Qiskit Textbook 第2章
複数システム 量子情報

2023.6.15

Quantum Tokyo

Yagi Ryoko

勉強すること

- 複数システムの系に対して、量子演算がどのように行われるか

Agenda

1. 複数システムの系とは
2. 量子演算はどのように行われるか
3. Qiskitではどう書くか

1.　複数システムの系とは

複数システムの量子状態は、ユークリッドノルム1の列ベクトルで表される。それぞれのシステムの古典状態の集合のデカルト積である。

今回考える複数システムとは、複数の量子状態をまとめたシステム。

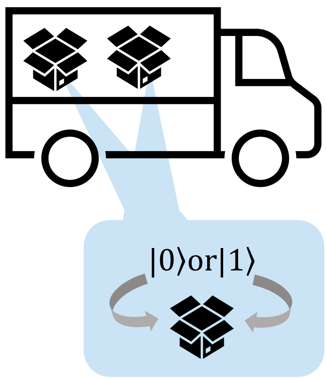
2つの量子ビットで考えると、取りうる値は$\{0,1\} \times \{0,1\}$のデカルト積。

例：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle|1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \otimes |1\rangle$$



ベクトル表記すると、$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ となる。

これらは全て同じ状態を表している。

1.　複数システムの系とは（テンソル積について）

量子状態ベクトルのテンソル積も量子状態ベクトルであり、それらのシステム間の独立性を示す。

システムX：$|\psi\rangle$,　Y：$|\phi\rangle$,　テンソル積：$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$　について考える。

2つシステムのテンソル積の量子状態のユークリッドノルムは、

$$\left\| |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \right\| = \sqrt{\sum_{(a,b)\in A,B} |\langle ab|\psi \otimes \phi\rangle| \;{}^\wedge 2}$$

$$= \sqrt{\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} |\langle a|\phi\rangle\langle b|\phi\rangle| \;{}^\wedge 2}$$

$$= \sqrt{\sum_{a\in A} |\langle a|\psi\rangle| \;{}^\wedge 2 \;\; \sum_{b\in B} |\langle b|\phi\rangle| \;{}^\wedge 2}$$

ここで、それぞれのシステムのユークリッドノルムで書き表される形になっており、

$$= \left\| |\psi\rangle \right\| \left\| |\phi\rangle \right\| = 1$$

であり、量子ベクトルであると分かる。これは3つ以上の状態ベクトルからなるシステムの場合も同様。

$$\boxed{\text{複数のシステムの積状態}} \xrightarrow{\;\bigcirc\;} \boxed{\text{量子状態ベクトル}}$$

1.　複数システムの系とは（エンタングル）

いくつかのシステムの積状態ではない量子状態ベクトルもあり、それをエンタングル状態と呼ぶ。

複数のシステムの積状態 $\underset{?}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ 量子状態ベクトル

例：$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$　で考える。

これが積状態なら、$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$　が存在。

これは、$\langle 0|\psi\rangle\langle 1|\phi\rangle = \langle 01|\psi \otimes \phi\rangle = 0$ となるので、

$\langle 0|\psi\rangle, \langle 1|\phi\rangle$のどちらか少なくとも1つが0であることになるが、

$\langle 0|\psi\rangle\langle 0|\phi\rangle = \langle 00|\psi \otimes \phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \langle 1|\psi\rangle\langle 1|\phi\rangle = \langle 11|\psi \otimes \phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

になるはずという事実と矛盾する。

この状態を**エンタングル状態**という。

1.　複数システムの系とは（重要な形：ベル状態）

エンタングル状態のうち、ベル状態と呼ばれる4つの状態を確認する。

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

これらの**ベル状態**の線形結合で、2量子ビットの任意の状態を表すことが可能。**ベル基底**と呼ばれる。

エンタングルメントの話

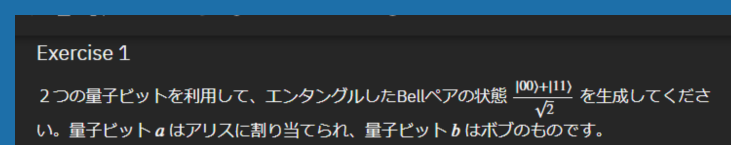
- エンタングルメント状態は、積状態ではないので、ベル状態は積の形で書けない。

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)$$

である。

つまり、1つ目の量子ビットと2つ目の量子ビットが独立しているわけではなく、古典的物理学的には説明できない相関を持つ。

先日のIBM Quantum Challengeにあった量子テレポーテーションの問題も、最初の操作はエンタングルしたベル状態を作る事でした。（今回の説明の最後にもコード例を扱います。）



Exercise 1

２つの量子ビットを利用して、エンタングルしたBellペアの状態 $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ を生成してください。量子ビット a はアリスに割り当てられ、量子ビット b はボブのものです。

