2022年ノーベル物理学賞の内容をQiskitでやってみる

Ayumu Shiraishi

Qiskit Advocate

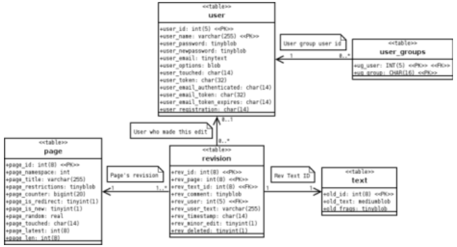
講師自己紹介

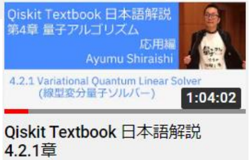
氏名：白石 歩(Ayumu Shiraishi)

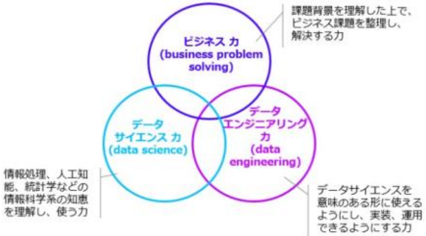
専攻：元理論物理学徒（量子情報理論と宇宙論と一般相対論）

所属：日本アイ・ビー・エム システムズ・エンジニアリング株式会社（ISE） DX Solution /Advanced AI

担当：ITエンジニア 兼 データサイエンティスト 兼 量子コンピューターエバンジェリスト（Qiskit Advocate）







食料は飲料空容器！ポケモンのベトベターが次世代型リサイクルボックスになった

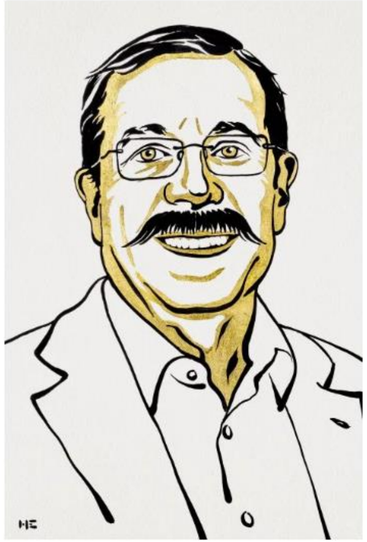
2021.01.21

本日のアジェンダ

- はじめに
- 歴史をたどる
  - EPRの議論（1935年）
  - Bellの不等式（1964年）
  - CHSH不等式（1969年）
  - Aspectの実験（1982年）
  - それ以降の話題
- QiskitでCHSH不等式の破れを実験してみる（Qiskit Textbook）

はじめに

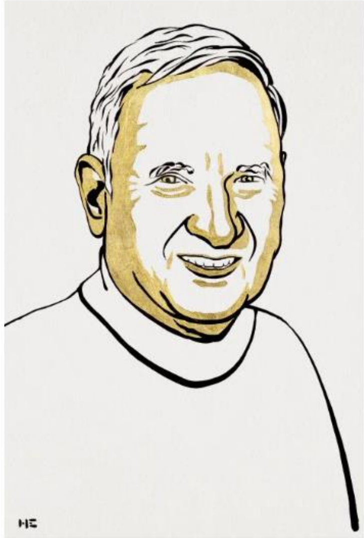
The Nobel Prize in Physics 2022



Ill. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach

Alain Aspect

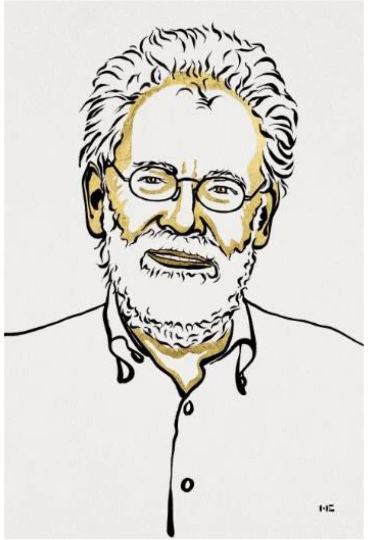
Prize share: 1/3



Ill. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach

John F. Clauser

Prize share: 1/3



Ill. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach

Anton Zeilinger

Prize share: 1/3

The Nobel Prize in Physics 2022 was awarded jointly to Alain Aspect, John F. Clauser and Anton Zeilinger "for **experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science"**

- エンタングルメント
- **Bellの不等式の破れ**
- 量子情報科学

https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/summary/

EPRの議論（1935年）

MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*
(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

1.

ANY serious consideration of a physical theory must take into account the distinction between the objective reality, which is independent of any theory, and the physical concepts with which the theory operates. These concepts are intended to correspond with the objective reality, and by means of these concepts we picture this reality to ourselves.

In attempting to judge the success of a physical theory, we may ask ourselves two questions: (1) "Is the theory correct?" and (2) "Is the description given by the theory complete?" It is only in the case in which positive answers may be given to both of these questions, that the concepts of the theory may be said to be satisfactory. The correctness of the theory is judged by the degree of agreement between the conclusions of the theory and human experience. This experience, which alone enables us to make inferences about reality, in physics takes the form of experiment and measurement. It is the second question that we wish to consider here, as applied to quantum mechanics.

Whatever the meaning assigned to the term *complete*, the following requirement for a complete theory seems to be a necessary one: *every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory*. We shall call this the condition of completeness. The second question is thus easily answered, as soon as we are able to decide what are the elements of the physical reality.

The elements of the physical reality cannot be determined by *a priori* philosophical considerations, but must be found by an appeal to results of experiments and measurements. A comprehensive definition of reality is, however, unnecessary for our purpose. We shall be satisfied with the following criterion, which we regard as reasonable. *If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.* It seems to us that this criterion, while far from exhausting all possible ways of recognizing a physical reality, at least provides us with one

Albert Einstein　Boris Podolsky　Nathan Rosen

「完全な理論であるなら実在のそれぞれの要素に対応する要素が、理論の中にあるべきである。」

ある物理量が"実在する"とは「**その物理量を有する系の状態を乱すことなしに、その物理量を確実 に予言することが可能であること**」（これをこの論文中の"物理的実在"の定義）とする。

