— Вложенная гравитация в пределе слабого миметика —

Известно, что действие теории вложения можно записать в виде действия Эйнштейна-Гильберта с добавкой некоторой „фиктивной" материи:

$$S = S^{EH} + S_m + S^{+}$$

$$S^{+} = \int d^4x \sqrt{-g}\left(j^\mu_a \partial_\mu y^a - tr\sqrt{g_{\mu\nu} j^\nu_a \eta^{ab} j^\alpha_b}\right)$$

Считая независимыми переменными $g_{\mu\nu}$, j^μ_a и y^a, можно получить уравнения теории:

$$\begin{aligned}
&\text{w.r.t. } j^\mu_a: \quad \partial_\mu y^a = \beta^{-1}_{\mu\nu} j^{\nu a}, \\
&\text{w.r.t. } y^a: \quad D_\mu j^a = 0, \qquad\qquad (1)\\
&\text{w.r.t. } g_{\mu\nu}: \quad G^{\mu\nu} = \varkappa\left(T^{\mu\nu} + \beta^{\mu\nu}\right),
\end{aligned}$$

где $\beta_\mu{}^\alpha$ обозначение для $\sqrt{g_{\mu\nu} j^\nu_a \eta^{ab} j^\alpha_b}$. Можно проверить, что набор уравнений оказывается эквивалентным уравнениям теории вложения в исходной формулировке (с $g_{\mu\nu} = \partial_\mu y^a \partial_\nu y_a$ и нез. перем. y^a)

Выбранный набор независимых переменных оказывается не вполне удачным для анализа ур. (1) из-за неопределённости вида β^{-1}.

Кажется удобным использовать сингулярное разложение матрицы $j^\mu_a = e^\mu_A \Lambda^A_B n^B_a$, с матрицами e^μ_A и n^B_a ортогональными в смысле:

$$g_{\mu\nu} e^\mu_A e^\nu_B = \eta_{AB}$$

$$n^B_a n^A_b \eta^{ab} = \eta^{BA}, \quad A = 0,1,2,3. \quad \eta_{AB} = diag(1,-1,-1,-1)$$

Матрицу Λ_{AB} будем считать симметричной.
(Существование такого разложения нужно обсуждать отдельно)
В таком подходе e^μ_A можно воспринимать как репер.
Заглавные латинские индексы относятся к калибровочной $SO(1,3)$ группе.

Рассмотрим матрицу $\beta_\mu{}^\alpha = \sqrt{g_{\mu\nu} j^\nu_a \eta^{ab} j^\alpha_b}$ после подстановки $j^\mu_a = e^\mu_A \Lambda^{AB} n_{Ba}$

$$\sqrt{g_{\mu\nu} e^\nu_A \Lambda^{AB} n_{Ba} \eta^{ab} e^\alpha_C \Lambda^{CD} n_{Db}} = \sqrt{e_{\mu A} \Lambda^{AB} \Lambda^{CB} e^\alpha_C} \overset{?}{=} e_{\mu A} \Lambda^{AB} e_B{}^\alpha = \beta_\mu{}^\alpha$$

Проверим последнее равенство

$e_{\mu A} \Lambda^{AB} e^\nu_B \cdot e_{\nu D} \Lambda^{DC} e^\alpha_C = e_{\mu A} \Lambda^{AB} \Lambda^{BC} e^\alpha_C$, что совпадает с подкоренным выражением, если $\Lambda^{BC} = \Lambda^{CB}$. Выбор ветки корня может быть осуществлён различными способами.

$\beta^{-1}{}_\mu{}^\alpha = e_{\mu A} \Lambda^{-1\,AB} e_B{}^\alpha$; $\beta^{-1}{}_\mu{}^\alpha \beta_\alpha{}^\nu = e_{\mu A} \Lambda^{-1\,AB} e^\alpha_B \cdot e_{\alpha C} \Lambda^{CD} e^\nu_D = \delta^\nu_\mu$

Уравнения (1) можно переписать:

$$\partial_\mu y^a = e_\mu{}^A n_A{}^a$$

$$D_\mu \left(e^\mu_A \Lambda^{AB} n_{Ba} \right) = 0 \qquad (2)$$

$$G_{\mu\nu} = \varkappa \left(T_{\mu\nu} + e_{\mu A} \Lambda^{AB} e_{\nu B} \right)$$

Введём калибровочную связность путём требования ковариантной постоянности репера:

$$D_\mu e^\nu_A = \partial_\mu e^\nu_A + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} e^\alpha_A + w_{\mu A}{}^B e^\nu_B = 0$$

Будем искать решение системы (2) в условиях отсутствия обычной материи $T_{\mu\nu} = 0$ и слабого гравитационного поля.

