Qiskit 新テキストブック勉強会
量子情報の基礎-内積、正規直交性、射影-

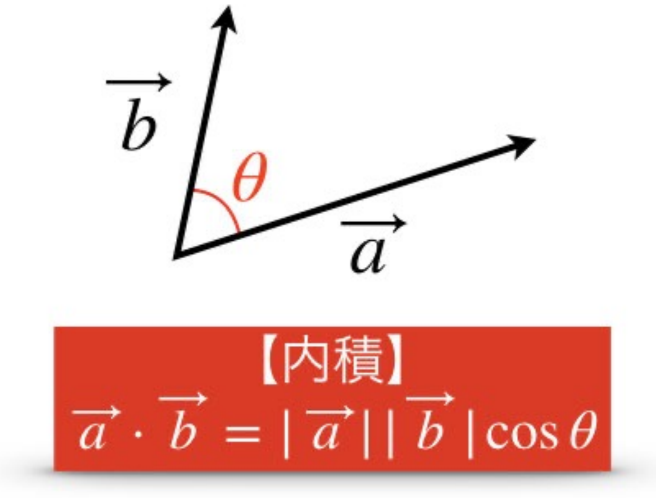
2023/8/8 志熊輝晃

Agenda

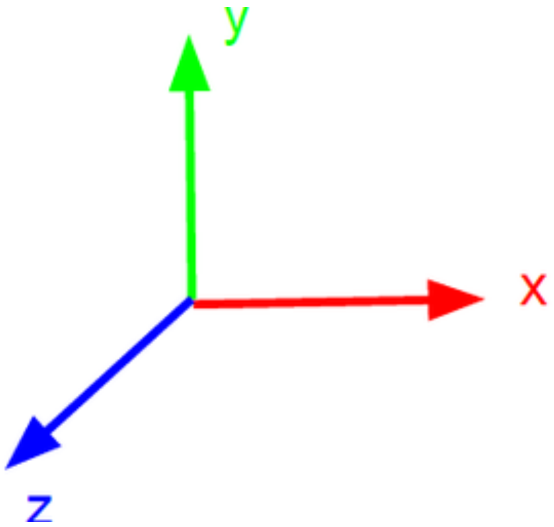
1. 今回の目標
2. 内積
3. 正規直交性
4. 射影

目標

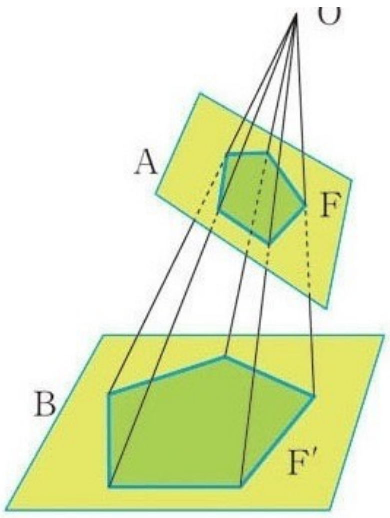
- ◆ 線形代数(ベクトル・行列)の計算に慣れる
- ◆ 量子コンピュータの測定原理を理解する。



内積



正規直交



射影

- ◆ 複数のベクトルから導かれるスカラ量。
- ◆ 正規直交基底において、各ベクトル要素の係数の積の和になる。

高校数学の復習

右図において、2つのベクトルは

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}、\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y}、\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