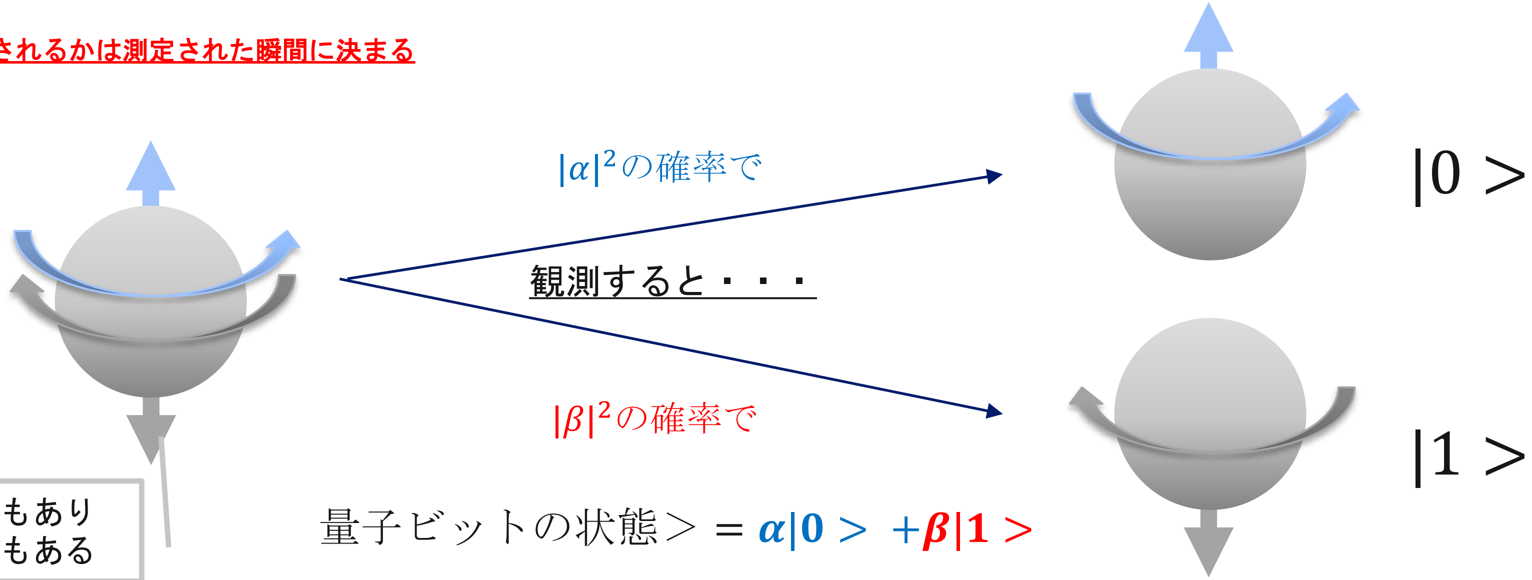
EPRは「**量子論は実在性のある完全な理論であると信じている**」と締めている。

https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.47.777

EPRの議論（1935年）

量子論では“重ね合わせの原理”によって、測定したときに異なる状態（例えば、ビットの値が0と1）がそれぞれ確率的に出現する状態を作れる

- 0か1の古典ビットと同じ形の値のどちらかのみが測定される
- どれくらいの確率で測定されるかは、確率振幅から計算できる（以下の、αとβが確率振幅）
  - 確率振幅から確率を求めるには、絶対値の２乗を計算する必要がある
  - <u>どちらの状態が測定されるかは測定された瞬間に決まる</u>



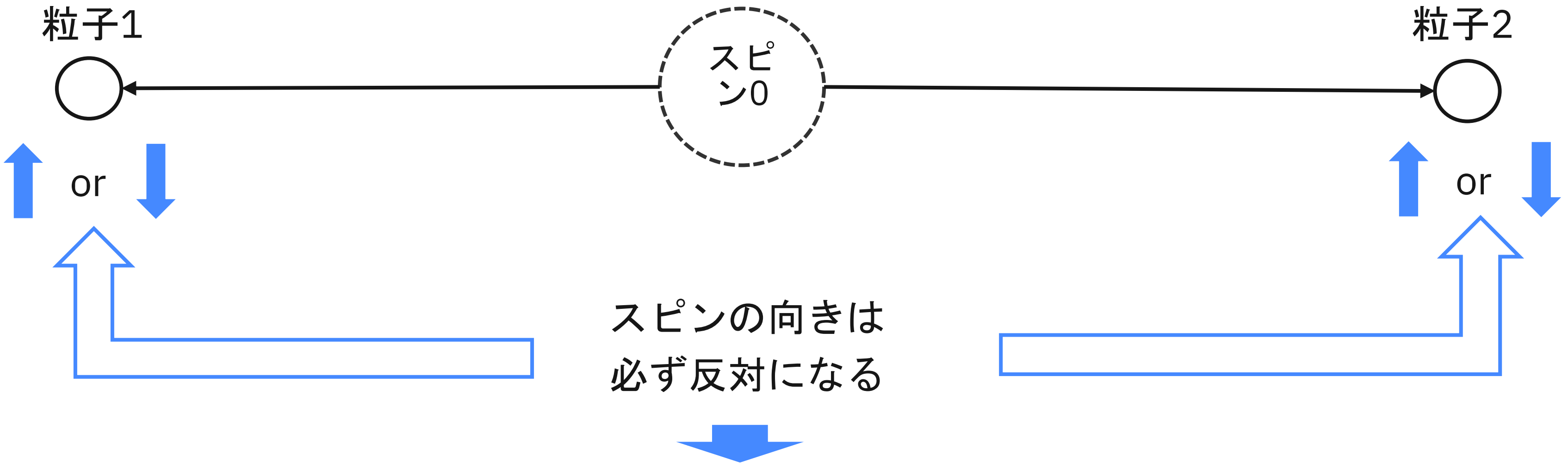
上向き（状態が0）でもあり
下向き（状態が1）でもある

量子ビットの状態> = $\boldsymbol{\alpha}|0> + \boldsymbol{\beta}|1>$

EPRの議論（1935年）

元のEPR論文とは別の思考実験として、スピン（角運動量）が0の粒子が、スピンが上向きか下向きのどちらかである2つの粒子に分割したケースを考える。

上向きか下向きかどちらの状態が測定されるかはわからない。ただし、角運動量の保存則より**スピンの向きは必ず反対向きになる。**（例：当たりクジはどちらか１つのみ）

