Vadym Semkovych
296669
22.04.2020

Sprawozdanie 6

Wyznaczanie zer wielomianu metodą siecznych

1. Wstęp teoretyczny

Metoda siecznych – metoda, która pozwala stosunkowo szybko znaleźć pierwiastek dowolnej funkcji w zadanym przedziale poszukiwań [**a,b**]. Aby można było zastosować metodę, funkcja musi spełniać kilka warunków początkowych:

- Funkcja musi być określona w przedziale [**a, b**];
- Funkcja musi być ciągła w przedziale [**a, b**];
- Na krańcach przedziału [**a, b**] funkcja musi mieć różne znaki

Metoda siecznych jest modyfikacją metody Regula Falsi. Prostą przeprowadza się przez dwa ostatnie przybliżenia x_k i x_{k-1} (metoda dwupunktowa).

Kolejne przybliżenia w metodzie siecznych wyznacza się według relacji rekurencyjnej:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (1)$$

Rząd metody numerycznej – liczba, która charakteryzuje szybkość, z jaką podana metoda znajduje rozwiązanie. Rząd metody siecznych jest równy: $\boldsymbol{p \approx 1.618}$.

2. Problem

Nasze zadanie polegało na znajdowaniu wszystkich pierwiastków równania nieliniowego:

$$f(x) = (x - 1.2)(x - 2.3)(x - 3.3)^2 \quad (2)$$

Najpierw korzystaliśmy z niemodyfikowanej metody siecznych, to znaczy że kolejne przybliżenia x_{k+1} liczyliśmy ze wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \quad (3)$$

Jako punkty startowe przyjmowaliśmy:

- $x_0 = 0.9, x_1 = 1.0$
- $x_0 = 1.7, x_1 = 1.75$
- $x_0 = 3.7, x_1 = 3.65$

Następnie zmodyfikowaliśmy naszą metodę. Funkcję $f(x)$ zastępujemy funkcją $u(x)$:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (4)$$

Kolejne przybliżenia zdefiniowane są następująco:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{u(x_k) - u(x_{k-1})} u(x_k) \quad (5)$$

Pochodną funkcji przybliżyliśmy ilorazem różnicowym:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (6)$$

Obliczenia wykonaliśmy dla: Δx = 0.1 oraz Δx = 0.001.

3. Wyniki

Tabele przybliżeń miejsc zerowych wyszukiwanych niemodyfikowaną metodą siecznych; w kolumnach kolejno: $\boldsymbol{k}$ – numer iteracji, $\boldsymbol{x_{k+1}}$ – nowe przybliżenie miejsca zerowego w danej iteracji, $\boldsymbol{\varepsilon_{k+1}}$ – różnica między dwoma ostatnimi przybliżeniami, $\mathbf{f}(\boldsymbol{x_{k+1}})$ – wartość funkcji w punkcie $\boldsymbol{x_{k+1}}$.

k	x_{k+1}	ε_{k+1}	$f(x_{k+1})$
1	1.13177	0.131769	0.374736
2	1.18111	0.0493456	0.0948721
3	1.19784	0.0167279	0.0105107
4	1.19993	0.00208415	0.000358444
5	1.2	$7.35846 \cdot 10^{-5}$	$1.43563 \cdot 10^{-6}$
6	1.2	$2.95904 \cdot 10^{-7}$	$1.97418 \cdot 10^{-10}$

Tabela 1. Pierwsze miejsce zerowe: x = 1.2 (dla x_0 = 0.9, x_1 = 1.0)

k	x_{k+1}	ε_{k+1}	$f(x_{k+1})$
1	2.63105	0.88105	0.212
2	2.43208	0.198968	0.122586
3	2.1593	0.272784	−0.17563
4	2.31995	0.160652	0.0214606
5	2.30246	0.0174929	0.00269569
6	2.29994	0.00251296	$-6.13175 \cdot 10^{-5}$
7	2.3	$5.58899 \cdot 10^{-5}$	$1.65087 \cdot 10^{-7}$
8	2.3	$1.5007 \cdot 10^{-7}$	$1.00372 \cdot 10^{-1}$

Tabela 2. Drugie miejsce zerowe: x = 2.3 (dla x_0 = 1.7, x_1 = 1.75)

k	x_{k+1}	ε_{k+1}	$f(x_{k+1})$
1	3.51916	0.130842	0.135802
2	3.45319	0.0659641	0.0609795
3	3.39943	0.0537603	0.0239082
4	3.36476	0.0346713	0.00966736
5	3.34123	0.0235366	0.00378918
6	3.32605	0.0151721	0.00148075
7	3.31632	0.00973224	0.000572969
8	3.31018	0.00614271	0.000220855
9	3.30633	0.00385286	$8.48219 \cdot 10^{-5}$
10	3.30392	0.00240241	$3.25142e \cdot 10^{-5}$
11	3.30243	0.00149333	$1.24463 \cdot 10^{-5}$
12	3.3015	0.000926181	$4.76059 \cdot 10^{-6}$
13	3.30093	0.00057368	$1.81991 \cdot 10^{-6}$
14	3.30058	0.000355037	$6.9551 \cdot 10^{-7}$
15	3.30036	0.000219611	$2.65747 \cdot 10^{-7}$
16	3.30022	0.000135798	$1.01527 \cdot 10^{-7}$
17	3.30014	$8.39552 \cdot 10^{-5}$	$3.87845 \cdot 10^{-8}$
18	3.30008	$5.18976 \cdot 10^{-5}$	$1.48155 \cdot 10^{-8}$
19	3.30005	$3.20784 \cdot 10^{-5}$	$5.65929 \cdot 10^{-9}$
20	3.30003	$1.98271 \cdot 10^{-5}$	$2.16172 \cdot 10^{-9}$
21	3.30002	$1.22544 \cdot 10^{-5}$	$8.25718 \cdot 10^{-10}$
22	3.30001	$7.57385 \cdot 10^{-6}$	$3.154 \cdot 10^{-10}$
23	3.30001	$4.68098 \cdot 10^{-6}$	$1.20473 \cdot 10^{-10}$
24	3.3	$2.89304 \cdot 10^{-6}$	$4.60167 \cdot 10^{-11}$
25	3.3	$1.78801 \cdot 10^{-6}$	$1.75769 \cdot 10^{-11}$
26	3.3	$1.10505 \cdot 10^{-6}$	$6.71378 \cdot 10^{-12}$
27	3.3	$6.82963 \cdot 10^{-7}$	$2.56444 \cdot 10^{-12}$

