Vadym Semkovych
296669
22.04.2020

Sprawozdanie 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

1. Wstęp teoretyczny

Interpolacja funkcjami sklejanymi – metoda numeryczna polegająca na przybliżaniu nieznanej funkcji wielomianami niskiego stopnia. W przedziale **[a, b]** mamy **n+1** punktów, takich że:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Punkty x_i nazywane są węzłami interpolacji. Punkty te określają podział przedziału **[a, b]** na **n** podprzedziałów tj. $[x_i \ , x_{i+1}]$. W każdym takim podprzedziale interpoluje się funkcję wielomianem interpolacyjnym. „Połączenie" tych wielomianów ma utworzyć funkcję sklejaną.

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach. Oznaczmy $m_j = s^2(x_j), \quad j = 0,1,2 \ldots, n$. Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji s(x) jest ciągła i liniowa w każdym z podprzedziałów $[x_{i-1} \ , x_i]$, więc możemy całkować nasze wyrażenie dwukrotnie. W wyniku dostajemy następujące wyrażenie:

$$s_{i-1} = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \qquad (1)$$

gdzie: i- numer podprzedziału, w którym leży argument wartości wyznaczanej.

Stałe A_i i B_i można obliczyć korzystając z warunku interpolacji i mają one następującą postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}) \qquad (2)$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{{h_i}^2}{6} \qquad (3)$$

Teraz problem sprowadza się do znalezienie m_i i m_{i-1}. Aby go rozwiązać, należy rozwiązać układ równań liniowych:

$$\mathbf{A}\vec{m} = \vec{d} \qquad (4)$$

Którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \quad (5)$$

Przy czym m_i, to szukane wartości drugich pochodnych w węzłach. Pozostałe oznaczenia to:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad (6)$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i \quad (7)$$

Wektor wyrazów wolnych inicjalizowany jest w następujący sposób:

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) \quad (8)$$

Odległość międzywęzłową określa h_i:

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (9)$$

Należy określić jeszcze warunki brzegowe:

$$m_0 = \alpha, \quad m_n = \beta \ (10)$$

Po wprowadzeniu powyższych warunków układ (4) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix} \quad (11)$$

Po rozwiązaniu układu równań - znalezieniu współczynników m_i – wyznaczamy funkcję sklejaną wg wzoru (1).

2. Problem

Na laboratorium trzeba było wykonać interpolacje funkcjami sklejanymi dla funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (12)$$

oraz

$$f_2(x) = \cos(2x) \quad (13)$$

Robiliśmy to dla różnej ilości węzłów **n = 5, 8, 21** w przedziale **x** $\in [-5, 5]$. . Odległość pomiędzy węzłami liczyliśmy za pomocą poniższego wzoru:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{n} \quad (14)$$

Trzeba było zaimplementować dwie funkcji. Pierwsza (**wynacz_M)** zwracała wartości drugich pochodnych w węzłach, druga (**wyznacz_Sx**) wyznaczała wartości funkcji w położeniach międzywęzłowych. W funkcji **wynacz_M** aby rozwiązać układ (11) (w naszym przypadku $\alpha = 0, \beta = 0$) korzystaliśmy z funkcji biblioteki **GSL:**

gsl_linalg_HH_svx (gsl_matrix *A, gsl_vector *d),

gdzie: A - jest macierzą układu

d - wektorem wyrazów wolnych $\vec{d}$, który w wyniku działania funkcji zostanie zamieniony na rozwiązanie $\vec{m}$**.**

Na końcu dla funkcji danej wzorem (12) oraz dla n = 10 węzłów w przedziale **x** $\in [-5, 5]$**,** wyznaczyliśmy wartości drugich pochodnych za pomocą funkcji **wynacz_M** oraz za pomocą wzoru:

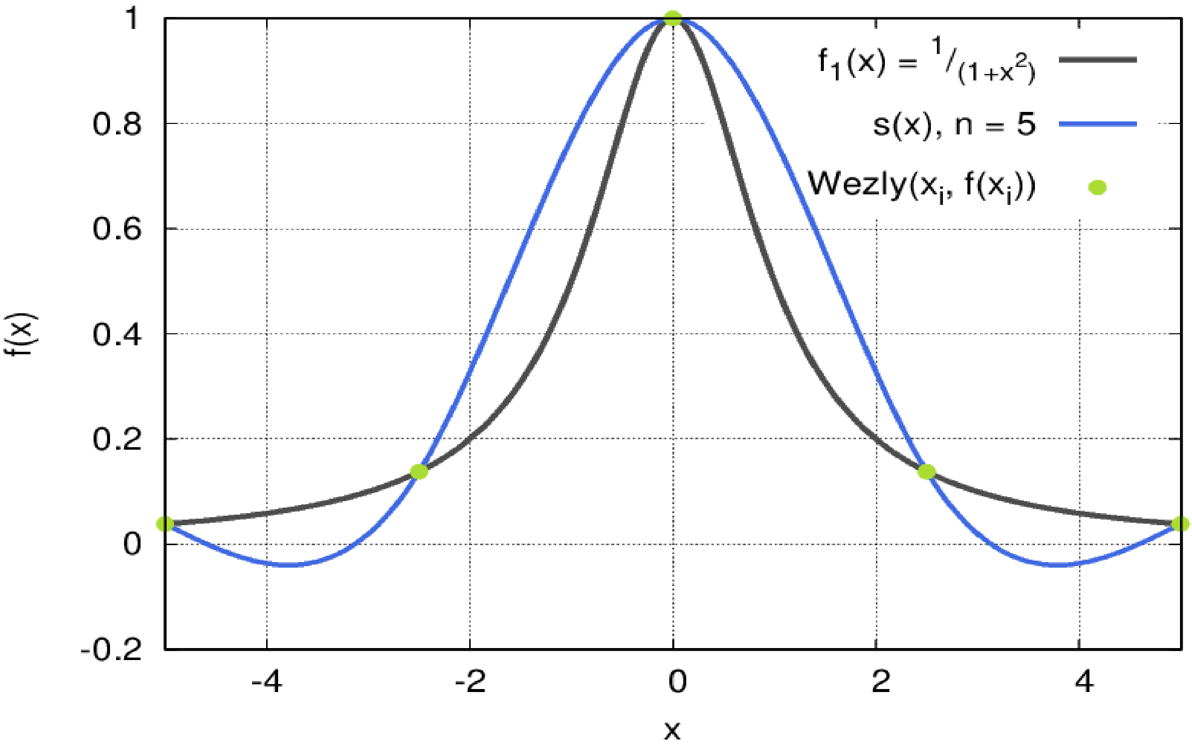
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f(x - \delta x) - 2f(x) + f(x + \delta x)}{\delta x} \qquad (15)$$