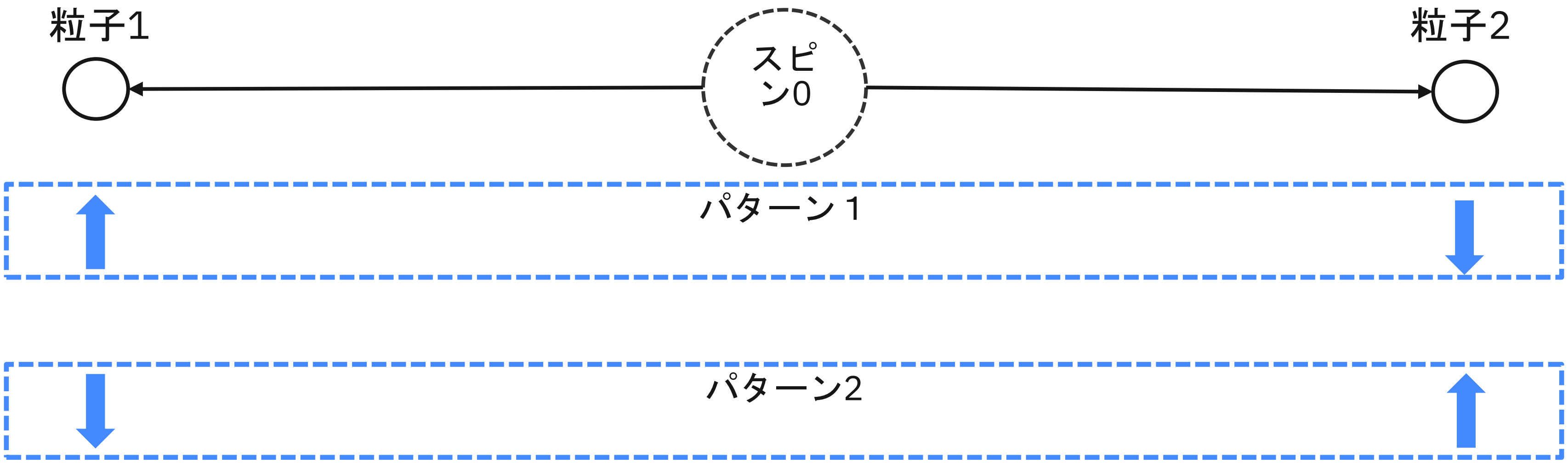


片方を測定すれば、残りは測定しなくても100%予言できる（EPR流の実在の定義に合致）

EPRの議論（1935年）

片方でのスピンが測定されるまではスピンの向きは不明だが、測定したときには残りのスピンの向きが決まる。

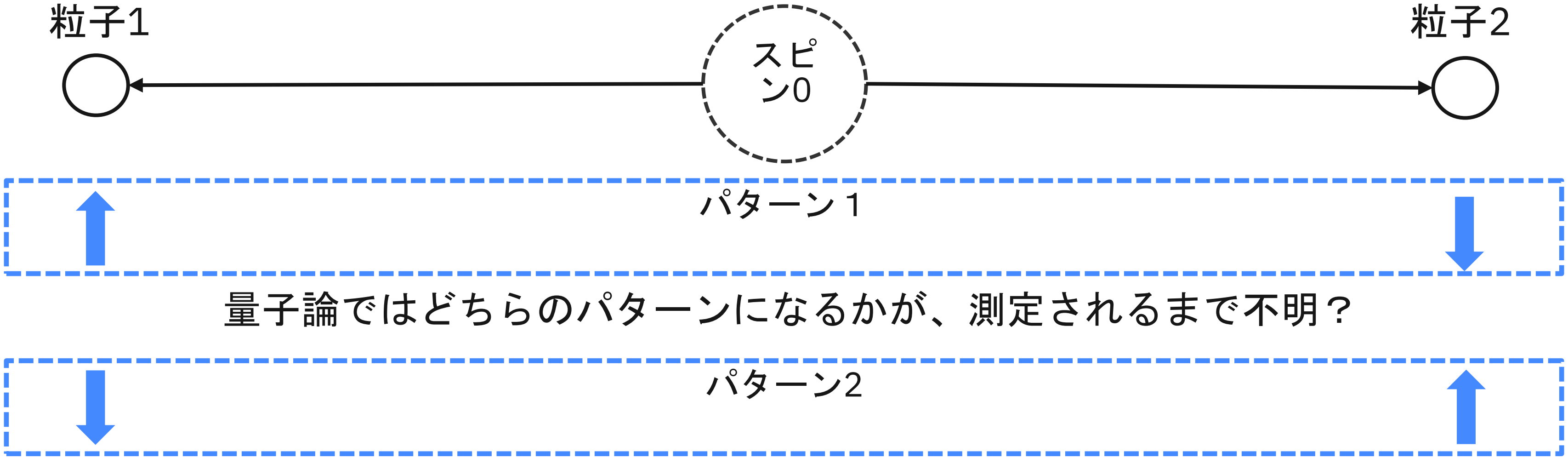
- 粒子1が↑向きスピン（↓向きスピン）だとすると、粒子2は↓向きスピン（↑向きスピン）として測定される2パターンが想定される



EPRの議論（1935年）

量子論ではどっちのパターンが測定されるかは完全にランダムであり、どちらの状態が測定されるかが決まるのは“測定された瞬間”とされている。

EPRらは、「片方を測定した瞬間に残りの粒子の状態が確定するのは情報伝達が光速を超えるので因果律に反するのでは？」と考えた。



（実はこれが量子もつれ状態の発見でもあった）

EPRの議論（1935年）

以上から、EPRは「(量子力学は実験的に正しいし、因果律も正しいとすれば)**量子論を数学的に記述する方法（波動関数）は不完全であると考える**」と主張した。

Bellの不等式（1964年）

EPRの主張を裏付けるために、John.S.Bellが

その定式化を行いBellの不等式を導出した。

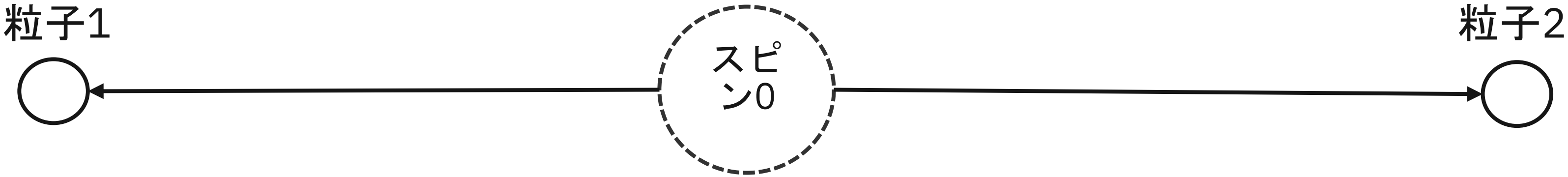
Bellの不等式では２つの（我々の世界では素朴に直感的に正しそうな）仮定を置いた

1. **物理量は測定する前からすでに決まっている（実在性）**

→　「隠れた変数」の影響で出力結果は決まっているけど測定毎に結果がバラついているように見えると仮定

2. **2か所のそれぞれの測定の仕方がお互いの測定に影響を及ぼさない（局所性）**

→　因果律の担保、測定結果の独立性の担保を仮定



Bellの不等式（1964年）

<u>隠れた変数理論</u>

　測定結果を決定する上で我々が知ることのできないパラメーターをλとして、その確率分布を$\rho(\lambda)$とする。

$$\begin{cases} \rho(\lambda) \geq 0 \\ \int \rho(\lambda) d\lambda = 1 \end{cases}$$

