Экзамен. Условие фазового синхронизма (продолжение).

Обойти это препятствие можно за счет двулучепреломления (два разных показателя преломления) в кристалле. Дело в том, что в кристалле распространяются две волны с разной фазовой скоростью. У второй гармоники показатель преломления больше, а фазовая скорость меньше, чем у первой гармоники. Тогда из двух лучей первой гармоники возьмем луч с большим показателем преломления, а из двух лучей второй гармоники возьмем луч с меньшим показателем преломления. При этом показатели преломления первой и второй гармоники могут быть одинаковыми. Это означает одинаковую фазовую скорость $V_{ф} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}$ двух гармоник. Для второй гармоники удваивается ω, и удваивается k.

Амплитуда второй гармоники в таком случае будет непрерывно возрастать вдоль направления распространения света в среде, так как генерация второй гармоники в каждой точке среды будет иметь ту же фазу, что и излучение второй гармоники сгенерированное в предыдущих точках среды и пришедшее в эту точку. Это равенство фаз является частью так называемого условия фазового синхронизма, которое необходимо для получения излучения второй гармоники с большой амплитудой.

Генерация второй гармоники — это частный случай более общего взаимодействия света со средой, при котором из двух фотонов (в общем случае — разных частот) формируется один фотон. В среде фотон 3, который получается в результате сложения фотонов 1 и 2, должен удовлетворять условию фазового синхронизма $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$. Условие фазового синхронизма похоже на закон сохранения импульса, так как в вакууме импульс фотона $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. К закону сохранения импульса добавляют закон сохранения энергии $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, где энергия связана с частотой соотношением $E = \hbar\omega$. Эти два условия

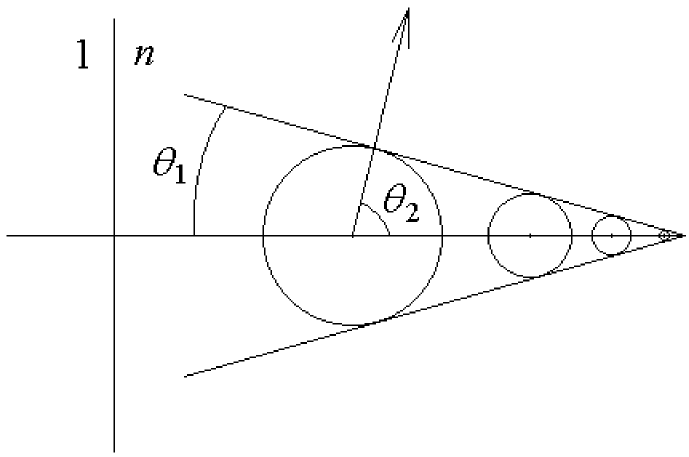
$$\begin{cases} \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \\ \vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \end{cases}$$

и называют условием фазового синхронизма. В более общем случае частоты, как и волновые векторы, могут не только складываться, но и вычитаться. Складываться могут не только два фотона, но и большее количество фотонов, а в результате взаимодействия может получаться больше одного фотона.

Условие фазового синхронизма $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ означает, что световая волна $\vec{k}_3$ в каждой точке среды генерируется в той же фазе, что и волна $\vec{k}_3$, пришедшая в эту точку и сгенерированная в предыдущих точках среды. Условие $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ означает баланс энергий фотонов новой волны из двух старых волн.

Экзамен. Излучение Вавилова — Черенкова. Построения Гюйгенса.