Gdzie: $\delta x = 0.01$

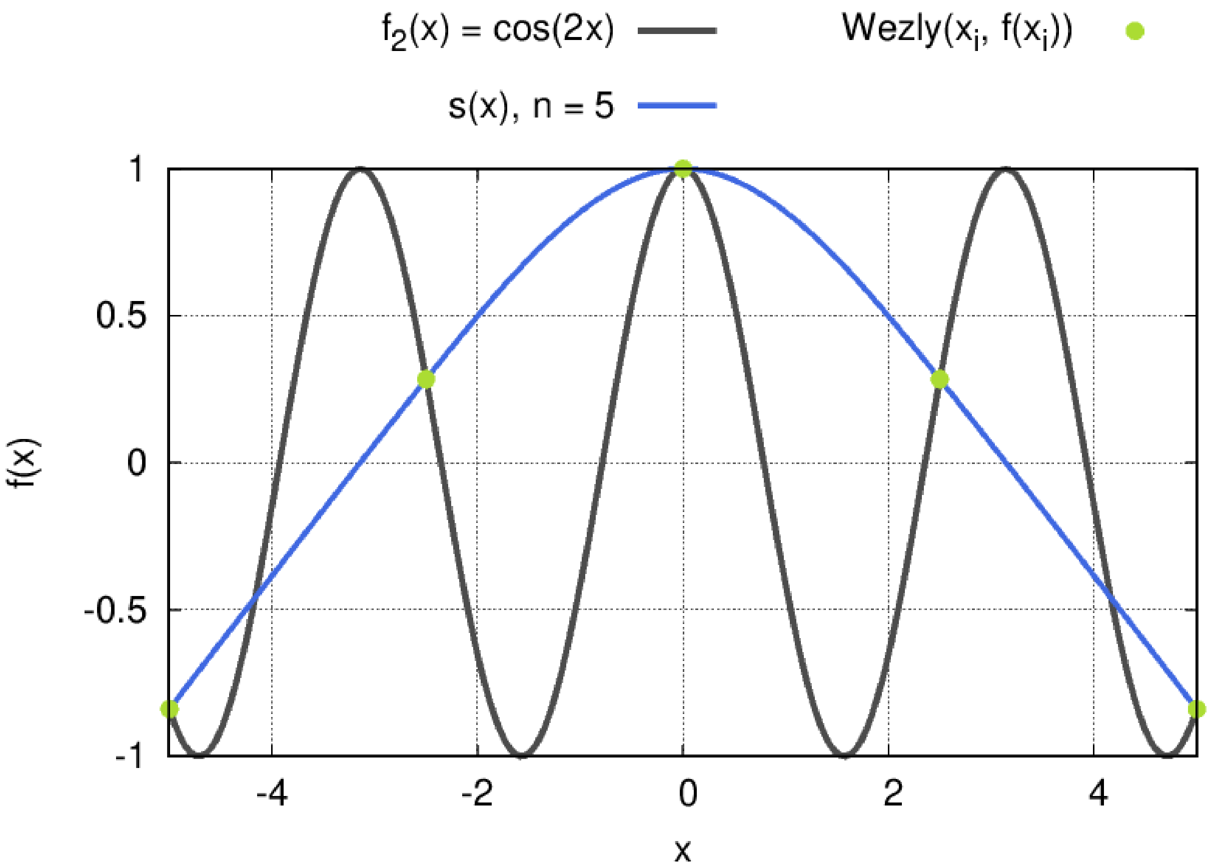
3. Wyniki

Wyniki działania programu zapisaliśmy do pliku, na podstawie którego wygenerowaliśmy wykresy w GnuPlot.

- **n = 5**



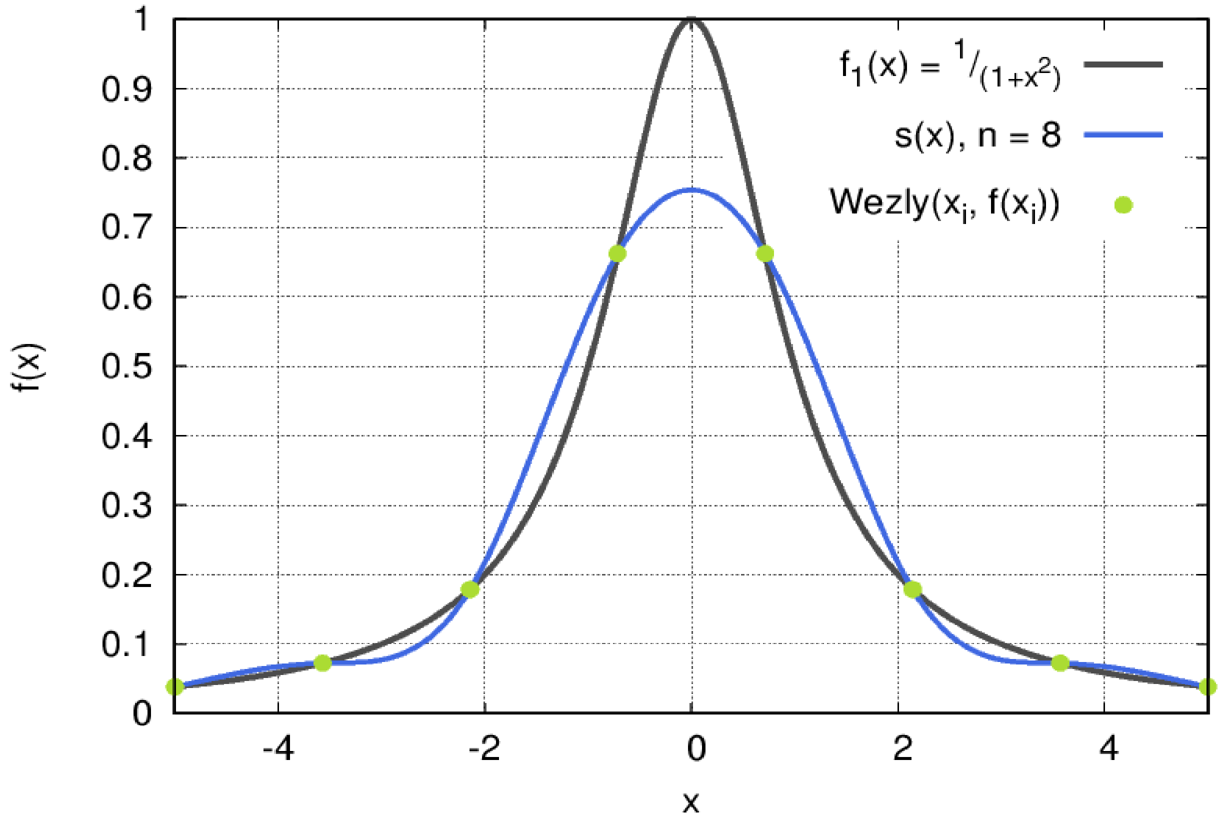
Wykres (1). Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla n = 5



