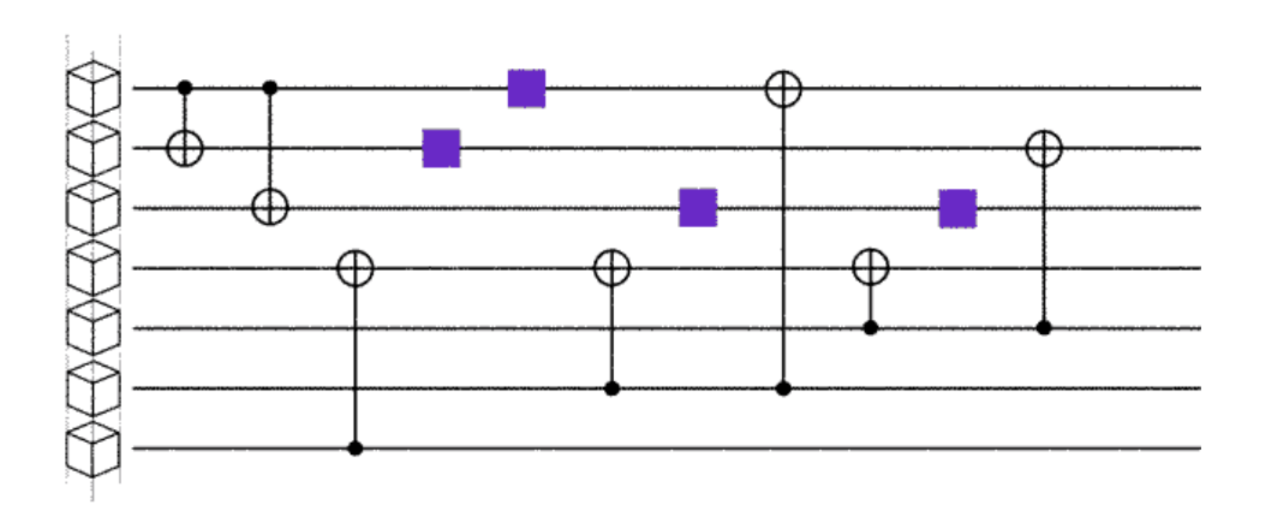
Qiskit 新テキストブック勉強会
量子情報の基礎 – 量子回路 - 1. 回路

梅沢 和正

2023/7/13



本日勉強すること

✓ 量子回路になれよう

Agenda

前回までのおさらい

はじめに

1.1ブール回路

1.2その他の回路

1.3量子回路

まとめ

前回までのおさらい

前回までのおさらい

資料と動画

タイトル	資料	動画
単一システムの古典情報	録画リンク	資料リンク
単一システムの量子情報	録画リンク	資料リンク
単一システムのQiskitコード例	録画リンク	資料リンク
複数システムの古典の組み合わせ	録画リンク	資料リンク
複数システムの量子情報＋コード例	録画リンク	資料リンク

Quantum Tokyo

単一システムの量子情報

2.1 量子状態

確率ベクトル

$$\begin{pmatrix}3/4\\1/4\end{pmatrix} \longleftrightarrow \Pr(X=0)=\frac{3}{4} \text{ と } \Pr(X=1)=\frac{1}{4}$$

- システムの **量子状態**
  - 量子状態ベクトルのすべての要素は 複素数
  - 要素の 絶対値の二乗 の合計は 1

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2} = 1$$

練習： $\|v\| = 1$ を確かめよう

量子状態ベクトル		解釈
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\longleftrightarrow$	? のちほど説明
$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\longleftrightarrow$	
$\begin{pmatrix}\frac{1+2i}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$	$\longleftrightarrow$	

2.2 量子状態の測定

量子状態のシステムを測定 → 観測者は**古典的な状態**を確認 (not 量子的な状態)

つまり、測定は量子情報と古典情報のインターフェース

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \longrightarrow \boxed{\text{測定}} \to |1\rangle,\ |0\rangle$$

2.3 ユニタリー演算

- 複素正方行列 U は、次を満たすとき **ユニタリー**

$$UU^\dagger = \mathbb{I}$$
$$U^\dagger U = \mathbb{I}$$

$U^\dagger$ は U の共役転置
$\mathbb{I}$ は単位行列

- ユニタリー行列は、ベクトルの長さを変えない：$\|Uv\| = \|v\|$
- なので量子状態ベクトル $|\psi\rangle$ (長さ1) に U をかけた $U|\psi\rangle$ も量子状態ベクトル

