Vadym Semkovych
296669
06.05.2020

Sprawozdanie 9

Aproksymacja wielomianowa

1. Wstęp teoretyczny

Aproksymacja liniowa funkcji $f(x)$ (aproksymowanej) polega na wyznaczeniu współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots a_m$ funkcji aproksymującej:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_2(x) + a_2\varphi_3(x) \dots + a_m\varphi_m(x)$$

Gdzie: $\varphi_i(x)$ - są funkcjami bazowymi (m+1) wymiarowej podprzestrzeni liniowej X_{m+1} ($\mathrm{X}_{m+1} \in \mathrm{X}$).
Żądamy aby funkcja $F(x)$ spełniała warunek:

$$\|f(x) - F(x)\| = minimum$$

Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu. W naszym przypadku korzystamy z podprzestrzeni wielomianów stopnia **m** z następującą bazą:

$$1, x, x^2, \dots, x^m$$

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów.
Warunek minimum przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m-1} a_i x_j^i\right] x_j^k = 0, \quad k = 0,1,2,\dots,m-1 \quad (1)$$

Po zmianie kolejności sumowania:

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\, x_j^k = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j^{i+k}\right) \quad (2)$$

Powyższe równanie można zapisać w postaci:

$$r_k = \sum_{i=0}^{m-1} a_i g_{ik} \quad (3)$$

Gdzie:

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j^{i+k} \quad (4)$$

$$r_k = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\, x_j^k \quad (5)$$

Jeśli uwzględnimy wszystkie elementy bazy k to dostaniemy układ równań:

$$\mathbf{Ga} = \mathbf{r} \qquad (6)$$

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy współczynniki a_i.

2. Problem

Najpierw zajęliśmy się aproksymacją funkcji która ma następujący wzór:

$$g(x) = \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \ (7)$$

Gdzie: $a_0 = -\frac{x_0^2}{2\sigma^2}, a_1 = \frac{x_0}{\sigma^2}, a_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}, x_0 = 2, \sigma = 4.$
Jeśli zlogarytmujemy funkcję $g(x)$ to otrzymamy zależność wielomianową:

$$f(x) = \ln(g(x)) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ (8)$$

Którą możemy aproksymować w bazie jednomianów. Wybieramy 4 elementową bazę $\{\varphi_i\} = 1, x, x^2, x^3$ i szukamy kombinacji liniowej:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m=3} bx^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (9)$$

aby utworzyć funkcję $G(x)$ będącą przybliżeniem funkcji $g(x)$:

$$g(x) \approx G(x) = \exp(F(x)) = \exp(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) \qquad (10)$$

Aby znaleźć współczynniki b_0, b_1, b_2, b_3 skorzystaliśmy ze wzorów (2, 3) wymienionych we wstępie teoretycznym(zamiast a_i używamy b_i). Dalej korzystając ze wzorów (4 oraz 5) uzupełniliśmy g_{ik} i r_k odpowiednio(we wzorze (5) korzystamy z funkcji $f(x)$ (8)). Na końcu otrzymaliśmy układ równań jak we wzorze (6). Aby rozwiązać ten układ korzystaliśmy z funkcji biblioteki **GSL:**

gsl_linalg_HH_svx (gsl_matrix *G, gsl_vector *r),

która w wyniku daje nam współczynniki b_i.
Aproksymację wykonaliśmy dla n = 11 równoodległych węzłów na przedziale x $\in [-3\sigma + x_0, 3\sigma + x_0]$.

Następnie co trzeba było zrobić, to przeprowadzić aproksymację funkcji (dla $\alpha = 0.5$):

$$g_2(x) = g(x)\big(1 + \delta(x)\big) \quad (11)$$

Gdzie:

