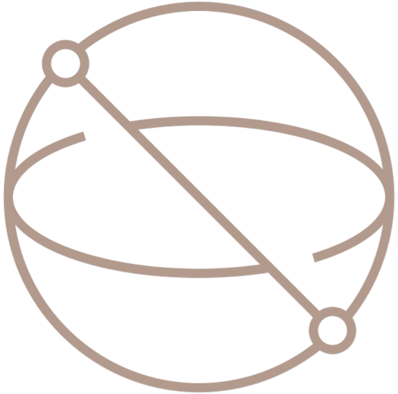
# Qiskit 新テキストブック勉強会

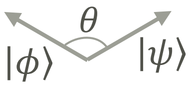
# 量子情報の基礎
# -量子情報の制限-



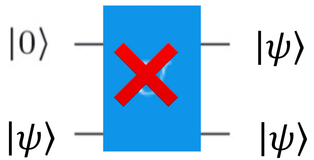
2023/09/11 Jiwon Ju

# Table of contents

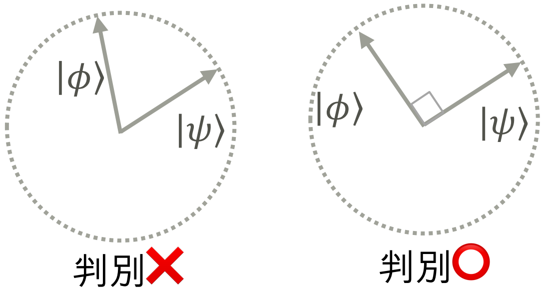
01 グローバル位相の無関係性




02 量子複製不可能定理




03 非直交状態は完全には判別できない



# なぜ量子回路の制限

できないことを
知っておく

→

実現したいことを、
できないことを迂回して、
量子回路を組む

例）量子テレポーテーション：
量子状態はコピペができないことを迂回して
量子アルゴリズムを組んでいる

**目標**

- ‘できない’ことなので、事実だけわかったらオケ
- (発展)なぜできないかを、物理·数学的に理解しておく

# 01

# グローバル位相の無関係性

Quantum Tokyo

# グローバル位相の無関係性

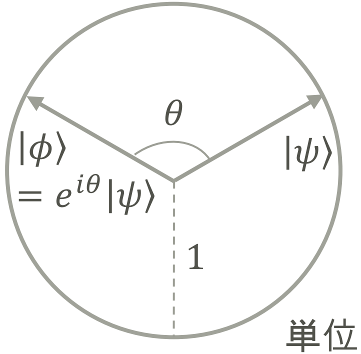
量子情報の制限1.
量子**状態**$|\psi\rangle$と$|\phi\rangle$がグローバル位相だけ違うと**区**別できない。

$|\phi\rangle = \alpha|\psi\rangle \ ,(\alpha = e^{i\theta}, |\alpha|^2 = 1, \theta = \text{実数})$
$|\psi\rangle$と$|\phi\rangle$は、グローバル位相が違うという。

参考　グローバル位相と相対位相

| グローバル位相 | 相対位相 |
| --- | --- |
| $\|1\rangle \ vs. -\|1\rangle$ | $\|0\rangle + \|1\rangle \ vs. \|0\rangle - \|1\rangle$ |
| $\|0\rangle + \|1\rangle \ vs. -\|0\rangle - \|1\rangle$ | |

参考　量子状態の位相



# グローバル位相の無関係性の証明

証明)

$|\psi\rangle$と$|\phi\rangle$から古典状態$a$を測定する確率は以下のようになる。

$|\psi\rangle$から$a$を測定する確率：

$$|\langle a|\psi\rangle|^2$$

$|\phi\rangle$から$a$を測定する確率：

$$|\langle a|\phi\rangle|^2 = |\alpha\langle a|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2|\langle a|\psi\rangle|^2 = |\langle a|\psi\rangle|^2$$

