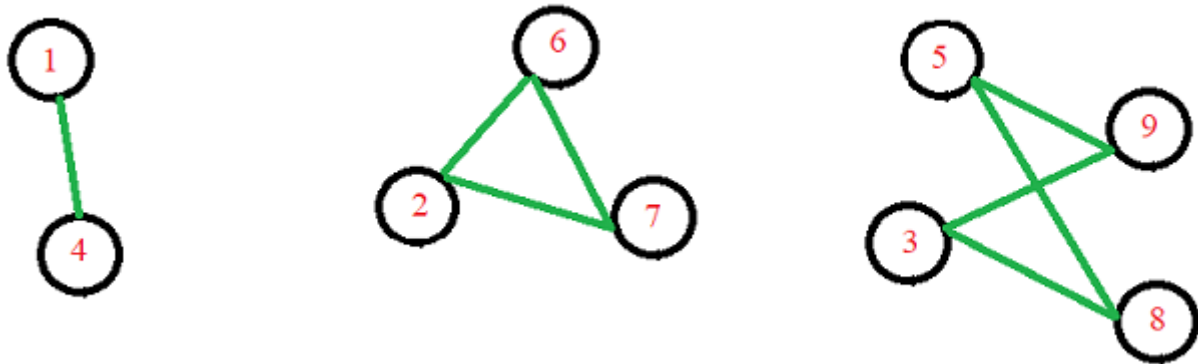


BÀI TẬP BỔ SUNG

Bài 1: Đại cương về đồ thị

Cho ma trận kề lưu trữ thông tin của đồ thị vô hướng G

a. Vẽ đồ thị G



b. Đồ thị G có bao nhiêu thành phần liên thông? Liệt kê các thành phần liên thông đó.

* Đồ thị G có 3 thành phần liên thông:

- Thành phần 1: 1 4
- Thành phần 2: 2 6 7
- Thành phần 3: 3 5 8 9

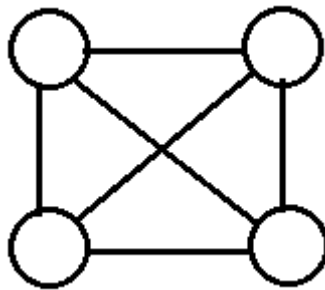
c. Chuyển đồ thị G dưới dạng danh sách kề.

Vertices	List
1	4
2	6 7
3	8 9
4	1
5	8 9
6	2 7
7	2 6
8	3 5
9	3 5

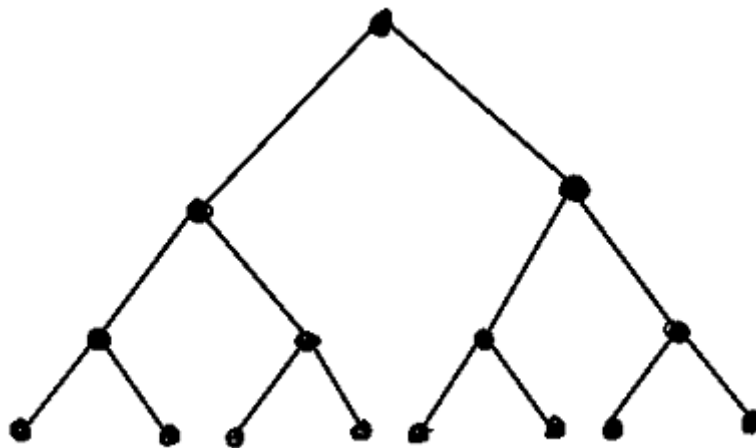
2. Giải đấu bóng đá tranh cúp vô địch thế giới FIFA World Cup 2018 qui tụ 32 đội bóng hàng đầu thế giới. Các đội bóng được chia làm 8 bảng đầu, mỗi bảng bao gồm 4 đội bóng. Các đội bóng phải thi đấu ở vòng đầu bảng với thể thức vòng tròn, mỗi đội phải đấu với tất cả các đội còn lại trong cùng bảng. Hãy dùng đồ thị để mô tả các trận đấu bảng của một bảng. Có bao nhiêu trận đấu ở vòng đầu bảng của tất cả các bảng đầu? Mỗi bảng đầu sau khi thi đấu, vòng bảng sẽ chọn 2 đội đầu bảng để tiếp tục thi đấu theo hình thức loại trực tiếp cho đến khi chọn được đội vô địch. Hãy xác định số trận đấu của đội vô địch trong giải đấu này?

