Vadym Semkovych
296669
10.06.2020

Sprawozdanie 14

Generowanie ciągu liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym w kuli 3D

1. Wstęp teoretyczny

Generatory liniowe.

Generatory liniowe tworzą ciąg liczb według schematu:

$$X_{n+1} = (a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + \cdots + a_k X_{n-k+1} + c) \, mod \, m \quad (1)$$

gdzie: $a_1, a_2, \dots, a_k, m, c$ – parametry generatora(ustalone liczby).

Generator multiplikatywny.

Generatorem multiplikatywnym nazywa się generator liniowy dla $c = 0$:

$$X_{i+1} = aX_{i-1} \, mod \, m \quad (2)$$

$$k_i = \left\lfloor \frac{aX_{i-1}}{m} \right\rfloor, i \ \geq 1$$

$$X_1 = aX_0 - \ mk_1$$

$$X_2 = a^2 X_0 - \ mk_2 - \ amk_1$$

$$X_3 = a^3 X_0 - \ mk_3 - amk_2 - a^2 mk_1$$

...

$$X_n = a^n X_0 - \ m(k_n + ak_{n-1} + \cdots + a^{n-1} k_1) \ (3)$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci:

$$X_n = a^n X_0 \, mod \, m \quad (4)$$

Skąd wynika, że wybór X_0 determinuje wszystkie liczby w generowanym ciągu (a i m są ustalone) – uzyskany ciąg liczb jest deterministyczny.

Metoda Boxa-Mullera – metoda generowania liczb losowych o rozkładzie normalnym, na podstawie dwóch wartości zmiennej o rozkładzie jednorodnym na przedziale (0,1).

Niech U_1oraz U_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednorodnym na (0,1). Niech zmienne r, θ dane w odpowiednim układzie współrzędnych biegunowych spełniają:

$$r^2 = -2lnU_1$$

$$\theta = 2\pi U_2 \quad (5)$$

Wówczas r, θ są niezależne. Połóżmy:

$$x = rcos\theta = \sqrt{-2lnU_1}\cos(2\pi U_2)$$

$$y = rsin\theta = \sqrt{-2lnU_1}\sin(2\pi U_2) \quad (6)$$

Wówczas zmienne losowe x, y są niezależne i o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym 1.

2. Problem

Pierwsze co trzeba było zrobić to wylosować $N = 2000$ liczb pseudolosowych z generatora multiplikatywnego (2) które należało unormować:

$$x_i = \frac{X_i}{m + 1.0} \quad (7)$$

Dla dwóch pierwszych przypadków przyjęliśmy następujące parametry:

- $U_1(0,1): a = 17, m = 2^{13} - 1, X_0 = 10$
- $U_2(0,1): a = 85, m = 2^{13} - 1, X_0 = 10$

W trzecim przypadku korzystaliśmy z generatora multiplikatywnego, który miał wzór:

$$X_i = (1176 \cdot X_{i-1} + 1476 \cdot X_{i-2} + 1776 \cdot X_{i-3})\ mod\ (2^{35} - 5) \quad (8)$$

gdzie parametry startowe są równe: $X_0 = X_{-1} = X_{-2} = 10$.
Wyniki działania trzech generatorów zapisaliśmy do pliku.

Kolejnym zadaniem było wykonanie rozkładu jednorodnego w kuli 3D: $K^3(0,1)$. Najpierw generowaliśmy cztery liczby losowe u_1, u_2, u_3, u_4 za pomocą generatora numer 3 (8). Następnie za pomocą metody Boxa-Mullera utworzyliśmy $N = 2000$ trzywymiarowych wektorów ($\vec{r_i} = [x_i, y_i, z_i]$) o rozkładzie normalnym. Współrzędne wektorów są dane następującymi wzorami:

$$x_i = \sqrt{-2ln(1 - u_1)}\cos(2\pi u_2)$$
$$y_i = \sqrt{-2ln(1 - u_1)}\sin(2\pi u_2)$$
$$x_i = \sqrt{-2ln(1 - u_3)}\cos(2\pi u_4)$$

Następnie trzeba było znormalizować współrzędne dzieląc każdą z nich przez długość wektora:

$$\|\vec{r_i}\|_2 = \sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2 + {z_i}^2} \quad (9)$$

Dalej chcemy aby punkty wektora $\vec{r_i}$ były rozłożone równomiernie w kuli. Aby tego dokonać losujemy kolejną liczbę u_5 z generatora numer 3 (8) i liczymy liczbę s_i według poniższego wzoru:

$$s_i = (u_5)^{\frac{1}{d}}, \quad d = 3$$

Następnie mnożymy każdą współrzędną wektora przez s_i.