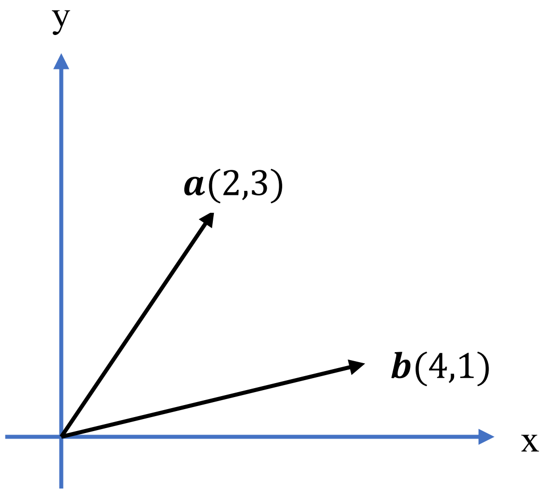
この時、$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の内積は以下のようになる。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (2 \cdot 4 \cdot \underbrace{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}_{1}) + (2 \cdot \underbrace{\cancel{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}}_{0}) + (3 \cdot \cancel{4 \cdot \boldsymbol{y}} \cdot \boldsymbol{x}) + (3 \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y})$$

$$= 11$$

行列の積の形で書くと以下のようになる。

$$\boldsymbol{a}^{\top} \cdot \boldsymbol{b} = (2,3) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11$$



内積:計算方法

- 複数のベクトルから導かれるスカラ量。
- 正規直交基底において、各ベクトル要素の係数の積の和になる。

量子情報、ブラケットを用いた表現

$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$と$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$の内積は、

$$\boxed{\langle\psi|\phi\rangle} = (\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \overline{\alpha_1}\beta_1 + \overline{\alpha_2}\beta_2 + \cdots + \overline{\alpha_n}\beta_n$$

$$= \sum_{a \in \Sigma} \overline{\alpha_a}\beta_a$$

共役転置:転置して虚数成分の正負を反転

- $|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi| = (\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n})$

単一システムの章を参照

- $|\psi\rangle = \sum_{a \in \Sigma} \alpha_a |a\rangle$

$$\Rightarrow \langle\psi|\phi\rangle = \sum_{a \in \Sigma} \sum_{b \in \Sigma} \overline{\alpha_a}\beta_b \boxed{\langle a|b\rangle}$$

