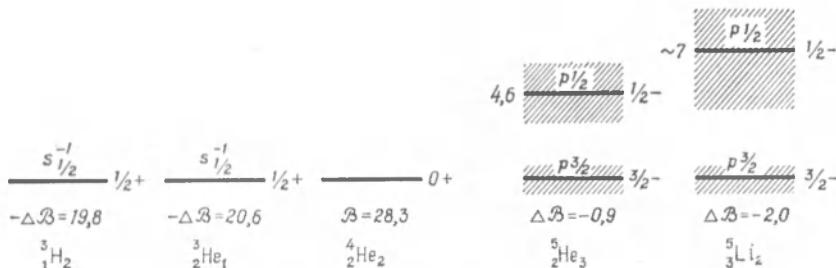
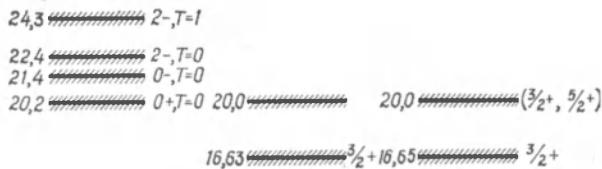
Для уровней, свойства которых соответствуют одночастичным и дырочным конфигурациям, приведены одночастичные квантовые числа l и j . Идентификация этих уровней основывается частично на том, что значения их спинов, четностей и энергий приближенно соответствуют значениям, которые должны быть в случае отдельной частицы или дырки (фиг. 2.23). Дальнейшая проверка присущих этим уровням квантовых чисел производится путем анализа электромагнитных моментов и вероятностей γ -переходов (см. табл. 3.2—3.4), а также вероятностей β -распада (см. табл. 3.5 и 3.6). Важную информацию дают также реакции с передачей одного нуклона и опыты по рассеянию нуклонов на ядрах с заполненными оболочками. (Соответствующие примеры рассматриваются в табл. 3.7 и 3.8.)

Спектры ${}^4\text{He}$ и соседних ядер (фиг. 3.2а)

У системы с $A = 5$ нет состояния, стабильного по отношению к испусканию частицы. Это можно считать особенно наглядным проявлением свойства насыщения ядерных сил. Одночастичный характер уровней $p_{3/2}$ и $p_{1/2}$ подтверждается анализом рассеяния нуклонов на ядре ${}^4\text{He}$.

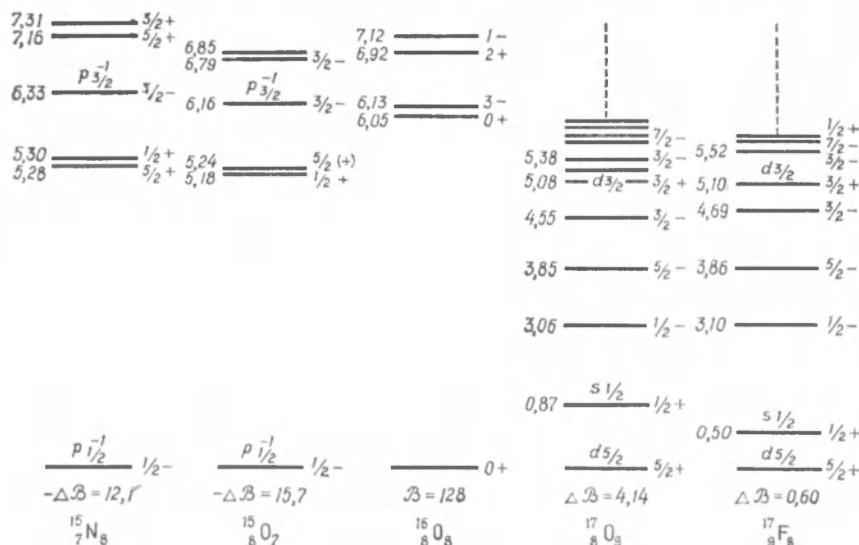
Спектры ${}^{16}\text{O}$ и соседних ядер (фиг. 3.2б)

Два низших состояния системы с $A = 17$, по-видимому, хорошо описываются как одночастичные. (См. анализ электромагнитных моментов и вероятностей β -распада, приведенных в табл. 3.2, 3.3 и 3.5.) Но начиная примерно с 3 Мэв наблюдается довольно сложная структура уровней, связанная с возбуждением заполненных оболочек. Структуру этих уровней изучали в опытах по рассеянию нуклонов на ядре ${}^{16}\text{O}$, в которых было показано, что только состояния $3/2+$



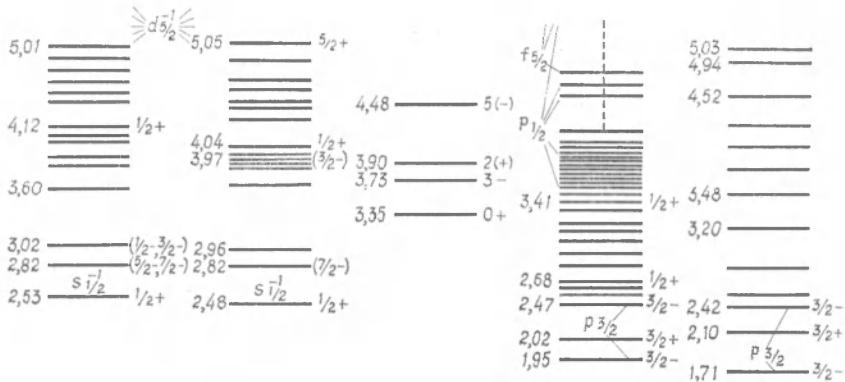
Фиг. 3.2а. Ядерные спектры.

Экспериментальные данные по спектрам ядер ${}^5\text{He}$ и ${}^5\text{Li}$ собраны в работе [282]. Данные, относящиеся к возбужденным состояниям ядра ${}^4\text{He}$, взяты из обзора [323]. Энергии связи, указанные на фиг. 3.2а — 3.2е, взяты из работы [311]. Все приведенные на данной фигуре возбужденные состояния нестабильны относительно испускания частицы и имеют довольно большие ширины, что показано штриховкой. В случае одночастичных уровней $p_{3/2}$ и $p_{1/2}$ ширина заштрихованных участков приближенно соответствует ширине резонансов.



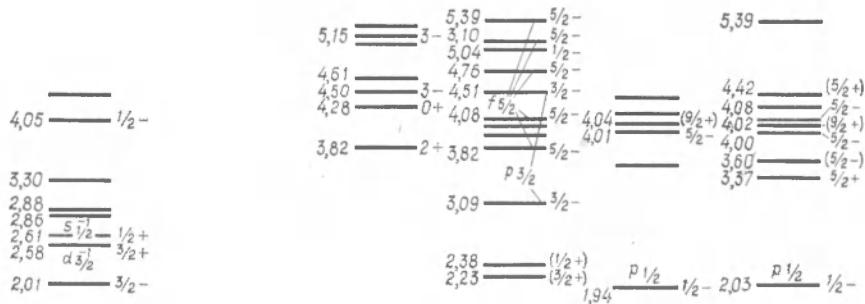
Фиг. 3.2б. Ядерные спектры.

Схемы уровней основаны на данных работ [280, 343] (единственное исключение — исправленное значение спина для уровня с энергией 3,8 Мэв в ядрах ${}^{17}\text{O}$ и ${}^{17}\text{F}$ [394]). Уровни ядра ${}^{17}\text{O}$ выше 4 Мэв и ядра ${}^{17}\text{F}$ выше 0,6 Мэв нестабильны относительно испускания частицы, и, следовательно, у некоторых из этих уровней значительно естественная ширина (см. табл. 3.8).



Ф и г. 3.2в. Ядерные спектры.

Схемы уровней основаны на данных авторов, цитируемых в работах [343, 93]. Дополнительные сведения были получены из реакций $^{40}\text{Ca}(t, \alpha)^{39}\text{K}$ [236] и $^{39}\text{K}(^3\text{He}, d)^{40}\text{Ca}$ [154].



Ф и г. 3.2г. Ядерные спектры.

Схемы уровней этой фигуры основаны на данных авторов, цитируемых в работах [343, 93]. Дополнительные сведения были получены из реакций $^{48}\text{Ca}(d, ^3\text{He})^{47}\text{K}$ [338], $^{48}\text{Ca}(p, d)^{49}\text{Ca}$ [108], $^{48}\text{Ca}(p, p)$ [256] и $^{48}\text{Ca}(t, \alpha)^{47}\text{K}$ [41].

с энергией 5,1 $M_{\text{эв}}$ в ядрах ^{17}O и ^{17}F можно приближенно рассматривать как одночастичные (см. табл. 3.8). Этот вывод подтверждается данными по реакциям срыва на ядре ^{16}O , приводящим к образованию ядер ^{17}O и ^{17}F .

В ядрах ^{15}N и ^{15}O низшие возбужденные состояния содержат возбуждения заполненных оболочек, по состоянию со спином $\frac{3}{2}$ и энергией 6,33 и 6,16 $M_{\text{эв}}$, по-видимому, в основном имеют дыроочную природу, что подтверждается данными по реакциям подхвата на ядре ^{16}O [440].

В дополнение к дыроочным состояниям, показанным на фиг. 3.2б, реакция ($p, 2p$) доказывает существование в довольно широкой области энергии (ширины примерно в 10 $M_{\text{эв}}$) протонной конфигурации $s_{1/2}^{-1}$ со средней энергией возбуждения порядка 30 $M_{\text{эв}}$ (см. фиг. 2.27).

Довольно большую разницу в энергиях возбуждения уровней $s_{1/2}$ в ядрах ^{17}O и ^{17}F можно объяснить уменьшением кулоновской энергии, обусловленным малой энергией связи протона с ядром (сдвиг Томаса — Эрмана). Так, например, простой расчет нейтронных и протонных уровней в ядерном потенциале с параметрами, приведенными на фиг. 2.30, и с кулоновским потенциалом, соответствующим равномерно заряженной сфере радиусом $R = 3,2$ ферми, дает разные значения для энергий связи уровней $d_{5/2}$ и $s_{1/2}$, причем для протонов энергия связи на 0,40 $M_{\text{эв}}$ меньше, чем для нейтронов.

Спектры ^{40}Ca и соседних ядер (фиг. 3.2б)

Одночастичные характеристики возбужденных состояний получены из данных по реакциям с передачей одного нуклона и рассеяния. Результаты анализа реакции (d, p), приводящей к образованию ядра ^{41}Ca , указаны в табл. 3.7. Было установлено, что возбужденные одночастичные конфигурации распределены по нескольким уровням, хотя основная доля (80—90%) первого возбужденного состояния относится к состоянию $p_{3/2}$. При рассеянии протонов на ^{40}Ca подобная же структура уровней обнаруживается и в случае ядра ^{41}Sc . Из реакции подхвата с образованием ядер ^{39}Ca и ^{39}K видно, что основная часть состояния $s_{1/2}^{-1}$ распределяется по первым возбужденным уровням этих ядер.

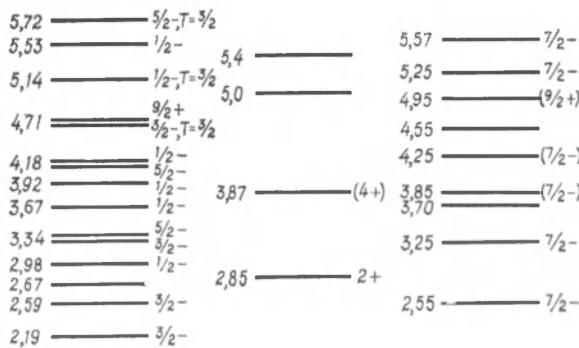
Спектры ^{48}Ca и соседних ядер (фиг. 3.2г)

Уровни с $T = \frac{9}{2}$ в ^{48}Sc наблюдались при резонансном рассеянии протонов на ядре ^{48}Ca . Характеристики таких уровней (энергетические расстояния между ними, спины, четности и спектроскопические факторы) соответствуют характеристикам аналоговых состояний ядра ^{48}Ca . Уровни с $T = \frac{9}{2}$ появляются при высоких энергиях возбуждения ядра ^{48}Sc ($E_{\text{возб}} \geq 11,5 M_{\text{эв}}$) там, где плотность уровней с $T = \frac{7}{2}$ очень велика. Ширина одночастичной силовой функции для $T = \frac{9}{2}$ обусловлена отчасти испусканием протона, а отчасти связью с уровнем $T = \frac{7}{2}$, вызванной кулоновским взаимодействием. (Об анализе аналоговых состояний, возбуждаемых при рассеянии протона, в случае $p + ^{116}\text{Sn}$ говорилось в связи с фиг. 1.9).

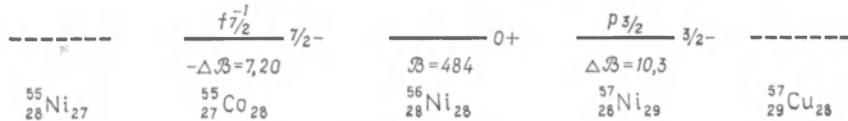
Из наблюдающихся одночастичных и дыроочных состояний для ядер с $A = 49$ и $A = 47$ можно получить данные относительно зависимости одночастичных энергий связи от изобарического спина (см. табл. 3.4).

Спектры ^{56}Ni и соседних ядер (фиг. 3.2д)

Все ядра, представленные на фиг. 3.2д, нестабильны относительно β -распада, и поэтому спектроскопические данные пока еще довольно неполны. Указанные на схемах одночастичные характеристики определены в основном по данным о спинах, четностях и положении уровней. Кроме того, для основного состояния ядра ^{56}Co измерен магнитный момент (см. табл. 3.3).

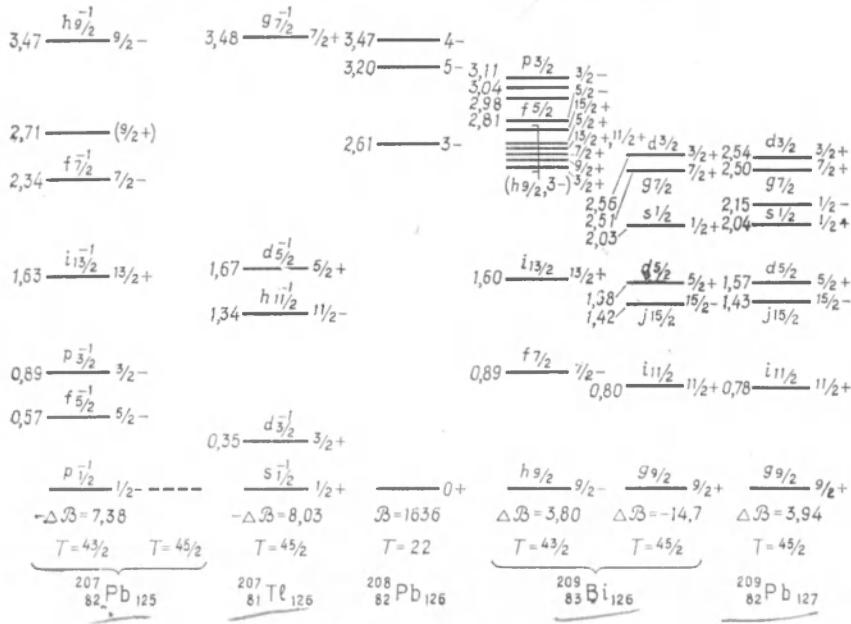


$1,05 \frac{p_{1/2}}{f_{5/2}} \frac{1}{2}^-$
 $0,75 \frac{p_{3/2}}{f_{5/2}} \frac{5}{2}^-$



Фиг. 3.2д. Ядерные спектры.

Данные о спектрах взяты из статей, цитируемых в работах [343, 93].



Фиг. 3.2е. Ядерные спектры.

Экспериментальные данные взяты из работы [343] и из статей, цитируемых в работе [93], и получены из реакций: $^{208}\text{Pb}(^4\text{He}, d)^{209}\text{Bi}$ [144] (см. также статьи, цитируемые в этой работе), $^{208}\text{Bi}(d, d')$ (частное сообщение Диамонда и сотр.), $^{208}\text{Pb}(\alpha, t)^{209}\text{Bi}$ [294], $^{208}\text{Pb}(p, p')$ [67] и $^{208}\text{Pb} (t, \alpha)^{207}\text{Tl}$ [237].

Спектры ^{208}Pb и соседних ядер (фиг. 3.2e)

Указанные на схемах одночастичные характеристики низколежащих уровней согласуются со всеми известными данными об этих состояниях (спектроскопические факторы определяются из реакций с передачей частицы, см. литературу, цитируемую в подписи к фиг. 3.2e; электромагнитные моменты см. в табл. 3.2, 3.3 и 3.4; вероятности β -распада см. в табл. 3.6). Состояния, наблюдающиеся в ядрах с $A = 207$ и $A = 209$, энергии которых значительно ниже первого возбужденного состояния ядра ^{208}Pb , являются одночастичными дырочными состояниями. Выше этой энергии наблюдается довольно высокая плотность уровней, из которых лишь несколько представлены на схемах. В качестве примера мультиплет в ядре ^{209}Bi на высоте примерно $2,6 \text{ MeV}$ классифицируется как октупольное возбуждение, аналогичное возбуждению, наблюдающемуся в ядре ^{208}Pb , которое наложено на основное состояние ядра ^{209}Bi . (О квантовых характеристиках этих уровней говорится также в гл. 6.)

Состояния ядра ^{209}Bi с $T = 45/2$, которые экспериментально наблюдаются как резонансы при упругом и неупругом рассеянии протона на ядре ^{208}Pb , имеют полные ширины от 2 до 300 keV .

Энергии и волновые функции одночастичных состояний ядра ^{208}Pb (фиг. 3.3 и 3.4)

Экспериментально установленные энергии связи для нейтронов и протонов в ядре ^{208}Pb на фиг. 3.3 сравниваются с энергиями, вычисленными с использованием потенциала, параметры которого приведены на фиг. 2.30. Для протонов потенциал симметрии взят со знаком, противоположным знаку потенциала симметрии для нейтронов, и добавлен кулоновский потенциал, соответствующий равномерно заряженной сфере радиуса $R = 1,27 A^{1/3} \text{ ферми}$. (Параметры потенциала были выбраны так [48], чтобы обеспечить наилучшее согласие с имеющимися данными относительно положения одночастичных состояний при $A = 208$.)

Волновые функции $\mathcal{H}_{nlj}(r)$, вычисленные для нейтронных орбит, приведены на фиг. 3.4. Для радиальных волновых функций мы взяли такую фазу, чтобы функция $\mathcal{H}_{nlj}(r)$ была положительной при больших r . Радиальные волновые функции спин-орбитальных дублетов ($j = l \pm 1/2$) очень сходны, и лишь в качестве примера на фиг. 3.4 приведены обе функции для орбит $i_{11/2}$ и $i_{13/2}$.

Многие эффекты зависят главным образом от значения волновых функций в области ядерной поверхности. В случае орбит с энергиями связи от нескольких мегазэлектронвольт до 10 MeV видно, что радиальная волновая функция при среднем радиусе $R_0 = 7,5 \text{ ферми}$ почти не зависит от квантовых чисел nlj и определяется соотношением

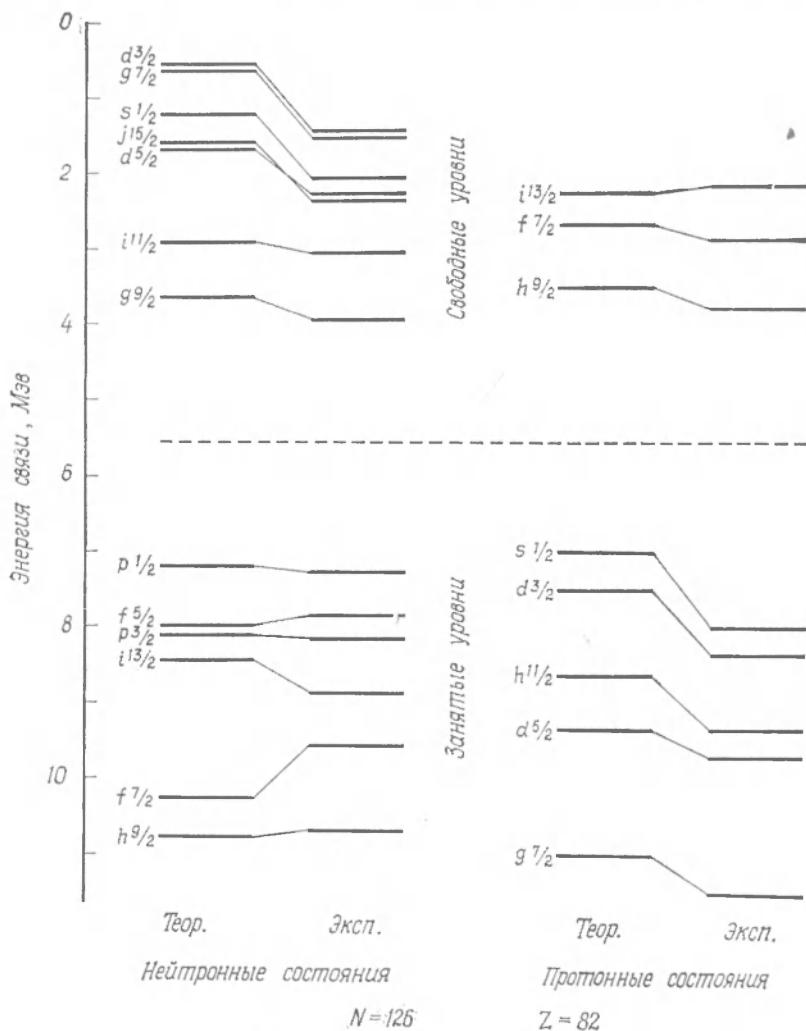
$$R_0^3 \mathcal{H}_{nlj}^2(R_0) \approx 1,4. \quad (3.22)$$

Энергии связи нейтронных состояний в ядрах ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca и ^{56}Ni (фиг. 3.5)

На фиг. 3.5 приведены экспериментальные значения энергий связи для состояний индивидуальных нейтрона и нейтронной дырки в заполненных оболочках ядер с $A = 16, 40, 48$ и 56 . В нескольких случаях наблюдались протонные уровни и не наблюдались нейтронные уровни. Тогда положение этих нейтронных уровней, которые на фиг. 3.5 обозначены пунктиром, было определено путем вычитания кулоновской энергии из энергий соответствующих протонных уровней. Для высоколежащих конфигураций, свойства которых, как было найдено, распределены по нескольким уровням (эффект силовой функции), мы указываем среднее положение одночастичного (или дырочного состояния),

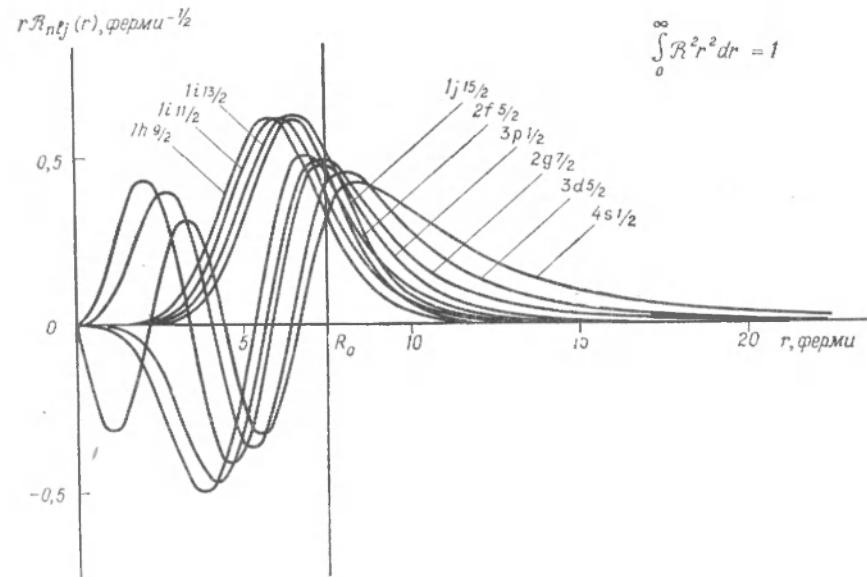
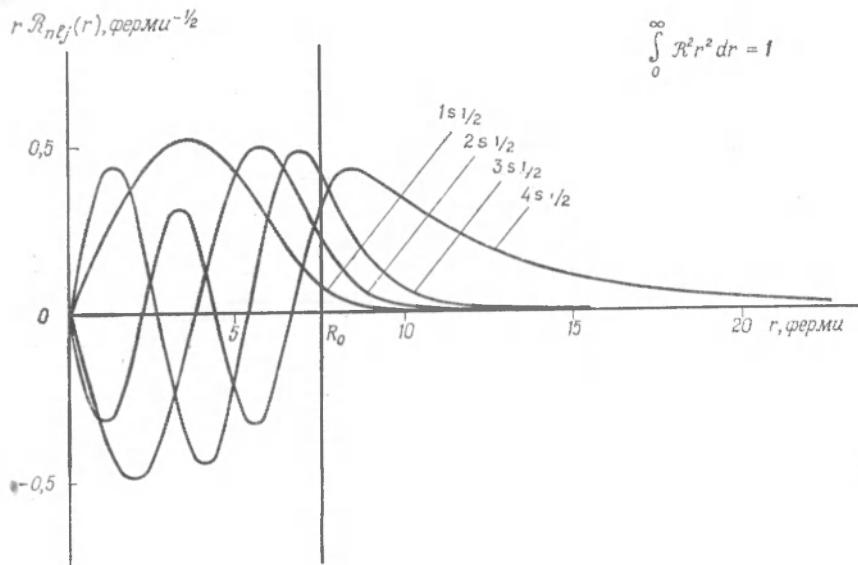
которое получается с учетом экспериментально наблюдаемого распределения весов одиночественных состояний по сложным уровням.

Вычисленные положения уровней соответствуют потенциалу, параметры которого (фиг. 2.30) выбраны так, чтобы достичь наилучшего согласия с наблюдаемым положением уровней при $A = 208$. Были рассчитаны только связанные состояния. В ядре ^{48}Ca , изоспин которого $T_0 = 4$, дырочные состояния ниже уровня $f_{7/2}$ могут приводить к состояниям с $T = 7/2$ и $T = 9/2$. Для экспериментально установленных уровней, представленных на фиг. 3.5, изо-



Фиг. 3.3. Энергия связи.

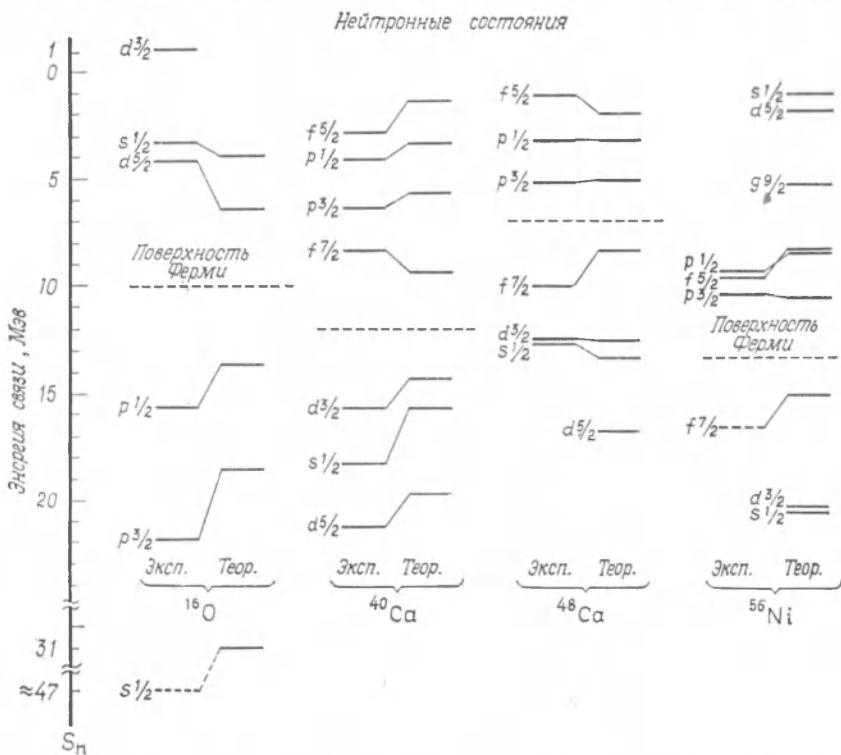
Экспериментальные значения энергий связи отдельных нуклонов с ядром ^{208}Pb взяты из данных, приведенных на фиг. 3.2е, а теоретические — из работы [48].



Фиг. 3.4. Нейтронные радиальные функции при $A = 208$ и $Z = 82$, вычисленные Бломквистом и Вальборном [48].

спин $T = 7/2$, и при расчете их положения было учтено влияние зарядово-обменного члена в потенциале [см. формулы (2.29) и (3.21)]. Это приводит к сдвигу уровней вверх примерно на 1 Мэв.

В расчетных спектрах приблизительно воспроизведится положение экспериментально наблюдаемых одночастичных уровней вблизи поверхности Ферми, но занижается энергия связи глубоко лежащих дырочных состояний



Фиг. 3.5. Экспериментальные значения энергии связи нейтронных состояний. Найдены из спектров, которые представлены на фиг. 3.2б — 3.2д, а также взяты из работ, указанных в подписях к фигурам. Положение уровня $s_{1/2}$ в ядре ^{16}O с энергией 47 Мэв определено по экспериментальному среднему положению уровня протонной дырки в состоянии $s_{1/2}$ (фиг. 2.30).

(см. особенно уровень $s_{1/2}^{-1}$ в ядре ^{16}O). Это можно объяснить наличием в потенциале членов, зависящих от скорости. Данный эффект можно приближенно учесть, считая глубину потенциала V_0 функцией энергии E рассматриваемого состояния. Тогда зависимость от скорости, наблюдающаяся в случае оптического потенциала [см. формулу (2.176)], довольно хорошо описывает и наблюдающуюся тенденцию для энергий связи. Зависимость от скорости можно также учесть посредством нелокального не зависящего от энергии потенциала (см. работы, указанные в связи с фиг. 2.30).

Наблюдаются также небольшие вариации в положении уровней, которые накладываются на медленное изменение в зависимости от A и Z и не могут быть воспроизведены с помощью рассмотренного простого потенциала.

Примером такой «тонкой структуры» в положении уровней может служить смещение уровня $f_{5/2}$ относительно уровней $p_{3/2}$ и $p_{1/2}$ при изменении от $A = 48$ до $A = 56$. В этой области заполняется протонный уровень $f_{7/2}$ и понижение нейтронного уровня $f_{5/2}$ объясняется сходством радиальных волновых функций уровней $f_{7/2}$ и $f_{5/2}$. Таким образом, вклад в средний потенциал от протонов уровня $f_{7/2}$ имеет радиальную форму, наиболее благоприятную для уровня $f_{5/2}$. (Об экспериментальном подтверждении эффектов тонкой структуры такого типа говорится в работах [103, 104]. Теоретические оценки таких смещений уровней были рассмотрены в работе [126] в связи с интерпретацией систематики энергий изомерных переходов, даваемой в работе [201]. Более современный анализ с учетом парных корреляций см., например, в работах [400, 401].)

Противоположный, но более слабый эффект обнаруживается в относительном положении уровней f и p в ядрах с $A = 40$ и $A = 48$. В этой области нейтроны заполняют уровень $f_{7/2}$ и наличие потенциала симметрии (зависящего от изоспина) приводит к слабому отталкиванию пейтронных уровней.

Экспериментальные разности энергий частичных и дырочных состояний оказались несколько больше вычислений на основе одиночастичного потенциала. Этот эффект особенно заметен в легких ядрах и составляет примерно 5 МэВ в ядре ^{16}O . Увеличение разности энергии между занятыми и позаполненными орбитами обусловлено тем, что энергия связи ядра зависит от изоспина. Так, например, частица, добавленная к заполненным оболочкам с $N = Z$, движется в потенциале, созданном ядром с $T_0 = 0$, тогда как каждая из частиц заполненных оболочек движется в потенциале, создаваемом остальными частицами, которые образуют состояние с $T_0 = 1/2$. Возникающую при этом дополнительную энергию связи ΔE можно вычислить для дырочного состояния, пользуясь выражением (2.29) для потенциала симметрии. Взяв $T_{A-1} = 1/2$ и полный изоспин $T = 0$, а также значение (2.28) для V_1 , получаем

$$\Delta E \approx \frac{3}{4} \frac{V_1}{A} \approx 75 A^{-1} \text{ МэВ}, \quad (3.23)$$

т. е. по порядку величины ΔE совпадает с экспериментальными энергетическими сдвигами. Подобные же эффекты могут быть обусловлены спиновой зависимостью энергии связи и тем, что более предпочтительны состояния с высокой орбитальной симметрией (см., например, гл. 7).

При количественном анализе разности энергий частичных и дырочных состояний необходимо принимать во внимание ряд других дополнительных эффектов, в том числе зависимость потенциала от скорости и усиление взаимодействия между частицами на орбитах со сходными радиальными волновыми функциями. Энергия связи дырок может быть больше энергии связи частиц также вследствие корреляции в основном состоянии магнитических ядер и соответствующего уменьшения энергии этих состояний. Обратный эффект возникает из-за того, что для одиночастичных состояний величина A на единицу больше, чем для дырочных состояний. Связанное с этим увеличение радиуса приводит к сдвигу энергий одиночастичных состояний на величину порядка 2 ($\delta R/R$) $E_{\text{кин}} \approx \approx 25 A^{-1}$ МэВ. Более детальный расчет этого эффекта, основанный на кривых фиг. 2.30, для одиночастичных состояний в ядре ^{17}O дает величину сдвига, равную 0,75 МэВ. (Вопрос об энергетической щели между занятыми и свободными одиночастичными орбитами рассматривался в работах [262, 259] в связи с анализом самосогласованного потенциала ядра.)

При сравнении экспериментальных значений энергий связи с расчетными энергиями связи частицы в потенциале нужно учитывать поправку на то, что при резком удалении нуклона из ядра A остаток ядра не представляет собой самосогласованного состояния системы ($A - 1$) частиц (энергия перестройки). Эффект изменения радиуса можно определить по сжимаемости (см. фор-

мулу (2.207)]

$$\delta E = \frac{1}{2} (\delta r_0)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial r_0^2} \approx \frac{1}{2} A^{-1} b_{\text{комп}}, \quad (3.24)$$

считая, что $\delta r_0 \approx r_0/3A$. При $b_{\text{комп}} \approx 20 \text{ Мэв}$ получаем, что $\delta E \approx 10 \text{ эВ}^{-1} \text{ Мэв}$. При таком простом расчете пренебрегают зависимостью самосогласованного поля системы ($A = 4$) нуклонов от квантовых чисел орбиты, с которой была удалена частица. В частности, зависимость поля от скорости может привести к особенно большой энергии перестройки для глубоколежащих дырочных состояний.

Зависимость энергий отделения нуклонов от изоспина (табл. 3.1)

Если изоспин T_0 заполненных оболочек не равен нулю, то конфигурации, содержащие одну частицу или одну дырку, могут привести к двум разным ядерным состояниям с $T = T_0 \pm 1/2$. По энергии расщепления этого дублета можно определить величину одночастичного изовекторного потенциала.

Энергии отделения для одночастичных конфигураций ядра ^{49}Sc и дырочных конфигураций ядра ^{47}Ca перечислены во втором и третьем столбцах табл. 3.1. (В случае дырочных конфигураций величина S равна энергии, необходимой

Таблица 3.1
ЭНЕРГИЯ ОТДЕЛЕНИЯ S ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОДНОЧАСТИЧНЫХ
И ДЫРОЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Конфигурация	S		$(\Delta E)_{\text{эксп}}$	$(\Delta E)_{\text{теор}}$
	$T = 7/2$	$T = 9/2$		
$f_{5/2}$	5,0	-5,9	10,9	9,4
$p_{1/2}$	3,6	-3,9	7,5	8,2
$p_{3/2}$	6,1	-1,9	8,0	8,2
$d_{3/2}^{-1}$	12,5	22,4	9,9	9,8
$s_{1/2}^{-1}$	12,6	22,1	9,5	9,0

Энергии отделения S взяты с фиг. 3.2г и из работ, указанных в подиписи к фигуре. Величина ΔE равна разности энергий между изоспиновыми дублетами с квантовыми числами $T = 9/2$, $M_T = 7/2$ и $T = 7/2$, $M_T = 7/2$.

для удаления одной частицы из ядра ^{48}Ca с образованием дырочного состояния ядра ^{47}Ca .) В случае конфигураций $p_{3/2}$, $p_{1/2}$ и $f_{5/2}$ одночастичные состояния распределены по нескольким уровням, а перечисленные энергии представляют собой средневзвешенные значения силовой функции, определенные из реакций срыва и опытов по рассеянию (см. работы, цитируемые в подиписи к фиг. 3.2г). Для дырочных конфигураций с $T = 9/2$ наблюдались только уровни с $M_T = 9/2$ в ядре ^{47}K , а при расчете уровней с $M_T = 7/2$ в ядре ^{47}Ca считалось, что кулоновская энергия равна 6,8 Мэв. Это значение было получено из известной кулоновской энергии, равной 7,0 Мэв при $A = 49$ и $T = 9/2$, путем экстраполяции на основе соотношения (2.19).

В последнем столбце табл. 3.1 приведено расщепление изоспинового дублета, рассчитанное по формуле (3.21). Радиальные волновые функции одиночественных состояний определены в случае потенциала вида (2.180) с параметрами, указанными на фиг. 2.30. Хотя в среднем наблюдается довольно хорошее согласие между экспериментальными и теоретическими значениями расщепления, значение для уровня $f_{5/2}$ оказывается особенно большим. В этом отражается то обстоятельство, что изовекторный потенциал создается избыточными нейтронами, занимающими уровень $f_{7/2}$, и, следовательно, должен сильнее действовать на f -орбиты, чем на p -орбиты. (См. то, что говорится по поводу фиг. 3.5.) Если среднюю потенциальную энергию нейтронной орбиты в поле, создаваемом заполненной нейтронной оболочкой $f_{7/2}$, обозначить через $U_0 + t_2 U_1$, то потенциальная энергия в поле протонной оболочки $f_{7/2}$ будет равна $U_0 - t_2 U_1$. Следовательно, по относительному положению уровней $f_{5/2}$ и $p_{1/2}$ в ядрах с $A = 40, 48$ и 56 можно установить, что $U_1(f_{5/2}) - U_1(p_{1/2}) \approx 3 \text{ MeV}$. Это означает, что разность изоспинового расщепления для этих двух орбит равна $\frac{9}{8} \cdot 3 \text{ MeV} \approx 3.5 \text{ MeV}$ в согласии с данными табл. 3.1.

Кроме того, изовекторный потенциал, хотя и не таким прямым путем, можно рассчитать, сравнивая энергии связи для конфигураций $f_{7/2}$ и $f_{7/2}^{-1}$ в ядрах ^{40}Sc и ^{47}Ca . Энергия связи протона на уровне $f_{7/2}$ в ядре ^{49}Sc и нейтрона на уровне $f_{7/2}$ в ядре ^{46}Ca содержит потенциал симметрии

$$(t \cdot T_{A-1}) \frac{V_1}{A} = \begin{cases} -\frac{5}{2} \frac{V_1}{A} & \text{для } ^{49}\text{Sc} \text{ при } T_{A-1}=4, T=\frac{7}{2}, \\ \frac{7}{4} \frac{V_1}{A} & \text{для } ^{48}\text{Ca} \text{ при } T_{A-1}=\frac{7}{2}, T=4, \end{cases}$$

откуда получаем, что

$$\Delta E = S(f_{7/2}) + E_{\text{кул}} - S(f_{7/2}^{-1}) = \frac{47}{4A} \langle f_{7/2} | V_1(r) | f_{7/2} \rangle.$$

Экспериментальные энергии связи, представленные на фиг. 3.2г, и указанное выше значение для кулоновской энергии $E_{\text{кул}}$, равное 7.0 MeV , дают $\Delta E \approx \approx 6.7 \text{ MeV}$, тогда как потенциал $V_1(r)$, использованный в табл. 3.1, дает $\Delta E \approx \approx 8.9 \text{ MeV}$. Заметим, что величина ΔE , найденная путем сравнения энергий связи конфигураций $f_{7/2}$ и $f_{7/2}^{-1}$, очень сильно зависит от энергии заполненных оболочек. При уменьшении этой энергии уменьшается величина $S(f_{7/2})$ и возрастает $S(f_{7/2}^{-1})$. В приведенном выше сравнении мы также пренебрегли небольшим увеличением энергии $S(f_{7/2})$, которое обусловлено увеличением радиуса при добавлении частицы (см. то, что говорится о расстоянии между частичными и дырочными состояниями в связи с фиг. 3.5).

§ 3. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ

Поскольку электромагнитное взаимодействие характеризуется простыми и хорошо известными закономерностями, ядерные волновые функции удобно проверять, изучая электрические и магнитные моменты, а также вероятности переходов. В данном параграфе мы в основном рассмотрим эффекты, связанные с электрическим квадрупольным и магнитным дипольным моментами, которые позволили получить важные сведения относительно свойств отдельных нуклонов, движущихся в потенциале ядра.

1. Квадрупольные моменты и вероятности переходов $E2$

Экспериментальное значение квадрупольного момента показывает, насколько распределение заряда ядра отличается от сферически-симметричного. Квадрупольный момент определяется как

$$Q = \langle I, M = I | Q_{\text{оп}} | I, M = I \rangle, \quad (3.25)$$

а оператор квадрупольного момента выражается через плотность заряда $\rho_e(\mathbf{r})$:

$$eQ_{\text{оп}} = \int \rho_e(\mathbf{r}) r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) d\tau. \quad (3.26)$$

В случае одного протона на орбите $(nl)j$ получаем [см. формулы (3.69) и (4.153)], что

$$\begin{aligned} Q_{\text{одн}} &= \langle j, m = j | r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) | j, m = j \rangle = \\ &= 2 \langle jj20 | jj \rangle \left\langle j \frac{1}{2} 20 | j \frac{1}{2} \right\rangle \langle j | r^2 | j \rangle = -\frac{2j-1}{2j+2} \langle j | r^2 | j \rangle, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где среднее значение квадрата радиуса таково:

$$\langle j | r^2 | j \rangle = \int r^4 \mathcal{R}_{nlj}^2 dr. \quad (3.28)$$

Нейтрон не несет электрического заряда, и поэтому квадрупольный момент для конфигурации, содержащей один нейтрон, равен нулю.

Знак минус в формуле (3.27) говорит о том, что плотность вероятности нахождения частицы для состояния с $m = j$ концентрируется в экваториальной плоскости. При $j \gg 1$ квадрупольный момент $Q_{\text{одн}}$ стремится к $-\langle r^2 \rangle$, что соответствует распределению заряда, полностью сконцентрированного в экваториальной плоскости.

Для протонной дырки квадрупольный момент равен $-Q_{\text{одн}}$. Действительно, состояние с $M = j$ представляет собой состояние заполненного уровня, из которого удалена орбита с $m = -j$, а для подобной орбиты квадрупольный момент такой же, как и для орбиты с $m = j$. Противоположные знаки квадрупольных моментов для частицы и дырки — отражение того, что оператор квадрупольного момента, будучи функцией пространственных координат, под действием частично-дырочного сопряжения преобразуется с фазой $c = -1$ [см. формулу (3.14)].

Если в заполненных оболочках имеется нейтронный избыток, то частичные и дырочные конфигурации могут содержать составляющие, которые характеризуют обмен зарядом между остовом и частицей или дыркой. Для таких состояний квадрупольные моменты представляют собой линейные комбинации протонных и нейтронных моментов с коэффициентами, которые определяются векторами состояний (3.19).

Величина \mathcal{M} — это диагональный матричный элемент оператора квадрупольного момента (статический квадрупольный момент). Недиагональные же матричные элементы (моменты переходов) характеризуют электрические квадрупольные ($E2$) процессы (γ -распад, кулоновское возбуждение и т. д.). Амплитуды и вероятности переходов для таких процессов определяются матричными элементами электрического квадрупольного тензорного оператора

$$\mathcal{M}(E2, \mu) = \int \rho_e(r) r^2 Y_{2\mu}(\theta, \varphi) d\tau, \quad (3.29)$$

составляющая которого с $\mu = 0$ пропорциональна оператору $Q_{\text{оп}}$.

Матричные элементы неприводимого тензорного оператора, такого, как (3.29), между состояниями с определенными значениями углового момента и его проекции можно выразить через приведенные матричные элементы (матричные элементы с двумя черточками, см. гл. 1, приложение 1, п. 5). Так, из формул (3.25) и (3.26), с учетом (1.153) получаем, что

$$\begin{aligned} eQ_{\text{оп}} &= \left(\frac{16\pi}{5}\right)^{1/2} \mathcal{M}(E2, \mu=0), \\ eQ &= \left(\frac{16\pi}{5}\right)^{1/2} (2I+1)^{-1/2} \langle II | I \rangle \langle I | \mathcal{M}(E2) | I \rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Полная вероятность перехода (т. е. постоянная γ -распада, сечение кулоновского возбуждения и т. д.) выражается через приведенную вероятность перехода:

$$\begin{aligned} B(E2; I_1 \rightarrow I_2) &= \sum_{\mu M_2} |\langle I_2 M_2 | \mathcal{M}(E2, \mu) | I_1 M_1 \rangle|^2 = \\ &= (2I_1 + 1)^{-1} |\langle I_2 | \mathcal{M}(E2) | I_1 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Для перехода одного протона (или протонной дырки) получаем [см. формулу (3.69)], что

$$B_{\text{одн}}(E2; j_1 \rightarrow j_2) = \frac{5}{4\pi} e^2 \left\langle j_1 \frac{1}{2} | 20 | j_2 \frac{1}{2} \right\rangle^2 \langle j_2 | r^2 | j_1 \rangle^2. \quad (3.32)$$

Имеющиеся экспериментальные данные по электрическим квадрупольным моментам и вероятностям переходов для одночастичных и дырочных конфигураций приведены в табл. 3.2. Из таблицы видно, что экспериментальные значения квадрупольных моментов и вероятностей переходов $E2$ для конфигураций, содержащих один протон, по знаку и по порядку величины такие же, как и значения, найденные путем расчета с использованием одночастичных волновых функций. При количественном же сравнении возникает некоторая неопределенность из-за оценок радиальных матричных элементов. Но в общем экспериментально наблюдающиеся квадрупольные эффекты несколько больше эффектов, связанных с отдельным протоном, что указывает на существенный вклад от протонов заполненных оболочек.

Такой эффект особенно заметен для электрических квадрупольных моментов и вероятностей переходов, связанных с однопнейтронными конфигурациями. По знаку и порядку величины эти моменты одинаковы с расчетными значениями для конфигураций с одним протоном.

Искажение заполненных оболочек при добавлении частицы можно объяснить просто как следствие несферичности поля, создаваемого внешней частицей¹⁾. Порядок величины данного эффекта можно оценить, заметив, что отклонение распределения плотности от сферической симметрии — порядка A^{-1} и, следовательно, потенциал должен принимать аналогичную форму. Таким образом, орбита каждого протона в заполненной оболочке несколько искажается и приобретает дополнительный квадрупольный момент порядка $A^{-1}Q_{\text{одн}}$, знак которого совпадает со знаком массового квадрупольного момента поляризованной частицы. Полный индуцированный квадрупольный момент по порядку величины таков:

$$Q_{\text{пол}} \sim \frac{Z}{A} Q_{\text{одн}}, \quad (3.33)$$

что грубо соответствует величине наблюдающегося эффекта. Подчеркнем, что поскольку индуцированный момент по порядку величины равен поляризующему одночастичному моменту, при количественном расчете нужно учитывать также члены более высокого порядка, связанные с поляризующим действием индуцированного момента. Об анализе самосогласованного поля, обусловленного реакцией заполненных оболочек на присутствие отдельной частицы, говорится в гл. 9, § 1. Эффект поляризации можно также рассматривать как результат взаимодействия между частицей и коллективными колебаниями, связанными с деформацией остова (гл. 6 и 9).

Поляризация заполненных оболочек связана с виртуальным возбуждением частиц на более высокие уровни, а поэтому соответствующие частоты дают энергии $|\Delta E| \approx 2\hbar\omega \approx 80A^{-1/3} M\text{эв}$; см. формулу (2.131), довольно большие по сравнению с энергиями переходов ($\Delta E \sim 1 M\text{эв}$), приведенных в табл. 3.2. Следовательно, поляризация адиабатически следует за движением при таких переходах, а статическая поляризуемость, которая вводилась в связи с квадрупольным моментом Q , должна также влиять на перенормировку моментов перехода, что и наблюдается в действительности.

¹⁾ Эффекты перенормировки для одночастичных возбуждений подобны поляризации и диэлектрическим явлениям, которые изменяют электрическое и магнитное поля, создаваемые электронами в атомах и металлах. Наличие таких явлений в ядре частично следует из анализа связи между одночастичными и коллективными степенями свободы [357, 53], а частично из попыток примирения модели независимых частиц с сильным взаимодействием нуклонов в ядре (см., например, работу [73]). Ландau [489, 490] в теории ферми-жидкости сформулировал подход, основанный на перенормированных частично-подобных возбуждениях (иногда называемых квазичастичными возбуждениями) для бесконечной системы; приложение этого подхода к ядрам см. в книге Мигдала [493].

Перенормировка квадрупольного момента частицы — это лишь небольшое возмущение каждой из частиц заполненных оболочек. Поэтому в случае конфигураций, в которых сверх заполненных оболочек содергится несколько частиц, эффекты должны просто складываться и их удобно рассматривать как поправки к собственным характеристикам каждого отдельного нуклона, которыми он обладает вне заполненных оболочек.

Эффект квадрупольной поляризации часто характеризуют эффективным зарядом $e_{\text{эфф}}$, связанным с квадрупольными процессами:

$$(e_{\text{эфф}})_{E2} = \frac{\langle I_2 = j_2 || \mathcal{M}(E2) || I_1 = j_1 \rangle}{\langle j_2 || r^2 Y_2 || j_1 \rangle} = e \left(\frac{1}{2} - t_z \right) + (e_{\text{пол}})_{E2}. \quad (3.34)$$

Разность эффективного заряда и заряда отдельного нуклона называется поляризационным зарядом. Значения эффективного заряда, полученные на основании экспериментальных статических моментов и моментов переходов, приведены в табл. 3.2. Отметим, что величина $e_{\text{эфф}}$ может в какой-то мере зависеть от орбиты нуклона, в частности эффект поляризации уменьшается, когда энергия связи нуклона становится малой, ибо когда нуклон находится вне ядерной поверхности, он менее эффективно поляризует остов (см. переход в ядре ^{209}Pb , о котором говорится в связи с табл. 3.2).

Возникает также вопрос о том, одинаков ли поляризационный заряд для нейтронов и протонов, т. е. является ли $e_{\text{пол}}$ изоскаляром или же содержит и изовекторную составляющую. Такая составляющая должна существовать как следствие изовекторного ядерного потенциала, благодаря которому нейtron вне заполненных оболочек сильнее взаимодействует с протонами заполненных оболочек, чем с внешним протоном. Следовательно, для нейтрона поляризационный заряд должен быть несколько больше, чем для протона. Экспериментальные же данные пока еще не дают убедительного ответа на этот интересный вопрос.

2. Магнитные моменты

Благодаря большой разности между гиromагнитными отношениями g , связанными с различными составляющими полного углового момента ядра (орбитальными и спиновыми угловыми моментами нейтронов и протонов), по магнитному моменту ядра можно с высокой чувствительностью проверять ядерную схему связи.

Магнитный момент определяется как

$$\mu = \langle I, M = I | \mu_z | I, M = I \rangle, \quad (3.35)$$

где μ_z — составляющая векторного оператора μ по оси z . Для отдельного нуклона

$$\mu = g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s}. \quad (3.36)$$

Здесь g_l и g_s — орбитальное и спиновое гиromагнитные отношения, выраженные в единицах $e\hbar/2M_p c$:

$$g_l = \begin{cases} 1, & g_s = \begin{cases} 5,58 & \text{для протона,} \\ 0, & \\ -3,82 & \text{для нейтрона.} \end{cases} \end{cases} \quad (3.37)$$

Выражение (3.36) соответствует магнитному диполю точечного нуклона, движущемуся в статическом притягивающем поле. Поправки к этому выражению могут возникать из-за нуклонного взаимодействия, которое несколько изменяет внутреннюю структуру нуклонов. Кроме того, зависимость такого взаимодействия от скорости приводит к появлению дополнительных членов в выражении для вектора μ . Прямых доказательств наличия подобных эффектов взаимодействия пока что очень мало. Предварительные теоретические расчеты показывают, что указанные поправки составляют несколько десятых магнетона (см. приложение 3, п. 6).

Для нуклона, находящегося на орбите оболочечной модели, матричный элемент (3.35) можно вычислить на основе векторной модели. Векторы \mathbf{l} и \mathbf{s} прецессируют вокруг постоянного вектора \mathbf{j} , и поэтому среднее значение магнитного момента μ записывается в виде

$$\begin{aligned} \mu_{\text{одн}} &= \frac{\langle \mu \cdot \mathbf{j} \rangle}{j(j+1)} \langle j, m=j | j_z | j, m=j \rangle = \frac{1}{j+1} \{ g_l j(j+1) + (g_s - g_l) \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{j} \rangle \} = \\ &= j \left\{ g_l \pm (g_s - g_l) \frac{1}{2l+1} \right\}, \quad j = l \pm \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где величина $\langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{j} \rangle$ была вычислена путем возвведения в квадрат равенства $\mathbf{j} - \mathbf{s} = \mathbf{l}$.

Для конфигурации, содержащей одну дырку, магнитный момент такой же, как и для одночастичной конфигурации, поскольку момент в квантовом состоянии с $m = -j$, отсутствующем в заполненных оболочках, противоположен моменту в состоянии с $m = j$. Заметим, что операторы спина и углового момента при частично-дырочном сопряжении преобразуются с фазой $c = +1$ [см. формулу (3.14)].

Недиагональными матричными элементами оператора магнитного момента определяются амплитуды переходов $M1$. Обычно матричные элементы выражают через магнитный дипольный тензорный оператор:

$$\mathcal{M}(M1, \mu) = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{e\hbar}{2Mc} (\mu)_\mu, \quad (3.39)$$

где $(\mu)_\mu$ — сферическая составляющая ($\mu = -1, 0, +1$) вектора μ . Таким образом, магнитный момент в состоянии со спином I связан с приведенным матричным элементом оператора $\mathcal{M}(M1)$ соотношением

$$\frac{e\hbar}{2Mc} \mu = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} (2I+1)^{-1/2} \langle II|0|II\rangle \langle I \parallel \mathcal{M}(M1) \parallel I \rangle. \quad (3.40)$$

Для отдельной частицы или дырки матричные элементы оператора $e\mathcal{M}(M1)$ подчиняются следующим правилам отбора: $\Delta n = 0$, $\Delta l = 0$,

$\Delta j = 0, 1$, и поэтому разрешены только переходы между членами спин-орбитального дублета, т. е. между подуровнями с $j = l \pm 1/2$. Для таких переходов, если пренебречь небольшой разницей в радиальных функциях для этих двух подуровней, получаем [см. формулу (3.168)], что

$$\begin{aligned} & \left\langle j_2 = l + \frac{1}{2} \middle\| \mathcal{M}(M1) \middle\| j_1 = l - \frac{1}{2} \right\rangle = \\ & = - \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{e\hbar}{2Mc} (g_s - g_l) (2j_1 + 1)^{1/2} \left\langle j_1 \frac{1}{2} \middle| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (3.41) \end{aligned}$$

Экспериментальные значения магнитных моментов ядер, у которых сверх заполненных оболочек имеется одна частица или одна дырка, приведены в табл. 3.3. В случае легких ядер ($A < 40$) согласие со значениями, даваемыми формулой (3.38), довольно хорошее: отклонения не превышают нескольких десятых магнетона. Большие магнитные моменты для ^3H и ^3He трудно объяснить смещением конфигураций. Они могут указывать на наличие в операторе магнитного момента членов, связанных с взаимодействием ¹⁾. Ввиду этого очень хорошее согласие между $\mu_{\text{эксп}}$ и $\mu_{\text{одн}}$ при $A = 15$ и $A = 17$, вероятно, в какой-то мере случайно. Действительно, другие данные говорят о наличии существенного смешивания конфигураций в области ядра ^{16}O (см. анализ вероятностей β -распада в табл. 3.5, а также гл. 7).

В случае тяжелых ядер экспериментальные значения магнитных моментов заметно отличаются от $\mu_{\text{одн}}$. Такая разница в свойствах легких и тяжелых ядер делает маловероятным предположение о том, что мы имеем дело с изменением внутреннего строения нуклона. Но ее легко объяснить эффектом поляризации заполненных оболочек, в какой-то мере подобным эффекту, о котором говорилось по поводу электрических квадрупольных моментов. Поляризационный эффект для магнитных моментов должен существенно зависеть от конфигурации заполненных оболочек, так как основной эффект связан с наличием «ненасыщенных» спинов в заполненных оболочках, которые могут быть частично выстроены благодаря взаимодействию со спином внешнего нуклона [12, 45].

Если заполненные оболочки составлены из обоих уровней спин-орбитальных дублетов ($j = l \pm 1/2$), как это наблюдается до ядра ^{40}Ca , то спины нуклонов связаны в состояние с $S = 0$. Действительно, если не считать небольшого различия радиальных волновых функций подуровней $j = l \pm 1/2$, то волновые функции таких заполненных оболочек совпадают с функциями, которые были бы в отсутствие спин-орбитальной связи. Следовательно, орбитальный L и спиновый S угловые моменты отдельно являются интегралами движения

¹⁾ Измерения моментов для систем с $A = 3$ повлекли за собой исследования вклада обмена зарядом в магнитные моменты ядер (см. работу [436], а также работы, указанные в приложении 3, п. 6).

$\{LS\}$ -связь}, а единственность этого состояния приводит к тому, что $L = S = 0$. В таком случае возмущение, вызванное внешним нуклоном, в первом приближении оставляет для остова $\langle L_z \rangle = \langle S_z \rangle = 0$ и, следовательно, дает поправки к магнитному моменту только в более высоких порядках приближения.

Если заполненные оболочки содержат заполненный подуровень $j = l + \frac{1}{2}$, но не содержат его партнера, то ненасыщенные спины нуклонов в первом приближении могут быть частично выстроены благодаря наличию в силах, действующих между нуклонами, членов, которые зависят от спинов. Для простоты мы рассмотрим центральные силы типа $(\sigma_1 \cdot \sigma_2) V_\sigma(r_{12})$. Порядок величини зависящего от спина поля, действующего на заполненные оболочки, равен $\langle V_\sigma \rangle$, т. е. среднему значению матричных элементов оператора $V_\sigma(r_{12})$ для состояний, описывающих взаимодействие частицы вне заполненных оболочек с одной из частиц заполненного подуровня $j = l + \frac{1}{2}$. Таким образом, волновая функция нуклона на подуровне $j = l + \frac{1}{2}$ будет иметь примесь состояния с $j = l - \frac{1}{2}$ в первом порядке относительно потенциала возмущения, т. е.

$$\Psi_{l+1/2, m} \rightarrow \Psi_{l+1/2, m} - \frac{\langle V_\sigma \rangle}{\Delta \varepsilon_{ls}} \sigma_{\text{внеш}} \left\langle j = l - \frac{1}{2}, m | \sigma | j = l + \frac{1}{2}, m \right\rangle \Psi_{l-1/2, m}. \quad (3.42)$$

Здесь $\sigma_{\text{внеш}}$ — спин внешнего поляризующего нуклона, а $\Delta \varepsilon_{ls}$ — разность энергии между одночастичными подуровнями с $j = l \pm \frac{1}{2}$ (спин-орбитальное расщепление). Магнитный момент, создаваемый возмущением (3.42), пропорционален $\sigma_{\text{внеш}}$, и поэтому его можно рассматривать как перенормировку гиromагнитного отношения g_s на величину

$$\begin{aligned} \delta g_s \approx & -\frac{4 \langle V_\sigma \rangle}{\Delta \varepsilon_{ls}} \sum_m \left\langle j = l + \frac{1}{2}, m | \mu_z | j = l - \frac{1}{2}, m \right\rangle \times \\ & \times \left\langle j = l - \frac{1}{2}, m | \sigma_z | j = l + \frac{1}{2}, m \right\rangle = \\ & = -\frac{2 \langle V_\sigma \rangle}{3 \Delta \varepsilon_{ls}} (g_s - g_l) \left\langle j = l - \frac{1}{2} \| \sigma \| j = l + \frac{1}{2} \right\rangle^2 = \\ & = -\frac{8 \langle V_\sigma \rangle}{3 \Delta \varepsilon_{ls}} (g_s - g_l) (l+1) \frac{2l}{2l+1}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где g_s и g_l — гиromагнитные отношения нуклонов заполненной оболочки. Приведенный матричный элемент вектора σ , который входит в формулу (3.43), можно получить из формулы (3.78). Центральные силы, зависящие от спинов, более благоприятствуют (LS) -связи, нежели (jj) -связи, а поправки, ведущие к перенормировке магнитных спиновых моментов, отражают тенденцию перехода от (jj) -к (LS) -связи (см. гл. 9, § 3).

