Vadym Semkovych
296669
02.04.2020

Sprawozdanie 4

Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej

1. Wstęp teoretyczny

Liczbę zespoloną **λ** nazywamy wartością własną macierzy kwadratowej **A**, jeżeli istnieje niezerowy wektor $\vec{\boldsymbol{x}}$, taki, że:

$$\mathbf{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\lambda}\,\vec{\boldsymbol{x}}.$$

Każdy niezerowy wektor $\vec{\boldsymbol{x}}$ spełniający powyższe równanie nazywamy wektorem własnym macierzy **A** odpowiadającym wartości własnej **λ**. Wektory i wartości własne opisują endomorfizm danej przestrzeni liniowej.

Macierz trójdiagonalna – macierz, która posiada wartości różne od zera jedynie na diagonali, oraz na wstędze wokół niej.

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & B_{32} & B_{33} & B_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & B_{43} & B_{44} & B_{45} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix}$$

2. Problem

Podczas laboratorium wyznaczaliśmy wektory i wartości własne macierzy symetrycznej $\mathbf{A}_{5\times5}$. Elementy macierzy zdefiniowane są następująco:

$$\mathbf{A}_{i,j} = \sqrt{i+j}, \qquad gdzie\ i,j = 1,2,3,4,5.$$

Dalej dokonaliśmy redukcji macierzy do postaci trójdiagonalnej($\mathbf{A} \to \mathbf{T}$). Macierz **T** jest podobna do macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})$. Korzystaliśmy z funkcji biblioteki **NR:**

tred2(float **A, int n, float *d, float *e),

gdzie: **A** – macierz wejściowa. Na wyjściu macierz **P**.
n – rozmiar macierzy.
d – n – elementowy wektor, w którym funkcja zapisuje elementy diagonalne szukanej macierzy trójdiagonalnej **T**.

e - n – elementowy wektor, w którym funkcja zapisuje elementy pozadiagonalne szukanej. macierzy trójdiagonalnej **T**.

Kolejne zadanie, to znajdowanie wartości i wektorów własnych macierzy **T.** Znowu korzystamy z funkcji biblioteki **NR:**

tqli(float *d, float *e, int n, float **Y),

gdzie: **d** - wektor elementów diagonalnych macierzy **T**. Na wyjściu: funkcja zapisuje w nim wartości własne **λ** macierzy **T**.

e - wektor elementów pozadiagonalnych macierzy **T**.

n - rozmiar macierzy.

Y - na wejściu: macierz jednostkowa. Na wyjściu: macierz, której kolumny przechowują kolejne. wektory własne macierzy **T**.

Dalej, po wykonaniu pewnych przekształceń(przedstawiono poniżej), trzeba było znaleźć wektory własne macierzy A.

$$\begin{aligned} T &= P^{-1}AP \\ Ty &= \lambda y \\ P^{-1}APy &= \lambda y \qquad P\cdot / \\ A(Py) &= \lambda(Py) \\ Ax &= \lambda x \\ x &= Py \end{aligned}$$

W naszym przypadku wystarczyło przemnożyć macierz **A(**ponieważ na wyjściu mamy macierz **P)** razy macierz **Y(**kolumny której przechowują. wektory własne macierzy **T).**

Na końcu sprawdziliśmy czy uzyskane tą metodą wektory własne są rzeczywiście wektorami własnymi macierzy **A** obliczając jej wartości własne za pomocą wzoru:

$$\beta_k = \frac{(x_k, Ax_k)}{(x_k, x_k)}$$

3. Wyniki

1) Macierz przekształcenia **P** (nadpisana macierz **A**):

$$P = \begin{bmatrix} 0.127995 & 0.473318 & 0.748056 & -0.447214 & 0 \\ -0.559029 & -0.639797 & 0.21169 & -0.483046 & 0 \\ 0.75337 & -0.341655 & -0.221449 & -0.516398 & 0 \\ -0.321774 & 0.499901 & -0.588694 & -0.547723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Wektory własne macierzy **T:**

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} -0.860161 \\ 0.371571 \\ -0.2162227 \\ -0.137207 \\ -0.23765 \end{bmatrix} \quad \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} -0.509986 \\ -0.618499 \\ 0.369873 \\ 0.234827 \\ 0.406723 \end{bmatrix} \quad \vec{y}_3 = \begin{bmatrix} -0.00604528 \\ -0.692329 \\ -0.436638 \\ -0.287573 \\ -0.497285 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_4 = \begin{bmatrix} 1.00407 \cdot 10^{-6} \\ 0.00861619 \\ 0.790691 \\ -0.332559 \\ -0.513943 \end{bmatrix} \quad \vec{y}_5 = \begin{bmatrix} -2.99203 \cdot 10^{-11} \\ 8.22916 \cdot 10^{-6} \\ -0.024372 \\ -0.856 \\ 0.5164 \end{bmatrix}$$

3) Wektory własne macierzy **A**:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.0346135 \\ 0.263629 \\ -0.656232 \\ 0.664969 \\ -0.23765 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.186354 \\ 0.645677 \\ -0.376067 \\ -0.49145 \\ 0.406723 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.526489 \\ 0.492809 \\ 0.477178 \\ -0.0704053 \\ -0.497285 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.744284 \\ 0.32251 \\ -0.00630781 \\ -0.279018 \\ -0.513943 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.364587 \\ 0.408323 \\ 0.447431 \\ 0.483203 \\ 0.5164 \end{bmatrix}$$

4) Wartości β_k $(Watrości\ własne\ macierzy\ A)$:

$$\beta_1 = -5.51343 \cdot 10^{-7}$$
$$\beta_2 = -7.36713 \cdot 10^{-5}$$
$$\beta_3 = -0.00511712$$
$$\beta_4 = -0.381893$$
$$\beta_5 = 12.2415$$

4. Wnioski

Macierzy **A** oraz **T** są podobne, co znaczy że mają takie same wartości własne. Wartości własne macierzy **T** są następujące:

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = -2.4575 \cdot 10^{-7}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_2 = -7.34517 \cdot 10^{-5}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_3 = -0.00511678$$
$$\boldsymbol{\lambda}_4 = -0.381893$$
$$\boldsymbol{\lambda}_5 = 12.2415$$

Widzimy że wartości β_k trochę się różnią od wartości $\boldsymbol{\lambda}_k$. Przyczyną tego może być błąd wynikający z obliczeń zmiennoprzecinkowych. Mimo to że wartości trochę się różnią można śmiało stwierdzić, ze nasza metoda numeryczna pozwala uzyskać zadowalające wyniki w obliczaniu wektorów i wartości własnych macierzy symetrycznej.