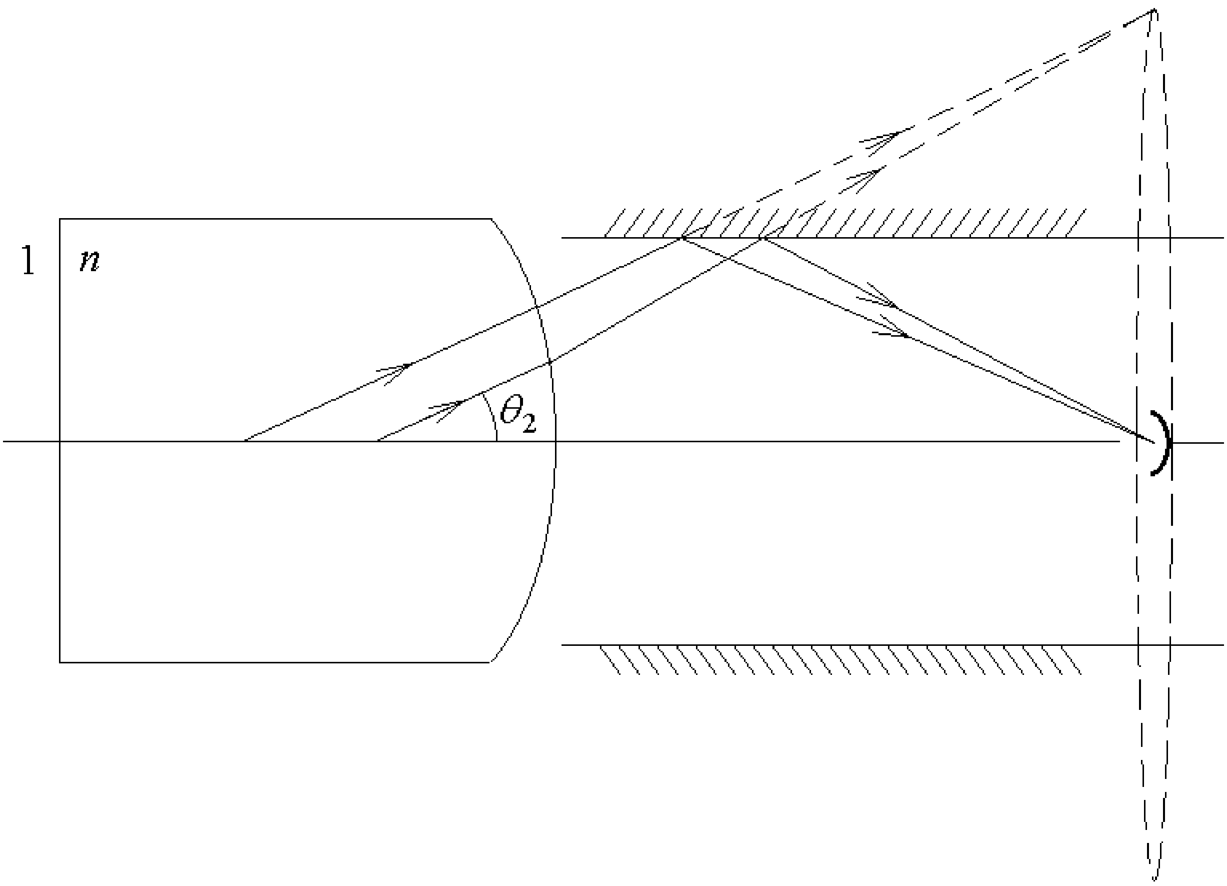
Сродни фазовому синхронизму некоторое условие, которое определяет направление излучения Вавилова — Черенкова. Излучение, которое возникает в разных частях среды должно складываться в одинаковой фазе в некотором направлении. Именно в этом направлении и возникает излучение. Это излучение возникает, когда электрически заряженная элементарная частица пролетает прозрачную для света среду, например, стекло со скоростью большей скорости света в среде. Летящий с большой скоростью заряд вызывает ускоренное смещение электронов в атомах среды. Ускоренно движущиеся электроны среды излучают. Направление излучения определяется тем, что излучение разных электронов должно совпадать по фазе в этом направлении. На рисунке ниже изображено движение заряда с большой скоростью $V > \frac{c}{n}$ слева направо. Окружностями изображены сферы, до которых излучение успевает дойти со скоростью $\frac{c}{n}$ от той точки, где оно возникает при прохождении этой точки движущемся зарядом. Фронт волны или поверхность равных фаз можно получить в соответствии с принципом Гюйгенса. Согласно принципу Гюйгенса каждая точка фронта волны является вторичным источником волны, исходящей из этой точки во все стороны. Для некоторого промежутка времени τ рассматривается множество точек, в которые приходят волны, излученные в начале этого промежутка вторичными источниками, расположенными на исходном фронте волны. Множество точек образует объем. Граница этого объема в направлении движения волны и будет согласно построениям Гюйгенса новым фронтом волны. В нашем случае вместо вторичных источников света на первоначальном фронте волны нужно рассматривать источники света на траектории движения быстрой заряженной частицы.