В тяжелом ядре примерно одинаковое число нейтронов и протонов с ненасыщенными спинами. Поэтому в случае не зависящего от изоспиновой взаимодействия полный поляризационный член (3.43) довольно мал, ибо знак величины $(g_s - g_t)$ противоположен для нейтронов и протонов. Оператор магнитного момента приближенно можно считать изовекторным оператором [см. формулу (1.65)].

По силы типа $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(\tau_1 \cdot \tau_2) V_{\text{ст}}(r_{12})$ будут вызывать поляризацию нейтронов и протонов противоположного знака. Таким образом, основная поправка к магнитному моменту в тяжелых ядрах должна быть обусловлена этими зависящими от изоспинов силами. [Вследствие антисимметрии волновой функции эффективное взаимодействие, зависящее от изоспинов, может также возникать как результат короткодействующих сил, которые не содержат явной зависимости от изоспиновых переменных (см. гл. 2, § 5).]

Порядок величины $\langle V_{\text{ст}} \rangle$ можно оценить путем такого же усреднения, как и при оценке (2.213) потенциала симметрии. Так, например, для нуклонных сил, содержащих обменные силы Сербера, получаем, что $\langle V_{\text{ст}} \rangle \approx -1/3 V_0 A^{-1} \approx +15 A^{-1}$ Мэв. Поэтому формула (3.43) для поляризационного эффекта остова ядра ^{208}Pb , содержащего протоны на уровне $h_{11/2}$ и нейтроны на уровне $i_{13/2}$ с $\Delta E_{1s} \approx \approx 5$ Мэв (фиг. 3.3), дает $\delta g_s \approx 2\tau_3$. Близкое к этому (хотя и несколько большее) значение величины δg_s получается для остова ядра ^{56}Ni , в котором уровень $f_{7/2}$ заполнен нейтронами и протонами.

Экспериментальные значения магнитных моментов ядер в области $A = 56$ и $A = 208$ показывают, что поляризационные эффекты по порядку величины соответствуют представленной нами оценке (см. табл. 3.3), хотя проведенный выше расчет носит, очевидно, лишь качественный характер. Мало того, что мы пренебрегали членами более высокого порядка, которые упоминались при рассмотрении эффекта поляризации для квадрупольных моментов, мы к тому же пользовались очень упрощенными силами и не учитывали обменных эффектов для взаимодействующих частиц.

Полный эффект поляризации нельзя рассматривать просто как перенормировку гиромагнитного отношения g_s . Этот эффект зависит от радиального распределения частицы, вызывающей поляризацию, а поляризационный магнитный момент может содержать «тензорную составляющую» вида

$$(\delta\mu)_\mu = \delta g'_s(r) (Y_2 s)_{\lambda=1, \mu}. \quad (3.44)$$

(При малых r основной член в $\delta g'_s(r)$ должен быть пропорциональным r^2 .) Выражение (3.44) и член, пропорциональный спину s , — это единственные аксиальные векторы, которые можно построить из спиновых и пространственных координат нуклона. В выражении для магнитного момента член типа (3.44) появляется тогда, когда мы принимаем во внимание зависимость поляризационного поля от положения внешнего нуклона. Такая зависимость обусловливается

как центральным взаимодействием, зависящим от спинов, так и нецентральными силами, действующими между нуклонами.

Хотя оператор (3.44) представляет собой эффективный момент, соответствующий вкладу частиц поляризованного остова, каждая из которых обладает магнитным моментом (3.36), член вида (3.44) может также входить и в выражение для оператора момента, если частица движется в поле, зависящем от скорости, например, в случае потенциала со спин-орбитальной связью (см. работу [255], см. также приложение 3, п. 6).

Магнитный момент (3.44) зависит от угловых моментов l и j совершенно иначе, нежели спиновый магнитный момент [среднее значение оператора (3.44) можно получить из соотношения (3.78)]. Таким образом, измерив два момента (или вероятности переходов $M1$) в одном и том же ядре, можно будет, вероятно, отдельно определить множители δg_s и $\delta g'_s$. (См. пример в табл. 3.3.) Оператор магнитного момента (3.44) отличается от оператора (3.36) также тем, что он может вызывать переходы $M1$ с $\Delta l = 2$ (l -запрещенные переходы).

3. Другие электромагнитные моменты

Электрический квадрупольный ($E2$) и магнитный дипольный ($M1$) моменты — это пример электрических и магнитных мультипольных операторов $\mathcal{M}(E\lambda, \mu)$ и $\mathcal{M}(M\lambda, \mu)$, которые характеризуют взаимодействие ядра с полем излучения. Моментами такого же вида описываются процессы возбуждения ядер, индуцированные заряженными частицами. Общие выражения для операторов этих моментов и расчет одночастичных матричных элементов приводятся в приложении 3.

Кроме сведений об электрических квадрупольных и магнитных дипольных моментах, имеются некоторые данные относительно вероятностей переходов $M4$ для конфигураций с одной дыркой (см. табл. 3.4). Так, установлено, что экспериментально наблюдающиеся вероятности переходов в 5—6 раз меньше теоретических, полученных на основе одночастичной модели. Это может указывать на то, что поляризационные эффекты для моментов типа $M4$ близки по своей величине к эффектам для магнитных дипольных моментов.

Для ядра ^{209}Pb была измерена вероятность перехода $E3$ ($j_{15/2} \rightarrow g_{9/2}$), и оказалось, что она в 50 раз больше, чем для перехода одного протона [145]. Большой поляризационный заряд можно объяснить связью одночастичного движения с октупольным возбуждением заполненных оболочек ядра ^{208}Pb , энергия которого равна 2,6 $M\text{эв}$ (см. гл. 6). Поскольку частота октупольного возбуждения того же порядка, что и частота одночастичного перехода, поляризационный заряд должен, по-видимому, довольно сильно зависеть от энергии перехода.

ПРИМЕРЫ К § 3

Эллиптические квадрупольные эффекты в одиночастичных конфигурациях (табл. 3.2)

Имеющиеся данные по квадрупольным моментам и переходам $E2$ для конфигураций с одной частицей или одной дыркой на уровне (j и j^{-1}) приведены в табл. 3.2. Теоретические (одиноччастичные) значения величины $Q_{\text{одн}}$ и $B_{\text{одн}}$ ($E2$) относятся к протону (или протонной дырке) и получены по формулам (3.27) и (3.32).

Таблица 3.2

КВАДРУПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ И ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ $E2$
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОДНОЧАСТИЧНЫХ И ДЫРОЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

а. Квадрупольные моменты

Ядро	lj	$Q_{\text{эксп}}, 10^{-24} \text{ см}^2$	$Q_{\text{одн}}, 10^{-24} \text{ см}^2$	$e_{\text{эфф}}/e$
$^{17}_8\text{O}$	$d_{5/2}$	-0,026	-0,066	0,40
$^{39}_1\text{K}$	$d_{3/2}^{-1}$	0,09	-0,052	1,8
$^{209}_{83}\text{Bi}$	$h_{9/2}$	-0,4	-0,26	1,6

б. Вероятности переходов $E2$

Ядро	$(lj)_i$	$(lj)_f$	$B(E2)_{\text{эксп}}, e^2\text{борни}^4$	$B(E2)_{\text{одн}}, e^2\text{борни}^4$	$e_{\text{эфф}}/e$
$^{15}_7\text{N}$	$p_{3/2}^{-1}$	$p_{1/2}^{-1}$	7,4	4,6	1,3
$^{17}_8\text{O}$	$s_{1/2}$	$d_{5/2}$	6,3	35	0,42
$^{17}_9\text{F}$	$s_{1/2}$	$d_{5/2}$	64	43	1,2
$^{41}_{20}\text{Ca}$	$p_{3/2}$	$f_{7/2}$	66	40	1,3
$^{41}_{21}\text{Sc}$	$p_{3/2}$	$f_{7/2}$	110	40	1,7
$^{207}_{82}\text{Pb}$	$f_{5/2}^{-1}$	$p_{1/2}^{-1}$	70	81	0,9
$^{207}_{82}\text{Pb}$	$p_{3/2}^{-1}$	$p_{1/2}^{-1}$	80	110	0,85
$^{206}_{82}\text{Pb}$	$s_{1/2}$	$d_{5/2}$	150	866	0,42
$^{209}_{83}\text{Bi}$	$f_{7/2}$	$h_{9/2}$	40 ± 20	2,3	$4 \pm 1,5$

Экспериментальные значения квадрупольных моментов взяты из обзора [295]. Значения $B(E2)$ взяты из следующих работ: ^{15}N [28], ^{17}O и ^{17}F [27], ^{41}Ca [402], ^{41}Sc и ^{41}Ca [473], ^{207}Pb и ^{209}Bi [479, 266], ^{209}Pb [385].

Радиальные матричные элементы от r^2 были вычислены для одночастичных состояний в случае потенциала, представленного на фиг. 3.3 и 3.5. Были получены следующие значения:

^{15}N	$\langle p_{3/2} r^2 p_{1/2} \rangle = 7,6$ ферми 2
^{17}O	$\langle d_{5/2} r^2 d_{3/2} \rangle = 11,5$
	$\langle d_{5/2} r^2 s_{1/2} \rangle = 12,0$
^{17}F	$\langle d_{5/2} r^2 s_{1/2} \rangle = 13,4$
^{39}K	$\langle d_{3/2} r^2 d_{3/2} \rangle = 13,0$
^{41}Ca	$\langle f_{7/2} r^2 p_{3/2} \rangle = 13,9$
^{207}Pb	$\langle f_{5/2} r^2 p_{1/2} \rangle = 32$
	$\langle p_{3/2} r^2 p_{1/2} \rangle = 37$
^{209}Pb	$\langle s_{1/2} r^2 d_{5/2} \rangle = 60$
^{209}Bi	$\langle f_{7/2} r^2 h_{9/2} \rangle = 16,5$
	$\langle h_{9/2} r^2 h_{9/2} \rangle = 35$

Для ядра ^{41}Sc протон в состоянии $p_{3/2}$ не связан. Мы взяли те же самые радиальные матричные элементы, что и для ядра ^{41}Ca .

Эффективный заряд, определенный для ядра ^{207}Pb , мал по сравнению с эффективным зарядом для ядра ^{209}Pb . Это объясняется, по-видимому, слабой связью последнего пейтрона в ядре ^{209}Pb . Так, из волновых функций, приведенных на фиг. 3.4, видно, что 50% от величины радиального интеграла определяются расстояниями, большими 9,5 ферми, т. е. расстояниями, значительно большими среднего радиуса (7,5 ферми). Поэтому пейtron слабее поляризует остов, состоящий из заполненных оболочек. Эффект такого типа должен быть также и в случае переходов в ядрах с $A = 17$ и $A = 41$.

При $A = 41$ уровень $p_{3/2}$ в табл. 3.2 относится к первым возбужденным уровням в ядрах ^{41}Ca и ^{41}Sc . Как показано на фиг. 3.2в и в табл. 3.7, примерно 10–20% одночастичного состояния связано с более высоколежащими состояниями $^{3/2}-$. Поэтому рассмотренные уровни содержат соответствующее число конфигураций, в которые входят возбуждения заполненных оболочек. Большие экспериментальные значения вероятностей переходов $E2$ можно связать с этими примесями. Для вторых состояний $^{3/2}-$ с энергией около 2,4 МэВ переходы $E2$ на основное состояние, как оказалось, сильно заторможены, причем величина $B(E2)$ меньше $0,15 e^2 \cdot \text{ферми}^4$ (см. работу [26] и цитированную в ней литературу).

В квадрупольный момент одночастичной конфигурации может давать свой вклад также отдача заполненных оболочек. Так, например, полный электрический квадрупольный момент, измеренный относительно центра масс ядра, записывается в виде

$$\begin{aligned}
 Q &= \sum_p [2(z_p - Z)^2 - (x_p - X)^2 - (y_p - Y)^2] = \\
 &= \sum_p (2z_p^2 - x_p^2 - y_p^2) - 4Z \sum_p z_p + 2X \sum_p x_p + 2Y \sum_p y_p + \\
 &+ (A - N)(2Z^2 - X^2 - Y^2) = \\
 &= \sum_p (2z_p^2 - x_p^2 - y_p^2) - 2Z \left(\sum_p z_p - \sum_n z_n \right) + \\
 &+ X \left(\sum_p x_p - \sum_n x_n \right) + Y \left(\sum_p y_p - \sum_n y_n \right) - N(2Z^2 - X^2 - Y^2), \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

где X, Y, Z — координаты центра масс. Сумма по p пробегает по всем ($A - N$) протонам, а сумма по n — по всем N нейtronам.

Матричные элементы оператора (3.45) с учетом антисимметризации можно просто вычислить, если предположить, что пуклоны движутся независимо друг от друга в потенциале гармонического осциллятора, так как тогда движение системы разделяется на движение центра масс и внутреннее движение (см. гл. 7, приложение 2). Для всех состояний, принадлежащих низшим конфигурациям (т. е. содержащим минимальное число квантов), центр масс находится в состоянии f_0 . Поэтому в матричные элементы квадрупольного оператора (3.45) не входят вклады члены, описывающие отдачу. (Например, в ядре ^{17}O к этим низшим конфигурациям относятся одночастичные состояния нейтрона $2s_{1/2}$, $1d_{5/2}$ и $1d_{3/2}$.)

Было бы интересно вычислить члены отдачи на основе потенциала, более близкого к действительности, но поскольку эти члены равны нулю в случае осцилляторного потенциала, они, вероятно, в большинстве случаев малы.

Магнитные дипольные эффекты для одночастичных конфигураций (табл. 3.3)

Имеющиеся данные по магнитным дипольным моментам для конфигураций j и j^{-1} приведены в табл. 3.3. Одночастичные значения магнитных моментов поданы вычислены по формулам (3.37) и (3.38). Единственная непосредственно

Таблица 3.3

МАГНИТНЫЕ ДИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ЯДЕР
С ОДНОЙ ЧАСТИЦЕЙ ИЛИ ОДНОЙ ДЫРКОЙ
СВЕРХ ЗАПОЛНЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Ядро	lj	$\mu_{\text{эксп}}$	$\mu_{\text{одн}}$
^3H	$s_{1/2}^{-1}$	2,98	2,79
^3He	$s_{1/2}^{-1}$	-2,13	-1,91
^{15}N	$p_{1/2}^{-1}$	-0,28	-0,26
^{15}O	$p_{1/2}^{-1}$	0,72	0,64
^{17}O	$d_{5/2}$	-1,89	-1,91
^{17}F	$d_{5/2}$	4,72	4,79
^{39}K	$d_{3/2}^{-1}$	0,39	0,12
^{41}Ca	$f_{7/2}$	-1,59	-1,91
^{55}Co	$f_{7/2}^{-1}$	$4,3 \pm 0,3$	5,79
^{207}Pb	$p_{1/2}^{-1}$	0,59	0,64
^{207}Pb	$f_{5/2}^{-1}$	$0,65 \pm 0,05$	1,37
^{209}Bi	$h_{9/2}$	4,08	2,62

Экспериментальные значения магнитных моментов взяты из обзора [295], за двумя исключениями: магнитный момент ядра ^{17}F [418] и состояние со спином $5/2$ в ядре ^{207}Pb [266]. Там где ошибка измерений не указана, она меньше 0,01 магнетона.

измеренная вероятность перехода $M1$ для конфигураций $j^{\pm 1}$ относится к переходу $p_{3/2}^{-1} \rightarrow p_{1/2}^{-1}$ в ядре ^{15}N и определена из неупругого рассеяния электронов [28]. Исходя из экспериментальной вероятности перехода по формуле (3.41) для $(g_s - g_l)$, получаем значение, составляющее $0,85 \pm 0,1$ от соответствующего значения этой величины для свободного протона, равной 4,58. Косвенные данные относительно составляющей $M1$ в переходе $f_{7/2}^1 \rightarrow f_{5/2}^1$ для ядра ^{207}Pb следуют из экспериментального значения отношения составляющих $M1$ и $E2$ в этом переходе. Если предположить, что составляющая $E2$ определяется одночастичным значением с эффективным зарядом, равным 0,9 (см. табл. 3.2), то матричный элемент перехода $M1$ оказывается примерно в 2 раза меньше, чем по данным одночастичного расчета [96].

Перенормировка магнитного момента из-за поляризации заполненных оболочек содержит два параметра спиновой поляризации δg_s и $\delta g'_s$, первый из которых представляет собой вклад в спин от гиromагнитного отношения g , а второй связан с моментом (3.44). Можно попытаться определить эти параметры по двум измеренным значениям магнитных моментов ядра ^{207}Pb и по данным о переходе $M1$.

Но при этом нужно помнить, что в экспериментальные значения магнитных моментов должны давать малый вклад и такие дополнительные эффекты, как обменные моменты и другие члены взаимодействия в операторе момента (см. приложение 3, п. 6). Относительно таких эффектов очень мало данных, но можно думать, что их вклад составляет одну или две десятых магнетона. Вследствие такой неопределенности в интерпретации моментов значения параметров спиновой поляризации, найденные на основе имеющихся данных, колеблются в довольно широких пределах. Непротиворечивая интерпретация этих двух моментов и момента перехода возможна, если принять, что $\delta g_s/g_s \sim -0,5$, а радиальное среднее $\langle \delta g'_s(r) \rangle/g_s \sim 0,4$, откуда следует, что $\mu(p_{1/2}) = 0,5$, $\mu(f_{5/2}) = 0,9$ и что матричный элемент магнитного дипольного оператора для перехода $f_{7/2}^1 \rightarrow f_{5/2}^1$ уменьшается в 2 раза.

Вероятности переходов $M4$ для одночастичных конфигураций (табл. 3.4)

Имеющиеся данные по вероятностям переходов $M4$ для конфигураций $j^{\pm 1}$ приведены в табл. 3.4. Одночастичные вероятности переходов вычислены по формулам (3.168). Радиальные матричные элементы $\langle (lj)_f | r^3 | (lj)_i \rangle$ между начальным и конечным состояниями были вычислены с волновыми функциями Бломквиста и Вальборпа [48].

Таблица 3.4

ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ $M4$ ДЛЯ ОДНОЧАСТИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Ядро	$(lj)_i$	$(lj)_f$	$B(M4)_{\text{эксп}, \varepsilon^2 \cdot \text{ферми}^8}$	$B(M4)_{\text{одн}, \varepsilon^2 \cdot \text{ферми}^8}$
^{207}Pb	$i_{13/2}^{-1}$	$f_{5/2}^{-1}$	$2,8 \cdot 10^3$	$1,7 \cdot 10^4$
^{81}Tl	$h_{11/2}^{-1}$	$d_{3/2}^{-1}$	$3,3 \cdot 10^3$	$1,7 \cdot 10^4$

Экспериментальные данные взяты из таблицы [283], причем учтены новые данные о времени жизни для изомерного уровня ядра ^{207}Pb [474].

§ 4. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ β-РАСПАДА

1. Разрешенные переходы

Операторы перехода

Вероятности переходов для β-распада зависят от тех же характеристик ядер, что и вероятности электромагнитных переходов. Простейший тип β-распада — это такой процесс, при котором нуклон претерпевает β-превращение, как если бы он находился в состоянии покоя. Длины волн испускаемых лептонов (электрона и нейтрино) обычно велики по сравнению с размерами ядра, а поэтому можно считать, что амплитуда распада не зависит от положения нуклона, претерпевающего превращение.

Переходы, которые можно рассматривать в таком самом грубом приближении, когда оператор перехода не зависит от положения и скоростей нуклонов, называются разрешенными переходами. В свою очередь эти переходы могут быть разделены на два типа. Для переходов типа Ферми (*F*) оператор, или β-момент, как мы его часто будем называть в дальнейшем, не зависит от спина нуклона, а для переходов Гамова — Теллера (*GT*) β-момент пропорционален оператору спина распадающегося нуклона. Следовательно, при переходах типа Ферми не происходит никакого обмена угловыми моментами между нуклоном и лептонами, а при переходах Гамова — Теллера передается единичный угловой момент.

Вероятность переходов для этих двух типов процессов можно выразить через приведенные вероятности:

$$\begin{aligned} B(F; IT, M_T \rightarrow IT, M_T \pm 1) &= \frac{g_V^2}{4\pi} |\langle IMT, M_T \pm 1 | T_{\pm} | IMT, M_T \rangle|^2, \\ B(GT; I_1 T_1, MT \rightarrow I_2 T_2, MT \pm 1) &= \\ &= \frac{g_A^2}{4\pi} \sum_{\mu M_2} \left| \langle I_2 M_2 T_2, M_T \pm 1 | \sum_k t_{\pm}(k) \sigma_{\mu}(k) | I_1 M_1 T_1, M_T \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $t_{\pm} = t_x \pm it_y$ — операторы, которые преобразуют нейтрон в протон и наоборот ($\langle p | t_{\pm} | n \rangle = \langle n | t_{\mp} | p \rangle = 1$), а $\sigma_{\mu} = 2s_{\mu}$ — сферическая составляющая спинового вектора Паули. Константы взаимодействия для переходов Ферми и Гамова — Теллера обозначаются через g_V и g_A (индексы соответствуют векторному и аксиально-векторному характеру β-токов при таких взаимодействиях). Эмпирические значения этих констант даются формулами (3.202).

Оператор перехода для процессов типа Ферми представляет собой составляющую полного изоспина, а поэтому матричный элемент зависит только от изоспиновых квантовых чисел рассматриваемых

состояний [см. формулу (3.220)]. Таким образом, по экспериментальным значениям вероятностей переходов типа Ферми можно проверять правильность изоспиновых квантовых чисел ядерных состояний (см. фиг. 1.10 и табл. 1.3). Матричные же элементы для переходов типа Гамова — Теллера дают сведения относительно связи спинов нуклонов.

Заполненные оболочки с $N = Z$, зеркальные переходы

Для одночастичных переходов Гамова — Теллера имеются следующие правила отбора: $\Delta l = 0$ и $\Delta j = 0, 1$. Если сверх заполненных оболочек с $N = Z$ имеется одна частица (или одна дырка), то приведенная вероятность B дается выражением [см. формулу (3.78)]

$$B_{\text{одн}}(GT; \quad l j_1 \rightarrow l j_2) = \frac{g_A^2}{4\pi} \begin{cases} \left(\frac{j_2 + 1}{j_2}\right)^{\pm 1} & \text{при } j_1 = j_2 = l \pm \frac{1}{2}, \\ \frac{2j_2 + 1}{l + 1/2} & \text{при } \Delta j = 1. \end{cases} \quad (3.47)$$

Основным источником сведений относительно переходов Гамова — Теллера являются зеркальные переходы, т. е. переходы между такими ядерными состояниями, которые получаются одно из другого заменой нейтронов на протоны и наоборот (сопряжение зарядовой симметрии). Экспериментальные данные по этим переходам приведены в табл. 3.5. Установлено, что экспериментальные значения приведенных вероятностей $B(GT)$ качественно согласуются с одночастичным теоретическим (3.47), но систематически меньше его, если не считать ядер с $A = 3$, которые являются исключением. Поляризационные эффекты, подобные эффектам, о которых говорилось по поводу спиновых магнитных моментов, должны быть малыми, поскольку рассматриваемые ядра имеют заполненные оболочки с «насыщенными» спинами. Таким образом, заметное уменьшение величины матричных элементов, особенно для ядер с $A = 39$ и $A = 41$, может указывать на значительную примесь более сложных конфигураций или же на наличие в операторе Гамова — Теллера членов, связанных с ядерным взаимодействием.

В силу вращательной инвариантности в изопространстве оператор Гамова — Теллера связан с изовекторной частью оператора, которой определяется вклад спина в магнитный дипольный момент. Так, в случае статического дипольного момента мы имеем

$$\begin{aligned} & \langle JM, T=1/2 M_T | \sum_k (\sigma_z t_z)_k | JM, T=1/2 M_T \rangle \\ & \overline{\langle JM, T=1/2 M_T=1/2 | \sum_k (\sigma_z t_+)_k | JM, T=1/2 M_T=-1/2 \rangle} = \\ & = -2^{-1/2} \frac{\langle 1/2 M_T 1 0 | 1/2 M_T \rangle}{\langle 1/2 -1/2 1 1 | 1/2 1/2 \rangle} = M_T. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Например, то обстоятельство, что экспериментальное значение приведенной вероятности $B(GT)$ для перехода $^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O}$ приблизительно на 15% меньше одночастичного теоретического (табл. 3.5), означает уменьшение примерно на 8% изовекторной части спинового оператора, вносящего вклад в магнитные моменты этих ядер. Это приводит к уменьшению значения моментов примерно на 0,2 магнетона [см., например, формулу (3.38)]. Таким образом, то, что магнитные моменты этих ядер отличаются от одночастичных значений меньше чем на 0,1 магнетона (см. табл. 3.3), может указывать на наличие в операторе Гамова — Теллера и операторе перехода $M1$ членов, связанных с нуклонным взаимодействием, которые приводят к увеличению матричных элементов перехода $M1$ или же к уменьшению величины матричных элементов оператора Гамова — Теллера.

Заполненные оболочки с $N > Z$

Вероятность β -переходов для конфигураций, у которых сверх заполненных оболочек с $N > Z$ имеется одна частица, отличается от вероятностей, даваемых формулой (3.47), множителем, зависящим от изоспина остова, если протонный уровень не занят нейтронами. Из формулы (3.19) получаем, что

$$B(GT; j_n, T = T_0 + \frac{1}{2} \rightarrow j_p, T = T_0 \pm \frac{1}{2}) = \\ = B_{\text{одн}}(GT; j_n \rightarrow j_p) \begin{cases} 1, & \text{если уровень } j_p \\ & \text{занят пейтронами} & T = T_0 - \frac{1}{2}, \\ \frac{2T_0}{2T_0 + 1}, & \text{если уровень } j_n \\ \frac{1}{2T_0 + 1}, & \text{не занят пейтронами} & T = T_0 + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (3.49)$$

Но нейтронный избыток должен оказывать сильное влияние на оператор для одночастичных β -переходов, поскольку он связан с операторами переходов для нейтронов избытка. Этот эффект аналогичен эффекту перенормировки спиновых магнитных моментов, связанному с наличием ненасыщенных спинов в заполненных оболочках. Но в случае β -переходов имеются и свои особенности, ибо частоты этих переходов для частиц в заполненных оболочках могут быть больше или меньше характерных одночастичных частот или совпадать с ними в зависимости от того, какой β -переход мы рассматриваем. (Об уменьшении матричных элементов оператора Гамова — Теллера для одночастичных переходов из-за взаимодействия частиц в заполненных оболочках см. работы [179, 214], а также гл. 9, § 3.)

Роль взаимодействия становится особенно большой в случае таких переходов, при которых нейтрон превращается в протон на том же уровне. Частоты таких переходов совпадают с частотами переходов, при которых один из нейтронов в заполненных оболочках

превращается в протон без изменения орбиты. Поэтому взаимодействия нуклонов приводят к существенным корреляциям вырожденных дочерних состояний. Таким образом, обменные силы, пропорциональные $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(\tau_1 \cdot \tau_2)$, которые также рассматривались в связи с поляризационными эффектами в $M1$ -моментах, полностью подавляют вклад взаимодействия Гамова — Теллера в одночастичные переходы. Формула теории возмущений, аналогичная формуле (3.43), дает бесконечность для отношения $\delta\mathcal{M}(GT)/\mathcal{M}(GT)$, так как Δe должно быть заменено энергетическим знаменателем, обращающимся в нуль. Но индуцированный момент $\delta\mathcal{M}(GT)$ приводит к дополнительным поляризационным эффектам. Этот момент можно учесть, если заменить $\mathcal{M}(GT)$ на $\mathcal{M}_{\text{эфф}}(GT) = \mathcal{M}(GT) + \delta\mathcal{M}(GT)$. Таким образом, при учете этих членов более высокого порядка мы получаем эффективный одночастичный момент, равный нулю.

Данные по матричным элементам Гамова — Теллера для одночастичных переходов без изменения орбиты получены путем анализа β -распада ядра ^{40}Ca . Приведенная вероятность $B(GT)$ оказалась примерно в 30 раз меньше значения, даваемого выражением (3.49).

Для переходов с изменением орбиты связь с моментами заполненных оболочек может также привести к большому уменьшению одночастичных моментов, но эффект должен довольно сильно зависеть от частоты перехода. Экспериментальных данных относительно β -моментов для одночастичных (или дырочных) переходов такого типа пока что нет.

Корреляционный эффект, ответственный за ослабление одночастичных матричных элементов переходов Гамова — Теллера, можно сравнить с корреляционным эффектом, который подавляет вклад матричных элементов типа Ферми в одночастичном переходе с $T_f = T_i - 1$. Вся вероятность перехода Ферми концентрируется на состоянии, которое представляет собой изобарический аналог состояния исходного ядра. Такой переход можно рассматривать как когерентную суперпозицию переходов $(jm)_n \rightarrow (jm)_p$ всех нейтронов избытка [см. формулу (3.20)]. Подобным же образом нуклонные взаимодействия приводят к тому, что вероятность перехода Гамова — Теллера концентрируется на состояниях коллективного возбуждения при более высокой энергии.

В то время как правила отбора для переходов Ферми — прямое следствие изобарической симметрии, корреляционные поправки для переходов Гамова — Теллера количественно зависят от более детальных свойств взаимодействий. Правила отбора для переходов Гамова — Теллера можно было бы получить из соображений симметрии, если бы взаимодействие нуклонов не зависело как от зарядовых, так и от спиновых переменных. В силу такого взаимодействия ядерные состояния образуют супермультиплет (орбитальная перестановочная или U_4 -симметрия, см. гл. 1, § 3 и приложение 3), а поскольку операторы переходов Гамова — Теллера, так же как и переходов

Ферми, являются генераторами группы U_4 , могут быть разрешены только β -переходы между состояниями, принадлежащими одному и тому же супермультиплету [454].

В спектрах легких ядер супермультиплетная симметрия приближенно выполняется, а в более тяжелых ядрах она заметно нарушается вследствие сильного спин-орбитального взаимодействия в одночастичном потенциале, которое приводит к (jj) -связи. Но можно считать, что поправки, ответственные за перенормировочные эффекты для вероятностей переходов Гамова — Теллера и для спиновых магнитных моментов, свидетельствуют о возможном отклонении от схемы (jj) -связи (см. работу [179], а также гл. 9, § 3).

2. Запрещенные переходы

В случае тех переходов, для которых разрешенные матричные элементы равны нулю (изменение четности или $\Delta I > 1$), необходимо учитывать зависимость операторов β -переходов от пространственных координат и скоростей нуклонов. Как и в случае электромагнитного взаимодействия, функцию полного β -взаимодействия можно разложить в ряд по мультипольным моментам. Но если испускание фотона при заданном значении передаваемого углового момента и четности характеризуется одним значением момента, то β -процесс может зависеть от нескольких различных моментов. Вопрос о структуре взаимодействия и о разложении его по мультипольным моментам рассматривается в приложении 4.

Бета-переходы, запрещенные в первом порядке, изучались для одночастичных конфигураций в области ядра ^{208}Pb (фиг. 3.6). В результате были определены перенормировочные множители для различных матричных элементов, вносящих вклад в переходы, но вследствие неполноты экспериментальных данных это исследование носит лишь предварительный характер.

ПРИМЕРЫ К § 4

Разрешенные β -переходы для одночастичных конфигураций (табл. 3.5)

Имеющиеся данные о вероятностях β -распада для зеркальных переходов между одночастичными конфигурациями собраны в табл. 3.5. Для переходов Гамова — Теллера приведенные вероятности B (GT) определяют по величине ft , пользуясь соотношением [см. формулы (3.202) и (3.217)]

$$D = ft \left[\frac{B(F)}{(4\pi)^{-1} g_V^2} + \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \frac{B(GT)}{(4\pi)^{-1} g_A^2} \right],$$

$$D = 6260 \pm 60, \quad \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 = 1,51 \pm 0,03. \quad (3.50)$$

Предполагается, что для переходов Ферми приведенная вероятность равна $(4\pi)^{-1}g_V^2$, как это должно быть для переходов между изобарическими аналоговыми состояниями с $T = 1/2$ [см. формулу (3.46)].

Таблица 3.5

РАЗРЕШЕННЫЕ β -ПЕРЕХОДЫ ДЛЯ ОДНОЧАСТИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Ядра	l, j	ft , сек	$B(GT)$	$B_{\text{одн}}(GT)$
$n \rightarrow p$	$s_{1/2}$	1120 ± 50	3	3
$^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He}$	$s_{1/2}^{-1}$	1060 ± 100	$3,3 \pm 0,3$	3
$^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N}$	$p_{1/2}^{-1}$	4470 ± 30	$0,27 \pm 0,02$	$^{1/3}$
$^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O}$	$d_{5/2}$	2370 ± 50	$1,09 \pm 0,1$	$^{7/5}$
$^{39}\text{Ca} \rightarrow ^{39}\text{K}$	$d_{3/2}^{-1}$	4330 ± 150	$0,30 \pm 0,05$	$^{3/5}$
$^{41}\text{Sc} \rightarrow ^{41}\text{Ca}$	$f_{7/2}$	2780 ± 100	$0,83 \pm 0,1$	$^{9/7}$

Значения ft определены по измеренным временам жизни и энергиям распада, приведенным в таблице [283]. Для нейтрона период полураспада взят из последних измерений, опубликованных в работе [97]. Значение величины ft для ^3H основано на результатах работы [17]. Величины B в таблице даны в единицах $(4\pi)^{-1}g_A^2$.

Основной вклад в рассмотренные переходы связан с разрешенными β -моментами $\mathcal{M}(j_V, 0)$ и $\mathcal{M}(j_A, 0, 1)$, но небольшой дополнительный вклад могут давать и β -моменты более высокого порядка. Соответствующие поправки можно рассчитать, пользуясь выражениями для полных вероятностей переходов $B(\lambda\ell = 0+)$ и $B(\lambda\ell = 1+)$, которые получаются из формулы (3.226) при замене V на A . Наибольшую численную поправку дает слабый магнитный момент $\mathcal{M}(j_V, \kappa = 1, \lambda = 1)$, определяющийся выражением (3.216). Интерференционный член между слабым магнетизмом и моментом Гамова — Теллера, как оказалось, уменьшает полную вероятность $B(\lambda\ell = 1+)$ следующим образом: $-2,3\%$ (^{15}O), -1% (^{17}F), -5% (^{39}Ca) и -1% (^{41}Sc). Для превращений $n \rightarrow p$ и $^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He}$ этот эффект меньше $0,5\%$. Следует подчеркнуть, что это довольно грубый расчет, поскольку ξ -приближение, на котором основывается выражение (3.226), не очень хорошо выполняется в случае рассмотренных переходов из-за больших энергий переходов и малых значений Z . При точных вычислениях необходимо учитывать радиальную зависимость моментов и отклонения от разрешенной формы β -спектров. (Подобные эффекты при β -распаде ядер ^{12}B и ^{18}N рассматриваются в приложении 4.)

Дополнительные данные о разрешенных β -переходах для одночастичных конфигураций были получены в результате исследования распада ядра ^{49}Ca [96]. Энергетические спектры ядер ^{49}Ca и ^{49}Sc представлены на фиг. 3.2г. Для основного состояния ^{49}Ca спин $I_\pi = 3/2-$, основная ветвь β -распада идет на уровень $3/2-$ ядра ^{49}Sc с энергией $3,09$ МэВ и значением $\lg ft = 5,1$. При таком переходе изменяется изоспин ($T = 9/2 \rightarrow T = 7/2$), и поэтому фермиевский матричный элемент равен нулю. Итак, на основании формулы (3.50) получаем, что $B(GT) = 0,035 (4\pi)^{-1}g_A^2$. Для сравнения укажем, что для одночастичной конфигурации $p_{3/2}$

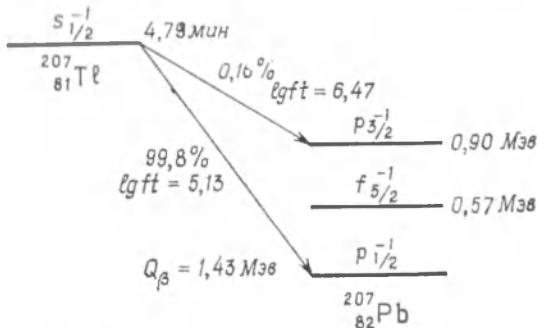
$$B \left(GT; p_{3/2}, T = \frac{9}{2} \rightarrow p_{3/2}, T = \frac{7}{2} \right) = \frac{40}{27}$$

в единицах $(4\pi)^{-1}g_A^2$ [см. формулы (3.47) и (3.49)].

Реакции срыва, при которых образуются состояния в ядрах ^{49}Ca и ^{49}Sc , указывают, что нейтронное состояние $p_{3/2}$ в ^{49}Ca вносит вклад преимущественно в основное состояние, тогда как около 60% протонного состояния $p_{3/2}$ в уровнях с $T = \frac{1}{2}$ в ядре ^{49}Sc принадлежат низшему состоянию со спином $\frac{3}{2}$ и энергией 3,09 MeV [155]. Если учесть поправку на такое ослабление одночастичного состояния $p_{3/2}$ в дочернем ядре, то эффективный момент Гамова — Теллера для перехода между уровнями со спином $\frac{3}{2}$ составит примерно только 20% одночастичного значения. (Этот момент пропорционален $[B(GT)]^{1/2}$.)

Запрещенные β -распады для одночастичных конфигураций (фиг. 3.6 и табл. 3.6)

Данные о запрещенных β -распадах для одночастичных конфигураций были получены в результате исследования переходов $^{207}\text{Tl} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$ и $^{209}\text{Pb} \rightarrow ^{209}\text{Bi}$. Теоретический анализ, на котором основывается наше изложение, был проведен в работе [115].



Фиг. 3.6. Экспериментальные данные о β -распаде ядра ^{207}Tl .

Взяты из работ [157, 99].

На фиг. 3.6 представлена схема распада ядра ^{207}Tl . Распад основного состояния определяется матричными элементами мультиполей $\lambda\pi = 0-$ и $1-$, тогда как распад возбужденного состояния $\frac{3}{2}-$ определяется преимущественно мультиполем $1-$. Вклад от перехода с мультипольностью $\lambda\pi = 2-$, разрешенного по спинам, по порядку величины оказывается равным 1%.

В ξ -приближении величину ft для этих двух переходов [см. формулы (3.225)] можно выразить через приведенные вероятности переходов, определенные формулой (3.226):

$$\begin{aligned} s_{1/2} \rightarrow p_{1/2}: \quad f_0 t &= \frac{(g_V^2/4\pi) D}{B(\lambda\pi=0-; s_{1/2} \rightarrow p_{1/2}) + B(\lambda\pi=1-; s_{1/2} \rightarrow p_{1/2})}, \\ s_{1/2} \rightarrow p_{3/2}: \quad f_0 t &= \frac{(g_V^2/4\pi) D}{B(\lambda\pi=1-; s_{1/2} \rightarrow p_{3/2})}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Для рассмотренных переходов это достаточно точное приближение, но при количественном вычислении мультипольных моментов необходимо ввести поправки на конечные размеры ядра [см. формулу (3.204)].

Переходы с $\lambda = 0-$ содержат два различных матричных элемента, связанных с мультипольными моментами $M(\rho_A, \lambda = 0)$ и $M(j_A, \kappa = 1, \lambda = 0)$, тогда как переходы с $\lambda = 1$ зависят от трех мультипольных моментов $M(j_V,$

$\kappa = 0, \lambda = 1$), $\mathcal{M}(\rho_V, \lambda = 1)$ и $\mathcal{M}(j_A, \kappa = 1, \lambda = 1)$ [см. формулы (3.226)]. Два матричных элемента, связанные с векторным взаимодействием, можно выразить один через другой, пользуясь уравнением непрерывности (3.192).

При вычислении матричных элементов оператора $\mathcal{M}(\rho_A, \lambda = 0)$ предполагается, что одночастичные состояния можно рассматривать как состояния частицы в случае центрального не зависящего от скорости потенциала со спин-орбитальным членом $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})v_{ls}(r)$. Тогда мы имеем соотношение

$$\sigma \cdot v = \frac{\sigma \cdot p}{M} + i\hbar^{-1}(\sigma \cdot r)v_{ls}(r). \quad (3.52)$$

Было установлено, что вклад спин-орбитального члена в матричный элемент составляет лишь несколько процентов.

Матричные элементы, вычисленные в предположении, что конфигурации рассматриваемых состояний чисто дырочные, с использованием радиальных волновых функций Бломквиста и Вальборна [48], представлены в табл. 3.6. Кон-

Таблица 3.6

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ β -МОМЕНТОВ ДЛЯ ПЕРЕХОДОВ $^{207}\text{Tl} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$
И $^{209}\text{Pb} \rightarrow ^{209}\text{Bi}$, ВЫЧИСЛЕННЫЕ С ФУНКЦИЯМИ БЛОМКВИСТА И ВАЛЬБОРНА

	$^{207}\text{Tl} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$		$^{209}\text{Pb} \rightarrow ^{209}\text{Bi}$
	$s_{1/2} \rightarrow p_{1/2}$	$s_{1/2} \rightarrow p_{3/2}$	$g_{9/2} \rightarrow h_{9/2}$
$\mathcal{M}(\rho_A, \lambda = 0)$	-0,115		0,181
$-i \frac{m_e c}{\hbar} \xi \mathcal{M}(j_A, \kappa = 1, \lambda = 0)$	0,083		-0,022
$B(\lambda = 0)$	$5,1 \cdot 10^{-4}$		$25 \cdot 10^{-4}$
$\mathcal{M}(j_V, \kappa = 0, \lambda = 1)$	-0,102	0,135	-0,004
$\frac{i}{\sqrt{3}} \frac{m_e c}{\hbar} \xi \mathcal{M}(\rho_V, \lambda = 1)$	0,039	-0,053	0,002
$i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m_e c}{\hbar} \xi \mathcal{M}(j_A, \kappa = 1, \lambda = 1)$	-0,080	-0,057	0,019
$B(\lambda = 1)$	$102 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$0,3 \cdot 10^{-4}$
$(f_0 t)_{\text{теор}}$	$4,6 \cdot 10^4$	$1,6 \cdot 10^6$	$2,0 \cdot 10^5$
$(f_0 t)_{\text{эксп}}$	$1,3 \cdot 10^5$	$3,0 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$

Значения ft для ядра ^{207}Tl взяты с фиг. 3.6, а для ядра ^{209}Pb — из работы [439]. В таблице даются приведенные матричные элементы в единицах g_V для β -моментов первого столбца. Приведенные вероятности переходов $B(\lambda)$ даны в единицах g_V^2 , величины ft — в секундах. Таблица основана на анализе, проведенном в работе [115], и частном сообщении Дамгарда.

станта взаимодействия была взята равной значению (3.202), а отношение g_A/g_V было взято равным -1,18. Небольшое увеличение аксиально-векторного взаимодействия, следующее из последних измерений времени жизни нейтрона [см. формулу (3.202)], в данном случае несущественно.

Сравнивая теоретические и экспериментальные значения величин ft , можно оценить перенормировочные множители для β -моментов, связанные с поляри-

зационными эффектами заполненных оболочек. Поскольку обе ветви β-распада идут преимущественно с мультипольностью $\lambda = 1$ (табл. 3.6), величины $f\ell$ зависят в основном от перенормировки двух мультипольных моментов $\mathcal{M}(p_V, \lambda = 1)$ и $\mathcal{M}(j_A, \kappa = 1, \lambda = 1)$. Структура мультипольного момента $\mathcal{M}(j_A, \kappa = 0, \lambda = 1)$, если его выразить с помощью уравнения непрерывности, подобна структуре момента $\mathcal{M}(p_V, \lambda = 1)$, а потому эти два мультипольных момента должны перенормироваться примерно одинаково. Таким образом, два перенормировочных множителя можно найти по экспериментальным значениям $f\ell$, если предположить, что для переходов $s_{1/2} \rightarrow p_{1/2}$ и $s_{1/2} \rightarrow p_{3/2}$ эти два множителя одинаковы.

Если перенормировку выразить через эффективные константы взаимодействия $(g_V)_{\text{эфф}}$ и $(g_A)_{\text{эфф}}$, то экспериментальным значениям $f\ell$ будут соответствовать две пары величин:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left(\frac{(g_V)_{\text{эфф}}}{g_V} \right)_{(p_V, \lambda=1)} = 0,6, \quad \left(\frac{(g_A)_{\text{эфф}}}{g_A} \right)_{(j_A, \kappa=1, \lambda=1)} = 0,5; \\ 2. \quad & \left(\frac{(g_V)_{\text{эфф}}}{g_V} \right)_{(p_V, \lambda=1)} = 0,3, \quad \left(\frac{(g_A)_{\text{эфф}}}{g_A} \right)_{(j_A, \kappa=1, \lambda=1)} = 0,7. \end{aligned}$$

* Если в ξ -приближении пренебречь зависимостью от энергии коэффициентов α_λ и $\beta_{\kappa\lambda}$ при поправках мультипольных моментов на конечные размеры ядра [см. формулу (3.204)], то спектр электронов имеет разрешенную форму. Если же учесть члены более высокого порядка, то наблюдаются небольшие отклонения от разрешенной формы, связанные главным образом с моментом $\mathcal{M}(j_A, \kappa = 1, \lambda = 1)$ и поэтому неодинаковые по величине для двух пар констант взаимодействия, приведенных выше. Таким образом, по форме спектров для переходов на основное состояние можно будет, вероятно, выбрать одну из двух возможных интерпретаций значений $f\ell$.

В данном анализе очень важно то, что два матричных элемента с $\lambda = 0$ для переходов на основное состояние приблизительно взаимно уничтожаются (см. табл. 3.6). В принципе это можно проверить, измерив угловое распределение электронов, испускаемых поляризованным ядром ^{207}Tl , и вычислив затем относительные вклады матричных элементов с $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

Бета-переходы на первое возбужденное состояние $f_{5/2}$ пока не наблюдались. Такие переходы должны быть очень слабыми, но не только потому, что они связаны с мультипольностью $\lambda = 2$, а и вследствие запрета по l . Действительно, для чистых конфигураций переход идет с изменением $\Delta l = 3$ и поэтому основной матричный элемент оператора $\mathcal{M}(j_A, \kappa = 1, \lambda = 2)$ оказывается равным нулю. При анализе таких l -запрещенных переходов придется рассчитывать поляризационные члены с $k = 3, \lambda = 2$, аналогичные тензорному члену (3.44) для эффективного оператора перехода M_1 .

На основании аналогии между векторным β-взаимодействием и электромагнитным взаимодействием можно думать, что векторная часть распада ядра ^{207}Tl очень похожа на электромагнитный распад аналогового состояния ядра ^{207}Pb ($I_\pi = 1/2+$, $T = 49/2$, $M_T = 49/2$) на низколежащие состояния $p_{1/2}$ и $p_{3/2}$. Поэтому электрический дипольный момент для распада аналогового состояния (в который вносит вклад только изовекторная составляющая, ибо $\Delta T = 1$) уменьшится, вероятно, приблизительно во столько же раз, во сколько уменьшился и β-момент $\mathcal{M}(p_V, \lambda = 1)$ при распаде ядра ^{207}Tl [см. замечание по поводу формулы (3.214)].

Распад ядра ^{209}Pb ($g_{9/2}$) можно проанализировать так же как и распад ядра ^{207}Tl . Результаты подобного анализа также приведены в табл. 3.6. Оказалось, что экспериментальное значение $f\ell$ примерно на 50% больше значения, которое получается для чистых одночастичных конфигураций, если пренебречь эффектами поляризации. Для этого распада важнее всего момент $\mathcal{M}(p_A, \lambda = 0)$, и анализ указывает, следовательно, на то, что перенормировочный множитель для этого момента равен примерно 0,8.

§ 5. РЕАКЦИИ, ГЕНЕАЛОГИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

1. Реакции с передачей одной частицы

Исследуя реакции, протекающие с передачей одного нуклона (процессы срыва и подхвата), можно прямым путем проверить одночастичную интерпретацию ядерных состояний. Амплитуда процесса срыва, при котором нуклон передается на уровень с квантовыми числами j и m ядра-мишени, пропорциональна матричному элементу оператора $a^\dagger (jm)$, вычисленному между состояниями ядра-мишени и конечного ядра. Точно так же в случае реакции подхвата амплитуда пропорциональна матричному элементу оператора a (или оператора b^\dagger). Эти матричные элементы называются генеалогическими коэффициентами. Возможности определения генеалогических коэффициентов по сечениям реакций с передачей одной частицы рассматриваются в приложении 5.

Для процессов, связывающих конфигурации заполненных оболочек, у которых $T_0 = 0$ ($N = Z$), с одночастичной или дырочной конфигурацией, приведенные генеалогические коэффициенты таковы:

$$\langle j \parallel a^\dagger (j) \parallel \hat{0} \rangle = \langle j^{-1} \parallel b^\dagger (j) \parallel \hat{0} \rangle = \langle j^{-1} \parallel a (\bar{j}) \parallel \hat{0} \rangle = (2j+1)^{1/2}, \quad T_0 = 0. \quad (3.53)$$

Если изоспин заполненных оболочек $T_0 \neq 0$, то необходимо рассматривать отдельно различные конфигурации, представленные на фиг. 3.1:

если уровни j_n и j_p не заняты, то

$$\langle j; TM_T \parallel a^\dagger (j, m_t) \parallel \hat{0}; T_0, M_T = T_0 \rangle = (2j+1)^{1/2} \left\langle T_0 T_0 \frac{1}{2} m_t \mid TM_T \right\rangle;$$

если уровень j_n занят, а уровень j_p не занят, то

$$\begin{aligned} & \left\langle j^{-1}; T_0 - \frac{1}{2}, M_T = T_0 - \frac{1}{2} \parallel b^\dagger \left(j, m_t = -\frac{1}{2} \right) \parallel \hat{0}; T_0, M_T = T_0 \right\rangle = \\ & = (2j+1)^{1/2} = \left\langle j; T_0 - \frac{1}{2}, M_T = T_0 - \frac{1}{2} \parallel \right. \\ & \times a^\dagger \left(j, m_t = -\frac{1}{2} \right) \parallel \hat{0}; T_0 M_T = T_0 \rangle; \end{aligned} \quad (3.54)$$

если уровни j_n и j_p заняты, то

$$\langle j^{-1}; TM_T \parallel b^\dagger (j, m_t) \parallel \hat{0}; T_0, M_T = T_0 \rangle = (2j+1)^{1/2} \left\langle T_0 T_0 \frac{1}{2} m_t \mid TM_T \right\rangle.$$

Состояния, рассматриваемые как одночастичные и дырочные в спектрах на фиг. 3.2, в реакциях с передачей одного нуклона заполняются с особенно большими вероятностями (см. статьи, цитируемые

в подписи к фиг. 3.2). Это имеет очень важное значение для интерпретации уровней. Интенсивности таких реакций передачи согласуются с оценкой (3.54), но в настоящее время количественная проверка этого соотношения осложнена из-за трудностей, которые возникают при детальном анализе сечений реакций (см. приложение 5, п. 1). Для более высоких одночастичных конфигураций, свойства которых распределены по нескольким ядерным уровням, реакции передачи позволяют определить силовую функцию. В качестве примера в табл. 3.7 рассмотрены данные, полученные в результате анализа реакции $^{40}\text{Ca}(d, p)^{41}\text{Ca}$.

2. Резонансные реакции

Спектры, лежащие выше порога испускания нуклона, можно изучать по реакциям рассеяния. В области низких энергий наблюдаются острые резонысы, соответствующие образованию метастабильных состояний, свойства которых аналогичны свойствам связанных состояний. Амплитуда g_{ij} образования резонансного состояния при бомбардировке нуклонами мишени с заполненными оболочками зависит от веса той составляющей волновой функции резонансного состояния, которая характеризует мишень и частицу на орбите с квантовыми числами l и j . Таким образом, отношение g_{ij} к одночастичной амплитуде $(g_{ij})_{\text{одн}}$, соответствующей рассеянию частицы на ядре, эквивалентно генеалогическому коэффициенту для связанных состояний. Анализ резонансных реакций с помощью амплитуды образования и распада резонансного состояния, а также расчеты одночастичных амплитуд проводятся в приложении 5. Амплитуды g_{ij} нормированы так, что квадраты их абсолютных значений равны резонансным ширинам Γ_{ij} .

Исследуя резонансные реакции при бомбардировке нуклонами ядер с заполненными оболочками, получают важные данные об одночастичной силовой функции (табл. 3.8). Они согласуются с данными, полученными из реакций передачи, и дополняют их.

Для заполненных оболочек с $T \neq 0$ основные данные относительно спектров с $T = T_0 + 1/2$ и $M_T = T_0 - 1/2$ (аналоговые состояния) были получены в результате исследования резонансного рассеяния протонов на ядрах с заполненными оболочками. Резонансные ширины дают сведения относительно природы этих уровней. Их можно комбинировать со сведениями, полученными из реакций передачи нейтрона на уровня с $M_T = T = T_0 + 1/2$, которые представляют собой компоненты изобарических мультиплетов (см. табл. 1.2). При рассеянии протонов на мишени с одной нейтронной дыркой можно изучать аналоговые состояния ($M_T = T_0 - 1$) ядер с заполненными оболочками и получать сведения об их связи с состояниями с одной нейтронной дыркой. (См., например, анализ реакции $p + {}^{207}\text{Pb}$ в работе [9].)

ПРИМЕРЫ К § 5

Генеалогические коэффициенты из реакции $^{40}\text{Ca} (d, p) ^{41}\text{Ca}$ (табл. 3.7)

Реакцию срыва (d, p) на ядре ^{40}Ca очень внимательно изучали с целью определения нейтронных генеалогических коэффициентов. Отмечено много протонных групп, соответствующих образованию различных уровней в ядре ^{41}Ca . В угловом распределении многих протонных групп имеются резко выраженные максимумы, преимущественно в прямом направлении, что характерно для прямых реакций передачи.

Таблица 3.7

ПРИВЕДЕННЫЕ ГЕНЕАЛОГИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ,
ПОЛУЧЕННЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ АНАЛИЗА СЕЧЕНИЙ
РЕАКЦИИ $^{40}\text{Ca} (d, p) ^{41}\text{Ca}$ ПРИ ЭНЕРГИИ ДЕЙТРОНА 7 МэВ

$E_{\text{возд}}, \text{МэВ}$	$l j$	$\langle I = j a^\dagger (j) \hat{0} \rangle^2$
0	$f_{7/2}$	(8)
1,95	$p_{3/2}$	3,8
2,02	$d_{3/2}$	0,8
2,47	$p_{3/2}$	1,1
2,68	$s_{1/2}$	0,04
3,41	$s_{1/2}$	0,03
3,62	p	0,2
3,74	d	0,3
3,95	$p_{1/2}$	1,5
4,20	p	0,02
4,62	p	0,2
4,77	$p_{1/2}$	0,4
4,98	$g_{9/2}$	0,8
4,8—6,6 (4 состояния)	$d_{5/2}$	0,6
4,9—5,8 (3 состояния)	$f_{5/2}$	2,8
5,0—6,0 (4 состояния)	$s_{1/2}$	0,04
5,4—6,2 (8 состояний)	p	0,4

Приведенные генеалогические коэффициенты, полученные путем анализа сечений реакции $^{40}\text{Ca} (d, p) ^{41}\text{Ca}$ при энергии дейtron 7 МэВ, взяты из работы [31]. Для групп состояний, указанных в последних четырех строках таблицы, даны суммарные значения.

В примере, рассмотренном в табл. 3.7, проводится анализ экспериментальных угловых распределений в предположении, что налетающий дейtron и вылетающий протон движутся в поле, соответствующем оптическому потенциалу (приближение искаженных волн, см. приложение 5). Взятый для анализа потенциал составлен из вещественного центрального потенциала Вудса — Саксона,

множного потенциала, пропорционального производной по радиусу от вещественного потенциала (поверхностное поглощение), и кулоновского потенциала. Параметры потенциала были определены по данным об упругом рассеянии deutриона и протона на ядре ^{40}Ca . Эффективное (pr)-взаимодействие аппроксимировалось силами с пулевым радиусом действия. Максимумы в прямом направлении, наблюдающиеся в экспериментальных угловых распределениях, довольно хорошо согласуются с максимумами, полученными теоретически. По их положению можно определить орбитальные моменты l для передаваемой частицы. В некоторых случаях удается определить угловой момент j по кривой сечения при больших углах рассеяния (см. работу [284]).

Величиной экспериментального сечения определяются генеалогические коэффициенты [см. формулы (3.250) и (3.258)]. Значения этих коэффициентов, полученные путем анализа сечений, приведены в табл. 3.7. Вследствие упрощающих предположений (таких, как нулевой радиус сил (pr)-взаимодействия и преигнорирование спин-орбитального членом ядерного потенциала) абсолютные значения генеалогических коэффициентов весьма ненадежны. Поэтому сечения были нормированы относительно основного состояния ядра ^{41}Ca , которое считалось чисто одночастичным. Более подробный анализ сечений (d, p)-реакций с переходом на основное и позиции возбужденные состояния ядра ^{41}Ca проведен в работе [285].

* Мы видим, что и позиции возбуждение одночастичное состояние ($p_{3/2}$) распределено по двум (или нескольким) уровням, хотя основной вес приходится на уровень с энергией 1,95 МэВ. Основная часть состояния $p_{1/2}$ также сосредоточена на одном уровне, но остальная часть распределена по большому числу уровней. Сильный максимум срыва с $l = 3$ в области энергии возбуждения 5–6 МэВ интерпретируется как передача нуклона на уровень $f_{5/2}$. Хотя рассчитанная суммарная вероятность равна половине одночастичного значения, отсутствие других сильных уровней f в исследованной области означает, что основная часть состояния $f_{5/2}$ содержится в уровнях, перечисленных в табл. 3.7. Для еще более высоких одночастичных орбит была, по-видимому, обнаружена лишь часть их амплитуд, рассредоточенных по большому числу состояний.

Результаты анализа срыва на состояния с положительной четностью в низкоэнергетической части спектра указывают на то, что в ядре ^{40}Ca оболочки $2s$ и $1d$ заполнены не полностью. Так, экспериментальное значение амплитуды срыва нейтрона $d_{3/2}$ в состояние с энергией 2,02 МэВ считается доказательством того, что около 20% уровня $d_{3/2}$ не занято.

Оказалось, что при такой реакции заселяются многие уровни помимо тех, которые перечислены в табл. 3.7. Но угловые распределения для дополнительных протонных групп не обнаруживают сколько-нибудь значительных компонент, соответствующих реакции срыва. Отсюда можно сделать вывод, что одночастичные генеалогические коэффициенты для этих уровней малы.

Приведенные ширины для резонансного рассеяния протона на ядре ^{16}O (табл. 3.8)

Сечение рассеяния протона на ядре ^{16}O имеет ряд ярко выраженных резонансов, анализ которых дает сведения об одночастичных генеалогических коэффициентах для резонансных состояний в ядре ^{17}F . Параметры резонансов, приведенные в табл. 3.8, основаны на измерениях дифференциальных сечений упругого рассеяния протона. Вклад отдельных U -каналов был определен путем фазового анализа, причем преигнорировали небольшим вкладом процессов неупругого рассеяния и захвата.

В первом приближении амплитуду рассеяния в области резонансов можно представить одноуровневой формулой (3.282). Зависимость резонансной ширины

Таблица 3.8

ПРИВЕДЕННЫЕ ШИРИНЫ РЕЗОНАНСНОГО
РАССЕЯНИЯ ПРОТОНА НА ЯДРЕ ^{16}O

$E_r, \text{Мэв}$	$I_r \pi$	$\Gamma_r, \text{Мэв}$	$\gamma \frac{MR^2}{\hbar^2} \cdot 10^2$
3,10	$1/2^-$	0,020	1,3
3,86	$5/2^-$	$\leq 0,003$	$\leq 2,8$
4,69	$3/2^-$	0,24	6,3
5,10	$3/2^+$	1,63	76
5,52	$3/2^-$	0,07	1,5
5,67	$7/2^-$	0,04	5,3
5,68	$1/2^+$	$< 0,0006$	$< 0,013$
5,82	$3/2^+$	0,49	6,8
6,04	$1/2^-$	0,03	0,6
6,56	$1/2^+$	0,22	3,6
6,70	$3/2^-$	$< 0,003$	$< 0,04$
6,77	$3/2^+$	0,005	0,11
7,03	$3/2^-$	0,004	0,04
7,36			
7,44		Слабые уровни	
7,45			
7,47			
7,48	$3/2^+$	0,85	18,8
7,55	$7/2^-$	0,03	1,32

Резонансные параметры для уровней ^{17}F взяты из работы [384].

ог энергии была взята в виде [см. формулы (3.309) и (3.315)]

$$\Gamma_r = 2kRv_r\gamma, \quad (3.55)$$

где проницаемость v_r вычислена для кулоновских волновых функций при $R = 5,1$ ферми. Приведенная ширина γ , полученная из формулы (3.55), в табл. 3.8 дана в процентах от величины \hbar^2/MR^2 . Для некоторых резонансов ширина сравнима с расстоянием до ближайшего резонанса с теми же квантовыми числами I и π . В таких случаях фазы рассеяния подбирали, пользуясь двухуровневой формулой, учитывающей интерференцию между резонансами. Полученные таким образом значения γ , представленные в табл. 3.8, близки к значениям, рассчитанным по одноуровневой формуле.