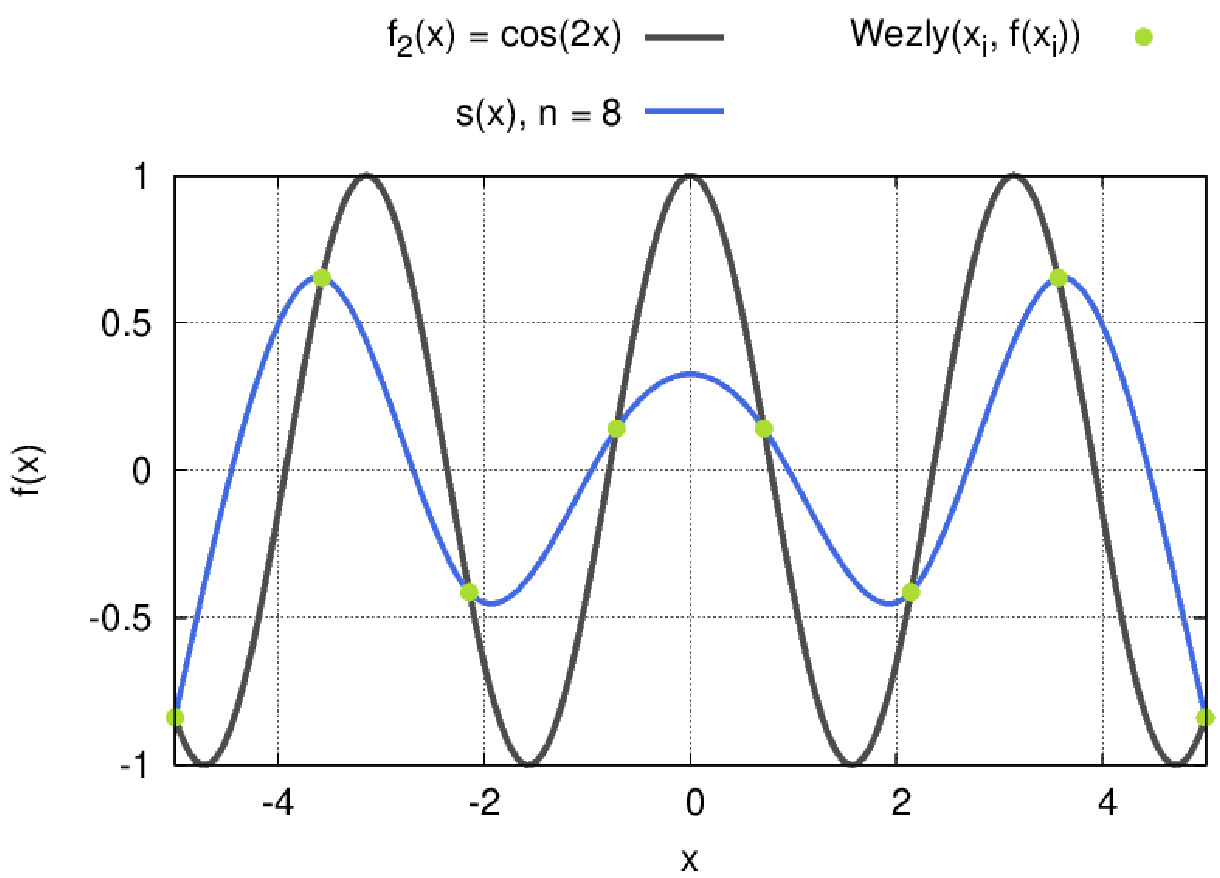
Wykres (2). Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla n = 5