$|\phi\rangle = \alpha|\psi\rangle$

$\alpha = e^{i\theta}, |\alpha|^2 = 1$

=

参考　量子状態の確率

$\psi$ から0を観測する確率：
0と$\psi$の内積の2乗

$$|\langle 0|\psi\rangle|^2 = \left|\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot[a\ b]\right|^2 = |a|^2$$

単一システム -2.2. 量子状態の測定(connpass 20230309)

グローバル位相が違うことは、観測で区別できない。

# グローバル位相の無関係性の例

グローバル位相の例） $|1\rangle$と$-|1\rangle(e^{i\pi} = -1)$ Quantum composer

$|1\rangle$ の回路 vs. $e^{i\pi}|1\rangle$の回路


$|\langle 1|1\rangle|^2 = 1$


$\left| e^{i\theta} \langle 1|1\rangle \right|^2 = 1$

確率は同様

---

相対位相の例） $|+\rangle$と$|-\rangle$ Quantum composer

$|+\rangle = |0\rangle + |1\rangle$の回路 vs. $|-\rangle = |0\rangle - |1\rangle$の回路


→H基底で測定する

$|\langle 0|H|+\rangle|^2 = 1$

$|\langle 1|H|+\rangle|^2 = 0$


→H基底で測定する

$|\langle 0|H|-\rangle|^2 = 0$

$|\langle 1|H|-\rangle|^2 = 1$

確率は違う

参考 Hadamard Gate

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

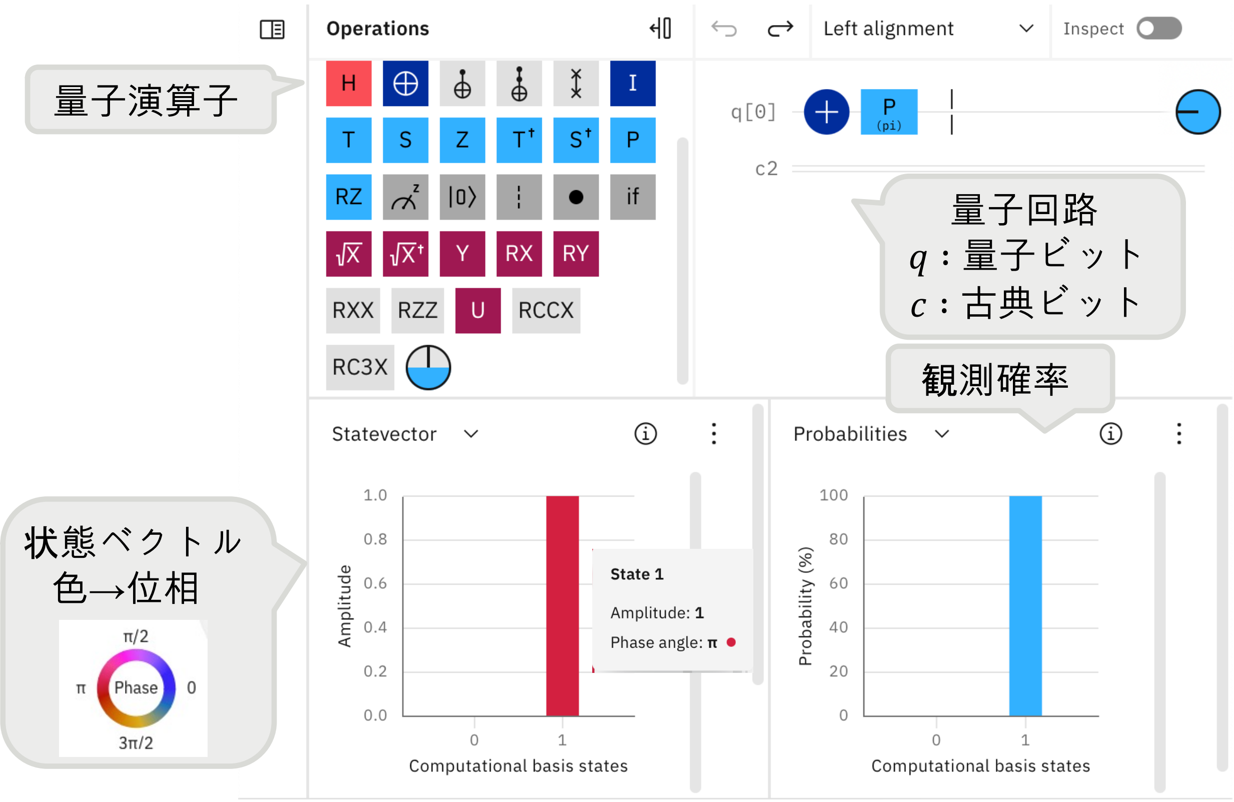
$H|0\rangle = |0\rangle + |1\rangle = |+\rangle$