Излучение среды идет в некоторый конус с угловым радиусом θ_2. Поверхность равных фаз тоже представляет собой конус с угловым радиусом θ_1, причем $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Если рассмотреть сферическую волну, которая была излучена раньше текущего момента на время τ, то радиус сферы $\tau\frac{c}{n}$, а расстояние от точки излучения до вершины конуса (до текущего положения заряженной частицы) равно $V\tau$, где V — скорость частицы, n — показатель преломления среды. Тогда направление излучения определяется углом θ_2 между нормалью к фронту волны и направлением скорости заряженной частицы:

$$\cos(\theta_2)=\frac{\tau\frac{c}{n}}{V\tau}=\frac{c}{nV}.$$

Это излучение используется, в частности, для регистрации быстрых заряженных частиц в так называемых черенковских детекторах. Чтобы собрать излучение на приемник малого размера нужно поставить на пути лучей собирающую линзу и цилиндрическое зеркало.



После линзы свет, который идет в конус, должен собраться в окружность в фокальной плоскости линзы. Цилиндрическое зеркало, радиус которого вдвое меньше радиуса окружности, отразит лучи в точку приемника.

<u>Экзамен. Закон преломления (закон Снеллиуса) и закон отражения света.</u>

Закон Снеллиуса можно доказать с помощью построений Гюйгенса. Мы сделаем это при рассмотрении кристаллооптики, а сейчас докажем его иначе.

При преломлении света длина волны изменяется, а частота — нет. Если бы частота света изменялась, то на границу раздела падали бы волны с одной частотой, а уходили — с другой, что невозможно.

Рассмотрим плоскую световую волну, которая падает на плоскую границу двух сред. Плоские условия задачи означают плоские решения. Тогда отраженная и преломленная волны тоже будут плоскими.

Введем обозначения для волн:

i — падающая волна (incident — падающий),

r — отраженная волна (reflect — отражать),

t — преломленная волна (transpierce [trens'pies]— пронзать насквозь).

На границе раздела двух сред должны выполняться граничные условия для электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ полей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

для границы раздела принимают следующий вид

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i \end{cases}.$$

Для прозрачных сред $\begin{cases} \sigma = 0 \\ i = 0 \\ D = \varepsilon E \\ B = \mu H \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases}$.

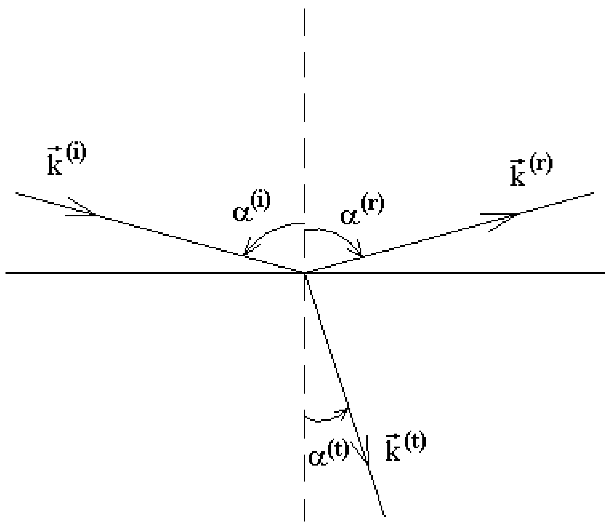
Выберем направление оси z перпендикулярно границе раздела двух сред.

