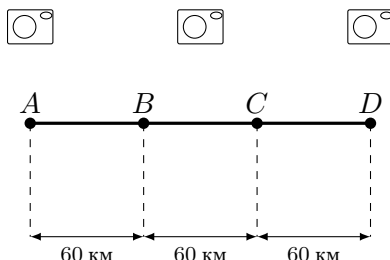


# Возможные решения задач. 7 класс

## Вариант 1

### Задача 1. Камеры



Можно посчитать, за какое минимальное время может проехать автомобиль от первой до второй камеры, не нарушая правил дорожного движения. Для этого автомобиль должен двигаться с максимально разрешенной скоростью, то есть 60 км/ч на отрезке  $AB$  на протяжении 60 км и со скоростью 90 км/ч на половине отрезка на протяжении еще 30 км. Сумма времен на прохождение расстояния между первой и второй камерами будет равна  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{60 \text{ км}}{60 \text{ км/ч}} + \frac{30 \text{ км}}{90 \text{ км/ч}} = 1 \text{ час } 20 \text{ минут.} \quad (1)$$

Так как автомобиль проехал этот отрезок за 1 час 10 минут, можно сказать, что он наверняка нарушил правила на отрезке между первой и второй камерой.

Теперь рассчитаем минимальное время движения между второй и третьей камерами. Автомобиль может оставшиеся 30 км до точки  $C$  проехать со скоростью 90 км/ч, а затем 60 км до точки  $D$  проехать со скоростью 120 км/ч. Тогда затраченное на это время будет равно  $T_2$ :

$$T_2 = \frac{30 \text{ км}}{90 \text{ км/ч}} + \frac{60 \text{ км}}{120 \text{ км/ч}} = 50 \text{ минут.} \quad (2)$$

Так как автомобиль проехал отрезок между второй и третьей камерой за 60 минут, нельзя сказать, что он наверняка превышал скорость на этом отрезке.

**Ответ:** Автомобиль наверняка превышал скорость на отрезке между первой и второй камерами.

- **3 балла** — Проведены расчеты величины, позволяющей определить, превышал ли автомобиль скорость на первом участке.
- **2 балла** — Вывод, что автомобиль **наверняка** нарушал скорость на первом участке.
- **3 балла** — Проведены расчеты величины, позволяющей определить, превышал ли автомобиль скорость на втором участке.
- **2 балла** — Вывод, что нельзя сказать, что автомобиль **наверняка** нарушал скорость на втором участке.

## Задача 2. Мыло

### 2.1. Первое возможное решение

Изначально в бутылке было только мыло. Тогда каждый посетитель, выдавливая объем  $V$ , тратил ровно такой же объем мыла. После первого разбавления в бутылке оказалась смесь мыла и воды, в которой одна треть занимает мыло и две трети — вода. Тогда каждый посетитель, выдавливая тот же объем  $V$ , тратил бы лишь  $V/3$  мыла. Однако, каждый посетитель после разбавления стал выдавливать объем  $3V$  жидкости, и поэтому тратить тот же самый объем мыла  $V$ , что и до разбавления. Поэтому расход мыла не изменился после первого разбавления.

Сразу после второго разбавления в бутылке находится только  $1/9$  часть мыла и  $8/9$  частей воды. Тогда выдавливаемое количество мыла составляет  $1/9$  часть от объема выдавленной жидкости. Однако теперь посетители выдавливают еще в три раза больше жидкости, то есть в 9 раз больше, чем изначально. Это значит, что они снова каждый раз выдавливают такое же количество мыла. Значит расход мыла не меняется и после второго разбавления.

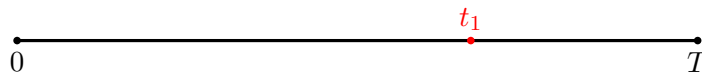
Можно понять, что расход мыла не изменяется при любом количестве разбавлений. А тогда мыло в банке кончится за то же время, что и в случае, когда его не разбавляли водой, то есть за неделю.