$H|1\rangle = |0\rangle - |1\rangle = |-\rangle$

X軸とZ軸の真ん中の軸の周りに180°回転させる

単一システム
-2.3.ユニタリー演算
20230309 conpass講義

# Quantum Composerの見方

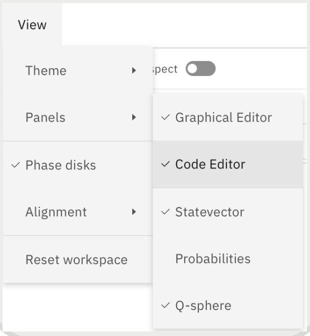



```
from qiskit import QuantumRegister, ClassicalRegister, QuantumCircuit
from numpy import pi

qreg_q = QuantumRegister(1, 'q')
creg_c = ClassicalRegister(1, 'c')
circuit = QuantumCircuit(qreg_q, creg_c)

circuit.x(qreg_q[0])
circuit.p(pi, qreg_q[0])
circuit.barrier(qreg_q[0])
circuit.measure(qreg_q[0], creg_c[0])
```

Qiskit コード



# 密度行列で量子情報の表現

量子情報の制限1.
量子状態$|\psi\rangle$と$|\phi\rangle$がグローバル位相だけ違うと区別できない。

参考　密度行列

密度行列で表すと、グローバル位相に関係せずに表せる。

$$|1\rangle\langle 1| = (-|1\rangle)(-\langle 1|)$$

- 新Qiskit textbook 密度行列：
https://ja.learn.qiskit.org/course/quantum-hardware/density-matrix

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$$

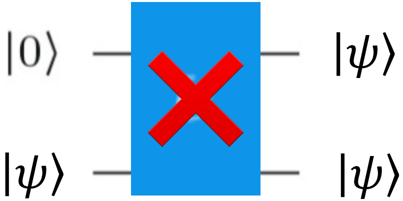
# 02

# 量子複製不可能定理

# 量子複製不可能定理

量子情報の制限2.
量子状態を複製できるユニタリー演算子Uは存在しない。

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$



# 量子複製不可能定理の証明

証明）
$|\psi\rangle$の線形性によって、量子状態を複製する写像は線形ではない。

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

量子状態を複製できるUが存在すると仮定すると、 $|\psi\rangle = |a\rangle, |b\rangle, |a\rangle + |b\rangle$に対して以下のようになる。

$$U(|a\rangle \otimes |0\rangle) = |a\rangle \otimes |a\rangle, \qquad U(|b\rangle \otimes |0\rangle) = |b\rangle \otimes |b\rangle$$

＋　　Uの線形性、量子状態の線形性　　＋

$$U(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |0\rangle = |a\rangle \otimes |a\rangle + |b\rangle \otimes |b\rangle$$

$$U(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |0\rangle = (|a\rangle + |b\rangle) \otimes (|a\rangle + |b\rangle)$$
$$= |a\rangle \otimes |a\rangle + |a\rangle \otimes |b\rangle + |b\rangle \otimes |a\rangle + |b\rangle \otimes |b\rangle$$

$\neq$

# 量子複製不可能定理の論文

論文）W.K.Wooters *et al.*, A single quantum cannot be cloned, Nature Vol. 299(1982)