Рассмотрим, например, тангенциальную составляющую электрического поля — составляющую, направленную вдоль границы раздела двух сред. Рассмотрим световое поле на границе раздела сред в один момент времени, тогда k_x и k_y — циклические пространственные частоты горизонтальной составляющей электрического поля. Зависимость этой составляющей от x-координаты — синусоида для каждой из трех волн на границе раздела сред, а сумма трех синусоид может дать ноль, только если их пространственные частоты одинаковы. Следовательно, величина k_x имеет одинаковое значение для падающей, отраженной и преломленной волн. Аналогично, равны друг другу пространственные частоты k_y.

Условие одинаковых пространственных частот трех волн на границе раздела примет вид:

$$\begin{cases} k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \\ k_y^{(i)} = k_y^{(r)} = k_y^{(t)} \end{cases},$$ где i, r, t — индексы для падающей, отраженной и преломленной волн.

Выберем направление оси y перпендикулярно плоскости падения света так, чтобы для падающей волны $k_y^{(i)} = 0$, тогда $k_y^{(r)} = k_y^{(t)} = 0$. Следовательно, все три луча и нормаль к границе раздела лежат в плоскости падения x, z.



Углом падения света называют угол $\alpha^{(i)}$ между нормалью к границе раздела сред и направлением падающего луча $\vec{k}^{(i)}$. Угол отражения $\alpha^{(r)}$ — угол между нормалью и отраженным лучом $\vec{k}^{(r)}$, угол преломления $\alpha^{(t)}$ — угол между нормалью и преломленным лучом $\vec{k}^{(t)}$.

Тогда для каждой из трех волн справедливо равенство $k_x = k \cdot \sin(\alpha)$.

Подставим это в равенство пространственных частот $k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)}$ и получим:

$$k^{(i)} \sin\left(\alpha^{(i)}\right) = k^{(r)} \sin\left(\alpha^{(r)}\right) = k^{(t)} \sin\left(\alpha^{(t)}\right)$$

Из двух выражений для фазовой скорости $V_ф = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{n}$ получаем, что $k = n\dfrac{\omega}{c}$. Подставим это выражение для волнового числа k в предыдущую формулу с синусами

$\frac{n_1\omega}{c}\sin\left(\alpha^{(i)}\right)=\frac{n_1\omega}{c}\sin\left(\alpha^{(r)}\right)=\frac{n_2\omega}{c}\sin\left(\alpha^{(t)}\right)$, где n_1 и n_2 — показатели преломления двух сред.

Сократим формулу на отношение $\frac{\omega}{c}$ и получим

$$n_1\cdot\sin\left(\alpha^{(i)}\right)=n_1\cdot\sin\left(\alpha^{(r)}\right)=n_2\cdot\sin\left(\alpha^{(t)}\right).$$

С учетом неравенства $-\frac{\pi}{2}\le\alpha^{(r)}\le\frac{\pi}{2}$, означающего, что отраженный свет остается выше границы раздела сред, получим

$\underline{\alpha^{(i)}=\alpha^{(r)}}$ — угол падения равен углу отражения или закон отражения.

Обозначим $\alpha_1\equiv\alpha^{(i)}$ и $\alpha_2\equiv\alpha^{(t)}$ и получим закон преломления или закон Снеллиуса:

$$\underline{n_1\sin\left(\alpha_1\right)=n_2\sin\left(\alpha_2\right)}.$$

Заметим, что если параллельных границ между разными средами много, то

$\underline{n\cdot\sin\left(\alpha\right)=const}$ для всех границ.

Экзамен. Формулы Френеля. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания.