* Đồ thị mô tả trận bóng: Bảng đầu sẽ có đồ thị như sau:

Trong đó mỗi đỉnh là một đội.



* Các bảng tiếp theo được mô tả như cây nhị phân:



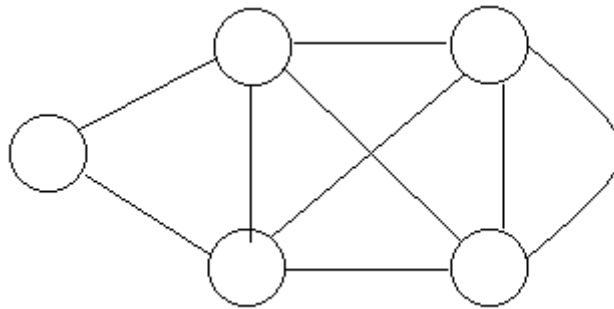
- Ở bảng đầu, dựa vào đồ thị thì mỗi bảng có 6 trận đấu, do đó 8 bảng đầu có $6 \cdot 8 = 48$ trận.
- Ở các vòng tiếp theo sẽ có tất cả 7 trận đấu dựa trên cây nhị phân ở hình trên (số đỉnh trong).
- Đội vô địch sẽ đấu 3 trận (cấp của đồ thị) nếu không tính bảng đầu, là 6 trận bao gồm bảng đầu.

3. Vẽ đồ thị có dãy các bậc như sau: 4, 4, 4, 4, 2. Đồ thị kết quả có khả năng là đồ thị đơn hay không?

- Giả sử đồ thị đã cho là đồ thị đơn, khi đó ta có: $4 + 4 + 4 + 4 + 2 = 2m \Leftrightarrow m = 9$ (cạnh)
- Ta lại có: $n = 5$ (đỉnh) Vì là đồ thị đơn nên trong 4 đỉnh bậc 4 sẽ không có đỉnh nào có khuyên. Nói cách khác, mỗi đỉnh bậc 4 sẽ nối với 4 đỉnh còn lại.
- Do đó, có $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ cạnh được tạo ra (> 9 so với quy tắc) \Rightarrow Vô lý

\Rightarrow Đồ thị kết quả không có khả năng là đồ thị đơn.

Đồ thị có kết quả như sau:



4. Cây tam phân đủ với chiều cao 6 có tối đa bao nhiêu đỉnh trong? Trình bày và vẽ hình để chứng minh.

- Trong cây m-array đủ cấp h thì số lá là: $m^h = l$
- Và số đỉnh là:

$$n = m^0 + m^1 + \dots + m^h = \frac{m^{h+1} - 1}{m - 1}$$

- Ta có số đỉnh trong là: $i = n - l = \frac{m^{h+1}-1}{m-1} - m^h = \frac{m^h-1}{m-1}$
- Do đó, cây tam phân có đủ số đỉnh trong (cấp 6) là:

$$i = \frac{3^6 - 1}{2} = 364$$

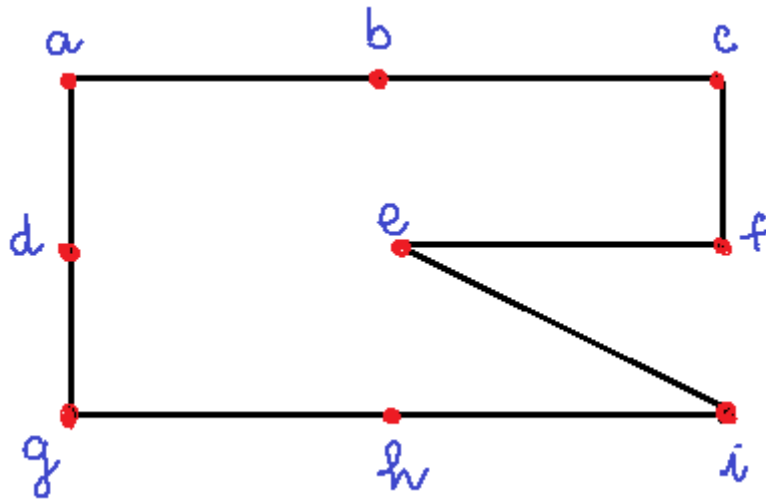
\Rightarrow Vậy, cây tam phân đủ với chiều cao 6 có tối đa 364 đỉnh trong

Bài 2: Hamilton

6. Tìm đường đi Hamilton của đồ thị sau. Trình bày chi tiết các bước.

- Lấy cạnh ef, sau đó lấy tiếp cạnh fc. Vì f qua e và f qua c nên sẽ xóa cạnh fi (theo QT3)
- Lấy cạnh bc. Vì c qua b và qua f nên xóa cạnh ce (QT3).
- Lấy cạnh ba. Vì b qua c và qua a nên xóa cạnh be (QT3).