Величина γ в единицах \hbar^2/MR^2 может служить мерой одночастичности рассмотренных уровней [см. формулу (3.336)], но точный расчет одночастичных генеалогических коэффициентов связан с решением задачи об одночастичном движении в поле, соответствующем ядерному потенциалу. [Радиус взаимодействия, взятый при таком расчете, по-видимому, слишком велик, и поэтому полученные значения приведенных ширин γ могут оказаться заниженными. В то же время величина γ для одночастичных резонансов вследствие диффузности потенциала должна превышать величину \hbar^2/MR^2 (приложение 6, п. 2).]

Среди исследовавшихся уровней состояния $\frac{3}{2}+$ с энергией 5,10 МэВ, по-видимому, приближенно можно считать одночастичным, хотя эксперименты указывают также на существенный вклад $d_{3/2}$ -состояния в уровне с энергией 5,83 и 7,48 МэВ. Самым низшим состоянием отрицательной четности должно быть состояние $f_{7/2}$, но в рассматриваемой области была обнаружена лишь небольшая доля состояния $f_{7/2}$.

Анализ рассеяния нейтрона на ядре ^{16}O приводит к таким же выводам, как и анализ рассеяния протона [343]. Решая задачу о рассеянии одной частицы на ядре с соответствующим потенциалом [487], можно получить правильную ширину нейтронного резонанса с энергией 5,1 МэВ. Но вследствие сильной зависимости ширины от выбираемых параметров потенциала генеалогические коэффициенты оказываются весьма неопределенными. Когда нам будет точнее известен потенциал ядра, метод резонансного рассеяния может стать довольно точным методом исследования структуры ядерных состояний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

1. Связь спина с орбитой

m_s -Представление

Волновую функцию частицы со спином $s = 1/2$ в поле, соответствующем сферически-симметричному и сохраняющему четность потенциалу, можно записать в виде

$$\psi_{nljm} = \mathcal{R}_{nlj}(r) (i^l Y_l \chi)_{(l+1/2)jm} = \mathcal{R}_{nlj}(r) \sum_{m_l m_s} \left\langle l m_l \frac{1}{2} m_s | jm \right\rangle i^l Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \chi_{m_s}, \quad (3.56)$$

где χ — спинорная волновая функция, определяющаяся проекцией m_s спина на некоторую фиксированную ось z .

Радиальную волновую функцию можно взять вещественной (когда потенциал инвариантен относительно обращения времени), а ее фазу выбрать так, чтобы при больших r (превышающих расстояние до последнего узла функции) функция \mathcal{R} была положительной, т. е. выполнялось неравенство

$$\mathcal{R}_{nlj}(r) > 0. \quad (3.57)$$

Такой выбор фазы обусловлен тем, что основной вклад в радиальные матричные элементы часто вносит область ядерной поверхности. Примеры радиальных функций приведены на фиг. 3.4.

Множитель i^l в формуле (3.56) введен для того, чтобы обеспечивались обычные трансформационные свойства при обращении времени [см. формулу (1.229)]:

$$\tilde{\mathcal{R}} | nljm \rangle = (-1)^{j+m} | nlj-m \rangle. \quad (3.58)$$

h-Представление

В представлении собственных функций оператора спиральности направление спина указывается относительно координатной системы \mathcal{K}' , ось z' которой совпадает с направлением $\hat{\mathbf{r}}$. Пусть $\hat{\mathbf{r}}$ обозначает ориентацию системы \mathcal{K}' относительно системы \mathcal{K} . Для полного определения системы \mathcal{K}' необходимо задать три угла Эйлера, а именно полярные углы ϑ и ϕ вектора $\hat{\mathbf{r}}$ и третий угол ψ , который может быть любым. (Углы Эйлера указаны на фиг. 1.14, о произвольности выбора угла ψ говорится ниже.)

Преобразование спинора χ_{m_s} при переходе к повернутой системе координат \mathcal{K}' дается соотношением [см. формулу (1.127)]

$$\chi_{m_s} = \sum_h \mathcal{D}_{m_sh}^{1/2}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_h. \quad (3.59)$$

Поэтому волновую функцию (3.56) можно записать в следующем виде [см. формулы (1.435) и (1.436)]:

$$\begin{aligned} \Psi_{nljm} &= \mathcal{R}_{nlj}(r) i^l \left(\frac{2j+1}{16\pi^2} \right)^{1/2} \sum_h \alpha(ljh) \mathcal{D}_{mh}^j(\hat{\mathbf{r}}) \chi_h = \\ &= \mathcal{R}_{nlj}(r) i^l \left(\frac{2j+1}{16\pi^2} \right)^{1/2} (\mathcal{D}_{m-1/2}^j(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{h=-1/2} + \\ &\quad + (-1)^{j-l-1/2} \mathcal{D}_{m1/2}^j(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{h=+1/2}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Здесь фазовый множитель

$$\begin{aligned} \alpha(ljh) &= \left(\frac{2(2l+1)}{2j+1} \right)^{1/2} \left\langle l 0 \frac{1}{2} h \mid j h \right\rangle = (-1)^{(h+1/2)(j-l-1/2)} = \\ &= \begin{cases} +1 & \text{при } j = l + \frac{1}{2}, \quad h = \pm \frac{1}{2}, \\ \mp 1 & \text{при } j = l - \frac{1}{2}, \quad h = \pm \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Угловая часть функции (3.60) нормирована относительно интегрирования по всем трем углам Эйлера (φ , θ , ψ), характеризующим ориентацию $\hat{\mathbf{r}}$, и поэтому здесь введен дополнительный множитель $(2\pi)^{-1/2}$. Волновая функция (3.60) не зависит от угла ψ , что явствует из определения этого угла. Нетрудно убедиться, что если к углу ψ добавить угол $\Delta\psi$, то \mathcal{D} -функция в формуле (3.60) приобретет множитель $\exp(i\Delta\psi)$, а χ_h — множитель $\exp(-i\Delta\psi)$. (Можно также фиксировать угол ψ , выбрав, например, оси x' и y' системы \mathcal{K}' так, чтобы система \mathcal{K}' получалась при повороте системы \mathcal{K} на угол ψ вокруг оси, совпадающей с направлением $z \times z'$. Тогда углами Эйлера, характеризующими ориентацию системы \mathcal{K}' , будут углы φ , θ , $\psi = -\varphi$, см. фиг. 1.14.)

Часть волновой функции (3.60), зависящую от углов и спина, можно также получить путем преобразования к «внутренней» координатной системе \mathcal{K}' с ориентацией $\hat{\mathbf{r}}$. Путем таких же рассуждений, как и при выводе формулы (1.191), получаем, что

$$\langle \hat{r} h \mid h j m \rangle = \left(\frac{2j+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \mathcal{D}_{mh}^j(\hat{\mathbf{r}}). \quad (3.62)$$

Вращательной симметрией определяется зависимость коэффициента преобразования (3.62) от $\hat{\mathbf{r}}$ и m , а фазовый множитель, который может зависеть от j и \hbar ,

остается неопределенным. Поскольку при обращении времени $\hbar \rightarrow -\hbar$, обычный выбор фазы недопустим и поэтому равенство (3.62) содержит дополнительное условие о фазе состояний $| hjm \rangle$.

В $\hat{h}m$ -представлении преобразование к внутренней координатной системе приводит к следующему выражению для амплитуд:

$$\langle \hat{r}m_s | lm \rangle = i^l \left(\frac{2l+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \langle lm_l sm_s | lm \rangle \mathcal{Z}_{m_l 0}^l(\hat{r}). \quad (3.63)$$

Здесь фазовый множитель i^l с точностью до множителя ± 1 определяется тем, что состояние $| lm \rangle$ при обращении времени преобразуется обычным образом. Их формул (3.62) и (3.63) с учетом формулы (3.59) для коэффициента преобразования получаем выражение

$$\langle hm | lm \rangle = i^l \left(\frac{2l+1}{2j+1} \right)^{1/2} \langle l0sh | jh \rangle. \quad (3.64)$$

Легко видеть, что соотношения (3.64) и (3.62) эквивалентны соотношениям (3.60). [Коэффициент преобразования (3.64) записан в форме, справедливой для частиц с произвольным спином, а также для относительного движения двух частиц с полным спином s и спиральностью h .]

Под действием операторов \mathcal{P} и \mathcal{T} состояния $| lm \rangle$ и $| hjm \rangle$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} | lm \rangle &= (-1)^l | lm \rangle, \\ \mathcal{T} | lm \rangle &= (-1)^{j+m} | lj-m \rangle, \\ \mathcal{P} | hjm \rangle &= (-1)^{j-1/2} | -hjm \rangle, \\ \mathcal{T} | hjm \rangle &= (-1)^{m+1/2} | -hj-m \rangle. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Преобразования состояний $| hjm \rangle$ можно получить из преобразований состояний $| lm \rangle$, пользуясь выражением (3.64).

Если мы рассматриваем \mathcal{P} - и \mathcal{T} -преобразования в $\hat{r}h$ -представлении, то для определения ориентации повернутой системы нам нужно выбрать третий угол Эйлера. Это удобно сделать так, чтобы вектор \hat{r} оставался неизменным при операции \mathcal{T} , а при операции \mathcal{P} преобразовывался в вектор $-\hat{r}$, который получается из вектора \hat{r} при повороте системы \mathcal{K}' на угол $-\pi$ вокруг оси y' . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{T} | \hat{r}h \rangle &= (-1)^{1/2+h} | \hat{r}-h \rangle, \\ \mathcal{P} | \hat{r}h \rangle &= (-1)^{1/2-h} | -\hat{r}-h \rangle, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} -\hat{r} &= (\varphi + \pi, \pi - \psi, -\pi - \psi), \\ \mathcal{Z}_{mh}^j(-\hat{r}) &= (-1)^{j+h} \mathcal{Z}_{m-h}^j(\hat{r}). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Фазовый множитель, возникающий в результате операции \mathcal{P} , можно получить с помощью матрицы вращения (1.140). Соотношение (3.67) для \mathcal{Z} -функции можно вывести из выражений (1.138).

Волновая функция (3.60) частицы со спином в h -представлении эквивалента ротационной волновой функции системы, внутренняя форма которой обладает аксиальной симметрией, но не обладает симметрией отражения (см. гл. 4, § 2).

2. Вычисление матричных элементов одночастичных операторов¹⁾

Операторы, зависящие только от пространственных координат

В общем случае тензорный оператор, зависящий только от пространственных координат \mathbf{r} частицы, имеет вид

$$T_{\lambda\mu} = i^{\lambda} f(r) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi). \quad (3.68)$$

В случае самосопряженных тензорных операторов (которые при эрмитовом сопряжении преобразуются сами в себя) радиальную функцию $f(r)$ можно взять вещественной. Множитель i^{λ} здесь введен для того, чтобы при обращении времени и эрмитовом сопряжении получить фазу $e^{-i\pi} = -1$ [см. формулы (1.168) и (1.172)]. Тогда в представлении со стандартным выбором фазы матричные элементы оператора $T_{\lambda\mu}$ будут вещественными [см. формулу (1.169)].

В случае волновых функций (3.60) приведенный матричный элемент, определяющийся формулой (1.154), можно вычислить, пользуясь соотношением (1.136) для \mathcal{D} -функций [см. также формулу (1.135)], и мы получим, что

$$\begin{aligned} & \langle n_2 l_2 j_2 || i^{\lambda} f(r) Y_{\lambda} || n_1 l_1 j_1 \rangle = \\ & = (-j_2 + 1)^{1/2} \langle j_2 m_2 | T_{\lambda} | j_1 \rangle_{(j_1 \lambda) j_2 m_2} = i^{\lambda+1-j_2} (-1)^{j_1+\lambda-j_2} \left(\frac{(2\lambda+1)(2j_1+1)}{4\pi} \right)^{1/2} \times \\ & \times \left\langle j_1 \frac{1}{2} \lambda 0 \left| j_2 \frac{1}{2} \right. \right\rangle \langle j_2 | f | j_1 \rangle \begin{cases} 1 & \text{при } l_1 + \lambda - l_2 \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } l_1 + \lambda - l_2 \text{ нечетном,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.69)$$

где радиальный матричный элемент

$$\langle j_2 | f | j_1 \rangle = \int_0^{\infty} \mathcal{R}_{n_2 l_2 j_2}(r) f(r) \mathcal{R}_{n_1 l_1 j_1}(r) r^2 dr. \quad (3.70)$$

[Радиальные матричные элементы, такие, как в выражении (3.70), мы обозначаем иначе, нежели матричные элементы, содержащие угловые переменные: последним приписывают индексы магнитных квантовых чисел, а в случае приведенных матричных элементов применяют двойные вертикальные черточки.] В выражении (3.69) мы ввели фазовый множитель (3.61) и использовали соотношение симметрии (1.103) для коэффициентов векторного сложения. Сохранение четности обеспечивается суммированием по квантовому числу \hbar .

Заметим, что в формуле (3.69) угловой матричный элемент зависит только от квантовых чисел j (и не зависит от λ). Действительно, угловая часть плотности вероятности, усредненная по направлению спина одночастичного состояния, зависит только от j , что непосредственно следует из выражения (3.60) для волновой функции в \hbar -представлении.

Матричный элемент тензорного оператора (3.68) можно также вывести исходя из одночастичных волновых функций (3.56). Производя переход от схемы

¹⁾ Одночастичные матричные элементы обычно вычисляют в (*1s*) j -представлении (см., например, работу [127]). В данном же разделе мы пользуемся \hbar -представлением, которое часто оказывается пригодным для выявления простых свойств матричных элементов. Таким представлением пользовались в работе [359] для вычисления двухчастичных матричных элементов.

единиц $(l_1^{1/2})j_1, \lambda; j_2$ в схеме связи $(l_1\lambda)l_2, 1/2; j_2$ и пользуясь соотношениями (1.135) и (1.136) для шаровых функций, получаем, что

$$\begin{aligned} & \langle n_\lambda l_\lambda j_\lambda | l^\lambda f(r) Y_\lambda | | n_1 l_1 j_1 \rangle = (2j_2 + 1)^{1/2} \langle l_2 j_2 m_2 | T_{\lambda, l_1 j_1} | l_1 j_1 \rangle = \\ & = l_1 + \lambda - l_2 \left(\frac{(2\lambda + 1)(2l_1 + 1)(2j_2 + 1)}{4\pi(2l_2 + 1)} \right)^{1/2} \langle l_1 0 \lambda 0 | l_2 0 \rangle \times \\ & \times \left\langle (l_1 \lambda) l_2, \frac{1}{2}; j_2 \left| \left(l_1 \frac{1}{2} \right) j_1, \lambda; j_2 \right\rangle \langle j_2 | f | j_1 \rangle. \right. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Коэффициенты пересвязки можно выразить через б δ -символ [см. формулу (1.113)]. Эквивалентность выражений (3.69) и (3.71) указывает на то, что б δ -символ, один из угловых моментов которого равен $1/2$, можно выразить через коэффициенты векторного сложения. При четных значениях величины $l_1 + \lambda - l_2$ мы имеем

$$\left\{ \begin{array}{c} l_1 \\ j_2 \\ \hline \lambda \\ l_2 \end{array} \right\} = (-1)^{l_2 + 1/2 + j_2} (2l_1 + 1)^{-1/2} (2j_2 + 1)^{-1/2} \frac{\langle j_1 1/2 \lambda 0 | j_2 1/2 \rangle}{\langle l_1 0 \lambda 0 | l_2 0 \rangle}. \quad (3.72)$$

Операторы, зависящие от спина

Оператор, зависящий от спина частицы, но не зависящий от ее скорости, можно разложить по тензорным операторам:

$$T_{\kappa, \lambda \mu} = i^\kappa f(r) (Y_\kappa (\hat{r}) s)_{(\kappa 1) \lambda \mu}. \quad (3.73)$$

Спиновую зависимость оператора можно также характеризовать сферическими составляющими вектора s относительно внутренней системы координат \mathcal{K}' с ориентацией \hat{r} . Тогда базисными тензорными операторами будут операторы

$$T_{\eta, \lambda \mu} = f(r) \mathcal{D}_{\mu \eta}^\lambda (\hat{r}) s_\eta, \quad (3.74)$$

где [см. формулу (1.145)]

$$s_{\mu s} = \sum_{\eta} \mathcal{D}_{\mu s \eta}^1 (\hat{r}) s_\eta. \quad (3.75)$$

Операторы (3.73) и (3.74) связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} & \langle Y_\kappa s | (Y_\kappa s)_{(\kappa 1) \lambda \mu} = \sum_{\eta} \left(\frac{2\kappa + 1}{4\pi} \right)^{1/2} \langle \kappa 0 1 \eta | \lambda \eta \rangle \mathcal{D}_{\mu \eta}^\lambda s_\eta = \\ & = \begin{cases} - \left(\frac{\lambda + 1}{4\pi} \right)^{1/2} \mathcal{D}_{\mu 0}^\lambda s_{\eta=0} + \left(\frac{\lambda}{8\pi} \right)^{1/2} (\mathcal{D}_{\mu 1}^\lambda s_{\eta=1} + \mathcal{D}_{\mu -1}^\lambda s_{\eta=-1}) & \text{при } \lambda = \kappa - 1, \\ - \left(\frac{2\lambda + 1}{8\pi} \right)^{1/2} (\mathcal{D}_{\mu 1}^\lambda s_{\eta=1} - \mathcal{D}_{\mu -1}^\lambda s_{\eta=-1}) & \text{при } \lambda = \kappa, \\ + \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^{1/2} \mathcal{D}_{\mu 0}^\lambda s_{\eta=0} + \left(\frac{\lambda + 1}{8\pi} \right)^{1/2} (\mathcal{D}_{\mu 1}^\lambda s_{\eta=1} + \mathcal{D}_{\mu -1}^\lambda s_{\eta=-1}) & \text{при } \lambda = \kappa + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.76)$$

В h -представлении получаем, что приведенные матричные элементы

$$\begin{aligned} & \langle j_2 | f(r) \mathcal{D}_{v=0}^{\lambda} s_{\eta=0} | j_1 \rangle = \\ & = i^{l_1 - l_2} (-1)^{j_1 + \lambda - j_2 + 1} (2j_1 + 1)^{1/2} \left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 0 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle \langle j_2 | f | j_1 \rangle \times \\ & \quad \times \frac{1}{2} \begin{cases} 1 & \text{при } l_1 + \lambda - l_2 \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } l_1 + \lambda - l_2 \text{ нечетном,} \end{cases} \\ & \langle j_2 | f(r) (\mathcal{D}_{v=1}^{\lambda} s_{\eta=1} \pm \mathcal{D}_{v=-1}^{\lambda} s_{\eta=-1}) | j_1 \rangle = \\ & = i^{l_1 - l_2} (-1)^{j_2 - l_2 - 1/2} (j_1 + 1/2)^{1/2} \left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 1 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle \times \\ & \quad \times \langle j_2 | f | j_1 \rangle \frac{1}{2} (-1 \pm (-1)^{l_1 + l_2 - \lambda}), \end{aligned} \quad (3.77)$$

где \mathcal{D}_v^{λ} — неприводимый тензорный оператор ранга λ , μ -я составляющая которого равна $\mathcal{D}_{uv}^{\lambda}$.

Таким образом, приведенные матричные элементы тензорных операторов (3.73) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \langle j_2 | f(r) (Y_{\lambda} s) | j_1 \rangle = i^{l_1 - l_2 + \lambda} \left(\frac{2j_1 + 1}{4\pi} \right)^{1/2} \langle j_2 | f | j_1 \rangle \frac{1}{2} \times \\ & \quad \times \begin{cases} (-1)^{j_1 + \lambda - j_2} (2\lambda + 1)^{1/2} \left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 0 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle - (-1)^{j_2 - l_2 - 1/2} (\lambda)^{1/2} \times \\ \quad \times \left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 1 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle & \text{при } \lambda = \nu - 1, \\ (-1)^{j_2 - l_2 - 1/2} (2\lambda + 1)^{1/2} \left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 1 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle & \text{при } \lambda = \nu, \\ (-1)^{j_1 + \lambda + j_2} (\lambda)^{1/2} \left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 0 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle - (-1)^{j_2 - l_2 - 1/2} (\lambda + 1)^{1/2} \times \\ \quad \times \left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 1 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle & \text{при } \lambda = \nu + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Здесь предполагается, что $(l_1 - l_2 + \nu)$ — четное число. [При нечетных значениях $(l_1 - l_2 + \nu)$ матричные элементы в силу закона сохранения четности равны нулю.]

Выражения (3.78) можно упростить, если воспользоваться рекуррентным соотношением

$$\left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 1 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle = - \left\langle j_1 \left| \frac{1}{2} \lambda 0 \right| j_2 \frac{1}{2} \right\rangle \frac{(j_1 + 1/2) + (-1)^{j_1 + j_2 - \lambda} (j_2 + 1/2)}{[\lambda (\lambda + 1)]^{1/2}}. \quad (3.79)$$

Коэффициенты векторного сложения $\langle j_2^{1/2} \lambda 0 | j_2^{1/2} \rangle$ можно вычислить с помощью соотношений, приведенных в гл. 7, приложение 1.

В частном случае, когда $j_1 = j_2$, коэффициент (3.79) равен нулю при четных λ . Поэтому диагональные матричные элементы (3.78) равны нулю при $\lambda = \nu$. (При нечетных $\lambda = \nu$ диагональные матричные элементы равны нулю в силу закона сохранения четности.)

Если взять одночастичные волновые функции вида $| (ls)jm \rangle$, то приведенные матричные элементы тензорных операторов (3.73) можно получить из общей формулы (1.163):

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(l_1 \frac{1}{2} \right) j_2 \middle| i^{\lambda} f(Y_{\lambda} s) \lambda \middle| \left(l_1 \frac{1}{2} \right) j_1 \right\rangle = ((2\lambda + 1)(2j_1 + 1)(2j_2 + 1))^{1/2} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} l_1 & 1/2 & j_1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ l_2 & 1/2 & j_2 \end{Bmatrix} \langle j_2 | f | j_1 \rangle \langle l_2 | i^{\lambda} Y_{\lambda} | l_1 \rangle \left\langle \frac{1}{2} \middle| s \middle| \frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где приведенные матричные элементы [см. формулу (1.156)]

$$\begin{aligned} \langle l_2 | i^{\lambda} Y_{\lambda} | l_1 \rangle &= i^{l_1 - l_2 + \lambda} \left(\frac{(2\lambda + 1)(2l_1 + 1)}{4\pi} \right)^{1/2} \langle l_1 0 \otimes 0 | l_2 0 \rangle, \\ \left\langle \frac{1}{2} \middle| s \middle| \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

В эквивалентности выражений (3.78) и (3.80) отражаются особые свойства $9j$ -символов, у которых два параметра равны $\frac{1}{2}$.

Тензорные операторы, зависящие от спина, можно также выразить через оператор $(s \cdot \nabla)$, действующий на функции координат. Их можно записать через тензорные операторы (3.73) и (3.74), пользуясь соотношением

$$\begin{aligned} (s \cdot \nabla) f(r) Y_{\lambda\mu} &= \left(\frac{\lambda}{2\lambda + 1} \right)^{1/2} \left[f'(r) + \frac{\lambda + 1}{r} f(r) \right] (Y_{(\lambda-1, 1)\lambda\mu})_{(\lambda-1, 1)\lambda\mu} - \\ &- \left(\frac{\lambda + 1}{2\lambda + 1} \right)^{1/2} \left[f'(r) - \frac{\lambda}{r} f(r) \right] (Y_{\lambda+1\lambda\mu})_{(\lambda+1, 1)\lambda\mu} = \\ &= \left(\frac{2\lambda + 1}{4\pi} \right)^{1/2} \left\{ f'(r) \mathcal{Z}_{\mu 0}^{\lambda} s_{\eta=0} + \left(\frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{r} f(r) (\mathcal{Z}_{\mu 1}^{\lambda} s_{\eta=1} + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{Z}_{\mu-1}^{\lambda} s_{\eta=-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Операторы, зависящие от орбитальных моментов

Тензорные операторы, зависящие от орбитального углового момента l , можно выразить через полный угловой момент $j = l + s$ и операторы, зависящие от спина, которые мы только что рассматривали. Поэтому мы рассмотрим операторы вида

$$T_{\lambda\mu} \equiv i^{\lambda} f(r) (Y_{\lambda\mu}). \quad (3.83)$$

Приведенные матричные элементы оператора (3.83) можно вычислить путем пересвязывания угловых моментов:

$$\begin{aligned} \langle j_2 | i^{\lambda} f(r) (Y_{\lambda\mu}) | j_1 \rangle &= (2j_2 + 1)^{1/2} \langle j_2 m_2 | i^{\lambda} f(r) Y_{\lambda\mu} | j_1 \rangle_{j_1, (\lambda+1)\lambda; j_2 m_2} = \\ &= (2j_2 + 1)^{1/2} \sum_{j'} \langle (j_1 1) j', \lambda; j_2 | j_1 (\lambda 1) \lambda; j_2 \rangle \langle j_2 m_2 | i^{\lambda} f(r) Y_{\lambda\mu} | j_1 \rangle_{(j_1 1) j'; \lambda; j_2 m_2} = \\ &= (-1)^{j_1 + \lambda + j_2} [(2\lambda + 1)(2j_1 + 1)(j_1 + 1) j_1]^{1/2} \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ j_1 & j_2 & j_1 \end{Bmatrix} \langle j_2 | i^{\lambda} f(r) Y_{\lambda\mu} | j_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Поскольку оператор \hat{j} диагонален по одночастичным квантовым числам nlj , в это выражение вносит вклад только член с $j' = j_1$. Мы воспользовались здесь соотношением (1.112), а также выражением для приведенного матричного элемента (1.156). Приведенный матричный элемент в последней строке формулы (3.84) дается выражением (3.69).

Зависимость тензорных операторов от угловых моментов можно также характеризовать составляющими j_η вектора \hat{j} относительно внутренней координатной системы \mathcal{K}' с ориентацией $\hat{\mathbf{r}}$. Переход от составляющих j_μ в системе \mathcal{K} к составляющим j_η в системе \mathcal{K}' определяется соотношением

$$j_\mu = \sum_\eta \mathcal{D}_{\mu\eta}^1(\hat{\mathbf{r}}) j_\eta. \quad (3.85)$$

Свойства внутренних составляющих j_η рассматривались в гл. 1, приложение 1, п. 6. В частности, при действии оператора j_η на одночастичную волновую функцию имеем [см. формулы (1.184) и (1.187)]

$$j_\eta \mathcal{D}_{mh}^j(\hat{\mathbf{r}}) \chi_\eta = (-1)^\eta [j(j+1)]^{1/2} \langle jh - \eta | jh - \eta \rangle \mathcal{D}_{m, h-\eta}^j(\hat{\mathbf{r}}) \chi_\eta. \quad (3.86)$$

Тензорные операторы, зависящие от углового момента j , можно выразить через составляющие j_η , пользуясь соотношениями, аналогичными соотношениям (3.76). В таком случае матричные элементы выражаются через коэффициенты векторного сложения без привлечения b_j -символов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

2

ЧАСТИЧНО-ДЫРОЧНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

1. Системы фермионов как системы частиц и дырок

Системы тождественных частиц

Рассмотрим систему тождественных фермионов (нейтронов, протонов или электронов), движущихся независимо друг от друга в поле, соответствующем некоторому среднему потенциальному. Форма потенциала может быть любой, но предполагается, что потенциал инвариантен относительно обращения времени.

Тогда, согласно теореме Крамерса, одночастичные состояния дважды вырождены. Обозначим эти вырожденные состояния, переходящие одно в другое при обращении времени, через v и \bar{v} . Но поскольку для одного фермиона $\mathcal{T}^2 = -1$ [см. формулу (1.41)], мы имеем

$$\begin{aligned} |\bar{v}\rangle &= \mathcal{T} |v\rangle, \\ |v\rangle &= -\mathcal{T} |\bar{v}\rangle. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Если рассматриваемая система обладает сферической симметрией, то можно считать, что $v = nljm$.

Одночастичные состояния v нумеруются согласно их энергии ϵ_v , а нумерация вырожденных состояний может быть произвольной. Состояние, которое получается при заполнении первых Ω пар одночастичных состояний (v , \bar{v}), будем называть «основным состоянием», если при данном выборе Ω эта система оказы-

растет невырожденной. В случае сферического ядра это означает, что основное состояние образуется из заполненных оболочек (или подоболочек). В случае же деформированных ядра основное состояние может содержать любое число спаренных частиц. Заселение одночастичных уровней в основном состоянии будем называть нормальным распределением (или распределением Ферми), а последний заполненный уровень назовем уровнем Ферми v_F .

При не очень большой энергии возбуждения основная часть частиц остается в нормальном распределении. В таком случае систему удобно рассматривать, считая, что к основному состоянию добавляется или же из него удаляется несколько частиц («элементарное возбуждение»).

Состояния, которые получаются при добавлении частицы на незаполненный уровень, записываются как

$$|v\rangle = a^\dagger(v) |0\rangle, \quad v > v_F, \quad (3.88)$$

где $a^\dagger(v)$ — оператор рождения частицы, а $|0\rangle$ — основное состояние, которое играет роль обобщенного вакуума. [Кратким обозначением $|v\rangle$ мы пользуемся тогда, когда нет опасности спутать это многочастичное состояние (3.88) с одночастичным состоянием.] Состояния, которые получаются при удалении частицы с заполненного уровня, т. е. в результате действия оператора уничтожения a на основное состояние, называются дырочными состояниями. (Свойства операторов рождения и уничтожения рассмотрены в гл. 2, приложение 1.)

Квантовые числа дырки и удаленной частицы сопряжены друг с другом операцией обращения времени. Действительно, для того чтобы получить дырочное состояние с угловым моментом j и проекцией m (или импульсом p), мы должны удалить частицу с квантовыми числами $j, -m$ (или $-p$). Поэтому основное соотношение между частицами и дырками таково:

$$\begin{aligned} b^\dagger(v) &= a(\bar{v}), \\ b(v) &= a^\dagger(\bar{v}). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Здесь b^\dagger и b (b — оператор, эрмитово-сопряженный оператору b^\dagger) — операторы рождения и уничтожения дырки, т. е.

$$|v^{-1}\rangle = b^\dagger(v) |0\rangle. \quad (3.90)$$

Соотношения, обратные соотношениям (3.89), имеют вид [см. формулу (3.89)]

$$\begin{aligned} a^\dagger(v) &= -b(\bar{v}), \\ a(v) &= -b^\dagger(\bar{v}). \end{aligned} \quad (3.91)$$

В представлении собственных функций углового момента операторы $b^\dagger(jm)$, как и операторы $a^\dagger(jm)$, оказываются составляющими неприводимого тензорного оператора j -го ранга (см. гл. 1, приложение 1, п. 5).

Состояния с двумя или несколькими частицами или дырками получим, действуя на основное состояние произведением операторов a^\dagger и b^\dagger :

$$|v_1^{-1} \dots v_k^{-1} v_{k+1} \dots v_n\rangle = a^\dagger(v_n) \dots a^\dagger(v_{k+1}) b^\dagger(v_k) \dots b^\dagger(v_1) |0\rangle. \quad (3.92)$$

(Когда состояния рассматриваются как состояния частиц и дырок, все состояния антисимметризованы, и поэтому индекс антисимметризации a обычно опускают.)

Преобразование, при котором заселение одночастичных уровней с $v \leq v_F$ описывается не операторами (a^\dagger, a) , а операторами (b^\dagger, b) , оказывается каноническим, ибо коммутационные соотношения для операторов (b^\dagger, b) такие же,

как и для операторов (a^\dagger, a) . Поэтому такое преобразование можно связать с унитарным оператором частично-дырочного сопряжения \mathcal{U}_h , который обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{U}_h a^\dagger(v) \mathcal{U}_h^{-1} = \begin{cases} b^\dagger(v) = a(\bar{v}) & \text{при } v \leq v_F, \\ a^\dagger(v) & \text{при } v > v_F. \end{cases} \quad (3.93)$$

Вакуум, для которого $a(v)|0\rangle=0$ при всех v , преобразуется в основное состояние, для которого $b(v)|\hat{0}\rangle=0$ при всех $v \leq v_F$. Фаза оператора \mathcal{U}_h выбрана

$$\mathcal{U}_h|0\rangle=|\hat{0}\rangle. \quad (3.94)$$

Из данного соотношения и формул (3.92) и (3.93) следует, что

$$\begin{aligned} |v_1^{-1} \dots v_k^{-1} v_{k+1} \dots v_n\rangle &= a^\dagger(v_n) \dots a^\dagger(v_{k+1}) b^\dagger(v_k) \dots b^\dagger(v_1) |\hat{0}\rangle = \\ &= \mathcal{U}_h a^\dagger(v_n) \dots a^\dagger(v_{k+1}) a^\dagger(v_k) \dots a^\dagger(v_1) |0\rangle = \mathcal{U}_h |v_1 \dots v_n\rangle_a. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Здесь последнее состояние представляет собой антисимметричное n -частичное состояние. При двукратном действии оператора \mathcal{U}_h получаем, что

$$\mathcal{U}_h^2 = (-1)^{\Omega-k}, \quad (3.96)$$

где k — число дырок, а Ω — число спаренных одночастичных уровней в основном состоянии.

Поскольку при частично-дырочном сопряжении конфигурация, содержащая $2\Omega - k$ частиц, преобразуется в конфигурацию, содержащую k частиц, оператор \mathcal{U}_h коммутирует с оператором числа частиц только в случае систем с $k = \Omega$. В частном случае конфигурации, соответствующей наполовину заполненному уровню j , оператор \mathcal{U}_h может коммутировать с гамильтонианом, и тогда стационарным состояниям можно присвоить дополнительное квантовое число, характеризующее симметрию состояния при частично-дырочном сопряжении [30].

Сопряжение частица — античастица (зарядовое сопряжение), играющее важнейшую роль в релятивистской квантовой механике, — это преобразование частичного состояния v с положительной энергией в дырочное состояние, которое получается при удалении частицы v с отрицательной энергией из дираковского фона. Такая операция основывается на эквивалентности состояний частиц, лежащих выше и ниже поверхности Ферми, эквивалентности, которой нет в случае ядерных систем. Такая симметрия позволяет ввести оператор частично-дырочного преобразования, который в противоположность оператору \mathcal{U}_h , определенному формулой (3.93), не меняет основного состояния и является интегралом движения (см. работы, цитируемые по поводу \mathcal{C} -, \mathcal{PC} - и \mathcal{PCT} -симметрии в гл. 1).

Даже если уровни нуклонов $v_>$ и $v_<$, лежащие выше и ниже поверхности Ферми, различаются квантовыми числами (такими, как nlj), такие общие свойства одночастичного спектра, как плотность уровней, в некоторых случаях могут быть приблизительно одинаковыми для $v_>$ и $v_<$. Тогда ядерные возбуждения могут обладать свойствами симметрии, лежащими в основе зарядового сопряжения. Комбинируя частично-дырочное сопряжение с преобразованием $v_< \rightleftarrows v_>$ между приближенно эквивалентными состояниями $[a^\dagger(v_>) \rightleftharpoons b^\dagger(v_<)]$, можно получить операцию, соответствующую зарядовому сопряжению. (Примеры такой симметрии рассматриваются в гл. 8 и 9.)

Системы нейтронов и протонов, изоспин дырочных состояний

Для системы нейтронов и протонов можно определить дырочные состояния в помощь коэффициентам (3.89) отдельно для нейтронов и протонов. Для нейтронных дырочных состояний мы введем обозначения

$$\begin{aligned} |\bar{v}_n^{-1}\rangle &= b^\dagger(v_n) |\hat{0}\rangle, \\ b^\dagger(v_n) &= a(\bar{v}_n), \end{aligned} \quad (3.97)$$

а для протонных дырочных состояний — соответствующие обозначения с заменой $v_n \rightarrow v_p$.

Проекция изоспина дырки противоположна проекции изоспина удаленной частицы ($m_t = -1/2$ для n^{-1} и т. д.), но операторы рождения b^\dagger , определенные в соответствии с формулами (3.97), не преобразуются как составляющие изоспина (тензор ранга $1/2$ в изопространстве). Действительно, при эрмитовом сопряжении m_t -я составляющая тензора t преобразуется в $-m_t$ -ю составляющую того же тензора с фазовым множителем, который меняет знак при увеличении или уменьшении m_t на единицу [см. формулу (1.170)].

Дырочные состояния и дырочные операторы, обладающие свойствами изоспиноров, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} |\bar{v}^{-1}, m_t\rangle &= b^\dagger(v, m_t) |\hat{0}\rangle, \\ b^\dagger(v, m_t) &= (-1)^{1/2+m_t} a(\bar{v}, -m_t). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Две совокупности дырочных операторов связаны равенствами

$$\begin{aligned} b^\dagger\left(v, m_t = \frac{1}{2}\right) &= -b^\dagger(v_p) = -a(\bar{v}_p) = -a\left(\bar{v}, m_t = -\frac{1}{2}\right), \\ b^\dagger\left(v, m_t = -\frac{1}{2}\right) &= b^\dagger(v_n) = a(\bar{v}_n) = a\left(\bar{v}, m_t = \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.99)$$

Частично-дырочное преобразование (3.98) можно представить в виде оператора

$$\mathcal{F} = \exp(i\pi T_y) \mathcal{T} = \mathcal{H}_T^{-1} \mathcal{T}, \quad (3.100)$$

равного произведению операторов обращения времени и вращения на угол — π вокруг оси y в изопространстве [операция, обратная операции зарядовой симметрии \mathcal{H}_T , см. формулу (1.59)]. Если состояние, подвергнутое преобразованию \mathcal{F} , отметить тильдой, то можно будет написать

$$\begin{aligned} |\tilde{v}, m_t\rangle &\equiv \mathcal{F} |v, m_t\rangle = (-1)^{1/2+m_t} |\bar{v}, -m_t\rangle, \\ b^\dagger(v, m_t) &= a(\tilde{v}, m_t). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Оператор \mathcal{F} , как и \mathcal{T} , — антиунитарный оператор, но для системы нуклонов подчиняется соотношению

$$\mathcal{F}^2 = +1. \quad (3.102)$$

Поэтому преобразование, обратное преобразованию (3.101), имеет вид

$$a^\dagger(v, m_t) = b(\tilde{v}, m_t). \quad (3.103)$$

Частично-дырочное сопряжение \mathcal{U}'_h , которое порождает преобразование $a^\dagger(v, m_t) \rightarrow b^\dagger(v, m_t)$, обладает свойствами, аналогичными свойствам сопряжения \mathcal{U}_h . Но соотношение (3.102) означает, что $(\mathcal{U}')^2 = 1$.

Если в основном состоянии нейтронов больше, чем протонов $[(v_F)_n > (v_F)_p]$, то полный изоспин системы получается путем сложения изоспинов внешних частиц и дырок с изоспином основного состояния [см., например, формулу (3.19)].

2. Матричные элементы одночастичных операторов

v-Представление

Одночастичный оператор F можно записать через операторы (a^\dagger, a) и одночастичные матричные элементы $\langle v_2 | F | v_1 \rangle$ [см. формулу (2.254)]. Для состояний, лежащих ниже уровня Ферми, мы, пользуясь преобразованием (3.89), перейдем к дырочным операторам (заменив суммирование по переменной v суммированием по переменной \bar{v}). Таким образом, получаем три разных члена, соответствующих матричным элементам, вычисленным для состояний, которые либо не содержат дырок, либо содержат одну или две дырки с $v \leq v_F$, т. е.

$$\begin{aligned} F = & F_0 + F_1 + F_2, \\ F_0 = & \sum_{\substack{v_1 > v_F \\ v_2 > v_F}} \langle v_2 | F | v_1 \rangle a^\dagger(v_2) a(v_1) && \text{(рассеяние частицы),} \\ F_1 = & \sum_{\substack{v_1 \leq v_F \\ v_2 > v_F}} \{ \langle v_2 | F | \bar{v}_1 \rangle a^\dagger(v_2) b^\dagger(v_1) + && \text{(рождение пары частица—дырка)} \\ & + \langle \bar{v}_1 | F | v_2 \rangle b(v_1) a(v_2) \} && \text{(уничтожение пары частица—дырка),} \\ F_2 = & - \sum_{\substack{v_1 \leq v_F \\ v_2 \leq v_F}} \langle \bar{v}_1 | F | \bar{v}_2 \rangle b^\dagger(v_2) b(v_1) + && \text{(рассеяние дырки)} \\ & + \sum_{v \leq v_F} \langle v | F | v \rangle && \text{«средневакуумное».} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Последнее слагаемое в выражении для F_2 представляет собой среднее значение оператора F в основном состоянии. Этот член возникает из-за коммутации операторов $b(v_1)$ и $b^\dagger(v_2)$, когда выражение для F приводится к нормальному виду, при котором операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения.

Различные матричные элементы оператора F представлены на фиг. 3.7 диаграммами. Соотношение между матричными элементами для разных процессов можно выразить следующим простым правилом («кроссинг-соотношением»): дырку v^{-1} в начальном (или конечном) состоянии можно заменить частицей \bar{v} в конечном (или начальном) состоянии. Чтобы получить правильный знак, оператор рассматриваемого состояния необходимо перенести в крайнее правое (левое) положение, учитывая, что каждая операция коммутации дает множитель, равный -1 . Например,

$$\langle v_2^{-1} | F | v_1^{-1} \rangle = \langle \hat{0} | F | \bar{v}_2 \bar{v}_1^{-1} \rangle = -\langle \hat{0} | F | v_1^{-1} \bar{v}_2 \rangle = -\langle \bar{v}_1 | F | \bar{v}_2 \rangle. \quad (3.105)$$

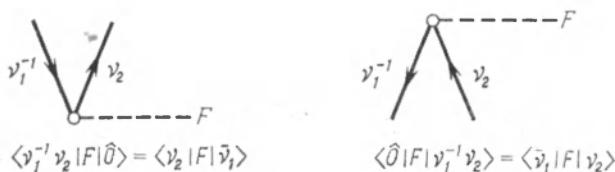
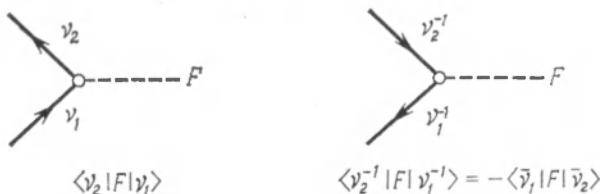
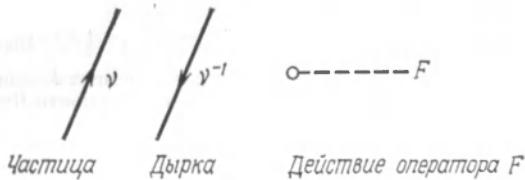
Кроссинг-соотношение не учитывает постоянного члена, т. е. средневакуумного значения оператора F [см. формулу (3.104)].

Матричные элементы между дырочными состояниями можно выразить через сопряженный оператор F_c , который обладает тем свойством, что

$$\langle \bar{v}_2 | F_c | v_1 \rangle_{\text{одн}} = \langle v_2^{-1} | F | v_1^{-1} \rangle - \langle \bar{0} | F | \bar{0} \rangle \delta(v_1, v_2) = -\langle \bar{v}_1 | F | \bar{v}_2 \rangle_{\text{одн}}, \quad (3.106)$$

$$F_c = -(\mathcal{T} F \mathcal{T}^{-1})^\dagger.$$

Здесь мы воспользовались соотношением (1.34) для матричных элементов, вычисленных между состояниями с обращенным временем. Индекс «одн» указы-



Фиг. 3.7. Диаграммы, которые можно рассматривать как графические символы матричных элементов.
Диаграммы читаются снизу (начальное состояние) вверх (конечное состояние).

вает, что рассматриваемые матричные элементы относятся к одиночастичным состояниям (а не к конфигурациям, в которых к основному состоянию добавлена одна частица).

В случае самосопряженных операторов имеем

$$F_c = -(\mathcal{T} F \mathcal{T}^{-1})^\dagger = cF,$$

$$c = -c_{\mathcal{T}^c H} = \pm 1, \quad (3.107)$$

где фазовые множители $c_{\mathcal{T}}$ и c_H характеризуют преобразование операторов при обращении времени и эрмитовом сопряжении (см. гл. 1, приложение 1, п. 5). Квантовое число s — это внутренняя характеристика оператора F , которой определяется соотношение между матричными элементами оператора F для частичных и дырочных состояний. [Значения фазового множителя c даны в формуле (3.14).]

Матричные элементы для дырочных состояний можно также выразить через преобразованный оператор $\mathcal{U}_h^{-1} F \mathcal{U}_h$, который получается из выражений (3.104) при замене операторов b^\dagger и b операторами a^\dagger и a . Например [см. формулу (3.95)],

$$\langle \hat{0} | F | v_1^{-1} v_2 \rangle = \langle 0 | \mathcal{U}_h^{-1} F \mathcal{U}_h | v_1 v_2 \rangle_a = \langle \tilde{v}_1 | F | v_2 \rangle_{\text{одн.}} \quad (3.108)$$

(Сопряженный оператор F_c дает матричные элементы оператора $\mathcal{U}_h^{-1} F \mathcal{U}_h$, связывающего состояния, которые лежат ниже поверхности Ферми, с точностью до постоянного «средневакуумного» члена.)

Оператор обращения времени действует на изоспиновые составляющие несимметричным образом ($t_x \rightarrow t_x$, $t_y \rightarrow -t_y$, $t_z \rightarrow t_z$, так как t_x и t_z — вещественные матрицы, а t_y — матрица с мнимыми элементами). В случае операторов, не зависящих от изоспина, вместо этого можно взять операцию частично-дырочного сопряжения, основанного на \mathcal{F} -преобразовании (3.101), которая переворачивает все три составляющие изоспина. Сопряжение типа \mathcal{F} для одночастичного оператора F обозначается через $F_{c'}$ и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \langle v_2 m_t (2) | F_{c'} | v_1 m_t (1) \rangle_{\text{одн.}} &= \langle v_2^{-1} m_t (2) | F | v_1^{-1} m_t (1) \rangle - \langle \hat{0} | F | \hat{0} \rangle \delta ((v m_t)_1, (v m_t)_2) = \\ &= -\langle \tilde{v}_1 m_t (1) | F | \tilde{v}_2 m_t (2) \rangle_{\text{одн.}}, \\ F_{c'} &= -(\mathcal{F} F \mathcal{F}^{-1})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

В случае самосопряженных операторов мы имеем

$$F_{c'} = c' F, \quad c' = (-1)^{\tau} c, \quad (3.110)$$

где τ — ранг тензорного оператора F относительно изопространства. Так, например, если F — изоскаляр (не зависит от изоспинов, $\tau = 0$), то $c' = c$, а если это изовекторный оператор ($\tau = 1$) вида $F = tG$, то мы имеем $c' (F) = -c (G)$.

Приведенные матричные элементы

В представлении собственных функций углового момента $|v\rangle = |(nl)jm\rangle$ неприводимый тензорный оператор T_λ можно записать в форме (1.180). Преобразуя члены так же, как в выражениях (3.104), и учитывая соотношения (4.102) и (4.174), получаем, что

$$\begin{aligned} \langle j_2^{-1} \| T_\lambda \| j_1^{-1} \rangle &= (-1)^{j_1 + j_2 - \lambda} \langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle = c \langle j_2 \| T_\lambda \| j_1 \rangle, \\ \langle (j_1^{-1} j_2) J \| T_\lambda \| \hat{0} \rangle &= (-1)^{j_1 + j_2 - \lambda} \langle j_2 \| T_\lambda \| j_1 \rangle \delta (J, \lambda), \\ \langle \hat{0} \| T_\lambda \| (j_1^{-1} j_2) J \rangle &= -\langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle \delta (J, \lambda). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Дырочные состояния в (3.111) определяются посредством \mathcal{T} -преобразования, а фазы частичных и дырочных состояний выбраны согласно определению

$$| (j_1^{-1} j_2) JM \rangle \equiv a^\dagger (j_2) b^\dagger (j_1) | \hat{0} \rangle_{(j_1 j_2) JM}. \quad (3.112)$$

Первое из соотношений (3.111) можно получить также непосредственно из соотношений (3.106). Монопольные операторы ($\lambda = 0$) положительной чет-

ности могут содержать постоянный член (среднее значение для заполненных оболочек), которого нет в выражениях (3.111).

В случае операторов, зависящих от изосинов, приведенные матричные элементы в взаимодействии (см. гл. 1, приложение 1, п. 9) можно получить на соотношений, содержащих частично-дырочное сопряжение типа \mathcal{F} .

3. Матричные элементы двухчастичных операторов

Двухчастичный оператор выражается через операторы рождения и уничтожения формулой (2.258). В основном мы будем рассматривать нуклонное взаимодействие V , хотя все соотношения первой части настоящего раздела применимы к любым двухчастичным операторам. В последующих частях данного раздела используется скалярный характер оператора взаимодействия.

Если двухчастичный оператор выразить через операторы частиц и дырок, то появятся члены, обладающие структурой одночастичного оператора. Анализируя эти члены в случае двухчастичного взаимодействия, мы приходим к потенциальному Хартри — Фока.

v -Представление

Чтобы выразить двухчастичный оператор V через операторы рождения и уничтожения частиц и дырок, мы, как и в случае одночастичных операторов, пользуясь соотношениями (3.91), заменим операторы a^\dagger и a для заполненных уровней операторами b и b^\dagger . Переставляя операторы так, чтобы операторы рождения оказались левее операторов уничтожения, и вводя упрощенные обозначения 1, 2, ... для состояний v_1, v_2, \dots , получаем

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4,$$

$$V_0 = \frac{1}{4} \sum \langle 34 | V | 12 \rangle_a a^\dagger(4) a^\dagger(3) a(4) a(2) \quad (\text{рассеяние частицы на частице}), \quad (3.113a)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4} \sum \langle 34 | V | 1\bar{2} \rangle_a a^\dagger(4) a^\dagger(3) b^\dagger(1) b^\dagger(2) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum \langle 34 | V | \bar{1}2 \rangle_a a^\dagger(4) a^\dagger(3) b^\dagger(1) a(2) + \text{эрмит. сопр.} = \\ &= \frac{1}{2} \sum \langle 34 | V | \bar{1}2 \rangle_a a^\dagger(4) a^\dagger(3) b^\dagger(1) a(2) + \\ &+ \text{эрмит. сопр.} \quad (\text{рождение или уничтожение пары,} \\ &\quad \text{связанное с рассеянием частицы}), \end{aligned} \quad (3.113b)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= -\frac{1}{4} \sum \langle 34 | V | \bar{1}\bar{2} \rangle_a a^\dagger(4) a^\dagger(3) b^\dagger(2) b^\dagger(1) + \\ &+ \text{эрмит. сопр.} \quad (\text{рождение или уничтожение двух пар}) \end{aligned} \quad (3.113b)$$

$$\begin{aligned} &- \sum \langle \bar{1}\bar{4} | V | \bar{3}\bar{2} \rangle_a a^\dagger(4) b^\dagger(3) b(1) a(2) \\ &\quad (\text{рассеяние типа частица-дырка}) \end{aligned} \quad (3.113c)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum \langle 2\bar{1} | V | \bar{1}\bar{4} \rangle_a a^\dagger(2) a(1) \quad (\text{одночастичная потенциальная энергия}), \\ &\quad (3.113d) \end{aligned}$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \sum \langle \bar{3}\bar{2} | V | \bar{1}\bar{4} \rangle_{ab} b^\dagger(4) b(3) b(2) a(1) + \\ + \text{эрмит. сопр.}, \quad (\text{уничтожение или рождение пары, связанный с рассеянием дырки}) \quad (3.113e)$$

$$+ \sum \langle \bar{2}\bar{i} | V | \bar{1}\bar{i} \rangle_{ab} (2) a(1) + \\ + \text{эрмит. сопр.}, \quad (\text{уничтожение или рождение пары}), \quad (3.113\text{ж})$$

$$V_4 = \frac{1}{4} \sum \langle \bar{1}\bar{2} | V | \bar{3}\bar{4} \rangle_{ab} b^\dagger(4) b^\dagger(3) b(1) b(2) \\ (\text{рассеяние дырки на дырке}) \quad (3.113\text{з})$$

$$- \sum \langle \bar{1}\bar{i} | V | \bar{i}\bar{2} \rangle_{ab} (2) b(1) \quad (\text{потенциальная энергия дырки}) \quad (3.113\text{и})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \langle \bar{i}\bar{k} | V | \bar{i}\bar{k} \rangle_a \quad (\text{энергия взаимодействия основного состояния}). \quad (3.113\text{к})$$

В этих формулах для состояний, отмеченных чертой, суммирование проводится по всем заполненным уровням ($v \leq v_F$), а для других состояний — по свободным уровням ($v > v_F$). Множители $1/2$ и $1/4$ в формулах (3.113) исчезнут, если вместо независимого суммирования по всем состояниям проводить суммирование в определенном порядке: например, в формуле (3.113а) можно принять, что $v_1 < v_2 < v_3 < v_4$.

Если двухчастичное взаимодействие V эрмитово и инвариантно относительно обращения времени \mathcal{T} , то

$$\langle \bar{1}\bar{2} | V | \bar{3}\bar{4} \rangle = \langle 34 | V | 12 \rangle. \quad (3.114)$$

Тогда из формул (3.113а) и (3.113з) следует, что матричный элемент, характеризующий рассеяние двух дырок, равен матричному элементу, характеризующему рассеяние двух частиц (инвариантность взаимодействия относительно частично-дырочного сопряжения). Кроме того, при стандартном выборе фаз состояний [см. формулу (1.40)] матричные элементы взаимодействия вещественны при условии, что V инвариантно относительно операции $\mathcal{H}_y(\pi) \mathcal{T}$ [см. формулу (1.42)]. Следовательно, матричные элементы эрмитового взаимодействия V также симметричны:

$$\langle 34 | V | 12 \rangle = \langle 12 | V | 34 \rangle. \quad (3.115)$$

Члены формул (3.113), содержащие по четыре оператора, можно расположить согласно числу операторов рождения и уничтожения. Так, например, V_{22} соответствует процессу рассеяния, тогда как V_{13} и V_{31} соответствуют процессу рождения и уничтожения пары частица — дырка, а V_{04} и V_{40} — процессу рождения и уничтожения двух пар частица — дырка. Примеры таких членов приведены в виде диаграмм на фиг. 3.8.

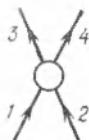
Разложения (3.113) применимы в случае частично-дырочного сопряжения, связанного с обращением времени [$b^\dagger(v) = a(\bar{v})$]. Если взять \mathcal{T} -преобразование [$b^\dagger(v) = a(\bar{v})$], то в формуле (3.113) состояния v следует заменить состояниями \bar{v} .

Одночастичные члены, потенциал Хартри — Фока

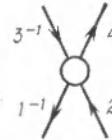
Члены преобразованного оператора (3.113д), (3.113ж) и (3.113и), получающиеся при коммутации операторов b и b^\dagger , представляют собой эффективный одночастичный потенциал U с матричными элементами

$$\langle v_2 | U | v_1 \rangle = \sum_{v_i \leq v_F} \langle v_i v_2 | V | v_i v_1 \rangle_a. \quad (3.116)$$

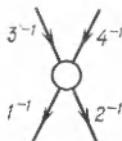
[В формуле (3.113) суммирование по \bar{i} эквивалентно суммированию по i .] Мы видим, что оператор U должен обладать частично-дырочной симметрией $c = -1$, если оператор V эрмитов и инвариантен относительно \mathcal{T} -преобразования. Если занятые состояния образуют заполненные оболочки, то потенциал U сферически симметричен при условии, что V — скаляр.



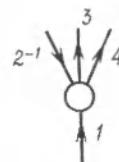
$\langle 34 | V | 12 \rangle_a$
Рассеяние типа
частица-частица



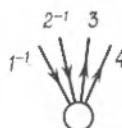
$\langle 3^{-1} 4 | V | 1^{-1} 2 \rangle_a = \langle 4 | V | \bar{3} 1^{-1} 2 \rangle_a =$
 $= -\langle 4 | V | 1^{-1} \bar{3} 2 \rangle_a = -\langle \bar{1} 4 | V | \bar{3} 2 \rangle_a$
Рассеяние типа
частица-дырка



$\langle 3^{-1} 4^{-1} | V | 1^{-1} 2^{-1} \rangle_a = \langle \bar{1} \bar{2} | V | \bar{3} \bar{4} \rangle_a$
 $= \langle 34 | V | 12 \rangle_a$
Рассеяние типа
дырка-дырка



$\langle 2^{-1} 34 | V | 1 \rangle_a = \langle 34 | V | \bar{2} \bar{1} \rangle_a$
Рождение пары



$\langle 1^{-1} 2^{-1} 34 | V | \hat{0} \rangle_a = -\langle 34 | V | \bar{1} \bar{2} \rangle_a$
Рождение двух пар

Фиг. 3.8. Диаграммы, соответствующие различным матричным элементам двухчастичного оператора для системы фермионов.

Обозначения такие же, как и на фиг. 3.7. Матричные элементы, содержащие дырочные состояния, можно получить на основе кроссинг-соотношения из двухчастичных матричных элементов.

Потенциал U соответствует среднему полю, создаваемому всеми частицами на занятых орбитах. Если взаимодействие рассматривается как самосогласованное (приближение Хартри — Фока), то эффективный одночастичный гамильтониан имеет вид

$$H_{\text{одн}} = T + U, \quad (3.117)$$

где T — кинетическая энергия. Одиночественные состояния $|v\rangle$ и энергии $e(v)$ определяются соотношением

$$\langle v_2 | T | v_1 \rangle + \langle v_2 | U | v_1 \rangle = \langle v_2 | T | v_1 \rangle + \sum_{v_i \leq v_F} \langle v_i v_2 | V | v_i v_1 \rangle_a = e(v_1) \delta(v_1 v_2). \quad (3.118)$$

Если одночастичные состояния удовлетворяют условию самосогласованности (3.118), то из формул (3.113) следует, что полный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H = & \sum_{v_k > v_F} \epsilon(v_k) a^\dagger(v_k) a(v_k) - \\ & - \sum_{v_i \leq v_F} \epsilon(v_i) b^\dagger(v_i) b(v_i) + V' + \langle \hat{0} | H | \hat{0} \rangle, \end{aligned} \quad (3.119)$$

где V' — часть взаимодействия (3.113), содержащая четыре фермионных оператора, а $\langle \hat{0} | H | \hat{0} \rangle$ — постоянный член, равный среднему значению гамильтониана H в основном состоянии $|\hat{0}\rangle$, в котором частицы занимают состояния $v_i \leq v_F$, т. е.

$$\begin{aligned} \langle \hat{0} | H | \hat{0} \rangle = & \sum_{v_i \leq v_F} \langle v_i | T | v_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\substack{v_i \leq v_F \\ v_h \leq v_F}} \langle v_i v_h | V | v_i v_h \rangle_a = \\ = & \sum_{v_i \leq v_F} \left\langle v_i | T + \frac{1}{2} U | v_i \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Множитель $1/2$ в последнем члене формулы (3.120) учитывает то обстоятельство, что в средний потенциал вносит вклад двухчастичное взаимодействие обеих взаимодействующих частиц, которое поэтому считается дважды, если мы суммируем одночастичные энергии заполненных орбит.

Условие самосогласованности (3.118) для одночастичных состояний означает, что гамильтониан, записанный через частичные и дырочные переменные, не содержит членов, которые связывали бы основное состояние $|\hat{0}\rangle$ с состояниями, содержащими одну частицу и одну дырку, т. е.

$$\langle v_i^{-1} v_h | H | \hat{0} \rangle = 0 \text{ при } v_i \leq v_F, \quad v_h > v_F. \quad (3.121)$$

Этот критерий эквивалентен вариационному принципу, который требует стационарности среднего значения H в основном состоянии относительно вариаций одночастичных состояний. Действительно, если варьировать занятое состояние v_i путем примешивания составляющей, пропорциональной незанятому состоянию v_h , то к основному состоянию $|\hat{0}\rangle$ примешивается составляющая, пропорциональная $|v_i^{-1} v_h\rangle$. Вследствие условия (3.121) такая вариация основного состояния $|\hat{0}\rangle$ не изменяет в первом порядке среднего значения гамильтониана H . Вариации, содержащие только линейные преобразования занятых одночастичных состояний, не влияют на многочастичные волновые функции основного состояния.