Ostatnie co trzeba było zrobić to sprawdzić czy rozkład punktów w kuli jest jednorodny tj. czy gęstość losowanych punktów jest stała w obszarze kuli. W tym celu podzieliliśmy promień kuli na $K = 10$ podprzedziałów o równej długości, a następnie dla każdego punktu określiliśmy jego przynależność do konkretnego przedziału:

$$\Delta = \frac{1}{K}$$

$$j = (int)\frac{\|\vec{r_i}\|_2}{\Delta}, \quad j = 0,1, \dots K-1$$

Indeks j mówi nam w którym podprzedziale znajduje się dany punkt. Dalej liczymy gęstość (g_j) jako ilość liczb wpadających do danego przedziału podzieloną przez jego objętość:

$$R_j = \Delta \cdot (j+1)$$

$$R_{j-1} = \Delta \cdot j$$

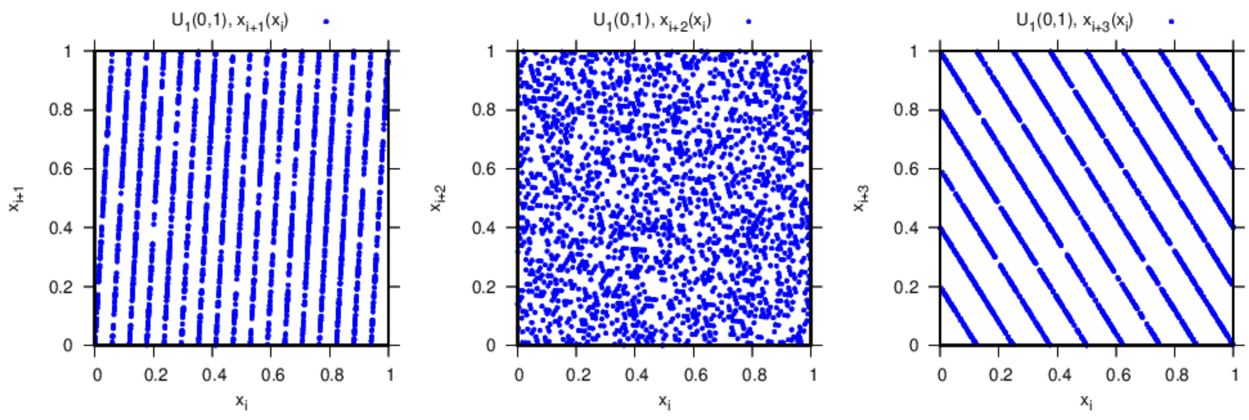
$$V_j = \frac{4}{3}\pi {R_j}^3$$

$$V_{j-1} = \frac{4}{3}\pi {R_{j-1}}^3$$

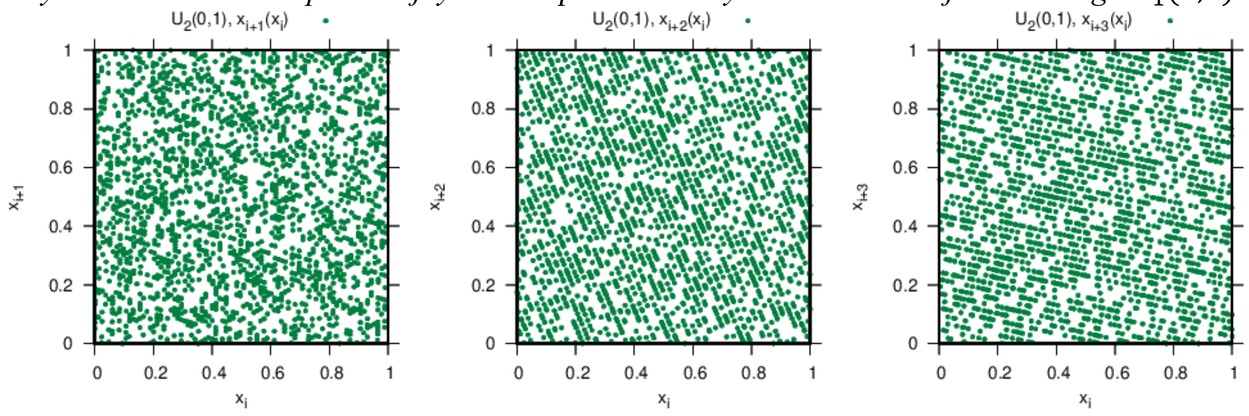
$$g_j = \frac{n_j}{V_j - V_{j-1}}$$

Obliczenia wykonaliśmy kolejno dla N = $2000, 10^4, 10^7$. Wyniki działania zapisaliśmy do pliku.