確率ベクトル ↦ 確率ベクトル	量子状態ベクトル ↦ 量子状態ベクトル
M	U
確率行列	ユニタリ行列

複数システムの量子情報＋コード例

本日のまとめ

- 複数システムの量子状態について、積状態と、そうではないエンタングルした状態がある。
- 量子状態の一部を観測するとき、その結果の確率はそれ以外の部分が観測されているかに依存しない。

- 複数量子ビットの重要な形

ベル状態

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

GHZ状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

W状態

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle$$

- ユニタリー演算

制御ユニタリー演算

（1つ目の状態が1の時のみ、もう一つの量子ビットにユニタリー演算を作用）

$$CU = |0\rangle\langle 0| \otimes 1\_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$

UがパウリX演算子の場合

（量子ビットの状態が反転）

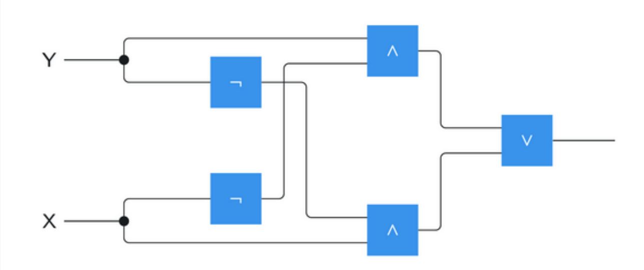
$$CX = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_Y + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

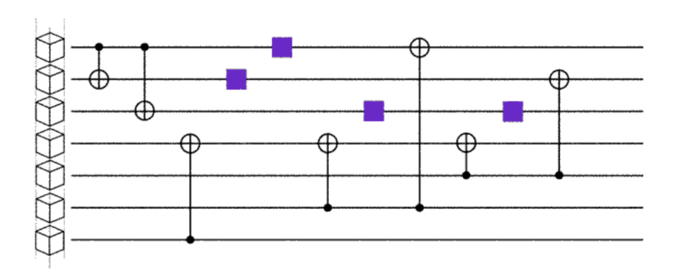
はじめに

回路とは

- ✓ コンピューター・サイエンスでは、回路は計算のモデル
  - ✓ 情報はゲートで繋がれたワイヤーにより運ばれる。
  - ✓ ゲートは、ワイヤーによって運ばれる情報を変換する操作を表す。
  - ✓ 量子回路は、この一般的な概念に基づく計算モデルの一例にすぎない。

