1. Iteración de Newton

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$x_1 = x_0 - \frac{a(x_0)^3+b(x_0)^2+c(x_0)+d}{3a(x_0)^2+2b(x_0)+c}$
$f \in C^2$ por ser polinómica. Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, entonces existe un entorno $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ tal que si x_0 pertenece a ese entorno, la sucesión x_i converge cuadráticamente.

Si no, puede no converger o converger linealmente. En este caso no se puede asegurar que exista el entorno (por ejemplo, con $f(x) = x^3$, el único α tal que $f(\alpha) = 0$ no cumple que $f'(\alpha) \neq 0$).

2. Teorema de punto fijo

Sea $g[a, b] \rightarrow [a, b]$ continua, existe punto fijo de g en $[a, b]$, es decir, un x tal que $g(x) = x$

Si g es derivable y $|g'(x)| \leq k < 1$, el punto fijo es único.

Para usar esto para encontrar si una sucesión converge:

Sea g continua con derivada de módulo menor a 1. $\forall x_0 \in [a, b]$, la sucesión $g(x_n) = x_{n+1}$ converge al único punto fijo.

Demostración:

1) $\{X_{n+1}\} \in [a, b]$ entonces $X_{n+1} = g(X_n)$ vive en el $[a, b]$.
2) Sea p el punto fijo de g (Único), quiero ver que $|X_{n+1} - p| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.
$|X_{n+1} - p| = |g(X_n) - g(p)| = |g'(\sigma)||X_n - p|$ (Teorema del valor medio)
$\leq K|X_n - p| = K|g(x_{n-1}) - g(p)| \leq K^2|X_{n-1} - p|... \leq K^{n+1}|X_0 - p| \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leq |X_{n+1} - p| \leq K^{n+1}|X_0 - p|$ Como $K < 1 \Rightarrow K^{n+1}|X_0 - p| \rightarrow 0 \Rightarrow |X_{n+1} - p| \rightarrow 0$ Como queríamos ver. Entonces converge a donde quiero.

Las condiciones dadas para existencia o unicidad son suficientes. Es decir que si no se cumple que g vaya de $[a, b]$ en $[a, b]$ o que su derivada sea acotada, no se puede asegurar la convergencia de la sucesión.