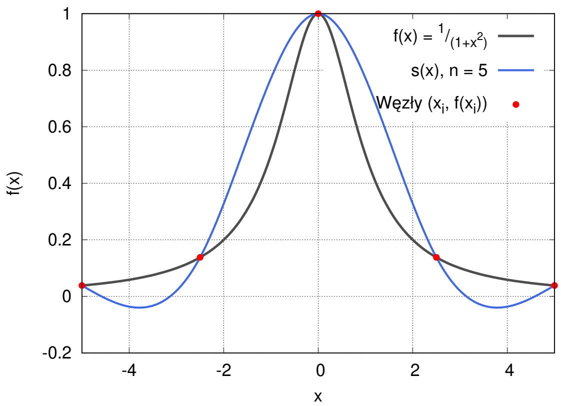
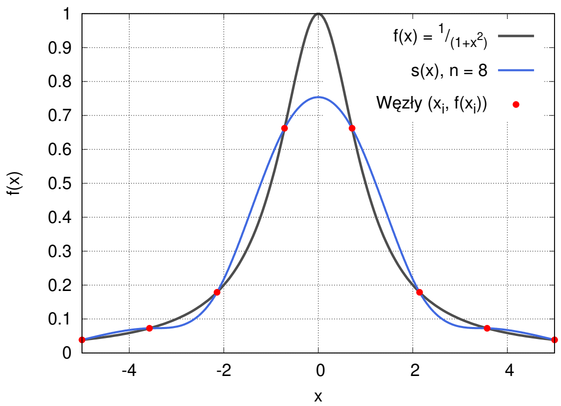
Metody numeryczne – wyniki, laboratorium nr 8, grupa 6

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach – v2

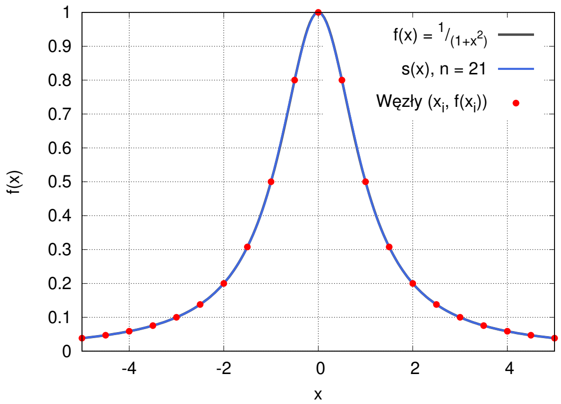
Ad 2.4.



(a) $n = 5 \Longrightarrow h = 2.5$

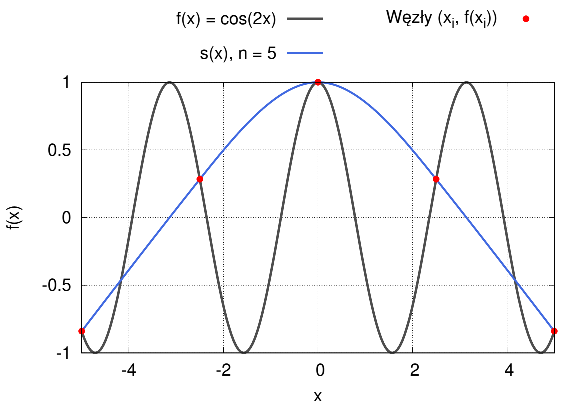


(b) $n = 8 \Longrightarrow h = \frac{10}{7}$

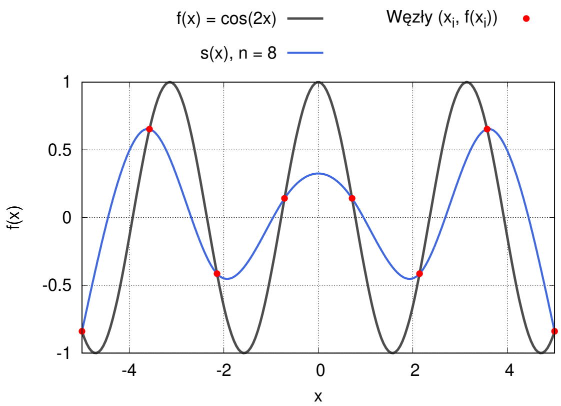


(c) $n = 21 \Longrightarrow h = 0.5$

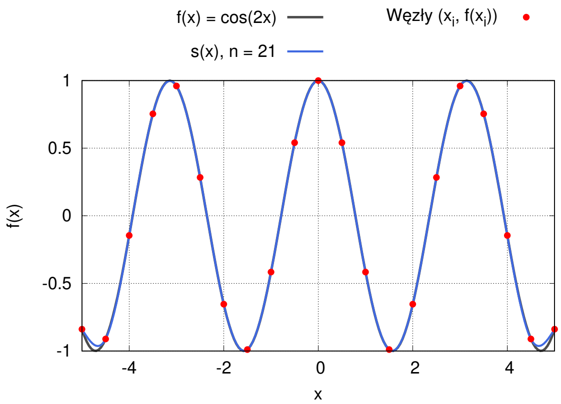
Rysunek 1: Wyniki interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n węzłów.