Найдем амплитуды отраженной и преломленной волн из граничных условий

$$\begin{cases}\varepsilon_1 E_{1n}=\varepsilon_2 E_{2n}\\ E_{1\tau}=E_{2\tau}\\ B_{1n}=B_{2n}\\ H_{1\tau}=H_{2\tau}\end{cases}$$

с учетом поперечности световых волн

$$\begin{cases}\vec{E}\perp\vec{k}\\ \vec{B}\perp\vec{k}\\ \vec{E}\perp\vec{B}\end{cases},$$

соотношения напряженностей электрического и магнитного полей $\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$ и с учетом законов отражения и преломления.

Те же граничные условия должны выполняться и для комплексных величин, тогда

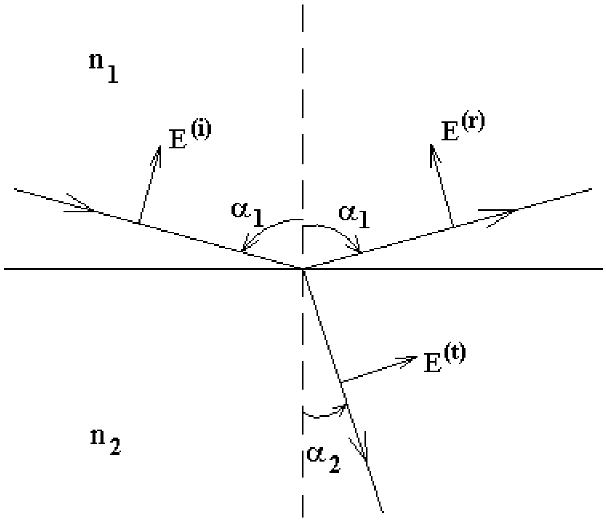
$$\begin{cases} \varepsilon_1 \tilde{E}_{1n} = \varepsilon_2 \tilde{E}_{2n} \\ \tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau} \\ \tilde{B}_{1n} = \tilde{B}_{2n} \\ \tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau} \end{cases}$$ — граничные условия в комплексном виде.

Нам будет достаточно уравнений $\begin{cases} \tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau} \\ \tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau} \end{cases}$.

Далее удобно рассмотреть раздельно вариант поляризации света в плоскости падения || и вариант поляризации перпендикулярной плоскости падения $\perp$.

I). Поляризация || параллельная плоскости падения света.

Выберем положительные направления для векторов $\tilde{\vec{E}}$ в падающей, отраженной и преломленной волнах:



Положительные направления электрического поля трех волн выбраны так, чтобы положительные направления магнитного поля этих волн совпадали друг с другом.

Магнитное поле каждой из трех волн направлено по касательной к границе раздела сред, поэтому для магнитного поля можно воспользоваться только граничным условием для тангенциальной составляющей: $\tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau}$. Над границей есть магнитное поле падающей и отраженной волн, под границей — только прошедшей волны, тогда

$$\tilde{H}^{(i)} + \tilde{H}^{(r)} = \tilde{H}^{(t)}.$$

С учетом соотношения $\sqrt{\varepsilon}\tilde{E} = \sqrt{\mu}\tilde{H}$, получим $\tilde{H} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\tilde{E} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\mu^2}}\tilde{E} = \dfrac{n}{\mu}\tilde{E}$.

Тогда для комплексных амплитуд электрических полей получим:

$$\frac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(i)} + \frac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(r)} = \frac{n_2}{\mu_2}\tilde{E}^{(t)}.$$

Граничное условие для нормальной составляющей поля электрического поля

$$\varepsilon_1 \tilde{E}_{1n} = \varepsilon_2 \tilde{E}_{2n}$$

после некоторых преобразований приводит к тому же уравнению для комплексных амплитуд отраженной $\tilde{E}^{(r)}$ и прошедшей волн $\tilde{E}^{(t)}$, поэтому мы его рассматривать не будем.