$$= \sum_{a \in \Sigma} \overline{\alpha_a}\beta_a$$

$$\begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}$$

内積：量子コンピュータでの利用例

- 量子コンピュータにおいて、内積は測定に使用される。

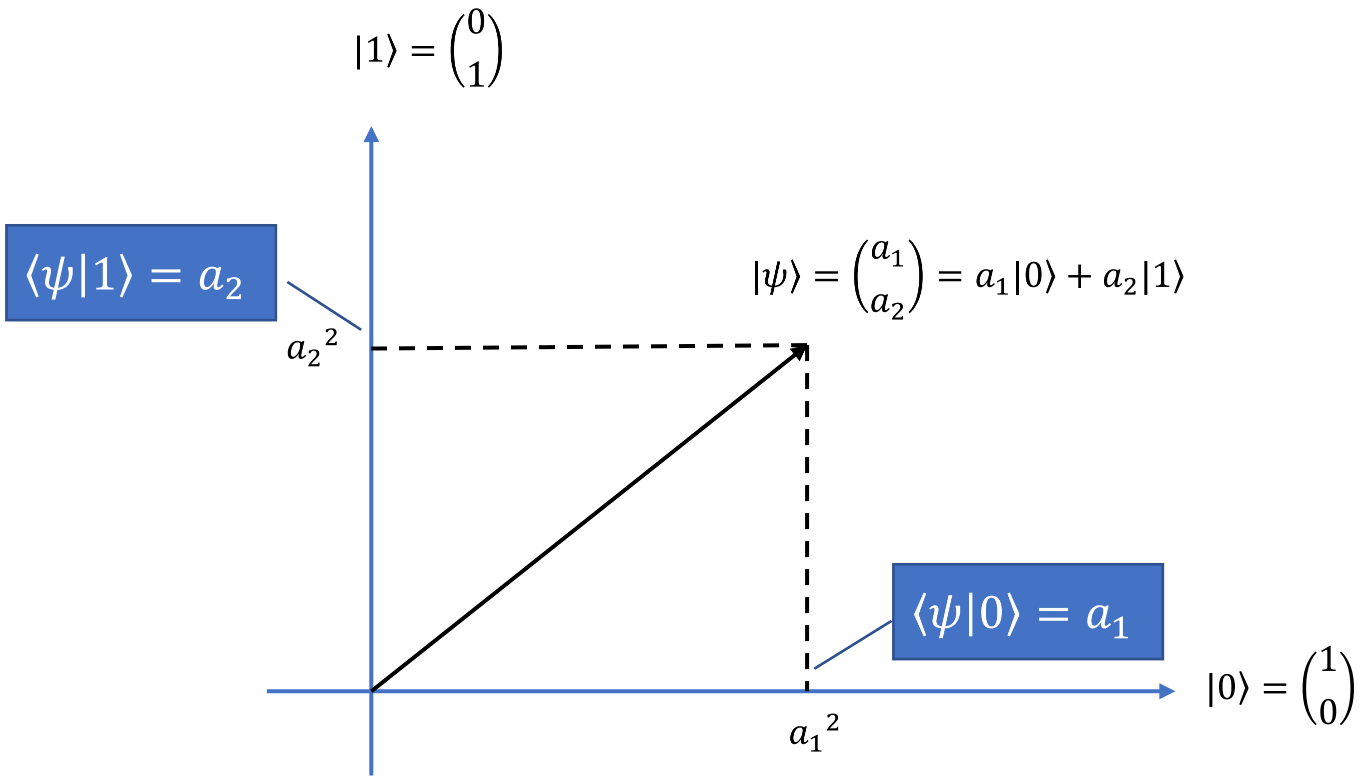
例：1量子ビットをZ基底での測定

測定は、⟨軸ベクトル|測定対象の状態⟩^{2}

Z基底で測定するときは、$|0\rangle$と$|1\rangle$に対して
内積を取るので、$|\psi\rangle$は

$|0\rangle$の確率・・・ ${a_1}^2$

$|1\rangle$の確率・・・ ${a_2}^2$



内積：性質

1. $\sqrt{\text{自身との内積}}$=ユークリッド・ノルム

$$\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \| |\psi\rangle \|$$

2. 共役対称性（積の順によらない）

$$\overline{\langle\psi|\phi\rangle} = \langle\phi|\psi\rangle$$

3. 共役線形性（定数倍）

$|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle$の時、

$$\langle\psi|\phi\rangle = \alpha_1\langle\psi_1|\phi\rangle + \alpha_2\langle\psi_2|\phi\rangle$$

4. コーシー・シュワルツの不等式

$$|\langle\psi|\phi\rangle| \leq \| |\psi\rangle \| \| |\phi\rangle \|$$

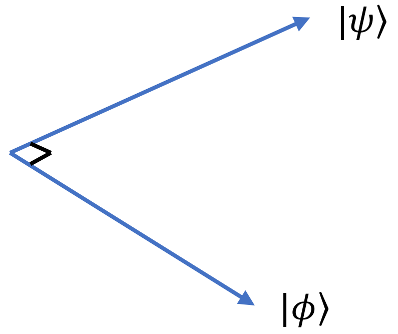
$|\psi\rangle = \sum_{a\in\Sigma.} \alpha_a|a\rangle$とする

- $\langle\psi|\psi\rangle = \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 + \cdots + \alpha_n\alpha_n$
- $\| |\psi\rangle \| = \sqrt{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + \cdots + {\alpha_n}^2}$

$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{a\in\Sigma.} \overline{\alpha_a}\beta_a$、 $\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{a\in\Sigma.} \overline{\beta_a}\alpha_a$