**Ответ:** через 7 дней.

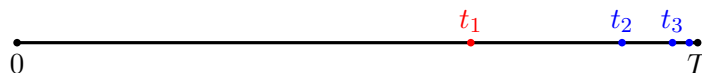
- 4 балла — После первого разбавления расход мыла не меняется.
- 6 баллов — Утверждение, что расход мыла одинаков после любого количества разбавлений.

### 2.2. Второе возможное решение

Введем числовую ось и обозначим на ней начальный момент, и момент  $T$ , когда мыло кончилось в первой бутылке. Найдем на ней время  $t_1$ , в которое произошло первое разбавление. Это произошло, когда израсходовалось  $2/3$  бутылки, то есть прошло  $2T/3$ .



Теперь в момент  $t_1$  у нас снова имеется полная бутылка жидкости, но расход жидкости увеличился вдвое. Тогда до следующего разбавления пройдет вдвое меньший промежуток времени. Но можно заметить, что оставшееся время до момента  $T$  тоже вдвое меньше изначального. Тогда можно сказать, что до следующего разбавления пройдет  $2/3$  оставшегося времени. По этому правилу можно найти момент  $t_2$  второго разбавления и моменты  $t_n$  всех последующих.



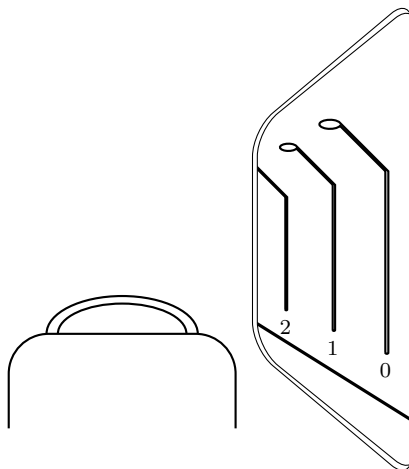
Тогда можно заметить, что каждое разбавление будет происходить все ближе к моменту  $T$ , но не позже. Кроме того, с каждым разбавлением мыла в бутылке становится все меньше, а значит в момент  $T$  его не останется вовсе.

**Ответ:** через 7 дней.

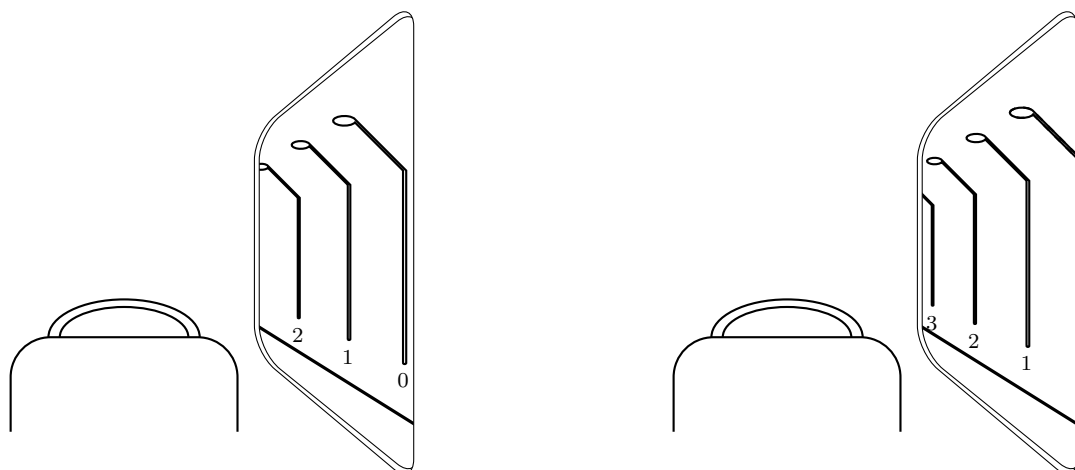
- 4 балла — Построение первого момента времени.
- 6 баллов — Правило построения последующих моментов времени.

