waVadym Semkovych
296669
25.03.2020

Sprawozdanie 3

Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej

1. Wstęp teoretyczny

Metoda największego spadku polega na przybliżaniu w każdym kroku wektora rozwiązań $\vec{x}$, jednocześnie zmniejszając wartości w wektorze reszt $\vec{r}$, dążąc do ich wyzerowania, działa w przypadku, gdy macierz $\boldsymbol{A}$ jest symetryczna i dodatnio określona.

Przybliżone rozwiązanie w $\boldsymbol{i} + \mathbf{1}$ iteracji ma postać:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + a_i\vec{v}_i$$

Jako $\vec{v}_i$ wybieramy kierunek gradientu $\boldsymbol{Q}$:

$$\nabla Q = A\vec{x}_i - \vec{b} = -\vec{r}_i$$

$$\vec{v}_i = -\vec{r}_i$$

W celu znalezienia współczynnika a_i obliczamy $Q(x_{i+1})$:

$$Q(\vec{x}_i - a_i\vec{r}_i) = -\frac{1}{2}\vec{x}_i^T\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{x}_i^T\vec{b} - \frac{1}{2}a_i^2\vec{r}_i^T A\vec{r}_i + a_i\vec{r}_i^T\vec{r}_i$$

i różniczkujemy je po parametrze wariacyjnym w celu znalezienia minimum:

$$\frac{dQ}{da_i} = \vec{r}_i^T\vec{r}_i + a_i\vec{r}_i^T A\vec{r}_i$$

$$a_i = -\frac{\vec{r}_i^T\vec{r}_i}{\vec{r}_i^T A\vec{r}_i}$$

Kolejne przybliżenie w metodzie największego spadku opisuje wyrażenie:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \frac{\vec{r}_i^T\vec{r}_i}{\vec{r}_i^T A\vec{r}_i}\vec{r}_i$$

Dla którego zachodzi warunek:

$$Q(\vec{x}_{i+1}) < Q(\vec{x}_i)$$

2. Problem

Nasze zadanie polegało na rozwiązaniu układu równań liniowych $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ metodą największego spadku. Elementy macierzy $\mathbf{A}_{n\times n}$(n = 1000) zdefiniowane są następująco(m = 5) :

$$A_{i,j} = \frac{1}{1+i+h}, \qquad gdy\ |i-j| \le m, \qquad i,j = 0,\dots,n-1$$
$$A_{i,j} = 0, \qquad gdy\ |i-j| > m$$

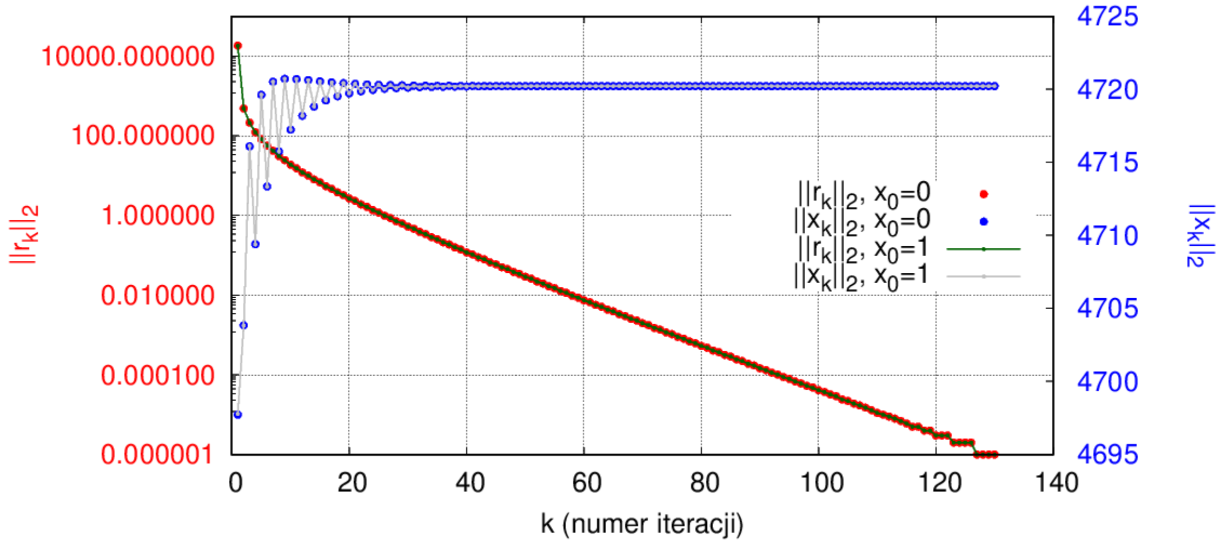
Następnie tworzymy wektor wyrazów wolnych $\vec{b}$. Jego elementy wypełniamy następująco:

$$b_i = i, \qquad i = 0,\dots,n-1$$

Następnie co trzeba było zrobić, to zaprogramować metodę największego spadku do rozwiązania układu równań liniowych $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ najpierw dla $\vec{x} = 0$, a następnie dla $\vec{x} = 1$. W każdej iteracji zapisywaliśmy do pliku: aktualny numer iteracji (**k**), wartość normy euklidesowej wektora reszt ($\|\vec{r}_k\|_2 = \sqrt{\vec{r}_k^T\vec{r}_k}$), wartość $\boldsymbol{a_k}$, wartość normy euklidesowej wektora rozwiązań ($\|\boldsymbol{x_k}\|_2 = \sqrt{\vec{x}_k^T\vec{x}_k}$).

3. Wyniki

Na podstawie otrzymanych danych wygenerowaliśmy wykres w programie GnuPlot.



Wykres1. Norma wektora reszt i rozwiązania.

Jeszcze dodatkowo obliczyliśmy czas wykonania programu dla metod: eliminacji zupełnej i największego spadku.
Metoda eliminacji zupełnej: 22 sekundy
Metoda największego spadku: 0.6 sekundy

4. Wnioski

Korzystając z metody największego spadku, udało się rozwiązać układ równań liniowych $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Dla $\vec{x} = \mathbf{0}$ **i** $\vec{x} = \mathbf{1}$ ilość iteracji jest jednakowa, więc postać wektora startowego na to nie wpływa. Metoda jest wygodna dla rozwiązywania dużych macierzy i działa dość szybko, można zaoszczędzić sporo pamięci potrzebnej do obliczeń, ale dla małych macierzy metody bezpośrednie są szybsze.