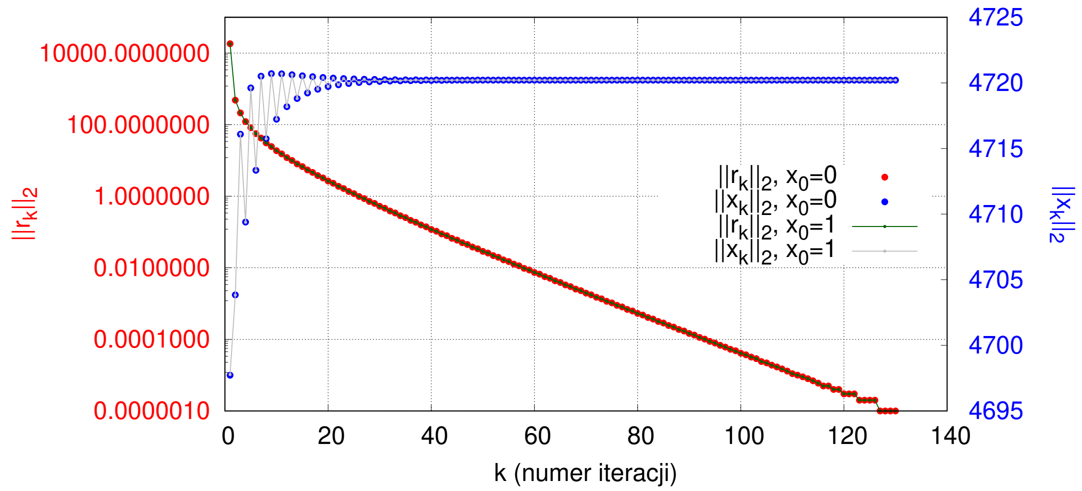
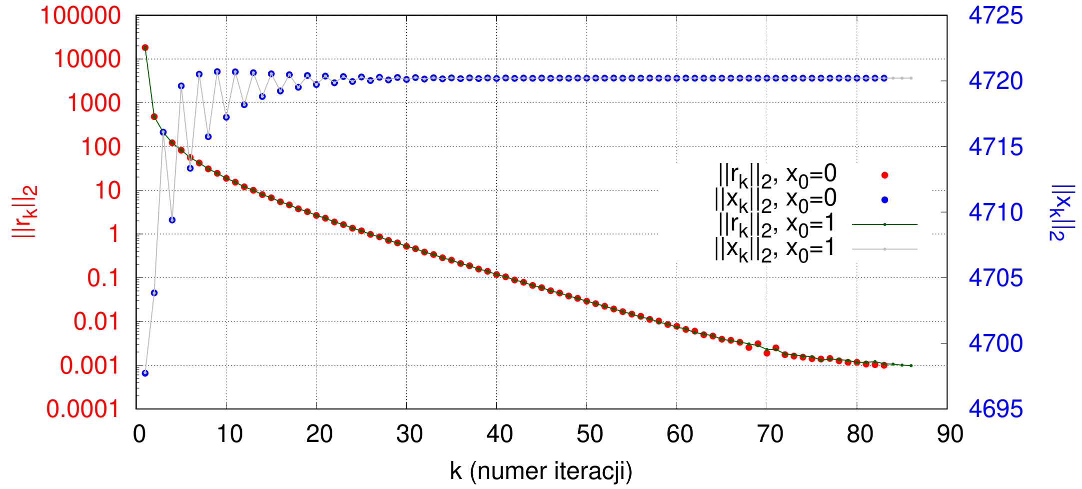
Metody numeryczne – wyniki, laboratorium nr 3, grupa 6

Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej

Ad 1.6.



(a) Podwójna precyzja (`double`), warunek zbieżności: $\sqrt{\mathbf{r}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_k} < 10^{-6}$



(b) Pojedyncza precyzja (`float`), warunek zbieżności: $\sqrt{\mathbf{r}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_k} < 10^{-3}$

Rysunek 1: Norma wektora reszt $||\vec{r}_k||_2$ (kolor czerwony, lewa oś) oraz norma wektora rozwiązań $||\vec{x}_k||_2$ (kolor niebieski, prawa oś) w funkcji numeru iteracji.

Wyniki pośrednie

(Nie są wymagane według treści, ale mogą posłużyć Państwu do testów swojego programu – szczególnie, jeśli wyniki z rys. 1 byłyby u Państwa nieprawidłowe.)

Ad 1.1. Prawidłowo wypełniona macierz $\mathbf{A}$ o rozmiarze $n \times n$ (tj. 1000×1000) powinna mieć $2m+1$ niezerowych przekątnych: diagonala, 5 przekątnych nad diagonalą oraz 5 przekątnych pod diagonalą (dokładne wartości: wzór (1)).

Najczęściej popełniane błędy:

- **dzielenie** `int/int` – wynik jest obliczany w typie `int`, więc elementy macierzy są zaokrąglone w większości do 0. Żeby się przed tym uchronić, wystarczy zapisać np. licznik w formie 1.0 (zamiast całkowitego 1).
- **brak nawiasu wokół mianownika** – ze względu na priorytety operatorów oraz ich kierunek wiązania, **mianownik musi być ujęty w nawias**.