Dla pięciu węzłów dopasowanie funkcji f_1 nie jest idealne, dla funkcji f_2 dopasowanie w ogóle jest nieudane.

- **n = 8**



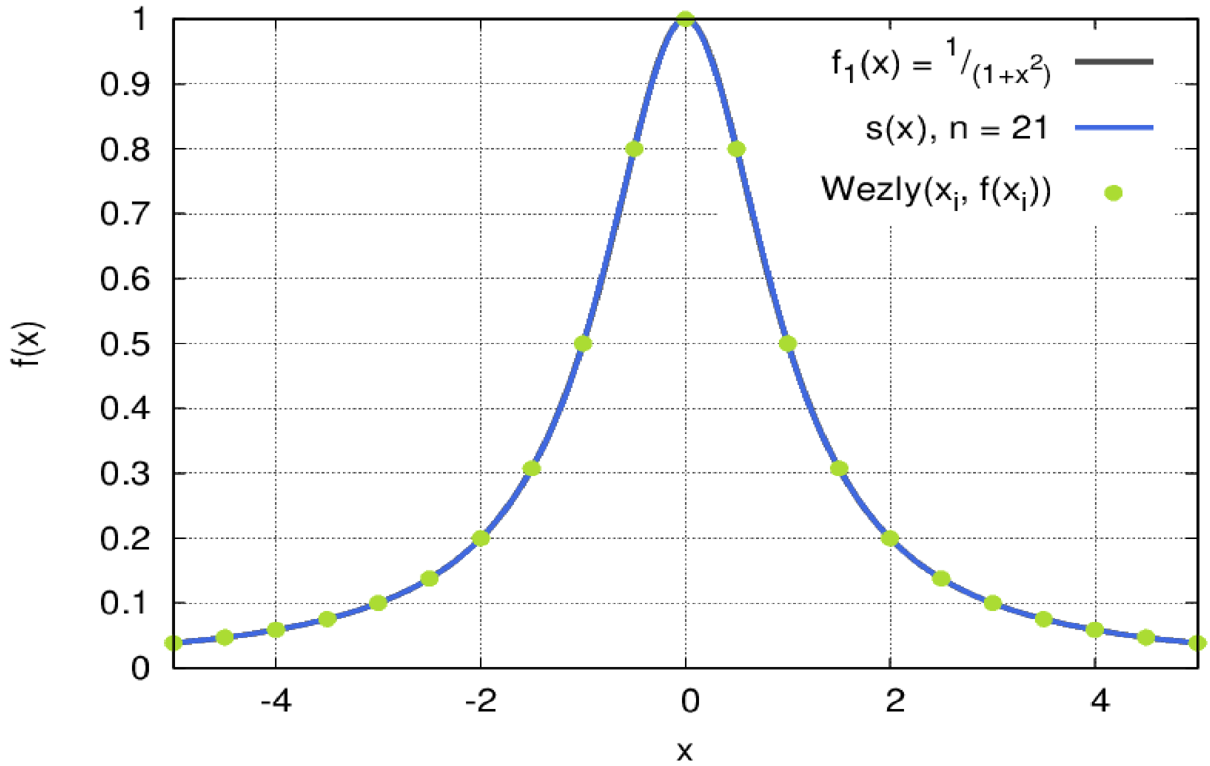
Wykres (3). Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla n = 8