Двухчастичные матричные элементы для состояний с определенным угловым моментом

В случае состояний с определенным угловым моментом соотношения между матричными элементами, содержащими частичные и дырочные состояния («кросинг-соотношение»), включают в себя пересвязку угловых моментов четырех частиц. Подобную пересвязку легко выполнить, если приведенный двухчастичный матричный элемент записать в такой форме, чтобы все четыре угловых момента были связаны в полный угловой момент, равный нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \langle (j_3 j_4) J | V | (j_1 j_2) J \rangle = & (2J+1)^{1/2} \langle (j_3 j_4) JM | V | (j_1 j_2) JM \rangle = \\ = & \langle \tilde{j}_3 \tilde{j}_4 | V | j_1 j_2 \rangle_{(j_1 j_2) J, (j_3 j_4) J, 0} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Мы используем обозначения [ср. с формулой (4.158)]

$$\begin{aligned} \langle \tilde{j}_3 \tilde{j}_4 |_{JM} &= \sum_{m_3 m_4} \langle j_3 m_3 j_4 m_4 | JM \rangle (-1)^{j_3 + m_3 + j_4 + m_4} \langle j_3 - m_3 j_4 - m_4 | = \\ &= (-1)^{J+M} \langle j_3 j_4 |_{(j_3 j_4) J-M} \equiv \langle j_3 j_4 |. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Например, частично-дырочный матричный элемент [в силу формулы (3.113г) и равенства $|\bar{\bar}{v}\rangle = -|v\rangle$] оказывается равным

$$\begin{aligned} \langle (j_3^{-1} j_4) J \| V \| (j_1^{-1} j_2) J \rangle &= \langle \tilde{j}_3^{-1} \tilde{j}_4 | V | \tilde{j}_1^{-1} \tilde{j}_2 \rangle_{(j_1 j_2) J, (j_3 j_4) J; 0} = \\ &= \langle \tilde{j}_1 \tilde{j}_4 | V | j_3 j_2 \rangle_a_{(j_1 j_2) J, (j_3 j_4) J; 0} = \\ &= \sum_{J'} \langle (j_1 j_2) J, (j_3 j_4) J; 0 | (j_3 j_2) J', (j_1 j_4) J'; 0 \rangle \langle (j_1 j_4) J' \| V \| (j_3 j_2) J' \rangle_a. \end{aligned} \quad (3.124)$$

В случае состояний с определенным значением изоспина T можно действовать аналогичным образом, пользуясь оператором частично-дырочного сопряжения типа \mathcal{F} . Тогда для частично-дырочного матричного элемента с учетом соотношения $|\bar{\bar}{v}\rangle = |v\rangle$ получаем

$$\begin{aligned} \langle (j_3^{-1} j_4) JT \| | V \| | (j_1^{-1} j_2) JT \rangle &= \\ &= - \sum_{J' T'} \langle (j_1 j_2) J, (j_3 j_4) J; 0 | j_3 j_2 \rangle_{J', (j_1 j_4) J'; 0} \times \\ &\times \langle (t_1 t_2) T, (t_3 t_4) T; 0 | (t_3 t_2) T', (t_1 t_4) T'; 0 \rangle \langle (j_1 j_4) JT' \| | V \| | (j_3 j_2) JT' \rangle_a. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Матричные элементы с тройными вертикальными черточками — приведенные как в изопространстве, так и в спин-орбитальном пространстве (см. гл. 4, приложение 1, п. 9).

Матричные элементы взаимодействия для двухчастичных состояний и для состояний частица — дырка, даваемые формулами (3.122) и (3.124), соответствуют двум различным способам связывания четырех угловых моментов одночастичных состояний в состояние с полным нулевым угловым моментом. Третья схема связи соответствует матричному элементу $V_\lambda(j_1 j_2, j_3 j_4)$, который определяется как

$$(2\lambda + 1)^{1/2} V_\lambda(j_1 j_2, j_3 j_4) \equiv \langle \tilde{j}_3 \tilde{j}_4 | V | j_1 j_2 \rangle_a_{(j_1 j_3) \lambda, (j_2 j_4) \lambda; 0} \quad (3.126)$$

Матричные элементы V_λ можно рассматривать как коэффициенты разложения антисимметризованных матричных элементов взаимодействия:

$$\begin{aligned} (2J + 1)^{1/2} \langle (j_3 j_4) JM | V | (j_1 j_2) JM \rangle_a &= \\ &= \sum_\lambda (2\lambda + 1)^{1/2} V_\lambda(j_1 j_2, j_3 j_4) \langle (j_1 j_3) \lambda, (j_2 j_4) \lambda; 0 | (j_1 j_2) J, (j_3 j_4) J; 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.127)$$

или в обратном разложении

$$\begin{aligned} (2\lambda + 1)^{1/2} V_\lambda(j_1 j_2, j_3 j_4) &= \sum_J (2J + 1)^{1/2} \langle (j_3 j_4) JM | V | \times \\ &\times \langle j_1 j_2) JM \rangle_a \langle (j_1 j_2) J, (j_3 j_4) J; 0 | (j_1 j_3) \lambda, (j_2 j_4) \lambda; 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Аналогичное разложение для частично-дырочного взаимодействия содержит коэффициенты

$$\begin{aligned} (2\lambda + 1)^{1/2} V_\lambda (j_1^{-1} j_2, j_3^{-1} j_4) &= \overline{\langle j_3^{-1} j_4 | V | j_1^{-1} j_2 \rangle}_{(j_1 j_3) \lambda, (j_2 j_4) \lambda; 0} = \langle \bar{j}_1 \bar{j}_4 | V | j_3 j_2 \rangle_{(j_1 j_3) \lambda, (j_2 j_4) \lambda; 0} = \\ &= (-1)^{j_1 + j_3 - \lambda} (2\lambda + 1)^{1/2} V_\lambda (j_3 j_2, j_4 j_1). \end{aligned} \quad (3.129)$$

Фазовый множитель возникает из-за перехода от схемы связи $(j_1 j_3) \lambda$ к схеме связи $(j_3 j_1) \lambda$. Нетрудно видеть, что соотношение между взаимодействиями типа частица — частица и частица — дырка принимает особенно простой вид, если это соотношение записано через коэффициенты разложения V_λ .

Матричные элементы V_λ имеют простой физический смысл, когда обменный член равен нулю (или же пропорционален прямому члену, как в случае $j_1 = j_2$ или $j_3 = j_4$). Тогда V_λ представляет собой мультипольную составляющую взаимодействия, т. е. часть взаимодействия $V(x_1, x_2)$, которая является неприводимым тензором ранга λ относительно переменных 1 и 2 отдельно. Вопрос о разложении взаимодействия по мультипольным составляющим и о вычислении матричных элементов на этой основе рассматривается в гл. 7.

ПРИЛОЖЕНИЕ

3

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1. Связь поля с током

Квантовая теория электромагнитных процессов основывается на уравнениях Максвелла, описывающих распространение электромагнитного поля и его связь с плотностями заряда и тока. Для электромагнитного взаимодействия можно написать соотношение

$$\begin{aligned} H' &= - \int j_\mu (\mathbf{r}, t) A_\mu (\mathbf{r}, t) d^3 r \equiv \\ &\equiv \int \varphi (\mathbf{r}, t) \rho (\mathbf{r}, t) d^3 r - \frac{1}{c} \int \mathbf{j} (\mathbf{r}, t) \mathbf{A} (\mathbf{r}, t) d^3 r, \end{aligned} \quad (3.130)$$

которым выражается локальная связь между четырехмерным векторным потенциалом

$$A_\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (3.131)$$

и четырехмерной плотностью тока

$$j_\mu = \left(\rho, \frac{1}{c} \mathbf{j} \right), \quad (3.132)$$

где φ и ρ — вещественные части временно-подобных составляющих соответствующих 4-векторов.

Лавон сохранения электрического заряда выражается уравнением непрерывности

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.133)$$

Взаимодействие (3.130) инвариантно относительно непрерывных преобразований Лоренца, и, кроме того, как и в классической теории, предполагается, что оно инвариантно также относительно пространственного отражения и обращения времени. Симметрия относительно пространственного отражения и обращения времени 4-вектора плотности тока характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)) \mathcal{F}^{-1} &= (\rho(-\mathbf{r}, t), -\mathbf{j}(-\mathbf{r}, t)), \\ \mathcal{T}(\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)) \mathcal{T}^{-1} &= (\rho(\mathbf{r}, -t), -\mathbf{j}(\mathbf{r}, -t)). \end{aligned} \quad (3.134)$$

Аналогичные соотношения справедливы и для 4-вектора потенциала.

Установлено, что выражение (3.130) для электромагнитного взаимодействия, где 4-вектор тока удовлетворяет соотношениям (3.133) и (3.134), применимо для всех изученных к настоящему моменту атомных и ядерных систем (см., например, обзор [185], где рассматривается вопрос о наличии в выражении для электромагнитного тока сильно взаимодействующих частиц члена, нарушающего инвариантность электромагнитного взаимодействия относительно обращения времени; см. также замечание к п. 6).

В данном приложении мы рассмотрим вопрос о структуре 4-вектора плотности тока (3.132) для ядерных систем, а также общий вид ядерных матричных элементов, которые можно определить по амплитудам переходов и сечениям радиационных процессов и реакций, протекающих с участием заряженных частиц.

2. Радиационные процессы

Фотон — это частица с нулевой массой и спином, равным единице. Спин фотона ориентирован либо параллельно, либо антипараллельно импульсу (спиральность фотона $\hbar = \pm 1$), и, следовательно, возможны только два состояния фотона с данным импульсом $\hbar q$. Такая возможность ограничения поляризационных состояний фотона связана с тем, что для бесспиновых частиц спиральность лоренц-инвариантна.

Состояния фотона можно также определить, задавая угловой момент λ , его проекцию μ и волновое число q . Состояние фотона с $\lambda = 0$ не существует, поскольку для такого состояния проекция углового момента на любое направление должна быть равной нулю, а поэтому такое состояние должно соответствовать частичам со спиральностью $\hbar = 0$.

Для всякой совокупности величин q , λ и μ , где $\lambda \geq 1$, существует два состояния фотона, каждое из которых можно характеризовать либо спиральностью $\hbar = \pm 1$, либо четностью $\mu = \pm 1$. Состояния с определенной четностью μ представляют собой линейные комбинации состояний с $\hbar = \pm 1$, каждое из которых входит с одинаковой интенсивностью. Кванты с заданными значениями λ и μ в зависимости от четности этих чисел называют квантами либо электрической ($E\lambda$), либо магнитной ($M\lambda$) мультипольности, а именно:

$$\pi = \begin{cases} (-1)^\lambda, & E\lambda, \quad \mu = \lambda \pm 1, \\ (-1)^{\lambda+1}, & M\lambda, \quad \mu = \lambda. \end{cases} \quad (3.135)$$

Поскольку внутренняя четность фотона равна -1 , о фотонах типа $M\lambda$ можно говорить как о фотонах с орбитальным угловым моментом $\mu = \lambda$, а фотоны типа $E\lambda$ содержат составляющие с $\mu = \lambda \pm 1$, отношение амплитуд которых равно $[\lambda/(\lambda+1)]^{1/2}$ [см. формулу (3.64)].

Векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ описывает рождение и уничтожение фотонов. Наличие только двух поляризационных состояний фотона соответствует тому, что поле излучения при надлежащем выборе калибровки может быть описано только поперечным векторным потенциалом, удовлетворяющим уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.136)$$

Из формулы (3.130) видно, что член, ответственный за испускание и поглощение фотонов, по своему виду аналогичен выражению (1.221). Таким образом, ядерные матричные элементы характеризующие испускание и поглощение квантов с определенной мультипольностью, можно выразить через мультипольные моменты вида (1.221). Благодаря условиям поперечности (3.136) при заданных значениях λ и μ могут быть только две комбинации мультипольных моментов (1.221). Мультипольные моменты, связанные с квантами электрической и магнитной мультипольностей, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(E\lambda, \mu) &= \frac{-i(2\lambda+1)!!}{cq^{\lambda+1}(\lambda+1)} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) (j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})) d\tau, \\ \mathcal{M}(M\lambda, \mu) &= \frac{-(2\lambda+1)!!}{cq^\lambda(\lambda+1)} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) (j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})) d\tau. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Нормировка в этих выражениях выбрана так, чтобы при $q \rightarrow 0$ мультипольные моменты принимали обычную форму (см. ниже).

Радиальная функция $j_\lambda(qr)$ в формуле (3.137) — это сферическая функция Бесселя порядка λ , которая представляет собой радиальную часть волновой функции свободно распространяющегося кванта (см. аналогичный результат для взаимодействия скалярных полей в гл. 1, приложение 1, п. 8). Таким образом, в радиальной зависимости мультипольных моментов (3.137) отражается то обстоятельство, что при прохождении фотонов через ядро их движение не искажается.

Мы видим, что мультипольные поля, которые в выражениях (3.137) умножаются на ток \mathbf{j} , подчиняются условиям поперечности (3.136). В то время как магнитный мультипольный момент $\mathcal{M}(M\lambda)$ имеет вид, соответствующий выражению (1.221) с $\kappa = \lambda$ [см. формулу (1.219)], из соотношения

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) &= q j_{\lambda+1}(qr) \lambda \left(\frac{\lambda+1}{2\lambda+1} \right)^{1/2} \Phi_{\kappa=\lambda+1, \lambda\mu} - \\ &- q j_{\lambda-1}(qr) (\lambda+1) \left(\frac{\lambda}{2\lambda+1} \right)^{1/2} \Phi_{\kappa=\lambda-1, \lambda\mu} \end{aligned} \quad (3.138)$$

следует, что электрический мультипольный момент $\mathcal{M}(E\lambda)$ равен сумме двух членов типа (1.219) с $\kappa = \lambda \pm 1$, что соответствует двум значениям орбитального момента, согласно условию (3.135).

Далее из соотношений (3.134) явствует, что четности мультипольных моментов (3.137) такие же, как в соотношениях (3.135), благодаря чему обеспечивается сохранение четности, и что фазовый множитель, возникающий при обращении времени [см. формулу (1.168)], таков:

$$c_{\mathcal{T}} = \begin{cases} (-1)^\lambda & \text{для } E\lambda, \\ (-1)^{\lambda+1} & \text{для } M\lambda. \end{cases} \quad (3.139)$$

Пользуясь уравнением непрерывности (3.133) и соотношением

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) &= \\ = -\nabla \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r j_\lambda(qr)] Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \right\} - q^2 r j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (3.140)$$

можно выразить электрический мультипольный момент в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(E\lambda, \mu) = & \frac{(2\lambda+1)!!}{q^\lambda (\lambda+1)} \int \rho(r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_\lambda(qr)] Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) d\tau + \\ & + \frac{i(2\lambda+1)!!}{c q^{\lambda-1} (\lambda+1)} \int [\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})] j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) d\tau. \end{aligned} \quad (3.141)$$

В ядерных фотопроцессах длина волны фотона обычно велика по сравнению с радиусом ядра, т. е.

$$qR = 6,1 \cdot 10^{-3} A^{1/3} E \gamma M_{\text{эф}} \quad (3.142)$$

($R = 1,2 A^{1/3}$ ферми),

и поэтому при $qr \ll 1$ можно воспользоваться разложением функции Бесселя

$$j_\lambda(qr) = \frac{(qr)^\lambda}{(2\lambda+1)!!} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(qr)^2}{2\lambda+3} + \dots \right]. \quad (3.143)$$

В большинстве случаев довольно хорошее приближение обеспечивает первый член этого разложения. В таком приближении мультипольные моменты принимают особенно простой вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(E\lambda, \mu) &= \int \rho(r) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) d\tau, \\ \mathcal{M}(M\lambda, \mu) &= \frac{-1}{c(\lambda+1)} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) d\tau. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Амплитуда перехода при испускании (или поглощении) фотона данной мультипольности пропорциональна матричному элементу оператора мультипольного момента. Полная вероятность распада, просуммированная по магнитным подсостояниям фотона и конечного состояния ядра, выражается в виде

$$T(E(M)\lambda; I_1 \rightarrow I_2) = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\lambda[(2\lambda+1)!!]^2} \frac{1}{\hbar} q^{2\lambda+1} B(E(M)\lambda; I_1 \rightarrow I_2), \quad (3.145)$$

где приведенная вероятность перехода

$$\begin{aligned} B(E(M)\lambda; I_1 \rightarrow I_2) &= \sum_{\mu M_2} |\langle I_2 M_2 | \mathcal{M}(E(M)\lambda, \mu) | I_1 M_1 \rangle|^2 = \\ &= \frac{|\langle I_2 | \mathcal{M}(E(M)\lambda) | I_1 \rangle|^2}{2I_1 + 1}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

При нескольких первых значениях λ и μ по формуле (3.145) получаем следующие значения для вероятностей распада в 1 сек:

$$\begin{aligned} T(E1) &= 1,59 \cdot 10^{15} (E)^3 B(E1), \\ T(E2) &= 1,22 \cdot 10^9 (E)^5 B(E2), \\ T(E3) &= 5,67 \cdot 10^2 (E)^7 B(E3), \\ T(E4) &= 1,69 \cdot 10^{-4} (E)^9 B(E4), \\ T(M1) &= 1,76 \cdot 10^{13} (E)^3 B(M1), \\ T(M2) &= 1,35 \cdot 10^7 (E)^5 B(M2), \\ T(M3) &= 6,28 \cdot 10^0 (E)^7 B(M3), \\ T(M4) &= 1,87 \cdot 10^{-6} (E)^9 B(M4). \end{aligned} \quad (3.147)$$

Здесь величина E должна быть взята в мегаэлектронвольтах, величина $B(E\lambda)$ — в единицах $e^2 \text{ ферми}^{2\lambda}$, а величина $B(M\lambda)$ — в единицах $(e\hbar/2Mc)^2 \text{ ферми}^{2\lambda-2}$.

Структуру выражения (3.145) можно объяснить исходя из соображений размерности; поскольку величина $B(\lambda)$ пропорциональна $e^2 L^{2\lambda}$, а множитель перед $B(\lambda)$ может зависеть только от q , \hbar и c , этот множитель должен содержать комбинацию величин \hbar и q в виде $\hbar^{-1} q^{2\lambda+1}$. Вывод выражения (3.145) можно найти во многих учебниках (например, [42, 332, 370]), а также в книгах по квантовой электродинамике. Выражение для $T(\lambda)$ можно вывести из принципа соответствия, поскольку электромагнитное поле, создаваемое ядром, оказывается такой же функцией ядерного 4-вектора тока, как и в классической теории. Так, например, интенсивность испускаемого излучения $T(\lambda)\hbar\omega$ равна интенсивности излучения классической системы осциллирующих мультиполей (см., например, работу [230]).

Угловое распределение и поляризация испускаемого излучения следуют из структуры мультипольных полей [см., например, формулу (3.274)]. Общие выражения и таблицы коэффициентов, характеризующих эти распределения и корреляции между последовательными переходами, можно найти в обзорах [124, 172, 482].

Матричные элементы γ -переходов можно также определить по данным о резонансном рассеянии фотонов, а также о фотоядерных реакциях. Вопрос о резонансном рассеянии γ -лучей рассматривается в работах [309, 327], а обзор по фотоядерным процессам дается, например, в работах [290, 226].

3. Взаимодействия с заряженными частицами

В реакциях, индуцированных электромагнитным полем заряженных частиц, форма ядерных матричных элементов зависит от того, проникает налетающая частица в ядро или нет. Если частица остается вне ядра (например, при кулоновском возбуждении, а также в первом приближении при внутренней конверсии и в процессах, которыми обусловлена сверхтонкая структура атома), то ядерные матричные элементы такие же, как и в случае радиационных переходов. Например, сечение кулоновского возбуждения, вычисленное в первом порядке, можно представить в виде произведения приведенной вероятности $B(E\lambda)$ на величину, которая определяется параметрами движения налетающей частицы в кулоновском поле ядра.

Если же частица проникает в ядро, как, например, при рассеянии электронов, при захвате μ -мезонов тяжелыми ядрами, а также (в несколько меньшей степени) при внутренней конверсии и в процессах, связанных со сверхтонкой структурой, то в рассмотрение вводятся два типа моментов. Первые из них подобны мультипольным моментам $\mathcal{M}(E(M)\lambda)$, но отличаются тем, что $j_{\lambda}(qr)$ заменяется другой радиальной функцией, зависящей от движения частицы вне ядра. [Если движение частицы описывается плоской волной (без искажения), то эта функция сводится к $f_{\lambda}(qr)$, где q — импульс, передаваемый частицей ядру или ядром частице.] Изменяя энергию налетающей частицы и угол рассеяния, можно получить подробные данные о радиальной зависимости мультипольных моментов (формфакторы).

Кроме того, взаимодействие с частицей внутри ядра зависит от мультипольных моментов типа

$$\mathcal{M}(C\lambda, \mu) = \int \rho(r) f_{\lambda}(r) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) dt, \quad (3.148)$$

которые связаны с кулоновским полем. Функция $f_{\lambda}(r)$ зависит от радиального движения частицы внутри ядра. Кулоновские мультипольные моменты типа (3.148) содержат монопольную составляющую ($\lambda = 0, \pi = +1$). Если функцию $f_0(r)$ разложить по степеням r , то главный член разложения будет постоянным. В таком приближении монопольный момент пропорционален полному

заряду ядра и не приводит к внутренним ядерным переходам. Следующий отличный от нуля член пропорционален r^2 , а поэтому монопольный оператор $m(E0)$, определяющийся выражением

$$m(E0) = \int \rho(r) r^2 d\tau, \quad (3.149)$$

приводит в основном к переходам с $\lambda\pi=0+$. Этот момент часто записывают в безразмерных единицах:

$$\rho = \frac{m(E0)}{eR^2} = \frac{1}{e} \int \rho(r) \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\tau \quad (3.150)$$

(см. работу [100]).

Различные типы взаимодействия ядер с заряженными частицами рассматриваются в следующих обзорах и статьях:

Кулоновское возбуждение [39, 5]; рассеяние электронов [123]; внутренняя конверсия [491, 372]; влияние конечных размеров ядра (эффекты проникновения) [101, 194]; сверхтонкая структура [272, 358]; эффекты проникновения при магнитном взаимодействии [415]; изотопические и изомерные сдвиги [457, 62, 396]; мезоатомы [466].

4. Плотность заряда и плотность тока свободных нуклонов

Чтобы вычислить матричные элементы мультипольных операторов, нужно выразить плотность заряда и плотность тока через переменные, которыми пользуются при описании строения ядра. Сначала мы рассмотрим вопрос о плотности заряда и плотности тока свободных нуклонов.

При $A \gg 1$ размеры, характеризующие внутреннюю структуру нуклона, намного меньше размеров ядра. Поэтому в первом приближении нуклоны можно рассматривать как точечные частицы, несущие заряд и магнитный момент. Если пренебречь релятивистскими эффектами в движении нуклонов, то плотность заряда и плотность тока таких точечных частиц записываются в виде

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \sum_h e \left[\frac{1}{2} - t_z(k) \right] \delta(r - r_h), \\ \mathbf{j}(r) &= \sum_h e \left[\frac{1}{2} - t_z(k) \right] \frac{1}{2} \left[\mathbf{v}_h \delta(r - r_h) + \delta(r - r_h) \mathbf{v}_h \right] + \\ &\quad + \frac{e\hbar}{2M} \sum_h g_s(k) \nabla \times \mathbf{s}_h \delta(r - r_h), \end{aligned} \quad (3.151)$$

где для нейтронов $t_z = +1/2$, а для протонов $t_z = -1/2$. Множитель g_s связан с гиromагнитными отношениями для нейтрона и протона выражением

$$g_s = \frac{1}{2} (g_n + g_p) + t_z (g_n - g_p). \quad (3.152)$$

Магнитный момент нуклона взаимодействует с магнитным полем, которое зависит от производных векторного потенциала и поэтому содержит члены первого порядка относительно размера нуклона. Выражения (3.151) — это самые общие выражения для плотности заряда и плотности тока, содержащие члены, линейные относительно скорости или размера нуклонов и удовлетворяющие уравнениям непрерывности (3.133). То, что константа взаимодействия одинакова для заряда и конвекционного тока (члена, пропорционального v_h), можно рассматривать как следствие четырехмерности вектора тока j_μ . Вопрос

о возможности определения плотностей заряда и тока нуклона из соображений инвариантности рассматривается в работе [166].

Если не считать электрического заряда, то единственными параметрами в формуле (3.151) — магнитные моменты нуклонов ($\mu = 1/2 g_s$), величины которых известны: $\mu_p = 2,79$, а $\mu_n = -1,91$ (см. табл. 1.1). Магнитные моменты нуклонов существенно отличаются от магнитных моментов ($\mu_p = 1$ и $\mu_n = 0$), соответствующих точечным частицам, движение которых подчиняется уравнению Дирака. Разности между экспериментальными и дираковскими теоретическими значениями магнитных моментов называют аномальными моментами или моментами Паули и приписывают внутренней структуре нуклонов. Открытие большого аномального момента протона [177] явилось первым указанием на сложное внутреннее строение нуклонов, и данный вопрос до сих пор еще не решен в теории нуклонов и сильных взаимодействий.

Выражения (3.151) для плотности заряда и плотности тока изменятся, если учесть конечные размеры нуклонов и релятивистские эффекты. Конечные размеры нуклонов можно учесть, заменив в формуле (3.151) для нейтронов и протонов δ -функции электрическим и магнитным формфакторами:

$$\rho(\mathbf{r}) = e f_E(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_h|), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2} [\mathbf{v}_h f_E(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_h|) + f_E(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_h| \mathbf{v}_h)] + \frac{e \hbar}{2M} g_s \nabla \times s_h f_M(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_h|). \quad (3.153)$$

Нейтронные и протонные формфакторы можно также выразить через изоскалярный и изовекторный формфакторы:

$$f_0 = \frac{1}{2} (f_p + f_n), \quad f_1 = \frac{1}{2} (f_p - f_n). \quad (3.154)$$

В первом приближении эффект конечных размеров нуклонов можно характеризовать электрическим и магнитным среднеквадратичными радиусами нуклонов

$$\langle r_{E, M}^2 \rangle = \int r^2 f_{E, M} d\tau. \quad (3.155)$$

Экспериментальные значения радиусов приведены в табл. 1.1. (Для нейтрона величина $\langle r_E^2 \rangle$ отрицательна, и в табл. 1.1 указана величина, равная квадратному корню из абсолютного значения $\langle r_E^2 \rangle$.)

Релятивистско-инвариантные матричные элементы от операторов плотностей заряда и тока для состояний свободных нуклонов можно выразить через электрический или магнитный формфакторы $G_{E, M}(q^2)$, являющиеся функциями четырехмерного импульса $\hbar q$, которым обмениваются нуклон и электромагнитное поле. При $\hbar q \ll Mc$ в нерелятивистском пределе эти формфакторы представляют собой фурье-образы введенных выше формфакторов $f_{E, M}(r)$. При обычной нормировке мы имеем

$$G_E(q^2) = \int f_E(r) \exp\{iq \cdot r\} d\tau, \quad (3.156)$$

$$G_M(q^2) = \mu \int f_M(r) \exp\{iq \cdot r\} d\tau.$$

Таким образом, при малых импульсах

$$G_{E_p}(q^2) \approx 1 - \frac{1}{6} \langle r_E^2 \rangle_p q^2,$$

$$G_{E_n}(q^2) \approx -\frac{1}{6} \langle r_E^2 \rangle_n q^2, \quad (3.157)$$

$$G_M(q^2) \approx \mu \left(1 - \frac{1}{6} \langle r_M^2 \rangle q^2 \right).$$

Электромагнитную структуру нуклона можно характеризовать также формфакторами Дирака и Паули, связанными с теми членами уравнения Дирака, которыми описываются заряд и аномальный магнитный момент. Релятивистичные выражения для оператора тока и связь между различными совокупностями формфакторов можно найти, например, в обзоре [219].

Формфакторы $G_{E, M}(q^2)$ были определены в результате экспериментов по расщеплению электронов, проводившихся в широком интервале значений импульса q ($q \leq 5-10 \text{ ферми}^{-1}$) (см., например, обзор [92]). Современные данные приближенно выражаются следующими соотношениями:

$$\frac{G_{M_p}(q^2)}{\mu_p} \approx \frac{G_{M_n}(q^2)}{\mu_n} \approx \left(1 + \frac{q^2}{\lambda^2}\right)^{-2}, \quad \lambda^2 = 18,1 \text{ ферми}^{-2}. \quad (3.158)$$

При $q > 2,5 \text{ ферми}^{-1}$ электрический формфактор для нейтрона меньше 0,2. При меньших значениях передаваемого импульса q формфактор $G_{E_n}(q^2)$ определен очень не точно, но наклон кривой $G_{E_n}(q^2)$ при $q = 0$ известен из экспериментов по нейтрон-электронному рассеянию (см. табл. 1.1). Удивительная и непонятная особенность электромагнитной структуры нейтрона — равенство нулю среднеквадратичного радиуса для дираковского формфактора (см. табл. 1.1).

Ряд далеко идущих соотношений, описывающих электромагнитные свойства нуклонов, удалось получить на основе расширенной изобарической симметрии для адронов (SU_3 и SU_6 , см. гл. 1, § 3). Было установлено, что электромагнитный ток при классификации по схеме SU_3 преобразуется как член октета со странностью $S = 0$ и U -спином, также равным нулю. (Об инвариантности электромагнитных взаимодействий при U -спиновых преобразованиях говорилось в гл. 1, § 3, п. 2 и в примерах к § 3.) Возможности приложения SU_3 -симметрии к электромагнитным свойствам нуклонов ограничиваются тем, что матричные элементы октетных тензорных операторов между двумя членами октета (такими, как нуклоны) содержат два приведенных матричных элемента. [В произведение (11) \otimes (11) представление $(\lambda\mu) = (11)$ входит дважды; с таким положением мы уже встречались, когда речь шла о расщеплении по массам в примерах к § 3 в гл. 1.]

В схеме классификации SU_8 предполагается, что электромагнитный ток преобразуется как член 35-мерного представления (как генератор группы SU_8) с теми же квантовыми числами относительно группы SU_3 , которые были приведены выше. Поскольку здесь имеется только один приведенный матричный элемент 35-мерного тензора между состояниями, которые принадлежат 56-мерному представлению (такие, как состояния нуклона), относительная величина любого электромагнитного момента для различных членов этого мультиплета определяется отношением коэффициентов Клебша — Гордана. Так, например, электрический нейтронный формфактор $G_{E_n}(q^2)$ равен нулю, а формфактор $G_{M_p}(q^2)$ пропорционален формфактору $G_{M_n}(q^2)$ в соответствии с формулой (3.158).

Далее, отношение магнитных моментов нейтрона и протона равно $-2/3$ [29], что прекрасно согласуется с экспериментальным значением. Отношение магнитных моментов довольно просто вывести на основе модели кварков (см. гл. 1, § 3, п. 2). В такой модели можно предположить, что оператор магнитного момента для нуклонов равен сумме операторов моментов отдельных кварков, каждый из которых пропорционален заряду кварка, ибо такой оператор обладает требуемыми трансформационными свойствами относительно групп SU_8 и SU_3 . Нуклоны состоят из кварков n (с зарядовым числом, равным $-1/3$) и p (с зарядовым числом, равным $+2/3$), причем те и другие со странностью $S = 0$ и связаны

между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} |\text{нейтрон}\rangle &= \left| (n^2) J=1, p; I=\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |\text{протон}\rangle &= \left| (p^2) J=1, n; I=\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Поскольку состояния 56-мерного представления полностью симметричны относительно спиновых и изобарических переменных, спины двух идентичных кварков должны быть связаны в состояние с $J = 1$. Тогда на основе векторной модели получаем отношение магнитных моментов

$$\frac{\mu_{\text{нейтрон}}}{\mu_{\text{протон}}} = \frac{-1/3(J \cdot I) + 2/3[3/4 - (J \cdot I)]}{+2/3(J \cdot I) - 1/3[3/4 - (J \cdot I)]} = -\frac{2}{3}. \quad (3.160)$$

5. Одночастичные матричные элементы

Если нуклоны рассматривать как точечные заряды с магнитными моментами, то из соотношений (3.151) для плотностей заряда и тока вытекают следующие выражения для мультипольных моментов системы частиц:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(E\lambda, \mu) &= \sum_h e \left[\frac{1}{2} - t_z(k) \right] r_h^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta_h, \varphi_h), \\ \mathcal{M}(M\lambda, \mu) &= \frac{e\hbar}{2Mc} \sum_h \left[g_s(k) \mathbf{s}_h + \frac{2g_l(k)}{\lambda+1} \mathbf{l}_h \right] \cdot \nabla_h [r_h^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta_h, \varphi_h)]. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Спиновую часть магнитного момента (3.161) можно получить из формулы (3.144), пользуясь тождеством

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}) r^\lambda Y_{\lambda\mu} = (\lambda + 1) \nabla r^\lambda Y_{\lambda\mu}. \quad (3.162)$$

Второй член магнитного момента (орбитальная часть) пропорционален орбитальному угловому моменту $\hbar \mathbf{l}_h = M(\mathbf{r}_h \times \mathbf{v}_h)$ и содержит орбитальный множитель $g_l = 1/2 - t_z$. Магнитный мультипольный момент можно также записать в виде

$$\mathcal{M}(M\lambda, \mu) = \frac{e\hbar}{2Mc} [\lambda(2\lambda+1)]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_h r_h^{\lambda-1} \left[\left(g_s - \frac{2g_l}{\lambda+1} \right) (Y_{\lambda-1}s) + \frac{2g_l}{\lambda+1} (Y_{\lambda-1}j) \right]_{\lambda\mu}, \quad (3.163)$$

где $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ — полный угловой момент нуклона. В формуле (3.163) векторы \mathbf{s} и \mathbf{j} представляют собой тензоры первого ранга, которые, связываясь с шаровой функцией $Y_{\lambda-1}$, образуют тензоры ранга λ .

Матричные элементы электромагнитных мультипольных моментов для одночастичных состояний можно вычислить по формулам, представленным в приложении 1, п. 2. Так, например, из формулы (3.69) для протона получаем, что

$$\begin{aligned} \langle j_2 || i^\lambda \mathcal{M}(E\lambda) || j_1 \rangle &= \\ &= e (-1)^{j_1-j_2+\lambda} i^{l_1-l_2+\lambda} \left[\frac{(2\lambda+1)(2j_1+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \langle j_2 | r^\lambda | j_1 \rangle \left\langle j_1 \frac{1}{2} \lambda 0 | j_2 \frac{1}{2} \right\rangle \\ &\quad (l_1 + \lambda - l_2) \text{ четно,} \end{aligned} \quad (3.164)$$

и приведенная вероятность перехода

$$B_{\text{одн}}(E\lambda; j_1 \rightarrow j_2) = \frac{e^2}{4\pi} (2\lambda + 1) \left\langle j_1 \frac{1}{2} \lambda 0 | j_2 \frac{1}{2} \right\rangle^2 \langle j_2 | r^\lambda | j_1 \rangle^2. \quad (3.165)$$

Движение частицы связано с отдачей остального ядра, так как их общий центр масс остается неподвижным. Данный эффект особенно существен для переходов $E1$, для которых полный момент одночастичного перехода можно получить, заменив в формулах (3.164) заряд частицы величиной

$$(e)_{E1} = \left(\frac{1}{2} - l_z \right) e - \frac{Ze}{A} = \begin{cases} \frac{N}{A} e & \text{для протона,} \\ -\frac{Z}{A} e & \text{для нейтрона.} \end{cases} \quad (3.166)$$

В случае электрических мультиполей более высокого порядка и магнитных мультиполей член, учитывающий отдачу, зависит от корреляции между частичками и поэтому его нельзя получить путем перенормировки одночастичных мультипольных моментов. Но такой эффект порядка A^{-1} или еще меньше, и поэтому, как правило, несуществен. (Эффект отдачи для электрических квадрупольных моментов рассматривается в связи с табл. 3.2.)

Пользуясь формулами (3.78), (3.79) и (3.84), из формулы (3.163) получаем для магнитного мультипольного момента соотношение

$$\begin{aligned} \langle j_2 || i^{\lambda-1} \mathcal{M}(M\lambda) || j_1 \rangle = & \\ = & \frac{e\hbar}{2Mc} (-1)^{j_1-j_2+\lambda-1} l_1 l_2 + \lambda - 1 \left[\frac{(2j_1+1)(2\lambda+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \langle j_2 | r^{\lambda-1} | j_1 \rangle \times \\ \times & \left\{ \left(g_s - \frac{2g_l}{\lambda+1} \right) \frac{\lambda}{2} \left\langle j_1 \frac{1}{2} \lambda 0 | j_2 \frac{1}{2} \right\rangle \left[1 + \frac{1}{\lambda} (-1)^{l_1+1/2-j_1} \left\{ \left(j_1 + \frac{1}{2} \right) + \right. \right. \right. \\ + & \left. \left. \left. (-1)^{j_1+j_2-\lambda} \left(j_2 + \frac{1}{2} \right) \right\} \right] + \\ + & (-1)^{j_1+j_2+\lambda} \frac{2g_l}{\lambda+1} [\lambda(2\lambda-1)(2\lambda+1) j_1(j_1+1)(2j_1+1)]^{1/2} \times \\ \times & \left\langle j_1 \frac{1}{2} \lambda - 10 | j_2 \frac{1}{2} \right\rangle \times \left\{ \frac{j_1}{\lambda-1} \frac{1}{j_2} \frac{j_1}{\lambda} \right\}, \end{aligned} \quad (3.167)$$

где в силу правил отбора по четности число $l_1 - l_2 + \lambda - 1$ должно быть четным.

Матричные элементы для магнитных мультипольных переходов в случае $j_2 = j_1 + \lambda$ можно записать в несколько более простой форме. Второй член в формуле (3.167) равен нулю, и мы получаем

$$\begin{aligned} \langle j_2 = j_1 + \lambda || i^{\lambda-1} \mathcal{M}(M\lambda) || j_1 \rangle = & \\ = & \frac{e\hbar}{2Mc} \left(g_s - \frac{2g_l}{\lambda+1} \right) \lambda \left(\frac{2\lambda+1}{4\pi} \right)^{1/2} (2j_1+1)^{1/2} \left\langle j_1 \frac{1}{2} \lambda 0 | j_2 \frac{1}{2} \right\rangle \langle j_2 | r^{\lambda-1} | j_1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} B_{\text{одн}}(M\lambda; j_1 \rightarrow j_2 = \lambda + j_1) = & \\ = & \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2 \left(g_s - \frac{2g_l}{\lambda+1} \right)^2 \lambda^2 \frac{2\lambda+1}{4\pi} \left\langle j_1 \frac{1}{2} \lambda 0 | j_2 \frac{1}{2} \right\rangle^2 \langle j_2 | r^{\lambda-1} | j_1 \rangle^2, \end{aligned}$$

где из правил отбора по четности $l_2 = l_1 + \lambda - 1$.

Чтобы иметь в распоряжении несколько более простую величину для сравнения с экспериментальными значениями вероятностей электромагнитных пере-

ходов, часто пользуются приближенными вариантами выражений (3.165) и (3.168), так называемыми единицами Вайскоффа. Для этого, во-первых, радиальные интегралы $\langle j_2 | r^\lambda | j_1 \rangle$ заменяют приближенным выражением $3(\lambda + 3)^{-1} R^\lambda$, что соответствует волновой функции, постоянной внутри ядра радиусом R и равной нулю вне его. Во-вторых, коэффициенты векторного сложения вычисляют для перехода между состояниями с $j_1 = \lambda + 1/2$ и $j_2 = 1/2$. В-третьих, для магнитных мультипольных переходов множитель $\lambda^2 [g_s - 2(\lambda + 1)^{-1} g_f]^2$ берут равным десяти. Тогда при радиусе $R = 1,2A^{1/3}$ ферми получаем, что

$$B_W(E\lambda) = \frac{(1.2)^{2\lambda}}{4\pi} \left(\frac{3}{\lambda + 3} \right)^2 A^{2\lambda/3} e^2 \text{ ферми}^{2\lambda}, \quad (3.169)$$

$$B_W(M\lambda) = \frac{10}{\pi} (1.2)^{2\lambda-2} \left(\frac{3}{\lambda + 3} \right)^2 A^{(2\lambda-2)/3} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2 \text{ ферми}^{2\lambda-2}.$$

6. Эффекты взаимодействия в токе

В случае системы взаимодействующих нуклонов выражения для плотности заряда и плотности тока могут отличаться от соответствующих выражений для свободных нуклонов. Это связано со сложным строением нуклонов и с тем, что ядерные силы передаются заряженными квантами, которые сами вызывают электромагнитные эффекты.

Если ограничиться электромагнитными матричными элементами между ядерными состояниями (исключив процессы, в которых принимают участие реальные мезоны, гипероны и т. д.), то можно рассматривать эффекты виртуальных степеней свободы, связанных со строением нуклонов, пользуясь операторами, зависящими только от переменных самих нуклонов (координат импульсов, спинов и изоспинов). Действительно, матричные элементы любого оператора, вычисленные между ядерными состояниями, можно выразить, включив члены, зависящие от переменных двух и более нуклонов. [Следует подчеркнуть, что мы рассматриваем электромагнитные моменты ядра, выраженные через координаты всех нуклонов. Если же моменты для конфигураций, содержащих один или несколько нуклонов вне заполненных оболочек, желательно выразить через степени свободы только этих нуклонов, то в эффективные одночастичные моменты включаются поляризационные члены, связанные с виртуальным возбуждением частиц заполненных оболочек (см. § 3).]

Свойства симметрии

Та часть электромагнитного тока, которая связана с взаимодействием между нуклонами (ток взаимодействия), может содержать большое число различных членов, и единственное ограничение на эти члены накладывается требованием инвариантности тока j_μ относительно пространственно-временного отражения, преобразования Лоренца и вращения в изопространстве [346].

Как показывают экспериментальные данные, закон сохранения четности \mathcal{P} и лоренц-инвариантность для электромагнитного взаимодействия ядерных систем выполняются с очень высокой степенью точности. Данные же, свидетельствующие об инвариантности относительно обращения времени \mathcal{T} , значительно менее точны (см. гл. 1, § 2). В связи с этим важно отметить, что преобразование (3.134) при обращении времени для части тока, связанной со свободным нуклоном, является следствием уравнения непрерывности и инвариантности относительно пространственного отражения [34]. Это можно видеть из того, что при выводе соотношений (3.151) не делалось никаких предположений относительно инвариантности при обращении времени. Поэтому для ядерных систем нарушение инвариантности относительно обращения времени в электромагнитных процессах должно быть связано с членами взаимодействия в токе. Имеющиеся в

в настоящее время экспериментальные данные едва ли достаточны, чтобы проверить \mathcal{F} -инвариантность этой части тока.

Электромагнитный ток отдельного нуклона состоит из изоскалярной и изовекторной частей [см., например, соотношения (3.151)]. Обычно предполагается, что это общее свойство электромагнитного тока всех сильно взаимодействующих частиц, связанное с SU_3 -симметрией тока. Но пока что очень мало данных, свидетельствующих о существовании компонент тока с более высокими гиперными рангами в изопространстве, которые могли бы содержаться в членах взаимодействия нуклонного тока.

Электрические мультипольные моменты

Взаимодействия должны оказывать сравнительно слабое влияние на распределение заряда ядра и, следовательно, на электрические мультипольные моменты. Когда взаимодействуют несколько нуклонов (два и более), то их заряд может перераспределяться по всему объему взаимодействия, но в силу закона сохранения их полного заряда и вследствие того, что заряд может сместиться лишь на малые расстояния, низшие фурье-коэффициенты распределения заряда почти не изменяются. Таким образом, если мы рассмотрим электрические мультиполи не слишком высокого порядка ($\lambda < A^{1/3}$) и ограничимся волновыми числами, малыми по сравнению с обратным радиусом взаимодействия, и частотами, меньшими, чем частота, соответствующая средней длительности столкновения между двумя нуклонами, то с приемлемой точностью можно пользоваться выражением (3.151) для плотности заряда ядра, выведенным в случае точечных нуклонов. (На то, что электрические моменты не зависят от обменного взаимодействия, впервые было указано в работе [399].)

Магнитные мультипольные моменты

Распределение ядерного тока сильнее зависит от взаимодействия. Большие аномальные магнитные моменты указывают на то, что магнитные свойства нуклонов в значительной мере определяются их внутренней динамикой (взаимодействием мезонов, кварковой структурой и т. д.). Поскольку закона сохранения магнитных моментов не существует, полный магнитный момент пары нуклонов может сильно меняться, когда частицы оказываются в пределах радиуса взаимодействия. Но поскольку кинетическая энергия нуклона мала по сравнению с характерными энергиями возбужденных состояний нуклонов (~ 200 МэВ, см. фиг. 1.11), члены взаимодействия в магнитных моментах нуклона можно, по-видимому, рассматривать как поправки к одиночастичным моментам.

Чтобы вычислить другие члены оператора ядерного тока, нужно анализировать мезонные токи, связанные с взаимодействием в ядрах. Много внимания уделялось одному интересному явлению: аномальные моменты нуклонов могут уменьшаться в присутствии соседних нуклонов, которые в силу принципа Паули задерживают некоторые виртуальные процессы испускания и поглощения мезонов (324). Расчеты, основанные на имеющихся данных относительно взаимодействий в системе нуклон — μ -мезон и электромагнитных формфакторов нуклонов и мезонов, показывают, что аномальные моменты нуклона могут уменьшаться на величину порядка $1/10$ магнетона [132]. Возможно, что при дальнейшем исследовании структуры нуклонов, темпы которого сейчас нарастают, выяснятся и многие другие интересные эффекты, которые можно связать со взаимодействием токов в ядре.

Структурные эффекты, которыми определяется зависимость магнитных моментов от взаимодействия, приводят к зарядово-обменным ядерным силам и силам, зависящим от скорости. Соотношение между феноменологически определенным взаимодействием и обменными токами подробно обсуждалось в литературе (см., например, работу [383]). В следующих разделах мы рассмотрим некоторые качественные стороны этого соотношения. Как мы увидим, на таком феноменологическом уровне можно получить лишь весьма ограниченные сведения.

Эффект зарядово-обменных взаимодействий

Важная особенность взаимодействия нуклонов — возможность обмена зарядом между сталкивающимися частицами. Феноменологически это можно учесть, если ввести зарядово-обменный потенциал. При наличии такого потенциала операторы плотностей заряда и тока (3.151) не удовлетворяют локальному закону сохранения (3.133), ибо перенос заряда может быть не связан с движением частиц. В действительных процессах заряд переносится квантами, такими, как π - и ρ -мезоны, но их можно характеризовать и обменным током $j_{\text{обм}}(\mathbf{r})$, зависящим от переменных взаимодействующих нуклонов. Для того чтобы полный ток, равный сумме тока (3.151) и $j_{\text{обм}}(\mathbf{r})$, удовлетворял уравнению непрерывности, дивергенция тока $j_{\text{обм}}$ должна удовлетворять условию

$$\begin{aligned} \nabla \cdot j_{\text{обм}}(\mathbf{r}) &= -\frac{i}{\hbar} [V_{\text{обм}}, \rho(\mathbf{r})] = \\ &= -\frac{ie}{\hbar} \sum_{i < k} [t_z(i) - t_z(k)] V_{\tau}(ik) P^{\tau}(ik) [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)]. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Мы предполагаем, что потенциал зарядово-обменного взаимодействия представляет собой функцию $V_{\tau}(ik)$ пространственных и спиновых координат взаимодействующих частиц, умноженную на зарядово-обменный оператор P^{τ} [см. формулу (1.57)], а плотность заряда имеет вид (3.151).

Чтобы вычислить вклад в магнитный момент от обменного тока, необходимо сделать дальнейшие предположения относительно структуры процесса, так как соотношением (3.170) определяется только дивергенция тока $j_{\text{обм}}$, а не его ротор ($\nabla \times j_{\text{обм}}$).

В простой полуклассической картине считается, что обменный ток сконцентрирован вдоль прямой линии, связывающей два взаимодействующих точечных заряда. В этом случае ток J (произведение плотности тока на площадь поперечного сечения) равен множителю перед $[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)]$ в выражении (3.170). Соответствующий магнитный мультипольный момент имеет вид [см. формулу (3.144)]

$$\delta \mathcal{M}(M\lambda, \mu) = \frac{J}{2c(\lambda+1)} \sum_{i < k} (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k) \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_k} (ds \times \nabla) r^k Y_{\lambda\mu}(\vec{r}), \quad (3.171)$$

где ds — элемент длины по прямой от \mathbf{r}_i к \mathbf{r}_k .

Этот результат можно также получить, выразив зарядово-обменное взаимодействие через оператор обмена координат $P^r(ik)$, который записывается в виде

$$P^r(ik) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\int_{S_1} ds \cdot \mathbf{p}_i + \int_{S_2} ds \cdot \mathbf{p}_k \right) \right\}, \quad (3.172)$$

где экспоненциальный оператор определен как

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_S ds \cdot \mathbf{p} \right\} &= \prod_r \left(1 + \frac{i}{\hbar} ds_r \cdot \mathbf{p} \right), \\ \int_S ds &\rightarrow \sum_r ds_r. \end{aligned} \quad (3.173)$$

В этих формулах S_1 и S_2 — произвольные траектории, ведущие от \mathbf{r}_i к \mathbf{r}_k и обратно. При наличии электромагнитного поля импульс \mathbf{p} заменяется на $\mathbf{p} - e\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_z)\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (калибровочная инвариантность) и появляется взаимодействие с электромагнитным током, обусловленным током J , который направлен от одной частицы к другой. Если предположить, что S_1 и S_2 совпадают с прямой

единицей, соединяющей \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_k , то результирующий мультипольный момент имеет вид (3.171). (Почти такой же вывод был дан в работе [382], см. также [383].) Как мы видим, условие сохранения заряда не позволяет однозначно выбрать траектории S_1 и S_2 , что соответствует наличию в выражении для тока членов, дивергенция которых равна нулю.

Для магнитного дипольного момента выражение (3.171) можно записать в виде

$$\delta M(M), \mu = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{ie}{4\hbar c} \sum_{i < k} [t_z(i) - t_z(k)] V_T(i, k) P^T(i, k) [(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)] \mu. \quad (3.174)$$

В большинстве рассматривавшихся до сих пор случаев влияние этого дополнительного момента (3.174), по-видимому, мало [406]. Так, для системы из двух частиц (pr) момент относительно центра масс равен нулю. При $A = 3$ вклад величины δM в статические моменты в первом приближении также равен нулю, поскольку орбитальное движение происходит в основном в S -состоянии. В случае более тяжелых ядер можно попытаться вывести эффективный одиночастичный момент путем усреднения части выражения (3.174), связанной с определенным нуклоном k , по состояниям всех остальных частиц ядра. Но если преибречь корреляцией между пространственными и спиновыми координатами, то такое усреднение также приводит к нулю. Схематически изложенная выше картина обменных эффектов существенно изменится, если учесть, что линейные размеры распределения заряда и тока вокруг каждого нуклона сравнимы с расстоянием между взаимодействующими нуклонами (обе эти величины порядка комптоновой длины волны мезонов). Следовательно, неоднозначность, связанная с выбором траектории передачи заряда, может быть устранена только при более детальном анализе мезонных процессов, ответственных за обмен зарядами.

Эффект взаимодействий, зависящих от скорости

При наличии сил, зависящих от скорости нуклонов, изменяется соотношение между скоростью и импульсом частицы. В частности, если потенциал взаимодействия содержит парные спин-орбитальные силы вида (1.92), то мы имеем

$$\mathbf{v}_h = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{r}_h] = \frac{\mathbf{p}_h}{M} - \frac{1}{\hbar} \sum_i ((\mathbf{r}_h - \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{s}_h + \mathbf{s}_i)) V_{LS}(r_{ih}). \quad (3.175)$$

Для простоты мы рассмотрим случай, когда взаимодействие не зависит от изоспина. При учете зарядово-обменных сил изменилась бы изоспиновая зависимость результирующих моментов и, кроме того, появились бы обменные члены, аналогичные рассмотренным выше.

В силу закона сохранения плотностей заряда и тока нуклонный ток пропорционален \mathbf{v}_h , а не \mathbf{p}_h . Если $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ выразить через импульс, то ток будет содержать двухчастичные члены, которые получаются при подстановке в выражение (3.175) соотношения (3.151). В частности, в орбитальном магнитном моменте, который входит в формулу (3.161), величину $\hbar \mathbf{l}_h$ следует заменить величиной $M(\mathbf{r}_h \times \mathbf{v}_h)$. Таким образом, мы получаем дополнительный магнитный дипольный момент (в единицах $e\hbar/2Mc$)

$$\begin{aligned} \delta \mu &= \frac{M}{\hbar} \sum_k \left[\frac{1}{2} - t_z(k) \right] (\mathbf{r}_h \times \delta \mathbf{v}_h) - \\ &= \frac{M}{2\hbar^2} \sum_{i < k} [t_z(k) - t_z(i)] (\mathbf{r}_h + \mathbf{r}_i) \times [(\mathbf{r}_h - \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{s}_h + \mathbf{s}_i)] V_{LS}(r_{ih}) - \\ &- \frac{M}{2\hbar^2} \sum_{i < k} \{1 - [t_z(i) + t_z(k)]\} (\mathbf{r}_h - \mathbf{r}_i) \times [(\mathbf{r}_h - \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{s}_h + \mathbf{s}_i)] V_{LS}(r_{ih}). \end{aligned} \quad (3.176)$$

Если в формуле (3.176) усреднить члены, относящиеся к нуклону k , и предположить, что частицы t образуют сферически-симметричный остав [см. аналогичную формулу (2.215) для одночастичного потенциала, полученного из двухчастичных спин-орбитальных сил], то мы получим

$$\delta\mu = \delta\mu^{(1)} + \delta\mu^{(2)}, \quad (3.177)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\mu^{(1)} &= -\frac{M}{\hbar^2} \frac{2Z}{A} \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}, \\ \delta\mu^{(2)} &= \frac{M}{\hbar^2} \left(t_z - \frac{N-Z}{2A} \right) \times \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{s})]. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Здесь \times — среднее спин-орбитальное взаимодействие, определяющееся формулой (2.218). Отсюда возникает перенормировка одночастичного гиromагнитного отношения g_s и дополнительный член, пропорциональный тензору $(Y_{2S})_1$. Величину последнего члена можно непосредственно связать с одночастичным спин-орбитальным потенциалом $V_{ls}(r)$, т. е.

$$\begin{aligned} \delta\mu^{(2)} &\approx \frac{M}{\hbar^2} \left(t_z - \frac{N-Z}{2A} \right) v_{ls}(r) [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{s})], \\ V_{ls}(r) &= (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) v_{ls}(r), \\ [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{s})]_\mu &= -\left(\frac{8\pi}{9}\right)^{1/2} r^2 (Y_{2S})_1 - \frac{2}{3} r^2 s_\mu. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Формула (3.179) дает вклад в магнитные моменты порядка $1/10$ магнетона. Но точность ее невелика, поскольку при выводе упрощают усреднение и пренебрегают изоспиновой зависимостью двухчастичных спин-орбитальных сил. На магнитных моментах такое пренебрежение должно, по-видимому, оказываться иначе, чем на среднем одночастичном потенциале.

Можно попытаться найти момент взаимодействия (3.176) непосредственно из одночастичного спин-орбитального потенциала, подставив этот потенциал в гамильтониан, который дает соотношение между величинами v_k и p_k , как в выражении (3.175) [255]. Полученное таким путем выражение отличается от выражения (3.177), где имеется дополнительный вклад от частиц заполненных оболочек. Для оболочек, заполненных только нейтронами ($N = A$), этот дополнительный вклад равен нулю, а момент (3.177) оказывается равным моменту, который выводится из одночастичного гамильтониана. Но при $N \approx 1/2A$ момент $\delta\mu^{(2)}$ чисто изовекторный. Кроме того, в этом случае появляется и изоскалярный момент $\delta\mu^{(1)}$. Трудности, возникающие при выводе ядерного магнитного момента из эффективного одночастичного потенциала, заставляют с осторожностью подходить к выводам, которые можно сделать на основе феноменологического двухчастичного потенциала, если при этом не проводится тщательный анализ эффектов, связанных с дополнительными степенями свободы.

Общего соотношения между моментами, возникающими вследствие взаимодействия нуклонов, и зависимостью от скорости эффективного одночастичного потенциала нет, и это явствует из того, что упомянутую зависимость от скорости можно получить из двухчастичного взаимодействия, не зависящего от скорости. Например, тензорные силы во втором порядке теории возмущений могут привести к спин-орбитальному расщеплению, а центральное поле, зависящее от скорости, можно получить, комбинируя короткодействующие силы отталкивания с дальнодействующими силами притяжения (см. гл. 2, § 5). Исходя из такого центрального потенциала, зависящего от скорости, и выражения (3.175), мы получим орбитальный магнитный момент с эффективной массой M^* (вместо M). Нетрудно убедиться, что данный эффект не соответствует физической картине. В самом деле, рассмотрим модель, в которой для всех частиц $g_s = g_l = g$. В такой системе для всех состояний магнитный момент $\mu = gJ$ при условии, что основное двухчастичное взаимодействие не зависит от скорости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

4

БЕТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

1. Процессы слабого взаимодействия и слабый ток

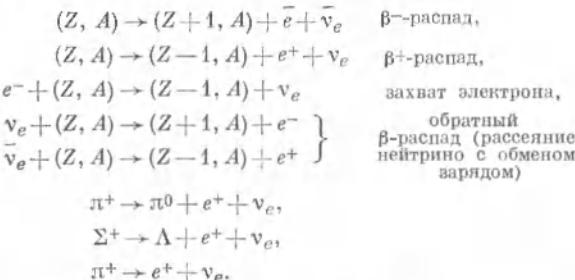
На протяжении многих лет считалось, что среди известных реакций с участием атомных частиц ядерный β -распад занимает довольно изолированное положение. Но позднее новые исследования в физике элементарных частиц привели к открытию целого ряда процессов, тесно связанных с β -распадом. Взаимодействие, связанное с такими процессами, характеризуется константой, на много порядков меньшей константы электромагнитного взаимодействия, и поэтому такое взаимодействие называется слабым.

Классификация процессов слабого взаимодействия

Экспериментально наблюдающиеся процессы слабого взаимодействия можно разделить на следующие группы.

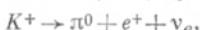
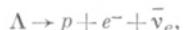
а. Процессы, в которых участвуют только лептоны. Пока что изучен лишь один процесс такого типа — распад μ -мезона ($\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ и зарядово-сопряженный процесс). С ним тесно связаны процессы неупругого рассеяния нейтрино $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \nu_\mu + \mu^-$ и $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$.

б. Процессы, в которых участвуют адроны и лептоны. Такие процессы можно разделить на процессы, в которых странность сохраняется, и на процессы, в которых она нарушается. Вот, например, процессы с сохранением странности, в которых участвует лептонная пара (e , ν_e):



Кроме того, как установлено, при достаточно высокой энергии протекают соответствующие процессы, в которых участвует лептонная пара (μ , ν_μ).

Примером процессов, в которых странность не сохраняется, могут служить распады



а также соответствующие реакции с участием мюонов.

в. Процессы, в которых участвуют только адроны. Из процессов такого типа наиболее изучены процессы

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow p + \pi^-, \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0, \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, \\ {}^4_\Lambda H &\rightarrow {}^4\text{He} + \pi^-. \end{aligned}$$

Для всех таких процессов характерно изменение странности на единицу ($\Delta S = 1$). Возможны, по-видимому, также процессы, обусловленные слабым взаимодействием, в которых участвуют только адроны, но странность сохраняется.

Взаимодействие токов

Общую теорию всех процессов слабого взаимодействия можно основывать на 4-векторе тока, состоящем из адронной и лептонной частей:

$$j_\mu(\mathbf{r}) = [j_\mu(\mathbf{r})]_{\text{адр}} + [j_\mu(\mathbf{r})]_{\text{леп}}. \quad (3.180)$$

Установлено, что взаимодействие этого тока с самим собой, взятое в форме

$$\begin{aligned} H' &= k \int j_\mu^\dagger(\mathbf{r}) j_\mu(\mathbf{r}) d^3r = \\ &= k \left\{ \int [j_\mu^\dagger(\mathbf{r})]_{\text{леп}} [j_\mu(\mathbf{r})]_{\text{леп}} d^3r + \left(\int [j_\mu^\dagger(\mathbf{r})]_{\text{адр}} [j_\mu(\mathbf{r})]_{\text{леп}} d^3r + \text{эрмит. сопр.} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int [j_\mu^\dagger(\mathbf{r})]_{\text{адр}} [j_\mu(\mathbf{r})]_{\text{адр}} d^3r \right\}, \end{aligned} \quad (3.181)$$

согласуется со всеми данными относительно процессов трех разных типов, рассмотренных выше. Постоянный множитель k в формуле (3.181) зависит от нормировки тока, и при нормировке, используемой ниже, $k = 2^{-1/2} g_V^{-1}$.

То обстоятельство, что слабое взаимодействие порождается 4-вектором тока, указывает на аналогию с электромагнитным взаимодействием. Так, в процессах β -распада адронный ток соответствует ядерным плотностям заряда и тока, а лептонный ток формально аналогичен электромагнитному 4-векторному потенциалу [см. формулу (3.130)]. Такая аналогия была первоначально положена в основу теории β -распада [161].

Аналогию между слабым и электромагнитным взаимодействиями можно продолжить дальше. Было высказано предположение, что взаимодействие (3.181) передается некоторым векторным полем, соответствующим полю фотона, хотя и с не равной нулю массой покоя. Пока что нет каких-либо простых теоретических соображений относительно выбора того или иного значения массы M_W таких «промежуточных бозонов», а имеющиеся экспериментальные данные позволяют лишь заключить, что масса таких квантов, если они существуют, должна удовлетворять неравенству $M_W > 2M_{\text{нукл}}$. (Обзор теории промежуточных бозонов с указанием экспериментальных работ дается в статье [286].) Существование промежуточного поля означало бы, что радиус взаимодействия между нуклонами и лептонами по порядку величины равен $\hbar/M_W c$. Но такое поле недостаточно влияло бы на величину матричных элементов ядерного β -распада, поскольку импульс, передаваемый в таких процессах, очень мал по сравнению с $M_W c$.

