Vadym Semkovych
296669
11.03.2020

Sprawozdanie 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

1. Wstęp teoretyczny

Metoda LU - metoda, służąca do rozwiązywania układu równań liniowych. Rozkład LU polega na podziale macierzy $\boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})}$ na macierz $\boldsymbol{L}_{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})}$ (dolna macierz trójkątna z jedynkami na diagonali) i macierz $\boldsymbol{U}_{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})}$ (górna macierz trójkątna z niezerowymi elementami na diagonali).

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}$$

gdzie:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozwiązywanie układu równań polega na tym, że sprowadzamy:

$$\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

(gdzie $\mathbf{A}$ – macierz współczynników, $\vec{x}$ – wektor (macierz $n \times 1$) zmiennych x_n, $\vec{b}$ - wektor (macierz $n \times 1$) wyrazów wolnych.)
do postaci:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\vec{y} & = & \vec{b} \\ \mathbf{U}\vec{x} & = & \vec{y} \end{cases}$$

Dzięki właściwościom macierzy trójkątnych taki układ łatwo da się rozwiązać.

Metoda LU pozwala na obliczanie wyznacznika również. Wzór podany poniżej:

$$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{LU}) = det(\mathbf{L}) \cdot det(\mathbf{U})$$

przy czym $det(\mathbf{L}) = 1$, a $det(\mathbf{U})$ równy jest iloczynowi elementów stojących na diagonali tej macierzy.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy można obliczyć za pomocą iloczynu normy macierzy $\mathbf{A}$ i normy macierzy $\mathbf{A}^{-1}$.

Wskaźnik uwarunkowania: $k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$.

2. Problem

Podczas laboratorium analizowaliśmy macierz $\mathbf{A}_{4\times4}$ za pomocą rozkładu LU. Elementy macierzy zdefiniowane są następująco:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j+\delta}$$

gdzie:
i, j = 1,2 ….. n, $\delta = 0$, ponieważ korzystamy z biblioteki NR.

Dalej dokonaliśmy rozkładu LU, zastępując macierz **A** na macierz **L** oraz **U**. Zrobiliśmy to korzystając z funkcji biblioteki NR:

ludcmp(float A[n][n], int n, int indx[n], float &d),

gdzie: A - macierz, n - rozmiar macierzy, indx - wektor permutacji wierszy, d - określa liczbę permutacji.

Następnym krokiem było obliczenie wyznacznika macierzy. Funkcja **ludcmp** w wyniku podaje nam macierz LU, więc aby obliczyć wyznacznik wystarczyło wymnożyć elementy stojące na diagonali przez zmienną **d**.

Kolejne zadanie, to wyliczanie macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$. Znaleźliśmy macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$ rozwiązując n układów równań z wektorami wyrazów wolnych:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tutaj znowu korzystamy z funkcji biblioteki NR:

lubksb(float LU[n][n],int n, int indx[n], float b[n]),

gdzie: LU - to rozkład LU (wpisany do macierzy A), b - aktualny wektor wyrazów wolnych

Następnie szukaliśmy iloczyn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$, żeby sprawdzić skuteczność metody LU (w najlepszym wypadku powinniśmy dostać macierz jednostkową). Skorzystaliśmy tutaj z funkcji mnożenia macierzy:

```
for (int i = 1; i <= 4; i++)  {
        for (int j = 1; j <= 4; j++) {
                C[i][j] = 0;
                for(int k = 1; k <= 4; k++)
                        C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
        }
}
```

(pętle startują od 1, ponieważ korzystamy z biblioteki NR).

Ostatnie zadanie, to obliczanie wskaźnika uwarunkowania, obliczyliśmy go korzystając ze wzoru wymienionego we wstępie teoretycznym. W naszym przypadku korzystamy z normy maksymalnej: $\|\mathbf{A}\|_{1,\infty} = \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|$.

3. Wyniki

Macierz wejściowa **A:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.333333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.2 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125 \end{bmatrix}$$

1) Elementy diagonalne macierzy U:

$u_{1,1}$	0.2
$u_{2,2}$	−0.0833333
$u_{3,3}$	−0.00238095
$u_{4,4}$	-0.00005953

Tabela 1. Wartości diagonali macierzy U

2) Wyznacznik macierzy A:

Korzystając z elementów zapisanych w Tabeli 1 obliczyliśmy wyznacznik macierzy za pomocą wzoru zdefiniowanego we wstępie teoretycznym, wynosi on:

$$\det(\boldsymbol{A}) = 2.362151 \cdot 10^{-9}$$

3) Macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 199.992 & -1199.945 & 2099.905 & -1119.951 \\ -1199.94 & 8099.62 & -15119.332 & 8399.65 \\ 2099.88 & -15119.3 & 29398.7 & -16799.3 \\ -1119.93 & 8399.58 & -16799.3 & 9799.61 \end{bmatrix}$$

4) Iloczyn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.999985 & 0 & -0.000976562 & 0.000244141 \\ -1.52588 \cdot 10^{-5} & 1 & -0.000732422 & 0.000244141 \\ 0 & 0.00012207 & 0.999756 & 0.000244141 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Wskaźnik uwarunkowania:

$$\boldsymbol{k(A) = 14699.354492}$$

4. Wnioski

Korzystając z metody LU odwróciliśmy macierz **A**. Także obliczyliśmy jej wyznacznik oraz wskaźnik uwarunkowania. Aby sprawdzić skuteczność metody znaleźliśmy iloczyn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$, oczekiwaliśmy w wyniku dostać macierz jednostkową, ale jak widzimy elementy na diagonali są jedynkami ,gdyż elementy leżące nie na przekątnej są przybliżone do zera, ale niezerowe. Wskaźnik uwarunkowania jest duży, świadczy to o tym że macierz **A** jest źle uwarunkowana.

Metoda LU nie gwarantuje dokładności wyników, jednak za pomocą tej metody można szybko wyliczyć wyznacznik oraz odwrócić macierz.