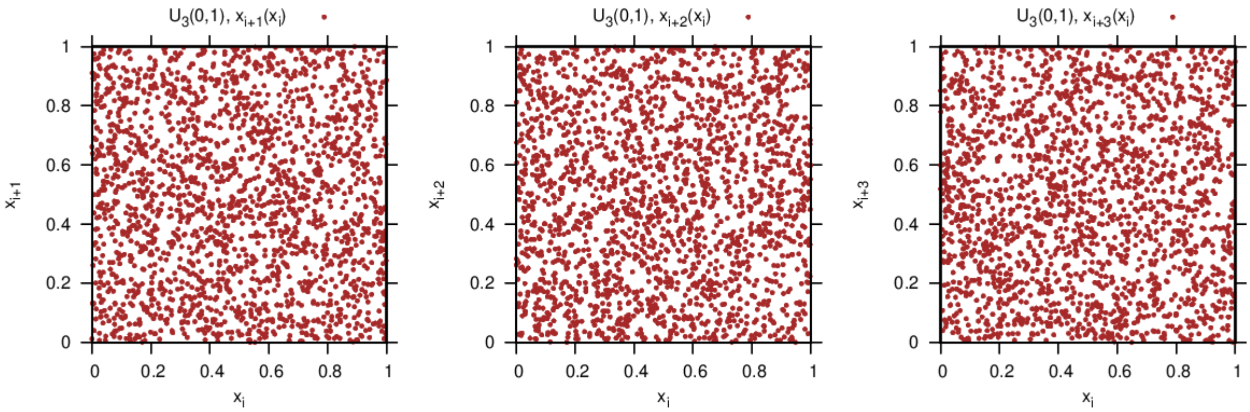
3. Wnioski



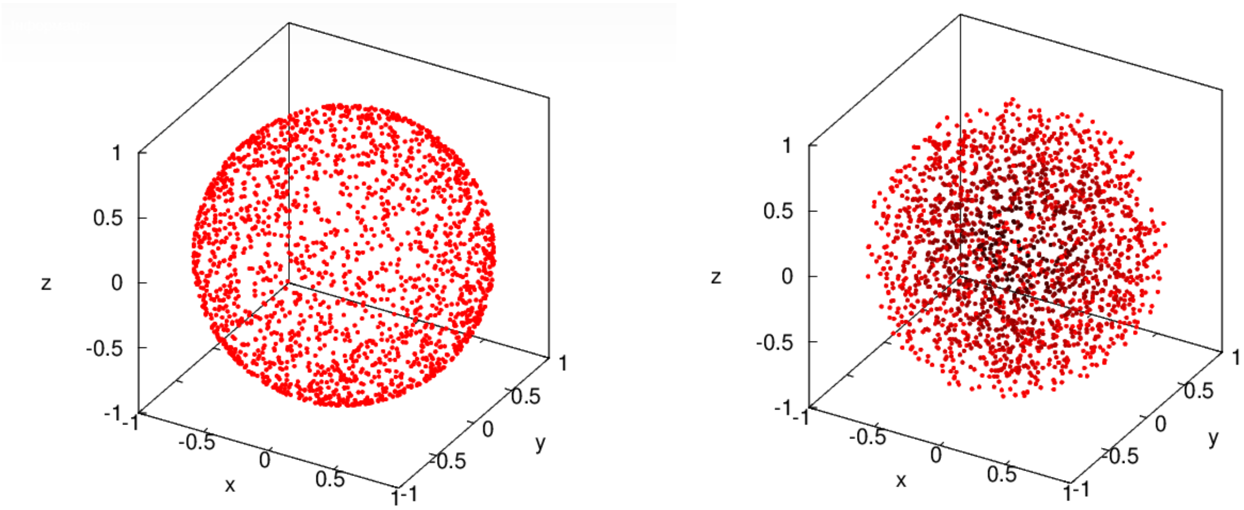
Rysunek 1: Zależność par kolejnych liczb pseudolosowych dla rozkładu jednorodnego $U_1(0,1)$



Rysunek 2: Zależność par kolejnych liczb pseudolosowych dla rozkładu jednorodnego $U_2(0,1)$