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
1 & 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0.5 & 1 & 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0 & \dots & 0 \\
0.333333 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 & \dots & 0 \\
0.25 & 0.333333 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 & \dots & 0 \\
0.2 & 0.25 & 0.333333 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.333333 & 0.25 & \dots & 0 \\
0.166667 & 0.2 & 0.25 & 0.333333 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.333333 & \dots & 0 \\
0 & 0.166667 & 0.2 & 0.25 & 0.333333 & 0.5 & 1 & 0.5 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0.166667 & 0.2 & 0.25 & 0.333333 & 0.5 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0.166667 & 0.2 & 0.25 & 0.333333 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.333333 \\
0 & \dots & 0 & 0.166667 & 0.2 & 0.25 & 0.333333 & 0.5 & 1 & 0.5 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0.166667 & 0.2 & 0.25 & 0.333333 & 0.5 & 1
\end{pmatrix} \tag{1}
$$

Ad 1.2. Wektor wyrazów wolnych o $n = 1000$ elementach – wartości według wzoru $b[i] = i + 1$ powinny wynosić (wzór (2)):

$$
\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ 998 \\ 999 \\ 1000 \end{pmatrix} \tag{2}
$$

Ad 1.3. Metoda największego spadku – **najczęściej popełniane błędy:**

- **ˆ nie jest operatorem potęgowania!** Stałą typu 10^{-6} zapisujemy jako stałą zmiennoprzecinkową w notacji wykładniczej: `10e-6`.
- **Jak uzyskać transpozycję wektora?** Nijak :) Transpozycja jest nam potrzebna tylko w celu poprawnego zrozumienia wzoru. Rozpisane wzory dla wektorów (iloczyn skalarny) biorą już pod uwagę transpozycję. Sposób zapisania wektora w pamięci jest nieistotny – to kwestia abstrakcyjna :)
- **Pierwiastki w złych miejscach lub ich brak**: przy obliczaniu samego iloczynu skalarnego nie ma pierwiastka. Przy obliczaniu normy musi być pierwiastek (z iloczynu skalarnego).
- **Źle wypełniony wektor początkowy** $\vec{x}_0$ – wszystkie elementy wektora muszą być zainicjalizowane tą samą wartością początkową (w podpunkcie a) są to zera, w podpunkcie b): jedynki).
- **Błędny warunek zbieżności** – proszę pamiętać, że dla typu `double` używamy warunku obiegu pętli: $\|\vec{r}_k\|_2 > 10^{-6}$, natomiast dla `float`: $\|\vec{r}_k\|_2 > 10^{-3}$. Inaczej pętla może stać się nieskończona.

Ad 1.4. Niektóre wartości wypisane przez program: dla typu `double`: tabela 1., `float`: tabela 2. (na ich podstawie wygenerowano wykresy 1(a) oraz 1(b)).

Uwaga: jeśli wartości ***nieznacznie się różnią****, niekoniecznie oznacza to błąd; może to wynikać z innego zaokrąglenia liczb zmiennoprzecinkowych, ze względu np. na inną kolejność obliczeń.*

k	$\|\|\vec{r}_k\|\|_2$ ($\vec{x}_0 = \vec{0}$)	α_k	$\|\|\vec{x}_k\|\|_2$
1	18271.111077	0.257112	4697.722212
2	482.785484	0.496902	4703.843599
3	212.182191	0.457346	4716.089481
⋮	⋮	⋮	⋮
128	0.000001	0.495898	4720.211839
129	0.000001	0.470064	4720.211839
130	0.000001	0.495920	4720.211839

(a) Przypadek dla wektora startowego $\vec{x}_0 = \vec{0}$

k	$\|\|\vec{r}_k\|\|_2$ ($\vec{x}_0 = \vec{1}$)	α_k	$\|\|\vec{x}_k\|\|_2$
1	18164.577309	0.257116	4697.772883
2	481.816214	0.497276	4703.830333
3	211.894834	0.457304	4716.120869
⋮	⋮	⋮	⋮
128	0.000001	0.496029	4720.211839
129	0.000001	0.469947	4720.211839
130	0.000001	0.496050	4720.211839

(b) Przypadek dla wektora startowego $\vec{x}_0 = \vec{1}$

Tabela 1: Wyniki dla podwójnej precyzji `double`, $\epsilon = 10^{-6}$

k	$\|\|\vec{r}_k\|\|_2$ ($\vec{x}_0 = \vec{0}$)	α_k	$\|\|\vec{x}_k\|\|_2$
1	18271.101554	0.257112	4697.719021
2	482.785165	0.496903	4703.845236
3	212.181149	0.457349	4716.088634
⋮	⋮	⋮	⋮
81	0.001062	0.428694	4720.211860
82	0.001031	0.487603	4720.211648
83	0.000997	0.431019	4720.211860

(a) Przypadek dla wektora startowego $\vec{x}_0 = \vec{0}$

k	$\|\|\vec{r}_k\|\|_2$ ($\vec{x}_0 = \vec{1}$)	α_k	$\|\|\vec{x}_k\|\|_2$
1	18164.574754	0.257116	4697.770109
2	481.815933	0.497277	4703.832267
3	211.894026	0.457306	4716.118319
⋮	⋮	⋮	⋮
84	0.001055	0.437672	4720.211648
85	0.001003	0.421533	4720.212283
86	0.000980	0.455854	4720.212072

(b) Przypadek dla wektora startowego $\vec{x}_0 = \vec{1}$

Tabela 2: Wyniki dla pojedynczej precyzji `float`, $\epsilon = 10^{-3}$