Laboratorio de Métodos Numéricos - Segundo cuatrimestre 2014 - Viernes 10 de Octubre

---

Introducción

En el mundo de las finanzas existen muchos problemas relacionados con los métodos numéricos. Un ejemplo de esto es la búsqueda del portfolio con menor varianza posible. Esto significa encontrar la forma de invertir en un conjunto de acciones de manera de conseguir la menor varianza posible, lo cual se suele asociar al hecho de una inversión menos riesgosa.

En este caso, intentaremos resolver el problema para un conjunto de 3 acciones, de las cuales conocemos sus valores esperados de retorno, sus varianzas y sus covarianzas.

El siguiente vector representa los valores esperados de las 3 acciones a tener en cuenta

$$\mu = [0{,}0427 \;\; 0{,}0015 \;\; 0{,}0285] \tag{1}$$

La siguiente matriz de covarianza, condensa la información de las varianzas y covarianzas de las acciones involucradas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}1^2 & 0{,}0018 & 0{,}0011 \\ 0{,}0018 & 0{,}1044^2 & 0{,}0026 \\ 0{,}0011 & 0{,}0026 & 0{,}1411^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si definimos a $x \in \mathbb{R}^3$ como el vector que representa la inversión en cada una de las 3 acciones, podemos definir el problema de encontrar el portfolio de mínima varianza de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x^t \Sigma x \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^t x = 1 \end{array} \tag{3}$$

Donde la función objetivo representa la varianza del portfolio y la restricción se encuentra para indicar que se posee una cantidad finita fija para invertir en las 3 acciones.

Siendo un problema de optimización con restricciones por igualdad, conocemos métodos para resolver este tipo de problemas.

Multiplicadores de Lagrange

Planteando la solución mediante Lagrange, nos queda la minimización de la siguiente función

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x^t \Sigma x + \lambda(\mathbf{1}^t x - 1) \tag{4}$$

Reescribiendo, nos queda

$$x_1^2 + \sigma_1^2 + x_2^2 + \sigma_2^2 + x_3^2 + \sigma_3^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23} + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \tag{5}$$

Ahora tenemos un problema sin restricciones. Igualando el gradiente a cero queda

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1\sigma_1^2 + 2x_2\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{13} + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2\sigma_2^2 + 2x_1\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{23} + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2x_3\sigma_3^2 + 2x_1\sigma_{13} + 2x_2\sigma_{23} + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Las ecuaciones del gradiente presentadas se pueden resumir en el siguiente sistema

$$
\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & 2\sigma_{23} & 1 \\ 2\sigma_{13} & 2\sigma_{23} & 2\sigma_3^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Este sistema se puede reescribir de la siguiente manera

$$
\begin{pmatrix} 2\Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Una opción es resolver este sistema para obtener la solución, pero la matriz asociada a esta alternativa no cumple con las propiedades necesarias para poder aplicar los métodos iterativos vistos en la materia.

Utilizando las ecuaciones del gradiente, y agrupando convenientemente los términos, podemos llegar a que la resolución del sistema se logra por el siguiente camino. Definiendo

$$
y = \Sigma^{-1}\mathbf{1} \tag{7}
$$

Se puede ver que la solución se puede calcular de la siguiente manera

$$
x = \frac{y}{\mathbf{1}^t y} \tag{8}
$$

En este caso, el sistema a resolver involucra a la matriz inversa de la matriz de covarianza que sí posee propiedades interesantes.

Enunciado

El objetivo principal de este taller es resolver el problema planteado mediante los métodos revisados anteriormente. Para esto se utilizarán convenientemente los métodos de resolución de sistemas lineales vistos en la materia.

Se debe:

- Enunciar dos propiedades para corroborar si los sistemas a resolver pueden ser resueltos mediante Jacobi o Gauss-Seidel.
- Rellenar *jacobi.m* para que dicha función tome una matriz A, dos vectores b y x_0 y resuelva el sistema $Ax = b$ mediante el método de Jacobi, utilizando a x_0 como vector inicial. Las iteraciones se deben resolver no matricialmente, sino despejando las sucesivas soluciones obtenidas.

- Rellenar *gausssei.m* para que dicha función tome una matriz A, dos vectores b y x_0 y resuelva el sistema $Ax = b$ mediante el método de Gauss-Seidel, utilizando a x_0 como vector inicial. Las iteraciones deben ser matriciales y no se debe despejar las sucesivas soluciones obtenidas.
- Rellenar *householder.m* para que dicha función tome una matriz A, un vector b y resuelva el sistema $Ax = b$ mediante la factorización QR , calculada con transformaciones de Householder. La complejidad temporal del método debe pertenecer a $\mathcal{O}(n^3)$.
- Rellenar *Taller2.m* para resolver el problema planteado con los diferentes métodos propuestos.

Evaluación:

- Coloquio con los docentes durante la clase
- En caso de no asistir a clase, se debe entregar la resolución del taller por escrito hasta el Viernes 17 de Octubre