- ✓ 回路を計算モデルとして考える場合、通常は非巡回回路
  - ✓ 量子回路はこのパターンに従う。

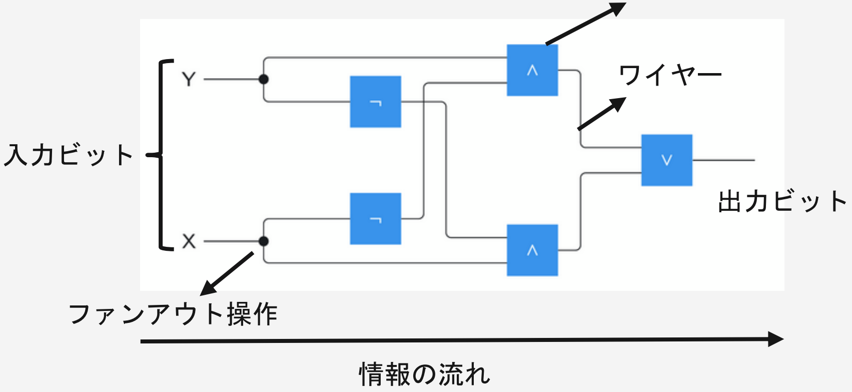




1.1 ブール回路

ブール回路の例

(古典的な) ブール回路の例



回路の構成要素	説明
ワイヤー	バイナリー値を運搬する
ゲート	ブール論理演算を表す
ファンアウト操作	ワイヤー上で保持されている値のコピーを作成

ゲートの紹介

NOT ゲート

a	$\neg a$
0	1
1	0

AND ゲート

ab	$a \wedge b$
00	0
01	0
10	0
11	1

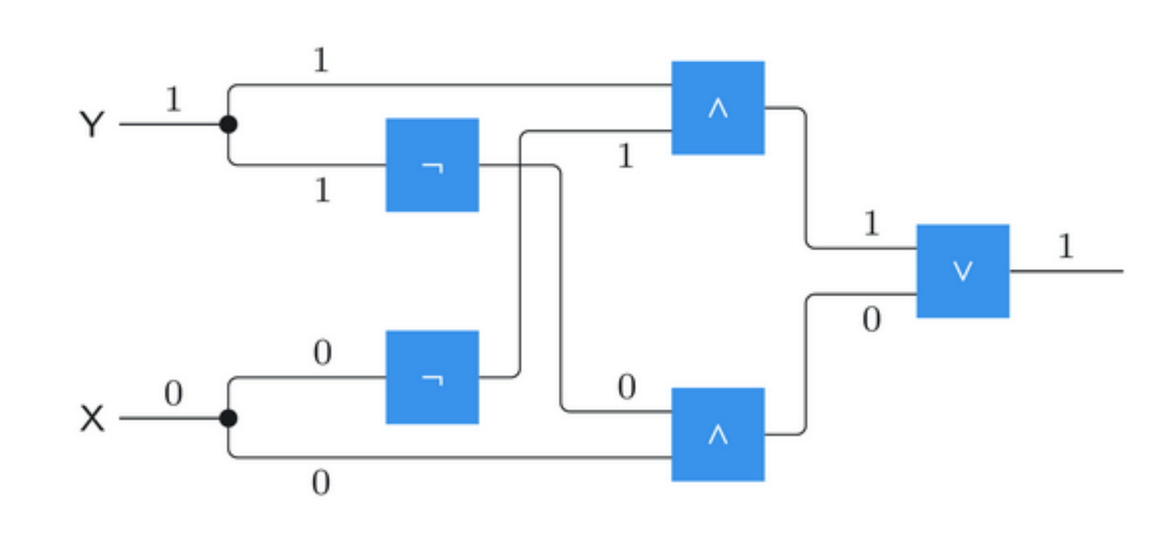
OR ゲート

ab	$a \vee b$
00	0
01	1
10	1
11	1

排他的OR（XOR）回路

前ページの回路はXOR回路を表す。

X＝０、Y＝１の例



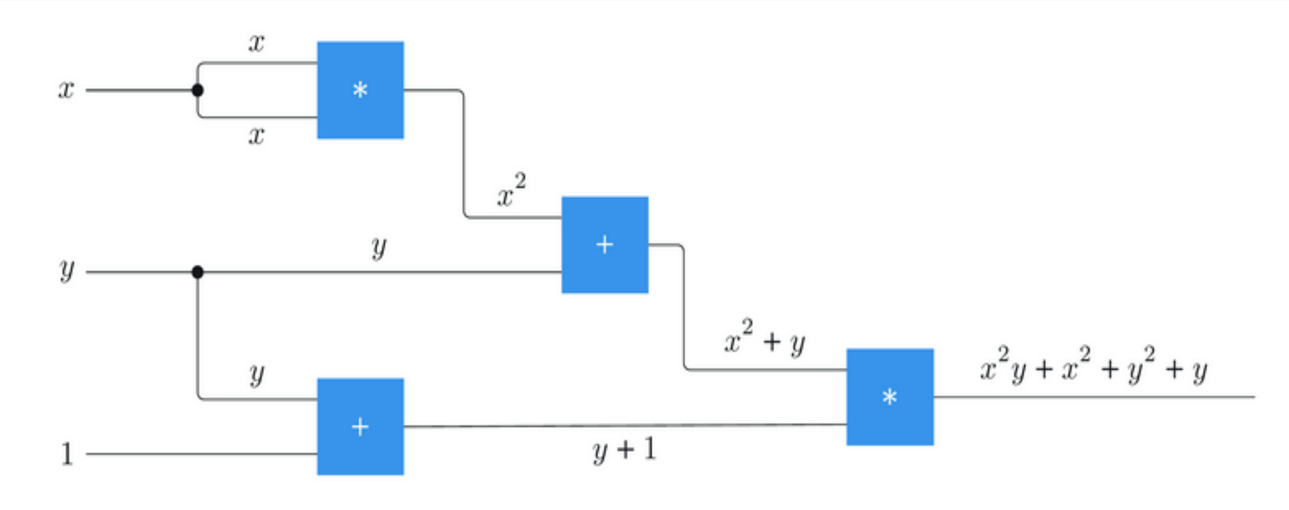
XY	X ⊕ Y
00	0
01	1
10	1
11	0

1.2 その他の回路

演算回路

ワイヤーは整数値を運ぶことができ、ゲートは加算や乗算などの演算操作を表すことができる。

2 つの変数入力値（xおよびy）と、値1に設定された 3 番目の入力値を受け取る演算回路



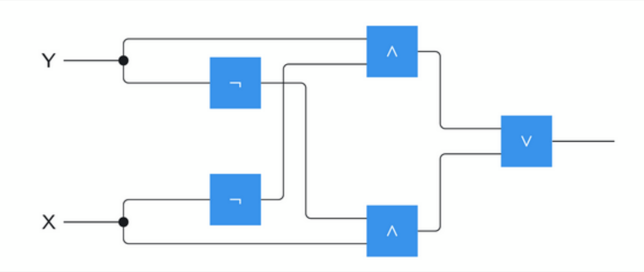
1.3 量子回路

量子回路の簡単な例

量子回路の簡単な例

情報の流れ

回路の構成要素	説明