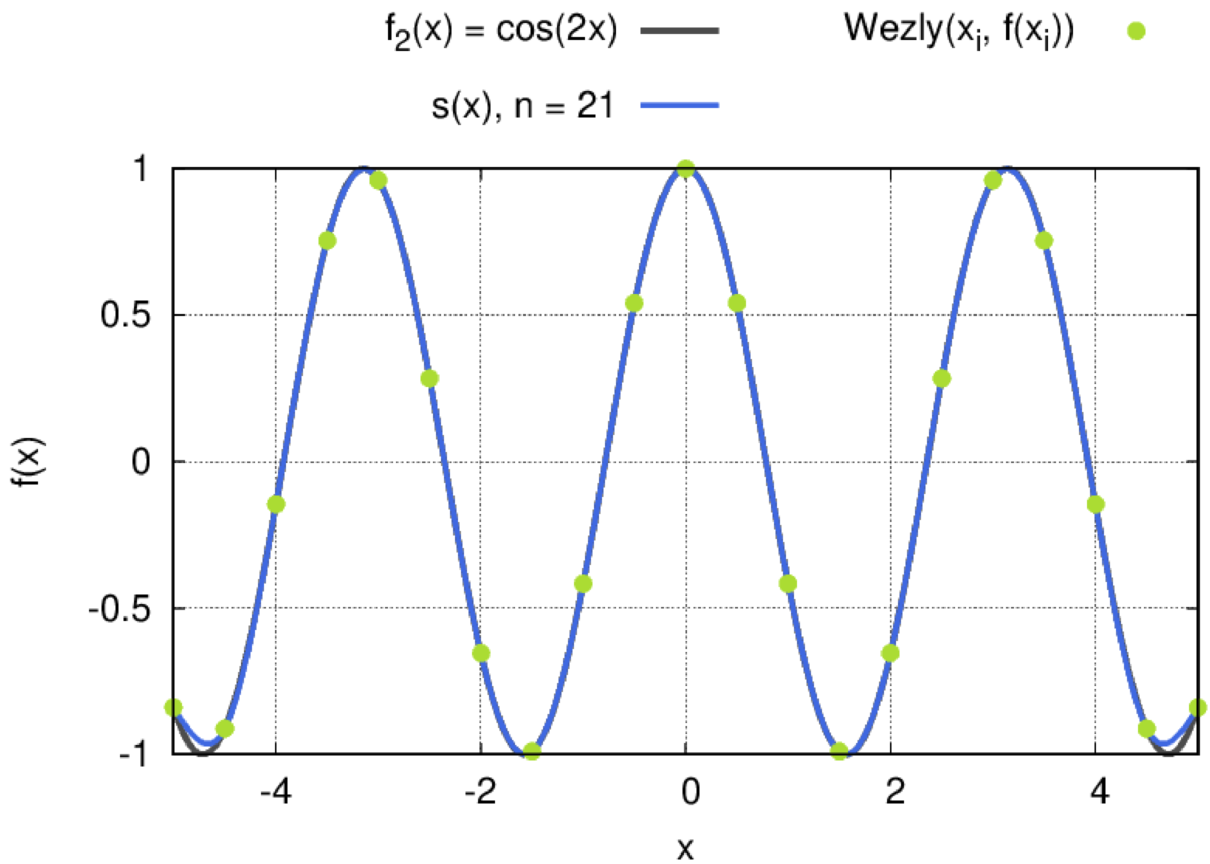
Wykres (4). Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla n = 8

Dla funkcji f_1 zwiększenie liczby węzłów do 8 nie poprawiło sytuacji, dla funkcji f_2 dokładność jest już lepsza, ale nie jest to jeszcze dopasowanie którego oczekujemy.