　物理量Aに対する期待値を隠れた変数の確率分布の期待値から算出できる。

$$\langle A(a) \rangle = \int A(a, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

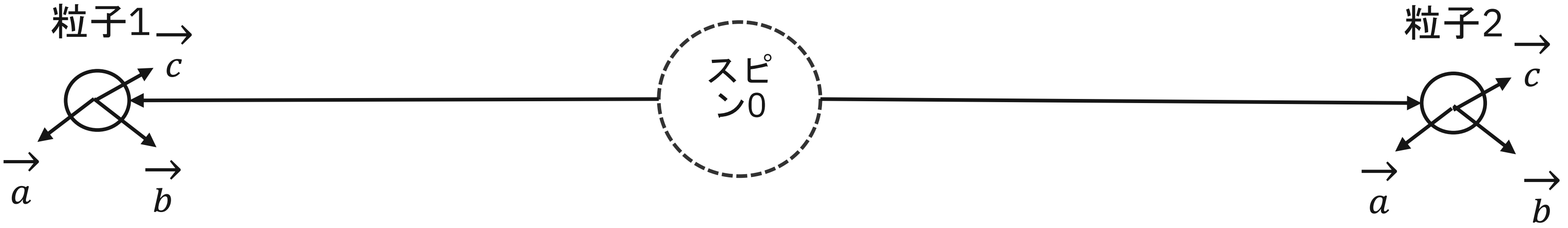
数理統計学の混合モデルと同等

（ただし、aは人間が実験的にコントロールできるパラメーター）

Bellの不等式（1964年）

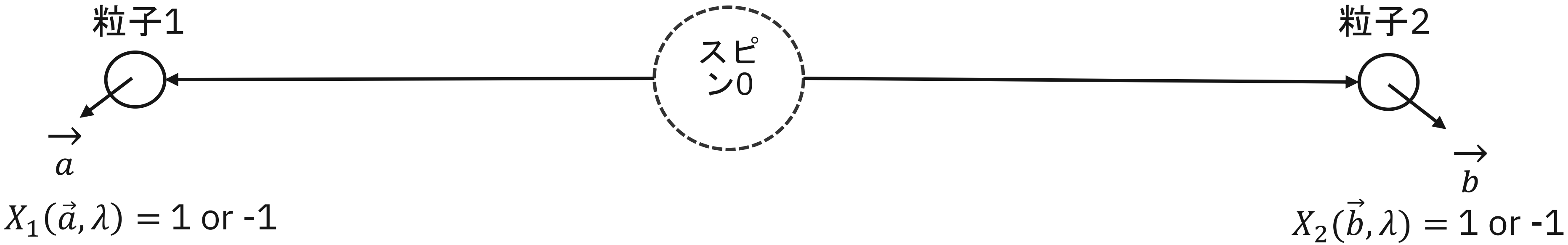
実験状況として、2か所それぞれで可能な3種類の測定方法を考える。

- EPRの議論と同じく、同じ向きでスピンを測定した場合は、お互いの粒子で逆の向きと測定される
- 今回は測定する向きを3方向（$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$）を決めておく
- それぞれの粒子でこの3方向の内どれか１つずつを選択した上で測定する
  - どの方向で測定するかはどちらの粒子も自由に決めて良い
  - 両方の粒子で同じ方向を選んでも良い



Bellの不等式（1964年）

- 測定結果から算出される値をX_iであらわし、測定した結果は↑上向きと出た場合は+1、↓下向きと出た場合は-1とする。
- **隠れた変数（実在性）の仮定から、隠れた変数λによって上向き（X=+1）と測定されるか下向き（X=-1）になるかは測定前からすでに決まっていて、測定しなくてもどちらかの値になるかが確定していると仮定する。**



Bellの不等式（1964年）

最初に　$X_1(\vec{a},\lambda)X_2(\vec{b},\lambda)-X_1(\vec{a},\lambda)X_2(\vec{c},\lambda)$　という値を考える。

$X_1(\vec{a},\lambda)=-X_2(\vec{a},\lambda)$:2つの粒子を同じ方向測定した場合は測定結果が逆になることを使うと以下の等式が導かれる。また$X_i^2=1$であることも使うと

$$X_1(\vec{a},\lambda)X_2(\vec{b},\lambda)-X_1(\vec{a},\lambda)X_2(\vec{c},\lambda)=-X_1(\vec{a},\lambda)X_1(\vec{b},\lambda)[1+X_1(\vec{b},\lambda)X_1(\vec{c},\lambda)]$$

相関$C(\vec{a},\vec{b})=\int\rho(\lambda)X_i(\vec{a},\lambda)X_j(\vec{b},\lambda)d\lambda$を定義し、上記の等式の両辺に$\rho(\lambda)$を掛けて積分をしてきから絶対値を取ると、以下の不等式が導かれる

ここでは積分と絶対値に関する不等式　$|\int \boldsymbol{f(x)dx}|\leq\int|\boldsymbol{f(x)}|\boldsymbol{dx}$　を使う

$$\boldsymbol{|C(\vec{a},\vec{b})-C(\vec{a},\vec{c})|\leq 1+C(\vec{b},\vec{c})}$$

⬅ これが原初のBellの不等式

Bellの不等式（1964年）

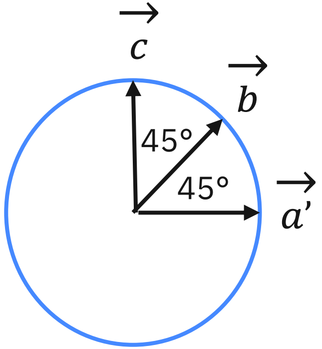
$$|C(\vec{a},\vec{b}) - C(\vec{a},\vec{c})| \leq 1 + C\,(\vec{b},\vec{c})$$

量子力学では、この相関は測定の向き（ベクトル）の角度差に依存しており、今回の思考実験のケースでは$C(\vec{a},\vec{b}) = -\cos\theta_{ab}$となることが知られているので、それを代入すると、

$$|\cos\theta_{ab} - \cos\theta_{ac}| \leq 1 - \cos\theta_{bc}$$

ここで、$\theta_{ab} = \theta_{bc} = {}^{\pi}/_{4}\,(= 45°)\,, \theta_{ac} = {}^{\pi}/_{2}\,(= 90°)$と設定すると

$$\text{左辺} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \geq \text{右辺} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.293$$