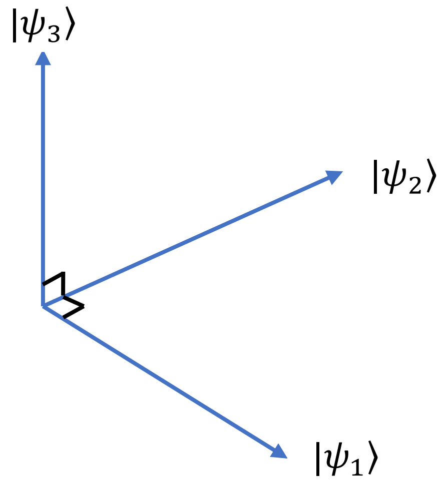
正規直交性:ベクトルの直交条件

- ブラケットベクトルも通常のベクトルと同様に、2つのベクトルの内積が0のとき、それらベクトルは直交している。
- 正規直交基底の数(n)≧正規直交集合の数(m)



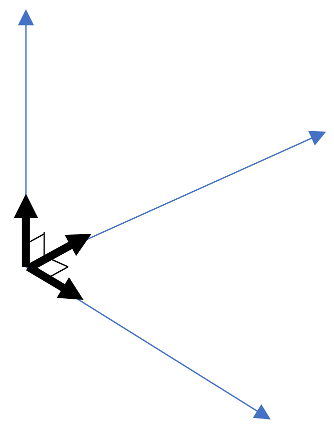
直交ベクトル

$\langle\psi|\phi\rangle=0$



直交集合

$\langle\psi_j|\psi_k\rangle=0$



正規直交集合

$$\langle\psi|\phi\rangle=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$$

◆ 正規直交集合はユニタリ行列である。

証明）

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_{1,1}} & \overline{\alpha_{2,1}} \\ \overline{\alpha_{1,2}} & \overline{\alpha_{2,2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\overline{\alpha_{1,1}}\alpha_{1,1} + \overline{\alpha_{2,1}}\alpha_{2,1}} & \overline{\alpha_{1,1}}\alpha_{1,2} + \overline{\alpha_{2,1}}\alpha_{2,2} \\ \overline{\alpha_{1,2}}\alpha_{1,1} + \overline{\alpha_{2,2}}\alpha_{2,1} & \boxed{\overline{\alpha_{1,2}}\alpha_{1,2} + \overline{\alpha_{2,2}}\alpha_{2,2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \end{pmatrix}, |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$とすると

$$U = (|\psi_1\rangle \quad |\psi_2\rangle)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\langle\psi_1|\psi_1\rangle} & \langle\psi_1|\psi_2\rangle \\ \langle\psi_2|\psi_1\rangle & \boxed{\langle\psi_2|\psi_2\rangle} \end{pmatrix}$$

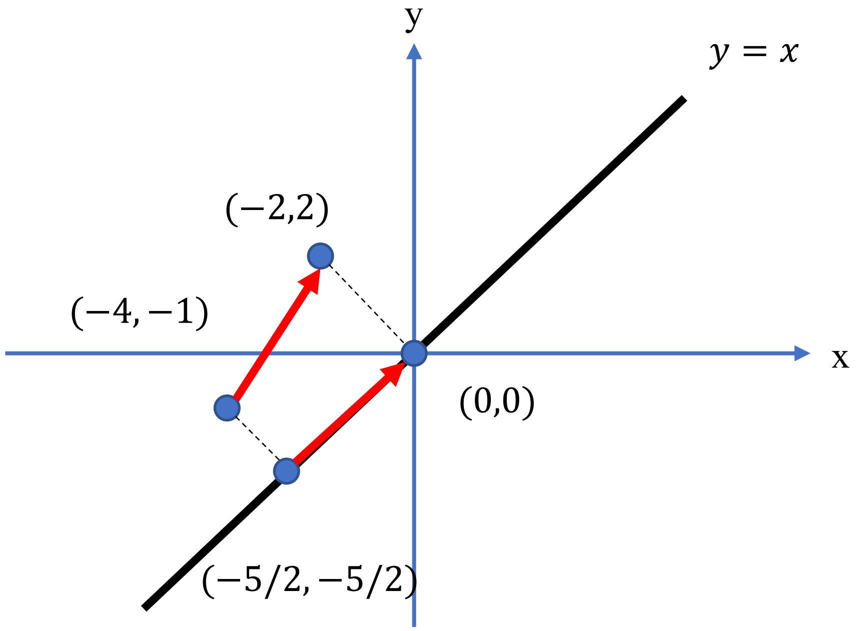
つまり、$|\psi_1\rangle$と$|\psi_2\rangle$が正規直交基底ならば、
$U^\dagger U$は単位行列になり、Uはユニタリ行列である。