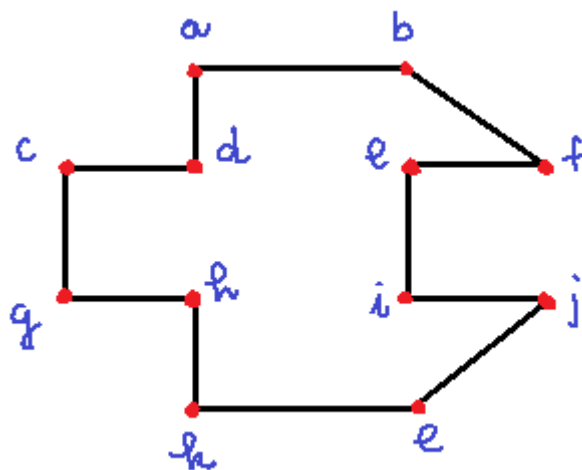
- Lấy cạnh ad . Vì a qua b và qua d nên xóa cạnh ae (QT3).
- Lấy cạnh dg . Vì d qua a và qua g nên xóa cạnh de (QT3).
- Lấy cạnh gh . Vì g qua d và qua h nên xóa cạnh ge (QT3).
- Lấy cạnh hi . Vì h qua g và qua i nên xóa cạnh he (QT3).
- Cuối cùng là lấy cạnh ei để tạo thành chu trình Hamilton như sau:



$$e \rightarrow f \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow i \rightarrow e$$

7. Tìm đường đi Hamilton của đồ thị sau. Trình bày chi tiết các bước.

- Lấy cạnh ef, lấy tiếp cạnh fb. Xóa fj vì đỉnh f qua e và qua b (QT3).
- Lấy cạnh ba, xóa cạnh be. Vì đỉnh b qua f và qua a (QT3).
- Lấy cạnh ad, xóa cạnh ac. Vì đỉnh a qua b và qua d (QT3).
- Lấy cạnh dc, xóa cạnh dh. Vì đỉnh d qua a và qua c (QT3).
- Lấy cạnh cg.
- Lấy cạnh gh, xóa cạnh gk. Vì đỉnh g qua c và qua h (QT3).
- Lấy cạnh hk.
- Lấy cạnh kl.
- Lấy cạnh lj, xóa cạnh li. Vì đỉnh l qua k và qua j (QT3).
- Lấy tiếp cạnh ji và cạnh ie để tạo thành chu trình Hamilton như sau:



$$e \rightarrow f \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow e$$

Bài 3: Khung cây tối thiểu

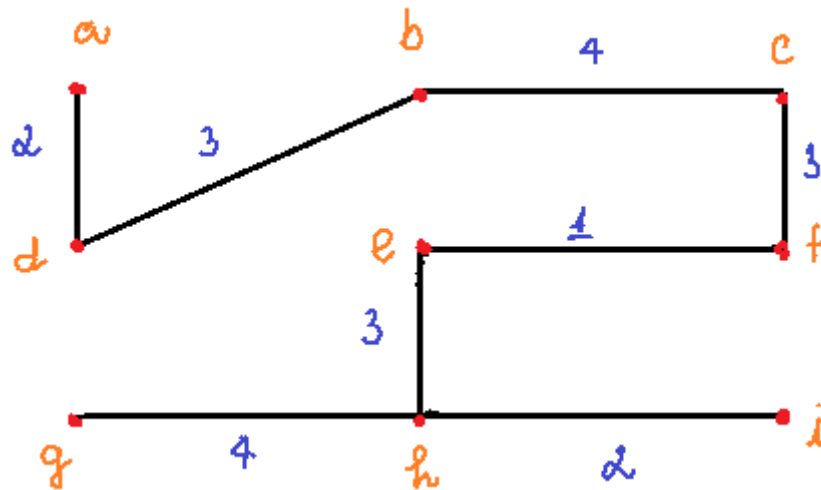
8. Sử dụng thuật toán Prim để tìm khung cây tối thiểu đồ thị dưới đây. Trình bày các bước làm.