Рассмотрим в качестве второго уравнения для неизвестных амплитуд $\tilde{E}^{(r)}$ и $\tilde{E}^{(t)}$ граничное условие для тангенциальной составляющей электрического поля $\tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau}$, где проекция поля на горизонтальное направление в плоскости рисунка получается умножением напряженности поля на косинус соответствующего угла для каждой из трех волн:

$$\tilde{E}^{(i)} \cos\left(\alpha_1\right) - \tilde{E}^{(r)} \cos\left(\alpha_1\right) = \tilde{E}^{(t)} \cos\left(\alpha_2\right).$$

Решая два уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{n_1}{\mu_1} \tilde{E}^{(i)} + \dfrac{n_1}{\mu_1} \tilde{E}^{(r)} = \dfrac{n_2}{\mu_2} \tilde{E}^{(t)} \\ \tilde{E}^{(i)} \cos\left(\alpha_1\right) - \tilde{E}^{(r)} \cos\left(\alpha_1\right) = \tilde{E}^{(t)} \cos\left(\alpha_2\right) \end{cases}$$

с двумя неизвестными $\tilde{E}^{(r)}$ и $\tilde{E}^{(t)}$, находим

$$\begin{cases} \tilde{E}_{\parallel}^{(r)} = \tilde{E}_{\parallel}^{(i)} \cdot \dfrac{\dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos\left(\alpha_1\right) - \dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos\left(\alpha_2\right)}{\dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos\left(\alpha_1\right) + \dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos\left(\alpha_2\right)} \\ \tilde{E}_{\parallel}^{(t)} = \tilde{E}_{\parallel}^{(i)} \cdot \dfrac{2 \cdot \dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos\left(\alpha_1\right)}{\dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos\left(\alpha_1\right) + \dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos\left(\alpha_2\right)} \end{cases}$$

— формулы Френеля для амплитуд отраженной и преломленной волн.

Здесь значок $\parallel$ у поля E означает, что волна поляризована параллельно плоскости падения света.

Обычно в этих выражениях пренебрегают отличием магнитной проницаемости среды от единицы ($\mu = 1$). Тогда окончательно для амплитудных коэффициентов отражения $r \equiv \dfrac{\tilde{E}^{(r)}}{\tilde{E}^{(i)}}$ и пропускания $\tau \equiv \dfrac{\tilde{E}^{(t)}}{\tilde{E}^{(i)}}$ получаем следующие выражения

$$\begin{cases} r_{\|} = \dfrac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)} \\ \tau_{\|} = \dfrac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)} \end{cases}$$ — это формулы Френеля для амплитудных коэффициентов отражения и пропускания для поляризации света в плоскости падения.

Преобразуем $r_{\|}$ к другому виду. Для этого сначала умножим разные слагаемые числителя и знаменателя на разные части равенства $n_1\sin(\alpha_1) = n_2\sin(\alpha_2)$ так, чтобы каждое слагаемое содержало произведение $n_1 n_2$ и получим:

$$r_{\|} = \frac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)} = \frac{n_1 n_2\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) - n_1 n_2\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)}{n_1 n_2\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) + n_1 n_2\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin(2\alpha_1) - \frac{1}{2}\sin(2\alpha_2)}{\frac{1}{2}\sin(2\alpha_1) + \frac{1}{2}\sin(2\alpha_2)} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

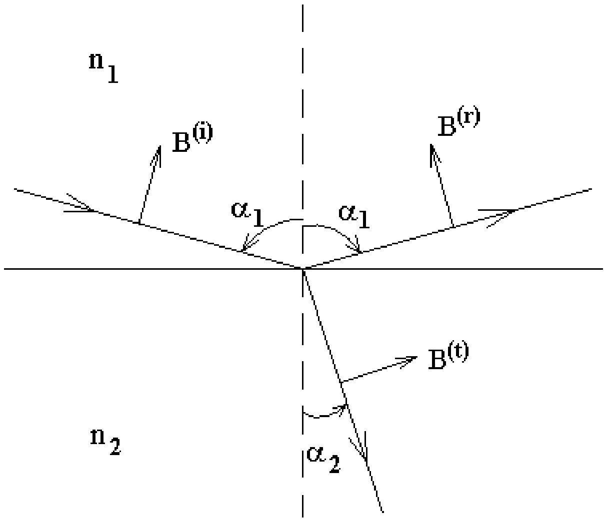
Окончательно:

$$r_{\|} = \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Эта формула понадобиться нам в дальнейшем. Заметим, что она получена в приближении $\mu = 1$.