$e^\mu_A = \delta^\mu_A + \frac{\varkappa}{2} h^\mu_A + \varkappa \alpha^\mu_A$ h - симметрич. α - антисимметрич.

Найдем связность w в первом порядке по $\varkappa$

$$W_\mu{}^B{}_A = - e^B_\nu \partial_\mu e^\nu_A - e_\nu{}^B \Gamma^\nu_{\mu\alpha} e^\alpha_A \quad , \quad \Gamma^\nu_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\nu\beta}(\partial_\mu g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\alpha})$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \cancel{\mp} \varkappa h_{\mu\nu}$$

$$W_\mu{}^B{}_A = - \delta^B_\nu \partial_\mu\left(\cancel{\frac{\varkappa}{2} h^\nu_A} + \varkappa \alpha^\nu{}_A\right) + \frac{\varkappa}{2}\left(\cancel{\partial_\mu h^B_A} + \partial_A h^B_\mu - \partial^B h_{\mu A}\right) =$$

$$= \varkappa\left[\frac{1}{2}(\partial_A h^B_\mu - \partial^B h_{\mu A}) - \partial_\mu \alpha^B{}_A\right]$$

Нетрудно проследить антисимметричность по A, B.

Из третьего уравнения системы (2) следует, что

$$\mathcal{D}_\mu\, e^{\mu A} \Lambda_{ABC}\, e^{\nu B} = 0,$$

а учитывая ковариантную постоянность $e^{\mu A}$

$$e^\mu{}_A\left(\partial_\mu \Lambda^{AB} \cancel{\pm} W_\mu{}^A{}_C \Lambda^{CB} \cancel{\pm} W_\mu{}^B{}_C \Lambda^{AC}\right) = 0 \qquad (3)$$

Будем считать, что можно выбором фикс. калибровки сделать Λ_{AB} диаг. кроме того будем ~~[illegible]~~ искать решение строго находясь в пределе миметич. гравитации, т.е. $\Lambda_{00} = \rho$, $\Lambda_{II} = 0$, $I = 1,2,3$. (в дальнейшем латинские индексы $I, K, L, M \ldots$ из середины алфавита принимают значение $1,2,3$)

В главном порядке уравнение Эйнштейна даёт решение $h^{00}_{00} = 2\varphi(\vec{x})$
$h_{00} = 0$,
$\partial_0 h^{00}_{00} = 0$

а $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\rho$

Распишем ур (3) по порядкам малости ($W \sim \varkappa$)

$$\left(\delta^\mu_A + \frac{\varkappa}{2} h^\mu_A + \varkappa \alpha^\mu{}_A\right)\left(\partial_\mu \Lambda^{AB} - W_\mu{}^A{}_C \Lambda^{CB} - W_\mu{}^B{}_C \Lambda^{AC}\right) = 0$$

$\varkappa^0$: $\quad \partial_0 \Lambda^{00} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_0 \rho = 0} \quad \boxed{1}$

$\varkappa^1$: $\quad B = 0 \quad \alpha^I \partial_I \Lambda^{00} + \partial_I \alpha^I{}_0 \Lambda^{00} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_I(\alpha^I{}_0 \Lambda^{00}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_I(\rho\, \alpha^I{}_0) = 0} \quad \boxed{2}$

$\quad B \neq 0 \quad W_{00}^I = 0 \quad -\frac{1}{2}\partial^I h_{00} - \partial_0 \alpha^I{}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_0 \alpha^I{}_0 = \partial^I \varphi(x)} \quad \boxed{3}$

Перейдём к рассмотрению ~~ее~~ второго уравнения (в системе) (2). Будем искать его решение считая величину $n_B{}^a = \delta^a_B + \sqrt{\varkappa}\, \beta_B{}^a + \frac{\varkappa}{2} \beta_B{}^b \beta_b{}^a$, где $\beta_{ba} = -\beta_{ab}$

Тогда (2) имеет вид

$$\delta^\mu_A \cdot \Lambda^{AB}\left(\sqrt{\varkappa}\,\partial_\mu \beta_B{}^a + \frac{\varkappa}{2}\partial_\mu(\beta_B{}^b\beta_b{}^a) + W_\mu{}^c{}_B\,\delta_c^a\right)=0$$