* Ý tưởng thuật toán:

1. Gọi T là tập chứa các cạnh của khung cây. $T = \emptyset$
Gọi S là tập chứa các đỉnh của khung cây. $S = \{x\}$. Trong đó x là đỉnh bất kỳ thuộc đồ thị.
2. Tìm cạnh $(x, y) \in w(S)$ sao cho cạnh này có trọng số bé nhất trong $w(S)$.
3. Lặp bước 2 đến khi T có $n - 1$ cạnh thì dừng.

* Với bài toán này, ta thực hiện các bước trên như sau:

- Khởi tạo khung cây $T = \emptyset$
- Ta có tập $S = \{e\}$, $w(S) = \{(e,f), (e,b), (e,h), (e,d)\}$
Chọn cạnh (e,f) , khi đó $T = T \cup (e,f) = \{(e,f)\}$
- $S = \{e,f\}$, $w(S) = \{(e,b), (e,h), (e,d), (f,i), (f,c), (f,b), (f,h)\}$
Chọn cạnh (e,h) , khi đó $T = T \cup (e,h) = \{(e,f), (e,h)\}$
- $S = \{e,f,h\}$, $w(S) = \{(e,b), (e,d), (f,i), (f,c), (f,b), (h,g), (h,d), (h,i)\}$
Chọn cạnh (h,i) , khi đó $T = T \cup (h,i) = \{(e,f), (e,h), (h,i)\}$
- $S = \{e,f,h,i\}$, $w(S) = \{(e,b), (e,d), (f,c), (f,b), (h,g), (h,d)\}$
Chọn cạnh (f,c) , khi đó $T = T \cup (f,c) = \{(e,f), (e,h), (h,i), (f,c)\}$
- $S = \{e,f,h,i,c\}$, $w(S) = \{(e,b), (e,d), (f,b), (h,g), (h,d), (c,b)\}$
Chọn cạnh (c,b) , khi đó $T = T \cup (c,b) = \{(e,f), (e,h), (h,i), (f,c), (c,b)\}$
- $S = \{e,f,h,i,c,b\}$, $w(S) = \{(e,d), (h,g), (h,d), (b,a), (b,d)\}$
Chọn cạnh (b,d) , khi đó $T = T \cup (b,d) = \{(e,f), (e,h), (h,i), (f,c), (c,b), (b,d)\}$
- $S = \{e,f,h,i,c,b,d\}$, $w(S) = \{(h,g), (b,a), (d,a), (d,g)\}$
Chọn cạnh (d,a) , khi đó $T = T \cup (d,a) = \{(e,f), (e,h), (h,i), (f,c), (c,b), (b,d), (d,a)\}$
- $S = \{e,f,h,i,c,b,d,a\}$, $w(S) = \{(h,g), (d,g)\}$
Chọn cạnh (h,g) , khi đó $T = T \cup (h,g) = \{(e,f), (e,h), (h,i), (f,c), (c,b), (b,d), (d,a), (h,g)\}$
 \Rightarrow Dừng thuật toán vì đủ 9 đỉnh và 8 cạnh. Ta được khung cây như sau:



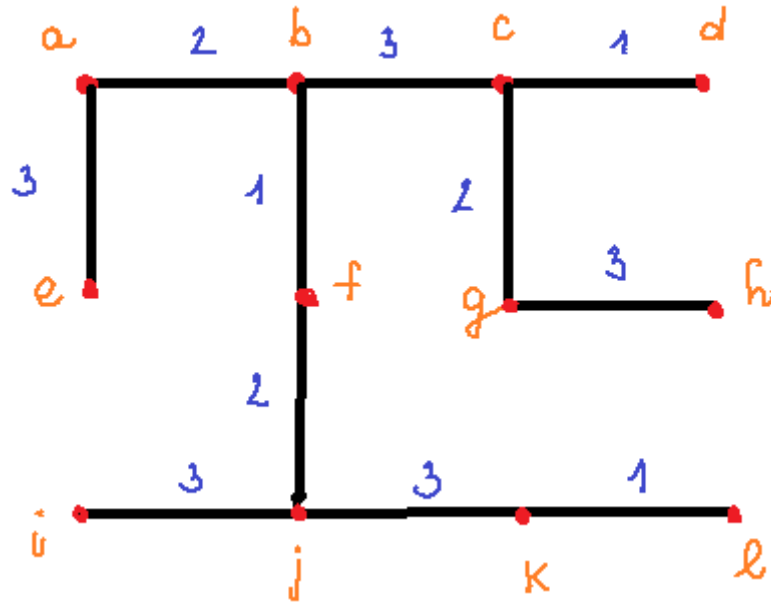
9. Sử dụng thuật toán Kruskal để tìm khung cây tối thiểu đồ thị dưới đây. Trình bày các bước làm.