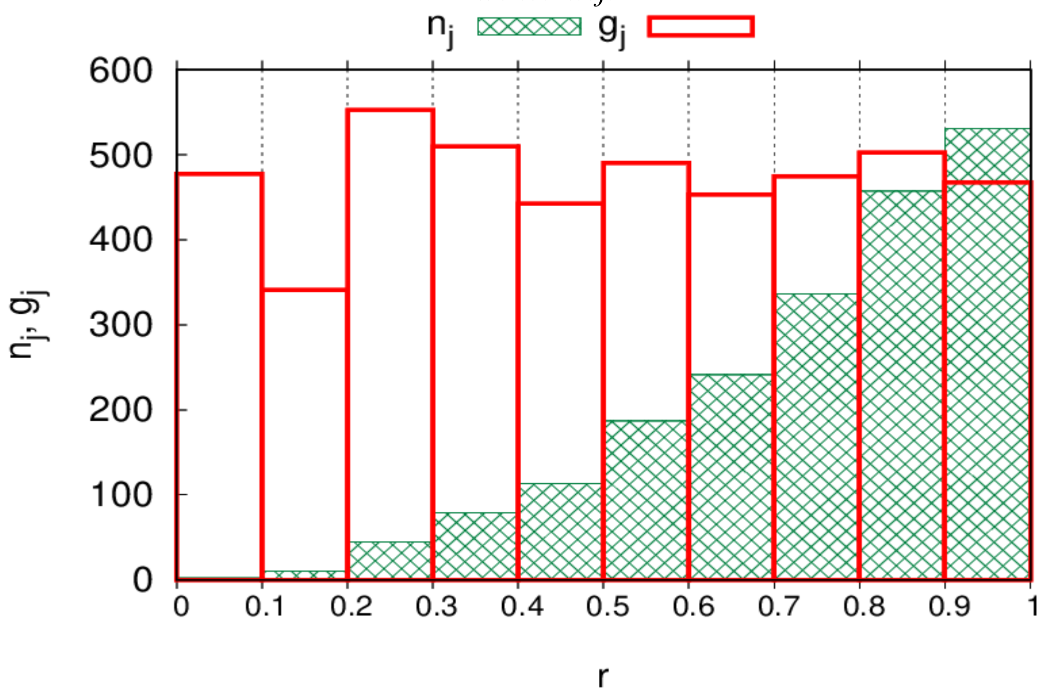


Rysunek 3: Zależność par kolejnych liczb pseudolosowych dla rozkładu jednorodnego $U_3(0,1)$

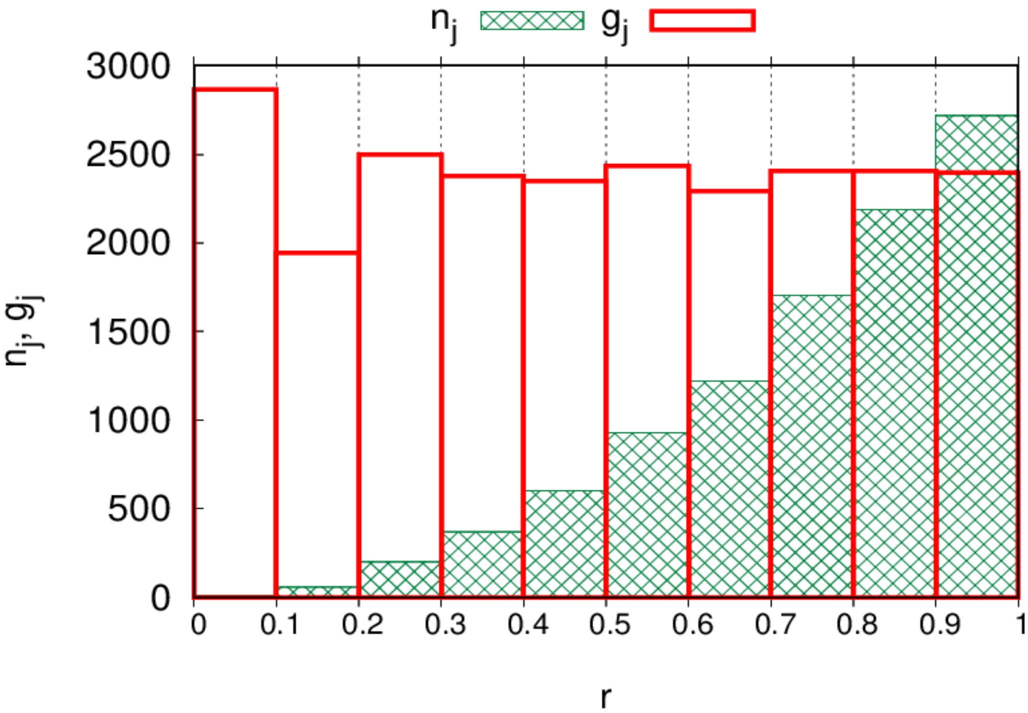


(a) (b)