1. 量子状態が複製できると仮定

$$|A_0\rangle|s\rangle \rightarrow |A_s\rangle|ss\rangle$$

2. 垂直偏光と水平偏光のそれぞれの複製

$$|A_0\rangle|\updownarrow\rangle \rightarrow |A_{\mathrm{vert}}\rangle|\updownarrow\updownarrow\rangle \qquad |A_0\rangle|\leftrightarrow\rangle \rightarrow |A_{\mathrm{hor}}\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$$

3. 二つを足した時の状態

$$|A_0\rangle(\alpha|\updownarrow\rangle+\beta|\leftrightarrow\rangle) \rightarrow \alpha|A_{\mathrm{vert}}\rangle|\updownarrow\updownarrow\rangle+\beta|A_{\mathrm{hor}}\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$$

4. 偏光の両方を持っている状態の複製

$$2^{-1/2}(\alpha a^{+}_{\mathrm{vert}}+\beta a^{+}_{\mathrm{hor}})^2|0\rangle = \alpha^2|\updownarrow\updownarrow\rangle + 2^{1/2}\alpha\beta|\updownarrow\leftrightarrow\rangle+\beta^2|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$$

$\neq$

# 量子複製不可能定理の注意点

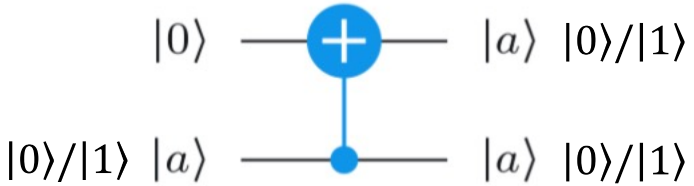
量子情報の制限2.
量子状態を複製できるユニタリー演算子Uは存在しない。

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$の線形性によって、量子状態を複製する**写像**は線形ではないということで証明できる。