II). Поляризация $\perp$ плоскости падения света.

Выберем положительные направления для векторов $\vec{B}$ трех световых волн так, чтобы положительные направления векторов $\vec{E}$ этих волн совпали.



.

Для поляризации света перпендикулярной плоскости падения воспользуемся теми же граничными условиями $\begin{cases}\tilde{E}_{\tau 1}=\tilde{E}_{\tau 2}\\ \tilde{H}_{\tau 1}=\tilde{H}_{\tau 2}\end{cases}$. Тогда

$$\begin{cases}\tilde{E}^{(i)}+\tilde{E}^{(r)}=\tilde{E}^{(t)}\\ \tilde{H}^{(i)}\cos\left(\alpha_1\right)-\tilde{H}^{(r)}\cos\left(\alpha_1\right)=\tilde{H}^{(t)}\cos\left(\alpha_2\right)\end{cases}$$

С учетом соотношения $\sqrt{\varepsilon}\tilde{E}=\sqrt{\mu}\tilde{H}$, получим $\tilde{H}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\tilde{E}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\mu^2}}\tilde{E}=\dfrac{n}{\mu}\tilde{E}$.

Подставим это во второе уравнение системы и получим пару уравнений для амплитуд отраженной и преломленной волн:

$$\begin{cases}\tilde{E}^{(i)}+\tilde{E}^{(r)}=\tilde{E}^{(t)}\\ \dfrac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(i)}\cos\left(\alpha_1\right)-\dfrac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(r)}\cos\left(\alpha_1\right)=\dfrac{n_2}{\mu_2}\tilde{E}^{(t)}\cos\left(\alpha_2\right)\end{cases}.$$

Решая уравнения, находим формулы Френеля для амплитуды отраженной и преломленной световых волн для поляризации света, перпендикулярной плоскости падения света:

$$\begin{cases}\tilde{E}_{\perp}^{(r)}=\tilde{E}_{\perp}^{(i)}\cdot\dfrac{\dfrac{n_1}{\mu_1}\cdot\cos\left(\alpha_1\right)-\dfrac{n_2}{\mu_2}\cdot\cos\left(\alpha_2\right)}{\dfrac{n_1}{\mu_1}\cdot\cos\left(\alpha_1\right)+\dfrac{n_2}{\mu_2}\cdot\cos\left(\alpha_2\right)}\\ \tilde{E}_{\perp}^{(t)}=\tilde{E}_{\perp}^{(i)}\cdot\dfrac{2\cdot\dfrac{n_1}{\mu_1}\cdot\cos\left(\alpha_1\right)}{\dfrac{n_1}{\mu_1}\cdot\cos\left(\alpha_1\right)+\dfrac{n_2}{\mu_2}\cdot\cos\left(\alpha_2\right)}\end{cases}$$

и, заменяя μ на единицу, как это обычно делают в учебниках по оптике, получаем для амплитудных коэффициентов отражения $r_{\perp} \equiv \frac{\tilde{E}_{\perp}^{(r)}}{\tilde{E}_{\perp}^{(i)}}$ и пропускания $\tau_{\perp} \equiv \frac{\tilde{E}_{\perp}^{(t)}}{\tilde{E}_{\perp}^{(i)}}$ формулы Френеля для поляризации света перпендикулярной плоскости падения света:

$$\begin{cases} r_{\perp} = \dfrac{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) - n_2 \cdot \cos(\alpha_2)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) + n_2 \cdot \cos(\alpha_2)} \\ \tau_{\perp} = \dfrac{2n_1 \cdot \cos(\alpha_1)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) + n_2 \cdot \cos(\alpha_2)} \end{cases}.$$