ワイヤー	量子ビット
ゲート	量子ビットに作用する操作を表す



情報の流れ

回路の構成要素	説明
ワイヤー	バイナリー値を運搬する
ゲート	ブール論理演算を表す

- ✓ 情報の流れは左から右で、実行される操作は順に、*H*操作、*S*操作、別の*H*操作、*T*操作となる。
- ✓ 回路全体を考えると、これらの操作の合成である *THSH*が量子ビットに適用されることになる。

Qiskitコード

独自の名前を指定したい場合は、2つめのコードのように QuantumRegister クラスを使用できる。

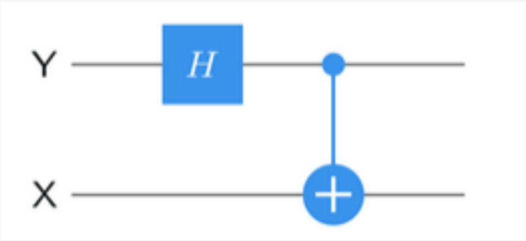
```python
from qiskit import QuantumCircuit
circuit = QuantumCircuit(1)
circuit.h(0)
circuit.s(0)
circuit.h(0)
circuit.t(0)
circuit.draw()
```

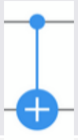
Start kernel and run

```python
from qiskit import QuantumCircuit, QuantumRegister
X = QuantumRegister(1, "x")
circuit = QuantumCircuit(X)
circuit.h(X)
circuit.s(X)
circuit.h(X)
circuit.t(X)
circuit.draw()
```