2. 量子演算はどのように行われるか

- システムX,Yからなる複数システムの量子状態について、測定をしてみる

① X,Y両方測定

② Xだけ測定

③ Xだけ測定した後にYを測定

ここでX,Yが量子ビットだとすると、a,b はどちらも 0or1 となる。

そのため $|ab\rangle$ は、$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ をとる。α_{ab} はこれらにかかる係数。

X,YはそれぞれA,Bの古典状態の集合を持ち、

$$|\psi\rangle = \sum_{(a,b)\in A\times B} \alpha_{ab}|ab\rangle$$

で表される。ここで、$|\psi\rangle$は単位ベクトルで、

$$\sum_{(a,b)\in A\times B} |\alpha_{ab}|^2 = 1$$

である。

① X,Y両方測定

- X,Y両方測定した時に、それぞれあるa,bの状態である確率

古典状態Aを持つ量子状態ベクトルXを測定する時、aを観測する確率は

$$|\langle a|\psi\rangle|^2 = |\alpha_a|^2$$

であった。これを2量子状態ベクトルに応用し、(a,b)が測定される確率は、

$$|\langle ab|\psi\rangle|^2 = |\alpha_{ab}|^2$$

である。

a,bともに0を観測する確率は、$|00\rangle$にかかっていた係数α_{00}の2乗。

aが0、bが1を観測する確率は、$|01\rangle$にかかっていた係数α_{01}の2乗。

② Xだけ測定

- Xだけ測定する時、Yはまだ全ての可能性を保持しているので、

$$\sum_{b \in B} |\langle ab|\psi\rangle|^2 = \sum_{b \in B} |\alpha_{ab}|^2$$

となる。これは、Xを測定した時にaが観測される確率は、Yが測定されたかに依らないということを示している。

ここでも量子ベクトルとし、aが0だとすると、確率 $\sum_{b \in B} |\alpha_{ab}|^2$は、$|00\rangle, |01\rangle$の係数の2乗の和ということを示しているので$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$

もし先ほどの①の測定のようにX,Y両方測定するならば、$|00\rangle$の場合の確率と$|01\rangle$の場合の合計が、aが0の確立となるので、これも$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$である。

③ Xを測定した後にYを測定

- Xの測定結果がaと仮定して

$$|\psi\rangle = \sum_{a \in A} |a\rangle \otimes |\phi_a\rangle$$

とすると、あるaのときに

$$|\phi_a\rangle = \sum_{b \in B} \alpha_{ab} |b\rangle$$

であるので、

$$|\psi\rangle = \sum_{a \in A} |a\rangle \otimes \sum_{b \in B} \alpha_{ab} |b\rangle$$

と書ける。Xの状態がaである確率はbによらず
$\sum_{b \in B} |\alpha_{ab}|^2 = \||\phi_a\rangle\|^2$ だったので、あるaに対して(X,Y)の状態は
ユークリッドノルム$\||\phi_a\rangle\|$で規格化して

$$|a\rangle \otimes \frac{|\phi_a\rangle}{\||\phi_a\rangle\|}$$

と、量子状態ベクトルである。2つのシステムからなる状態のうち、Xの結果に必要な範囲だけが崩壊している。

量子ビットでa=0の場合、

$$\||\phi_0\rangle\| = \sqrt{\sum_{b \in B} |\alpha_{0b}|^2} = \sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}$$

$$|\phi_0\rangle = \sum_{b \in B} \alpha_{0b} |b\rangle = \alpha_{00}|0\rangle + \alpha_{01}|1\rangle$$

より、システムの状態は

$$|0\rangle \otimes \frac{\alpha_{00}|0\rangle + \alpha_{01}|1\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

部分測定の計算例(2量子ビット)

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle$ を測定する。

1つ目のシステムの状態ごとに分けて書くと、

$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle\right) + |1\rangle \otimes \left(\frac{i}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle\right)$ となる。

ここで1つ目だけ測定した際に0が観測される確率は、$\sum_{b\in B}|\alpha_{0b}|^2$ より

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle\right\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

先程導出した$|a\rangle \otimes \frac{|\phi_a\rangle}{\||\phi_a\rangle\|}$の形で表すと、X,Yの状態は

$$|0\rangle \otimes \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = |0\rangle \otimes \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right)$$

結果が1の場合も同様なので割愛。

部分測定の計算例(2量子ビット)

次に2つ目だけ測定した際に0が観測される確率は、

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle$$ と、

確率の算出の式 $\sum_{a \in A} |\alpha_{a1}|^2$ より

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

同様に、先程導出した$|a\rangle \otimes \frac{|\phi_a\rangle}{\||\phi_a\rangle\|}$の形で表すと、X,Yの状態は

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \otimes |0\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle$$