Адронный ток; ядерные силы, нарушающие четность

Адронный член тока состоит из части, сохраняющей странность, и из части, нарушающей последнюю. Поэтому третий член в формуле (3.181) содержит как взаимодействие, сохраняющее странность, так и взаимодействие, нарушающее

ре. Примеры последнего взаимодействия приведены в начале данного параграфа. Так, выражение (3.181) вносит вклад в силы, действующие между двумя нуклонами. Хотя эти силы очень малы ($\sim 10^{-6}$) по сравнению с основными составляющими взаимодействия нуклонов, они обладают специфическими свойствами. Эти силы нарушают \mathcal{P} -симметрию и поэтому приводят в ядерных состояниях к небольшой примеси состояний другой четности.

Взаимодействие, которое ответственно за β -распад [второй член в формуле (3.181)], взятое во втором порядке теории возмущений, также приводит к нуклонным силам, нарушающим четность. Но эти силы составляют лишь 10^{-12} от членов сильного взаимодействия, и поэтому в данном случае ими можно пренебречь, хотя следует помнить, что для лептонного тока с точечной структурой взаимодействие во втором порядке теории возмущений расходится. Поэтому обнаружение примеси состояний другой четности порядка 10^{-6} можно рассматривать как серьезное подтверждение предположений, лежащих в основе формулы (3.181). Данные о наличии таких примесей приводятся в примерах к § 2 в гл. 1.

Лептонный ток, закон сохранения лептонов

4-векторный характер слабого взаимодействия подтверждается главным образом изучением лептонных процессов, в частности ядерного β -распада. Анализ угловой и спиновой корреляций испускаемой лептонной пары (e , v_e) показывает, что по крайней мере в первом приближении взаимодействие лептонов характеризуется 4-векторным током, билинейным относительно лептонных полей, взятых в одной и той же пространственно-временной точке. Это взаимодействие сопровождается появлением пейтрино с отрицательной спиральностью ($h = s \cdot p = -1/2$) и антинейтрино с положительной спиральностью (теория двухкомпонентного нейтрино). Таким образом, лептонный ток представляет собой комбинацию полярного векторного и аксиально-векторного токов. (Экспериментальные данные, относящиеся к вопросу о взаимодействии лептонов, см., например, в работе [286].)

Из предположения о взаимодействии вида (3.181) следует ряд пока еще не обнаруженных процессов слабого взаимодействия лептонов, таких, как упругое нейтрино-электронное рассеяние ($\bar{v}_e + e^- \rightarrow \bar{v}_e + e^-$) и связанная с ним анигилия электрон-позитронной пары ($e^- + e^+ \rightarrow v_e + \bar{v}_e$), которая может играть важную роль при определении масштаба времени для эволюции очень горячих звезд (см., например, работу [169]).

Лептонный ток подчиняется законам сохранения лептонов, которые выражаются в сохранении числа электронных лептонов $N(e^-) + N(v_e) - N(e^+) - N(\bar{v}_e)$ и мюонных лептонов $N(\mu^-) + N(v_\mu) - N(\mu^+) - N(\bar{v}_\mu)$.

Закон сохранения электронных лептонов доказывается тем, что все попытки обнаружить некоторые процессы, вызываемые нейтрино, такие, как $\bar{v}_e + n \rightarrow p + e^-$ или двойной β -распад без испускания нейтрино, т. е. $(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + e^- + e^-$, не дали результата. Двойной β -распад может происходить более медленным путем, а именно: $(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + e^- + e^- + v_e + \bar{v}_e$. В этом случае вероятность процесса должна быть ниже существующего в настоящее время предела для прямых измерений. Обзор современных данных, подтверждающих закон сохранения лептонов, а также анализ вопроса о соответствии между этим законом сохранения и двухнейтриноной теорией см. в работе [286]. Относительно более поздних исследований двойного β -распада ядра ^{46}Ca см. работу [19]. Экспериментальные данные, свидетельствующие о двойном β -распаде в ядре ^{130}Te с временем жизни около 10^{21} лет были получены путем анализа содержания ^{130}Xe в природном теллуре [263]. Такое время жизни по порядку величины совпадает с временем жизни, полученным теоретически для двойного β -распада с испусканием двух нейтрино в предположении, что с высокой степенью точности выполняется закон сохранения лептонов.

В результате исследования процессов, в которых участвуют мюонные нейтрино высокой энергии (возникающие при $\pi \rightarrow \mu$ -распаде), находят нижний предел для сечения таких реакций, как $\bar{\nu}_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$, и тем самым проверяют закон сохранения мюонных лептонов (см. обзор [33]).

Предположение о существовании двух разных типов нейтрино, один из которых связан с электронами, а другой с мюонами, было выдвинуто потому, что при взаимодействии нейтрило, возникших при $\pi \rightarrow \mu$ -распаде с ядрами, возникают не электроны, а μ -мезоны. (Обзор этих экспериментов см., например, в работе [468].)

Раздельное сохранение электронных и мюонных лептонов означает, что лептонный ток представляет собой сумму двух частей, содержащих отдельно пары (e, ν_e) и (μ, ν_μ) . Установлено, что структура обеих частей тока одинакова. Экспериментальное доказательство этого вытекает из сравнения процессов μ -захвата и β -распада, а также из изучения процессов распада, в которых конкурируют лептонные пары (e, ν_e) и (μ, ν_μ) . (См., например, работу, в которой определялось отношение вероятностей для процессов $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ и $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ [129].)

На основании большой теоретической скорости образования нейтрино в недрах звезд и малого сечения их взаимодействия с веществом было высказано предположение о большой плотности нейтронов во Вселенной [495]. Эти нейтрино могут вызывать такие реакции, как реакция $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$, оказывающая влияние на времена жизни и спектры β -радиоактивных ядер. Но тем обстоятельством, что еще не было обнаружено никаких эффектов такого рода, накладываетя верхний предел на поток космических нейтрино. О космологическом значении подобных выводов говорится в работах [444, 445].

2. Свойства симметрии β -тока

В результате изучения процессов слабого взаимодействия был установлен ряд соотношений симметрии, которыми частично определяется структура β -тока. В этой области в последние годы проводилось очень много исследований и было обнаружено много интересного. Но следует иметь в виду, что многие соотношения, которые рассматриваются ниже, хотя и не противоречат имеющимся данным, еще не были тщательно проверены экспериментально.

Обозначим часть тока, вызывающую ядерные превращения (т. е. часть адронного тока, сохраняющую странность), через

$$j_\mu^\beta(r) = (\rho^\beta(r), \mathbf{j}^\beta(r)). \quad (3.182)$$

Четырехмерный вектор тока выражается через плотность заряда и трехмерный вектор тока, как и в случае электромагнитного взаимодействия. Следуя принятому обозначению, мы опустили в формуле (3.182) множитель c , который имеется в аналогичном выражении (3.132).

Симметрия отражения

Слабые взаимодействия нарушают \mathcal{P} -инвариантность (см. гл. 1, § 2). Поэтому ток (3.182) равен комбинации полярного и аксиального векторов

$$(\rho^\beta, \mathbf{j}^\beta) = (\rho_V, \mathbf{j}_V) + (\rho_A, \mathbf{j}_A), \quad (3.183)$$

обладающих противоположными симметриями отражения [см. формулу (1.202)]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\rho_V(r), \mathbf{j}_V(r)) \mathcal{P}^{-1} &= (\rho_V(-r), -\mathbf{j}_V(-r)), \\ \mathcal{P}(\rho_A(r), \mathbf{j}_A(r)) \mathcal{P}^{-1} &= (-\rho_A(-r), \mathbf{j}_A(-r)). \end{aligned} \quad (3.184)$$

Экспериментальные данные о β -распаде согласуются с предположением о том, что слабые взаимодействия инвариантны относительно обращения времени (см. гл. 4, § 2). При этом β -ток по аналогии с соотношением (3.134) для электромагнитного тока преобразуется в соответствии с равенством

$$\mathcal{F}(\rho^\beta(\mathbf{r}), \mathbf{j}^\beta(\mathbf{r})) \mathcal{F}^{-1} = (\rho^\beta(\mathbf{r}), -\mathbf{j}^\beta(\mathbf{r})). \quad (3.185)$$

(См., однако, данные о распаде K^0 -мезона, которые могут указывать на частичное нарушение инвариантности относительно обращения времени в процессах распада, вызванных слабым взаимодействием.)

Зарядовая симметрия

Оператор j_μ^β преобразует нейтрон в протон, и его квантовое число, связанное с вращением вокруг оси z в изопространстве, есть $\mu_t = -1$. Точно так же для эрмитово-сопряженного оператора $(j_\mu^\beta)^\dagger$ квантовое число $\mu_t = +1$ ¹⁾. Знак числа μ_t можно также изменить действием оператора зарядовой симметрии \mathcal{H}_t . Поэтому мы можем характеризовать β -ток законом его преобразования под действием комбинации операций \mathcal{C}_t и эрмитова сопряжения. Имеющиеся данные согласуются с предположением о нечетности β -тока относительно этого преобразования:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t(\rho^\beta, \mathbf{j}^\beta) \mathcal{H}_t^{-1} &= -(\rho^\beta, \mathbf{j}^\beta)^\dagger, \\ \mathcal{H}_t &= \exp \{-i\pi T_y\}. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Ниже будет показано, что составляющие тока j_μ^β с иным свойством преобразования не вносят вклада в разрешенный β -распад, а имеющиеся данные не позволяют определить возможную величину таких составляющих тока.

Из соотношений (3.185) и (3.186) можно также скомбинировать преобразование, осуществляемое операцией $\mathcal{F} = \mathcal{H}_t \mathcal{F}$ [см. формулу (4.243)]:

$$\mathcal{F}(\rho^\beta, \mathbf{j}^\beta) \mathcal{F}^{-1} = (-\rho^\beta, \mathbf{j}^\beta)^\dagger \quad (3.187)$$

Свойства симметрии (3.186) и (3.187) обычно рассматриваются с точки зрения преобразования G , которое соответствует произведению операторов зарядовой симметрии \mathcal{H}_t и зарядового сопряжения \mathcal{C} (см., например, работу [443]). На основании G -инвариантности можно установить связь между матричными элементами β -тока для нуклонов и антинуклонов. Но если, кроме того, предположить наличие \mathcal{FCF} -инвариантности, которая подразумевается в локальной релятивистской теории (см. примеры к § 2 гл. 1), то мы получим ограничения на нуклонные матричные элементы. Таким образом, \mathcal{FCF} -инвариантность означает, что любое векторное поле $F_\mu(\mathbf{r})$ под действием операции \mathcal{FCF} преобразуется в поле $-F_\mu^\dagger(-\mathbf{r})$. Поэтому соотношения (3.184) и (3.187) вместе с \mathcal{FCF} -симметрией эквивалентны предположению о том, что ток $(j_V)_\mu$ инвариантен относительно операции G , тогда как ток $(j_A)_\mu$ изменяет знак.

Сохранение векторного тока

Замечательной особенностью вектора тока в β -распаде является то, что полный «заряд» векторного перехода при распаде нуклона (нейтрон \rightarrow протон), а именно

$$\langle p | Q_V | n \rangle = g_V, \quad Q_V \equiv \int \rho_V(\mathbf{r}) d\tau, \quad (3.188)$$

¹⁾ В целях единства мы приписываем значения $m_t = +1/2$ нейtronам и $m_t = -1/2$ протонам, противоположные обычным значениям этих квантовых чисел в физике элементарных частиц.

очень близок к соответствующей величине для μ -распада (количественное сравнение проводится ниже). Учитывая сложную внутреннюю структуру рассматриваемых частиц, можно полагать, что постоянство зарядов при переходе связано с действием принципов инвариантности.

Такое же соотношение, как хорошо известно, применимо и к электромагнитному взаимодействию и соответствует постоянству электрического заряда $Q^{\text{эл}}$ для разных заряженных частиц. Это обстоятельство обычно связывают с двумя основными свойствами электромагнитного взаимодействия. Одно из них — уравнение непрерывности (3.133). В силу такого закона сохранения полный заряд частицы не изменяется из-за сложности ее внутренней структуры. Например, присутствие в ядре виртуальных мезонов оставляет заряд неизменным. (Само электромагнитное взаимодействие из-за своего длиноподействующего характера может сместить заряд в бесконечность и привести тем самым к перенормировке заряда, что аналогично перенормировке заряда частицы в диэлектрической среде. Но перенормировочный множитель одинаков для всех заряженных частиц, и поэтому утверждение о постоянстве заряда остается справедливым.)

Кроме того, электромагнитные явления, по-видимому, подчиняются принципу универсальности, согласно которому все «первичные» частицы должны иметь одинаковый заряд (или кратный ему).

Итак, из наблюдающегося экспериментально равенства зарядов при β -переходах следует, что вектор тока в β -распаде подчиняется уравнению непрерывности и принципу универсальности. Интересная гипотеза [165], охватывающая эти соотношения, основана на предположении о глубокой взаимосвязи между векторами токов при β -взаимодействии и при электромагнитном взаимодействии. Адронная часть электромагнитного тока состоит из изоскалярной и изовекторной компонент. С точностью до нормировочных множителей эти компоненты равны плотностям заряда и тока гиперзаряда Y и изоспина T_z . (Заряд Q равен величине $1/2 Y - T_z$, умноженной на константу электромагнитного взаимодействия e [см. формулу (1.62)].) Точно так же вектор β -тока (и его эрмитово-сопряженный вектор) можно рассматривать как плотность заряда и плотность тока изоспиновых компонент T_{\mp} , умноженных на векторную константу взаимодействия g_V . Предполагаемое соотношение можно выразить в форме

$$(i_V)_\mu = -\frac{g_V}{e} [T_x - iT_y, j_\mu^{\text{эл}}]. \quad (3.189)$$

Изоскалярная часть тока $j^{\text{эл}}$ (и его лептонная часть) коммутирует с изоспином T и, следовательно, не дает вклада в выражение (3.189). (Мы пренебрегли множителем c в трехмерном токе в формуле (3.189), который возникает вследствие различий в принятых нормировках токов.) Для полного заряда перехода Q_V из формул (3.188) и (3.189) получаем

$$Q_V = -\frac{g_V}{e} [T_x - iT_y, Q^{\text{эл}}] = g_V (T_x - iT_y) \quad (3.190)$$

Связь между зарядом перехода Q_V и изоспином была проверена на большом числе различных изоспиновых триплетов ($T = 1$) со спином $I = 0$ в адронном спектре (ядерные изобарические переходы и распад $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$, см. фиг. 1.10). Было найдено, что константа взаимодействия g_V с точностью до нескольких процентов согласуется с константой взаимодействия для μ -распада, т. е. $(g_V)_\mu - (g_V)_{\text{нукл}} \approx 0,02 g_V$ [173]. Интерпретация этой небольшой разности проводится в следующем пункте. Справедливость соотношения (3.189) подтверждается также и при определении момента β -перехода, соответствующего магнитному дипольному моменту (слабый магнетизм, см. ниже).

В случае аксиально-векторного распада ядра константа взаимодействия g_A , как установлено, примерно на 20% отличается от соответствующего заряда

перехода при μ -распаде. Разность зарядов аксиально-векторных переходов можно отнести за счет перенормировочных эффектов, вызванных сильными взаимодействиями. Эту разность можно связать с другими процессами, которые обусловлены такими взаимодействиями [1, 446].

Нарушение уравнения непрерывности электромагнитными взаимодействиями

Если пренебречь влиянием электромагнитных взаимодействий на системы адронов (и предположить изоспиновую инвариантность сильных взаимодействий) то из соотношений (3.189) и (3.133) получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} (j_V)_\mu = \nabla \cdot j_V + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0. \quad (3.191)$$

Но этот закон сохранения нарушается электромагнитными взаимодействиями. Можно получить модифицированное уравнение непрерывности, если считать, что всегда выполняется соотношение (3.189). Если в пренебрежении слабыми взаимодействиями гамильтониан записать в виде $H = H^0 + H^{\text{эл}}$, где H^0 коммутирует с T , то мы получим

$$\begin{aligned} \nabla \cdot j_V + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho_V}{\partial t} &= -\frac{g_V}{e} [T_x - iT_y, \nabla \cdot j^{\text{эл}}] - \frac{g_V}{ec} \frac{\partial}{\partial t} [T_x - iT_y, \rho^{\text{эл}}] = \\ &= \frac{ig_V}{ehc} [[T_x - iT_y, H^{\text{эл}}], \rho^{\text{эл}}]. \end{aligned} \quad (3.192)$$

Ток, нарушающий странность (SU_3 -симметрия)

Можно попытаться связать части адронного тока, нарушающие и сохраняющие странность, в рамках схемы SU_3 -симметрии для сильных взаимодействий.

Ток, сохраняющий странность, и его эрмитово-сопряженный ток характеризуются теми же квантовыми числами (T , M_T , S и A), что и π^+ - и π^- -мезоны. Поэтому можно предсказать существование октета слабых токов, соответствующего октету псевдоскалярных мезонов (π^\pm , π^0 , (K^+, K^0) , (K^-, \bar{K}^0) и η). Такой октетный ток также содержит составляющие, ответственные за нарушение странности, с теми же самыми квантовыми числами, что K^+ - и K^- -мезоны. (Экспериментальных доказательств существования нейтральных токов пока еще нет.)

Когда мы хотим применить принцип универсальности к адронному току, возникает вопрос: каждый ли член октета обладает полной универсальной «силой» или же это есть некоторая мера полного адронного тока, который следует приравнять «силе» лептонного тока, как в μ -распаде?

Экспериментальные данные указывают на то, что в случае лептонных распадов, в которых странность нарушается, взаимодействие значительно слабее, нежели в случае переходов, в которых странность сохраняется. Например, величина f_t для лептонного распада Λ -гиперона ($\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) оказалась на порядок больше величины f_t для распада нейтрона. Поэтому было выдвинуто предположение [82], что эта величина представляет собой сумму квадратов адронных констант взаимодействия и равна некой универсальной величине. Таким образом, для полного адронного тока запишем

$$(j_\mu)_{\text{адр}} = j_\mu (\Delta S = 0) \cos \vartheta + j_\mu (\Delta S = 1) \sin \vartheta, \quad (3.193)$$

где компоненты $j (\Delta S = 0)$ и $j (\Delta S = 1)$ (и их эрмитово-сопряженные величины) при SU_3 -преобразованиях ведут себя как π^+ - и K^+ - (и π^- и K^-) компоненты унитарного октета. Взяв ток вида (3.193), можно получить приближенную теорию всех лептонных распадов баронов и мезонов. Наилучшее согласие с экспери-

ментальными данными получается, если угловой параметр ϑ для векторного и аксиально-векторного токов имеет значения $\vartheta_V = 0,21$ и $\vartheta_A = 0,27$ (см., например, работу [66]).

Формулировка принципа универсальности, приводящая к выражению (3.193), означает, что заряд векторного перехода для распада нейтрона, который в формуле (3.188) обозначен через g_V , сравним с величиной $\cos \vartheta_V (g_V)_\mu = -0,98 (g_V)_\mu$, где $(g_V)_\mu$ — векторная константа взаимодействия для μ -распада. Как мы видим, знак и величина этой поправки позволяют объяснить небольшое расхождение, которое было указано выше. Отметим, однако, возможную неточность в оценках радиационных поправок к β -распаду, которые использовались при определении величины $(g_V)_{\text{нукл}}$. Эти поправки составляют несколько процентов. (Этот вопрос рассматривается, например, в работе [286]. Вопрос о вычислении этих поправок по экспериментально измеренным формфакторам рассматривается в работе [257].)

3. Нерелятивистская форма β -тока

Здесь мы рассмотрим форму β -тока для индивидуальных нуклонов. Как и в случае электромагнитного тока, мы ограничимся нерелятивистским приближением, справедливым до первого порядка по скорости нуклонов, и будем учитывать только члены, линейные относительно размера нуклона. Для системы нуклонов взаимодействия могут изменять свойства частиц и тем самым приводить к появлению в выражении для β -тока членов, которые зависят от координат двух или нескольких нуклонов. (См. все, что говорится в приложении 3, п. 6, об аналогичных членах, входящих в электромагнитный ток.) Пока еще имеется мало данных относительно структуры и значения этих членов в выражении для β -тока, и поэтому мы ограничимся обсуждением β -тока для свободных нуклонов. (Вопрос об общем виде нерелятивистского β -тока для свободных нуклонов так же, как и для нуклонов, движущихся в ядерной материи, рассматривается на основе принципов инвариантности в работе [462]; см. также соответствующую формулировку в работе [412].)

В качестве первого этапа мы рассмотрим наиболее общий вид членов, зависящих от скорости и характеризующих плотность заряда и плотность тока, связанные с отдельным нуклоном. Основные члены, которые не зависят от размеров нуклона, таковы:

$$\rho_V = g_V t_- (k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h), \\ j_A = g_A t_- (k) \sigma_h \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h), \quad (3.194)$$

где g_V и g_A — векторная и аксиально-векторная константы взаимодействия. Координаты нуклона отмечены индексом h . Оператор $t_- = t_x - it_y = \frac{1}{2}\tau_-$ преобразует нейтрон в протон, причем соответствующий матричный элемент $\langle p | t_- | n \rangle = 1$. (Мы выражаем спин нуклона через спиновый вектор Паули $\sigma = 2s$, как это принято в теории β -распада.)

Вследствие \mathcal{T} -инвариантности [формула (3.185)] константы g_V и g_A должны быть вещественными величинами. Тогда члены в формуле (3.194) также удовлетворяют соотношению \mathcal{T} -инвариантности (3.187). [\mathcal{T} -преобразование представляет собой комбинацию зарядовой симметрии и обращения времени, и мы имеем $\mathcal{T}t_- \mathcal{T}^{-1} = t_-$, так как t_y — чисто мнимая матрица, а $\mathcal{T}t_x (t_x - it_y) \mathcal{T}^{-1} = -t_x - it_y = -t_+ = -t_-$.]

К возможным членам, линейным относительно размеров нуклона и не зависящим от его скорости, относятся величины

$$\rho_A = i \frac{g_A \hbar}{2M_c} t_- (k) \alpha_1 \sigma_h \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h), \quad (3.495)$$

$$j_V = \frac{g_V \hbar}{2M_c} t_- (k) \{ \mu_\beta (\nabla \times \sigma_h) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h) + i \alpha_2 \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h) \}.$$

В эти выражения входят три новые безразмерные величины α_1 , α_2 и μ_β . Член, пропорциональный μ_β , представляет собой аналог магнитного момента в формуле (3.151). При соответствующем выборе множителей в выражениях (3.195) \mathcal{T} -инвариантность означает вещественность всех трех параметров α_1 , α_2 и μ_β . Для преобразования же \mathcal{R}_τ (3.186) необходимо, чтобы 4-вектор плотности тока был эрмитовым с точностью до множителя t_- и, следовательно, чтобы параметры α_1 и α_2 были мнимыми (а параметр μ_β — вещественным). Таким образом, из требования \mathcal{T} - и \mathcal{R}_τ - (или \mathcal{F} -)инвариантности одновременно следует, что $\alpha_1 = -\alpha_2 = 0$. Поэтому в выражении (3.195) обычно опускают члены, пропорциональные α_1 и α_2 , хотя прямых экспериментальных данных об их величине недостаточно.

Из не зависящих от скорости членов, входящих в 4-вектор плотности тока, можно получить члены, пропорциональные v_h , учитывая 4-векторный характер тока $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Если перейти к координатной системе \mathcal{K}' , движущейся со скоростью $\mathbf{u} = v_h$ относительно лабораторной системы и такой, что в системе \mathcal{K}' нуклон находится в состоянии покоя, то в первом порядке по u/c будем иметь

$$\begin{aligned} \rho(v_h = u) &= \rho(v_h = 0) + \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{j}(v_h = 0), \\ \mathbf{j}(v_h = u) &= \mathbf{j}(v_h = 0) + \frac{\mathbf{u}}{c} \rho(v_h = 0). \end{aligned} \quad (3.196)$$

Пренебрегая членами, содержащими как v_h , так и производные ∇ , и опуская члены, пропорциональные α_1 и α_2 в (3.196), для системы свободных нуклонов получаем

$$\begin{aligned} \rho_V &= g_V \sum_h t_-(k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h), \\ \rho_A &= g_A \sum_h t_-(k) \frac{1}{2c} [\sigma_h \cdot \mathbf{v}_h \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h) \sigma_h \cdot \mathbf{v}_h], \\ j_V &= g_V \sum_h t_-(k) \left\{ \frac{1}{2c} [\mathbf{v}_h \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h) \mathbf{v}_h] + \frac{\hbar}{2Mc} \mu_\beta \nabla \times \sigma_h \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h) \right\}, \\ j_A &= g_A \sum_h t_-(k) \sigma_h \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h). \end{aligned} \quad (3.197)$$

Так же, как и в формулах (3.151), мы здесь симметризовали члены, содержащие скорость v_h , для того, чтобы при эрмитовом сопряжении выполнялось соотношение (3.186). (Разница между симметризованными и несимметризованными членами эквивалентна члену с производной, который не зависит от скорости v_h , и, следовательно, эквивалентна дополнительным членам, аналогичным членам в (3.195), которые пропорциональны α_1 и α_2 .)

Чтобы было яснее различие между оператором скорости v_h (собственные значения которого в β -процессах несколько изменяются) и скоростью u , которая представляет собой c -число, рассмотрим преобразование (3.196) с большей точностью. Плотность заряда ρ и плотность тока \mathbf{j} — это операторы, которые зависят как от координат точки пространства \mathbf{r} , так и от переменных нуклона. Трансляционная инвариантность означает, что $\rho = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{s}_h)$ и $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{s}_h)$. При переходе путем преобразования Лоренца к координатной системе \mathcal{K}' , движущейся со скоростью u относительно системы \mathcal{K} , величины ρ и \mathbf{j} можно рассматривать как поле 4-вектора [см. соответствующее выражение (1.200)] со следующими законами преобразования в первом порядке по

величине u/c :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{-1} \rho(\mathbf{r}) \mathcal{U} &= \rho(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}), \\ \mathcal{U}^{-1} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathcal{U} &= \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{u}}{c} \rho(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (3.198)$$

(Достаточно рассмотреть преобразование при $t=0$, когда системы \mathcal{K} и \mathcal{K}' совпадают друг с другом.) Плотность заряда ρ и плотность тока \mathbf{j} можно также рассматривать как функции переменных частицы, и тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{U} \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_k) \mathcal{U}^{-1} &= \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k - \mathbf{u}, \mathbf{s}_k), \\ \mathcal{U} \mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_k) \mathcal{U}^{-1} &= \mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k - \mathbf{u}, \mathbf{s}_k),\end{aligned}\quad (3.199)$$

поскольку в первом порядке по \mathbf{u} координаты частицы подчиняются преобразованию Галилея [см. формулу (1.13)]. Выполнив сначала преобразование (3.198), а затем преобразование (3.199), получаем искомые соотношения:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_k) &= \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k - \mathbf{u}, \mathbf{s}_k) + \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k - \mathbf{u}, \mathbf{s}_k), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_k) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k - \mathbf{u}, \mathbf{s}_k) + \frac{\mathbf{u}}{c} \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k - \mathbf{u}, \mathbf{s}_k).\end{aligned}\quad (3.200)$$

[Путем аналогичных рассуждений можно вывести выражение $M\mathbf{v}$ для импульса \mathbf{P} исходя из 4-векторного характера величины $(E, c\mathbf{P})$ и из того, что при $\mathbf{v} \rightarrow 0$ мы имеем $E = Mc^2$ и $\mathbf{P} = 0$.]

Как мы видим, 4-вектор плотности тока в выражении (3.197) подчиняется уравнению непрерывности (3.191) при условии, что оператор $t_-(k)$, как и в случае системы свободных нуклонов, не зависит от времени. Форма же (3.197) для плотности тока j_V следует из уравнения непрерывности, так как в формуле (3.195) член, пропорциональный α_2 , нарушает это соотношение. Поэтому для векторного тока в рассматриваемом приближении нельзя провести различия между следствиями $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ -инвариантности и соотношением непрерывности. В случае системы взаимодействующих нуклонов с учетом сил, не зависящих от изospина, производная по времени от $t_-(k)$ должна компенсироваться членами взаимодействия в выражении для тока.

Предполагаемое соотношение между током $(j_V)_\mu$ и электромагнитным 4-вектором тока, которое дается формулой (3.189), выполняется в случае выражений (3.197) при условии, что величина μ_β принимается равной [см. формулу (3.151)].

$$\mu_\beta = \frac{1}{2} [(g_s)_p - (g_s)_n] = 4,7. \quad (3.201)$$

Экспериментальное подтверждение такого значения величины μ_β было получено в результате анализа распадов ядер ^{12}B и ^{12}N .

Значения констант взаимодействия g_V и g_A таковы:

$$\begin{aligned}g_V &= (1,40 \pm 0,02) 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 = \\ &= (1,36 \pm 0,02) 10^{-3} \frac{e^2 \hbar^2}{M_p^2 c^2}. \quad (3.202)\end{aligned}$$

$$\frac{g_A}{g_V} = -1,23 \pm 0,01.$$

Эти значения были найдены по данным измерений времени жизни нейтрона [97], которое зависит от комбинации $g_V^2 + 3g_A^2$ [см. формулу (3.217)], а также по экспериментальным вероятностям распадов $0+ \rightarrow 0+$ внутри триплетов с $T = 1$, которые пропорциональны g_V (фиг. 4.10). Кроме того, анализ поляри-

заций и угловых корреляций для распада поляризованных нейтронов показал, что отношение g_A/g_V приближенно вещественно (чем доказывается предполагаемая инвариантность относительно обращения времени) и должно быть отрицательным. (Обзор данных о константах взаимодействия для β -распада см. в работах [267, 286].)

Можно полагать, что рассматриваемый здесь β -ток применим не только в случае процессов, содержащих (e, v_e) , но и в случае процессов, в которых участвует пара (μ, v_μ) , хотя еще слишком мало данных, чтобы проверить это следствие предполагаемого взаимодействия (3.181). В тех ядерных процессах, в которых участвуют μ -мезоны, например захват μ -мезона, передаваемый импульс обычно намного больше, чем в процессах β -распада, и поэтому может оказаться необходимым ввести в выражение для тока члены более высокого порядка относительно начальной и конечной скоростей (*т. е.* v и ∇), чем те, которые были включены в (3.197). К таким членам относится так называемое индуцированное псевдоскалярное взаимодействие. (Обзор данных о взаимодействии μ -мезонов с нуклонами см. в работе [286]; см. также статьи [368, 481, 168].)

При включении членов более высокого порядка в выражение для размера нуклона β -ток можно выразить через формфакторы, аналогичные тем формфакторам, которыми характеризуется электромагнитная структура нуклонов. Соотношение (3.189) означает, что формфакторы векторного β -тока такие же, как изовекторные формфакторы электромагнитного тока, которые рассматривались в приложении 3 к п. 4.

4. Мультипольные моменты

Взаимодействие (3.181) содержит скалярную и векторную части (в смысле пространственных вращений) и может быть разложено на мультипольные составляющие, как говорилось в гл. 1, приложение 1, п. 8. Ядерные мультипольные матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_{V,A}, \lambda\mu) &= \int a_\lambda(r) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) p_{V,A}(r) d\tau, \\ \mathcal{M}(j_{V,A}, \kappa\lambda\mu) &= \int b_{\kappa\lambda}(r) [Y_\kappa(\hat{r}) j_{V,A}(r)]_{(\kappa)\lambda\mu} d\tau, \end{aligned} \quad (3.203)$$

где радиальные функции $a_\lambda(r)$ и $b_{\kappa\lambda}(r)$ зависят от импульсов и поляризации испущенных (или поглощенных) лептонов. Если пренебречь влиянием кулоновского поля ядра на движение электрона, то функции a_λ и $b_{\kappa\lambda}$ сводятся к сферическим функциям Бесселя j_λ и j_κ , как и в электромагнитном случае [см. формулу (3.137)].

Функции $a_\lambda(r)$ и $b_{\kappa\lambda}(r)$ можно получить из решения уравнения Дирака в кулоновском поле ядра. В первом приближении можно разложить величины a_λ и $b_{\kappa\lambda}$ в ряд при малых r :

$$\begin{aligned} a_\lambda(r) &= r^\lambda \left(1 + \alpha_\lambda \frac{r^2}{R^2} + \dots \right), \\ b_{\kappa\lambda}(r) &= r^\kappa \left(1 + \beta_{\kappa\lambda} \frac{r^2}{R^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.204)$$

Здесь выбрана такая нормировка радиальных функций, при которой коэффициент при основных членах равен единице. Разложение (3.204) аналогично разложению (3.143). Но кулоновское поле может значительно увеличить волновое число электронов в области ядра и величины α и β для самых тяжелых ядер могут составлять самое большое 0,2. (См. примеры к § 4, а также цитируемые там работы.)

Моменты (3.203) относятся к β^- -процессам. Для процессов β^+ -распада и захвата электрона соответствующие моменты содержат эрмитово-сопряженные плотности заряда и тока, которые получаются путем замены оператора t_- опера-

тором t_+ в выражении для тока j^B . Радиальные множители для процессов β^- , β^+ -распадов и захвата электрона неодинаковы.

Если в разложениях (3.204) оставить только главные члены, то мультипольные моменты примут вид

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\rho_{V,A}, \lambda\mu) &= \int r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \rho_{V,A}(r) d\tau, \\ \mathcal{M}(j_{V,A}, \kappa\lambda\mu) &= \int_{(\pm 1)} r^\kappa [Y_\kappa(\hat{\mathbf{r}}) j_{V,A}(r)] d\tau.\end{aligned}\quad (3.205)$$

Из соотношений (3.184) и (3.185) видно, что у этих моментов следующие квантовые числа четности:

$$\pi = \begin{cases} (-1)^\lambda & \rho_V, \\ (-1)^{\lambda+1} & \rho_A, \\ (-1)^{\kappa+1} & j_V, \\ (-1)^\kappa & j_A \end{cases} \quad (3.206)$$

и следующие фазы относительно обращения времени:

$$c_{\mathcal{J}} = \begin{cases} (-1)^\lambda & \rho_{V,A}, \\ (-1)^{\kappa+1} & j_{V,A}. \end{cases} \quad (3.207)$$

Хотя в данный переход вносит вклад большое число мультипольных моментов, основные эффекты обычно определяются небольшим числом членов. Относительный вклад различных моментов зависит как от лептонных, так и от ядерных матричных элементов. Величина матричного элемента перехода, связанного с данным мультипольным моментом, отчасти характеризуется наименьшей степенью r в выражении для плотности мультиполия [λ для $\mathcal{M}(\rho, \lambda)$ и κ для $\mathcal{M}(j, \kappa\lambda)$]. Каждый дополнительный множитель r уменьшает полный матричный элемент в число раз по порядку величины, равное радиусу ядра R , умноженному на волновое число лептонов (вне ядра). Кроме того, ядерные моменты, связанные с ρ_A и j_V , отличаются от моментов, связанных с ρ_V и j_A , множителем v/c или множителем $\mu_B v/c$, если в выражении для тока j_V имеется член, содержащий спиновый магнитный момент [см. формулы (3.197)].

Переходы принято классифицировать по порядку их запрещенности n , т. е. по сумме степеней r и v , с которыми они входят в мультипольный момент (если считать, что спиновая часть тока j_V сравнима с орбитальной частью). При этом изменение четностей всегда равно $\pi = (-1)^n$. При заданных π и $\Delta I = I_i - I_f$ основной вклад вносят моменты

$$\begin{aligned}\pi &= (-1)^{\Delta I}, \\ \rho_V; \quad \lambda &= \Delta I, \\ j_V; \quad \kappa &= \Delta I - 1, \quad \lambda = \Delta I \quad (\Delta I \neq 0) \\ j_A; \quad \kappa &= \Delta I, \quad \lambda = \Delta I \quad (\Delta I \neq 0) \\ j_A; \quad \kappa &= \Delta I, \quad \lambda = \Delta I + 1, \\ \pi &= (-1)^{\Delta I+1} \quad (\Delta I \neq 0), \\ j_A; \quad \kappa &= \Delta I - 1, \quad \lambda = \Delta I, \quad n = \Delta I - 1, \\ \pi &= -1, \quad \Delta I = 0, \\ \rho_A; \quad \lambda &= 0 \\ \rho_V; \quad \lambda &= 1 \\ j_V; \quad \kappa &= 0, \quad \lambda = 1 \\ j_A; \quad \kappa &= 1, \quad \lambda = 0, \quad 1 \text{ и } 2\end{aligned}\quad \left. \right\} n = 1. \quad (3.208)$$

Хотя эти перечисленные члены обычно ответственны за основную долю вероятности перехода, существенный вклад могут вносить и дополнительные члены, в частности, тогда, когда основные ядерные матричные элементы малы в силу особенностей структуры состояний. Если прибегнуть к помощи операторов заряда и тока (3.197), то приближенные выражения для мультипольных моментов (3.205) примут вид

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\rho_V, \lambda\mu) &= g_V \sum_k t_-(k) r_h^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_h), \\ \mathcal{M}(j_A, \kappa\lambda\mu) &= g_A \sum_k t_-(k) r_h^\kappa [Y_\kappa(\hat{\mathbf{r}}_h) \sigma_h]_{\lambda\mu}, \\ \mathcal{M}(\rho_A, \kappa\lambda\mu) &= \frac{g_A}{c} \sum_k t_-(k) (\sigma_h \cdot \mathbf{v}_h) r_h^\lambda Y_{\lambda\mu}(\mathbf{r}_h).\end{aligned}\quad (3.209)$$

При вычислении моментов $\mathcal{M}(j_V, \kappa\lambda\mu)$ с $\kappa=\lambda-1$ можно воспользоваться уравнением непрерывности [178, 141, 116]. С учетом соотношений (1.129) для неприводимых тензорных операторов получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(j_V, \kappa=\lambda-1, \lambda\mu) &= [\lambda(2\lambda+1)]^{-1/2} \int (j_V \cdot \nabla) r_h^\lambda Y_{\lambda\mu} d\tau = \\ &= -[\lambda(2\lambda+1)]^{-1/2} \int (\nabla \cdot j_V) r_h^\lambda Y_{\lambda\mu} d\tau,\end{aligned}\quad (3.210)$$

где дивергенцию тока j_V в силу уравнения непрерывности (3.192) можно выразить через плотность ρ_V . Если $H^{\text{эл}}$ аппроксимировать кулоновским взаимодействием между протонами в ядре, то (поскольку $H^{\text{эл}}$ коммутирует с $\rho^{\text{эл}}$) получим, что

$$\begin{aligned}\nabla \cdot j_V &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \frac{ig_V}{e\hbar c} [[T_x - iT_y, \rho^{\text{эл}}], H^{\text{эл}}] = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \frac{i}{\hbar c} [H^{\text{эл}}, \rho_V] = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \frac{ieg_V}{\hbar c} \sum_k t_-(k) \Phi_{\text{кул}}(\mathbf{r}_h) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h).\end{aligned}\quad (3.211)$$

В последней строке мы для ρ_V воспользовались выражением (3.197) и предположили, что основной эффект гамильтониана $H^{\text{эл}}$ связан со средним кулоновским полем $\Phi_{\text{кул}}$. Можно также вывести модифицированное уравнение (3.211) [435] из принципа минимальности, согласно которому электромагнитное взаимодействие можно получить, заменив производные в таких динамических уравнениях, как (3.191), которые справедливы в отсутствие электромагнетизма, калибровочно-инвариантной производной:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu,$$

где A_μ — 4-вектор потенциала. Из формул (3.210) и (3.211) получаем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(j_V, \kappa=\lambda-1, \lambda\mu) &= -\frac{ig_V}{c\hbar} [\lambda(2\lambda+1)]^{-1/2} \times \\ &\times \sum_k t_-(k) [e\Phi_{\text{кул}}(\mathbf{r}_h) + \Delta E] r_h^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_h),\end{aligned}\quad (3.212)$$

где $\Delta E = E_i - E_f$ — энергия перехода, равная разности масс между начальным i и конечным f состояниями. Соотношение (3.212) относится к β^- -распаду. Для β^+ -распада мультипольный момент получим, изменив знак функции Фокса и заменив оператор t_- оператором t_+ .

Если кулоновскую потенциальную энергию заменить средним значением $\Delta E_{\text{кул}}$, то соотношение (3.212) можно будет записать в виде

$$\mathcal{M}(j_V, \kappa = \lambda - 1, \lambda \mu) = -\frac{i}{\hbar c} [\lambda(2\lambda + 1)]^{-1/2} (\Delta E_{\text{кул}} + E_i - E_f) \mathcal{M}(\rho_V, \lambda \mu). \quad (3.213)$$

Но заметим, что радиальные изменения кулоновского поля могут быть значительными, особенно в тех случаях, когда радиальные волновые функции начального и конечного состояний малы из-за осциляций знака. Например, в случаях, рассмотренных в табл. 3.6, было установлено, что член, содержащий кулоновский потенциал, вследствие радиального изменения Фокса уменьшается и составляет 0,9 прежней величины для ^{207}Tl и 0,3 прежней величины для ^{208}Pb .

В силу изобарической симметрии матричные элементы моментов $\mathcal{M}(j_V, \kappa = \lambda - 1, \lambda \mu)$ и $\mathcal{M}(\rho_V, \lambda \mu)$ для перехода $i \rightarrow f$ связаны с матричными элементами электромагнитных моментов для перехода $i' \rightarrow f$, где i' — изобарический аналог состояния i . Из соотношения (3.189) следует, что отношение двух матричных элементов β -распада равно отношению матричных элементов электромагнитных моментов, которые получаются путем замены величин ρ_V, j_V величинами $\rho^{\text{эл}}, j^{\text{эл}}$ (и константы g_V зарядом e) при условии, что состояния i и i' — точно аналоговые состояния. Тогда, предполагая, что $(M_T)_i = T_i$ и $(M_T)_f = T_f$, имеем

$$\langle f | \mathcal{M}^\beta | i \rangle = -\frac{g_V}{e} \langle f | [T_{-}, \mathcal{M}^{\text{эл}}] | i \rangle = \frac{g_V}{e} (2T_f)^{1/2} \langle f | \mathcal{M}^{\text{эл}} | i' \rangle. \quad (3.214)$$

Электромагнитные моменты, содержащие $j^{\text{эл}}$ и $\rho^{\text{эл}}$, связаны между собой уравнением непрерывности для электромагнитного тока, и поэтому мы получаем соотношение для β -моментов, соответствующее соотношению (3.213), в котором множитель $E_{\text{кул}} + E_i - E_f$ заменен разностью $E'_i - E_f$. Эти две энергии равны друг другу, если $E_{\text{кул}}$ взять в виде разности кулоновских энергий $E'_i - E_i$ между аналоговыми состояниями. Чтобы получить более общее соотношение (3.212), следует включить кулоновское поле, нарушающее изобарическое соотношение между состояниями i и i' . Действительно, разность между $e\Phi_{\text{кул}}(\mathbf{r})$ и его средним значением представляет собой недиагональный эффект по $H^{\text{эл}}$, который искажает ядерные волновые функции.

Можно также попытаться вывести выражение (3.212) непосредственно из выражения (3.197) для тока j_V . Член в выражении для тока j_V , пропорциональный магнитному моменту, не дает вклада в момент (3.210), а член, содержащий v_h , можно преобразовать, пользуясь соотношением

$$\begin{aligned} t_-(k) [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h r_h^\lambda Y_{\lambda \mu}(\hat{\mathbf{r}}_h)]_{\text{симв}} &= t_-(k) \frac{d}{dt} r_h^\lambda Y_{\lambda \mu}(\hat{\mathbf{r}}_h) = \\ &= \frac{d}{dt} [t_-(k) r_h^\lambda Y_{\lambda \mu}(\hat{\mathbf{r}}_h)] - r_h^\lambda Y_{\lambda \mu}(\hat{\mathbf{r}}_h) \frac{d}{dt} t_-(k). \end{aligned} \quad (3.215)$$

Если производная по времени от оператора $t_-(k)$ определяется только кулоновскими силами, действующими на нуклон, то из соотношения (3.215) снова вытекает (3.212). Это соответствует тому, что уравнение непрерывности (3.192) вытекает из соотношений (3.197), если мы имеем дело со свободными нуклонами или если на $t_-(k)$ действуют только электромагнитные силы. Но если присутствуют зарядово-обменные силы, то производная $(d/dt) t_-(k)$ вносит дополнительный вклад и тогда соотношение (3.215) уже не эквивалентно выражению (3.212).

Например, если состояния ядра рассматриваются в одночастичном приближении, то изовекторный член среднего потенциала [потенциал симметрии, см. формулу (2.29)] вносит вклад в производную по времени от величины t_- , которая может быть такой же большой, как и кулоновский потенциал. В этом случае из соотношения непрерывности вытекает наличие в выражении для тока j_V членов взаимодействия, зависящих от координат двух нуклонов и такой величины, которая равна разности выражений (3.12) и (3.125). (Аналогичный член взаимодействия имеется для электромагнитного тока, связанного с зарядово-обменным взаимодействием и силами, зависящими от скорости; см. приложение 3, п. 6.)

Моменты $\mathcal{M}(j_V, \kappa=\lambda, \lambda\mu)$ при $\kappa = \lambda$ аналогичны магнитным мультипольным моментам и могут быть записаны в форме, аналогичной выражению (3.161)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(j_V, \kappa=\lambda, \lambda\mu) &= i \left(\frac{\lambda+1}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{g_V \hbar}{2Mc} \sum_k t_-(k) \left\{ \mu_B \sigma_k + \frac{2}{\lambda+1} I_k \right\} \cdot \nabla_k [r_k^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_k)] = \\ &= -i \left(\frac{\lambda+1}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{g_V}{e} [T_-, \mathcal{M}(M\lambda\mu)]. \end{aligned} \quad (3.216)$$

Моменты $\mathcal{M}(j_V, \kappa=\lambda+1)$ при $\kappa = \lambda+1$ обычно слишком малы, и их не принимают во внимание.

Для ядерных матричных элементов β -распада используется много различных обозначений. В табл. 3.9 приводятся мультипольные моменты, которые были определены выше, и обозначения, встречающиеся в литературе.

Таблица 3.9
ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ β -МОМЕНТОВ

Обозначения, принятые в данной книге	Обозначения Конопинского и Уленбека	Обозначения Конопинского и Роуза
$\mathcal{M}(\rho_V, \lambda=0)$	$C_V \int \mathbf{1}$	$C_V \langle \mathbf{1} \rangle$
$\mathcal{M}(j_A, \kappa=0, \lambda=1)$	$C_A \int \boldsymbol{\sigma}$	$C_A \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$
$\mathcal{M}(j_A, \kappa=1, \lambda=0)$	$-C_A \int \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}$	$-iRC_A \langle i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rangle$
$\mathcal{M}(\rho_A, \lambda=0)$	$-C_A \int \gamma_5$	$-C_A \langle \gamma_5 \rangle$
$\mathcal{M}(\rho_V, \lambda=1)$	$\sqrt{3} C_V \int \mathbf{r}$	$i\sqrt{3} RC_V \langle \hat{\mathbf{r}} \rangle$
$\mathcal{M}(j_V, \kappa=0, \lambda=1)$	$-C_V \int \mathbf{a}$	$C_V \langle \mathbf{a} \rangle$
$\mathcal{M}(j_A, \kappa=1, \lambda=1)$	$-i(3/2)^{1/2} C_A \int \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}$	$-i(3/2)^{1/2} RC_A \langle \boldsymbol{\sigma} \times \hat{\mathbf{r}} \rangle$
$\mathcal{M}(j_A, \kappa=1, \lambda=2)$	$1/2 \sqrt{3} C_A \int B_{ij}$	$i\sqrt{4\pi} RC_A \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{T}_2^1 \rangle$

Во втором столбце приведены обозначения для матричных элементов β -распада, которыми часто пользуются в периодической литературе. В третьем столбце приведены обозначения, введенные Конопинским и Роузом в работе [271]. Вели-

чины, указанные во втором и третьем столбцах, равны приведенным матричным элементам операторов первого столбца, умноженным на $[4\pi/(2I_i + 1)]^{1/2}$, где I_i — спин начального состояния. Обозначения различных авторов часто отличаются друг от друга, помимо прочего, фазовым множителем. Заметим также, что матричные элементы 2-го и 3-го столбцов представляют моменты, вносящие основной вклад, с радиальной зависимостью вида (3.209).

5. Величины $f t$

Абсолютные вероятности переходов для β -распада так же, как энергетический спектр, поляризация и угловая корреляция испускаемых лептонов, зависят от лептонных матричных элементов тока (j_μ)_{леп} в выражении (3.381). Мы лишь приведем выражения для вероятностей переходов в некоторых сравнительно простых случаях β -распада. (Общий обзор теории β -радиоактивности, содержащий различные спектральные и корреляционные функции, см. гл. 19, 22—24 книги [398], а также работы [269, 389, 468].)

Чтобы исключить зависимость вероятности распада от энергии перехода, вероятность перехода для β -распада обычно характеризуют произведением $f t$, в котором t — период полураспада, а f — безразмерная величина, зависящая от заряда ядра, энергии и мультипольности перехода. Эта величина характеризует фазовое пространство для лептонов и поэтому аналогична множителю $(\Delta E)^{2\lambda+1}$ в выражении для вероятности электромагнитного перехода [см. формулу (3.145)]. Функции f — это интегралы по спектрам электронов, и при их вычислении необходимо рассмотреть движение электронов в кулоновском поле ядра и атомных электронов. (Подробно эффект экранировки атомными электронами рассматривается, например, в работах [133, 75].)

В случае разрешенных переходов ($n = 0$) вклад вносят только моменты $\mathcal{M}(\rho_V, \lambda=0)$ и $\mathcal{M}(j_A, \kappa=0, \lambda=1)$, из которых первый называют моментом Ферми, а второй — моментом Гамова — Теллера.

Вероятность перехода можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_0 t [B(F) + B(GT)] &= \frac{\pi^2 \hbar^7 \ln 2}{2m_e^5 c^4} = D \frac{g_V^2}{4\pi}, \\ D &\equiv \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{g_V^2 m_e^5 c^4} = 6250 \text{ сек}, \end{aligned} \quad (3.217)$$

где f_0 — функция f для разрешенных переходов. (Индекс нуль у функции f_0 часто опускают, если не может возникнуть сомнения, что имеется в виду функция f разрешенного перехода.) Приведенные вероятности переходов в формуле (3.217) даются выражениями

$$\begin{aligned} B(F) &= \frac{1}{2I+1} |\langle I \parallel \mathcal{M}(\rho_V, \lambda=0) \parallel I \rangle|^2, \\ B(GT) &= \frac{1}{2I_L+1} |\langle I_f \parallel \mathcal{M}(j_A, \kappa=0, \lambda=1) \parallel I_L \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.218)$$

Момент Ферми пропорционален полному передаваемому заряду и поэтому может быть получен непосредственно из формулы (3.190) без каких-либо дополнительных предположений относительно более детальной структуры системы, т. е.

$$\mathcal{M}(\rho_V, \lambda=0) = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} Q_V = \frac{g_V}{(4\pi)^{1/2}} (T_x - iT_y). \quad (3.219)$$

Матричный элемент оператора Q_V не равен нулю только в случае переходов между аналоговыми состояниями, для которых получаем

$$B(F; TM_T \rightarrow TM_T \pm 1) = \frac{g_V^2}{4\pi} (T \mp M_T) (T \pm M_T + 1). \quad (3.220)$$

Момент Гамова — Теллера определяется как

$$\mathcal{M}(j_A, \kappa=0, \lambda=1, \mu) = \frac{g_A}{(4\pi)^{1/2}} \sum_k t_-(k) \sigma_\mu(k). \quad (3.221)$$

Поскольку разрешенные переходы соответствуют приближению, в котором пренебрегают изменением лептонных волновых функций внутри ядра, β -моменты разрешенных переходов не зависят от положения нуклонов.

Переходы, запрещенные в первом порядке ($n = 1$), определяются матричными элементами следующих моментов:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}(\rho_A, \lambda=0) &= (4\pi)^{-1/2} \frac{g_A}{c} \sum_k t_-(k) [\sigma(k) \cdot v_h] \\ \mathcal{M}(j_A, \kappa=1, \lambda=0) &= g_A \sum_k t_-(k) r_h [Y_1(\hat{r}_h) \sigma(k)]_0 \\ \mathcal{M}(\rho_V, \lambda=1, \mu) &= g_V \sum_k t_-(k) r_h Y_{1\mu}(\hat{r}_h) \\ \mathcal{M}(j_V, \kappa=0, \lambda=1, \mu) &= (4\pi)^{-1/2} \frac{g_V}{c} \sum_k t_-(k) (v_h)_{1\mu} \\ \mathcal{M}(j_A, \kappa=1, \lambda=1, \mu) &= g_A \sum_k t_-(k) r_h [Y_1(\hat{r}_h) \sigma(k)]_{1\mu} \\ \mathcal{M}(j_A, \kappa=1, \lambda=2, \mu) &= g_A \sum_k t_-(k) r_h [Y_1(\hat{r}_h) \sigma(k)]_{2\mu} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \lambda\pi=0- \\ \lambda\pi=1- \\ \lambda\pi=2- \end{array}, \quad (3.222)$$

Моменты, не зависящие от положения нуклонов, связаны с той частью лептонного тока, которая постоянна по всему объему ядра. Лептонные матричные элементы для этих моментов точно такие же, как и для соответствующих моментов с $\lambda\pi=0+$ и $1+$ (с заменой индекса A на V и наоборот), поскольку в случае β -взаимодействия (3.181), нарушающего четность, взаимодействие не зависит от четности ядерных моментов.

Моменты с $\lambda\pi=0-$ и $1-$, линейные по r , связаны с лептонами через производную лептонных волновых функций и поэтому умножаются на величину ik , где k — волновое число лептона внутри ядра. Зависимость волнового числа k от энергии испускаемых лептонов означает отклонение данного энергетического спектра от спектра разрешенных переходов.

Но при ядерных переходах кулоновская энергия электрона внутри ядра часто довольно велика по сравнению с энергией перехода, а также с массой покоя электрона. При таких условиях электронные спектры, а также поляризации и угловые корреляции для рассматриваемых переходов зависят только от порядка мультипольности. Действительно, если можно пренебречь влиянием копечной массы на движение электрона внутри ядра, то лептонный ток будет рождать электроны, а также и нейтрино в состоянии с определенной спиральностью ($h = -\frac{1}{2}$ для e^- и ν_e , $h = +\frac{1}{2}$ для e^+ и $\bar{\nu}_e$). При переходах с мультипольностью $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ лептоны рождаются преимущественно в состояниях с угловым моментом $j = \frac{1}{2}$. В случае состояний с $j = \frac{3}{2}$ лептоны должны проникать через центробежный барьер, который уменьшает амплитуду примерно

в pR раз, где p — импульс лептона на бесконечности. Поэтому полное состояние лептонной пары однозначно определяется заданием квантовых чисел $j_e = j_v = 1/2$, h_e , h_v , λ и μ , а также энергии испускаемого электрона. Следовательно, поляризации и угловые корреляции зависят только от λ и для переходов, запрещенных в первом порядке, не отличаются от таковых для разрешенных переходов. Кроме того, когда энергия перехода мала по сравнению с кулоновской энергией, волновое число электрона внутри ядра велико по сравнению с волновым числом нейтрино и приближенно не зависит от энергии электрона. Поэтому основной вклад во взаимодействие от моментов, зависящих от r , содержит волновое число электрона, а энергетическая зависимость спектра остается такой же, как и для разрешенных переходов.

Кулоновскую энергию можно представить безразмерным параметром

$$\xi \equiv \frac{Ze^2}{2R} \frac{1}{m_e c^2} \approx 1,2ZA^{-1/3}, \quad (3.223)$$

зависящим от заряда Z и радиуса $R \approx 1,2A^{1/3}$ ферми. Таким образом, условия, о которых говорилось выше, соответствуют тому, что

$$\xi \gg \frac{\Delta E}{m_e c^2}, \quad \xi \gg 1. \quad (3.224)$$

В « ξ -приближении» пренебрегают членами порядка $\xi^{-1}\Delta E/m_e c^2$ и ξ^{-1} , а вероятность распада для переходов 0— и 1— выражают через функцию f разрешенных переходов:

$$f_{0t} [B(\lambda\pi=0-) + B(\lambda\pi=1-)] = \frac{Dg_V^2}{4\pi}, \quad (3.225)$$

где

$$\begin{aligned} B(\lambda\pi=0-) &= \frac{1}{2I_i+1} \left| \left\langle I_f \parallel \pm \mathcal{M}(\rho_A, \lambda=0) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \frac{m_e c}{\hbar} \xi \mathcal{M}(j_A, \kappa=1, \lambda=0) \parallel I_i \right\rangle \right|^2, \\ B(\lambda\pi=1-) &= \frac{1}{2I_i+1} \left| \left\langle I_f \parallel \mathcal{M}(j_V, \kappa=0, \lambda=1) \pm \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \pm \frac{i}{\sqrt{3}} \frac{m_e c}{\hbar} \xi \mathcal{M}(\rho_V, \lambda=1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m_e c}{\hbar} \xi \mathcal{M}(j_A, \kappa=1, \lambda=1) \parallel I_i \right\rangle \right|^2. \end{aligned} \quad (3.226)$$

Следует подчеркнуть, что даже если выполняются условия (3.224), могут потребоваться существенные поправки к ξ -приближению, особенно тогда, когда различные члены в выражении (3.226) взаимно уничтожаются.

Верхние знаки в формуле (3.226) относятся к β^- -распаду, а нижние — к β^+ -распаду. Различие в поведении отдельных членов для β^- - и β^+ -распада связано с G -четностью β -тока. Так, прежде всего отметим, что вследствие \mathcal{PT} симметрии β^- -распад $I_i \rightarrow I_f + e^- + \bar{\nu}_e$ характеризуется таким же энергетическим спектром и такой же вероятностью распада, как и β^+ -распад антиядра $(I_i)_{\text{анти}} \rightarrow (I_f)_{\text{анти}} + e^+ + \nu_e$. Далее, ядерные матричные элементы β^+ -распада антиядра можно связать с матричными элементами β^- -распада ядра преобразованием $G = \mathcal{CR}_t$, при котором ядерный векторный β -ток $(j_V)_k$ инвариантен, а аксиально-векторный ток $(j_A)_k$ изменяет знак. Поэтому для матричных элем-

ментов β -моментов имеем

$$\begin{aligned} \langle (T_f M_f)_{\text{анти}} | \mathcal{M}(V, A) | (T_i M_i)_{\text{анти}} \rangle &\equiv \langle T_f M_f | \mathcal{C}^{-1} \mathcal{M}(V, A) \mathcal{C} | T_i M_i \rangle = \\ &= \pm \langle T_f M_f | \mathcal{R}_\tau \mathcal{M}(V, A) \mathcal{R}_\tau^{-1} | T_i M_i \rangle = \\ &= \pm (-1)^{T_i + M_i + T_f + M_f} \times \\ &\quad \times \langle T_f - M_f | \mathcal{M}(V, A) | T_i - M_i \rangle, \end{aligned} \quad (3.227)$$

где верхний знак относится к векторным, а нижний — к аксиально-векторным моментам. Кроме того, необходимо учесть, что кулоновские потенциалы для антиядерного и ядерного β^+ -распадов — это величины противоположного знака. Следовательно, когда β^+ -распад заменяется β^+ -распадом, в формуле (3.226) члены, не зависящие от ξ , изменяют знак в случае A и не изменяют его в случае V , а члены, пропорциональные ξ , изменяют знак в случае V и не изменяют его в случае A .

Если в формуле (3.226) поменять местами A и V , то получим выражение для переходов с $\lambda\mu = 0+$ и $\lambda\mu = 1+$, содержащее члены более высокого порядка, которые были отброшены в формуле (3.218). Среди этих членов момент $\mathcal{M}(j_V, \kappa = 1, \lambda = 1)$ оказывается аналогом магнитного дипольного момента [см. формулу (3.216)].

Для переходов, запрещенных в первом порядке, с $\lambda\mu = 2-$ и для переходов с $n \geq 2$ спектры электронов существенно отличаются от подобных спектров для разрешенных процессов. Переходы с $\lambda = n+1$ называются уникальными n -запрещенными переходами, а вероятность распада для таких переходов можно записать в виде

$$f_n t B(\lambda = n+1) = \frac{Dg_V^2}{4\pi} \frac{(2n+1)!!}{[(n+1)!!]^2 n!}, \quad (3.228)$$

где

$$B(\lambda = n+1) = \frac{1}{2I_i + 1} |\langle I_f || \mathcal{M}(j_A, \kappa = n, \lambda = n+1) || I_i \rangle|^2. \quad (3.229)$$

Выражения для фермиевских функций f_n , а также соответствующие табулированные их значения приведены в книге [484] и в работах, указанных в начале данного пункта.

Когда условия (3.224) выполняются, вероятность распада для переходов с $\lambda = n$ ($n > 1$) можно выразить, как и в случае $\lambda = n-1$, через функции f_{n-1} .