### Задача 3. Дорожная

Мальчик наблюдает за движущимися относительно него фонарями и деревьями, имея ограниченный угол зрения. На рисунке представлено, что он видит из окна на примере фонарей. При движении каждый фонарь перемещается от левого края угла зрения к правому. Разумно считать фонарь тогда, когда его столб пересекает правый край. В таком случае один и тот же фонарь не будет учтен несколько раз.



Мальчик всегда видит ровно три фонаря. Тогда в тот момент, когда один из фонарей (фонарь 0) исчезает из поля зрения, в нем должен появляться следующий (фонарь 3). Иначе существовал бы такой промежуток времени, в котором в угле зрения находилось бы всего два фонаря, а это противоречит условию.



Фонарь 3 ровно через секунду пересечет край щели и займет положение фонаря 0. Кроме него за это время край щели пересекут еще фонари (1 и 2). Тогда мальчик насчитает 3 фонаря, кроме фонаря 0, который уже посчитан ранее. Значит можно сказать, что мальчик насчитывает 3 фонаря в секунду.

Аналогично будет выглядеть картина подсчета деревьев, только описанный процесс будет происходить не за 1 секунду, а за 3, и вместо 3 фонарей мальчик будет видеть 4 дерева в поле зрения. Тогда можно найти, что мальчик насчитывает 4 дерева в 3 секунды. А значит, насчитав 180 фонарей, он потратил 60 секунд и насчитал 80 деревьев.

**Ответ:** 80 деревьев.

- 5 баллов — Предложен правильный механизм подсчета фонарей или деревьев.
- 2 балла — Найдено, что мальчик насчитывает 3 фонаря в секунду.
- 2 балла — Найдено, что мальчик насчитывает 4 дерева за 3 секунды.
- 1 балл — Правильный ответ.

#### Задача 4. Пулемет и поезд

Из того, что расстояние между всеми дырками одинаковое, можно сделать вывод о том, что за промежуток времени между выстрелами точка попадания сдвигается на постоянную величину  $x$ . То есть, при стрельбе по неподвижному поезду расстояние между любыми соседними дырками было бы равно  $x$ .

В случае, когда поезд движется налево, расстояние между дырками складывается из  $x$  и расстояния  $y$ , которое проходит поезд

$$x + y = 100 \text{ см.} \quad (3)$$

Если же поезд движется направо, то возможны два варианта. Поезд может проходить расстояние  $y > x$ , либо  $y < x$ . В обоих случаях расстояние между дырками будет равно 30 см, и будет равно разности  $x$  и  $y$ .

В первом случае

$$x - y = 30 \text{ см,} \quad (4)$$

во втором

$$y - x = 30 \text{ см.} \quad (5)$$

В обоих случаях можно найти интересующий нас  $y$ . В первом случае  $y = 35$  см, во втором — 65 см. Такое перемещение совершает поезд за время между выстрелами  $t$ , которое равно  $1/5$  секунды. Тогда скорость поезда равна

$$v = \frac{y}{t}, \quad (6)$$

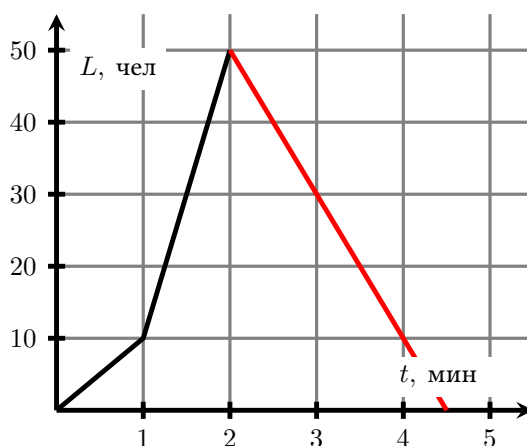
и составляет 1,75 м/с для первого случая и 3,25 м/с для второго.

**Ответ:** 1,75 м/с и 3,25 м/с.

- 4 балла — Правильно рассмотрено относительное движение.
- 2 балла — Связь расстояния между дырками со скоростью.
- 2 балла — Обнаружено наличие двух случаев.
- 1 балл — Правильный ответ для первого случая.
- 1 балл — Правильный ответ для второго случая.