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

| 注意 | $|0\rangle$や$|1\rangle$などの基底状態は簡単に複製できる。 |
| --- | --- |



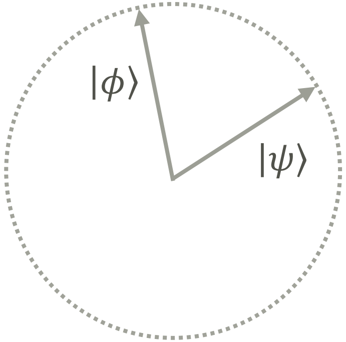

John Watrous 先生の講義

# 03

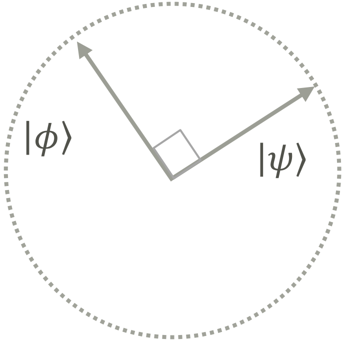
# 非直交状態は完全には判別できない

# 非直交状態は完全には判別できない

量子情報の制限3.
非直交状態は、完全には判別できない




判別❌



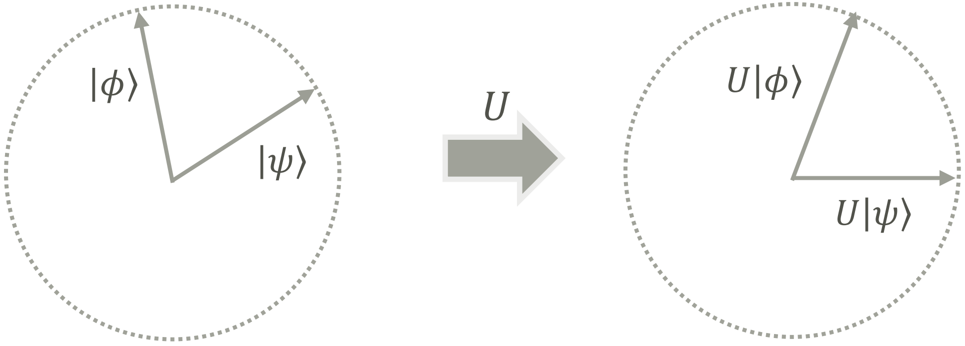

判別⭕

# 非直交状態は完全には判別できない証明

証明）

(命題の対偶) 量子状態を完全に区別できるためには、直交状態である。

ユニタリーゲートUをかけて観測すると常に0になる$|\psi\rangle$と、常に1になる$|\phi\rangle$がある




$U|\psi\rangle$の測定値=0
$U|\phi\rangle$ の測定値=1

参考　命題の対偶

P⇒Q
命題が真
⇔
NOT Q ⇒ NOT P
命題の対偶が真

# 非直交状態は完全には判別できない証明

証明）

(命題の対偶) 量子状態を完全に区別できるためには、直交状態である。

ユニタリーゲートUをかけて観測すると常に0になる$|\psi\rangle$と、常に1になる$|\phi\rangle$がある

$$U(|0\cdots0\rangle|\psi\rangle)=|\gamma_0\rangle|0\rangle$$

$$\Leftrightarrow|0\cdots0\rangle|\psi\rangle=U^\dagger|\gamma_0\rangle|0\rangle$$

$$\Leftrightarrow\langle0\cdots0|\langle\psi|=\langle\gamma_0|\langle0|U$$

$$U(|0\cdots0\rangle|\phi\rangle)=|\delta_1\rangle|1\rangle$$

$$\Leftrightarrow|0\cdots0\rangle|\phi\rangle=U^\dagger|\delta_1\rangle|1\rangle$$

内積

内積

テンソル積の内積

$$\langle a_0\otimes a_1|b_0\otimes b_1\rangle$$
$$=\langle a_0|b_0\rangle\langle a_1|b_1\rangle$$

左項: $\langle0\cdots0|0\cdots0\rangle\langle\psi|\phi\rangle=\langle\psi|\phi\rangle$ = 右項: $UU^\dagger\langle\gamma_0|\delta_1\rangle\langle0|1\rangle=\langle\gamma_0|\delta_1\rangle\langle0|1\rangle=0$

$UU^\dagger=\mathbb{1}$

$\langle\psi|\phi\rangle=0\Leftrightarrow|\psi\rangle$と$|\phi\rangle$が完全に判別できる状態は直交状態！という結論

‘非直交状態は完全には判別できない’も真

# 直交状態を完全に判別する測定

$|\phi\rangle$と$|\psi\rangle$を以下の射影集合で測定を実行すると、完全に区別できる。

$$\{|\phi\rangle\langle\phi|, \mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi|\}$$

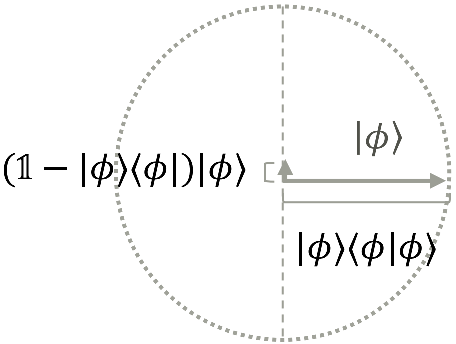
$|\phi\rangle\langle\phi| \perp \mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi|$
$\because |\phi\rangle\langle\phi| - |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle\langle\phi| = 0$

$|\phi\rangle$の射影測定:

$\langle\phi|\phi\rangle = \mathbb{1}$

$\| \, |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \, \|^2 = \| \, |\phi\rangle \, \|^2 = 1$