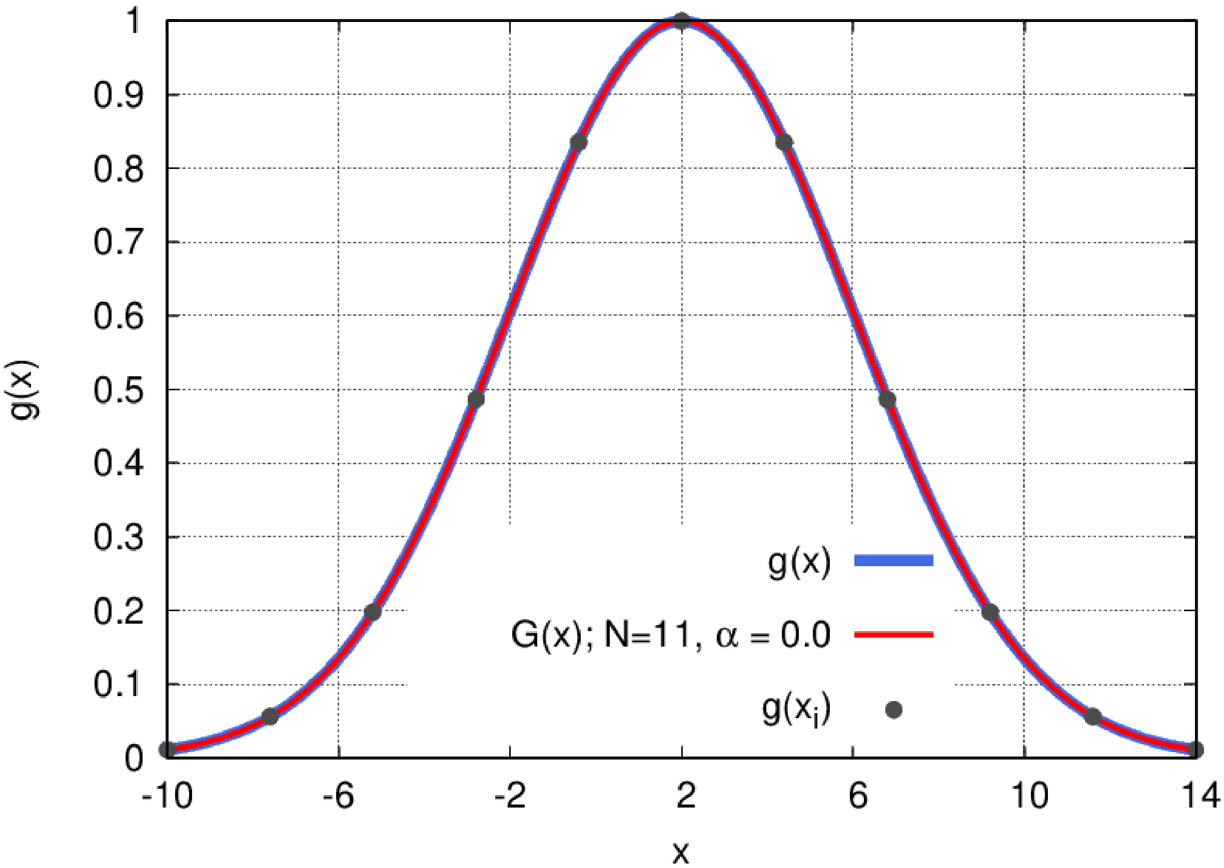
$$\delta(x) = \alpha(U - 0.5) \quad (12)$$

$$U = \frac{rand()}{RAND\_MAX + 1.0} \quad (13)$$

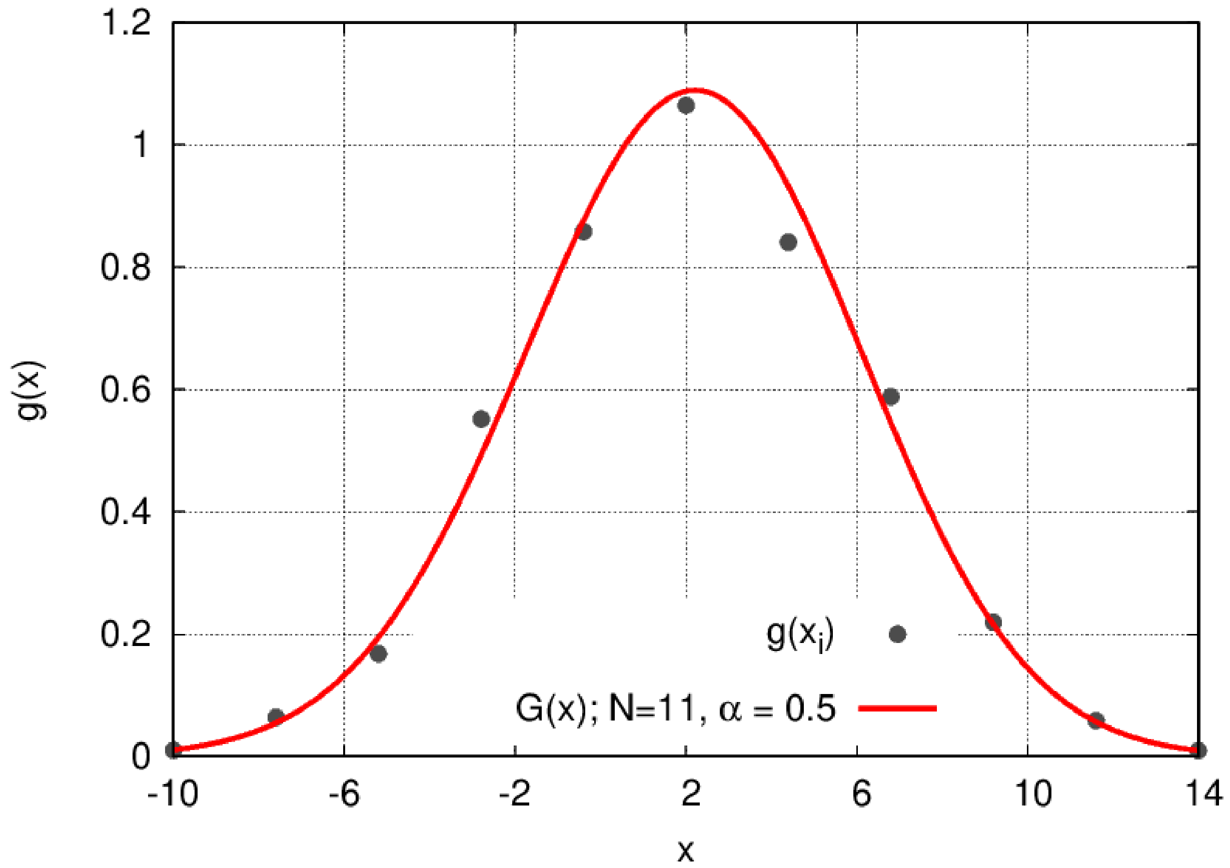
Wyznaczenie współczynników b_i jest identyczne jak dla funkcji $g(x)$ (7). Aproksymację wykonaliśmy dla liczby węzłów n = 11, 101 na przedziale x $\in [-3\sigma + x_0, 3\sigma + x_0]$.