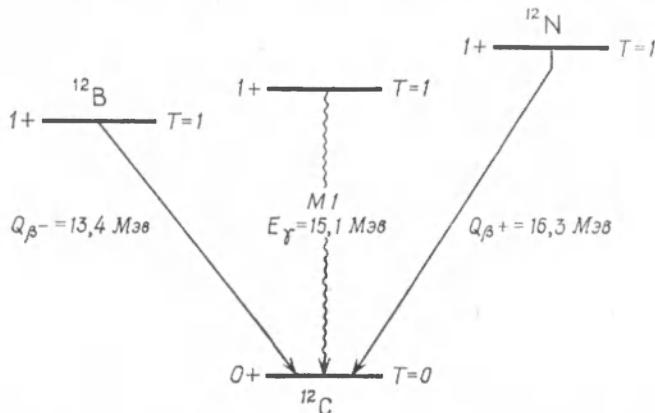
ПРИМЕРЫ К ПРИЛОЖЕНИЮ 4

Проверка соотношения между моментами β -распада (слабый магнетизм) и моментами электромагнитных переходов (фиг. 3.9)

Как говорилось в приложении 4, п. 2, на основании экспериментально наблюдаемого равенства между полным векторным зарядом Q_V , определенным в ядерном β -распаде и в распаде μ -мезона, можно предположить, что векторную часть адронного β -тока, сохраняющую странность, мы получим путем вращения в изопространстве электромагнитного тока [см. формулу (3.189)]. Эту гипотезу можно проверить, сравнивая момент $\mathcal{M}(j_V, \kappa = 1, \lambda = 1)$ с оператором магнитного диполя $\mathcal{M}(M1)$ [488].

Матричные элементы слабого магнитного момента $\mathcal{M}(j_V, \kappa = 1, \lambda = 1)$ довольно трудно измерить, поскольку при переходах с $\lambda = 1$ и $\mu = +1$ обычно преобладает момент Гамова — Теллера $\mathcal{M}(j_A, 0, 1)$, который является момен-

том разрешенного перехода ($n = 0$) [тогда как $(\mathcal{M}_{j_V}, 1, 1)$ — момент двойды запрещенного перехода ($n = 2$)]. Но благодаря тому, что энергетическая зависимость спектра электронов для этих двух моментов неодинакова, вклад от слабого магнитного момента приводит к отклонению от спектра разрешенного перехода. Условия для определения момента $\mathcal{M}(j_V, 1, 1)$ благоприятны, если



Фиг. 3.9. Сравнение β - и γ -переходов с аналоговых состояний $T = 1$ в ядрах с $A = 12$.

Как у β -, так и у γ -переходов имеются другие ветви распадов (не показанные на схеме), которые ведут на возбужденные состояния ядра ^{12}C (см., например, работу [3]).

β -переходу соответствует большая величина Q и если аналоговый γ -переход характеризуется большим магнитным дипольным моментом. С таким случаем мы имеем дело при распаде изобарического триплета ($I\pi = 1 +$) в ядрах с $A = 12$ (фиг. 3.9).

Установлено [3], что в ядре ^{12}C ширина γ -распада уровня с энергией 15,1 Мэв на основное состояние $\Gamma_\gamma = 39,4 \pm 1,5$ эв, а поэтому, пользуясь формулой (3.147), получаем

$$B(M1; 1+ \rightarrow 0+) = 1,0 \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2, \quad (3.230)$$

$$|\langle 0+ || i\mathcal{M}(M1) || 1+ \rangle| = 1,72 \frac{e\hbar}{2Mc}.$$

При $\lambda = 1$ соотношение (3.216) дает нам равенство

$$\begin{aligned} \langle 0+, T=0 || \mathcal{M}(j_V, 1, 1) || 1+, T=1, M_T=1 \rangle = \\ = 2i \frac{g_V}{e} \langle 0+, T=0 || \mathcal{M}(M1) || 1+, T=1, M_T=0 \rangle \end{aligned} \quad (3.231)$$

и, следовательно,

$$|\langle 0+ || i\mathcal{M}(j_V, 1, 1) || 1+ \rangle| = 3,44 \frac{g_V \hbar}{2Mc}. \quad (3.232)$$

При анализе β -спектра с точностью, необходимой для определения момента $\mathcal{M}(j_V, 1, 1)$, нужно учесть и другие моменты с $n = 2$, вносящие вклад в переход ([192], см. также анализ, проведенный в работе [243]). Сюда относятся моменты $\mathcal{M}(p_A, \lambda = 1)$ и $\mathcal{M}(j_A, z = 2, \lambda = 1)$. С точностью до членов того же порядка

ка мы должны учесть и поправки к моменту $\mathcal{M}'(j_A, 0, 1)$, обусловленные изменением лептонных волновых функций внутри ядра. Поправки в первом порядке пропорциональны r^2 [см. разложение (3.204)], и их можно выразить через момент

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'(j_A, \mathbf{x}=0, \lambda=1, \mu) &= (4\pi)^{-1/2} \int r^2 |j_A(\mathbf{r})|_\mu d\tau = \\ &= (4\pi)^{-1/2} g_A \sum_k t_-(k) r_k^2 \sigma_\mu(k). \end{aligned} \quad (3.233)$$

Чтобы получить спектр электронов, необходимо вычислить лептонные матричные элементы и усреднить их по направлениям вылета нейтрино и по поляризациям электрона (см. работы, цитируемые в начале п. 5 приложения 3). Было установлено, что поправочный множитель к разрешенному спектру дается выражением

$$\begin{aligned} P(E_e) &= \langle 0+ || \mathcal{M}(j_A, 0, 1) || 1+ \rangle^{-2} \times \\ &\times \left\{ \left(1 \mp \frac{13}{30} \frac{Ze^2}{R} E_e R^2 \right) \langle 0+ || \mathcal{M}(j_A, 0, 1) || 1+ \rangle - \right. \\ &- \left(\frac{1}{6} (E_e^2 + E_v^2) \pm \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{R} E_e \right) \langle 0+ || \mathcal{M}'(j_A, 0, 1) || 1+ \rangle + \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{3}} (E_e + E_v) \langle 0+ || i\mathcal{M}(p_A, 1) || 1+ \rangle \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{6}}{9} (E_e - E_v) \langle 0+ || i\mathcal{M}(j_V, 1, 1) || 1+ \rangle + \\ &\left. + \frac{2\sqrt{2}}{27} E_e E_v \langle 0+ || i\mathcal{M}(j_A, 2, 1) || 1+ \rangle \right\}^2, \end{aligned} \quad (3.234)$$

где верхний знак относится к β^- , а нижний — к β^+ -распаду. Выражение (3.234) соответствует приближению, допустимому для перехода с большой энергией и малым зарядом ядра, т. е. это предельный случай, противоположный ξ -приближению, которое было рассмотрено выше. Так, мы пренебрегли членами, пропорциональными массе покоя электрона, а в разложении радиальных лептонных волновых функций оставили только основные члены (исключение составляют моменты разрешенных переходов).

В поправочном множителе (3.234) мы пользуемся релятивистскими единицами ($m_e = c = \hbar = 1$). Энергии электрона и нейтрино обозначены через E_e и E_v , причем

$$E_e + E_v = W_0 = \begin{cases} 27,2 m_e c^2 & \text{для } {}^{12}\text{B}(\beta^-), \\ 32,9 m_e c^2 & \text{для } {}^{12}\text{N}(\beta^+), \end{cases} \quad (3.235)$$

где W_0 — энергия перехода.

Первый член в выражении (3.234) обусловлен отличием волновой функции электрона в центре ядра от волновой функции, которую обычно берут при расчете спектра разрешенного перехода. (Подробный вывод см. в работе [243].) Кулоновский потенциал был взят в виде потенциала равномерно заряженной сферы радиусом R , который был положен равным

$$R = 1,22 A^{1/3} \text{ ферми} = 2,8 \text{ ферми} = 0,72 \cdot 10^{-2} \frac{\hbar}{m_e c}. \quad (3.236)$$

Отсюда получаем, что

$$RW_0 = \begin{cases} 0,20 & \text{для } {}^{12}\text{B}(\beta^-), \\ 0,24 & \text{для } {}^{12}\text{N}(\beta^+). \end{cases} \quad (3.237)$$

Поведение различных слагаемых поправочного множителя (3.234) при переходе от β^- -к β^+ -распаду определяется G -четностью β -тока, как уже говорилось выше. Таким образом, интерференция между векторным и аксиально-векторным вкладами оказывается разного знака для β^- -и β^+ -распадов. В то же время аксиально-векторные поправочные члены для β^- -и β^+ -распадов одинаковы (исключение — вклады от кулоновского поля). Симметрию этих членов относительно взаимной замены энергий электрона и нейтрино можно объяснить, основываясь на тех же самых соображениях. Действительно, с точностью до кулоновских эффектов используемые лентоны отличаются только спиральностями. Спиральности также меняют свой знак при переходе от β^- -распада к β^+ -распаду. Следовательно, члены, не зависящие от Z , должны обладать одинаковой симметрией относительно перемены местами энергий E_e и E_v , а также относительно перехода от β^- -распада к β^+ -распаду.

При $E_v = W_0 - E_e$ поправочный множитель (3.234) содержит члены, не зависящие от энергии электрона (которыми мы пренебрегаем), члены, линейные по E_e , а также квадратичные относительно E_e . Экспериментальные данные недостаточно точны, чтобы определить эту квадратичную зависимость. Поэтому мы учтем квадратичные члены, взяв производную от них при некоторой средней энергии $\langle E_e \rangle$ для измеренной части энергетического спектра. Тогда получим, что

$$P(E_e) = 1 + aE_e, \quad (3.238)$$

где

$$\begin{aligned} a = & \pm \frac{4\sqrt{6}}{9} \frac{\langle 0+||i\mathcal{M}(j_V, 1, 1)||1+\rangle}{\langle 0+||\mathcal{M}(j_A, 0, 1)||1+\rangle} \mp \frac{13}{15} R^2 \frac{Ze^2}{R} + \\ & + \left(\frac{2}{3} (W_0 - 2\langle E_e \rangle) \mp \frac{Ze^2}{R} \right) \frac{\langle 0+||\mathcal{M}'(j_A, 0, 1)||1+\rangle}{\langle 0+||\mathcal{M}(j_A, 0, 1)||1+\rangle} + \\ & + \frac{4\sqrt{2}}{27} (W_0 - 2\langle E_e \rangle) \frac{\langle 0+||\mathcal{M}(j_A, 2, 1)||1+\rangle}{\langle 0+||\mathcal{M}(j_A, 0, 1)||1+\rangle}. \end{aligned} \quad (3.239)$$

Вычисляя разные члены в выражении для a , прежде всего заметим, что матричный элемент оператора $\mathcal{M}(j_A, 0, 1)$ можно найти по значениям величины ft [258]

$$\begin{aligned} ft(^{12}\text{B}) &= (1,180 \pm 0,007) \cdot 10^4 \text{ сек}, \\ ft(^{12}\text{N}) &= (1,306 \pm 0,009) \cdot 10^4 \text{ сек}. \end{aligned} \quad (3.240)$$

Взяв среднее значение $ft = 1,24 \cdot 10^4$ сек, мы получим матричный элемент Гамова — Теллера [см. формулы (3.218) и (3.219)] равным

$$|\langle 0+||\mathcal{M}(j_A, 0, 1)||1+\rangle| = 0,345 \text{ г.в.} \quad (3.241)$$

и, следовательно, по формуле (3.232)

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{6}}{9} \frac{\langle 0+||i\mathcal{M}(j_V, 1, 1)||1+\rangle}{\langle 0+||\mathcal{M}(j_A, 0, 1)||1+\rangle} &= \pm 0,296 \cdot 10^{-2} (m_e c^2)^{-1} = \\ &= \pm 0,58 \cdot 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.242)$$

Наблюдающаяся экспериментально 10%-ная разница в значениях ft для ядер ^{12}B и ^{12}N ставит весьма интересную проблему. Эту разницу нельзя объяснить вкладом от момента $i\mathcal{M}(j_V, 1, 1)$ в выражение (3.234), поскольку при интегрировании по электронному спектру множитель $(E_e - E_v)$ оказывается приближенно равным нулю. Кроме того, поправочные кулоновские члены в спектре примерно на порядок меньше. Поэтому разницу значений ft нужно отнести за счет нарушения зарядовой симметрии рассматриваемых ядерных состояний, что,

возможно, связано с большим различием в энергиях связи ядер. (Вопрос о разнице в значениях ft , обусловленной небольшим нарушением изоспиновой симметрии, рассматривается в работах [142, 307]. Вопрос о возможном вкладе вследствие нарушения G -инвариантности рассмотрен в работе [46].)

Знак отношения (3.242) непосредственно не определяется значением величин Γ_V и ft , но его можно определить по вероятностям этих переходов. Матричные элементы моментов M_1 и $\mathcal{M}(j_V, 1, 1)$ содержат орбитальную и спиновую части [см. формулу (3.216)], и на основании выражения (3.232) получаем

$$\left| \langle 0+ \parallel \sum_k t_{-}(k) \left(\sigma_k + \frac{1}{4,7} l_k \right) \parallel 1+ \rangle \right| = 1,1. \quad (3.243)$$

Спиновая часть матричного элемента определяется моментом (3.241), откуда

$$\left| \langle 0+ \parallel \sum_k t_{-}(k) \sigma_k \parallel 1+ \rangle \right| = 1,0. \quad (3.244)$$

Приближенное равенство этих двух матричных элементов означает, что орбитальный вклад в слабый магнетизм либо мал по сравнению со спиновым вкладом [и тогда знаки обоих матричных элементов (3.243) и (3.244) одинаковы], либо приблизительно в 2 раза больше спинового вклада [и тогда отношение (3.242) отрицательно]. Но последнее предположение означало бы, что орбитальный матричный элемент $L_- \equiv |\langle 0+ \parallel \sum_k t_{-}(k) l_k \parallel 1- \rangle| \approx 10$, и поэтому его

можно отвергнуть. (Например, волновые функции в схеме jj -связи, которые предполагают увеличение орбитальных матричных элементов, для величины L_- дают значение, равное примерно 1,15. Вычисления на основе волновых функций, соответствующих промежуточному случаю между jj - и $L-S$ -схемами связи, для величины L_- дают меньшее значение [442].) Поэтому мы заключаем, что отношение (3.242) положительно.

Слагаемые, входящие в множитель (3.239), которые содержат момент $\mathcal{M}'(j_A, 0, 1)$, значительно меньше слагаемых, содержащих момент $\mathcal{M}(j_A, 1, 1)$. Если предположить, что момент $\mathcal{M}'(j_A, 0, 1)$, так же как и основной момент $\mathcal{M}(j_A, 0, 1)$, связан главным образом с нуклонами p -оболочки, то мы будем иметь

$$\frac{\langle 0+ \parallel \mathcal{M}'(j_A, 0, 1) \parallel 1+ \rangle}{\langle 0+ \parallel \mathcal{M}(j_A, 0, 1) \parallel 1+ \rangle} \approx \langle r^2 \rangle_{l=1} \approx 0.44 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^2. \quad (3.245)$$

Здесь для среднего квадрата радиуса мы взяли значение $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 2,40 \text{ ферми} = 0,62 \cdot 10^{-2} \hbar/m_e c$, которое получается из данных по рассеянию электронов (см., например, работу [3]), а также воспользовались соотношением

$$\langle r^2 \rangle \approx \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle_{l=0} + \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle_{l=1} \approx \frac{13}{15} \langle r^2 \rangle_{l=1}, \quad (3.246)$$

которое основано на том, что для потенциала гармонического осциллятора $\langle r^2 \rangle_{l=1} : \langle r^2 \rangle_{l=0} = 5/3$ [см. формулу (2.153)]. Приводимые ниже экспериментальные значения основаны на измерениях в области энергии со средним значением $\langle E_e \rangle \approx 9 M_{\text{эв}}(^{12}\text{B})$ и $\langle E_e \rangle \approx 10 M_{\text{эв}}(^{12}\text{N})$. Отсюда получаем, что вклад в множитель a от момента $\mathcal{M}'(j_A, 0, 1)$ равен $-0,10 \cdot 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1}$ для ^{12}B и $+0,02 \times 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1}$ для ^{12}N . Второй член в формуле (3.239), не зависящий от высших моментов, равен $\mp 0,054 \cdot 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1}$.

Матричный элемент $\langle 0+ \parallel \mathcal{M}(j_A, 2, 1) \parallel 1+ \rangle$ должен быть, вероятно, сравнимым с матричным элементом $\langle 0+ \parallel \mathcal{M}'(j_A, 0, 1) \parallel 1+ \rangle$ или же меньше его. [Например, если состояние $0+$ представлено заполненной подоболочкой $p_{3/2}$, а состояние $1+$ конфигурацией $p_{3/2}^1 p_{1/2}^1$, то формула (3.78) дает, что $\langle 0+ \parallel \mathcal{M}(j_A, 2, 1) \parallel 1+ \rangle : \langle 0+ \parallel \mathcal{M}'(j_A, 0, 1) \parallel 1+ \rangle = -2^{-3/2}$.] Если

матричные элементы моментов $\mathcal{M}(j_A, 2, 1)$ и $\mathcal{M}'(j_A, 0, 1)$ взять одинаковыми, то величина последнего слагаемого в (3.239) будет меньше $0,02 \cdot 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1}$ и поэтому данным членом можно пренебречь.

Наконец, для поправочных множителей получаем следующие значения:

$$a_{\text{теор}} = \begin{cases} +0,43 \cdot 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1} & \text{для } {}^{12}\text{B}(\beta^-), \\ -0,51 \cdot 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1} & \text{для } {}^{12}\text{N}(\beta^+). \end{cases} \quad (3.247)$$

Измерения формы спектров с учетом электромагнитных радиационных эффектов дают для поправочных множителей значения

$$a_{\text{эксп}} = \begin{cases} +0,55 \pm 0,10 \cdot 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1} & \text{для } {}^{12}\text{B}(\beta^-), \\ -0,52 \pm 0,06 \cdot 10^{-2} M_{\text{эв}}^{-1} & \text{для } {}^{12}\text{N}(\beta^+), \end{cases} \quad (3.248)$$

которые, как мы видим, согласуются с теоретическими значениями.

Поскольку орбитальный вклад в момент $\mathcal{M}(j_V, 1, 1)$ невелик, согласием между экспериментальными и теоретическими значениями поправочного множителя подтверждается правильность теоретического значения спиновой константы взаимодействия μ_B , равного 4,7. В случае точечных нуклонов, подчиняющихся уравнению Дирака без аномальных моментов, константа μ_B должна была бы равняться единице, но из-за структурных эффектов, связанных с аномальным магнитным моментом, она увеличивается почти в 5 раз.

ПРИЛОЖЕНИЕ

5

РЕАКЦИИ С ПЕРЕДАЧЕЙ НУКЛОНА

При исследовании влияния электромагнитного и слабого взаимодействий на строение ядра их можно рассматривать как малые возмущения, ибо энергия таких взаимодействий мала по сравнению с ядерными энергиями. Поэтому ядерные процессы, вызываемые такими взаимодействиями, можно непосредственно характеризовать известными и часто довольно простыми ядерными матричными элементами (см. приложения 3 и 4). Правда, когда сильно взаимодействующие частицы сталкиваются с ядрами, они на некоторое время настолько сильно сливаются с ними, что процесс столкновения лучше рассматривать как состояние рассеяния составной системы с многими степенями свободы, соответствующими всей сложности состояний при довольно высоких возбуждениях.

Но в некоторых ядерных процессах налетающая частица может непосредственно возбудить лишь некоторые простые степени свободы мишени или же передать мишени один или несколько нуклонов без существенного взаимодействия с ее другими внутренними степенями свободы. Примером таких прямых процессов могут служить процессы с периферическим взаимодействием, когда налетающая частица проходит в непосредственной близости от поверхности ядра, или реакции с отдельными нуклонами, для которых довольно велика вероятность пройти сквозь ядро без поглощения. При анализе ядерных реакций прямые процессы идентифицируют по характерным для них угловым распределениям и функциям возбуждения.

Возможны весьма разнообразные виды прямых реакций с самыми разными падающими и регистрируемыми вылетающими частицами. По каждой такой реакции можно, вероятно, детально изучить тот или иной вопрос строения ядра. В настоящее время глубоко изучено лишь небольшое количество простейших

прямых реакций, но и эти исследования внесли существенный вклад в наши знания о строении ядра.

При анализе процессов прямого неупругого возбуждения коллективных состояний ядра можно естественным образом обобщить понятие среднего ядерного поля. Такие процессы рассматриваются там, где речь идет о полях, соответствующих различным коллективным видам движения. [См., например, гл. 6 (вibrationные возбуждения), гл. 5, приложение 1 (вращения) и формулу (2.29) (зарядово-обменный потенциал для возбуждения аналоговых состояний).] В настоящем приложении мы рассмотрим матричные элементы, которые определяются из реакций, протекающих с передачей нуклона.

1. Передача одного нуклона

Факторизация амплитуды, генетические коэффициенты

Было исследовано очень много разных процессов, в которых в результате взаимодействия с мишенью налетающая частица теряет или приобретает один нуклон. При этом было установлено, что многие такие реакции [например, реакции (d, p) , (p, d) , $(^3\text{He}, \alpha)$ и др.] с заметной вероятностью приводят к образованию некоторых выделенных состояний конечного ядра и что угловые распределения вылетающих частиц часто обнаруживают резко выраженные максимумы и минимумы, особенно в прямом направлении. Все это говорит о том, что процессы, подобные реакции (d, p) , можно рассматривать как прямую передачу нейтрона налетающей частицы на однопчастичную орбиту конечного ядра, причем протон проходит через мишень, не возбуждая ее внутренних степеней свободы [81].

Даже при таком упрощенном взгляде на реакции мы приходим в общем случае к задаче рассеяния трех тел (частицы-мишени, нейтрона и протона). Но при теоретическом исследовании реакций с передачей нуклона было установлено, что с большим успехом можно приближенно разбить процесс на три простых этапа:

- налетающая частица движется в среднем поле мишени так же, как и при упругом рассеянии;
- нуклон налетающей частицы переходит на орбиту мишени;
- вылетающая частица движется в среднем поле конечного ядра.

При таком подходе существенно предположение о том, что процессы рассеяния, указанные в пунктах «а» и «в», разделены событием «б», когда при добавлении передаваемого нуклона в начальное состояние мишени рождается конечное состояние ядра-продукта. На этапах «а» и «в» принимаются во внимание только средние свойства мишени, знать же детальную структуру ядерных состояний необходимо лишь на этапе «б».

Полная амплитуда рассеяния для реакции срыва равна сумме амплитуд, характеризующих вероятности захвата нуклона на различные орбиты, которые определяются квантовыми числами j и m , т. е.

$$f^{(+1)}(I_1 M_1 \mathbf{p}_1 h_1 \rightarrow I_2 M_2 \mathbf{p}_2 h_2) = \sum_{jm} f^{(+1)}(jm; I_2 M_2 \mathbf{p}_2 h_2 \rightarrow I_2 M_2 \mathbf{p}_2 h_2). \quad (3.249)$$

Индекс $(+1)$ указывает на процесс передачи, когда один нуклон добавляется к мишени, а состояния мишени и ядра-продукта определяются квантовыми числами I_1 и I_2 ; \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 — импульс и спиральность налетающей частицы, \mathbf{p}_2 и \mathbf{h}_2 — импульс и спиральность вылетающей частицы. (Квантовые числа спиральности относятся к проекциям спина в направлении импульса. Некоторые общие свойства амплитуд рассеяния в \hbar -представлении рассмотрены в приложении 6, п. 1).

Если предположить, что передаваемая частица попадает на орбиту с определенными квантовыми числами, то парциальную амплитуду (3.249) можно факторизовать:

$$\begin{aligned} f^{(+1)}(jm; I_1 M_1 p_1 h_1 \rightarrow I_2 M_2 p_2 h_2) = \\ = \langle I_2 M_2 | a^\dagger(jm) | I_1 M_1 \rangle f_{\text{одн}}^{(+1)}(jm; p_1 h_1 \rightarrow p_2 h_2). \end{aligned} \quad (3.250)$$

Амплитуда $f_{\text{одн}}^{(+1)}(jm)$ описывает процесс срыва в идеализированном случае, когда конечное состояние ядра соответствует просто связанныму одночастичному движению переданного нуклона в поле ядра-мишени. Множитель, который стоит перед $f_{\text{одн}}^{(+1)}(jm)$, называется генеалогическим коэффициентом и выражается в виде матричного элемента оператора $a^\dagger(jm)$, порождающего нуклон на одночастичной орбите с квантовыми числами j и m . (Свойства операторов рождения рассмотрены в гл. 2, приложение 1.) В выражении для амплитуды (3.250) детальная структура ядерных состояний I_1 и I_2 находит свое отражение лишь в генеалогическом коэффициенте.

Амплитуду $f^{(-1)}$ обратной реакции (реакции подхвата) можно выразить аналогично амплитуде (3.250):

$$f^{(-1)}(jm; I_1 M_1 \rightarrow I_2 M_2) = \langle I_2 M_2 | a(jm) | I_1 M_1 \rangle f_{\text{одн}}^{(-1)}(jm), \quad (3.251)$$

где $a(jm)$ — оператор уничтожения, а $f_{\text{одн}}^{(-1)}(jm)$ — амплитуда подхвата нуклона, который первоначально находился на одночастичной орбите с квантовыми числами j и m . Поскольку процессы подхвата и срыва связаны между собой операцией обращения времени, мы имеем [см. формулу (1.263)]

$$\begin{aligned} f_{\text{одн}}^{(+1)}(jm; p_1 h_1 \rightarrow p_2 h_2) = f_{\text{одн}}^{(-1)}(\bar{j}\bar{m}; \bar{p}_2 \bar{h}_2 \rightarrow \bar{p}_1 \bar{h}_1) = \\ = (-1)^{j+m} f_{\text{одн}}^{(-1)}(j-m; -p_2 h_2 \rightarrow -p_1 h_1). \end{aligned} \quad (3.252)$$

[Преобразование собственных состояний оператора спиральности при обращении времени определяется соотношениями (3.276).]

Вообще говоря, радиальное движение переданной частицы не будет соответствовать движению частицы на оболочечно-модельной орбите с квантовыми числами $n l j m$. Тогда можно считать, что нуклон передается в состояние с квантовыми числами $l j m$ и координатой r , т. е.

$$\begin{aligned} f^{(+1)}(ljm; I_1 M_1 \rightarrow I_2 M_2) = \\ = \int r^2 dr \langle I_2 M_2 | a^\dagger(rljm) | I_1 M_1 \rangle f_{\text{одн}}^{(+1)}(rljm). \end{aligned} \quad (3.253)$$

Оператор $a^\dagger(rljm)$ порождает нуклон в состоянии $|rljm\rangle$ [ср. с оператором $a^\dagger(x)$, который рассматривался в гл. 2, приложение 1, п. 6]. Матричный элемент $\langle I_2 M_2 | a^\dagger(rljm) | I_1 M_1 \rangle$ представляет собой волновую функцию переданного нуклона, и в случаях, подобных только что рассмотренному, когда волновая функция приближенно пропорциональна одночастичной радиальной волновой функции \mathcal{H}_{nlj} , в соответствии с соотношением (3.250) получаем, что

$$\langle I_2 M_2 | a^\dagger(rljm) | I_1 M_1 \rangle \approx \langle I_2 M_2 | \tilde{a}^\dagger(nljm) | I_1 M_1 \rangle \mathcal{H}_{nlj}(r). \quad (3.254)$$

Но радиальная волновая функция переданной частицы может зависеть от деталей структуры рассматриваемых ядерных состояний и приближение (3.254) может не оправдываться (особенно в тех случаях, когда энергия связи нуклона значительно отличается от энергии связи оболочечно-модельных орбит).

Матричные элементы тензорных операторов $a^\dagger(jm)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle I_2 M_2 | a^\dagger(jm) | I_1 M_1 \rangle = \langle I_1 M_1 | a(jm) | I_2 M_2 \rangle = \\ = (2I_2 + 1)^{-1/2} \langle I_1 M_1 jm | I_2 M_2 \rangle \langle I_2 || a^\dagger(j) || I_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.255)$$

Здесь принято обычное правило фаз, при котором матричные элементы операторов $a^\dagger(jm)$ и $a(jm)$ вещественны (см. гл. 4, приложение 1, п. 5).

Генеалогические коэффициенты для деформированных ядер можно вычислить, перейдя к внутренней системе координат [см. формулу (1.192)]:

$$a^\dagger(jm) = \sum_{\Omega} \mathcal{Z}_{m\Omega}^j(\omega) a^\dagger(j\Omega) = \sum_{\Omega, v} \mathcal{Z}_{m\Omega}^j(\omega) \langle v | j\Omega \rangle a^\dagger(v). \quad (3.256)$$

Здесь Ω — проекция углового момента на ось z внутренней системы координат, а v — квантовые числа, которыми определяются одночастичные состояния в случае деформированного потенциала.

Простая формула факторизации амплитуды реакции передачи (3.250) справедлива, если только входной (и выходной) каналы не связаны сильно с каким-либо возбуждением мишени (и конечного ядра). При таком подходе были достигнуты значительные успехи в объяснении рассматриваемых реакций. Предпринимались также попытки обобщения подхода с тем, чтобы учесть связи с вращательными и колебательными степенями свободы во входном и выходном каналах.

Сечения и правила сумм

В приближении, соответствующем формулам (3.250) и (3.254), сечения реакций срыва и подхвата для неполяризованных мишеней, просуммированные по магнитным квантовым числам одночастичной орбиты m и конечного состояния M_2 , определяются выражениями [см. формулу (3.255)]

$$\begin{aligned} d\sigma^{(+1)}(j; I_1 \rightarrow I_2) &= (2I_1 + 1)^{-1} \sum_{M_1 M_2 m} d\sigma^{(+1)}(jm; I_1 M_1 \rightarrow I_2 M_2) = \\ &= (2j + 1)^{-1} (2I_1 + 1)^{-1} \langle I_2 || a^\dagger(j) || I_1 \rangle^2 d\sigma_{\text{одн}}^{(+1)}(j), \\ d\sigma_{\text{одн}}^{(+1)}(j) &= \sum_m d\sigma_{\text{одн}}^{(+1)}(jm), \\ d\sigma^{(-1)}(j; I_1 \rightarrow I_2) &= (2I_1 + 1)^{-1} \sum_{M_1 M_2 m} d\sigma^{(-1)}(jm; I_1 M_1 \rightarrow I_2 M_2) = \\ &= (2j + 1)^{-1} (2I_1 + 1)^{-1} \langle I_1 || a^\dagger(j) || I_2 \rangle^2 d\sigma_{\text{одн}}^{(-1)}(j), \\ d\sigma_{\text{одн}}^{(-1)}(j) &= \sum_m d\sigma_{\text{одн}}^{(-1)}(jm). \end{aligned} \quad (3.257)$$

[Сечения связаны соотношением (1.262) с амплитудами рассеяния и могут быть вычислены при определенных значениях $p_1 h_1$, $p_2 h_2$ или же просуммированы (или усреднены) по поляризациям.] При определении одночастичных сечений $d\sigma_{\text{одн}}^{(\pm 1)}(j)$ предполагалось, что спин ядра-мишени $I_1 = 0$, а спин ядра-продукта $I_2 = j$. Для реакций срыва одночастичное сечение соответствует случаю, когда в мишени на орбите jm нет ни одного нуклона, а для реакций подхвата одночастичное сечение относится к заполненной оболочке мишени, в которой на орбите jm находятся $(2j + 1)$ нуклонов. [В литературе иногда встречается одночастичное сечение передачи, которое представляет собой усредненное сечение, а не сумму по магнитным квантовым числам m . Поэтому оно в $(2j + 1)$ раз меньше сечения (3.257).] Если в данный переход вносят вклад нескольких спинов j , то сечения передачи нуклона, просуммированные по M_1 , M_2 и m , равны сумме парциальных сечений (3.257), соответствующих разным значениям j . В корреляционных экспериментах, таких, как, например, угловая корреляция между вылетающей

частицей и γ -излучением ядра-продукта, амплитуды передачи нуклона с разными спинами j должны складываться когерентно.

Ядерные матричные элементы, которыми характеризуются реакции с передачей одной частицы, часто выражают через спектроскопический фактор \mathcal{S} [302], связанный с генеалогическим коэффициентом соотношением¹⁾

$$\mathcal{S} = (2I_2 + 1)^{-1} \langle I_2 || a^\dagger(j) || I_1 \rangle. \quad (3.258)$$

Если в рассмотрение ввести изоспин, то спектроскопический фактор определяется как

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (2T_2 + 1)^{-1} (2I_2 + 1)^{-1} \langle I_2 T_2 ||| a^\dagger(jt) ||| I_1 T_1 \rangle^2 = \\ &= (2I_2 + 1)^{-1} \left\langle T_1 (M_T)_1 t - \frac{1}{2} m_t | T_2 (M_T)_2 \right\rangle^{-2} \times \\ &\quad \times \langle T_2 (M_T)_2 I_2 || a^\dagger(jt, m_t) || T_1 (M_T)_1 I_1 \rangle^2. \end{aligned} \quad (3.259)$$

Если все изоспины выстроены параллельно [как в случае реакции (d, p) на ядре-мишени с $M_T = T$], то коэффициент векторного сложения в формуле (3.259) равен единице и спектроскопические факторы, даваемые формулами (3.258) и (3.259), совпадают.

Пользуясь простыми коммутационными соотношениями для операторов $a^\dagger(jm)$ и $a(jm)$ и учитывая их тензорные свойства, можно вывести правила сумм для генеалогических коэффициентов и сечений реакций передачи нуклона [302]. Например, в случае реакции подхвата на основании условия полноты результат суммирования по всем конечным состояниям αI_2 можно выразить через оператор числа частиц:

$$\sum_{\alpha I_1} \langle I_1 || a^\dagger(j) || \alpha I_2 \rangle^2 = (2I_1 + 1) \langle I_1 M_1 | \sum_m a^\dagger(jm) a(jm) | I_1 M_1 \rangle = (2I_1 + 1) n(j), \quad (3.260)$$

где $n(j)$ — число нуклонов на оболочечном уровне j в начальном состоянии со спином I_1 [см. формулу (2.251)]. Точно так же в случае реакции срыва, на основании антикоммутационных соотношений (2.250) для операторов a и a^\dagger в результате суммирования генеалогических коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha I_2} \langle \alpha I_2 || a^\dagger(j) || I_1 \rangle^2 = \\ &= (2I_1 + 1) \left\langle I_1 M_1 \left| \sum_m a(jm) a^\dagger(jm) \right| I_1 M_1 \right\rangle = (2I_1 + 1)[2j + 1 - n(j)]. \end{aligned} \quad (3.261)$$

Комбинируя выражения (3.260) и (3.261), получаем правило сумм для сечений реакций срыва и подхвата, которые не зависят от структуры состояния I_1 и поэтому пригодны для проверки непротиворечивости анализа экспериментальных сечений.

Приведенные выше правила сумм особенно просты, так как они зависят только от скалярной комбинации операторов $a^\dagger(jm)$ и $a(jm)$, которая пропорциональна оператору числа частиц на уровне j . Для более сложных тензорных операторов вида $(a^\dagger(j') a(\bar{j}))_{jk}$ [см. формулу (1.179)] подобные соотношения можно вывести [175] путем несложной пересвязки соответствующих угловых

¹⁾ Имеется в виду приведенный генеалогический коэффициент [см. формулу 3.53]. — Прим. перев.

моментов:

$$\begin{aligned} & \langle I'_1 \| (a^+(j') a(\bar{j})) \| I_1 \rangle = (-1)^{j+j'-\lambda} \sum_{aI_2} (2I_2 + 1)^{-1/2} \times \\ & \times \langle (jj') \lambda, (I_1 I'_1) \lambda; 0 \| (I_1) I_2, (j' I'_1) I_2; 0 \rangle \langle aI_2 \| a(\bar{j}') \| I'_1 \rangle \langle aI_2 \| a(\bar{j}) \| I_1 \rangle - \\ & - \sum_{aI_2} (-1)^{I_1+I_2-\lambda} (2\lambda + 1)^{1/2} \left\{ \begin{array}{c} j \quad j' \quad \lambda \\ I'_1 \quad I_1 \quad I_2 \end{array} \right\} \langle aI_2 \| a(\bar{j}') \| I'_1 \rangle \langle aI_2 \| a(\bar{j}) \| I_1 \rangle. \quad (3.262) \end{aligned}$$

Так, например, если принять, что $I'_1 = I_1$, а $j' = j$, то вклад нуклонов, находящихся на уровне j , в момент мультипольности 2λ начального состояния I_1 будет выражаться в виде суммы сечений подхвата, причем каждый переход войдет в нее с весом, равным коэффициенту пересвязки, который зависит от спина I_2 конечного состояния.

Одночастичные амплитуды

Основной результат настоящего параграфа — факторизация амплитуды, представленная формулой (3.250), которая позволяет измеренные сечения реакций, пущенных с передачей нуклона, выразить через генеалогические коэффициенты при условии, что одночастичные сечения известны. Одночастичные же сечения часто оказывается возможным приближенно рассчитать по данным измерений (в тех случаях, когда, как полагают, рассматриваемые состояния имеют простые конфигурации) или найти из правил сумм. И даже при отсутствии таких данных из относительных сечений реакций с передачей нуклона можно извлечь важные сведения о структуре рассматриваемых состояний.

В последние годы были достигнуты большие успехи в теоретических расчетах абсолютных значений одночастичных амплитуд $f_{\text{одн}}^{(\pm 1)}$, описывающих передачу нуклона, а также выявлена зависимость этих амплитуд от квантовых чисел I , j , от величины Q и других параметров. При этом чаще всего пользуются тем обстоятельством, что процессы упругого рассеяния не только отдельных нуклонов, но и сложных частиц, например дейtronов, хорошо описываются оптической моделью. Поэтому в приближении искаженных волн предполагается, что начальный и конечный этапы реакции можно рассматривать как движение налетающей и вылетающей частиц в поле, соответствующем оптическому потенциальному.

Ограничение первым порядком теории возмущений соответствует предположению, что передача нуклона рассматривается как обособленное событие. Сам процесс передачи вызывается эффективным взаимодействием, ответственным за диссоциацию налетающей частицы на передаваемый нуклон и вылетающую частицу (в случае реакции срыва). Форма эффективного взаимодействия в таких расчетах может существенно изменяться при учете искажающего действия, оказываемого ядерным потенциалом на движение сложных частиц.

Анализ реакций с передачей нуклона на основе приближения искаженных волн можно найти, например, в обзоре [16]. (См. также подробный анализ реакции ${}^{40}\text{Ca}(d, p)$ в работе [284].) Аналогичные приближенные методы применяются в теории атомных столкновений с перераспределением частиц (см., например, работу [61]). Расчеты амплитуд $f_{\text{одн}}^{(\pm 1)}$, которые проводят методом искаженных волн, основываются на многочисленных приближениях. В настоящее время большое внимание уделяется проверке таких приближений, а также поискам улучшенных вариантов теории.

2. Передача двух частиц

В случае процессов, связанных с передачей двух нуклонов, возможны самые разнообразные механизмы, но об относительных вкладах таких механизмов в реакцию пока мало известно. Все же имеющиеся данные, особенно для низколежащих состояний, указывают, по-видимому, на то, что важный вклад

в такие реакции вносит процесс, при котором два нуклона передаются как одно целое. Такой процесс можно рассматривать аналогично реакциям передачи одной частицы, о которых говорилось выше (см., например, работу [197]).

Рассмотрим, например, реакцию (t, p) , при которой передаваемая частица представляет собой динейtron, находящийся в состоянии 1S относительно движения, что приближению соответствует внутреннему движению нейтронов в тритии. Разлагая амплитуду реакции по составляющим, соответствующим передаче динейтрана в точке \mathbf{r} , получаем, что

$$f^{(+2)}(I_1 M_1 \rightarrow I_2 M_2) = \int \langle I_2 M_2 | A^\dagger(\mathbf{r}) | I_1 M_1 \rangle f_{\text{одн}}^{(+2)}(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (3.263)$$

Здесь $A^\dagger(\mathbf{r})$ — оператор рождения динейтрана в точке \mathbf{r} , который можно выразить через волновую функцию $\Psi_{2n}(r_{12}) \chi_{S=0}$, описывающую относительное движение двух нейтронов в тритии:

$$\begin{aligned} A^\dagger(\mathbf{r}) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_s(1)} \sum_{m_s(2)} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \delta \left(\mathbf{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \right) \Psi_{2n}(r_{12}) \times \\ & \times \chi_{S=0}(m_s(1), m_s(2)) a^\dagger(r_2 m_s(2)) a^\dagger(r_1 m_s(1)). \end{aligned} \quad (3.264)$$

(Здесь мы пренебрегли тем, что относительное движение двух нейтронов может зависеть от их положения относительно протона и ядра-мишени. Такие эффекты приводят к тому, что волновая функция динейтрана оказывается зависящей от радиуса-вектора \mathbf{r} .)

Оператор $A^\dagger(\mathbf{r})$ можно разложить по операторам $a^\dagger(v)$, которые описывают передачу частицы на определенные одночастичные орбиты ядра:

$$A^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{v_1 v_2} \langle v_1 v_2 | ^2 n, \mathbf{r} \rangle_a a^\dagger(v_2) a^\dagger(v_1). \quad (3.265)$$

Под индексом v можно понимать, например, совокупность квантовых чисел $n l j m$. Коэффициентом $\langle v_1 v_2 | ^2 n, \mathbf{r} \rangle_a$ определяется взаимное перекрывание волновых функций динейтрана в точке \mathbf{r} и антисимметризованного двухчастичного состояния $|v_1 v_2\rangle_a$. Поскольку состояние динейтрана антисимметрично (1S), можно написать, что

$$\langle v_1 v_2 | ^2 n, \mathbf{r} \rangle_a = \sqrt{2} \langle v_1 v_2 | ^2 n, \mathbf{r} \rangle, \quad (3.266)$$

где коэффициент перекрытия без индекса a относится к неантисимметризованному двухчастичному состоянию $|v_1 v_2\rangle$.

Амплитуду перехода для передачи динейтрана с определенным значением углового момента J и его проекции M получим, разложив амплитуду передачи в точке \mathbf{r} по шаровым функциям. Тогда

$$f^{(+2)}(rJM; I_1 M_1 \rightarrow I_2 M_2) = \langle I_2 M_2 | A^\dagger(rJM) | I_1 M_1 \rangle f_{\text{одн}}^{(+2)}(rJM), \quad (3.267)$$

где

$$\begin{aligned} f_{\text{одн}}^{(+2)}(rJM) &= \int d\Omega i^{-J} Y_{JM}^*(\hat{\mathbf{r}}) f_{\text{одн}}^{(+2)}(\mathbf{r}), \\ A^\dagger(rJM) &= \int d\Omega i^J Y_{JM}(\hat{\mathbf{r}}) A^\dagger(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.268)$$

В представлении волновых функций модели оболочек

$$A^\dagger(rJM) = \frac{1}{2} \sum_{v_1 v_2} \langle v_1 v_2 | ^2 n, rJM \rangle_a a^\dagger(v_2) a^\dagger(v_1). \quad (3.269)$$

Для деформированных ядер путем преобразования к внутренней системе осей получаем, что

$$\begin{aligned} A^{\dagger}(rJM) &= \sum_{M'} \mathcal{Z}_{MM'}^J(\omega) A^{\dagger}(rJM'), \\ A^{\dagger}(rJM') &= \frac{1}{2} \sum_{v_1 v_2} \langle v_1 v_2 | 2n, rJM' \rangle_a a^{\dagger}(v_2) a^{\dagger}(v_1). \end{aligned} \quad (3.270)$$

Здесь M' — составляющая углового момента относительно оси 3 внутренней системы координат, а v — квантовое число, которым определяются одночастичные орбиты в деформированном поле (внутренние состояния). Составляющая M' равна сумме величин Ω для орбит v_1 и v_2 .

Об операторе перехода для реакций, протекающих с передачей двух частиц, будет сказано также в гл. 8, где речь будет идти об экспериментах, в которых проверяется схема спаривания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6 РЕЗОНАНСНЫЕ РЕАКЦИИ

Для сечений многих ядерных реакций и процессов рассеяния (когда энергии налетающих частиц не слишком велики) характерно наличие острых резонансов. Это можно объяснить образованием метастабильных составных систем, время жизни которых велико по сравнению с временем пролета частицы через ядро. Стабильность таких резонансных состояний может быть обусловлена центробежным или кулоновским барьером, задерживающим процессы распада, или же сложностью внутренней структуры этих состояний, в силу которой амплитуды для конфигураций, связанных с каналами распада, оказываются малыми.

В первом пункте данного приложения мы рассмотрим общие свойства резонансных сечений, а также вопрос о связи между резонансными параметрами и свойствами метастабильных составных состояний. Там же мы проведем анализ резонансных эффектов для усредненных сечений. В следующем пункте мы остановимся на простой модели потенциального рассеяния, которая наглядно демонстрирует некоторые важные свойства ядерных резонансных реакций и позволяет рассчитать в одночастичном приближении ширину резонансов.

1. Общие свойства резонансного рассеяния

Амплитуды распада

Распад ядерного резонансного состояния, как и распад нестабильной частицы, можно характеризовать амплитудами переходов в различные открытые каналы. Мы рассмотрим распад как двухчастичный процесс, в котором испускаемая частица оставляет ядро-остаток в определенном состоянии. Испускаемая частица может быть нуклоном, фотоном, сложной частицей (d , α и т. д.), а также может представлять собой систему с непрерывным спектром масс (пару нуклонов, электронно-нейтринную пару и т. д.).

Резонансные состояния будем различать по квантовым числам углового момента I_r и его проекции M_r , а каналам распада можно приписать, например,

квантовые числа I, l, j (спин ядра-остатка, орбитальный момент относительно движения и полный угловой момент, равный сумме орбитального момента \mathbf{l} и спина s испускаемой частицы). Амплитуду распада обозначим через $g(I_r \rightarrow I_l j)$ и нормируем ее так, чтобы квадрат ее абсолютного значения был равен парциальной ширине

$$\Gamma(I_r \rightarrow I_l j) = |g(I_r \rightarrow I_l j)|^2. \quad (3.271)$$

Парциальная ширина дает вероятность распада в единицу времени (умноженную на \hbar) для рассматриваемого канала. Полная ширина Γ_r равна сумме всех парциальных ширин:

$$\Gamma_r = \sum_{I_l j} \Gamma(I_r \rightarrow I_l j), \quad (3.272)$$

и ею определяется время жизни метастабильного состояния. Экспоненциальный характер распада означает, что зависимость от времени волновой функции распадающегося состояния такая же, как и стационарного состояния с комплексной энергией $E_r - \frac{1}{2} i\Gamma_r$.

Распад можно также характеризовать амплитудами, в которых определены направление $\hat{\mathbf{p}}$ испускаемой частицы и проекции M и m_s спинов I и s :

$$g(I_r M_r \rightarrow IM \hat{\mathbf{p}} m_s) = \sum_{lj} \langle Im_s m_s | jm \rangle \langle IM jm | I_r M_r \rangle Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{p}}) g(I_r \rightarrow I_l j). \quad (3.273)$$

Если поляризация испускаемой частицы определяется спиральностью $\hat{h} = \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}_+$, то при нормировке амплитуд в представлении спиральности на телесный угол $8\pi^2$ (см. ниже) получаем, что

$$\begin{aligned} g(I_r M_r \rightarrow IM \hat{\mathbf{p}} h) &= \sum_{lj} \langle I0sh | jh \rangle \langle IM jm | I_r M_r \rangle \left(\frac{2l+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \mathcal{D}_{mh}^j(\hat{\mathbf{p}}) g(I_r \rightarrow I_l j) = \\ &= \sum_{jh} \langle IM jm | I_r M_r \rangle \left(\frac{2j+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \mathcal{Z}_{mh}^j(\hat{\mathbf{p}}) g(I_r \rightarrow I_l j). \end{aligned} \quad (3.274)$$

Последнее выражение, в котором каналы распада обозначены индексом h , а не l , особенно удобно в случае γ -излучения. При данных мультипольности и четности ($E\lambda$ или $M\lambda$) распад характеризуется комбинацией двух амплитуд $g(I_r \rightarrow I, h = \pm 1, j = \lambda)$ с одинаковым весом.

Соотношение (3.274) можно вывести так же, как было выведено выражение для волновой функции, зависящей от \hbar , в координатном пространстве (см. приложение 1, п. 1). Подчеркнем, что спиральности относительно направлений \mathbf{p} и \mathbf{r} — это разные величины, хотя в тех случаях, когда это не вызывает сомнений, мы будем обозначать их одной и той же буквой h . {Методы теории рассеяния в h -представлении были развиты в работе [253], а обозначения, которыми пользуется автор этой работы, отличаются от наших обозначений комплексным сопряжением \mathcal{Z} -функций (см. гл. 1, приложение 1) и выбором фиксированного значения для третьего угла Эйлера ($\phi = -\varphi$, см. приложение 1, п. 1).}

По аналогии с формулами (3.59) и (3.60) можно написать, что

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{p}} m_s\rangle &= \sum_h \mathcal{Z}_{msh}^s(\hat{\mathbf{p}}) |\mathbf{p} h\rangle, \\ \langle \mathbf{p} h | pljm \rangle &= \langle I0sh | jh \rangle \left(\frac{2l+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \mathcal{Z}_{mh}^j(\hat{\mathbf{p}}), \end{aligned} \quad (3.275)$$

где через $\hat{\mathbf{p}}$ обозначены три угла Эйлера, из которых третий угол ϕ — «лишний». Таким образом, угловая часть амплитуды (3.274) и (3.275) нормирована относительно интегрирования по телесному углу, равному $8\pi^2$. Заметим, что коэффи-

циенты преобразования, относящиеся к пространству импульсов, такие, как в формуле (3.274), не содержат фазового множителя i^l , который мы видели в формуле (3.60).

Преобразования состояний с определенным импульсом при пространственном отражении и обращении времени определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} | \mathbf{p} m_s \rangle &= | -\mathbf{p} m_s \rangle, \\ \mathcal{T} | \mathbf{p} m_s \rangle &= (-1)^{s+m_s} | -\mathbf{p} -m_s \rangle, \\ \mathcal{P} | \mathbf{p} h \rangle &= (-1)^{s-h} | -\mathbf{p} -h \rangle, \\ \mathcal{T} | \mathbf{p} h \rangle &= | -\mathbf{p} h \rangle,\end{aligned}\quad (3.276)$$

где через $-\mathbf{p}$ обозначено направление, которое получается при повороте импульса \mathbf{p} вокруг внутренней оси y' на угол $-\pi$. Соответствующее преобразование для состояний с определенной спиральностью в координатном представлении дается формулой (3.66).

При обращении времени распад $I_r \rightarrow I + s$ переходит в процесс образования состояния I_r при столкновении частиц со спинами I и s . Следовательно, амплитуды процессов распада и образования (см. гл. 1, приложение 2, п. 4) связаны между собой инвариантностью относительного обращения времени:

$$\begin{aligned}g(IIj \rightarrow I_r) &= g(I_r \rightarrow IIj), \\ g(IM\hat{\mathbf{p}}h \rightarrow I_r M_r) &= g(\overline{I_r M_r} \rightarrow \overline{IM\hat{\mathbf{p}}h}) = \\ &= (-1)^{I_r + M_r + I + M} g(I_r - M_r \rightarrow I - M - \hat{\mathbf{p}}h).\end{aligned}\quad (3.277)$$

Часто бывает удобным рассматривать распад (и образование) метастабильного состояния r как процесс, вызванный возмущением H' , которое представляет собой малую часть полного гамильтонiana и в отсутствие которого состояние r было бы полностью стабильным (см. также гл. 1, приложение 2, п. 4). Тогда амплитуда распада равна матричному элементу оператора H' , связывающему невозмущенное состояние r с состоянием, которое характеризует рассеяние продуктов распада в отсутствие возмущения H' (нерезонансное рассеяние):

$$g(I_r \rightarrow IIj) = (2\pi)^{1/2} \langle (IIj) I_r \text{ out} | H' | I_r \rangle. \quad (3.278)$$

Коэффициент пропорциональности соответствует нормировке на единичную энергию состояний непрерывного спектра.

В случае испускания фотона или лептона взаимодействие H' можно представить в виде интеграла от локальной плотности взаимодействия, пропорциональной электромагнитному и слабому токам (см. приложения 3 и 4). В случае же ядерных реакций взаимодействие H' имеет более сложную пелокальную структуру. Но нам нет необходимости знать явный вид взаимодействия H' , поскольку мы, основываясь на метастабильности резонансного состояния, хотим рассматривать процессы распада и образования как эффекты первого порядка теории возмущений.

В свое время был поднят вопрос [130], закончили ли в случае ядерных процессов в отличие от того, что мы имеем в случае фотопроцессов, брать независимые наборы функций для связанных состояний и продуктов распада. Но в данном случае проблема «сверхполноты» степеней свободы не представляет, по-видимому, серьезных трудностей. Можно, например, состояния непрерывного спектра квантовать в объеме, из которого исключена область, занимаемая ядром. Заметим, что в настоящее время трудно провести резкую границу между фотопроцессами, сопровождаемыми рождением частицы, и процессами испускания частицы, которая уже присутствовала в системе.

Резонансное рассеяние

Резонансную реакцию можно рассматривать как процесс, который состоит из двух этапов: $1 \rightarrow r \rightarrow 2$, т. е. из образования и последующего распада резонанского состояния r . Входной и выходной каналы 1 и 2 будем характеризовать направлением \vec{r} относительного движения частиц, участвующих в реакции, и их поляризацией. Амплитуда резонансного рассеяния $f_{\text{рез}} (1 \rightarrow r \rightarrow 2)$ содержит произведение амплитуд образования $g (1 \rightarrow r)$ и распада $g (r \rightarrow 2)$ и может быть вычислена во втором порядке по теории возмущений.

Матричный элемент перехода для процессов второго порядка имеет вид [см. формулу (3.289)]

$$\begin{aligned} \langle 2 \text{ out} | V | 1 \text{ in} \rangle &= \sum_{M_r} \frac{\langle 2 \text{ out} | H' | I_r M_r \rangle \langle I_r M_r | H' | 1 \text{ in} \rangle}{E - E_r + 1/2 i \Gamma_r} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{M_r} \frac{g (1 \rightarrow I_r M_r) g (I_r M_r \rightarrow 2)}{E - E_r + 1/2 i \Gamma_r}. \end{aligned} \quad (3.279)$$

Взяв во втором порядке теории возмущений для промежуточного состояния комплексную энергию $E_r - 1/2 i \Gamma_r$, мы тем самым учли затухание резонанского состояния, вызванное его связью со всеми различными каналами распада. Виртуальные переходы, вызванные такой связью, приводят также к небольшому энергетическому сдвигу резонанского состояния (эффекту собственной энергии), который учитывается в величине E_r . Поэтому в расчетах по теории возмущений, приводящих к формуле (3.279), мы пользуемся представлением, в котором влияние взаимодействия H' (если не считать бесконечно малой его части, связывающей выбранные входной и выходной каналы 1 и 2) включено в свойства резонанского состояния. (Вопрос о взаимодействии H' между фиксированным промежуточным состоянием с вещественной энергией и полной совокупностью каналов распада рассматривается, например, в работах [130, 228].)

Полную амплитуду рассеяния можно записать в виде

$$f (1 \rightarrow 2) = f_{\text{нерез}} (1 \rightarrow 2) + f_{\text{рез}} (1 \rightarrow 2), \quad (3.280)$$

где первый член (нерезонансная амплитуда) соответствует рассеянию в отсутствие возмущения H' , а второй, резонансный, член учитывает действие возмущения H' .

Близи острого резонанса нерезонансная амплитуда должна быть приблизительно постоянной. В некоторых случаях нерезонансное рассеяние можно связать с рассеянием на потенциале или с прямыми реакциями.

Резонансная амплитуда пропорциональна матричному элементу перехода (3.279). Если амплитуда f нормирована согласно формуле (1.259), то

$$f_{\text{рез}} (1 \rightarrow 2) = -4\pi^2 \hbar (p_1 p_2)^{-1/2} \langle 2 \text{ out} | V | 1 \text{ in} \rangle, \quad (3.281)$$

[Коэффициент пропорциональности можно получить из аналогичного выражения для вероятности перехода в единицу времени, равного $2\pi\hbar^{-1} |\langle 2 \text{ out} | V | 1 \text{ in} \rangle|^2 d\Omega$, пользуясь формулами (1.261) и (1.262).] Так, подставляя (3.279) в (3.281), получаем амплитуду резонанского рассеяния в форме Брейта — Вигнера [63]

$$\begin{aligned} f_{\text{рез}} [(IM\hat{p}h)_1 \rightarrow (IM\hat{p}h)_2] &= \\ &= -2\pi\hbar (p_1 p_2)^{-1/2} \sum_{M_r} \frac{g [(IM\hat{p}h)_1 \rightarrow I_r M_r] g [I_r M_r \rightarrow (IM\hat{p}h)_2]}{E - E_r + 1/2 i \Gamma_r}. \end{aligned} \quad (3.282)$$

Для определенности мы воспользовались для входящей и выходящей частиц \hbar -представлением. Сечение выражается через амплитуду рассеяния по форму-

ле (1.262). [Заметим, что в \hbar -представлении дополнительный множитель 2π определяется нормировкой (3.274).]

В отсутствие нерезонансного рассеяния полное резонансное сечение в случае неполяризованных мишеней и налетающей частицы записывается в виде

$$\frac{1}{(2s_1+1)(2I_1+1)} \sum_{h_1 M_1 h_2 M_2} \int d\sigma (1 \rightarrow 2) = \\ = \frac{2I_r+1}{(2s_1+1)(2I_1+1)} \pi \lambda_1^2 \frac{\Gamma(r \rightarrow 1) \Gamma(r \rightarrow 2)}{(E - E_r)^2 + 1/4 \Gamma_r^2}, \quad (3.283)$$

где $\Gamma(r \rightarrow 1)$ — ширина распада резонансного состояния по каналу 1, определяемому состоянием I_1 и падающей частицей со спином s_1 . Величина $\Gamma(r \rightarrow 2)$ имеет аналогичный смысл.

Интерференция резонансной и нерезонансной частей амплитуды рассеяния зависит от фаз амплитуд распада. Эти фазы можно связать с фазами нерезонансного рассеяния, исходя из требования унитарности амплитуды рассеяния и пользуясь соотношениями между амплитудами распада и образования, вытекающими из инвариантности относительно обращения времени (см. гл. 4, приложение 2, п. 4). Такая связь имеет особенно простой вид в представлении B , в котором диагональны амплитуды нерезонансного рассеяния (собственный канал нерезонансного рассеяния). Тогда из формулы (1.267) получаем, что

$$g(I_r \rightarrow B) = \exp(i\delta_B) [\Gamma(I_r \rightarrow B)]^{1/2}, \quad (3.284)$$

где δ_B — фаза нерезонансного рассеяния в канале B .

Легко видеть, что общий вид амплитуды резонансного рассеяния (3.282) непосредственно следует из предположения о существовании метастабильного состояния с временем жизни, намного превышающим характерное время внутреннего движения. Такая метастабильность означает, что данное состояние можно сделать стационарным за счет небольшого возмущения. Поэтому можно пользоваться общими результатами теории возмущений, даже если форма возмущения не определена и имеет сложную структуру. Задача же точного построения соответствующего оператора возмущения для метастабильных ядерных состояний с использованием координат испускаемой частицы, по-видимому, еще не решена.

Соотношение между амплитудой резонансного рассеяния и свойствами распадающегося состояния можно характеризовать аналитическими свойствами амплитуды рассеяния, рассматривая ее как функцию комплексной энергии E^1). Существование распадающегося состояния только с расходящимися волнами соответствует наличие у амплитуды рассеяния полюса при энергии $E_r = 1/2 i\Gamma_r$, равной энергии распадающегося состояния [см., например, формулу (1.255), которой определяется матрица рассеяния]. Точно так же связанным состояниям соответствуют полюсы амплитуды рассеяния с вещественными значениями энергии. Вычет в полюсе должен иметь факторизованный вид (3.282), поскольку каждый полюс, если считать его единственным, появляется в определенном собственном канале α матрицы рассеяния. Следовательно, вычет для амплитуды $f(1 \rightarrow 2)$ содержит произведение $\langle 2 \text{ out} | \alpha \rangle \langle \alpha | 1 \text{ in} \rangle$.

В окрестности полюса общее выражение для матрицы рассеяния состоит из члена, который приближенно можно считать постоянным, и полюсного члена. Поэтому в собственном для постоянного члена канале B матрицу можно записать в следующей форме:

$$\langle B' | S | B \rangle = \exp(2i\delta_B) \delta(B, B) - i \frac{g(B') g(B)}{E - E_r + 1/2 i\Gamma_r}. \quad (3.285)$$

¹⁾ К такому варианту теории резонансных ядерных реакций особенно часто прибегали Гамблет и Розенфельд (см., например, обзор [247], а также обзор [317]).

Вследствие $\mathcal{R}\mathcal{T}$ -инвариантности амплитуды образования и распада равны друг другу. Действительно, инвариантность относительно обращения времени означает, что $\langle B' | S | B \rangle = \langle \bar{B} | S | \bar{B}' \rangle$ [см. формулу (1.257)] и при стандартном выборе фаз $\mathcal{R} | \bar{B} \text{ in (out)} \rangle = | B \text{ in (out)} \rangle$ [см. формулу (1.39)]. Следовательно, $\langle B' | S | B \rangle$ — симметричная матрица. Далее, из условия унитарности

$$\langle B'' | SS^\dagger | B \rangle = \sum_{B'} \langle B'' | S | B' \rangle \langle B | S | B' \rangle^* = \delta(B'', B), \quad (3.286)$$

которое должно выполняться при всех значениях энергии E и не зависящих от энергии параметров $g(B)$, E_r и Γ_r , следует, что фаза амплитуды $g(B)$ равна δ_B , а амплитуды удовлетворяют соотношению

$$\sum_B |g(B)|^2 = \Gamma_r. \quad (3.287)$$

Это соответствует тому, что фаза для амплитуды распада выбирается согласно формуле (3.284), и тому, что полная ширина равна сумме парциальных ширин, т. е. формуле (3.272). Таким образом, полюсная структура и условия унитарности приводят к той же форме амплитуды резонансного рассеяния, что и полученная выше.