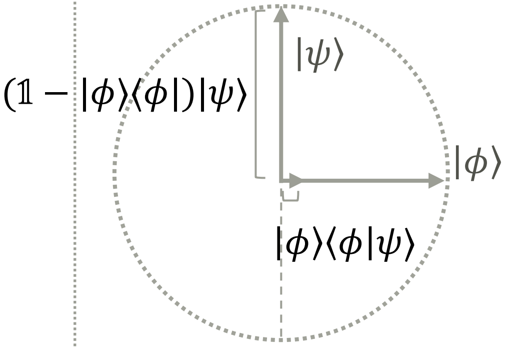
$\| \, (\mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)|\phi\rangle \, \|^2 = \| \, |\phi\rangle - |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \, \|^2 = 0$



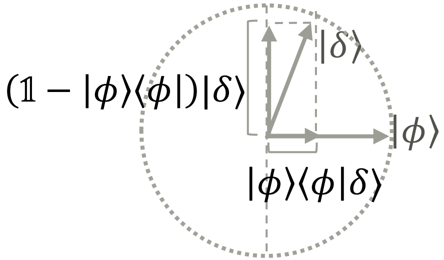

$|\psi\rangle$の射影測定:

$\| \, |\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle \, \|^2 = 0$

$\| \, (\mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi)|\psi\rangle \, \|^2 = \| \, |\psi\rangle - |\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle \, \|^2 = \| \, |\psi\rangle \, \|^2 = 1$




**参考** 射影測定




射影集合 $\sum_{k=1}^{m} \Pi_k = \mathbb{1}_n.$

# Table of contents


## 01 グローバル位相の無関係性

グローバル位相は確率に関係なく、量子情報として区別がつかない。
また、相対いそうは確率に関わる。

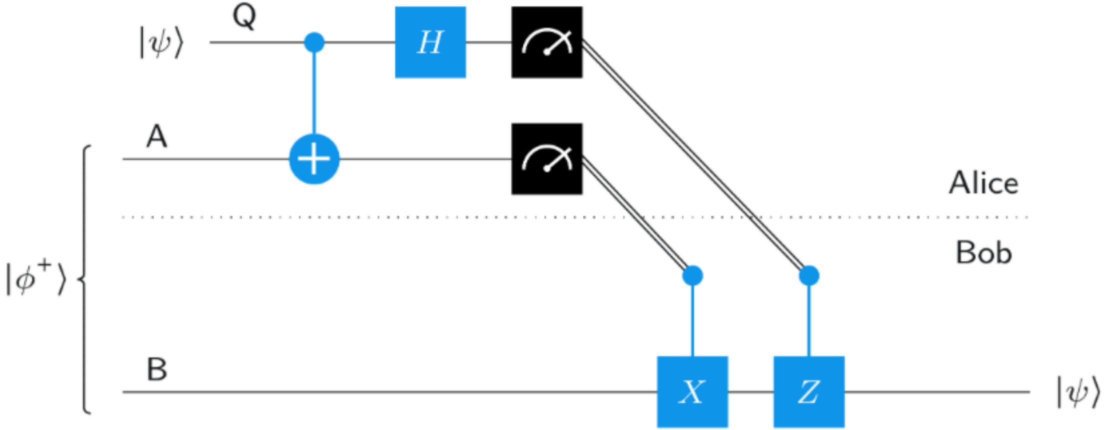
## 02 量子複製不可能定理

量子情報を完全に複製することは、線形性によって不可能である。

## 03 非直交状態は完全には判別できない

完全に判別できる状態であるためには、直行状態である。

# 次回は、量子テレポーテーションの予定です。



# References


- 新Qiskit テキストブック – 量子回路
https://ja.learn.qiskit.org/course/basics/quantum-circuits#quantum-22-0

- 新Qiskit テキストブック – 密度行列
https://ja.learn.qiskit.org/course/quantum-hardware/density-matrix

- John Watrous先生の講義
https://youtu.be/30U2DTfIrOU?si=cwpu7prqpxQCe6iW

- 量子複製不可能定理の論文
Wootters, W. K., & Zurek, W. H. (1982). A single quantum cannot be cloned. Nature, 299(5886), 802-803.

- 量子情報理論とその難しさ – より多くの人に知ってもらうため
https://www.jstage.jst.go.jp/article/essfr/3/1/3_1_1_44/_pdf