となり、不等式の大小関係が逆になってしまっている。

これが俗にいう<u>**「Bellの不等式の破れ」**</u>である

Bellの不等式（1964年）

量子力学でBellの不等式が破れるケースが作れるということは、不等式を立てるために仮定していた

1. 実在性
2. 局所性

の少なくとも一方が量子力学の世界では間違っているということになる。

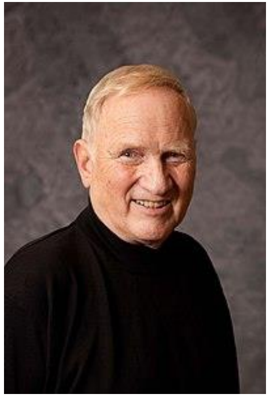
後はこれを実験で確かめられれば良い。

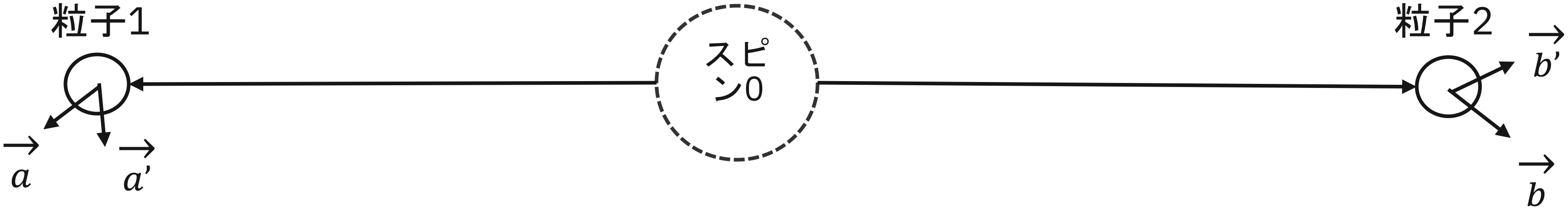
CHSH不等式（1969年）

Bellの不等式は実験状況を作りにくいという課題があったため、それを改良したものがCHSH不等式である。（発明したClauser、Horne、Shimony、Holtの４名の頭文字）

今回はそれぞれの粒子で、2方向ずつの測定の向きを用意する

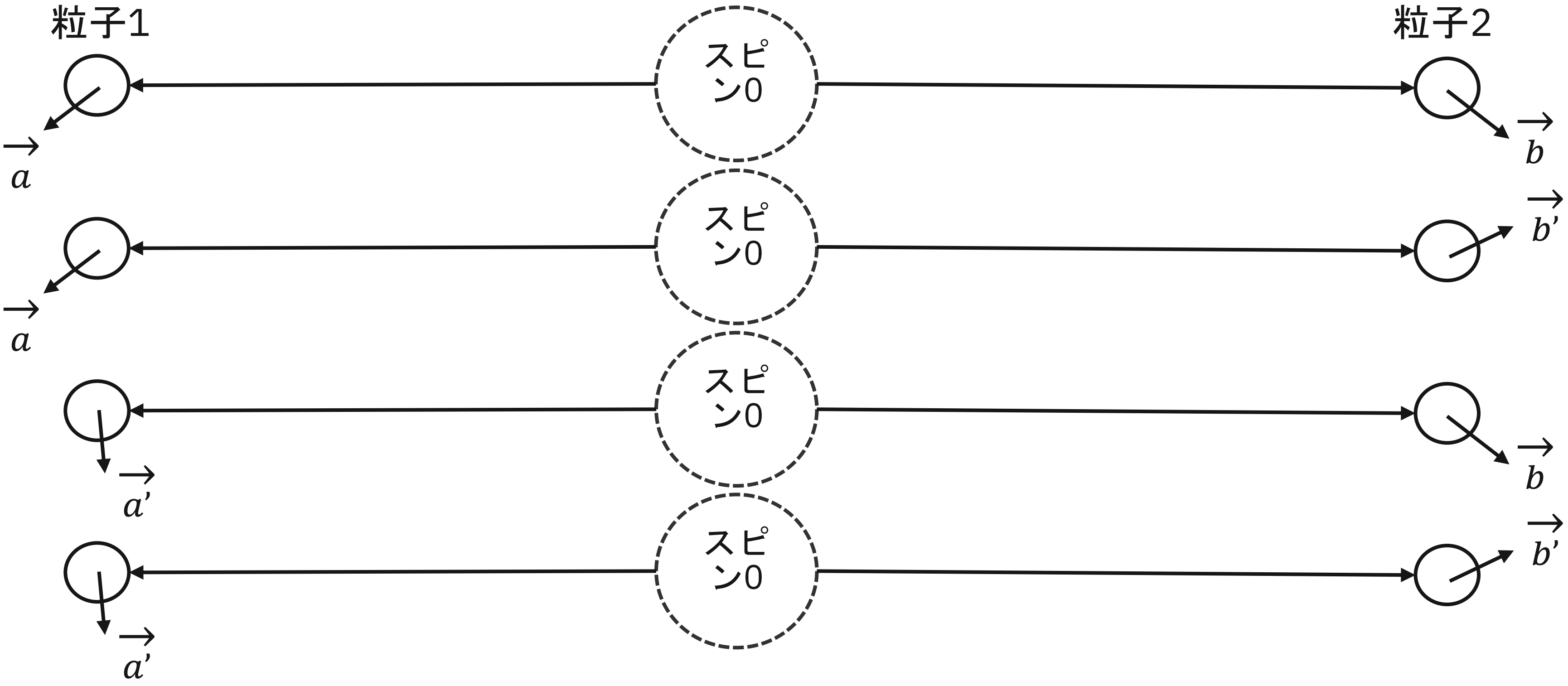
- 各粒子では、2つの内1つの方向で測定をする
- それぞれの粒子で用意する2方向は自由に決められる





CHSH不等式（1969年）

この場合、各粒子の測定の向きの組み合わせは以下の４通りになる



CHSH不等式（1969年）

次のような値を考える。（ただし、A, A', B, B'はそれぞれ+1か-1のいずれかを取る。記号はそれぞれの小文字で書かれた測定の向きと対応。）

$$S = AB + AB' + A'B - A'B'$$

もしそれぞれの値が測定しなくても存在したとすると（実在性の仮定つまり隠れた変数の存在の仮定）、$S = +2$**か**-2**のどちらかしか取らない**。なぜなら、

$$S = A(B + B') + A'(B - B')$$

とすると、$B + B'$と$B - B'$のどちらかは必ず±2、残りは0になる。

例として0～100のテストの平均点は0～100の間に入るはずと同じ

理論的、このSの期待値$\langle S \rangle$は以下の不等式を満たす。（これがCHSH不等式）

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq 2$$

$$\langle S \rangle = \langle AB \rangle + \langle AB' \rangle + \langle A'B \rangle - \langle A'B' \rangle$$