Главное в обоих представленных выше выводах резонансной формулы — это наличие долгоживущего метастабильного состояния. Метастабильность состояния можно учесть, если ввести оператор, которым определялось бы время задержки в процессе рассеяния, и таким образом получить общее выражение для резонансного рассеяния [198].

Хотя резонансную амплитуду всегда можно записать в виде (3.282), в литературе часто можно встретить различную параметризацию сечений резонансных реакций. Так, например, в вариантах теории ядерных реакций, предложенных Капуром — Найерлом и Вигнером — Айзенбумом, предполагается, что реакция ядра на падающее излучение сводится к образованию дискретных состояний составного ядра, которые определяются граничными условиями при некотором значении радиуса R , соответствующем поверхности ядра (см. обзоры [70, 276]).

Резонансные реакции можно характеризовать амплитудами распада, не зависящими от энергии, в случае острых и хорошо разделенных резонансов, для которых вся зависимость сечения от энергии в области резонанса определяется знаменателем формулы (3.282). Но даже в случае довольно острых резонансов необходимо принимать во внимание энергетическую зависимость амплитуд g , особенно тогда, когда при образовании и распаде мы имеем дело с прохождением через высокий потенциальный барьер, созданный центробежными или кулоновскими силами. В первом приближении амплитуду g можно записать в виде произведения постоянной величины (приведенной амплитуды), содержащей сведения о структуре резонансного состояния, на зависящий от энергии коэффициент проникновения, квадрат которого равен вероятности ухода частицы через потенциальный барьер от поверхности ядра в бесконечность. Кроме того, имеется еще дополнительный множитель (пропорциональный относительной скорости v), которым определяется поток на бесконечности. Все сказанное относится к случаю, когда r — слабо связанные состояния (резонанс с отрицательной энергией) или когда это состояние не связано, но его энергия E_r лежит в области порога для рассматриваемого канала. Коэффициент проникновения мы вычислим позже.

Отметим, что в тех случаях, когда необходимо учитывать зависимость параметров резонанса от энергии, разделение полной амплитуды рассеяния на прямой и резонансный члены оказывается неоднозначным. В подобной неоднозначности отражается то обстоятельство, что в рассматриваемых случаях свойства распадающегося состояния зависят от того, при какой энергии оно образовалось.

Вопрос об интерференции близко лежащих резонансов также выходит за пределы упрощенного анализа, проведенного выше, поскольку необходимо учи-

тывать взаимодействие распадающихся состояний. Кроме того, условия унитарности приводят к более сложным выражениям для фаз амплитуд распада и для соотношений, связывающих полную ширину с парциальными ширинами (см., например, работу [276] относительно двухуровневой модели в теории R -матрицы). Проблема интерферирующих резонансов особенно актуальна в области высоких возбуждений, где ширины становятся сравнимыми с расстояниями между уровнями или даже больше их. Чтобы выбрать ту или иную физическую концепцию для анализа высоковозбужденной области спектра, где уровни сильно перекрываются, необходимо решить ряд важных вопросов, требующих дальнейшего исследования.

Резонансы в усредненном сечении, гросс-структуре¹⁾

Рассмотренные выше резонансы были связаны с метастабильными состояниями составных систем, распад которых протекает по различным открытым каналам. Резонансные явления несколько иного вида возможны в том случае, когда метастабильное состояние образуется в начальной стадии реакции — так называемые «door-way» («входные») состояния, как, например, при движении налетающей частицы в поле, соответствующем среднему потенциалу ядра-мишени. Распад таких метастабильных состояний частично может идти через открытые каналы (прямые реакции), а частично — благодаря связи с внутренними степенями свободы сталкивающихся частиц (образование составного ядра).

Прямые и компаундные реакции различаются характерным временем распада. Поэтому резонансные эффекты, связанные с прямыми реакциями, можно исследовать, рассматривая волновые пакеты, позволяющие определить продолжительность столкновения с точностью Δt , малой по сравнению с временем жизни составных состояний, но достаточно большой для того, чтобы заметить резонанс в прямой реакции. Введение таких волновых пакетов соответствует усреднению сечений по интервалу энергии ΔE , малому по сравнению с шириной резонанса для прямого процесса, но большому по сравнению с расстояниями D между составными состояниями и их ширинами Γ . Таким образом, резонансы в прямых процессах связаны с гросс-структурой сечений. При более высоком разрешении обнаруживается тонкая структура сечений, природа которой зависит от отношения величин D и Γ . При $D \gg \Gamma$ сечения имеют хорошо разделенные резонансы, форма которых была рассмотрена выше. При $D \ll \Gamma$ между резонансами наблюдается сильная интерференция, а для сечений характерны флуктуации, связанные с суперпозицией составных состояний, энергия которых различается на величину порядка Γ . (Обзор таких флуктуационных эффектов дается, например, в работе [152].)

Сечения прямых реакций определяются средней амплитудой рассеяния $\langle f(1 \rightarrow 2) \rangle$, которая получается путем усреднения амплитуды $f(1 \rightarrow 2)$ по энергетическому распределению волнового пакета. Полное среднее сечение равно сумме сечений прямой реакции и реакции, идущей с образованием составного ядра, т. е.

$$\langle d\sigma(1 \rightarrow 2) \rangle = d\sigma_{\text{прям}}(1 \rightarrow 2) + d\sigma_{\text{комп}}(1 \rightarrow 2), \quad (3.288)$$

где

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{прям}}(1 \rightarrow 2) &= \frac{p_2}{p_1} |\langle f(1 \rightarrow 2) \rangle|^2 d\Omega, \\ d\sigma_{\text{комп}}(1 \rightarrow 2) &= \frac{p_2}{p_1} \langle |f(1 \rightarrow 2)|^2 \rangle d\Omega. \end{aligned} \quad (3.289)$$

¹⁾ Резонансные эффекты в ядерных сечениях, усредненных по энергии, рассматриваются в работе [163]. Физический смысл такого усреднения был уточнен в работе [176].

Здесь $\Delta f \equiv f - \langle f \rangle$ — флуктуирующая часть амплитуды рассеяния. Полное среднее сечение образования составного ядра соответствует затуханию прямого процесса рассеяния, и его можно найти по средней амплитуде $\langle f \rangle$, пользуясь соотношением унитарности (оптическая теорема). Основываясь на этом соотношении, которое можно получить, например, из формул (1.259) и (1.262), и на условии унитарности для S -матрицы, сечение можно выразить через минимую часть амплитуды упругого рассеяния вперед:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{комп}}(1) &= \sum_2 d\sigma_{\text{комп}}(1 \rightarrow 2) = (\sigma_{\text{полн}}(1)) - \sigma_{\text{прям}}(1) = \\ &= \frac{4\pi\hbar}{p_1} \langle \text{Im } f(1 \rightarrow 1) \rangle - \sigma_{\text{прям}}(1),\end{aligned}\quad (3.290)$$

где $\sigma_{\text{комп}}(1)$ и $\sigma_{\text{прям}}(1)$ — сечения, полученные интегрированием по всем конечным каналам 2.

Общее выражение для средней амплитуды рассеяния в окрестности хорошо разделенных и четких резонансов гросс-структуре можно вывести так же, как и в случае узких резонансов тонкой структуры. При этом нужно лишь учесть отсутствие унитарности для усредненной матрицы рассеяния. Так, амплитуда рассеяния $\langle f(1 \rightarrow 2) \rangle$ выражается в виде суммы нерезонансного и резонансного членов, как в формуле (3.280). Резонансная амплитуда имеет вид (3.282), причем для резонансных амплитуд образования и распада справедливо соотношение, вытекающее из инвариантности относительно обращения времени. Но теперь полная ширина Γ_r не равна просто сумме парциальных ширин распада по различным открытым для прямой реакции каналам, а дополняется членом Γ_c , который дает вероятность распада резонансного состояния с образованием составного ядра, т. е.

$$\Gamma_r = \sum_i \Gamma(r \rightarrow i) + \Gamma_c. \quad (3.291)$$

Индекс i относится к открытым каналам прямой реакции. [В работе [164], посвященной анализу «входных» состояний, ширина Γ_c обозначена через Γ^\downarrow , а ширина $\Gamma(r \rightarrow i)$ для открытых каналов — через Γ_i^\uparrow .]

Отсутствие унитарности матрицы рассеяния (результат образования составного ядра) означает, что фаза амплитуды распада больше не связана с фазой нерезонансного рассеяния формулой (3.284). Такое различие в фазах связано с затуханием движения частицы в канале распада.

Полное сечение образования составного ядра дается формулой (3.290), и его можно разделить на две части:

$$\sigma_{\text{комп}}(1) = (\sigma_{\text{комп}}(1))_{\text{нерез}} + (\sigma_{\text{комп}}(1))_{\text{рез}}. \quad (3.292)$$

Здесь первый член равен сечению в отсутствие резонанса, а второй член учитывает вклад от резонанса и эффект интерференции нерезонансного и резонансного рассеяния. При выводе выражений для сечений среднюю амплитуду рассеяния удобно записать в виде [см. формулы (3.280), (3.282) и (1.259)]

$$\begin{aligned}\langle f(1 \rightarrow 2) \rangle &= \langle f(1 \rightarrow 2) \rangle_{\text{нерез}} + \langle f(1 \rightarrow 2) \rangle_{\text{рез}}, \\ \langle f(1 \rightarrow 2) \rangle_{\text{нерез}} &= -i \frac{2\pi\hbar}{(p_1 p_2)^{1/2}} [2 | \langle S \rangle_{\text{нерез}} | 1 \rangle - \delta(1, 2)], \\ \langle f(1 \rightarrow 2) \rangle_{\text{рез}} &= \frac{2\pi\hbar}{(p_1 p_2)^{1/2}} \sum_{M_r} \frac{g(1 \rightarrow r) g(r \rightarrow 2)}{E - E_r + \frac{1}{2} i \Gamma_r}.\end{aligned}\quad (3.293)$$

Здесь $\langle 2 | \langle S \rangle_{\text{нерез}} | 1 \rangle$ —нерезонансная часть элемента S -матрицы. Тогда для резонансной части сечения образования составного ядра из формулы (3.290) с учетом формул (3.289) и (3.291) получаем, что

$$(\sigma_{\text{комп}}(1))_{\text{нерез}} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{p_1^2} \frac{1}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2} \sum_{M_r} \left\{ -|g(1 \rightarrow r)|^2 (\Gamma_r - \Gamma_c) + \right. \\ \left. + \left[\left(-i(E - E_r) + \frac{1}{2} \Gamma_r \right) h(1 \rightarrow r) g^*(1 \rightarrow r) + \text{компл. сопр.} \right] \right\}, \quad (3.294)$$

где амплитуда $h(1 \rightarrow r)$ определяется соотношением

$$h(1 \rightarrow r) \equiv \sum_i \langle i | \langle S \rangle_{\text{нерез}} | 1 \rangle g^*(r \rightarrow i). \quad (3.295)$$

Если амплитуда нерезонансного рассеяния, характеризующая движение входящей и выходящей частиц, не затухает из-за взаимодействия с составными состояниями, то среднее сечение образования нерезонансного составного состояния равно нулю. Кроме того, тогда сумма по прямым каналам i в формуле (3.295) оказывается полной суммой. Матрица $\langle S \rangle_{\text{нерез}}$ — унитарная, а $h(1 \rightarrow r) = g(1 \rightarrow r)$ [см. формулу (1.265)]. В этом случае резонансное сечение (3.294) имеет брейт-вигнеровскую форму:

$$(\sigma_{\text{комп}}(1))_{\text{нерез}} = \sigma_{\text{комп}}(1) = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{p_1^2} \sum_{M_r} \frac{|g(1 \rightarrow I_r M_r)|^2 \Gamma_c}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (3.296)$$

В случае неполяризованных мишени и налетающей частицы сечение (3.296) можно также записать в виде

$$\frac{1}{(2s+1)(2l+1)} \sum_{m_s M} \sigma_{\text{комп}}(IM \hat{p} m_s) = \\ = \sum_{lj} \pi \lambda^2 \frac{(2I_r + 1)}{(2s+1)(2l+1)} \frac{\Gamma(r \rightarrow llj) \Gamma_c}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (3.297)$$

(При записи сечений (3.294) и (3.296) в h -представлении необходимо включить согласно нормировке по формуле (3.274) дополнительный множитель, равный $2l$; см. замечание о нормировке в гл. 4, приложение 2, п. 3.)

Затухание при резонанском рассеянии появляется, например, тогда, когда налетающая частица движется в поле, соответствующем оптическому потенциалу с мнимой частью. Тогда амплитуды h и g не равны друг другу и мы можем написать, что

$$h(1 \rightarrow r) = g(1 \rightarrow r) b_1 \exp\{i\alpha_1\}, \quad (3.298)$$

где b_1 и α_1 — вещественные параметры. (Из вращательной инвариантности следует, что b_1 и α_1 зависят только от скалярных параметров входного канала.) Теперь сечение (3.294) принимает вид

$$(\sigma_{\text{комп}}(1))_{\text{нерез}} = \\ = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{p_1^2} \sum_{M_r} \frac{\Gamma(1 \rightarrow I_r M_r) [\Gamma_c - \Gamma_r (1 - b_1 \cos \alpha_1) + 2(E - E_r) b_1 \sin \alpha_1]}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (3.299)$$

Если фаза α_1 отличается от 0 (или π), то резонансное сечение имеет асимметричную форму. (Такая асимметрия для аналоговых резонансов рассматривается в работе [366].)

2. Параметры одночастичных резонансов

Выше мы не делали никаких специальных предположений относительно строения резонирующей системы. При этом были получены общие выражения, которые позволяют определить резонансные параметры по измеренным значениям сечений. Удобными единицами для амплитуд распада при испускании нуклонов оказываются одночастичные амплитуды $g_{\text{одн}}(l)$, соответствующие случаю, когда резонанс можно анализировать, рассматривая движение нуклона в поле ядра. Отношение амплитуд g и $g_{\text{одн}}$ показывает, в каком соотношении функция рассматриваемого канала распада входит в функцию резонансного состояния. Это отношение аналогично генетическому коэффициенту для связанных состояний [определенному, например, из процесса, идущего с передачей нуклона (см. приложение 5)].

Ниже мы займемся анализом резонансных эффектов при потенциальном рассеянии и вычислим амплитуду $g_{\text{одн}}$. Для простоты предположим, что имеется сферически-симметричная прямоугольная потенциальная яма, позволяющая просто и точно вычислять амплитуды рассеяния. Поскольку в случае реальных ядерных потенциалов очень существенна размытость поверхностного слоя (см. ниже), подобная модель может служить в основном лишь для иллюстрации. При количественном же вычислении параметров одночастичного резонанса необходимо провести численное интегрирование волнового уравнения. (При определении параметров одночастичного резонанса в случае несферических ядер необходимо учесть взаимодействие с вращательными степенями свободы, см. гл. 5, приложение 1.)

Рассеяние бесспиновых нейтральных частиц

Сначала рассмотрим случай рассеяния бесспиновых нейтральных частиц. При расстояниях r , превышающих радиус действия R потенциала, радиальное движение с определенным орбитальным моментом l описывается уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_l(r) = 0, \quad (3.300)$$

где

$$k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}, \quad u_l(r) = r \mathcal{R}_l(r). \quad (3.301)$$

Регулярные решения уравнения (3.300) обозначим через F_l , перегулярные — через G_l . Эти решения можно выразить через сферические функции Бесселя и Неймана

$$\begin{aligned} F_l(r) &= krj_l(kr), \\ G_l(r) &= krn_l(kr). \end{aligned} \quad (3.302)$$

Общее решение уравнения при $r > R$ выражается в виде линейной комбинации решений F_l и G_l , которую можно записать в следующем виде:

$$u_l(r) = \cos \delta_l F_l(r) + \sin \delta_l G_l(r) \approx \sin \left(kr + \delta_l - l \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{при } kr \gg 1. \quad (3.303)$$

Амплитуда рассеяния связана с фазами рассеяния δ_l обычным соотношением

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (\exp \{2i\delta_l\} - 1) (2l+1) P_l(\cos \theta), \quad (3.304)$$

а сечение рассеяния имеет вид

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (3.305)$$

Фазы рассеяния в формуле (3.303) определяются из условия непрерывности волновой функции и ее производной на границе потенциальной ямы, т. е. при $r=R$. Обозначив через L_l логарифмическую производную функции u_l при $r=R$, получим, что

$$L_l \equiv R \frac{1}{u_l(R)} \left(\frac{du_l}{dr} \right)_{r=R} = \left(\frac{\cos \delta_l F'_l + \sin \delta_l G'_l}{\cos \delta_l F_l + \sin \delta_l G_l} \right)_{r=R}, \quad (3.306)$$

где

$$F'_l = R \frac{dF_l}{dr}, \quad G'_l = R \frac{dG_l}{dr}. \quad (3.307)$$

Свойства величины L_l , которую можно получить из решений волнового уравнения при $r < R$, будут рассмотрены ниже. Сейчас мы только заметим, что L_l — функция полной энергии E рассеивающей системы.

Фазу рассеяния, которая получается из формулы (3.306), удобно записать в виде

$$\exp \{2i\delta_l\} = \frac{L_l - \Delta_l + i s_l}{L_l - \Delta_l - i s_l} \exp \{2i\xi_l\}. \quad (3.308)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s_l &= \frac{G_l F'_l - F_l G'_l}{G_l^2 + F_l^2} = kR \frac{1}{G_l^2 + F_l^2} \equiv kR v_l(kR), \\ \Delta_l &= \frac{G_l G'_l + F_l F'_l}{G_l^2 + F_l^2} = -\frac{1}{2} \frac{kR}{v_l} \frac{dv_l}{d(kR)}, \\ \exp \{2i\xi_l\} &= \frac{G_l - iF_l}{G_l + iF_l}, \end{aligned} \quad (3.309)$$

причем все величины вычислены при $r=R$. Точные выражения для параметров рассеяния, найденные по формулам (3.309), приведены в табл. 3.10.

Таблица 3.10

ПАРАМЕТРЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНА
НА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯМЕ

l	v_l	Δ_l	ξ_l
0	1	0	$-x$
1	$\frac{x^2}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-x + \frac{1}{2} \arcsin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$
2	$\frac{x^4}{9+3x^2+x^4}$	$-\frac{18+3x^2}{9+3x^2+x^4}$	$-x + \frac{1}{2} \arcsin^{-1} \frac{18x-6x^3}{9+3x^2+x^4}$
$x \ll l^{1/2}$	$\sim \left[\frac{x^l}{(2l-1)!!} \right]^2$	$\sim -l$	$\sim -\frac{x}{2l+1} \left[\frac{x^l}{(2l-1)!!} \right]^2$

Величины v_l , Δ_l и ξ_l вычислены по формулам (3.309). Для краткости введено обозначение $x=kR$.

Величина v_l характеризует проницаемость центробежного барьера; она равна отношению интенсивностей расходящейся волны на бесконечности и при $r=R$:

$$u_l^{(+)}(r) = G_l + iF_l \approx \exp \left\{ i \left(kr - l \frac{\pi}{2} \right) \right\},$$

$$kR \gg l. \quad (3.310)$$

Фазовый множитель ξ_l можно рассматривать как фазу рассеяния на непроницаемой сфере ($L_l = \infty$). Таким образом, согласно формуле (3.308), полная фаза рассеяния δ_l равна сумме медленно изменяющейся фазы ξ_l , связанной с тем, что волновое число резко изменяется при $r=R$, и некоторой дополнительной фазы, зависящей от деталей движения при $r < R$ и определяющей величиной L_l .

Резонанс возможен лишь тогда, когда время жизни ядерного состояния велико по сравнению с временем прохождения частицы через ядро. В рассматриваемой одночастичной модели такое долгоживущее состояние может встретиться только в том случае, если высота центробежного барьера велика по сравнению с энергией налетающей частицы. Тогда $G_l \gg F_l$, а поэтому $s_l \ll 1$ и $\xi_l \ll 1$. Следовательно, полная фаза рассеяния оказывается малой (центробежный барьер не дает частице войти в сферу радиусом R) при всех значениях энергии, кроме близких к E_r , при которых

$$L_l(E_r) - \Delta_l(E_r) = 0. \quad (3.311)$$

Когда выполняется данное соотношение, фаза $\delta_l \approx \pi/2$, а вклад в сечение рассеяния от канала с данным орбитальным моментом l достигает своего максимального значения, равного $4\pi(2l+1) k^{-2}$.

Чтобы исследовать зависимость сечения от энергии в малом интервале около резонансной энергии E_r , разложим разность $L_l - \Delta_l$ в степенной ряд

$$L_l(E) - \Delta_l = -\frac{1}{\gamma}(E - E_r) + \dots . \quad (3.312)$$

Коэффициент разложения γ можно вычислить, если известны величины L и Δ_l :

$$\gamma^{-1} = - \left(\frac{\partial L_l}{\partial E} \right)_{E=E_r} + \left(\frac{\partial \Delta_l}{\partial E} \right)_{E=E_r}. \quad (3.313)$$

Подставив разложение (3.312) в формулу (3.308), получим

$$\begin{aligned} \exp \{2i\delta_l\} &= \exp \{2i\xi_l\} \frac{E - E_r - is_l\gamma}{E - E_r + is_l\gamma} = \\ &= \exp \{2i\xi_l\} \frac{i\Gamma_r}{E - E_r + \frac{1}{2}i\Gamma_r} \exp \{2i\xi_l\}, \end{aligned} \quad (3.314)$$

где

$$\Gamma_r = 2\gamma s_l. \quad (3.315)$$

Поэтому амплитуду рассеяния (3.304) можно записать в виде, соответствующем формуле (3.280), т. е.

$$f(\theta) = f_{\text{рез}}(\theta) + f_{\text{нерез}}(\theta),$$

где

$$\begin{aligned} f_{\text{рез}} &= -\frac{2l+1}{2k} P_l(\cos \vartheta) \frac{\Gamma_r \exp \{2i\xi_l\}}{E - E_r + \frac{1}{2} i\Gamma_r}, \\ f_{\text{перез}} &= \frac{2l+1}{2ik} (\exp \{2i\xi_l\} - 1) P_l(\cos \vartheta) + \\ &+ \sum_{l' \neq l} \frac{2l'+1}{2ik} (\exp \{2i\delta_{l'}\} - 1) P_{l'}(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (3.316)$$

Резонансная амплитуда эквивалентна выражению (3.282) с амплитудой распада, соответствующей формуле (3.273), при

$$g_l = \Gamma_r^{1/2} \exp \{i\xi_l\}. \quad (3.317)$$

Легко видеть, что ξ_l — это фаза нерезонансного рассеяния, на которое накладывается резонансное рассеяние. Фаза амплитуды распада (3.317) определяется такими общими требованиями, как требование унитарности взаимодействия и его инвариантности относительно обращения времени [см. формулу (3.284)].

Резонансная ширина (3.315) выражается в виде произведения двух сомножителей, из которых первый, $2y$, зависит от внутреннего строения резонансного состояния (приведенная ширина), а второй, s_l , равен пропницаемости центробежного барьера v_l , умноженной на kR [см. формулы (3.309)]. Множитель kR пропорционален выходящему потоку.

Вычислим теперь логарифмическую производную L_l , исходя из решения волнового уравнения для внутренней области ($r < R$). Если V_0 — глубина потенциальной ямы, то «внутреннее волновое число» K определяется соотношением

$$K^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E - V_0), \quad (3.318)$$

а волновая функция и ее логарифмическая производная на поверхности ямы таковы:

$$\begin{aligned} u_l &\sim KRj_l(KR), \\ L_l &= 1 + KR \frac{j'_l(KR)}{j_l(KR)}. \end{aligned} \quad (3.319)$$

Резонансная ширина зависит от производной по энергии E величины L_l . Из волнового уравнения (3.300) для функции u_l и условия резонанса (3.311) находим, что

$$\left(\frac{\partial L_l}{\partial E} \right)_{E=E_r} = -\frac{MR^2}{\hbar^2} \left[1 - \frac{l(l+1) - \Delta_l(\Delta_l - 1)}{K^2 R^2} \right] \approx -\frac{MR^2}{\hbar^2}. \quad (3.320)$$

Последнее соотношение выполняется точно при $l=0$ (в этом случае $\Delta_l=0$), а при $l>0$ оно выполняется приближенно, если $kR < l^{1/2}$, так как тогда $\Delta_l \approx -l$ (см. табл. 3.10). Подобным же образом из формул (3.300) и (3.309) получаем, что

$$\frac{\partial \Delta_l}{\partial E} \approx \begin{cases} \frac{MR^2}{\hbar^2} \frac{2}{2l-1} & \text{при } l > 0, kR < l^{1/2}, \\ 0 & \text{при } l = 0. \end{cases} \quad (3.321)$$

Наконец, из соотношений (3.313), (3.315), (3.320) и (3.321) получаем приближенное выражение для одночастичной ширины

$$\Gamma_{\text{одн}} \approx \begin{cases} \frac{2\hbar^2}{MR^2} kRv_l(kR) \frac{2l-1}{2l+1} & \text{при } l > 0, kR < l^{1/2}, \\ \frac{2\hbar^2}{MR^2} kR & \text{при } l = 0. \end{cases} \quad (3.322)$$

Квазиклассическая интерпретация одночастичной ширины Годи

Структуру одночастичной ширины (3.322) нетрудно объяснить, если учесть физические условия, которым определяется скорость испускания частицы в одночастичной модели. В самом общем случае мы предполагаем, что

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} P, \quad (3.323)$$

где τ — период радиального движения частицы внутри потенциальной ямы, а P — коэффициент проникновения через барьер, которым определяется поток на бесконечности при единичном потоке, падающем на поверхность ядра изнутри.

Сначала рассмотрим скорость испускания частицы с орбитальным моментом $l = 0$. Период радиального движения таков:

$$\tau_{l=0} = \frac{2RM}{\hbar K}, \quad (3.324)$$

а значение коэффициента $P_{l=0}$ можно получить, рассматривая одномерный случай падения частицы на потенциальную яму. В этом случае

$$\Psi = \begin{cases} A \exp \{iKx\} + B \exp \{-iKx\} & \text{при } x < 0, V = V_0, \\ C \exp \{ikx\} & \text{при } x > 0, V = 0, \end{cases}$$

$$B = \frac{K-k}{K+k} A, \quad C = \frac{2K}{K+k}, \quad (3.325)$$

$$P_{l=0} = \frac{k}{K} \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{4kK}{(K+k)^2}.$$

Таким образом, при $k \ll K$ выражение для ширины $\Gamma_{\text{одн}}$ в случае орбитального момента $l = 0$ совпадает с выражением (3.322).

Отметим, что в простой одночастичной картине рассеяния нейтронов с орбитальным моментом $l = 0$ не может быть острых резонансов, так как при $kR < 1$ одночастичная ширина $\Gamma_{\text{одн}} > E$. В этом просто отражается то обстоятельство, что при отсутствии задерживающего барьера или же какой-либо сложности внутреннего движения время распада резонансного состояния не превышает времени, за которое налетающая частица проходит расстояние, равное диаметру ядра. Но в этом случае формулой (3.322) еще можно пользоваться, так как она правильно дает время распада одночастичного состояния.

Точно так же можно интерпретировать ширину $\Gamma_{\text{одн}}$ при $l > 0$, но соответствующие множители будут несколько более сложными. Классический период радиального движения вычислим путем интегрирования по орбите

$$(\tau_l)_{\text{класс}} = 2 \int_{r_0}^R \frac{dr}{v_r} = \frac{2M}{\hbar} \int_{r_0}^R dr \left(K^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{2MR}{\hbar K} \left(1 - \frac{l(l+1)}{K^2 R^2} \right)^{1/2}. \quad (3.326)$$

Здесь v_r — радиальная скорость, а r_0 — классическая точка поворота, определяющаяся условием $K^2 r_0^2 = l(l+1)$. На самом деле эта формула несколько занижает период, так как частица некоторое время проводит в области барьера, что запрещено в классическом случае. Соответствующую поправку к периоду для резонансного состояния вблизи нулевой энергии можно легко вычислить, поскольку в области барьера волновая функция пропорциональна r^{-l} . Таким образом, нормировочный интеграл оказывается равным

$$\int_0^R \psi r [K r j_l(Kr)]^2 + [KR j_l(KR)]^2 \int_R^\infty dr \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} = \frac{2l+1}{2l-1} \int_0^R dr [K r j_l(Kr)]^2. \quad (3.327)$$

Здесь, кроме известного выражения для интеграла от сферической функции Бесселя, мы воспользовались условием непрерывности волновой функции при $r=R$, согласно которому

$$\left(\frac{d}{dr} [K r j_l(Kr)] \right)_{r=R} = -l K j_l(KR). \quad (3.328)$$

Отсюда эффективный период

$$\tau_l = (\tau_l)_{\text{класс}} \frac{2l+1}{2l-1}. \quad (3.329)$$

{Увеличение периода τ соответствует вкладу в коэффициент γ от производной по энергии величины Δ_l [см. формулы (3.313), (3.320) и (3.321)].}

Коэффициент проникновения через барьер P_l удобно представить в виде произведения трех множителей. Первый множитель P_1 равен интенсивности выходящей волны на внешней поверхности ядра (деленой на интенсивность волны, падающей изнутри на поверхность ядра). При значении орбитального момента $l=0$ этот «множитель рассогласования» соответствует отношению $|C|^2 : |A|^2$ в формулах (3.325). При $l \neq 0$ из-за наличия центробежного барьера волновые числа на внутренней и внешней поверхностях ямы неодинаковы, т. е.

$$\begin{aligned} K_{\text{in}} &= \left(K^2 - \frac{l(l+1)}{R^2} \right)^{1/2}, \\ K_{\text{out}} &= i \left(\frac{l(l+1)}{R^2} - k^2 \right)^{1/2} \approx i \left(\frac{l(l+1)}{R^2} \right)^{1/2}, \\ P_1 &= \left| \frac{2K_{\text{in}}}{K_{\text{in}} + K_{\text{out}}} \right|^2 \approx 4 \left(1 - \frac{l(l+1)}{K^2 R^2} \right). \end{aligned} \quad (3.330)$$

Следующий множитель P_2 характеризует проникновение частицы через барьер и равен отношению интенсивности волны на бесконечности к интенсивности волны снаружи ядра на его поверхности. Множитель P_2 равен проницаемости v_l .

Наконец, чтобы получить отношение падающего потока к проходящему, нужно ввести множитель P_3 , равный отношению волнового числа k на бесконечности к волновому числу K_{in} на внутренней поверхности ядра. Итак, собирая вместе эти множители, получаем выражение

$$P_l = P_1 P_2 P_3 = \frac{4k}{K} \left(1 - \frac{l(l+1)}{K^2 R^2} \right)^{1/2} v_l(kR). \quad (3.331)$$

Исходя из такого выражения для коэффициента P_l и полученного выше выражения для периода τ_l , мы получим как раз выражение (3.322) для одночастичной ширины.

Влияние спина

В случае когда рассеивается частица со спином s , потенциал может зависеть не только от орбитального момента l , но и от полного спина j (спин-орбитальные силы). Но для каждого канала с определенными квантовыми числами l и j радиальное движение будет точно таким же, как и рассмотренное выше, и мы снова для одночастичной ширины получим формулу (3.322).

Влияние кулоновских сил

Все сказанное выше с небольшими изменениями относится и к случаю заряженной падающей частицы. Внешние решения F_l и G_l следует заменить соответствующими волновыми функциями, описывающими движение частицы в кулоновском поле, а именно:

$$\frac{F_l}{G_l} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \frac{\sin \left\{ kr - l \frac{\pi}{2} - \eta \ln 2kr + \sigma_l \right\}}{\cos}, \quad (3.332)$$

где

$$\eta = \frac{zZe^2}{\hbar v} \quad (3.333)$$

— параметр, которым определяется величина кулоновского искажения, z и Z — зарядовые числа ядра-мишени и налетающей частицы, а v — асимптотическая скорость. Кулоновская фаза рассеяния σ_l определяется выражением

$$\exp \{2i\sigma_l\} = \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)} = \frac{(l+i\eta)(l-1+i\eta) \dots (1+i\eta)}{(l-i\eta)(l-1-i\eta) \dots (1-i\eta)} \exp \{2i\sigma_0\}. \quad (3.334)$$

Фаза рассеяния в формуле (3.303) — это ядерная фаза рассеяния. Поэтому полная фаза рассеяния δ_l , которая берется при вычислении амплитуды рассеяния (3.304), равна сумме ядерной фазы и кулоновской фазы σ_l . Итак, мы снова получаем выражение (3.308), где, однако, величины Δ_l и s_l определены через регулярные и нерегулярные кулоновские волновые функции, которыми в формуле (3.309) заменены функции Бесселя, и где в фазу потенциального рассеяния ξ_l входит кулоновская фаза, т. е.

$$\exp \{2i\xi_l\} = \frac{G_l - iF_l}{G_l + iF_l} \exp \{2i\sigma_l\}. \quad (3.335)$$

При $r < R$ частица движется в поле, соответствующем потенциалу, который состоит из постоянной части с глубиной V_0 и кулоновского потенциала, зависящего от распределения заряда ядра. Для одночастичной ширины можно получить приближенное выражение, если предположить, что суммарный потенциал постоянен (для кулоновского потенциала берется его значение на поверхности ядра), а производную по энергии Δ_l вычислить на основе ВКБ-приближения. Тогда мы получим, что

$$\text{Годн} \approx \frac{2\hbar^2}{MR^2} kR \frac{V_0}{V_0 + zZe^2/R} v_l(kR, \eta) \left\{ 1 - \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + 2kR\eta \right]^{-1/2} \right\}, \quad (3.336)$$

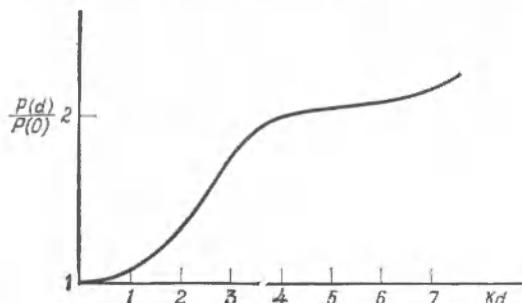
где v_l — коэффициент проницаемости [см. формулу (3.309)], вычисленный с кулоновскими функциями. (Формулы и соответствующие графики для вычисления кулоновских проницаемостей в ВКБ-приближении приводятся в работе [331].)

Зависимость потенциала от изоспина

В случае ядер с пейтронным избытком ядерный потенциал содержит изовекторную составляющую, в силу чего возможен обмен зарядом между нуклоном и ядром. При отсутствии кулоновского взаимодействия собственные состояния рассеяния определялись бы полным изоспином T , который может принимать значения $T_0 \pm 1/2$, где T_0 — изоспин ядра-мишени. Но кулоновское взаимодействие может привести к сильному взаимодействию между состояниями с $T = T_0 + 1/2$ и $T = T_0 - 1/2$. Такое взаимодействие существенно, например, в случае аналоговых резонансов при рассеянии протона (см. гл. 1, примеры к § 3).

Влияние размытости ядерной поверхности

Преимущество приведенного выше выражения для одночастичной ширины Годи — его простота, но оно выведено в предельном случае четкой граничной поверхности ядра, и в этом его недостаток. Как хорошо известно из оптики, в случае резкой границы отражение значительно сильнее (и, следовательно, меньше вероятность распада), чем при постепенном убывании потенциала до



Фиг. 3.10. Коэффициент проникновения в случае трапецидального потенциала.

Кривая дает отношение коэффициента проникновения $P(d)$ в случае трапецидального потенциала с толщиной поверхностного слоя d [см. формулы (3.338) и (3.339)] к коэффициенту проникновения в случае ступенчатого потенциала [$d = 0$, см. формулу (3.326)]. Внутреннее волновое число обозначено через K . Предполагается, что энергия прошедшей волны равна нулю ($\hbar = 0$).

нуля. Можно приближенно учесть размытость поверхности, если задачу о проникновении через потенциальный барьер, решение которой дается формулой (3.325), несколько изменить и считать, что потенциал линейно убывает на участке длиной d .

В той области, где действует постоянная сила, решения можно выразить через функции Бесселя порядка $1/3$. Для простоты мы ограничимся случаем нулевой энергии и снова рассмотрим волну, падающую со стороны отрицательных значений x :

$$\varphi = \begin{cases} A \exp \{iKx\} + B \exp \{-iKx\} & \text{при } x < 0, V = V_0, \\ C z^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} K dz^{3/2} \right) & \text{при } 0 < x < d, V = zV_0, z = 1 - \frac{x}{d}, \\ D & \text{при } x > d, V = 0. \end{cases} \quad (3.337)$$

Приравнивая волновые функции при $x=0$ и $x=d$, находим, что

$$\left| \frac{D}{A} \right|^2 = 4 \left\{ \left[J_{2/3} \left(\frac{2}{3} Kd \right) \right]^2 + \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} Kd \right) \right]^2 \right\}^{-1} \left(\frac{1}{3} Kd \right)^{-2/3} \left[\Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \right]^{-2}. \quad (3.338)$$

Этот коэффициент нужно сравнивать с его предельным значением при $d \rightarrow 0$ (которое равно 4), и поэтому на фиг. 3.10 представлена зависимость отношения $P(d)/P(0)$ от величины Kd . Размытость ядерного потенциала $d \approx 2,5$ ферми, что соответствует $Kd \approx 4$ и тем самым приводит к увеличению одночастичной ширины Годн в 2 раза. (Расчет проницаемости в случае потенциала Вудса — Саксона проводится, например, в работе [437].)

Влияние зависимости потенциала от скорости

Зависимость потенциала от скорости также влияет на величину резонансных ширин. Если рассматривать потенциал как функцию энергии падающей частицы, то производную по энергии от величины L_l следует умножить на $(1 + \partial V_0 / \partial E)$, ширина же соответственно уменьшится во столько же раз. На прохождение частицы через поверхность может также влиять нелокальность потенциала.

Влияние минимого потенциала

При анализе гросс-структурных резонансов одночастичные параметры резонанса относятся к движению частицы в комплексном потенциале

$$U = V + iW. \quad (3.339)$$

При таком потенциале у внутреннего волнового числа и, следовательно, у логарифмической производной L_l^0 , входящих в формулу (3.308) для фазы рассеяния δ_l , имеются мнимые части. Поэтому фаза δ_l принимает комплексные значения. Это соответствует отсутствию унитарности, обусловленному тем, что движение частицы затухает в случае оптического потенциала.

Нетрудно обнаружить характерные изменения в резонанском рассеянии, вызванном мнимым потенциалом, если рассмотреть эффекты первого порядка, связанные с наличием малого потенциала W . Обозначив через $L_l^{(0)}(E)$ логарифмическую производную при $W = 0$, имеем, что

$$L_l(E) = L_l^0(E - iW) \approx L_l^0(E) - iW \frac{\partial L_l^0}{\partial E}. \quad (3.340)$$

Таким образом, выражая резонансные параметры E_r и γ через L_l^0 [см. формулы (3.311) и (3.312)], из формулы (3.308) получаем, что

$$\exp \{2i\delta_l\} = \exp \{2i\xi_l\} - \frac{i\Gamma_l}{(E - E_r) + \frac{1}{2}i\Gamma_r} \exp \{2i\xi_l\}, \quad (3.341)$$

где

$$\Gamma_l = 2\gamma s_l,$$

$$\Gamma_r = \Gamma_l + \Gamma_c,$$

$$\Gamma_c = 2\gamma \frac{\partial L}{\partial E} W = \begin{cases} -2W & \text{при } l=0, \\ -2 \frac{2l-1}{2l+1} W & \text{при } l \neq 0. \end{cases} \quad (3.342)$$

В рассматриваемом приближении потенциал W не оказывает влияния на ширину Γ_l , но полная ширина Γ_r увеличивается на величину Γ_c , которая характеризует распад резонансного состояния, вызванный поглощением [см. формулу (2.138)]. Уменьшение ширины поглощения Γ_c при $l \neq 0$ связано с тем, что частица проводит часть времени в области барьера, где потенциал веществен [см. формулу (3.327)].

Поглощение не оказывает влияния на фазу амплитуды распада, ибо в рассматриваемой модели нерезонансное рассеяние представляет собой рассеяние на непроницаемой сфере и поэтому не зависит от внутреннего потенциала.

Сечение реакции, связанное с поглощением (образованием составного ядра), дается выражением

$$(\sigma_l)_{\text{комп}} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) (1 - |\exp\{2i\delta_l\}|^2) = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma_l \Gamma_c}{(E - E_r)^2 + 1/4 \Gamma_r^2}. \quad (3.343)$$

Это выражение аналогично выражению (3.296), которое справедливо в случае нерезонансного рассеяния без затухания.

При учете членов более высокого порядка по W соотношения (3.341) и (3.343) остаются справедливыми, но при этом несколько изменяются параметры E_r , Γ_r и Γ_l . В оптической модели используются довольно большие мнимые потенциалы (см., например, фиг. 2.29), при которых ширины Γ_c намного больше ширин Γ_l . В таких случаях вклад резонансов в канал упругого рассеяния невелик [317]. Если ширина Γ_c мала по сравнению с рассеянием между одночастичными уровнями, то и в этом случае возможны хорошо определенные метастабильные состояния, оказывающие влияние на сечения других реакций.

В случае аналоговых состояний, образующихся при рассеянии протона, ширина Γ_c определяется кулоновским взаимодействием, которое приводит к довольно слабому нарушению чистоты изоспина. Поэтому наблюдаются острые резонансы, ширина которых намного меньше ширины, связанной с образованием составного ядра при отсутствии правил отбора по изоспину. (См., например, то, что говорится по поводу фиг. 1.9.)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Adler S. L., Phys. Rev., **140**, B736 (1965).
2. Ajzenberg-Selove F., Lauritsen T., Nuclear Phys., **11**, 1 (1959).
3. Ajzenberg-Selove F., Lauritsen T., Nuclear Phys., **A114**, 1 (1968).
4. Alburger D. E., Gallmann A., Nelson J. B., Sample J. T., Warburton E. K., Phys. Rev., **148**, 1050 (1966).
5. Alder K., Winther A., Coulomb Excitation, New York (1966).
6. Alfvén H., Rev. Mod. Phys., **37**, 652 (1965).
7. Aller L. H., The Abundance of Elements, New York, 1961.
8. Amati D., в книге Compt. rend. Congrès Intern. de physique nucléaire, vol. 1, Paris, 1964, p. 57.
9. Andersen B. L., Bondorf J. P., Madsen B. S., Phys. Lett., **22**, 651 (1966).
10. Anderson J. D., Wong C., Phys. Rev. Lett., **7**, 250 (1961).
11. Anderson J. D., Wong C., McClure J. W., Phys. Rev., **138**, B615 (1965).
12. Arima A., Horie H., Progr. Theoret. Phys. (Kyoto), **12**, 623 (1954).
13. Arndt R. A., MacGregor M. H., Phys. Rev., **141**, 873 (1966).
14. Asaro F., Perlman I., Phys. Rev., **87**, 393 (1952).
15. Auerbach E. H., Dover C. B., Kerman A. K., Lemmer R. H., Schwarz E. H., Phys. Rev. Lett., **17**, 1184 (1966).
16. Austern N., в книге Selected Topics in Nuclear Theory, Vienna, 1963, p. 17.
17. Bahcall J. N., Nuclear Phys., **75**, 10 (1966).
18. Baranger M., в книге Proc. Intern. Nuclear Physics Conf. Gatlinburg, New York, 1967, p. 659.
19. Bardin R. K., Gollon P. J., Ullmann J. D., Wu C. S., Phys. Lett., **26B**, 112 (1967).
20. Barnard E., Ferguson A. T. G., McMurray W. R., van Heerden I. J., Nuclear Phys., **80**, 46 (1966).
21. Bartholomew G. A., в книге Nuclear Spectroscopy, Part A, New York, 1960, p. 304.
22. Batty C. J., Gilmore R. S., Stafford G. H., Nuclear Phys., **75**, 599 (1966).
23. Baumgartner E., Conzett H. E., Shield E., Slobodrian R. J., Phys. Rev. Lett., **16**, 105 (1966).
24. Bayman B. F., Groups and their Application to Spectroscopy, Copenhagen, 1957 [имеется перевод 1-го издания: Б. Ф. Бейман, Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии, М., 1961].
25. Bayman B. F., Am. Journ. Phys., **34**, 216 (1966).
26. Bearse R. C., Youngblood D. H., Segel R. E., Nuclear Phys., **A111**, 678 (1968).
27. Becker J. A., Wilkinson D. H., Phys. Rev., **134**, B1200 (1964).
28. Beer G. A., Brix P., Clerc H.-G., Laube B., Phys. Lett., **26**, B506 (1968).

29. B é g M. A. B., Lee B. W., Pais A., Phys. Rev. Lett., **13**, 514 (1964).
 30. Bell J. S., Nuclear Phys., **12**, 117 (1959).
 31. Belote T. A., Sperduto A., Buechner W. W., Phys. Rev., **139**, B80 (1965).
 32. Berggren T., Jacob G., Nuclear Phys., **47**, 481 (1963).
 33. Bernardini G., в книге Proc. Intern. School of Physics «Enrico Fermi», Course 32, New York, 1966.
 34. Bernstein J., Feinberg G., Lee T. D., Phys. Rev., **139**, B1650 (1965).
 35. Bethe H. A., Rev. Mod. Phys., **9**, 69 (1937).
 36. Bethe H. A., в книге Proc. Intern. Nuclear Phys. Conf., Gatlinburg, New York, 1967, p. 625.
 37. Bethe H. A., Journ. Phys. Soc. Japan, **24**, Suppl., 56 (1968).
 38. Bethe H. A., Bacher R. F., Rev. Mod. Phys., **8**, 82 (1936).
 39. Biedenharn L. C., Brussard P. J., Coulomb Excitation, Oxford, 1965.
 40. Biedenharn L. C., van Dam H., Quantum Theory of Angular Momentum, New York, 1965.
 41. Bjerregaard J. H., Hansen O., Nathan O., Stock R., Chapman R., Hinds S., Phys. Lett., **24B**, 568 (1967).
 42. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952 (имеется перевод: Д. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954).
 43. Blin-Stoyle R. J., Phys. Rev., **118**, 1605 (1960).
 44. Blin-Stoyle R. J., в книге Selected Topics in Nuclear Spectroscopy, Amsterdam, 1964, p. 213.
 45. Blin-Stoyle R. J., Perks M. A., Proc. Phys. Soc., **67A**, 885 (1954).
 46. Blin-Stoyle R. J., Rosina M., Nuclear Phys., **70**, 321 (1965).
 47. Bloch C., Phys. Rev., **93**, 1094 (1954).
 48. Blomqvist J., Wahlborn S., Arkiv Fysik, **16**, 545 (1960).
 49. Bodansky D., Eccles S. F., Farwell G. W., Rickey M. E., Robinson P. C., Phys. Rev. Lett., **2**, 101 (1959).
 50. Bodansky D., Braithwaite W. J., Shreve D. C., Storm D. W., Weitkamp W. G., Phys. Rev. Lett., **17**, 589 (1966).
 51. Boerner H., Representations of Groups, New York, 1963.
 52. Bohr A., в книге Lectures in Theoretical Physics, vol. 3, New York, 1961, p. 1.
 53. Bohr A., Mottelson B. R., Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **27**, № 16 (1953).
 54. Bohr A., Damgaard J., Mottelson B. R., в книге Nuclear Structure, Amsterdam, 1967, p. 1.
 55. Bohr N., Nature, **137**, 344 (1936).
 56. Bohr N., Kalckar F., Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **14**, № 10 (1937).
 57. Bohr N., Peierls R., Placzek G., Nature, **144**, 200 (1939).
 58. Bollinger L. M., Thomas G. E., Phys. Lett., **8**, 45 (1964).
 59. Bondorf J. P., Lütken H., Jägare S., Phys. Lett., **21**, 485 (1966).
 60. Bowen P. H., Scanlon J. P., Stafford G. H., Thresher J. J., Hodgson P. E., Nuclear Phys., **22**, 640 (1961).
 61. Bransden B. H., в книге Advances in Atomic and Molecular Physics, vol. 1, New York, 1965, p. 85.
 62. Breit G., Rev. Mod. Phys., **30**, 507 (1958).
 63. Breit G., Wigner E., Phys. Rev., **49**, 519 (1936).
 64. Breit G., Condon E. U., Present R. D., Phys. Rev., **50**, 825 (1936).
 65. Breit G., Hull M. H., Jr., Lassila K. E., Pyatt K. D., Jr., Ruppel H. M., Phys. Rev., **128**, 826 (1962).

66. Bréne N., Veje L., Roos M., Cronström C., Phys. Rev., **149**, 1288 (1966).
67. von Brentano P., Dawson W. K., Moore C. F., Richard P., Wharton W., Wiemann H., Phys. Lett., **26B**, 666 (1968).
68. Brix P., Kopfermann H., Zs. Phys., **126**, 344 (1949).
69. Brix P., Kopfermann H., Rev. Mod. Phys., **30**, 517 (1958).
70. Brown G. E., Rev. Mod. Phys., **31**, 893 (1959) (имеется перевод в книге: А. Лейн, Р. Томас, Теория ядерных реакций при низких энергиях, дополнение III, ИЛ, 1960).
71. Brown G. E., Unified Theory of Nuclear Models, 2nd edition, Amsterdam, 1967 (имеется перевод: Дж. Браун, Единая теория ядерных моделей и сил, М., 1970).
72. Bueckner K. A., The Many-Body Problem, New York, 1959 (имеется перевод: К. Бракнер, Теория ядерной материи, изд-во «Мир», 1964).
73. Bueckner K. A., Eden R. J., Francis N. C., Phys. Rev., **99**, 76 (1955).
74. Bryant R. A., в книге Proc. Intern. Nuclear Physics Conf., Gatlinburg, New York, 1967, p. 603.
75. Bühring W., Nuclear Phys., **61**, 110 (1965).
76. Bund G. W., Wajntal W., Nuovo cimento, **27**, 1019 (1963).
77. Burbidge E. M., Burbidge G. R., Fowler W. A., Hoyle F., Rev. Mod. Phys., **29**, 547 (1957).
78. Burbidge G., Ann. Rev. Nuclear Sci., **12**, 507 (1962).
79. Burhop E. H. S., Nuclear Phys., **B1**, 438 (1967).
80. Burnett D. S., Gatti R. C., Plasil F., Price P. B., Swiatecki W. J., Thompson S. G., Phys. Rev., **134**, B952 (1964).
81. Butler S. T., Proc. Roy. Soc., **A208**, 559 (1951).
82. Cabibbo N., Phys. Rev. Lett., **10**, 531 (1963).
83. Calaprice F. P., Commins E. D., Gibbs H. M., Wick G. L., Dobson D. A., Phys. Rev. Lett., **18**, 918 (1967).
84. Cameron A. G. W., в печати (1968).
85. Camp D. C., Langer L. M., Phys. Rev., **129**, 1782 (1963).
86. Campbell E. J., Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F., M. I. T. Techn. Rep. 73, Cambridge, Mass. (1960).
87. Carlson B. C., Talmi I., Phys. Rev., **96**, 436 (1954).
88. Černý J., Pehl R. H., Phys. Rev. Lett., **12**, 619 (1964).
89. Černý J., Pehl R. H., Rivet E., Harvey B. G., Phys. Lett., **7**, 67 (1963).
90. Chakrabarti A., Ann. Institut Henri Poincaré, **1**, 301 (1964).
91. Chamberlain O., Segré E., Tripp R. D., Wiegand C., Ypsilantis T., Phys. Rev., **105**, 288 (1957).
92. Chan L. H., Chen K. W., Dunning J. R., Ramsey N. F., Walker J. K., Wilson R., Phys. Rev., **141**, 1298 (1966).
93. Chen C. T., Hurley F. W., Nuclear Data, Sec. **B1-13**, 1 (1966).
94. Chesler R. B., Boehm F., Phys. Rev., **166**, 1206 (1968).
95. Chiloski G., Ricci R. A., Touchard J., Wapstra A. H., Nuclear Phys., **53**, 235 (1964).
96. Chiloski G., O'Kelley G. D., Eichler E., Bull. Am. Phys. Soc., **10**, 92 (1965).
97. Christensen C. J., Nielsen A., Bahnsen B., Brown W. K., Rustad B. M., Phys. Lett., **26B**, 11 (1967).
98. Christensen J. H., Cronin J. W., Fitch V. L., Turlay R., Phys. Rev. Lett., **13**, 138 (1964).
99. Christensen P. R., Nielsen O. B., Nordby H., Phys. Lett., **4**, 318 (1963).
100. Church E. L., Wenner J., Phys. Rev., **103**, 1035 (1956).
101. Church E. L., Wenner J., Ann. Rev. Nuclear Sci., **10**, 193 (1960).

102. Clementel E., Villi C., *Nuovo cimento*, **2**, 176 (1955).
103. Cohen B. L., *Phys. Rev.*, **130**, 227 (1963).
104. Cohen B. L., *Phys. Lett.*, **27B**, 271 (1968).
105. Coleman S., Glashow S. L., *Phys. Rev. Lett.*, **6**, 423 (1961).
106. Condon E. U., Shortley G. H., *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge, 1935 (имеется перевод: Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949).
107. Coor T., Hill D. A., Hornbyak W. F., Smith L. W., Snow G., *Phys. Rev.*, **98**, 1369 (1955).
108. Coulon T. W., Bayman B. F., Kashy E., *Phys. Rev.*, **144**, 941 (1966).
109. Craig R. M., Dore J. C., Greenlees G. W., Lilley J. S., Lowe J., Rowe P. C., *Nuclear Phys.*, **58**, 515 (1964).
110. Cziffra P., MacGregor M. H., Moravcsik M. J., Stapp H. P., *Phys. Rev.*, **114**, 880 (1959).
111. Dabrowski J., Sobczewski A., *Phys. Lett.*, **5**, 87 (1963).
112. Dalitz R. H., в книге *Proc. Intern. Conf. on Hyperfragments*, St. Cergue, March 1963, CERN Report 64-1, p. 147, Geneva, 1963.
113. Dalitz R. H., в книге *Proc. 13th Intern. Conf. on High-Energy Physics*, Berkeley, Cal., 1967.
114. Damgaard J., *Nuclear Phys.*, **79**, 374 (1966).
115. Damgaard J., Winther A., *Nuclear Phys.*, **54**, 615 (1964).
116. Damgaard J., Winther A., *Phys. Lett.*, **23**, 345 (1966).
117. Daniel H., Schmitt H., *Nuclear Phys.*, **65**, 481 (1965).
118. Danysz M. et al., *Nuclear Phys.*, **49**, 121 (1963).
119. Davis D. H., Lovell S. P., Csejthev-Barth M., Sutton J., Schorochoff G., O'Reilly M., *Nuclear Phys.*, **B1**, 434 (1967).
120. De Alfaro V., Regge T., *Potential Scattering*, Amsterdam, 1965 (имеется перевод: В. де Альфаро, Т. Редже, Потенциальное рассеяние, изд-во «Мир», 1966).
121. de Boer J., в книге *Progr. in Low Temperature Physics*, vol. 1, Amsterdam, 1957, p. 381.
122. De Dominicis C., Martin P. C., *Phys. Rev.*, **105**, 1447 (1957).
123. De Forest T., Jr., Walecka J. D., *Advances in Phys.*, **15**, 1 (1966).
124. de Groot S. R., Tolhoek H. A., Huiskamp W. J., Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965, p. 1199 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
125. Derommier P., Duclos J., Heitze J., Kleinknecht K., Rieseberg H., Soergel V., *Nuclear Phys.*, **B4**, 189 (1968).
126. de-Shalit A., Goldhaber M., *Phys. Rev.*, **92**, 1211 (1952).
127. de-Shalit A., Talmi I., *Nuclear Shell Theory*, New York, 1963.
128. Desjardins J. S., Rosen J. L., Havens W. W., Jr., Rainwater J., *Phys. Rev.*, **120**, 2214 (1960).
129. Di Capua E., Garland R., Pondrom L., Strelzoff A., *Phys. Rev.*, **133**, B1333 (1964).
130. Dirac P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, 2nd edition, Oxford, 1935 (имеется перевод: П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, М., 1960).
131. Dragt A., *Journ. Math. Phys.*, **6**, 533 (1965).
132. Drell S. D., Walecka J. D., *Phys. Rev.*, **120**, 1069 (1960).
133. Durand L., *Phys. Rev.*, **135**, B310 (1964).
134. Dyson F. J., *Journ. Math. Phys.*, **3**, 140, 157, 166 (1962).
135. Dyson F. J., *Journ. Math. Phys.*, **3**, 1191 (1962).
136. Dyson F. J., *Journ. Math. Phys.*, **3**, 1199 (1962).
137. Dyson F. J., *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics*, New York, 1966.

138. Dyson F. J., Mehta M. L., *Journ. Math. Phys.*, **4**, 701 (1963).
139. Edmonds A. R., в книге *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton, N.J., 1957 (имеется перевод: Деформация атомных ядер, сборник статей, ИЛ, 1958).
140. Ehrman J. B., *Phys. Rev.*, **81**, 412 (1954).
141. Eichler J., *Zs. Phys.*, **171**, 463 (1963).
142. Eichler J., Tombrello T. A., Bahcall J. N., *Phys. Lett.*, **13**, 146 (1964).
143. Eisenbud L., Wigner E. P., *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. (Wash.)*, **27**, 281 (1941).
144. Ellegaard C., Vedelsby P., *Phys. Lett.*, **26B**, 155 (1968).
145. Ellegaard C., Kantele J., Vedelsby P., *Phys. Lett.*, **25B**, 512 (1967).
146. Elliott J. P., Flowers B. H., *Proc. Roy. Soc.*, **242A**, 57 (1957).
147. Elliott J. P., Mavromatis H. A., Sanderson E. A., *Phys. Lett.*, **24B**, 358 (1967).
148. Elton R. B., *Nuclear Sizes*, Oxford, 1961 (имеется перевод: Л. Элтон, *Размеры ядер*, ИЛ, 1962).
149. Erba E., Facchini U., Saetta-Menichella H., *Nuovo cimento*, **22**, 1237 (1961).
150. Ericson M., Ericson T. E. O., *Ann. Phys.*, **36**, 323 (1960).
151. Ericson T., *Nuclear Phys.*, **11**, 481 (1959).
152. Ericson T., Mayer-Kuckuk T., *Ann. Rev. Nuclear Sci.*, **16**, 183 (1966).
153. Ericson T., *Advances in Physics*, **9**, 425 (1960).
154. Erskine J. R., *Phys. Rev.*, **149**, 854 (1966).
155. Erskine J. R., Marinov A., Schiffer J. P., *Phys. Rev.*, **142**, 633 (1966).
156. Euler H., *Zs. Phys.*, **105**, 553 (1937).
157. Evans H. D., *Proc. Phys. Soc.*, **63A**, 575 (1950).
158. Fano U., *Phys. Rev.*, **124**, 1866 (1961).
159. Favro L. D., Mac Donald J. F., *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1254 (1967).
160. Federman P., Rubinstein H. R., Talmi I., *Phys. Lett.*, **22**, 208 (1966).
161. Fermi E., *Zs. Phys.*, **88**, 161 (1934).
162. Feshbach H., в книге *Proc. Intern. Nuclear Phys. Conf. Gatlinburg*, New-York, 1967, p. 181.
163. Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F., *Phys. Rev.*, **96**, 448 (1954).
164. Feshbach H., Kerman A. K., Lemmer R. H., *Ann. Phys.*, **41**, 230 (1967).
165. Feynman R. P., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, **109**, 193 (1958).
166. Foldy L. L., *Phys. Rev.*, **92**, 178 (1953).
167. Foldy L. L., *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 471 (1958).
168. Foldy L. L., Walecka J., *Phys. Rev.*, **140**, B1339 (1965).
169. Fowler W. A., Hoyle F., *Astrophys. Journ. Suppl.*, **91** (1964).
170. Fox J. D., Moore C. F., Robson D., *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 198 (1964).
171. Franco V., *Phys. Rev.*, **140B**, 1501 (1965).
172. Frauenfelder H., Steffen R. M., в книге *Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy*, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965, p. 997 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
173. Freeman J. M., Murray G., Burcham W. E., *Phys. Lett.*, **17**, 317 (1965).
174. Freeman J. M., Jenkin J. G., Murray G., Burcham W. E., *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 959 (1966).
175. French J. B., *Phys. Lett.*, **13**, 249 (1964).