$\sqrt{\varkappa}$: $\Lambda^{AB}\partial_A\beta_B{}^a=0 \Rightarrow \boxed{\partial_0\beta_0{}^a=0}$ $\boxed{4}$

$\varkappa$: $\Lambda^{AB}\left(\frac12\partial_A(\beta_B{}^b\beta_b{}^a)+\frac{1}{\varkappa}W^a_{AB}\right)=0$

$\Downarrow$

$$\frac12\beta_0{}^b\partial_0\beta_b{}^a+\frac{1}{\varkappa}W^a_{00}=0 \qquad W^a_{00}=\varkappa\left(\frac12\left(\overset{0}{\partial_0 h^a_0} - \partial^a h_{00}\right) - \partial_0\alpha^a{}_0\right)$$

$a=0$ $\quad W^a_{00}=0$

$a=I$ $\quad W^I_{00}=-\frac12\partial^I h_{00}-\partial_0\alpha^I{}_0=0$

$a=\perp$ $\quad W^a_{00}=0$

Значок $\perp = 4,5,\dots,9$.

$\Downarrow$

$$\boxed{\beta_0{}^b\partial_0\beta_b{}^a=0} \quad \boxed{5}$$

Перейдём к первому уравнению системы (2)

$$\partial_\mu y^a = \left(\delta^A_\mu - \frac{\varkappa}{2} h^A_\mu - \varkappa\alpha^A{}_\mu\right)\left(\delta^a_A+\sqrt{\varkappa}\beta_A{}^a+\frac{\varkappa}{2}\beta_A{}^b\beta_b{}^a\right)$$

$$\partial_\mu y^a=\delta^a_\mu+\sqrt{\varkappa}\beta_\mu{}^a+\varkappa\left(-\frac12 h^a_\mu-\alpha^a{}_\mu+\frac12\beta_\mu{}^b\beta_b{}^a\right) \quad (4)$$

Условие его разрешимости накладывает ограничения на компоненты α и β, которые можно найти из уравнения

$$\left[D_\nu(e_\mu{}^A n_A{}^a)\right]_{\mu\nu}=0$$

$$\left[\delta^A_\mu\left(\sqrt{\varkappa}\,\partial_\nu\beta_A{}^a + W_\nu{}^B{}_A\,\delta_B^a+\frac{\varkappa}{2}\partial_\nu(\beta_A{}^b\beta_b{}^a)\right)\right]_{\mu\nu}=0$$

$\sqrt{\varkappa}$: $\boxed{\partial_\mu\beta_\nu{}^a=\partial_\nu\beta_\mu{}^a}$ $\boxed{6}$

$\varkappa$: $a=0$ $\quad \frac12\partial_I(\beta_0{}^b\beta_b{}^0)-\frac12\partial_0(\beta_I{}^b\beta_b{}^0)=0 \overset{\boxed{4,6}}{\Rightarrow} \boxed{\beta_0{}^b\beta_b{}^0=\mathrm{Const}}$ $\boxed{7}$

$\beta_b{}^0\partial_0\beta_I{}^b=0$

$\frac12\partial_I(\beta_K{}^b\beta_b{}^0)-\frac12\partial_K(\beta_I{}^b\beta_b{}^0)=0$

$a=M$ $\quad \frac12\partial_I(\beta_0{}^b\beta_b{}^M)-\frac12\partial_0(\beta_I{}^b\beta_b{}^M)-\partial_I\alpha^M{}_0-\partial_0\alpha^M{}_I=0$

$\frac12\partial_I(\beta_K{}^b\beta_b{}^M)-\frac12\partial_K(\beta_I{}^b\beta_b{}^M)-\partial_I\alpha^M{}_K-\partial_K\alpha^M{}_I=0$

$a=\perp$ $\quad \frac12\partial_\mu(\beta_\nu{}^b\beta_b{}^\perp)-\frac12\partial_\nu(\beta_\mu{}^b\beta_b{}^\perp)=0$

Можно найти частное решение уравнения (4) в случае $\alpha^I{}_K=0$, $\beta_\mu{}^0=0$, $\beta_{\perp_1}{}^{\perp_2}=0$. Распишем его для разных компонент.

