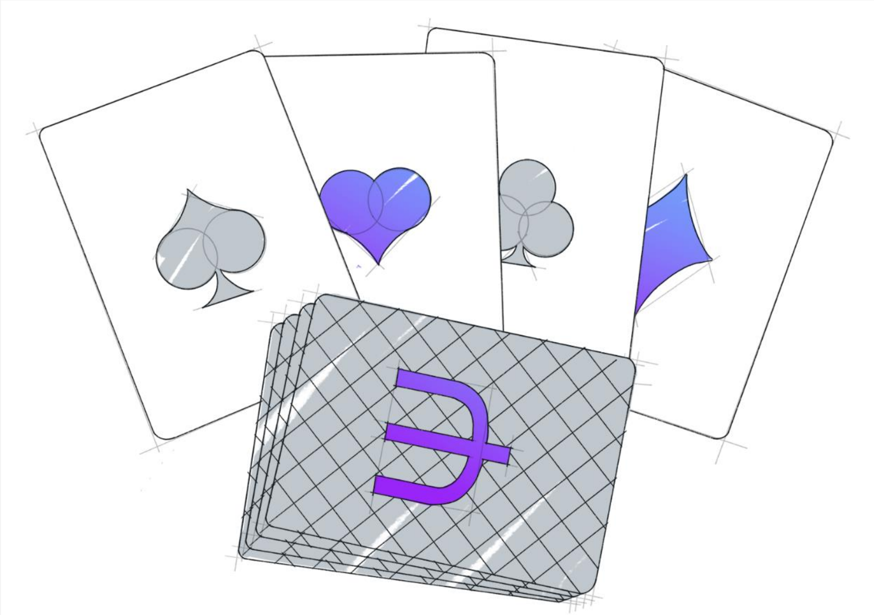
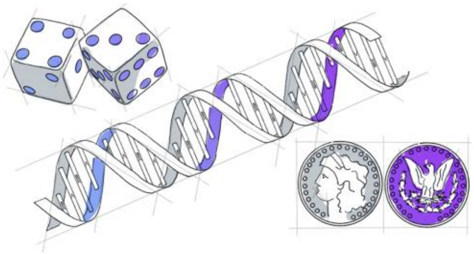
Qiskit 新テキストブック勉強会
量子情報の基礎 - 単一システム - 2. 量子情報

Kentaro Ohno
2023/03/09



前回のおさらい（古典情報 2023/02/08）

古典的な(確率的)状態



今回は…

量子的な状態

確率ベクトル

コインの表 = 0, ウラ = 1

$\Pr(X=0) = \frac{3}{4}$ と $\Pr(X=1) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle$$

量子状態ベクトル

測定

$$\frac{3}{4}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle$$

$|0\rangle$ $|1\rangle$

※ |表⟩, |ウラ⟩ などと書いてもよい

量子状態の測定

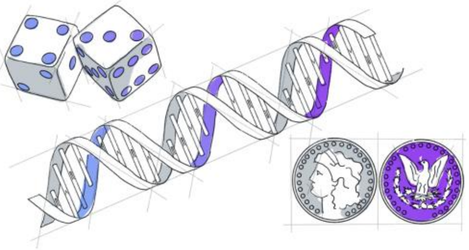
2.1 量子状態

古典的な状態/確率的な状態

用語の確認

- **システム**：情報を格納する物理デバイス/メディア等
  - コイン、サイコロ、DNA、⋯
  - (有限個の)**古典的な状態**を持つ
- システム X の**確率的な状態**
  - 確率ベクトルのすべての要素は非負の実数
  - 要素の合計は 1

状態の集合 Σ



$$\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \Pr(X=0)=\frac{3}{4} \text{ と } \Pr(X=1)=\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

2.1 量子状態

- システムの **量子状態**
  - 量子状態ベクトルのすべての要素は 複素数
  - 要素の 絶対値の二乗 の合計は 1

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2} = 1$$

練習： $\|v\| = 1$ を確かめよう

確率ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \Pr(X=0) = \frac{3}{4} \text{ と } \Pr(X=1) = \frac{1}{4}$$