CHSH不等式（1969年）

各項の期待値は、実験を何度も繰り返すことにより、その出現頻度と測定結果から算出可能

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
A	+1		-1			+1	-1	-1		
A´		-1		+1	+1				-1	
B		+1	+1			-1		-1		
B´	+1			-1	+1		-1		-1	

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{N_{AB}} \sum_{i=1}^{N_{AB}} A_i B_i$$

（N_{AB}は方向aとbでの測定回数）

CHSH不等式（1969年）

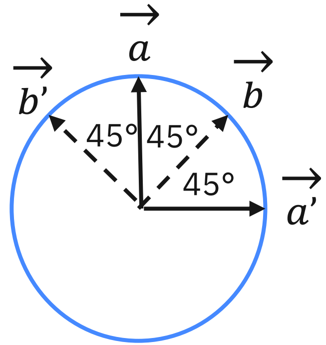
$$-2 \leq \langle S \rangle \leq 2$$
$$\langle S \rangle = \langle AB \rangle + \langle AB' \rangle + \langle A'B \rangle - \langle A'B' \rangle$$

一方、量子力学では前述の量子もつれ状態の場合には$\langle AB \rangle = \cos\theta_{AB}$（$\theta_{AB}$は測定の向き角度の差）と計算できるので、これを代入すると

$$-2 \leq \langle S_{QM} \rangle = \cos\theta_{\mathrm{AB}} + \cos\theta_{AB'} + \cos\theta_{A'B} - \cos\theta_{A'B'} \leq 2$$