射影：実平面における射影

◆ （直交）射影行列をかけることで、特定のベクトル情報を取り出せる。

実平面の場合

直交射影行列$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$を用いると、



直交射影行列の定義

- $P = P^2$
- $P = P^\top$

射影行列による射影の計算方法

$$P\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

◆ 量子コンピュータで特定状態の確率を測定するには以下の手順を実行する。

1. 特定の状態ベクトルに対して射影を取る

状態$|\psi_k\rangle$への射影行列$\prod_{k\cdot}$は、

$$\prod_{k\cdot} = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

状態が$|\psi\rangle$であるシステムXの$|\psi_k\rangle$への射影は、

$$\prod_k|\psi\rangle$$

2. 射影した状態ベクトルの測定を行う

状態ベクトルの確率は、自身との内積、つまり
ユークリッド・ノルムの2乗なので、

$\|\prod_k|\psi\rangle\|^2$

状態$|\psi_k\rangle$へ射影
したときの確率

射影行列の定義

- $\prod_\cdot = \prod_\cdot^2$
- $\prod_\cdot = \prod_\cdot^\dagger$

射影ベクトル$\prod_{k\cdot}$が$|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$になる理由

$$\prod_k|\psi\rangle = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\,\textstyle\sum_{a\in\Sigma.}\alpha_a|\psi_a\rangle$$

内積が0

$$= |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\{\alpha_1|\cancel{\psi_1}\rangle + \cdots + \alpha_k|\psi_k\rangle + \cdots + \alpha_m|\cancel{\psi_m}\rangle\}$$

$$= |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\alpha_k|\psi_k\rangle = \alpha_k|\psi_k\rangle$$