176. Friedman F. L., Weisskopf V. F., в книге Niels Bohr and the Development of Physics, New York, 1955, p. 134.
177. Frisch R., Stern O., Zs. Phys., **85**, 4 (1933).
178. Fujita J. I., Phys. Rev., **126**, 202 (1962).
179. Fujita J. I., Ikeda K., Nuclear Phys., **67**, 145 (1965).
180. Fulbright H. W., Alford W. P., Bilaniuk O. M., Deshpande V. K., Verba J. W., Nuclear Phys., **70**, 553 (1965).
181. Fuller G. H., Cohen V. W., Nuclear Moments, Appendix 1 to Nuclear Data Sheets, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn.
182. Fulmer R. H., McCarthy A. L., Cohen B. L., Middleton R., Phys. Rev., **133**, B955 (1964).
183. Gambetta A., Malvano R., Radicati L. A., Phys. Rev., **87**, 440 (1952).
184. Garg J. B., Rainwater J., Petersen J. S., Havens W. W., Jr., Phys. Rev., **134**, B985 (1964).
185. Gatto R., в книге High Energy Physics, vol. 2, New York, 1967, p. 1.
186. Gaudin M., Nuclear Phys., **25**, 447 (1961).
187. Gell-Mann M., Phys. Rev., **92**, 833 (1953).
188. Gell-Mann M., Phys. Rev., **111**, 362 (1958).
189. Gell-Mann M., Cal. Inst. Techn. Rep., CTSL-20, Pasadena Cal., 1961.
190. Gell-Mann M., Phys. Rev., **125**, 1067 (1962).
191. Gell-Mann M., Phys. Lett., **8**, 214 (1964).
192. Gell-Mann M., Bergman S. M., Phys. Rev. Lett., **3**, 99 (1959).
193. Gell-Mann M., Ne'eman Y., The Eightfold Way, New York, 1964.
194. Gerholm T. R., Pettersson B. G., в книге Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965, p. 981 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
195. Giltinan D. A., Thaler R. M., Phys. Rev., **131**, 805 (1963).
196. Glauert R. J., в книге Lectures in Theoretical Physics, vol. 1, New York, 1959.
197. Glendinning N. K., Phys. Rev., **137**, B102 (1965).
198. Goldberger M. L., Watson K. M., Collision Theory, New York, 1964 (имеется перевод: М. Гольдбергер, К. М. Ватсон, Теория столкновений, изд-во «Мир», 1967).
199. Goldhaber G., в книге Proc. 13th Intern. Conf. on High-Energy Physics, Berkeley, Cal., 1967.
200. Goldhaber M., Sunyayev A. W., Phys. Rev., **83**, 906 (1951).
201. Goldhaber M., Hill R. D., Rev. Mod. Phys., **24**, 179 (1952).
202. Goldstein H., в книге Fast Neutron Physics, Pt 2, New York, 1963, p. 1525.
203. Gomez L. C., Walecka J. D., Weisskopf V. F., Ann. Phys., **3**, 241 (1958).
204. Gorodetsky S., Freeman R. M., Gallmann A., Haas F., Phys. Rev., **149**, 801 (1966).
205. Goshal S. N., Phys. Rev., **80**, 939 (1950).
206. Gottfried K., Ann. Phys., **21**, 29 (1963).
207. Green A. E. S., Engler N. A., Phys. Rev., **91**, 40 (1953).
208. Green A. E. S., Sharma R. D., Phys. Rev. Lett., **14**, 380 (1965).
209. Greenless G. W., Pyle G. J., Phys. Rev., **149**, 836 (1966).
210. Greenless G. W., Pyle G. J., Tang Y. C., Phys. Rev. Lett., **17**, 33 (1966).
211. Gustafson C., Lam I. L., Nilsson B., Nilsson S. G., Arkiv Fysik, **36**, 613 (1967).
212. Hahn B., Ravenhall D. G., Hofstadter R., Phys. Rev., **101**, 1131 (1956).
213. Halbert M. L., Zucker A., Phys. Rev., **121**, 236 (1961).

214. Halbleib J. A., Sr., Sorensen R. A., Nuclear Phys., **A98**, 542 (1967).
215. Hamada Y., Hoshizaki N., в книге Compt. rend. Congrès Intern. de physique nucléaire, vol. 2, Paris, 1964, p. 195.
216. Hamada T., Johnston I. D., Nuclear Phys., **34**, 382 (1962).
217. Hammermesh M., Group Theory and its Application to Physical Problems, Reading, Mass, 1962 (имеется перевод: М. Хамермеш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, изд-во «Мир», 1966).
218. Hamilton J., Woolcock W. S., Rev. Mod. Phys., **35**, 737 (1963).
219. Hand L. N., Miller D. G., Wilson R., Rev. Mod. Phys., **35**, 335 (1963).
220. Hansen P. G., Nielsen H. L., Wilsky K., Cunningham J. G., Phys. Lett., **24B**, 95 (1967).
221. Harari H., Rashid M. A., Phys. Rev., **143**, 1354 (1966).
222. Harchol M., Jaffe A. M., Miron J., Unna I., Zioni Z., Nuclear Phys., **A90**, 459 (1967).
223. Harrison B. K., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A., Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Chicago, 1965.
224. Haxel O., Jensen J. H. D., Suess H. E., Phys. Rev., **75**, 1766 (1949).
225. Haxel O., Jensen J. H. D., Suess H. E., Zs. Phys., **128**, 295 (1950).
226. Hayward E., в книге Nuclear Structure and Electromagnetic Interactions, Edinburgh, 1965, p. 141.
227. Heisenberg W., Zs. Phys., **77**, 1 (1932).
228. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1954 (имеется перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956).
229. Henley E. M., в книге Isobaric Spin in Nuclear Physics, New York, 1966, p. 1.
230. Henley E. M., Jacobsohn B. A., Phys. Rev., **113**, 225 (1959).
231. Herczeg P., Nuclear Phys., **48**, 263 (1963).
232. Herman R., Hofstadter R., High Energy Electron Scattering Tables, Stanford, 1960.
233. Herzberg G., Spectra of Diatomic Molecules, Princeton, N.J., 1950.
234. Hiebert J. C., Newman E., Bassel R. H., Phys. Rev., **154**, 898 (1967).
235. Hillmann P., Johansson A., Tibell G., Phys. Rev., **110**, 1218 (1958).
236. Hinds S., Middleton R., Nuclear Phys., **84**, 651 (1966).
237. Hinds S., Middleton R., Bjerggaard J. H., Hansen O., Nathan O., Phys. Lett., **17**, 302 (1965).
238. Hodgson P. E., в книге Compt. rend. Congrès Intern. de physique nucléaire, Paris, 1964, p. 257.
239. Hofstadter R., Ann. Rev. Nuclear Sci., **7**, 231 (1957).
240. Hofstadter R., Nuclear and Nucleon Structure, New York, 1963.
241. Hoyle F., Fowler W. A., Nature, **197**, 533 (1963).
242. Huang K., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 767 (1957).
243. Huffaker J. N., Laird C. E., Nuclear Phys., **A92**, 584 (1967).
244. Hughes V. W., в книге Gravitation and Relativity, New York, 1964, ch. 13 (имеется перевод: Гравитация и относительность, изд-во «Мир», 1965).
245. Hull M. H., Jr., Lassila K. E., Ruppel H. M., Mac Donald F. A., Breit G., Phys. Rev., **128**, 830 (1962).
246. Hulthén L. M., Sugawara M., Encyclopedia of Physics, vol. 39, Berlin, 1957.
247. Humbert J., в книге Fundamentals of Nuclear Theory, Vienna, 1967.
248. Hund F., Zs. Phys., **105**, 202 (1937).
249. Itzykson C., Nauenberg M., Rev. Mod. Phys., **38**, 121 (1966).

250. Jackson J. D., Classical Electrodynamics, New York, 1962.
251. Jackson J. D., Blatt J. M., Rev. Mod. Phys., 22, 77 (1950).
252. Jacob G., Maris Th. A. J., Rev. Mod. Phys., 38, 121 (1966).
253. Jacob M., Wick G. C., Ann. Phys., 7, 404 (1959).
254. Jastrøw R., Phys. Rev., 79, 389 (1950).
255. Jensen J. H. D., Mayer M. G., Phys. Rev., 85, 1040 (1952).
256. Jones K. W., Schiffer J. P., Lee L. L. Jr., Marinov A., Lerner J. L., Phys. Rev., 145, 894 (1966).
257. Källén G., Nuclear Phys., B1, 225 (1967).
258. Kavanagh R. W., Phys. Rev., 133, B1504 (1964).
259. Kelson I., Levinson C. A., Phys. Rev., 134, B269 (1964).
260. Kemmer N., Polkinghorne J. C., Pursey D. L., Reports on Progr. in Physics, 22, 368 (1959).
261. Kerman A. K., McManus H., Thaler R. M., Ann. Phys., 8, 551 (1959).
262. Kerman A. K., Svenne J. P., Villars F. M. H., Phys. Rev., 147, 710 (1966).
263. Kirsten T., Schaeffer O. A., Norton E., Stoenner R. W., Phys. Rev. Lett., 20, 1300 (1968).
264. Kisslinger L., Phys. Rev., 98, 761 (1955).
265. Kistner O. C., Phys. Rev. Lett., 19, 872 (1967).
266. Körner H. J., Auerbach K., Braunsfurth J., Gerdau E., Nuclear Phys., 86, 395 (1966).
267. Kofoed-Hansen O., в книге Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965, p. 1517 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
268. Kohn W., Luttinger J. M., Phys. Rev. Lett., 15, 524 (1965).
269. Konopinski E. J., The Theory of Beta Radioactivity, Oxford, 1966.
270. Konopinski E. J., Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., 60, 308 (1941).
271. Konopinski E. J., Rose M. E., in Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
272. Korfmann H., Nuclear Moments, New York, 1958 (имеется перевод: Г. Коффман, Ядерные моменты, ИЛ, 1960).
273. Kramers H. A., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., 33, 959 (1930).
274. Kuhn H. G., Turner R., Proc. Roy. Soc., 265A, 39 (1962).
275. Lane A. M., Nuclear Phys., 35, 676 (1962).
276. Lane A. M., Thomas R. G., Rev. Mod. Phys., 30, 257 (1958) (имеется перевод: А. Лейн, Р. Томас. Теория ядерных реакций при низких энергиях, ИЛ, 1960).
277. Lane A. M., Thomas R. G., Wigner E. P., Phys. Rev., 98, 693 (1955).
278. Lang J. M., Le Couteur K. J., Proc. Phys. Soc., 67A, 586 (1954).
279. Lassila K. E., Hull M. H., Jr., Ruppel H. M., Mac Donald F. A., Breit G., Phys. Rev., 126, 881 (1962).
280. Lauritsen T., Ajzenberg-Selove F., в книге Landolt-Bornstein, Neue Serie, Bd. 1, Berlin, 1961.
281. Lauritsen T., Ajzenberg-Selove F., Nuclear Data Sheets, The Nuclear Data Group, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn. (1962).
282. Lauritsen T., Ajzenberg-Selove F., Nuclear Phys., 78, 10 (1966).
283. Lederman C. M., Hollander J. M., Perlman I., Table of Isotopes, 6th edition, New York, 1967.
284. Lee L. L., Jr., Schiffer J. P., Phys. Rev., 136, B405 (1964).
285. Lee L. L., Jr., Schiffer J. P., Zeidman B., Satchler G. R., Drisko R. M., Bassel R. H., Phys. Rev., 136, B971 (1964).

286. Lee T. D., Wu C. S., Ann. Rev. Nuclear Sci., 15, 381 (1965).
 287. Lee T. D., Wu C. S., Ann. Rev. Nuclear Sci., 16, 471, 511 (1966).
 288. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., 104, 254 (1956).
 289. Lemonne J. et al., Phys. Lett., 18, 354 (1965).
 290. Levinger J. S., Nuclear Photo-Disintegration, Oxford, 1960 (имеется перевод: Д. Левинджер, Фотоядерные реакции, ИЛ, 1962).
 291. Levinger J. S., Simmons L. M., Phys. Rev., 124, 916 (1961).
 292. Levinson C. A., Lipkin H. J., Meshkov S., Phys. Lett., 7, 81 (1963).
 293. Levi-Setti R., в книге Proc. Intern. Conf. on Hyperfragments, St. Cergue, 1963, CERN Rep. 64-1, ed. W. O. Lock, CERN, Geneva (1964).
 294. Lilley J. S., Stein N., Phys. Rev. Lett., 19, 709 (1967).
 295. Lindgren I., в книге Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965, p. 1621 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
 296. Lipkin H. J., Lie Groups for Pedestrians, Amsterdam, 1965.
 297. Lipkin H. J., в книге Proc. Intern. Nuclear Phys. Conf. Gatlinburg, New York, 1967, p. 450.
 298. Littlewood D. E., The Theory of Group Characters, Oxford, 1950.
 299. Lomon E., Feshbach H., Rev. Mod. Phys., 39, 611 (1967).
 300. Lynn J. E., The Theory of Neutron Resonance Reactions, Oxford, 1968.
 301. Mac Donald W. M., Phys. Rev., 101, 271 (1956).
 302. Masfarlane M. H., French J. B., Rev. Mod. Phys., 32, 567 (1960).
 303. MacGregor M. H., Mogavcsik M. J., Stapp H. P., Phys. Rev., 116, 1248 (1959).
 304. MacGregor M. H., Arndt R. A., Wright R. M., Phys. Rev., 169, 1128 (1968).
 305. Macklin R. L., Gibbons J. H., Rev. Mod. Phys., 37, 166 (1965).
 306. Macklin R. L., Gibbons J. H., Astrophys. J., 149, 577 (1967).
 307. Mafethe M. E., Hodgson P. E., Proc. Phys. Soc., 87, 429 (1966).
 308. Majorana E., Zs. Phys., 82, 137 (1933).
 309. Malmfors K. G., в книге Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965, p. 1281 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
 310. Massey H. S. W., Vighor E. H. S., Electronic and Ionic Impact Phenomena, Oxford, 1952 (имеется перевод: Г. Месси, Е. Бархон, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, 1958).
 311. Mattauch J. H. E., Thiele W., Wapstra A. H., Nuclear Phys., 67, 1 (1965).
 312. Mayer M. G., Phys. Rev., 75, 1969 (1949).
 313. Mayer M. G., Phys. Rev., 78, 16 (1950).
 314. Mayer M. G., Jensen J. H. D., Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, New York, 1955 (имеется перевод: М. Геннерт-Майер, И. Г. Д. Иенсен, Элементарная теория ядерных оболочек, ИЛ, 1958).
 315. Mayeur C. et al., Univ. Libre de Bruxelles, Bulletin № 24, Bruxelles, 1965.
 316. McVoy K. W., в книге Fundamentals of Nuclear Theory, Vienna, 1967, p. 419.
 317. McVoy K. W., Ann. Phys., 43, 91 (1967).
 318. Mehta M. L., Nuclear Phys., 18, 395 (1960).
 319. Mehta M. L., Random Matrices, New York, 1967.
 320. Mehta M. L., Gaudin M., Nuclear Phys., 18, 420 (1960).
 321. Meldner H., Süßmann G., Ubrici W., Zs. Naturforsch., 20a, 1217 (1965).
 322. Messiah A., Quantum Mechanics, Amsterdam, 1962.
 323. Meyerhof W. E., Tomberello T. A., Nuclear Phys., A109, 1 (1968).
 324. Miazawa H., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 6, 801 (1951).

325. Michel F. C., Phys. Rev., **133**, B329 (1964).
326. Miller P. D., Dress W. B., Baird J. K., Ramsey N. F., Phys. Rev. Lett., **19**, 381 (1967).
327. Mössbauer R. L., в книге Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965, p. 1293 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
328. Moore C. E., Atomic Energy Levels, Circular 467, vol. 1, p. XL, Nat. Bureau of Standards, Washington, D. C., 1949.
329. Moraevskik M. J., The Two-Nucleon Interaction, Oxford, 1963.
330. Morpugo G., Phys. Rev., **110**, 721 (1958).
331. Morrison P., в книге Experimental Nuclear Physics, vol. 2, ed. E. Segré, New York, 1953 (имеется перевод: Экспериментальная ядерная физика, под ред. Э. Серге, том 2, ИЛ, 1955).
332. Moszkowski S. A., в книге Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965, p. 863 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
333. Myers W. D., Swiatecki W. J., Nuclear Phys., **81**, 1 (1966).
334. Nagel J. G., Moshinsky M., Journ. Math. Phys., **6**, 682 (1965).
335. Nedzel V. A., Phys. Rev., **94**, 174 (1954).
336. Neeman Y., Nuclear Phys., **26**, 222 (1961).
337. Neutron Cross Sections, Sigma Center, Brookhaven Nat. Lab., BNL 325, Suppl. 2, Brookhaven, NY., 1964.
338. Newman E., Hiebert J. C., Zeidman B., Phys. Rev. Lett., **16**, 28 (1966).
339. Newson H. W., в книге Nuclear Structure Studies with Neutrons, Amsterdam, 1966, p. 195.
340. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **12**, 107 (1954).
341. Nordheim L. A., Rev. Mod. Phys., **23**, 322 (1951).
342. Nozieres P., Theory of Interacting Fermi Systems, New York, 1964.
343. Nuclear Data Sheets, Nuclear Data Group, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn.
344. Oehme R., в книге Strong Interactions and High Energy Physics, London, 1963.
345. Okubo S., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **27**, 949 (1962).
346. Osborne R. K., Foldy L. L., Phys. Rev., **79**, 795 (1950).
347. Pauly H., Toennies J. P., в книге Advances in Atomic and Molecular Physics, vol. 1, New York, 1965, p. 195.
348. Perey F., Buck B., Nuclear Phys., **32**, 353 (1962).
349. Perey F. G., Schiffer J. P., Phys. Rev. Lett., **17**, 324 (1966).
350. Peterson J. M., Phys. Rev., **125**, 955 (1962).
351. Pniewsky J., Danysz M., Phys. Lett., **1**, 142 (1962).
352. Porter C. E., Thomas R. G., Phys. Rev., **104**, 483 (1956).
353. Porter C. E., Rosenzweig N., Ann. Acad. Sci. Finland, A6, no 44 (1960).
354. Prowse D. J., Phys. Rev. Lett., **17**, 782 (1966).
355. Racah G., Phys. Rev., **62**, 438 (1942).
356. Racah G., Group Theory and Spectroscopy, Princeton, N.J., 1951.
357. Rainwater J., Phys. Rev., **79**, 432 (1950).
358. Ramsey N. F., Molecular Beams, Oxford, 1956 (имеется перевод: Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, 1960).
359. Raynal J., Nuclear Phys., **A97**, 572 (1967).
360. Reid R. V., Jr., Ann. Phys., **50**, 411 (1968).
361. Reines F., Cowan C. L., Goldhaber M., Phys. Rev., **96**, 1157 (1954).
362. Reines F., Cowan C. L., Kruse H. W., Phys. Rev., **109**, 609 (1957).
363. Ricci R. A., Grgis R. K., van Lieshout R., Nuclear Phys., **21**, 177 (1960).

364. Richard P., Moore C. F., Becker J. A., Fox J. D., Phys. Rev., 145, 971 (1966).
365. Ridley B. W., Turner J. F., Nuclear Phys., 58, 497 (1964).
366. Robson D., Phys. Rev., 137, B535 (1965).
367. Rojo O., Simmons L. M., Phys. Rev., 125, 273 (1962).
368. Rood H. P. C., Nuovo cimento, Suppl. Ser. 1, 4, 185 (1966).
369. Roos P. G., Wall N. S., Phys. Rev., 140, B1237 (1965).
370. Rose M. E., Multipole Fields, New York, 1955 (имеется перевод: М. Роуз, Поля мультиполей, ИЛ, 1957).
371. Rose M. E., Elementary Theory of Angular Momentum, New York, 1957.
372. Rose M. E., в книге Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, vol. 2, Amsterdam, ed. K. Siegbahn, 1965, p. 887 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
373. Rosen L., Beery J. G., Goldhaber A. S., Auerbach E. H., Ann. Phys., 34, 96 (1965).
374. Rosenblum S., Valadares M., Compt. rend., 235, 711 (1952).
375. Rosenfeld A. H. et al., Rev. Mod. Phys., 39, 1 (1967).
376. Rosenfeld L., Nuclear Forces, Amsterdam, 1948.
377. Rosenzweig N., в книге Statistical Physics, Brandeis Summer Institute, vol. 3, New York, 1963, p. 91.
378. Rosenzweig N., Porter C. E., Phys. Rev., 120, 1968 (1960).
379. Rosenzweig N., Monahan J. E., Mehta M. L., Nuclear Phys., A109, 437 (1968).
380. Ross A. A., Lawson R. D., Mark H., Phys. Rev., 104, 401 (1956).
381. Rutherford E., Chadwick J., Ellis C. D., Radiations from Radioactive Substances, Cambridge, 1930.
382. Sachs R. G., Phys. Rev., 74, 433 (1948).
383. Sachs R. G., Nuclear Theory, Reading, Mass., 1953.
384. Salisbury S. R., Richards H. T., Phys. Rev., 126, 2147 (1962).
385. Salling P., Phys. Lett., 17, 139 (1965).
386. Schafft-Goldhaber G., Physica, 18, 1105 (1952).
387. Schafft-Goldhaber G., Phys. Rev., 90, 587 (1953).
388. Schneider E. J., Prakash A., Cohen B. L., Phys. Rev., 156, 1316 (1967).
389. Schopper H. F., Weak Interactions and Nuclear Beta Decay, Amsterdam, 1966.
390. Schwinger J., Phys. Rev., 78, 435 (1950).
391. Seeger P. A., Fowler W. A., Clayton D. D., Astrophys. Journ., Suppl., 97, 121 (1965).
392. Segel R. E., Olness J. W., Sprenkel E. L., Phys. Rev., 123, 1382 (1961).
393. Segel R. E., Olness J. W., Sprenkel E. L., Phil. Mag., 6, 163 (1961).
394. Segel R. E., Singh P. P., Alias R. G., Hanna S. S., Phys. Rev. Lett., 10, 345 (1963).
395. Shaw G. L., Ann. of Phys., 8, 509 (1959).
396. Shirley D. A., Rev. Mod. Phys., 36, 339 (1964).
397. Shull C. G., Nathans R., Phys. Rev. Lett., 19, 384 (1967).
398. Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, ed. K. Siegbahn, Amsterdam, 1965 (имеется перевод: Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969).
399. Siegert A. J. F., Phys. Rev., 52, 787 (1937).
400. Silverberg L., Arkiv Fysik, 20, 341 (1962).
401. Silverberg L., Nuclear Phys., 60, 483 (1964).
402. Singh P. P., Segel R. E., Siemssen R. H., Baker S., Blaugrund A. E., Phys. Rev., 158, 1063 (1967).
403. Slater J. C., Phys. Rev., 34, 1293 (1929).
404. Sood P. C., Green A. E. S., Nuclear Phys., 5, 274 (1957).

405. Sorensen R., Phys. Lett., 21, 333 (1966).
 406. Spruch L., Phys. Rev., 80, 372 (1950).
 407. Stähelin P., Preiswerk P., Helv. Phys. Acta, 24, 623 (1951).
 408. Stahl R. H., Ramsey N. F., Phys. Rev., 96, 1310 (1954).
 409. Stanford C. P., Stephenson T. E., Bernstein S., Phys. Rev., 96, 983 (1954).
 410. Stanford Conference on Nuclear Sizes and Density Distributions, Rev. Mod. Phys., 30, 412 (1958).
 411. Stapp H. P., Ypsilantis T. J., Metropolis N., Phys. Rev., 105, 302 (1957).
 412. Stech B., Schülke L., Zs. Phys., 179, 314 (1964).
 413. Streeter R. F., Wightman A. S., PCT, Spin and Statistics and all that, New York, 1964 (имеется перевод: Р. Ф. Стритеер, А. С. Вайтман, PCT, спин, статистика и все такое, М., 1966).
 414. Strömgren B., NORDITA Lectures, Copenhagen, 1968.
 415. Stroke H. H., Blin-Stoyle R. J., Jaccarino V., Phys. Rev., 123, 1326 (1961).
 416. Strominger D., Hollander J. M., Seaborg G. T., Rev. Mod. Phys., 30, 585 (1958).
 417. Suess H. E., Urey H. C., Rev. Mod. Phys., 28, 53 (1956).
 418. Sugimoto K., Mizobuchi A., Nakai K., Matuda K., Phys. Lett., 18, 38 (1965).
 419. Swift A., Elton L. R. B., Phys. Rev. Lett., 17, 484 (1966).
 420. Tabakin F., Ann. der Phys., 30, 51 (1964).
 421. Taketani M. et al., Progr. Theoret. Phys. (Kyoto), Suppl. 3 (1956).
 422. Tamagaki R., Rev. Mod. Phys., 39, 629 (1967).
 423. Tamura T., Phys. Lett., 22, 644 (1966).
 424. Tanaka S., Journ. Phys. Soc. Japan, 15, 2159 (1960).
 425. Terasawa T., Progr. Theoret. Phys. (Kyoto), 23, 87 (1960).
 426. Thomas R. G., Phys. Rev., 88, 1109 (1952).
 427. Thouless D. J., The Quantum Mechanics of Many-Body Systems, New York, 1961 (имеется перевод: Д. Таллес, Квантовая механика систем многих частиц, ИЛ, 1963).
 428. Trainer L. E. H., Phys. Rev., 85, 962 (1952).
 429. Tsukada K., Tanaka S., Maruyama M., Tomita Y., Nuclear Phys., 78, 369 (1966).
 430. Turner J. F., Ridley B. W., Cavanagh P. E., Gard G. A., Hardacre A. G., Nuclear Phys., 58, 509 (1964).
 431. Tyrén H., Kullander S., Sundberg O., Ramachandran R., Isaacson P., Berggren T., Nuclear Phys., 79, 321 (1966).
 432. Uher R. A., Sorensen R. A., Nuclear Phys., 86, 1 (1966).
 433. Urey H. C., Rev. Geophysics, 2, 1 (1964).
 434. Van Oostrum K. J., Hofstadter R., Nöldeke G. K., Yearian M. R., Clark B. C., Herman R., Ravenhall D. G., Phys. Rev. Lett., 16, 528 (1966).
 435. Veltman M., Phys. Rev. Lett., 17, 553 (1966).
 436. Villars F., Helv. Phys. Acta, 20, 476 (1947).
 437. Vogt E., в книге Proc. Intern. Nuclear Physics Conf. Gatlinburg, New York, 1967, p. 748.
 438. Wahlborg S., Phys. Rev., 138, B530 (1965).
 439. Wapstra A. H., Arkiv Fysik, 6, 263 (1953).
 440. Warburton E. K., Parker P. D., Donovan P. F., Phys. Lett., 19, 397 (1965).
 441. Way K., Hurley F. W., Nuclear Data, A1, 473 (1966).
 442. Weidenmüller H. A., Nuclear Phys., 21, 397 (1960).
 443. Weinberg S., Phys. Rev., 112, 1375 (1958).
 444. Weinberg S., Phys. Rev., 128, 1457 (1962).

445. Weinberg S., *Nuovo cimento*, **25**, 15 (1962).
446. Weisberger W. I., *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 1047 (1965).
447. Weisskopf V. F., *Phys. Rev.*, **52**, 295 (1937).
448. Weisskopf V. F., *Nuclear Phys.*, **3**, 423 (1957).
449. von Weizsäcker C. F., *Zs. Phys.*, **96**, 431 (1935).
450. Wheatley J. C., в книге *Quantum Fluids*, Amsterdam, 1966, p. 183.
451. Wheeler J. A., в книге Niels Bohr and the Development of Physics, London, 1955.
452. Wheeler J. A., в книге *Gravitation and Relativity*, New York, 1964, ch. 10 (имеется перевод: Гравитация и относительность, изд-во «Мир» 1965).
453. Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **51**, 106 (1937).
454. Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **56**, 519 (1939).
455. Wigner E. P., *Ann. Math.*, **67**, 325 (1958); **62**, 548 (1955); **65**, 203 (1957).
456. Wigner E. P., *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, New York, 1959 (имеется перевод: Е. Вигнер, Теория групп и ее приложение к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961).
457. Willets L., Hill D. L., Ford K. W., *Phys. Rev.*, **91**, 1488 (1953).
458. Wilkinson D. H., Mafethe M. E., *Nuclear Phys.*, **85**, 97 (1966).
459. Wilmore D., Hodgson P. E., *Nuclear Phys.*, **55**, 673 (1964).
460. Wilson R., *The Nucleon-Nucleon Interaction*, New York, 1963.
461. Winner D. R., Drisko R. M., *Techn. Rep., Univ. of Pittsburgh, Sarah Mellon Scaife Rad. Lab.*, Pittsburgh, Pa. (1965).
462. Winther A., *On the Theory of Nuclear Beta-Decay*, Copenhagen, 1962.
463. von Witsch W., Richter A., von Brentano P., *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 524 (1967).
464. Wood R. W., Borchers R. R., Barschall H. H., *Nuclear Phys.*, **71**, 529 (1965).
465. Wu C. S., *Rev. Mod. Phys.*, **36**, 618 (1964).
466. Wu C. S., в книге *Proc. Intern. Nuclear Physics Conf.* Gatlinburg, New York, 1967, p. 409.
467. Wu C. S., в книге *Proc. Intern. Symposium on the Physics of One or Two Electron Atoms*, New York, 1968.
468. Wu C. S., Moszkowski S. A., *Beta Decay*, New York, 1966.
469. Wu C. S., Ambler E., Hayward R. W., Hoppe D. D., Hudson R. F., *Phys. Rev.*, **105**, 1413 (1957).
470. Wyatt P. J., Willis J. G., Green A. E. S., *Phys. Rev.*, **119**, 1031 (1960).
471. Yamamotochi T., *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, **19**, 436 (1937).
472. Yennie D. R., Ravenhall D. G., Wilson R. N., *Phys. Rev.*, **95**, 500 (1954).
473. Youngblood D. H., Aldridge J. P., Class C. M., *Phys. Lett.*, **18**, 291 (1965).
474. Yule H. P., *Nuclear Phys.*, **A94**, 442 (1967).
475. Zeldes N., Grill A., Simievic A., *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.*, **3**, № 5 (1967).
476. Zweig A., *CERN Reports TH-401 and TH-412*, CERN, Geneva (1964); в книге *Proc. Intern. School of Physics «Ettore Majorana»*, New York, 1965.
477. Ажгириев Л. С., Клепиков Н. П., Кумекин Ю. П., Мещеряков М. Г., Нуриев С. Б., Столетов Г. Д., *Phys. Lett.*, **6**, 196 (1963).
478. Алиханов А. И., Галактионов Ю. В., Городков Ю. В., Елисеев Г. П., Любимов В. А., ЖЭТФ, **38**, 1918 (1960).
479. Андреев Д. С., Гангрский Ю. П., Лемберг И. Х., Набиччиришвили В. А., Изв. АН СССР, **29**, 2231 (1965).
480. Базь А. И., Гольданский В. И., Зельдович Я. Б., УФН, **72**, 211 (1960).

481. Балашов В. В., Эраможян Р. А., Атомная энергия, 5, 3 (1967).
482. Долгинов А. З., в книге «Гамма лучи», под ред. Л. А. Слива, М., 1961, гл. 6, стр. 524.
483. Дунайцев А. Ф., Петрухин В. И., Прокошин Ю. Д., Рыкалин В. И., в книге Intern. Conf. on Fundamental Aspects of Weak Interactions BNL 837 (C-39), Brookhaven (1963).
484. Зырянова Л. Н., Once-Forbidden Beta-Transitions, New York, 1963.
485. Казаринов Ю. М., Симонов Ю. Н., ЖЭТФ, 43, 35 (1962).
486. Караваухов В. А., Тер-Акопян Г. М., Phys. Lett., 12, 339 (1964).
487. Колесов В. Е., Коротких В. Л., Малашкина В. Г., Изв. АН СССР, 27, 903 (1963).
488. Ландау Л. Д., Phys. Zs. Sowjetunion, 11, 556 (1937).
489. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, 30, 1058 (1956).
490. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, 35, 97 (1958).
491. Листенгарден М. А., в книге «Гамма-лучи», под ред. Л. А. Слива, М., 1961, стр. 271.
492. Лобашев В. М., Назаренко В. А., Саенко Л. Ф., Смотрицкий Л. М., Харкевич Г. И., Phys. Lett., 25B, 104 (1967).
493. Мигдал А. Б., Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер, М., 1965.
494. Немировский П. Е., Адамчук Ю. В., Nuclear Phys., 39, 551 (1962).
495. Понтикорво Б. М., Смородинский Я. А., ЖЭТФ, 41, 239 (1961).
496. Слив Л. А., Харитонов Ю. И., Phys. Lett., 16, 176 (1965).
- 496а. Слив Л. А., Банд И. М., в книге «Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия», под ред. К. Зигбана, М., 1969.
497. Сосновский А. Н., Спивак П. Е., Прокофьев Ю. А., Кутиков И. Е., Добринин Ю. П., Nuclear Physics, 10, 395 (1959).
498. Струтинский В. М., Неопубликованные лекции, ин-т Н. Бора, Коннектаген, 1958.
499. Струтинский В. М., Arkiv Fysik, 36, 629 (1967).
500. Флеров Г. Н., Оганесян Ю. Ц., Лобанов Ю. В., Кузнецов В. И., Друин В. А., Переялгин В. П., Гаврилов К. А., Третьякова С. П., Платко В. М., Phys. Lett., 13, 73 (1964).
501. Френкель Я. И., Phys. Zs. Sowjetunion, 9, 533 (1936).
502. Шапиро И. С., Эстулин И. В., ЖЭТФ, 30, 579 (1956).
- 503*. Йепеке I., Yang T. F., Polichar R. M., Gray W. S., Phys. Rev., 175, 1301 (1968).
- 504*. Lobst I., Messelt S., Richards H. T., Phys. Rev., 178, 1663 (1969).
- 505*. Noble I. V., Phys. Rev. Lett., 22, 473 (1969).
- 506*. Константинов Б. П., Бредов М. М., Беляевский А. И., Соколов И. А., Космические исследования, т. IV, вып. 1 (1966).
- 507*. Сахаров А. Д., Письма ЖЭТФ, 5 (1), 32 (1967).
- 508*. Ефимов В. Н., ЖЭТФ, 49, 188 (1965).
- 509*. Green A. E. S., Sawada T., Rev. Mod. Phys., 39, 594 (1967).
- 510*. Вгуап R., Scott B., Phys. Rev., 177, 176 (1968).
- 511*. Власов Н. А., Антивещество, М., 1965.
- 512*. Мазец Е. Н., Ильинский В. Н., Аптекарь Р. Л., Бредов М. М., Гурьян Ю. А., Панов В. Н., Космические исследования (в печати).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адроный ток 384
— симметрия 389 (см. также β -ток)
Алгебра Грассмана 270
Амплитуда рассеяния 105
Аналоговые состояния в резонансных реакциях 53
Антисимметричные волновые функции 117, 268
Антиунитарное преобразование 25
- Барионный спектр 62
 β -Переходы типа $0 \leftrightarrow 0$ 57
 β -Стабильные ядра 200
 β -Ток 386
— G-инвариантность 387
— G-четность 400
— свойства симметрии 386
— нерелятивистская форма 390
Брейта — Вигнера формула 416
- Величины ft 398
Взаимодействие А-гиперона с нуклоном 62
Внешние произведения 117
Внутреннее произведение 116, 130
Внутренняя система координат 93
Вращательная инвариантность 75
Вращения 17
Временной сдвиг 16
Вторичное квантование 270
«Входные» («doorway») состояния 297, 419; см. также Силовая функция
Выбор фаз 27
- Галилеева инвариантность 18
Гамова — Теллера переходы 335
Гауссов ансамбль 288
Генеалогические коэффициенты 344, 407, 409
— множители см. Генеалогические коэффициенты
Гиперзаряд 46
Гиперъядра 47
— энергия связи 60
Гиромагнитные отношения 326
Гросс-структуря 212, 419
- Двойной β -распад 385
Двухчастичные операторы 272, 363
Деформация ядра 164
Динейтрон 412
 D -Функции 80
— групповые свойства 83
— правило сложения 83
Дырочное состояние 302, 357
— изоспин 304, 359
- Единицы Вайскопфа 378
- Закон сохранения лептонов 385
Заполнение оболочек 187
— подоболочек 187
Зарядовая независимость см. Изобарическая инвариантность
— симметрия 43
Зарядовое сопряжение 358
Захват μ -мезона 393
— нейтронов 198
- Изобарическая инвариантность 38
Изоспин 38, 40, 304
Изоспиновый дублет 308, 321
Изотопический сдвиг 162
Испарительные спектры 181
- Квадрупольный момент 322
Квантовые числа симметрии (разбиения) 108
Кварки 48, 49
Кватернионный оператор 103
Константы взаимодействия 392
Корреляционная функция ферми-газа 175
Корреляция нуклонов 152
Коэффициент проникновения 429
— векторного сложения 243
Коэффициенты Вигнера 76
— Клебша — Гордана 76
— пересвязки 77
— Рака 77
Кронекеровское произведение см.
Внутреннее произведение

- «Кроссинг-соотношение» 360
 « $\tilde{\Xi}$ -Приближение» 400
 Кулоновская фаза рассеяния 428
 Кулоновское отталкивание 144
- Лептонный ток 385
- Массовая формула 64
 Матрица S 104
 Матрицы конечных вращений 80
 — углового момента 75
 Мезоатомы 165
 Метастабильные составные состояния 413
 Метод Дарвина — Фаулера 275
 Модель независимых夸克ов 49
 — случайных матриц 179, 287
 Монопольный момент 372
 Мультипольные составляющие взаимодействия 368
 — моменты 97, 98, 370, 372, 376, 393
- Нейтрино двухкомпонентное 385
 — космические 386
 Нейтрон 12
 Нейтронные звезды 202
 Нелокальное взаимодействие 219
 Нелокальные члены 240
 Непривидимые тензорные операторы 84, 89
 Нечетно-четные скачки 165
 Нуклон 12
 — возбужденные состояния 63
- Обменная дырка 152
 Обменный вклад 153
 — ток 380
 — эффект 272
 Оболочечная модель 207
 — структура 186
 Обращение времени 24, 28, 35, 100
 Одиночастичная сила 212
 Одночастичные операторы 90, 271, 352, 360
 — уровни 209
 Оператор зарядового обмена 42
 — Казимира 125
 Операторы рождения 90, 269
 Определитель Слэтера 268
 Оптическая теорема 166
- Передача двух частиц 411
 Перенормировка гиромагнитного отношения 329
- квадрупольного момента 325, 331
 — магнитного момента 334
 — одного нуклона 407
 — спинового магнитного момента 337
 Переходы Гамова — Теллера 335
 — Ферми 335
 Плотность ядра 139
 — состояний 156
 Поверхностная энергия 143
 Полная вероятность распада 371
 — четность 22
 Поляризационная асимметрия 36
 Поляризационный заряд 325
 Потенциал гармонического осциллятора 222
 — Хартри — Фока 365
 — симметрии 149
 Правила отбора 51
 Преобразование Галилея 18
 — \mathcal{F} 306, 359
 Приведенная вероятность перехода 87
 Приведенные матричные элементы 86, 99
 — — — для связанных систем 87
 Принцип Паули 218, 258
 Проекционный оператор 112, 115
 Промежуточные бозоны 384
 Пространственное отражение 20
 Пространственный перенос 14
 Протон 12
 Процесс подхвата см. Реакции с передачей одной частицы и Передача двух частиц
 Процессы распада 105
 — срыва см. Реакции с передачей одной частицы и Передача двух частиц
 Прямые процессы 406
 — и обратные реакции 35
 Псевдопотенциал 253
- Равновесная плотность 247
 Радиус ядра 138
 Разность кулоновской энергии 53
 Распад ядерного состояния 413
 Распределение заряда внутри ядра 140, 159
 — Бигнера 158, 290
 — матричных элементов 158
 — Портера — Томаса 293
 — χ^2
 Распространенность ядер 196
 Рассеяние π -мезонов на ядрах 221
 — протонов 231
 Расщепление по массе 66
 Реакции резонансные 413
 — с передачей одной частицы 344

- Резонансы в усредненном сечении 419
 Рентгеновские переходы 165
 Ротационные полосы 20
 Ряд Клебша — Гордана для симметрических групп 116
 — — — — унитарных групп 125
- Самосогласованное поле 309
 Сверхновые звезды 200
 Сдвиг Томаса — Эрмана 51
 Скимаемость 253
 Силовая функция 210, 226
 Силы Сербера 240
 Символ $3j$ 77
 — $6j$ 78
 — $9j$ 79
 Симметричные состояния 117
 Слабое взаимодействие 383
 Слабый магнетизм 401
 — ток 383
 Сложение угловых моментов 76
 Собственная фаза 238
 Соотношение поляризационной асимметрии 36
 Составное ядро 157
 Состояния максимального веса 120
 — фотона 369
 Сохранение векторного тока 387
 — четности 30
 Спектр мезонных состояний 68
 Спектроскопический фактор 410
 Спин-изоспиновые волновые функции 135
 Спин-орбитальный потенциал 220
 Спиральность 301, 350, 415
 Средний потенциал 148
 Средняя длина свободного пробега нуклона в ядре 165
 Стандартное представление 114
 Статистическая сумма 282
 Странность 46
 Супермультиплеты 45
 Сферические составляющие 85
 Схема m -связи 127
- Твердая сердцевина 259
 Температура ядра 155
 Теорема Вигнера — Эккарта 86
 — Крамерса 27
- Толщина поверхностной области ядра 161
 Тонкая структура 319
 Траектории барионов 70
 Траектория Редже 20
- Углы Эйлера 80
 Уникальные n -запрещенные переходы 401
 Унитарная симметрия 123
 Уравнение непрерывности 369
- Фазовый анализ 240, 247, 260
 Ферми-жидкость 324
 Ферми-газ 141, 258
 — твердых шаров 248
 Формфакторы 374
- Химический потенциал 282
- Частично-дырочное преобразование 359
 Черное ядро 165
 Четность 21, 30, 33
 Числа заполнения 279
- Шаревые векторы 98
 — функции 82, 83
- Электромагнитный ток 375
 Энергия перестройки 319
 — связи 142
 — симметрии 143
 Эффективная масса 149, 254
 Эффективный заряд 325
 Эффект Рамзауэра — Таунсенда 165
 — спаривания 210
- Юнга схемы 10, 129
 — таблицы 111, 129
- Ядерная материя 258

УКАЗАТЕЛЬ ЯДЕР

³ H 311	⁴¹ Sc 312
³ He 311	⁴⁷ K 312
⁴ He 311	⁴⁷ Ca 312
⁵ He 311	⁴⁸ Ca 312
⁵ Li 311	⁴⁹ Ca 312, 340
¹² B 402	⁴⁹ Sc 312, 340
¹² C 402	⁵⁵ Co 314
¹² N 402	⁵⁶ Ni 314
¹⁴ C 50	⁵⁷ Ni 314
¹⁴ N 50, 51	¹⁰⁷ , ¹⁰⁹ Ag 182
¹⁴ O 50	¹¹⁷ Sn 54
¹⁵ N 311	¹¹⁷ Sb 54
¹⁵ O 311	¹⁸¹ Ta 32
¹⁶ O 30, 311	¹⁹⁷ Au 160
¹⁷ O 311	²⁰⁷ Tl 314, 316, 341
¹⁷ F 311, 348	²⁰⁷ Pb 314, 316, 341
³⁹ K 312	²⁰⁸ Pb 314
³⁹ Ca 312	²⁰⁹ Pb 314, 316, 342
⁴⁰ Ca 312	²⁰⁹ Bi 314, 316, 342
⁴¹ Ca 312, 346	²³³ Th 177, 179, 181

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие авторов к русскому изданию	6
Предисловие авторов к английскому изданию	7

ГЛАВА 1 *СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ*

§ 1. Строение ядра	9
Примеры к § 1 (11). Свойства нуклонов (табл. 1.1) (11).	
§ 2. Свойства симметрии ядерных систем, связанные с пространственно-временной инвариантностью	14
1. Непрерывные преобразования	14
Пространственный перенос (14). Временной сдвиг (16). Вращения (17). Преобразования Галилея (18). Вращение системы координат (20).	
2. Пространственное отражение	20
3. Обращение времени	24
Примеры к § 2 (30). Проверка закона сохранения четности при α -распаде (фиг. 1.1) (30). Поиск смеси ядерных состояний различной четности путем анализа круговой поляризации γ -излучения (фиг. 1.2) (31). Нарушение четности при β -распаде, проверка инвариантности относительно обращения времени (фиг. 1.3) (33). Сравнение сечений прямых и обратных реакций (фиг. 1.4) (35). Соотношение поляризационной асимметрии при упругом рассеянии (фиг. 1.5 и 1.6) (36).	
§ 3. Изобарическая инвариантность	38
1. Изоспиновая симметрия	38
Изоспин нуклонов (38). Вращательная инвариантность в изо-пространстве (41). Зарядовая симметрия (43). Нарушение изобарической симметрии (43). Изобарическая инвариантность и перестановочная симметрия (44).	
2. Расширение изобарической симметрии	45
Странность (46). Унитарная симметрия (47). Примеры к § 3 (49). Изобарические триплеты и синглеты в ядрах с $A = 14$ (фиг. 1.7 и 1.8) (49). Аналоговые состояния в резонансных реакциях, вызванных протонами (фиг. 1.9 и табл. 1.2) (53). Проверка изобарической симметрии в β -переходах типа $0+ \rightarrow 0+$ (фиг. 1.10 и табл. 1.3) (57). Энергия связи и спины гиперъядер (табл. 1.4) (60). Мультиплеты в барионном спектре (фиг. 1.11 и табл. 1.5) (62). Мультиплеты в мезонном спектре (фиг. 1.12) (68). Семейства барионных состояний с одинаковой изобарической симметрией (фиг. 1.13) (69).	

§ 4. Условия инвариантности для ядерных сил	69
1. Силы, не зависящие от скорости	71
2. Силы, зависящие от скорости	73
Приложение 1. Вращательная инвариантность	75
1. Матрицы углового момента	75
2. Сложение угловых моментов	76
3. Коэффициенты пересвязки	77
Сложение трех угловых моментов (77). Сложение четырех угловых моментов (78).	
4. Матрицы конечных вращений, \mathcal{D} -функции	80
5. Неприводимые тензорные операторы и приведенные матричные элементы	84
Определение неприводимых тензорных операторов (84). Приведенные матричные элементы (86). Приведенные матричные элементы для связанных систем (87). Преобразование при обращении времени и эрмитово сопряжение (89). Тензорные свойства операторов рождения (90).	
6. Преобразование к внутренней координатной системе	91
Составляющие углового момента относительно внутренних осей (91). Волновые функции, характеризующие ориентацию внутренней системы координат (93). Внутренние составляющие неприводимых тензорных операторов (94).	
7. Преобразование полей	94
8. Взаимодействие полей и разложение по мультипольным моментам Скалярное поле (96). Векторное поле (97). Спинорные поля (99).	96
9. Тензорные операторы в изопространстве	99
Приложение 2. Обращение времени	100
1. Одночастичные состояния	100
2. Многочастичные состояния (связанные системы)	102
3. Процессы столкновения	104
4. Процессы распада	105
Приложение 3. Перестановочная симметрия	107
1. Квантовые числа симметрии (разбиения)	108
Случай $n = 2$ (108). Случай $n = 3$ (109). Разбиение при любом числе n (112). Среднее значение оператора транспозиции (115). Сопряженные представления (116). Полностью антисимметричные состояния, образованные с помощью внутреннего произведения (116). Внешнее произведение волновых функций с определенной симметрией (117).	
2. Классификация волновых функций по типам симметрии в пространстве чисел заполнения Произведения одночастичных состояний (118). Перестановочная симметрия произведений одночастичных состояний (119). Угловые моменты состояний с определенной симметрией $[f]$ (122).	118
3. Унитарная симметрия	123
Операторы сдвига (123). Алгебра операторов сдвига, группа унитарных преобразований (124). <i>Примеры и приложение 3</i> (128). Четырехчастичные волновые функции с определенной симметрией (табл. 1.6) (128). Таблица умножения для внутренних произведений неприводимых представлений группы S_3 (табл. 1.7) (130). Квантовые числа и волновые функции состояний конфигурации p^3 (табл. 1.8) (131). Классификация состояний конфигурации p^n (табл. 1.9) (133). Классификация спин-изоспиновых волновых функций (табл. 1.10) (136).	

ГЛАВА 2	
МОДЕЛЬ НЕЗАВИСИМЫХ ЧАСТИЦ	
§ 1. Основные свойства ядер	139
1. Размеры ядер	139
2. Средняя длина свободного пробега нуклонов	140
3. Импульсное распределение (модель ферми-газа)	141
4. Энергия связи ядер	142
5. Парная энергия	144
6. Изоспиновое квантовое число	145
Зависимость энергии связи от изоспина (145). Нарушение чистоты изоспина кулонауским потенциалом (147).	
7. Ядерный потенциал	148
Средний потенциал для частиц на поверхности Ферми (148). Зависимость потенциала от скорости (148). Эффективная масса (149). Потенциал симметрии (149). Зарядово-обменный потенциал (150).	
8. Антисимметричные волновые функции ферми-газа	151
9. Статистические характеристики спектра возбуждения	154
Плотность уровней ферми-газа (154). Смешивание конфигураций и составное ядро (157). <i>Примеры к § 1</i> (159). Данные о распределении заряда ядра из опытов по рассеянию электронов (фиг. 2.1) (159). Данные о распределении заряда в ядрах, полученные в результате исследования изотопического сдвига в атомных спектрах (фиг. 2.2) (162). Определение средней длины свободного пробега нуклонов в ядре из полных сечений взаимодействия нейтронов с ядрами (фиг. 2.3) (165). Зависимость энергии связи, приходящейся на один нуклон, от A (фиг. 2.4) (167). Парные энергии (фиг. 2.5) (170). Смешивание по изоспину, вызываемое кулонауским потенциалом (фиг. 2.6) (171). Двухчастичная корреляционная функция ферми-газа (фиг. 2.7) (175). Среднее расстояние между уровнями и ширины резонансов при взаимодействии нейтронов низких энергий с ядрами (фиг. 2.8) (176). Энергетическое распределение уровней, наблюдающихся в нейтронных резонансах (фиг. 2.9) (178). Распределение нейтронных ширин (фиг. 2.10) (180). Определение функции плотности ядерных уровней по испарительным спектрам нейтронов (фиг. 2.11) (181). Систематика плотности ядерных уровней (фиг. 2.12) (185).	
§ 2. Доказательства оболочечной структуры ядра	186
1. Энергия связи	187
2. Энергия возбуждения четно-четных ядер	188
3. Плотность уровней	188
<i>Примеры к § 2</i> (189). Потенциалы ионизации нейтральных атомов (фиг. 2.13) (189). Энергии отделения нейтронов и протонов (фиг. 2.14—2.16) (189). Систематика энергий возбуждения состояний $2+$ (фиг. 2.17а и 2.17б) (193).	
§ 3. Ядра и их распространение в природе	193
1. Стабильность ядер	193
2. Относительная распространенность ядер и происхождение элементов	196
<i>Примеры к § 3</i> (200). Бета-стабильные ядра (фиг. 2.18) (200). Распространенность четно-четных ядер с $A > 50$ (фиг. 2.19) (203). Детальный ход кривой распространенности и структура дорожек захваты для ядер с $105 < A < 145$ (фиг. 2.20) (204).	
§ 4. Средний ядерный потенциал	206
1. Последовательность одночастичных уровней, спин-орбитальная связь	206
2. Одночастичная силовая функция	211

3. Оптический потенциал	215
Параметры оптического потенциала (217). Оптический потенциал для других частиц (221). Связь потенциала рассеяния с энергиями связанных состояний (222). <i>Примеры к § 4</i> (222). Некоторые свойства потенциала гармонического осциллятора (фиг. 2.21) (222). Радиальная зависимость ядерного потенциала (фиг. 2.22) (224). Схематическая диаграмма последовательности одночастичных уровней (фиг. 2.23) (224). Сравнение спектров ядер с нечетными A с предсказаниями одночастичной модели (фиг. 2.24) (224). Силовые функции, найденные по данным о реакции ($d p$) (фиг. 2.25) (226). Силовая функция x -волны (фиг. 2.26) (227). Дырочные состояния, наблюдающиеся в реакции ($p, 2p$) (фиг. 2.27) (228). Анализ рассеяния протонов с энергией 30 Мэв на основе оптической модели (фиг. 2.28; табл. 2.1 и 2.2) (231). Систематика данных об оптическом потенциале (фиг. 2.29) (233). Энергия связи одночастичных состояний в статическом ядерном потенциале (фиг. 2.30) (234).	
§ 5. Межнуклонное взаимодействие и ядерный потенциал	236
1. Основные свойства межнуклонного взаимодействия	236
Низкие энергии ($E < 5$ Мэв) (237). Более высокие энергии, обменный потенциал (238). Твердая сердцевина (241). 3P -фазы, спиновая зависимость взаимодействия (242). ОдноSIONНЫЙ обменный потенциал (244).	
2. Связь ядерного потенциала со свойствами межнуклонного взаимодействия	247
Насыщение ядерных сил и равновесная плотность (247). Детали схематической модели (252). Спиновая и изоспиновая зависимость среднего ядерного потенциала (254). Определение оптического потенциала при высоких энергиях по двухчастичной амплитуде рассеяния (257).	
3. Теория ядерной материи	258
<i>Примеры к § 5</i> (260). Фазовый анализ нуклон-нуклонного рассеяния (фиг. 2.34) (260). Феноменологический нуклон-нуклонный потенциал (фиг. 2.35, табл. 2.3 и 2.4) (262). Сравнение атомных и ядерных сил связи (фиг. 2.36) (264). Оценка оптического потенциала в импульсном приближении (фиг. 2.37) (266).	
Приложение 1. Антисимметричные состояния; операторы рождения и уничтожения	268
1. Антисимметричные волновые функции	268
2. Свойства операторов рождения фермионов	269
3. Одночастичные операторы	271
4. Двухчастичные операторы	272
5. Операторы передачи частиц	273
6. x -Представление	273
7. Матрицы плотности	274
8. Операторы рождения бозонов	275
Приложение 2. Статистический расчет плотности ядерных уровней	275
1. Функция плотности уровней, преобразование Лапласа	275
2. Обращение преобразования Лапласа	277
3. Среднее значение чисел заполнения одночастичных состояний	279
4. Описание спектра возбужденных состояний с помощью квазичастичных возбуждений	280
5. Термодинамическая интерпретация расчетов плотности уровней	282
6. Вычисление плотностей уровней, характеризующихся дополнительными квантовыми числами	283

Приложение 3. Флуктуации и их расчет методом случайных матриц	287
1. Случайное распределение элементов двумерной матрицы	287
2. Распределение собственных значений и собственных векторов	289
3. Матрицы больших размерностей	291
Приложение 4. Силовая функция (модельное описание)	294
1. Выбор представления	294
2. Диагонализация	294
3. Силовая функция в случае постоянных матричных элементов	295
4. Нестационарная теория взаимодействия	296
5. Второй момент силовой функции	296
6. Связь через промежуточные состояния	297
7. Вычисление силовой функции в случае, когда матричные элементы не постоянны	297

ГЛАВА 3

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

§ 1. Квантовые числа и волновые функции; частично-дырочная симметрия	301
1. Одночастичные состояния	301
2. Дырочные состояния, частично-дырочное сопряжение	302
3. Изоспин частичных и дырочных состояний	304
<i>Примеры к § 1</i> (306). Полный изоспин ядра для одночастичных и дырочных конфигураций (фиг. 3.1) (306).	
§ 2. Энергетические спектры	308
<i>Примеры к § 2</i> (310). Спектры ядер с одной частицей или одной дыркой сверх заполненных оболочек (фиг. 3.2а — 3.2е) (310). Спектры ${}^4\text{He}$ и соседних ядер (фиг. 3.2а) (310). Спектры ${}^{16}\text{O}$ и соседних ядер (фиг. 3.2б) (310). Спектры ${}^{40}\text{Ca}$ и соседних ядер (фиг. 3.2в) (313). Спектры ${}^{48}\text{Ca}$ и соседних ядер (фиг. 3.2г) (313). Спектры ${}^{56}\text{Ni}$ и соседних ядер (фиг. 3.2д) (313). Спектры ${}^{208}\text{Pb}$ и соседних ядер (фиг. 3.2е) (315). Энергии и волновые функции одночастичных состояний ядра ${}^{208}\text{Pb}$ (фиг. 3.3 и 3.4) (315). Энергии связи нейтронных состояний в ядрах ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{48}\text{Ca}$ и ${}^{56}\text{Ni}$ (фиг. 3.5) (315). Зависимость энергий отделения нуклонов от изоспина (табл. 3.1) (320).	
§ 3. Матричные элементы электромагнитных моментов	324
1. Квадрупольные моменты и вероятности переходов $E2$	322
2. Магнитные моменты	325
3. Другие электромагнитные моменты	330
<i>Примеры к § 3</i> (331). Электрические квадрупольные эффекты в одночастичных конфигурациях (табл. 3.2) (331). Магнитные дипольные эффекты для одночастичных конфигураций (табл. 3.3) (333). Вероятности переходов $M4$ для одночастичных конфигураций (табл. 3.4) (334).	
§ 4. Матричные элементы β-распада	335
1. Разрешенные переходы	335
Операторы перехода (335). Заполненные оболочки с $N = Z$, зеркальные переходы (336). Заполненные оболочки с $N > Z$ (337).	
2. Запрещенные переходы	339

Примеры к § 4 (339). Разрешенные β -переходы для одночастичных конфигураций (табл. 3.5) (339). Запрещенные β -распады для одночастичных конфигураций (фиг. 3.6 и табл. 3.6) (341)	
§ 5. Реакции, генеалогические коэффициенты	344
1. Реакции с передачей одной частицы	344
2. Резонансные реакции	345
Примеры к § 5 (346). Генеалогические коэффициенты из реакции $^{40}\text{Ca}(d, p)^{41}\text{Ca}$ (табл. 3.7) (346). Приведенные ширины для резонансного рассеяния протона на ядре ^{16}O (табл. 3.8) (347).	
Приложение 1. Одночастичные волновые функции и матричные элементы	349
1. Связь спина с орбитой m_s -Представление (349). h -Представление (350).	349
2. Вычисление матричных элементов одночастичных операторов Операторы, зависящие только от пространственных координат (352). Операторы, зависящие от спина (353). Операторы, зависящие от орбитальных моментов (355).	352
Приложение 2. Частично-дырочное сопряжение	356
1. Системы фермионов как системы частиц и дырок Системы тождественных частиц (356). Системы нейтронов и протонов, изоспин дырочных состояний (359).	356
2. Матричные элементы одночастичных операторов v -Представление (360). Приведенные матричные элементы (362).	360
3. Матричные элементы двухчастичных операторов v -Представление (363). Одночастичные члены, потенциал Хартри — Фока (364). Двухчастичные матричные элементы для состояний с определенным угловым моментом (366).	363
Приложение 3. Матричные элементы электромагнитного взаимодействия	368
1. Связь поля с током	368
2. Радиационные процессы	369
3. Взаимодействия с заряженными частицами	372
4. Плотность заряда и плотность тока свободных нуклонов	373
5. Одночастичные матричные элементы	376
6. Эффекты взаимодействия в токе Свойства симметрии (378). Электрические мультипольные моменты (379). Магнитные мультипольные моменты (379). Эффект зарядово-обменных взаимодействий (380). Эффект взаимодействий, зависящих от скорости (381).	378
Приложение 4. Бета-взаимодействие	383
1. Процессы слабого взаимодействия и слабый ток Классификация процессов слабого взаимодействия (383). Взаимодействие токов (384). Адронный ток; ядерные силы, нарушающие четность (384). Лептонный ток, закон сохранения лептонов (385).	383
2. Свойства симметрии β -тока Симметрия отражения (386). Зарядовая симметрия (387). Сохранение векторного тока (387). Нарушение уравнения непрерывности электромагнитными взаимодействиями (389). Ток, нарушающий странность (SU_3 -симметрия) (389).	386
3. Нерелятивистская форма β -тока	390
4. Мультипольные моменты	393
5. Величины ft	398

Примеры к приложению 4 (401). Проверка соотношения между моментами β -распада (слабый магнетизм) и моментами электромагнитных переходов (фиг. 3.9) (401).

Приложение 5. Реакции с передачей нуклона	406
1. Передача одного нуклона	407
Факторизация амплитуды, генеалогические коэффициенты (407).	
Сечения и правила сумм (409). Одночастичные амплитуды (411).	
2. Передача двух частиц	411
Приложение 6. Резонансные реакции	413
1. Общие свойства резонансного рассеяния	413
Амплитуды распада (413). Резонансное рассеяние (416). Резо-	
нансы в усредненном сечении, гросс-структура (419).	
2. Параметры одночастичных резонансов	422
Рассеяние бесспиновых нейтральных частиц (422). Квазиклас-	
сическая интерпретация одночастичной ширины Годи (426). Влия-	
ние спина (428). Влияние кулоновских сил (428). Зависимость	
потенциала от изоспина (429). Влияние размытости ядерной поверх-	
ности (429). Влияние зависимости потенциала от скорости (430).	
Влияние мнимого потенциала (430).	
Л и т е р а т у р а	432
Предметный указатель	446
Указатель ядер	449

О. Бор, Б. Моттельсон

СТРУКТУРА АТОМНОГО ЯДРА

Том I

Редактор Е. С. Куранский

Художник Н. Г. Мануилова

Художественный редактор П. Ф. Некундэ

Технический редактор Ф. Х. Третьякова

Корректор М. А. Смирнов

Сдано в набор 13/X 1970 г. Подписано к печати 18/III 1971 г. Бумага тип. № 1
 $60 \times 901/16 = 14,25$ бум. л. 28,5 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 35 Изд. № 2/5431
 Цена 2 р. 72 к. Зак. 525

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
 Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16 Главполиграфпрома
 Комитета по печати при Совете Министров СССР
 Москва, Трехпрудный пер., 9