量子状態ベクトル		解釈
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\longleftrightarrow$	? のちほど説明
$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\longleftrightarrow$	
$\begin{pmatrix} \frac{1+2i}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$	$\longleftrightarrow$	

$$v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$v = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2i}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \left|\frac{1+2i}{3}\right|^2 + \left|-\frac{2}{3}\right|^2 \\ &= \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 1 \end{aligned}$$

⇒ これらは確かに量子状態ベクトル (**量子ビット**状態)

量子ビット：古典的な状態の集合が $\{0,1\}$ の量子システム

量子状態ベクトルの表記と代表例

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{|0\rangle} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{|1\rangle}$$

前回（古典情報）
と同じ記号

$$\boxed{|+\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

プラス状態

$$\boxed{|-\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

マイナス状態

量子状態の積

（このページは複素数の内積を学んだ後の方が理解しやすいので、今日は完全に理解しなくて良いです）

古典的な状態の集合 Σ

- 古典的な状態 $a \in \Sigma$

- 量子状態ベクトル $|\psi\rangle$ に対し

  $\langle a||\psi\rangle = (|\psi\rangle$ のインデックス a の要素$)$

とする記号 $\langle a|$ と 積 $\langle a||\psi\rangle$ を導入

- 読みやすさのため $\langle a||\psi\rangle$ は $\langle a|\psi\rangle$ と略記する
- 数学的には… $\langle\psi|$ はベクトル $|\psi\rangle$ の**共役転置**、 $\langle a||\psi\rangle$ は行列積

共役転置と内積の例

$$|\psi\rangle = \frac{1+2i}{3}|0\rangle - \frac{2}{3}|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+2i}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

標準基底との積

$$\langle 0|\psi\rangle = \frac{1+2i}{3}$$

$$\langle 1|\psi\rangle = -\frac{2}{3}$$

共役転置

$$\langle\psi| = \frac{1-2i}{3}\langle 0| - \frac{2}{3}\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

他の系の量子状態

- 扇風機スイッチの状態の集合

$$\Sigma = \{\text{high}, \text{middle}, \text{low}, \text{off}\}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|\text{high}\rangle - \frac{i}{2}|\text{low}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{off}\rangle.$$

- 量子10進数

$$\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{385}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{385}} \sum_{k=0}^{9} (k+1)|k\rangle.$$

補足：ディラック記法の利点

ディラック記法 $|\psi\rangle$ は列ベクトルでの表記に対して…

- 複雑なベクトルをコンパクトに書ける場合がある

$$\frac{1}{\sqrt{385}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{385}}\sum_{k=0}^{9}(k+1)|k\rangle$$

- インデックスの順序付けを回避できる

ベクトル表記

ディラック記法

$$\frac{1}{2}|\clubsuit\rangle + \frac{i}{2}|\diamondsuit\rangle - \frac{1}{2}|\heartsuit\rangle - \frac{i}{2}|\spadesuit\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{i}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{i}{2}\end{pmatrix}$$

← どれが♡？

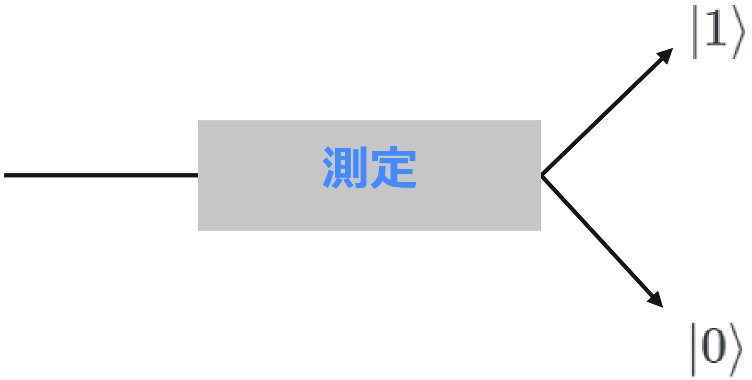
2.2 量子状態の測定

2.2 量子状態の測定

量子状態のシステムを測定 → 観測者は**古典的な状態**を確認 (not 量子的な状態)