となっているはずであるが、実際に測定角度を右下図のように取ると

$$\langle S_{QM} \rangle = 2\sqrt{2} \approx 2.828$$



となり、このケースでも量子力学ではCHSH不等式を破るケースを作ることができる。

（この$2\sqrt{2}$は、Tsirelson（チレルソン）限界とも呼ばれ、量子の場合の上限でもある。）

Aspectの実験（1982年）

CHSHの不等式が破れていることを（ほぼ）決定的に実験で証明したのが当時の大学院生であったAlain Aspectである。

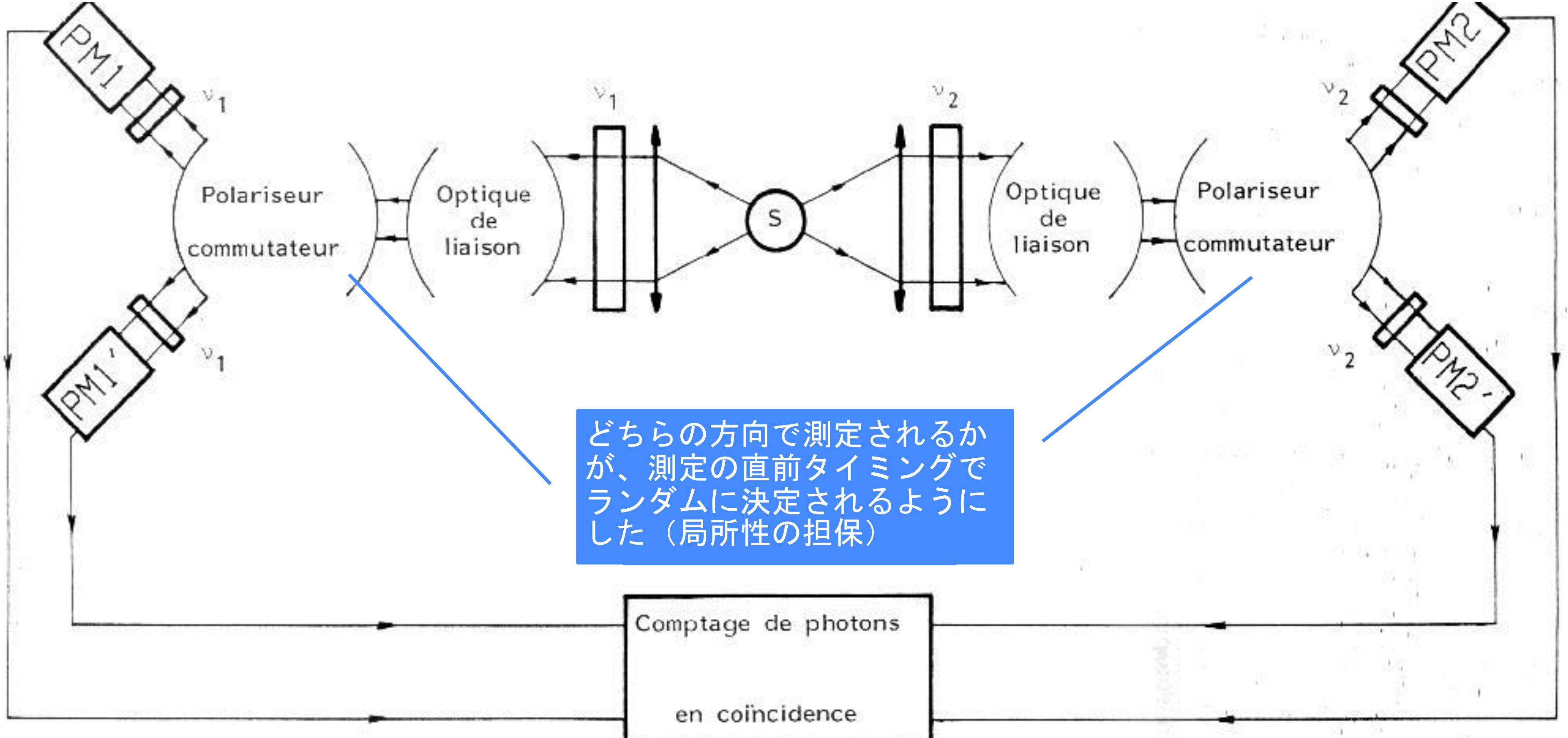
実験的に局所性が担保できる状況を作った上でCHSH不等式が

破れていることを計測した。

（実はClauser自身もCHSH不等式を破る実験結果を出していたが

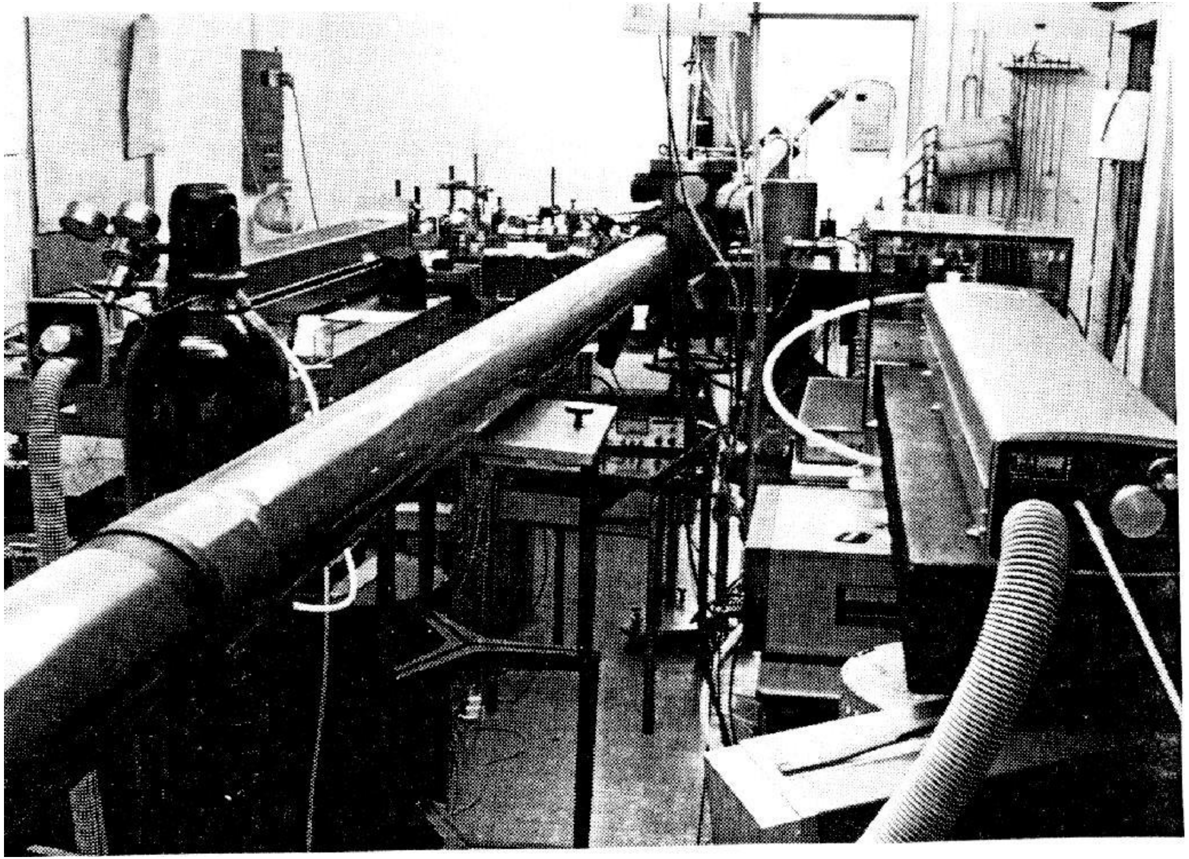
局所性を担保できたとは言い切れないシンプルな実験設定だった）

Aspectの実験（1982年）



どちらの方向で測定されるかが、測定の直前タイミングでランダムに決定されるようにした（局所性の担保）

Aspectの実験（1982年）



Aspectの実験（1982年）

実際には$|\langle S\rangle| = 2.697 \pm 0.015 (> 2)$という結果となり、CHSH不等式は決定的に破れていた。

つまり

~~1.実在性~~

2.局所性

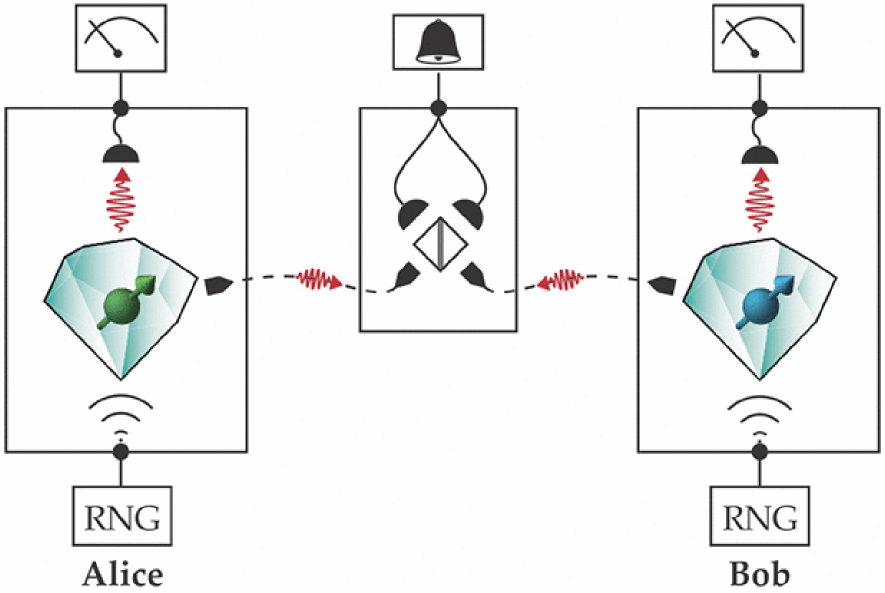
→ **量子の世界では測定していない物理量の値は測定するまで決まらない**

という事実が正しいことを証明した。

ただし、この当時の実験設備では、初期状態の生成効率や検出効率の点で測定結果に偏りがあったのではないかという指摘があり、以降もこの抜け穴をより完璧に塞ぐための実験が続けられることになっていった。

それ以降の話題

2015年にデルフト大のHansonらが、ダイアモンドの欠陥格子中に埋め込んで閉じ込めた電子の量子もつれ状態を用いて、大学の端と端に置いて実験を行い、局所性が完全に担保された状態を用意し、Bellの不等式の破れの検出に成功した。



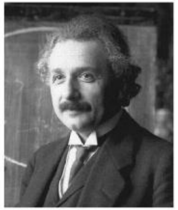
$$|S| = 2.42 \pm 0.2$$

Three groups close the loopholes in tests of Bell's theorem
https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/PT.3.3039

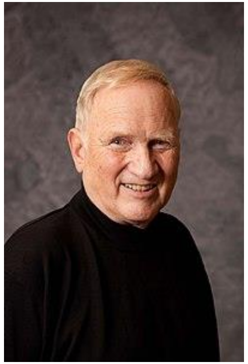
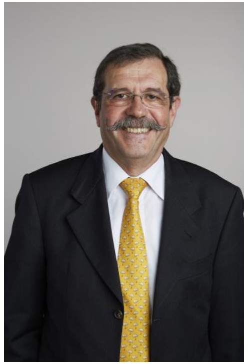
IBM Quantumを使って CHSH不等式の破れを確かめてみる

https://ja.learn.qiskit.org/course/ch-demos/local-reality-and-the-chsh-inequality