Start kernel and run

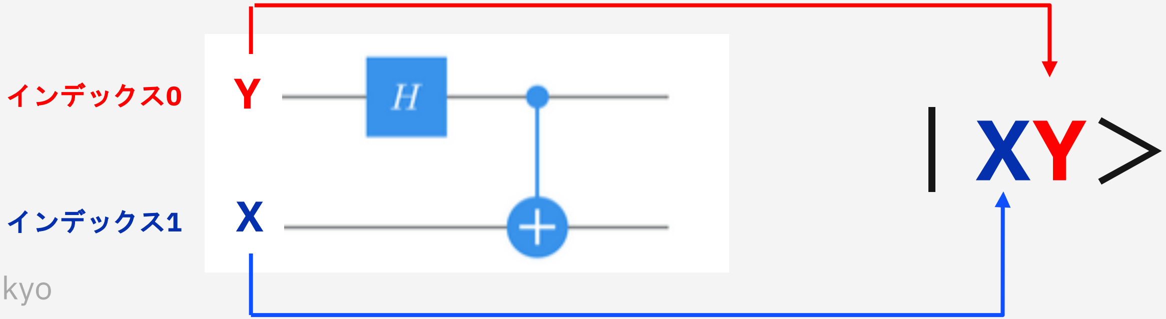
2 つの量子ビットの例



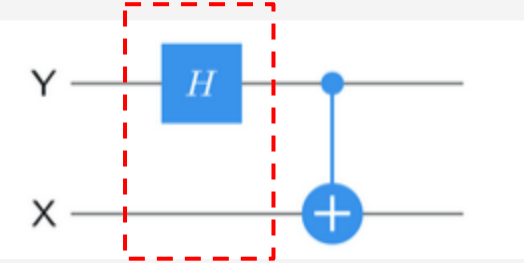
ゲート	説明
	アダマール操作
	2 量子ビット・ゲート 制御*NOT* 操作であり、黒丸は制御量子ビットを表し、記号⊕ に似た円はターゲット量子ビットを示す。

量子回路での量子ビットの順序付け (リトル・エンディアン・インデックス付け)

この教科書 (および Qiskit) 全体では、リトル・エンディアン・インデックス付けを採用している。
✓ 古典コンピュータにおけるビット列表現と似ており、測定が行われた後のビット列から整数への変換が容易



2 つの量子ビットの例　アダマール操作



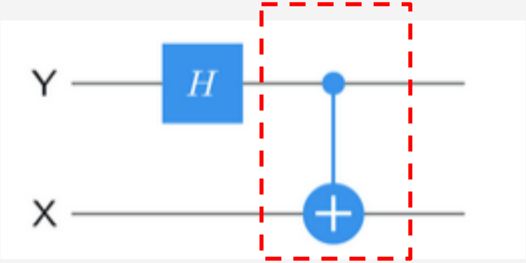
Yビットにはアダマール操作
Xビットには恒等操作
が作用していると考える。

恒等行列はテンソル積の左側にあり、 *H*は右側にあることに注意

$$\mathbb{1} \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

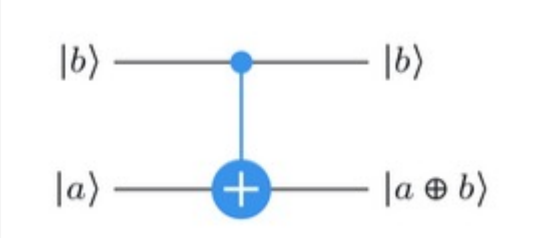
テンソル積の計算については、以前の勉強会「複数システムの古典の組み合わせ」参照

2 つの量子ビットの例　制御NOT操作



Yが制御ビット
Xがターゲット

【復習】標準基底状態に対する制御 NOT ゲートの動作

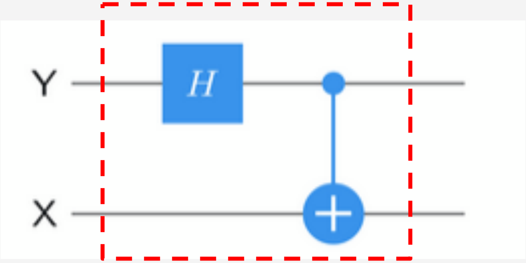


a b	a ⊕ b
00	0
01	1
10	1
11	0

量子ビットを(X,Y)のように並べると、制御 NOT ゲートの行列表現は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1| \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2 つの量子ビットの例　回路全体のユニタリー操作



Uと呼ぶ回路全体のユニタリー操作は、H、CX操作の合成

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ベル状態の表記法を思い出すと、

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

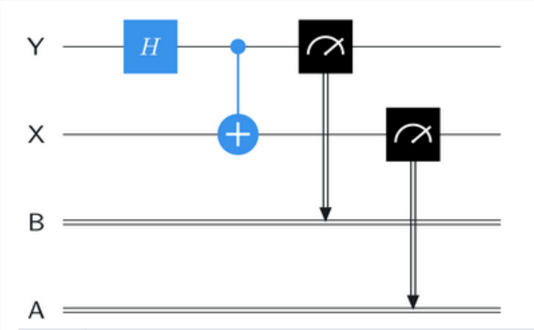
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle.$$

$$U|00\rangle = |\phi^+\rangle$$
$$U|01\rangle = |\phi^-\rangle$$
$$U|10\rangle = |\psi^+\rangle$$
$$U|11\rangle = -|\psi^-\rangle.$$