$$\partial_0 y^0 = \delta_0^0 - \frac{\varkappa}{2} h_0^0 + \frac{\varkappa}{2}\beta_0{}^{\perp}\beta_{\perp}{}^0$$
$$\partial_I y^0 = -\varkappa\,\alpha^0{}_I + \frac{\varkappa}{2}\beta_I{}^{\perp}\beta_{\perp}{}^0$$

$$\partial_0 y^K = -\varkappa\,\alpha^K{}_0 + \frac{\varkappa}{2}\beta_0{}^{\perp}\beta_{\perp}{}^K \qquad (5)$$
$$\partial_I y^K = -\frac{\varkappa}{2}\beta_I{}^{\perp}\beta_{\perp}{}^K$$

$$\partial_0 y^{\perp} = \sqrt{\varkappa}\,\beta_0{}^{\perp} + \cancel{\frac{\varkappa}{2}\beta_0{}^{\perp_1}\beta_{\perp_1}{}^{\perp}}$$
$$\partial_I y^{\perp} = \sqrt{\varkappa}\,\beta_I{}^{\perp} + \cancel{\frac{\varkappa}{2}\beta_0}$$

Кроме того, используя соотношения в рамочках $\boxed{1-7}$ можно установить

$$\partial_0\beta_I{}^a = \partial_I\beta_0{}^a \Rightarrow \beta_I{}^a = t\,\partial_I\beta_0{}^a + f^a(x),$$
$$\partial_0\alpha^I{}_0 = \partial^I\varphi(x) \Rightarrow \alpha^I{}_0 = t\cdot\partial^I\varphi(x) + g^I(x).$$

Предположим для простоты отсутствие f и g. Тогда

$$\beta_I{}^a = t\cdot\partial_I\beta_0{}^a, \quad \alpha^I{}_0 = t\,\partial^I\varphi(x).$$

Решением (5) являются функции

$$y^0 = t + t\,\varkappa\varphi(x) + \frac{t}{2}\varkappa\,\beta_0{}^{\perp}\beta_{\perp}{}^0,$$
$$y^I = x^I - \frac{t}{2}\varkappa\,\alpha^I{}_0,$$
$$y^{\perp} = \sqrt{\varkappa}\,t\cdot\beta_0{}^{\perp},$$

если выполняется соотношение $\partial_I\partial_K\varphi(x) = \sum_{\perp}\partial_I\beta_0{}^{\perp}\partial_K\beta_0{}^{\perp}$, где $\beta_0{}^{\perp}$ не произвольны, а связаны соотношением $\boxed{7}$.

Можно воспользоваться подстановкой

$$\begin{cases}\beta_0{}^4\\ \beta_0{}^5\end{cases} = \begin{cases}\sin(\omega_1(x))\\ \cos(\omega_1(x))\end{cases}, \quad \begin{cases}\beta_0{}^6\\ \beta_0{}^7\end{cases} = \begin{cases}\sin(\omega_2(x))\\ \cos(\omega_2(x))\end{cases}, \quad \begin{cases}\beta_0{}^8\\ \beta_0{}^9\end{cases} = \begin{cases}\sin(\omega_3(x))\\ \cos(\omega_3(x))\end{cases},$$

тогда

$$\partial_I\partial_K\varphi(x) = \sum_{n=1}^{3}\partial_I\omega_n(x)\,\partial_K\omega_n(x) \qquad (6)$$

Симметричную матрицу ~~мож~~ $\partial_I\partial_K\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\partial_I\partial_K\varphi(x) = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n(x)\,\xi_I^n(x)\,\xi_K^n(x),$$

где λ_n - собств. число, а ξ_I^n - собств. вектор. После этого ω_n можно определить как решение уравнения

$$\partial_I\omega_n(x) = \sqrt{\lambda_n(x)}\,\xi_I^n(x), \quad \text{если} \quad \lambda_n(x) \geq 0.$$

В итоге вложение имеет вид:

$$y^0 = t + \varkappa\, t\cdot\varphi(x) + \frac{3\varkappa}{2}\cdot t,$$

$$y^I = x^I - \varkappa\,\frac{t}{2}\cdot\partial^I\varphi(x),$$

$$y^4 = \sqrt{\varkappa}\,\sin(\omega_1(x)), \qquad y^6 = \sqrt{\varkappa}\,\sin(\omega_2(x)), \qquad y^8 = \sqrt{\varkappa}\,\sin(\omega_3(x)),$$

$$y^5 = \sqrt{\varkappa}\,\cos(\omega_1(x)), \qquad y^7 = \sqrt{\varkappa}\,\cos(\omega_2(x)), \qquad y^9 = \sqrt{\varkappa}\,\cos(\omega_3(x)).$$