## Задача 5. Эскалатор

Эскалатор можно рассмотреть как два параллельных пути, по которым люди спускаются либо стоя, либо идя пешком. Понятно, что спускаться пешком быстрее. Пусть стоя спускается  $N$  человек в минуту, а пешком —  $M$  человек в минуту. Тогда максимум может спускаться  $2M$ , минимум  $2N$ , а в стационарном режиме спускается  $N + M$  человек в минуту.



Скорость роста очереди на каждом участке можно определить по графику, поделив изменение ее длины на время, за которое оно произошло. Так, скорость роста очереди на первом участке равна 10 человек в минуту, на втором — 40 человек в минуту.

Эту скорость можно связать с количеством спускающихся людей и числом входящих на станцию. Если за минуту на станцию входит  $K$  человек, а спускается изначально  $N + M$ , то скорость роста очереди на первом участке будет равна  $K - (N + M)$ .

На втором участке люди стоят на обеих сторонах, а значит всего спускается  $2N$  человек в минуту. Скорость роста очереди на втором участке равна  $K - 2N$  и на 30 человек в минуту больше, чем на первом. Значит  $M - N = 30$  человек в минуту.

После двух минут люди стали идти пешком по двум сторонам, и всего спускается  $2M$  человек в минуту. Скорость роста очереди на этом участке равна  $K - 2M$ . Это на 30 человек в минуту меньше, чем на первом участке, а значит равна  $-20$  человек в минуту.

По графику заметим, что через 2 минуты у эскалатора образовалась очередь из 50 человек. Тогда со скоростью 20 человек в минуту эта очередь сократится до нуля за

$$t = \frac{50 \text{ чел}}{20 \text{ чел/мин}} = 2,5 \text{ мин.} \quad (7)$$

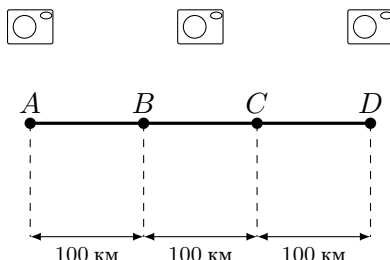
**Ответ:** за 2,5 минуты.

- 3 балла — Умение находить скорость по графику.
- 5 баллов — Нахождение скорости сокращения очереди в третьем режиме.
- 2 балла — Правильный ответ.

# Возможные решения задач. 7 класс

## Вариант 2

### Задача 1. Камеры



Можно посчитать, за какое минимальное время может проехать автомобиль от первой до второй камеры, не нарушая правил дорожного движения. Для этого автомобиль должен двигаться с максимально разрешенной скоростью, то есть 50 км/ч на отрезке  $AB$  на протяжении 100 км и со скоростью 75 км/ч на половине отрезка на протяжении еще 50 км. Сумма времен на прохождение расстояния между первой и второй камерами будет равна  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{100 \text{ км}}{50 \text{ км/ч}} + \frac{50 \text{ км}}{75 \text{ км/ч}} = 2 \text{ часа } 40 \text{ минут.} \quad (8)$$

Так как автомобиль проехал этот отрезок за 3 часа, нельзя сказать, что он наверняка нарушил правила на отрезке между первой и второй камерой.

Теперь рассчитаем минимальное время движения между второй и третьей камерами. Автомобиль может оставшиеся 50 км до точки  $C$  проехать со скоростью 75 км/ч, а затем 100 км до точки  $D$  проехать со скоростью 100 км/ч. Тогда затраченное на это время будет равно  $T_2$ :

$$T_2 = \frac{50 \text{ км}}{75 \text{ км/ч}} + \frac{100 \text{ км}}{100 \text{ км/ч}} = 1 \text{ час } 40 \text{ минут.} \quad (9)$$

Так как автомобиль проехал отрезок между второй и третьей камерой за 1 час 30 минут, можно сказать, что он наверняка превышал скорость на этом отрезке.

