Возможные решения задач. 7 класс

Задача 1. Проверка работ

Поймем, как среднее время T, затрачиваемое на проверку одной работы, связано с долей нулевых работ α. Время T запишется как

$$T = \frac{1}{5} \cdot 0 \text{ с} + \alpha \cdot 20 \text{ с} + \left(\frac{4}{5} - \alpha\right) \cdot 100 \text{ с}. \tag{1}$$

Нас интересует расход чернил, поэтому по аналогии со средним временем найдем величину среднего расхода чернил на одну работу. Эта величина определяется следующим выражением

$$P = \frac{1}{5} \cdot 0{,}5 \text{ см} + \alpha \cdot 2 \text{ см} + \left(\frac{4}{5} - \alpha\right) \cdot 2{,}5 \text{ см}. \tag{2}$$

Выразим α через T из первого уравнения

$$\alpha = \frac{(80 - T)}{80} = \frac{1}{5}, \tag{3}$$

$$P = 2{,}1 \text{ см} - \frac{1}{5} \cdot 0{,}5 \text{ см} = 2 \text{ см}. \tag{4}$$

Теперь, чтобы найти расход чернил нужно умножить эту величину на количество проверенных работ. Расход окажется равным

$$L = 2000 \text{ см} = 20 \text{ м}. \tag{5}$$

Тогда в ручке останется 80 м, что составляет 0,8 от первоначального количества.

Ответ: 0,8.

- **2 балла** — За нахождение доли нулевых работ или работ с полным баллом,
- **1 балл** — За нахождение среднего расхода,
- **1 балл** — За верный ответ.

Задача 2. Упаковка камней

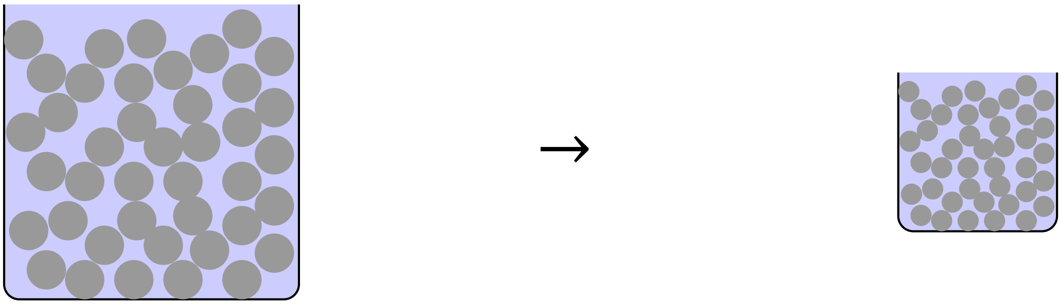

Рис. 1: Независимость от линейных размеров.

Из условия ясно, что камни занимают $\eta = 74\%$ объема в сосуде. Заметим, что если уменьшить объем сосуда и объем каждого шарика в 100 раз, то эта доля η не изменится, так как объем воды уменьшится во столько же раз, во сколько изменится суммарный объем камней. Можно теперь объединить 100 маленьких сосудов в один большой. Очевидно, доля объема, занимаемого камнями, снова будет равна η. Исходя из таких соображений можно понять, что доля η не зависит от объема системы и от размера камней, лишь бы размеры сосуда были много больше размеров камней.

Тогда можно считать, что промежутки между большими камнями в большом сосуде являются сосудами для маленьких камушков, а значит они вытеснят из него такую же долю η воды, что и большие камни.

Значит выльется

$$V = 0{,}74 \cdot 13 \text{ л} \approx 9{,}6 \text{ л.} \tag{6}$$

Ответ: 9,6 л.

- **3 балла** — За идею о масштабной независимости,
- **1 балл** — За верный ответ.

Задача 3. Почти Дидона

Пусть сначала человек мог бежать со скоростью v. Тогда периметр запланированного квадрата равен $24v$, сторона $6v$ и площадь $36v^2$. Однако после того, как было пройдено расстояние $3v$, человек стал двигаться со скоростью $\frac{v}{2}$, и получившийся периметр нового квадрата равен $3v + 10{,}5v = 13{,}5v$. Сторона меньшего квадрата равна $3,375v$, а площадь равна $\approx 11{,}4v^2$. Тогда искомое отношение равно

$$\frac{11{,}4\ v^2}{36\ v^2} \approx 0{,}317. \tag{7}$$

Если проводить точные вычисления, то ответ окажется

$$\left(\frac{9}{16}\right)^2. \tag{8}$$

Ответ: $0{,}317$ или $\left(\frac{9}{16}\right)^2$.

- **1 балл** — За нахождение изначального периметра,
- **1 балл** — За нахождение итогового периметра,
- **1 балл** — За связь периметра квадрата с площадью,
- **1 балл** — За верный ответ.

Задача 4. Расход дров

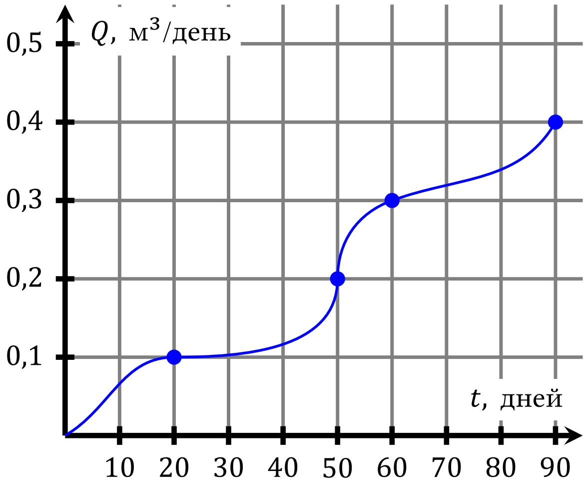

Рис. 2: Пример функции расхода дров от времени.