- Sắp xếp các cạnh theo thứ tự tăng dần của trọng số:

Cạnh	(b, f)	(k, l)	(c, d)	(a, b)	(c, g)	(f, j)	(a, e)	(b, c)
Trọng số	1	1	1	2	2	2	3	3

(f, g)	(i, j)	(j, k)	(g, h)	(h, l)	(e, i)	(e, f)	(g, k)	(d, h)
3	3	3	3	3	4	4	4	5

- Lần lượt duyệt danh sách các cạnh đã sắp xếp theo thứ tự trọng số từ nhỏ đến lớn, chọn cạnh bổ sung vào tập T với điều kiện việc bổ sung này không tạo chu trình.
 - Khởi tạo khung cây $T = \emptyset$
 - Bổ sung vào T cạnh (b, f)
 - Bổ sung vào T cạnh (c, d)
 - Bổ sung vào T cạnh (k, l)
 - Bổ sung vào T cạnh (a, b)
 - Bổ sung vào T cạnh (c, g)
 - Bổ sung vào T cạnh (f, j)
 - Bổ sung vào T cạnh (a, e)
 - Bổ sung vào T cạnh (b, c)
 - Bổ sung vào T cạnh (i, j)
 - Bổ sung vào T cạnh (j, k)
 - Bổ sung vào T cạnh (g, h)
- Dừng thuật toán vì đủ 11 cạnh và 12 đỉnh. Ta được khung cây như sau:



Bài 4: Thuật toán Dijkstra

10. Từ đỉnh A tới đỉnh Z

A	B	C	D	E	F	G	Z
0*	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	(4, A)	(3, A)*	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	(4, A)*	-	(6, C)	(9, C)	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	-	-	(6, C)*	(9, C)	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	(7, D)*	(11, D)	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	-	(11, D)*	(12, E)	$(\infty, -)$
-	-	-	-	-	-	(12, E)*	(18, F)
-	-	-	-	-	-	-	(16, G)*

- Vậy đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến đỉnh Z là: $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow Z$
- Khoảng cách: $d(A, Z) = 16$

11. Từ đỉnh Deep Springs đến đỉnh Warm Springs

Đặt:

- Đỉnh A là Diver
- Đỉnh B là Oasis
- Đỉnh C là Deep Springs
- Đỉnh D là Gold Point
- Đỉnh E là Beatty

- Đỉnh F là Siver Pea
- Đỉnh G là Linda
- Đỉnh H là Goldfield
- Đỉnh I là Manhattan
- Đỉnh J là Tonopah
- Đỉnh K là Warm Springs

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	0^*	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
$(\infty, -)$	$(10, C)^*$	-	$(30, C)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
$(31, B)$	-	-	$(30, C)^*$	$(\infty, -)$	$(33, B)$	$(35, B)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
$(31, B)^*$	-	-	-	$(75, D)$	$(33, B)$	$(35, B)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	$(75, D)$	$(33, B)^*$	$(35, B)$	$(\infty, -)$	$(111, A)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	$(75, D)$	-	$(35, B)^*$	$(53, F)$	$(111, A)$	$(73, F)$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	$(75, D)$	-	-	$(53, F)^*$	$(111, A)$	$(73, F)$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	$(75, D)$	-	-	-	$(111, A)$	$(73, F)^*$	$(\infty, -)$
-	-	-	-	$(75, D)^*$	-	-	-	$(98, J)$	-	$(128, J)$
-	-	-	-	-	-	-	-	$(98, J)^*$	-	$(128, J)$
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$(128, J)^*$

- Vậy đường đi ngắn nhất từ Deep Springs đến Warm Springs là:
Deep Springs \rightarrow Oasis \rightarrow Siver Pea \rightarrow Tonopah \rightarrow Warm Springs
- Khoảng cách: $d(\text{Deep Springs}, \text{Warm Springs}) = 128$