Vadym Semkovych
296669
27.05.2020

Sprawozdanie 12

Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowania przy użyciu wzorów: trapezów i 3/8

1. Wstęp teoretyczny

Całkowanie numeryczne - metoda numeryczna polegająca na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych.

Metoda trapezów - polega na tym, że przybliżamy funkcję podcałkową $y = f(x)$ prostą, to znaczy wielomianem pierwszego stopnia.
Wzór przybliżony w metodzie trapezów ma następującą postać:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) \qquad (1)$$

Metoda $\frac{3}{8}$ - polega na tym, że przybliżamy funkcję podcałkową $y = f(x)$ wielomianem trzeciego stopnia.
Wzór przybliżony w metodzie $\frac{3}{8}$ ma następującą postać:

$$S = \sum_{i=0}^{\frac{N}{3}-1} \frac{3h}{8}(f_{3i} + 3f_{3i+1} + 3f_{3i+2} + f_{3i+3}) \qquad (2)$$

Ekstrapolacja Richardsona - proces rekurencyjnego wyznaczania pewnej wielkości (pochodnej, całki). Metoda ta pozwala poprawić zbieżność wyniku. Kroki naszej metody możemy zapisać w postaci tablicy trójkątnej:

$$\begin{array}{ccccc}
D_{0,0} & & & & \\
D_{1,0} & D_{1,1} & & & \\
D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
D_{n,0} & D_{n,1} & D_{n,2} & \dots & D_{n,n}
\end{array}$$

Pierwsza kolumna jest wynikiem pewnej metody. Wartości pozostałych kolumn obliczamy za pomocą wzoru:

$$D_{n,k} = \frac{4^k D_{n,k-1} - D_{n-1.k-1}}{4^k - 1} \qquad (3)$$

2. Problem

Na laboratorium trzeba było zrealizować dwie metody obliczania całek numerycznych dla funkcji $f(x)$ oraz zaprogramować metodę ekstrapolacji Richardsona. Przedział całkowania to [0, 1].

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x^2 + x + 0.1) \cdot \sin(18x) \quad (4)$$

Najpierw dla metody trapezów wyznaczaliśmy elementy tablicy ekstrapolacji D dla ustalonego **n = 8**. Elementy pierwszej kolumny $D_{w,0}$ liczyliśmy następująco:

- Szerokość podprzedziału definiowaliśmy jako $h_w = \frac{b-a}{2^w}$. $w = 0,1,2, \dots, n$.
- Liczba podprzedziałów w danym wierszu była równa $N = 2^w$.
- Element tablicy $D_{w,0}$ liczyliśmy za pomocą wzoru (1), gdzie $x_j = a + jh_w$.

Wartości elementów kolejnych kolumn liczyliśmy za pomocą wzoru (3).

Następnie to samo robiliśmy dla metody $\frac{3}{8}$. Tylko szerokość podprzedziału definiowaliśmy jako $h_w = \frac{b-a}{3 \cdot 2^w}$, liczba podprzedziałów w danym wierszu była równa $N = 3 \cdot 2^w$, a element tablicy $D_{w,0}$ liczyliśmy za pomocą wzoru (2).

3. Wyniki

```
-0.6117694336
-0.2257981458 -0.09714104986
0.2498393627 0.4083851989 0.4420869488
-0.1032662652 -0.2209681412 -0.2629250305 -0.2741156969
-0.1668213661 -0.1880063997 -0.1858089502 -0.1845848855 -0.1842337842
-0.1816363823 -0.1865747211 -0.1864792758 -0.1864899159 -0.1864973866 -0.1864995993
-0.1852783076 -0.1864922827 -0.1864867868 -0.1864869061 -0.1864868942 -0.186486884 -0.1864868809
-0.1861850002 -0.1864872311 -0.1864868943 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896
-0.1864114378 -0.1864869169 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896
```

Rysunek 1: Tablica ekstrapolacji dla metody trapezów.

```
-0.3058917219
-0.004328765895 0.09619221944
-0.2011329205 -0.2667343053 -0.290929407
-0.1871546737 -0.1824952581 -0.1768793217 -0.1750690029
-0.1865258214 -0.186316204 -0.1865709337 -0.1867247688 -0.1867704777
-0.1864892885 -0.1864771108 -0.1864878379 -0.1864865189 -0.1864855846 -0.1864853061
-0.1864870449 -0.1864862971 -0.1864869095 -0.1864868948 -0.1864868962 -0.1864868975 -0.1864868979
-0.1864869053 -0.1864868588 -0.1864868962 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896
-0.1864868966 -0.1864868937 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896 -0.186486896
```

Rysunek 2: Tablica ekstrapolacji dla metody $\frac{3}{8}$.

4. Wnioski

Za pomocą metody trapezów oraz metody $\frac{3}{8}$ udało się nam policzyć całkę oznaczoną funkcji f(x). $D_{n,n}$ – to najlepsze przybliżenie wartości całki. Zgodnie z teorią metoda $\frac{3}{8}$ powinna działać szybciej ale na rysunkach (1) oraz (2) nie widzimy dużej różnicy, byłoby to bardziej oczywiste po zwiększeniu liczby **n**.