射影後のシステムXの状態はその方向の単位ベクトル、
つまり以下のベクトルに依存する。

$$\frac{\prod_k|\psi\rangle}{\|\prod_k|\psi\rangle\|}$$

射影：量子コンピュータにおける射影測定（単一システム）

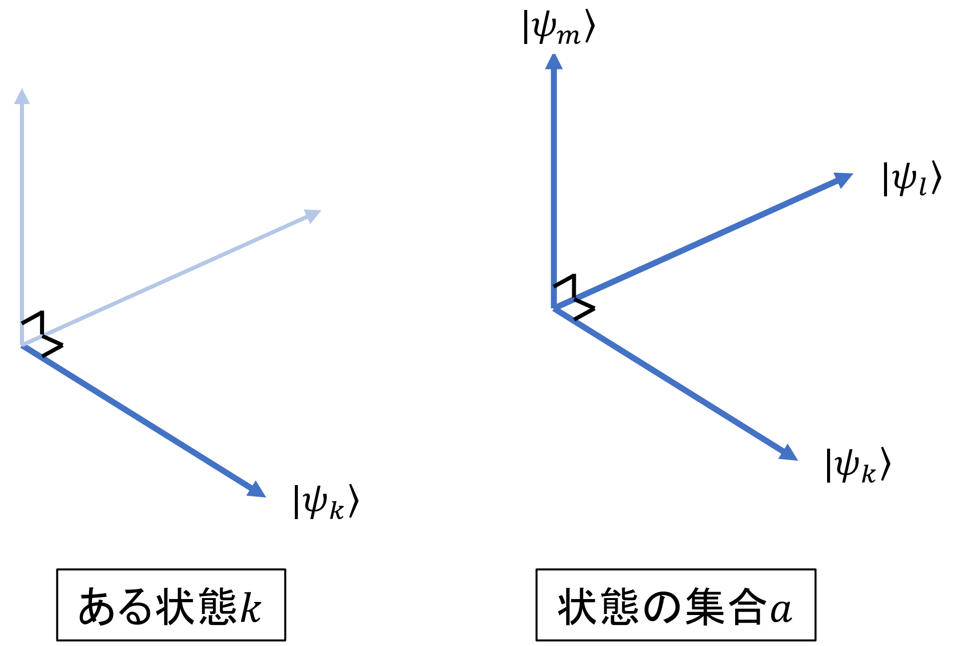
◆ 射影は1つの状態kだけでなく、より一般的な状態aの集合についても成立する。

任意の有限で空でない集合$\Sigma.$に対して、($a \in \Sigma.$)

$$\sum_{a=\Sigma.} \prod_{a\cdot} = \boldsymbol{I}$$

を満たすとき、システムXの、集合aに対する
確率と状態は、前のスライドと同様にして、

- 確率：$\|\prod_a |\psi\rangle\|^2$
- Xの状態：$\dfrac{\prod_a |\psi\rangle}{\|\prod_a |\psi\rangle\|}$



◆ 複数システムでは、射影測定を部分的に適用することができる。

システムXとシステムYが存在し、それぞれの量子状態$|\psi_X\rangle$が$|\psi_Y\rangle$とであるとき、システム（X,Y）の状態は

$$|\psi_X\rangle \otimes |\psi_Y\rangle = |\psi_X \otimes \psi_Y\rangle \quad (= |\psi\rangle)$$

Xだけ$\prod_{a'}$で射影し、Yは射影しない場合、システム全体でみると以下の射影測定を実施することと同じである。

$$\prod_{a'} \otimes \boldsymbol{I}$$

射影測定をした後の確率とシステムの状態は以下のようになる。

- 確率：$\|(\prod_a \otimes \boldsymbol{I})|\psi\rangle\|^2$
- システム(X, Y)の状態：$\dfrac{(\prod_{a'} \otimes \boldsymbol{I})|\psi\rangle}{\|(\prod_{a'} \otimes \boldsymbol{I})|\psi\rangle\|}$

$$(\prod_{a'} \otimes (\text{単位ベクトル}))|\psi\rangle$$
$$= (\prod_{a'} \otimes \boldsymbol{I})|\psi_X \otimes \psi_Y\rangle$$
$$= (\prod_{a'} |\psi_X\rangle) \otimes \boldsymbol{I}|\psi_Y\rangle$$

射影：量子コンピュータにおける射影測定（標準基底測定）

◆ 全ての射影測定は、ユニタリ演算と標準基底測定で実装できる。

例：ジョン・ワトラス先生の講義

システムX: Π_0., Π_1.の射影測定が実行されている。
システムY：何も射影が行われていない。

↓

システムYにユニタリ演算（アダマールゲートとスワップゲート）を実施し、測定を行うと、システムXを測定した場合と全く同じ測定結果になる。

上記の結果は分析する必要があるが、
その分析についてここでは示されていないとのこと。
また、これも単なる例であるとのこと。

Projective measurements

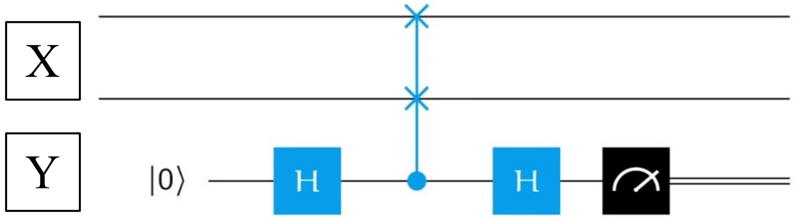
Example

Define two projections as follows:

$$\Pi_0 = |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-| + |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$$
$$\Pi_1 = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$$

The projective measurement $\{\Pi_0, \Pi_1\}$ is an interesting one...

Every projective measurements can be *implemented* using unitary operations and standard basis measurements.



ジョンワトラス先生の講義