(a) $n = 5 \Longrightarrow h = 2.5$



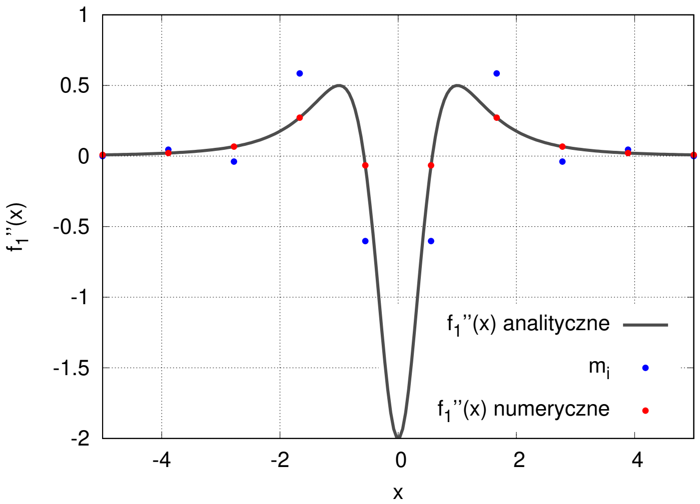
(b) $n = 8 \Longrightarrow h = \frac{10}{7}$



(c) $n = 21 \Longrightarrow h = 0.5$

Rysunek 2: Wyniki interpolacji funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n węzłów.

Ad 2.5.



Rysunek 3: Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla $n = 10$ węzłów porównane z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego oraz z pochodną wyprowadzoną analitycznie.

Wyniki pośrednie

- Położenia i wartości funkcji w węzłach (zaznaczone również czerwonymi punktami na wykresach z rys. 1(a), 2(a)) dla przypadku $n = 5$:

`i`	`xm[i]`	`ym[i]` dla $f_1(x)$	`ym[i]` dla $f_2(x)$
0	-5	0.0384615	-0.839072
1	-2.5	0.137931	0.283662
2	0	1	1
3	2.5	0.137931	0.283662
4	5	0.0384615	-0.839072

Tabela 1: Równoodległe węzły interpolacji dla $n = 5$

- Przy tworzeniu macierzy **A** i wektora wyrazów wolnych $\vec{d}$ musimy najpierw obliczyć parametry według wzorów (3) – (5). Kolejno:
  - **Odległości międzywęzłowe**: $h_i = x_i - x_{i-1}$

    ...ale w naszym zadaniu odległości te są równe, bo tak zdefiniowaliśmy siatkę węzłów. Skoro tak, to dla każdego i parametr h_i jest stały i wynosi: $h_i = \Delta x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{n-1}$ z wzorów (11).

    Np. dla $n = 5$: $h_i = 2.5$
  - Z powyższych rozważań wynika, że parametr $\lambda_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$ również musi być stały i dodatkowo niezależny od n.
  - Podobnie parametr: $\mu_i = 1 - \lambda_i$ musi być stały i niezależny od n. *Ile w takim razie wynoszą wartości λ i μ? :)*

  Macierz **A** dla $n = 5$ powinna wynosić (niezależnie od funkcji $f(x)$):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Wektor wyrazów wolnych dla funkcji $f_1(x)$ przy $n = 5$:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.366048 \\ -0.827586 \\ 0.366048 \\ 0 \end{pmatrix}$$

...oraz dla funkcji $f_2(x)$ przy $n = 5$:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.19507 \\ -0.687684 \\ -0.19507 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Rozwiązanie układu równań** $\mathbf{A}\vec{m} = \vec{d}$, tj. wektor $\vec{m}$ dla funkcji $f_1(x)$ przy $n = 5$:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 4.96507\mathrm{e}{-17} \\ 0.327397 \\ -0.577491 \\ 0.327397 \\ -0 \end{pmatrix}$$

...oraz dla funkcji $f_2(x)$ przy $n = 5$:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} -0 \\ -0.013228 \\ -0.337228 \\ -0.013228 \\ -0 \end{pmatrix}$$

Układ równań rozwiązano przy pomocy funkcji `gsl_linalg_HH_svx`*. Wyniki uzyskane przy użyciu rozkładu LU (funkcje* `gsl_linalg_LU_decomp` *i* `gsl_linalg_LU_solve`*) mogą się nieznacznie różnić.*

- Po rozwiązaniu układu równań dokonujemy już interpolacji. Jeśli wynikowa funkcja interpolująca nie jest ciągła i/lub gładka, to bardzo możliwe, że numer podprzedziału i (we wzorze (8) z treści) jest błędnie wyznaczony lub w samym wzorze jest błąd (trzeba sprawdzić również wzory na stałe całkowania: (9) i (10)).