本日のまとめ



Albert Einstein　Boris Podolsky　Nathan Rosen

- 量子もつれ状態の発見
- 量子の世界での物理量の“実在性”を主張

- “実在性”の定式化と評価方法の確立（Bellの不等式）

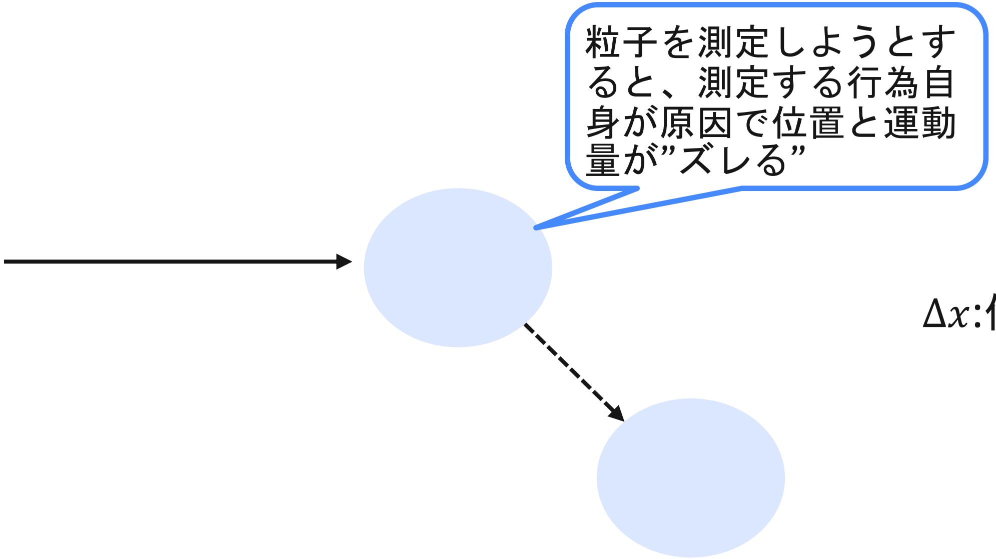
- Bellの不等式をより一般的で実験しやすく洗練された形で定式化（CHSH不等式）

- 局所性を担保した上でCHSH不等式の破れを実験的に検証し、量子の世界での実在性を（ほぼ確実に）否定
    - **結果、当初のEinsteinらの主張は間違っていたが、最終的には量子の世界の本質を焙り出した**

参考：EPRの議論（1935年） original version

量子力学では不確定性原理に基づき、位置と運動量（速度に相当）を同時に（simultaneously）正確に測定するが不可能である。

（厳密には非可換な演算子で定義される物理量の場合に起こりえる）



不確定性原理

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ [m^2 kg / s]

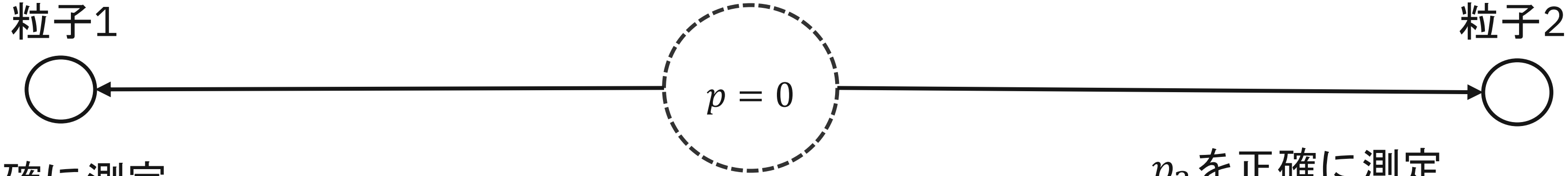
Δx:位置の測定誤差、Δp:運動量の測定誤差

片方を正確に測定できたとすると、残った方の誤差が∞に発散し、正確に測ることが不可能である

参考：EPRの議論（1935年） original version

EPRの3名は最初静止した（p=0）粒子が崩壊して2つの粒子に分割されたときにそれぞれ離れた所で位置と運動量を測定する思考実験を考案

ただし、測定器の位置は距離Lだけ離して固定し、運動量保存則が担保されている。



x_1を正確に測定
（ただし、p_1は測定しない）

p_2を正確に測定
（ただし、x_2は測定しない）

$p_1 + p_2 = 0$より$p_1 = -p_2$と“確実に予言できる”

$x_2 - x_1 = L$より$x_2 = x_1 + L$と“確実に予言できる”

粒子1、2ともに系を乱すことなく
位置と運動量正確に予言できた
（不確定性原理を満たさない）

参考：Bellの不等式の亜種

いずれも、実在性と局所性を仮定した上で導出された、いくつかの亜種な不等式が存在する。

- CHSH不等式

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq 2$$

$$\langle S \rangle = \langle AB \rangle + \langle AB' \rangle + \langle A'B \rangle - \langle A'B' \rangle$$

- Wigner-d'Espagnatの不等式

$$P(A\uparrow; B\uparrow) \leq P(A\uparrow; C\uparrow) + P(C\uparrow; B\uparrow)$$

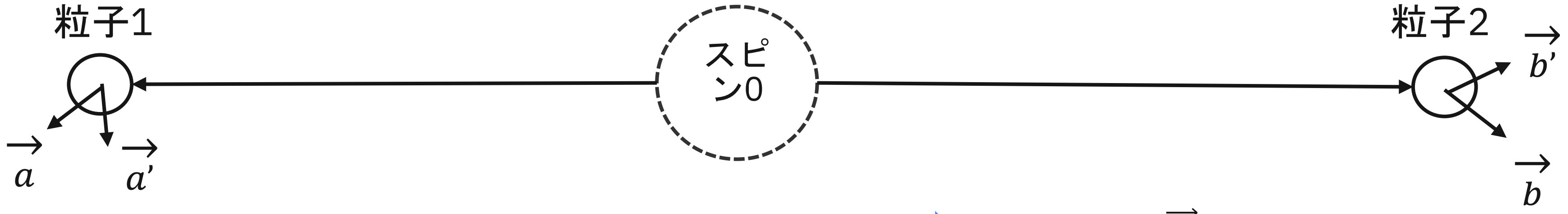
Pは発生確率を表す

- Alastair Raeの不等式

$$P(A\uparrow, C\uparrow) \leq P(A\uparrow, B\uparrow) + P(B\downarrow, C\uparrow)$$

参考：局所性が満たせない場合のCHSH不等式

粒子1の測定の向きと結果を粒子2が時空を飛び越えて知ることができる（局所性が満たせない=片方の測定の方法と結果が他方に影響を与えることができる）なら、CHSH不等式の範囲を±2の間よりも広げることができてしまう。



どっちで測定しても上向き（A=A’=+1）という結果になるとする

方法と結果が瞬時に伝わる

粒子1が$\vec{a}'$で測定して粒子2を$\vec{b}'$で測定したときに必ずB’=-1としておく。
それ以外はB=B’=+1とする。

$$S = AB + AB' + A'B - A'B' = 4$$

Thank you

Ayumu Shiraishi

AHA03784@jp.ibm.com