$$U|00\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = |\phi^+\rangle$$

より一般的にいうと、標準基底をベル基底に変換する方法を提供している。

2 つの量子ビットの例　測定ゲートの追加



- ✓ AとBの 2 つの*古典的な*ビットと、2 つの測定ゲートを追加
- ✓ 測定ゲートは、標準基底測定を表す。
- ✓ 量子ビットは測定済みの状態に変更され、測定結果は矢印が指す古典ビットに*上書きされる*。

```
from qiskit import QuantumCircuit, QuantumRegister, ClassicalRegister
X = QuantumRegister(1, "x")
Y = QuantumRegister(1, "y")
A = ClassicalRegister(1, "a")
B = ClassicalRegister(1, "b")
circuit = QuantumCircuit(Y, X, B, A)
circuit.h(Y)
circuit.cx(Y, X)

circuit.measure(Y, B)
circuit.measure(X, A)
circuit.draw()
```

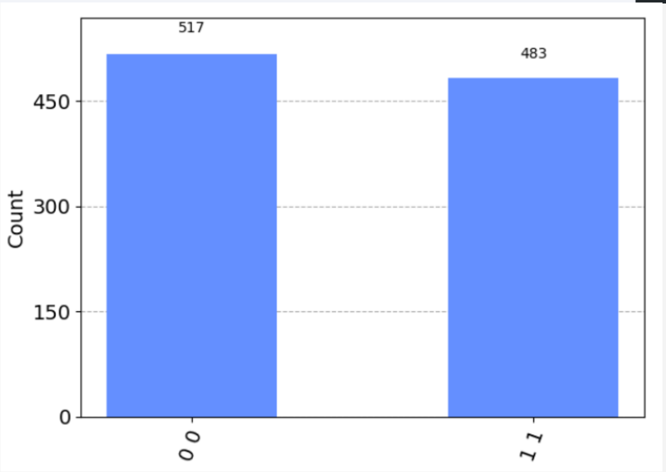
Start kernel and run

2 つの量子ビットの例　実行結果

```python
from qiskit import transpile
from qiskit.visualization import plot_histogram
from qiskit_aer import AerSimulator

simulator = AerSimulator()
circuit_simulator = simulator.run(transpile(circuit,simulator), shots=1000)
statistics = circuit_simulator.result().get_counts()
plot_histogram(statistics)
```

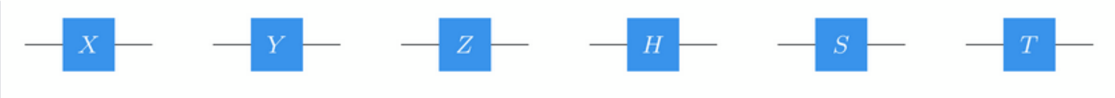
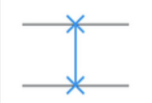
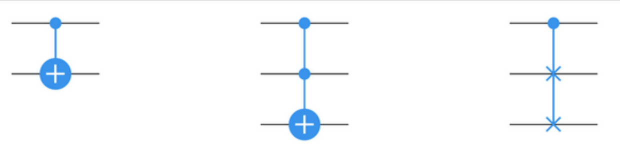
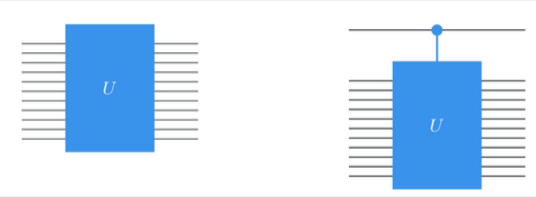
Start kernel and run



ゲートの紹介

今後の勉強会のための予習

【参考資料】
https://qiskit.org/documentation/locale/ja_JP/tutorials/circuits/3_summary_of_quantum_operations.html#id1

ゲート	ゲート図
単一量子ビット・ゲート	  （Notゲート）
スワップゲート	
制御ゲート	 左から 制御NOT ゲート、 制御・制御NOT(または Toffoli)ゲート 制御スワップ(Fredkin) ゲート
複数量子ビットに対する任意のユニタリー操作	

まとめ

- ✓ コンピューター・サイエンスでは、回路は計算のモデルであり、量子回路はこの一例である。
- ✓ この教科書 (および Qiskit) 全体では、リトル・エンディアン・インデックス付けを採用している。
- ✓ ベル状態の回路を例に、量子回路に触れてみた