つまり、測定は量子情報と古典情報のインターフェース

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$



測定のルール

各古典的状態が、**対応する要素の絶対値の2乗の確率**で得られる

量子状態の測定

1/2

$|1\rangle$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \longrightarrow \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$$

各要素の
絶対値の
二乗

確率的な状態

1/2

古典的な状態の測定

1/2

1/2

$|0\rangle$

量子状態
ベクトル

？

解釈

確率ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+2i}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{5}{9} \\ \dfrac{4}{9} \end{pmatrix}$$

確率的に区別できない量子状態

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

二つの量子状態は同じとみなしても良いのだろうか？

→ No! 確率ベクトルと量子状態では可能な**演算**が異なる

2.3 ユニタリー演算

おさらい：古典的な演算

決定論的演算

$f: \Sigma \to \Sigma$

a	$f_1(a)$
0	0
1	0

a	$f_2(a)$
0	0
1	1

a	$f_3(a)$
0	1
1	0

a	$f_4(a)$
0	1
1	1

$$M|a\rangle = |f(a)\rangle$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

各列に一つだけ１を持つ行列

確率論的演算

f: {確率ベクトル} → {確率ベクトル}

$$M|a\rangle = |f(a)\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>確率行列</u>

各列の和が１

2.3 ユニタリー演算

- 複素正方行列 U は、次を満たすとき **ユニタリー**

$$UU^\dagger = \mathbb{I}$$
$$U^\dagger U = \mathbb{I}$$

$U^\dagger$ は U の共役転置
$\mathbb{I}$ は単位行列

- ユニタリー行列は、ベクトルの長さを変えない：$\|Uv\| = \|v\|$
- なので量子状態ベクトル $|\psi\rangle$ (長さ1) に U をかけた $U|\psi\rangle$ も量子状態ベクトル

確率ベクトル $\mapsto$ 確率ベクトル M 確率行列	量子状態ベクトル $\mapsto$ 量子状態ベクトル U ユニタリ行列

クイッククイズ

以下の行列のうちユニタリーはどれですか?

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & 0 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

重要なユニタリー演算：パウリ演算

1. パウリ演算子 。4 つのパウリ行列は次のとおりです。

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

I, X, Y, Z と書くことも多い

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle \quad \text{and} \quad \sigma_x|1\rangle = |0\rangle$$

X はビットフリップ (NOT演算)

$$\sigma_z|0\rangle = |0\rangle \quad \text{and} \quad \sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$$

Z は位相反転

重要なユニタリー演算：アダマール演算

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$H|0\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |+\rangle,$$

$$H|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |-\rangle,$$

$$H|+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle,$$

$$H|-\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

重要なユニタリー演算：位相演算

3. 位相演算 。位相演算は、以下の行列によって記述され、

$$P_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

任意の実数 θ に対して演算がなされます。以下の演算

$$S = P_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T = P_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

は特に重要な例です。他の例には、$\mathbb{1} = P_0$ や $\sigma_z = P_\pi$ などがあります。

確率的に区別できない量子状態：再訪

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

しかし、アダマール演算をかけてみると

$$H|+\rangle = |0\rangle,$$
$$H|-\rangle = |1\rangle$$

⟵ 確率ベクトルとして
区別できるようになった！

一要素の符号の違いが大きな違いを生む

解釈

量子状態ベクトル ? 確率ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1+2i}{3}\\-\dfrac{2}{3}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\dfrac{5}{9}\\\dfrac{4}{9}\end{pmatrix}$$

量子状態は量子状態として認識・解釈すべし！

量子ビットユニタリー演算の合成

確率演算の合成 = 確率行列の積

と同様に

ユニタリー演算の合成 = ユニタリー行列の積

$$R = HSH = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

アダマール　位相演算　アダマール

R の面白い性質

$$R^2 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

古典的な演算では「2回繰り返すとNOTとなる演算」は不可能

大規模システムでのユニタリー演算

3つ以上の古典的な状態を持つシステムではどんなユニタリー演算があるか？

- 置換行列
  - 古典と量子の両方で可能な唯一の演算

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 4×4 行列の例
  - 量子フーリエ変換

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

おわり

次回は 3. コード例 の予定です！