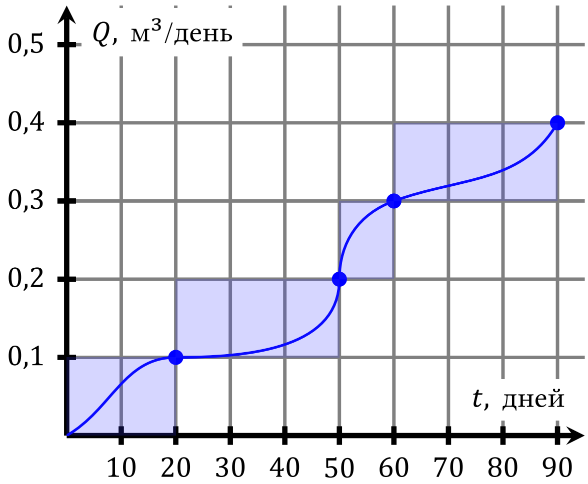

Рис. 3: Области, в которых может лежать линия графика.

По условию, расход дров с каждым днем не убывал. Это значит, что он задается линией на графике, проходящей через заданные точки, и, всегда направленной вправо и верх. Тогда можо провести горизональные и вертикальные линии, проходящие через известные нам точки графика, и сам график будет лежать внутри получившихся прямоугольников.

Если бы мы знали всю линию графика, мы могли бы точно найти расход дров как площадь фигуры, ограниченной этим графиком. Чтобы это понять, можно усмотреть явную аналогию с графиком скорости от времени. Но раз нам известны только некоторые условия, задающие целый набор возможных линий расхода дров, нужно найти максимальное и минмальное возможные значения расхода дров. Для этого из набора всех возможных линий следует выбрать те две, которые задают минимальную и максимальную площади. Ясно, что эти линии являются границами нарисованных прямоугольников.

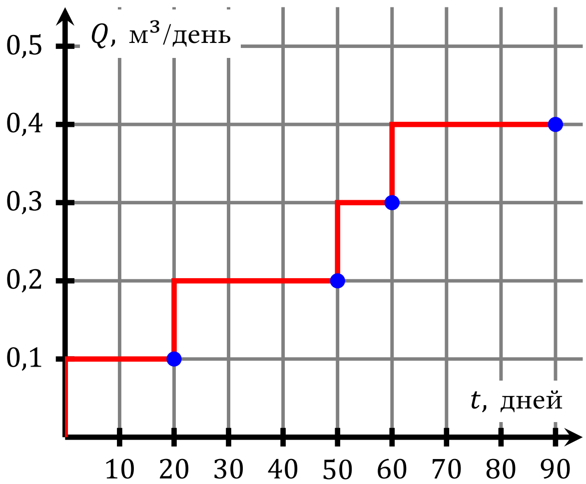

Рис. 4: Линия, задающая максимальную площадь.

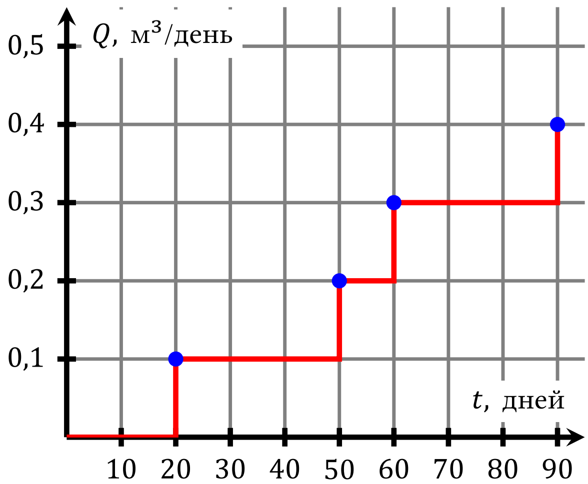

Рис. 5: Линия, задающая минимальную площадь.

Теперь для получения ответа осталось только посчитать получившиеся площади. В случае максимального расхода

$$P_{max} = (0{,}1 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 30 + 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 30)\ \text{м}^3 = 23\ \text{м}^3. \quad (9)$$

В случае минимального

$$P_{min} = (0{,}1 \cdot 30 + 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 30)\ \text{м}^3 = 14\ \text{м}^3. \quad (10)$$

Ответ: 23 м^3 и 14 м^3.

- **1 балл** — За идею о том, что количество потраченных дров это $Q \cdot t$,
- **1 балл** — Нахождение минимизирующей траектории,
- **1 балл** — Нахождение максимизирующей траектории,
- **0,5 балла** — Ответ для первого случая,
- **0,5 балла** — Ответ для второго случая.

Примечание: Если ребенок озвучивает идею о том, среди каких траекторий ему нужно искать минимум и максимум, но затрудняется с определением крайних случаев, ему следует задать наводящий вопрос.