- **n = 21**

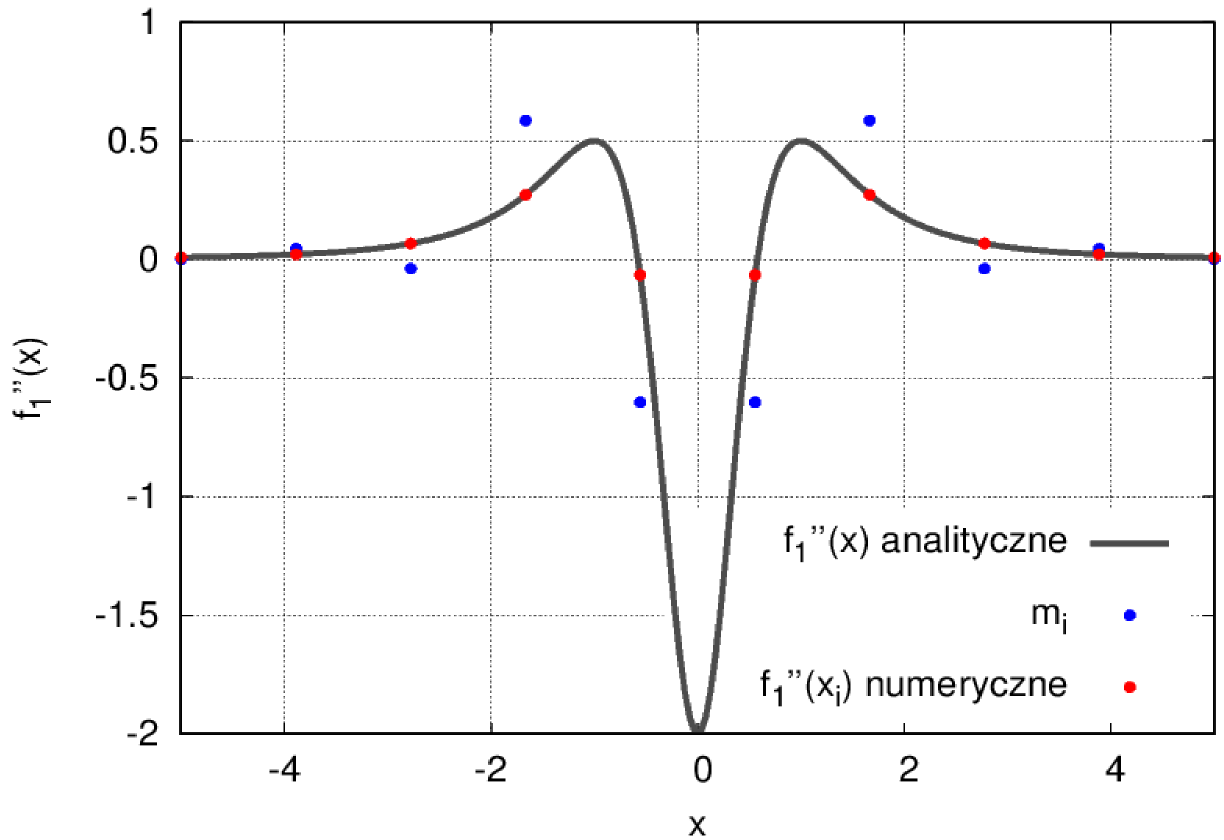


Wykres (5). Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla n = 21



Wykres (6). Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla n = 21

Dla funkcji $f_1$oraz f_2 zwiększenie liczby węzłów do 21 poprawiło sytuację. Teraz wykresy funkcji oraz ich dopasowanie pokrywają się ze sobą.



Wykres(7). Wartości drugich pochodnych wyznaczone analityczne oraz numeryczne(n=10)

4.Wnioski

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach pozwala osiągnąć dokładną interpolację funkcji. Im większa ilość węzłów tym dokładniejsze nasze wyniki. Chociaż dla funkcji f_2 oraz ilości węzłów równej 21 nie udało się osiągnąć idealnego dopasowania. Na wykresie (6) widzimy, że na początku oraz na końcu jest rozbieżność wartości.