3. Wyniki

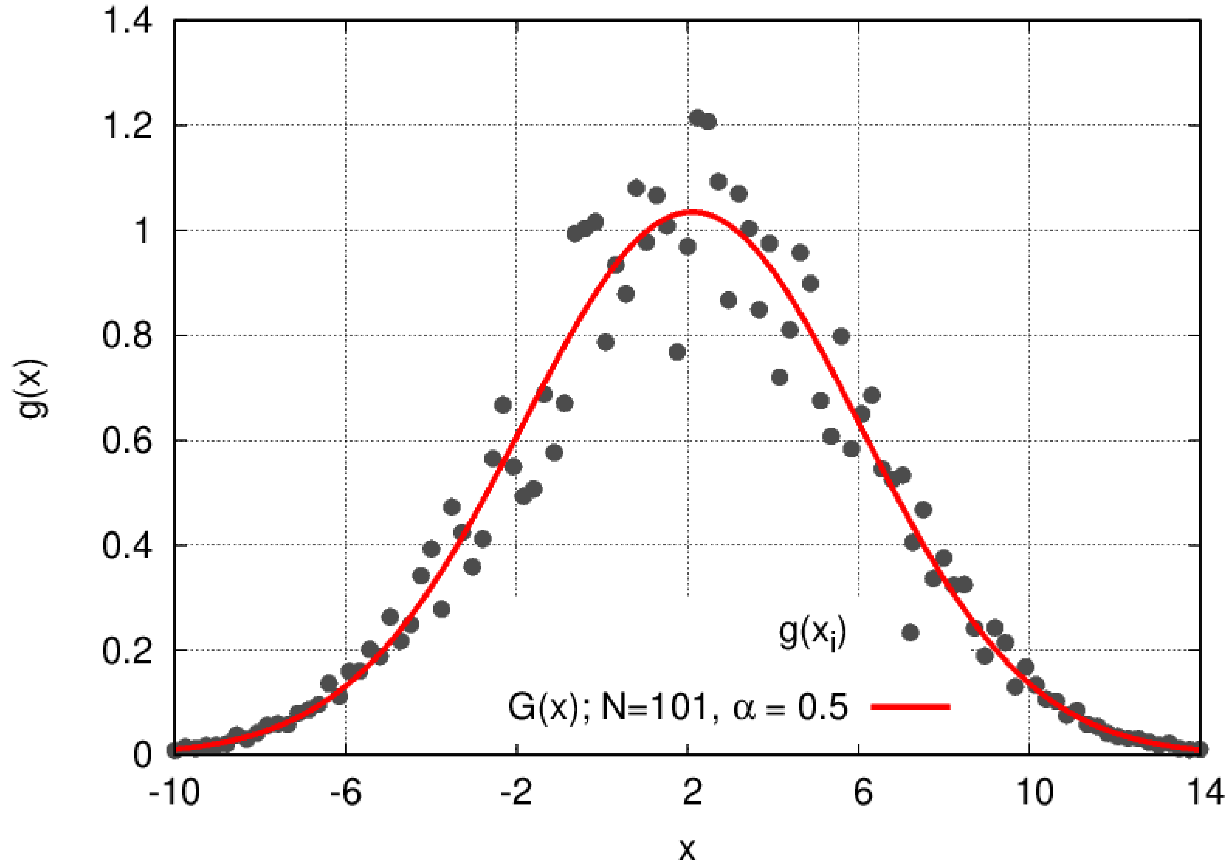
Wyniki działania programu zapisaliśmy do pliku, na podstawie którego wygenerowaliśmy wykresy w GnuPlot.



Wykres (1). Wykres funkcji g(x) oraz jej aproksymacji dla n = 11



Wykres (2). Aproksymacja funkcji $g_2(x)$ dla n = 11



Wykres (3). Aproksymacja funkcji $g_2(x)$ dla n = 101

4. Wnioski

Na podstawie uzyskanych wyników można zobaczyć, że metoda aproksymacji wielomianowej daje możliwość otrzymania bardzo dokładnej funkcji aproksymującej, co można zaobserwować na wykresie (1). Jeszcze jednym zadaniem aproksymacji wielomianowej jest “wygładzenie” losowych błędów (redukcja szumów). Na wykresach (2), (3) otrzymaliśmy żądany rezultat.