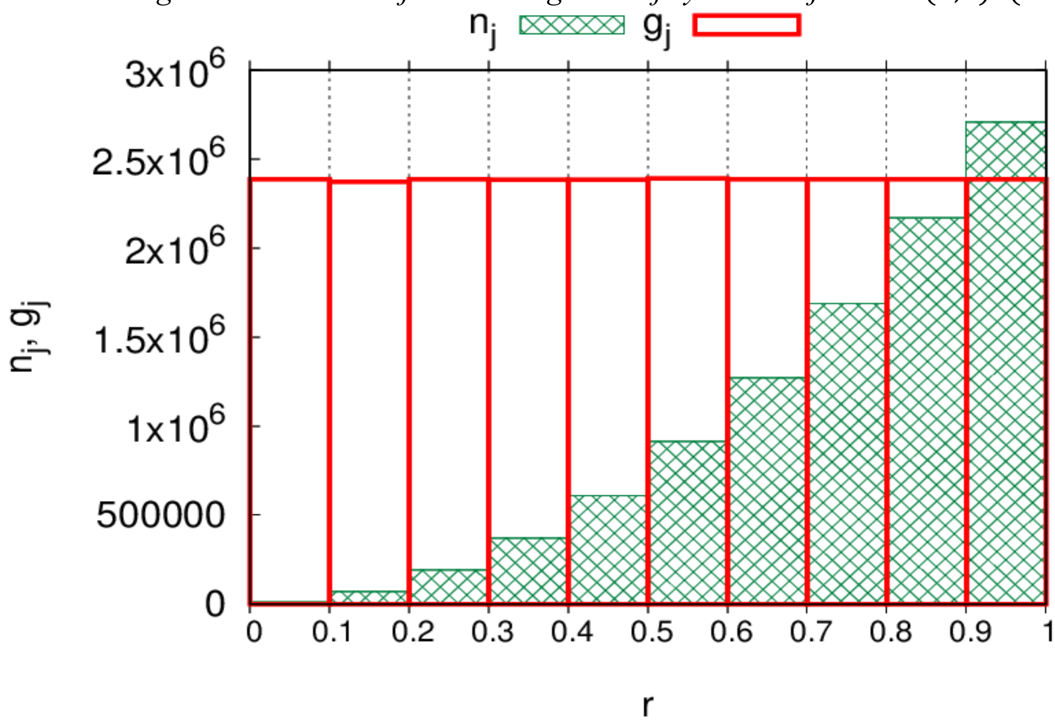
Rysunek 4: Rozkład wylosowanych punktów w trzech wymiarach dla (b) kuli o promieniu 1 oraz (a) sfery wokół niej.



Rysunek 5. Histogram dla rozkładu jednorodnego w trójwymiarowej kuli $K^3(0,1)$. $(N = 2000)$ n_j – liczba wylosowanych punktów znajdujących się w j-tym podzbiorze, g_j – gęstość wylosowanych punktów



Rysunek 6. Histogram dla rozkładu jednorodnego w trójwymiarowej kuli $K^3(0,1)$. $(N = 10^4)$



Rysunek 7. Histogram dla rozkładu jednorodnego w trójwymiarowej kuli $K^3(0,1)$. $(N = 10^7)$

4. Wnioski

Na rysunkach (1,2) widzimy że generatory U_1, U_2 wylosowali liczby pseudolosowe, ale małe parametry a oraz m spowodowali dość silną korelację elementów oraz okresowość otrzymanych ciągów. Na rysunku (3) widzimy że pomiędzy elementami wylosowanymi generatorem U_3 nie ma dużej zależności, co świadczy o tym, że spośród trzech generatorów, U_3 jest najlepszy. Na rysunku (4a) możemy zaobserwować to, że za pomocą metody Boxa-Mullera udało się nam wygenerować wektory o rozkładzie normalnym, ponieważ punkty są rozłożone na obwodzie sfery. Na rysunku (4b) punkty są rozmieszczone równomiernie wewnątrz kuli(im ciemniejszy kolor punktu, tym bliżej do centrum kuli). Na histogramach (rysunki 5-7) można zauważyć że jeśli próbek (N) jest mało, to rozkład gęstości jest mocno niestabilny.