1の場合も同様に状態を表記できる。

3量子ビットの場合の測定

- GHZ状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

をGHZ状態と呼ぶ。最初の量子ビットだけ測定すると0,1がそれぞれ1/2の確率で出現し、

0だった場合→ $|000\rangle$、1だった場合→$|111\rangle$ と2,3番目の状態も決まる。

- W状態

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle$$

をW状態と呼ぶ。先ほどの2量子ビットと同様の手順で1つ目の量子ビットが0になる確率を計算する。

$|\phi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle\right) + |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle$ と書き直す。

すると、確率は、 $\sum_{b\in B}|\alpha_{0b}|^2$から

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle\right\|^2 = \frac{2}{3}$$

3量子ビットの場合の測定

先程と同様、この確率を利用して1つ目が0の時の3ビットの状態を表すと、

$$|0\rangle \otimes \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = |0\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right)$$

ここで、見覚えがある形が出現した。

ベル状態の1つで、$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$ があった。

よって、W状態の1つ目のビットが0であるときの状態は

$$|0\rangle|\psi^+\rangle$$

と書ける。

ユニタリー演算の例

古典状態A×Bの集合である量子状態に対して、この形に対応するユニタリー 行列であれば実行できる。

- SWAP演算

2つのシステムを交換する演算で、それらをa,bを持つシステムX,Yとすると

$$\mathrm{SWAP}|a\rangle|b\rangle = |b\rangle|a\rangle$$

これは

ユニタリー行列$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$を作用することで、

$|00\rangle \to |00\rangle$

$|01\rangle \to |10\rangle$

$|10\rangle \to |01\rangle$

$|11\rangle \to |11\rangle$

を行っていることになるのでユニタリー演算の定義通りの動き。

制御ユニタリー演算

もう一つユニタリー演算を紹介する。

制御ユニタリー演算は、1つ目のシステムの状態が1の時のみ、2つ目のシステムに演算を行う。

演算子の形としては、

$$CU = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$

ここで、演算子UがパウリX演算子だとすると、

$$CU = CX = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Qiskitでどう表現するか

Qiskitでは、テンソル積の計算やユニタリー演算を行うことができる。

チャレンジ
単一量子ビットの状態ベクトルと CNOT 演算子のみを使用して、各ベル状態を作成できますか?

まずは、 $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$を生成する。

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

使う量子ビットは2つで、
$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ が制御ビット、 $|0\rangle$をコントロールビット。

まずこれらのテンソル積 を作る。

$$|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

つぎに、これにCNOTゲートをかける。

$$CX|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes U)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right)$$

結果を実際に確認する。

同様に、他のベル状態も考える。

$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ を生成する場合

$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 、 $|0\rangle$を用意しテンソル積を計算。

$$|\psi\rangle = |-\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

CNOTゲートを作用させると

$$CX|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes U)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

同様に、他のベル状態も考える。

$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$ を生成する場合

$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 、 $|1\rangle$を用意しテンソル積を計算。

$$|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

CNOTゲートを作用させると

$$CX|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes U)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

$\lvert\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 11\rangle$
$\lvert\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 11\rangle$
$\lvert\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 10\rangle$
$\lvert\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 10\rangle$

同様に、他のベル状態も考える。

$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$を生成する場合

$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 、 $|1\rangle$を用意しテンソル積を計算。

$$|\psi\rangle = |-\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

CNOTゲートを作用させると

$$CX|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes U)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

部分測定についてのコード例

W状態：$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle$

3つ目の量子ビットを測定した場合の結果と、その時の量子状態をQiskitで表示している。

探索

測定する前に、W 状態の右端の量子ビットに H ゲートを適用したとします。 2 つの結果の確率はどれくらいになるでしょうか?そして、これらの結果のそれぞれについて、他の量子ビットの結果として生じる状態はどうなるでしょうか?

アダマール(H)ゲート

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

右端の量子ビットにHゲートを作用した場合の初期状態は、

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle)$$

となる。整理し直すと、

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle) \otimes |1\rangle$$

であり、3つ目を測定したときの0,1の確率は

それぞれ$\frac{1}{2}$であると分かる。どちらの場合も、他の量子ビットの結果は

$\frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$

本日のまとめ

- 複数システムの量子状態について、積状態と、そうではないエンタングルした状態がある。
- 量子状態の一部を観測するとき、その結果の確率はそれ以外の部分が観測されているかに依存しない。

- 複数量子ビットの重要な形

ベル状態

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

GHZ状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

W状態

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle$$

- ユニタリー演算

制御ユニタリー演算

（1つ目の状態が1の時のみ、もう一つの量子ビットにユニタリー演算を作用）

$$CU = |0\rangle\langle 0| \otimes 1\_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$

UがパウリX演算子の場合

（量子ビットの状態が反転）

$$CX = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$