**Ответ:** Автомобиль наверняка превышал скорость на отрезке между второй и третьей камерами.

- **3 балла** — Проведены расчеты величины, позволяющей определить, превышал ли автомобиль скорость на первом участке.
- **2 балла** — Вывод, что нельзя сказать, что автомобиль **наверняка** нарушал скорость на первом участке.
- **3 балла** — Проведены расчеты величины, позволяющей определить, превышал ли автомобиль скорость на втором участке.
- **2 балла** — Вывод, что автомобиль **наверняка** нарушал скорость на втором участке.

## Задача 2. Мыло

### 2.1. Первое возможное решение

Изначально в бутылке было только мыло. Тогда каждый посетитель, выдавливая объем  $V$ , тратил ровно такой же объем мыла. После первого разбавления в бутылке оказалась смесь мыла и воды, в которой одна четверть занимает мыло и три четверти — вода. Тогда каждый посетитель, выдавливая тот же объем  $V$ , тратил бы лишь  $V/4$  мыла. Однако, каждый посетитель после разбавления стал выдавливать объем  $4V$  жидкости, и поэтому тратить тот же самый объем мыла  $V$ , что и до разбавления. Поэтому расход мыла не изменился после первого разбавления.

Сразу после второго разбавления в бутылке находится только  $1/16$  часть мыла и  $15/16$  частей воды. Тогда выдавливаемое количество мыла составляет  $1/16$  часть от объема выдавленной жидкости. Однако теперь посетители выдавливают еще в четыре раза больше жидкости, то есть в 16 раз больше, чем изначально. Это значит, что они снова каждый раз выдавливают такое же количество мыла. Значит расход мыла не меняется и после второго разбавления.

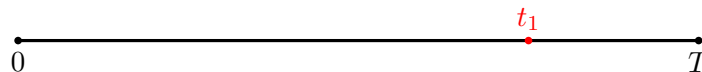
Можно понять, что расход мыла не изменяется при любом количестве разбавлений. А тогда мыло в банке кончится за то же время, что и в случае, когда его не разбавляли водой, то есть за неделю.

**Ответ:** через 7 дней.

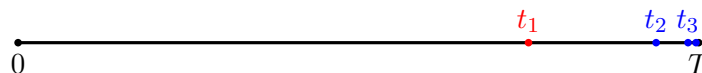
- **4 балла** — После первого разбавления расход мыла не меняется.
- **6 баллов** — Утверждение, что расход мыла одинаков после любого количества разбавлений.

### 2.2. Второе возможное решение

Введем числовую ось и обозначим на ней начальный момент, и момент  $T$ , когда мыло кончилось в первой бутылке. Найдем на ней время  $t_1$ , в которое произошло первое разбавление. Это произошло, когда израсходовалось  $3/4$  бутылки, то есть прошло  $3T/4$ .



Теперь в момент  $t_1$  у нас снова имеется полная бутылка жидкости, но расход жидкости увеличился втрое. Тогда до следующего разбавления пройдет вчетверо меньший промежуток времени. Но можно заметить, что оставшееся время до момента  $T$  тоже вчетверо меньше изначального. Тогда можно сказать, что до следующего разбавления пройдет  $3/4$  оставшегося времени. По этому правилу можно найти момент  $t_2$  второго разбавления и моменты  $t_n$  всех последующих.



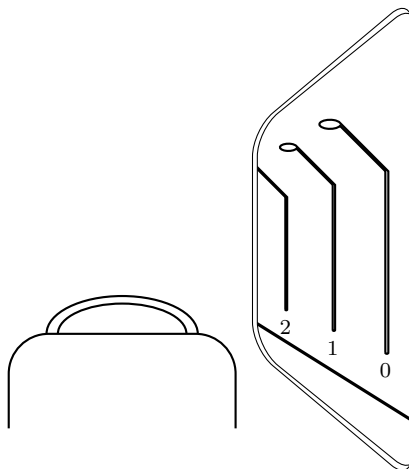
Тогда можно заметить, что каждое разбавление будет происходить все ближе к моменту  $T$ , но не позже. Кроме того, с каждым разбавлением мыла в бутылке становится все меньше, а значит в момент  $T$  его не останется вовсе.