Tabela 3. Trzecie miejsce zerowe: x = 3.3 (dla x_0 = 3.7, x_1 = 3.75)

Tabele przybliżeń dwukrotnego miejsca zerowego $x = 3.3$, wyszukiwanego modyfikowaną metodą siecznych; w kolumnach kolejno: $\boldsymbol{k}$ – numer iteracji**,** $\boldsymbol{x_{k+1}}$ – nowe przybliżenie miejsca zerowego w danej iteracji, $\boldsymbol{\varepsilon_{k+1}}$ – różnica między dwoma ostatnimi przybliżeniami, $\mathbf{f}(\boldsymbol{x_{k+1}})$ – wartość funkcji w punkcie $\boldsymbol{x_{k+1}}$**.**

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_{k+1}}$	$\boldsymbol{\varepsilon_{k+1}}$	$\boldsymbol{f(x_{k+1})}$
1	3.25065	0.399349	0.0047475
2	3.32054	0.0698935	0.000913445
3	3.30675	0.0137991	$9.65125 \cdot 10^{-5}$
4	3.30297	0.00377639	$1.85962 \cdot 10^{-5}$
5	3.30161	0.00136042	$5.44866 \cdot 10^{-6}$
6	3.30091	0.000694918	$1.7565 \cdot 10^{-6}$
7	3.30054	0.00037378	$6.13227 \cdot 10^{-7}$
8	3.30032	0.000215585	$8.17992 \cdot 10^{-7}$
9	3.3002	0.000127248	$8.17992 \cdot 10^{-8}$
10	3.30012	$7.66162 \cdot 10^{-5}$	$3.06083 \cdot 10^{-8}$
11	3.30007	$4.65704 \cdot 10^{-5}$	$1.15467 \cdot 10^{-8}$
12	3.30005	$2.84972 \cdot 10^{-5}$	$4.37654 \cdot 10^{-9}$
13	3.30003	$1.75031 \cdot 10^{-5}$	$1.6638 \cdot 10^{-9}$
14	3.30002	$1.07765 \cdot 10^{-5}$	$6.33659 \cdot 10^{-10}$
15	3.30001	$6.64457 \cdot 10^{-6}$	$2.416 \cdot 10^{-10}$
16	3.30001	$4.10062 \cdot 10^{-6}$	$9.21802 \cdot 10^{-11}$
17	3.3	$2.53205 \cdot 10^{-6}$	$3.51855 \cdot 10^{-11}$
18	3.3	$1.56403 \cdot 10^{-6}$	$1.34339 \cdot 10^{-11}$
19	3.3	$9.66291 \cdot 10^{-7}$	$5.12996 \cdot 10^{-12}$

Tabela 4. Punkty startowe: x_0 = 3.7, x_1 = 3.75 iloraz różnicowy obliczany z krokiem Δx = 0.1

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_{k+1}}$	$\boldsymbol{\varepsilon_{k+1}}$	$\boldsymbol{f(x_{k+1})}$
1	3.24179	0.408215	0.00651669
2	3.31242	0.0706299	0.000329644
3	3.30056	0.0118593	$6.49539 \cdot 10^{-7}$
4	3.3	0.000560219	$3.87543 \cdot 10^{-11}$
5	3.3	$5.18779 \cdot 10^{-6}$	$1.67059 \cdot 10^{-12}$
6	3.3	$4.46132 \cdot 10^{-7}$	$4.17323 \cdot 10^{-13}$

Tabela 5. Punkty startowe: x_0 = 3.7, x_1 = 3.75 iloraz różnicowy obliczany z krokiem Δx = 0.001

4. Wnioski

Korzystając z metody siecznych znaleźliśmy pierwiastki równania (2). Dla pierwiastków jednokrotnych zwykła metoda siecznych jest bardzo skuteczna, ale już dla pierwiastków r-krotnych ($r \geq 2$) efektywność tej metody maleje. Dla pierwiastków r-krotnych korzystaliśmy z modyfikowanej metody siecznych, gdzie funkcję f(x) zastępowaliśmy funkcją u(x) (4). Pozwala to nam sprowadzić problem pierwiastka wielokrotnego funkcji f(x) do problemu pierwiastka jednokrotnego funkcji u(x). Jak widzimy w tabeli 4-5 dostaliśmy różną ilość iteracji dla jednakowych punków startowych. Przyczyną tego jest różna wartość Δx, im mniejsze Δx, tym iloraz różnicowy dokładniej przybliża pochodną, więc dostajemy dokładniejsze wyniki.