**Ответ:** через 7 дней.

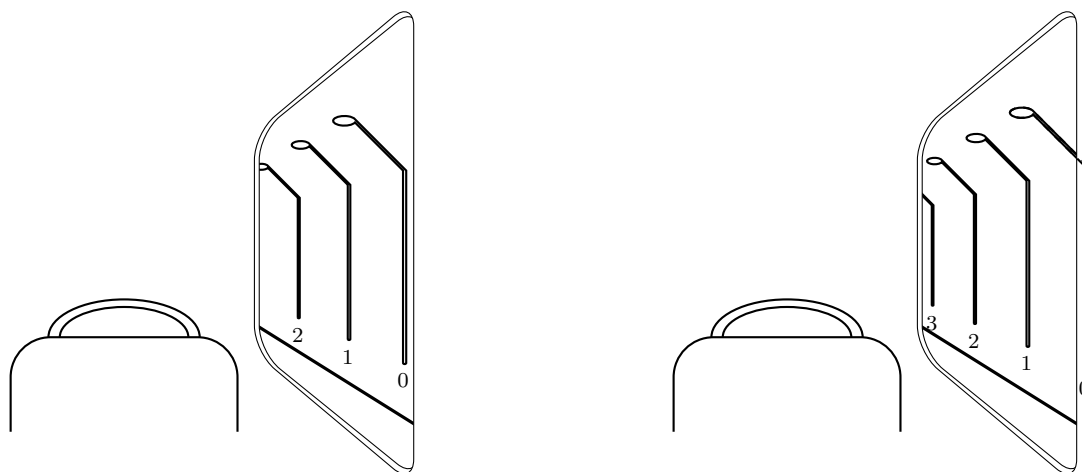
- **4 балла** — Построение первого момента времени.
- **6 баллов** — Правило построения последующих моментов времени.

### Задача 3. Дорожная

Мальчик наблюдает за движущимися относительно него фонарями и деревьями, имея ограниченный угол зрения. На рисунке представлено, что он видит из окна на примере фонарей. При движении каждый фонарь перемещается от левого края угла зрения к правому. Разумно считать фонарь тогда, когда его столб пересекает правый край. В таком случае один и тот же фонарь не будет учтен несколько раз.



Мальчик всегда видит ровно три фонаря. Тогда в тот момент, когда один из фонарей (фонарь 0) исчезает из поля зрения, в нем должен появляться следующий (фонарь 3). Иначе существовал бы такой промежуток времени, в котором в угле зрения находилось бы всего два фонаря, а это противоречит условию.



Фонарь 3 ровно через 1,5 пересечет край щели и займет положение фонаря 0. Кроме него за это время край щели пересекут еще фонари (1 и 2). Тогда мальчик насчитает 3 фонаря, кроме фонаря 0, который уже посчитан ранее. Значит можно сказать, что мальчик насчитывает 2 фонаря в секунду.

Аналогично будет выглядеть картина подсчета деревьев, только описанный процесс будет происходить не за 1 секунду, а за 4, и вместо 3 фонарей мальчик будет видеть 2 дерева в поле зрения. Тогда можно найти, что мальчик насчитывает 2 дерева в 4 секунды. А значит, насчитав 30 деревьев, он потратил 60 секунд и насчитал 120 фонарей.

**Ответ:** 120 фонарей.

- 5 баллов — Предложен правильный механизм подсчета фонарей или деревьев.
- 2 балла — Найдено, что мальчик насчитывает 2 фонаря в секунду.
- 2 балла — Найдено, что мальчик насчитывает 2 дерева за 4 секунды.
- 1 балл — Правильный ответ.



#### Задача 4. Пулемет и поезд

Из того, что расстояние между всеми дырками одинаковое, можно сделать вывод о том, что за промежуток времени между выстрелами точка попадания сдвигается на постоянную величину  $x$ . То есть, при стрельбе по неподвижному поезду расстояние между любыми соседними дырками было бы равно  $x$ .

В случае, когда поезд движется направо, расстояние между дырками складывается из  $x$  и расстояния  $y$ , которое проходит поезд

$$x + y = 140 \text{ см.} \quad (10)$$

Если же поезд движется направо, то возможны два варианта. Поезд может проходить расстояние  $y > x$ , либо  $y < x$ . В обоих случаях расстояние между дырками будет равно 100 см, и будет равно разности  $x$  и  $y$ .

В первом случае

$$x - y = 100 \text{ см,} \quad (11)$$

во втором

$$y - x = 100 \text{ см.} \quad (12)$$

В обоих случаях можно найти интересующий нас  $y$ . В первом случае  $y = 20$  см, во втором — 120 см. Такое перемещение совершает поезд за время между выстрелами  $t$ , которое равно  $1/5$  секунды. Тогда скорость поезда равна

$$v = \frac{y}{t}, \quad (13)$$

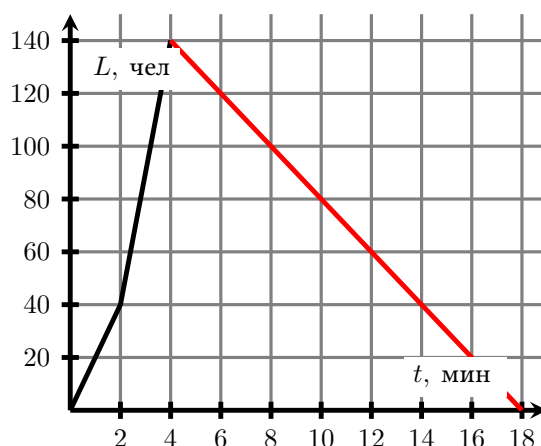
и составляет 1 м/с для первого случая и 6 м/с для второго.

**Ответ:** 1 м/с и 6 м/с.

- 4 балла — Правильно рассмотрено относительное движение.
- 2 балла — Связь расстояния между дырками со скоростью.
- 2 балла — Обнаружено наличие двух случаев.
- 1 балл — Правильный ответ для первого случая.
- 1 балл — Правильный ответ для второго случая.

## Задача 5. Эскалатор

Эскалатор можно рассмотреть как два параллельных пути, по которым люди спускаются либо стоя, либо идя пешком. Понятно, что спускаться пешком быстрее. Пусть стоя спускается  $N$  человек в минуту, а пешком —  $M$  человек в минуту. Тогда максимум может спускаться  $2M$ , минимум  $2N$ , а в стационарном режиме спускается  $N + M$  человек в минуту.



Скорость роста очереди на каждом участке можно определить по графику, поделив изменение ее длины на время, за которое оно произошло. Так, скорость роста очереди на первом участке равна 20 человек в минуту, на втором — 50 человек в минуту.

Эту скорость можно связать с количеством спускающихся людей и числом входящих на станцию. Если за минуту на станцию входит  $K$  человек, а спускается изначально  $N + M$ , то скорость роста очереди на первом участке будет равна  $K - (N + M)$ .

На втором участке люди стоят на обеих сторонах, а значит всего спускается  $2N$  человек в минуту. Скорость роста очереди на втором участке равна  $K - 2N$  и на 30 человек в минуту больше, чем на первом. Значит  $M - N = 30$  человек в минуту.

После двух минут люди стали идти пешком по двум сторонам, и всего спускается  $2M$  человек в минуту. Скорость роста очереди на этом участке равна  $K - 2M$ . Это на 30 человек в минуту меньше, чем на первом участке, а значит равна  $-10$  человек в минуту.

По графику заметим, что через 4 минуты у эскалатора образовалась очередь из 140 человек. Тогда со скоростью 10 человек в минуту эта очередь сократится до нуля за

$$t = \frac{140 \text{ чел}}{10 \text{ чел/мин}} = 14 \text{ мин.} \quad (14)$$

**Ответ:** за 14 минут.

- 3 балла — Умение находить скорость по графику.
- 5 баллов — Нахождение скорости сокращения очереди в третьем режиме.
- 2 балла — Правильный ответ.